

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA METODOLOGIA PARA A OBTENÇÃO DE RESPOSTAS SEMI-ANALÍTICAS PARA  
FLEXÃO LINEAR E NÃO-LINEAR DE PLACAS SEMI-ESPESSAS

por

Tales de Vargas Lisbôa

Dissertação para a obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, julho de 2009

UMA METODOLOGIA PARA A OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES DE FLEXÃO LINEAR E  
NÃO-LINEAR DE PLACAS SEMI-ESPESSAS

por

Tales de Vargas Lisbôa

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Prof. Dr. Virginia Maria Rosito D'Avila

Prof. Dr. Horácio Antônio Vielmo

Coordenador do Promec

Porto Alegre, 28 de julho de 2009

*Aos meus queridos pais Reginaldo e Magda e  
aos meus irmãos Caio e Tatiana.*

*“Quando tomamos consciência de nosso papel,  
mesmo o mais obscuro, só então somos felizes.  
Só então podemos viver em paz e morrer em paz,  
pois o que dá sentido à vida dá um sentido à morte”*

*Antoine de Saint-Exupéry*

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer aos meus pais, Reginaldo Trindade Lisbôa e Magda Roselaine de Vargas Lisbôa. Seu suporte foi imprescindível para a conclusão deste trabalho. Suas qualidades me incentivaram a fazer um bom trabalho durante o mestrado e ser um bom profissional. Vocês simplesmente foram maravilhosos quando entendiam meu mau humor, falta de tempo, entre outras coisas. Não tenho palavras para descrever o quanto vocês foram importantes. Agradecer também aos meus irmãos Caio de Vargas Lisbôa e Tatiana de Vargas Lisbôa. O primeiro pelo grande apoio à distância e pelo exemplo de inteligência e firmeza. A segunda pelo exemplo de trabalho duro e vontade de fazer melhor e sempre o melhor. Graças ao suporte familiar que recebi, pude concluir este trabalho no tempo proposto.

Agradecer aos professores Ignacio Iturrioz e André Casagrande pela minha iniciação à pesquisa. Por culpa deles, decidi seguir a carreira de pesquisador. Seguindo a mesma linha, gostaria de agradecer a todos os professores e bolsistas de doutorado, mestrado e de iniciação científica do Grupo de Mecânica Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Todos vocês criam um clima onde se aprende por osmose e um lugar maravilhoso de se trabalhar. Em especial, gostaria de agradecer ao engenheiro Felipe Stumpf e a engenheira Carla Anflor (Tales! Tales! Tales!) pela paciência com minha pessoa com relação às várias horas que passamos juntos na mesma sala. Também gostaria de agradecer ao futuro engenheiro André Markus pelo auxílio na manutenção dos computadores do laboratório e pelos ótimos momentos de convívio.

Além disso, não posso deixar de agradecer aos meus colegas de Colégio Militar: Otávio Fortes, Diogo da Luz e Thiago Fhür e da graduação: Luciano Coelho e Cassiano Gaiardo que sempre me tiraram da dedicação do meu trabalho por algumas horas de lazer. Isso foi muito importante para que o presente autor mantivesse a sanidade e algum tipo de convívio social.

Por fim, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério José Marczak. Com certeza este trabalho não seria realizado se não fosse sua belíssima orientação. Propondo um trabalho muito interessante pude compreender as várias faces da Mecânica dos Sólidos que mesmo depois de séculos de estudos, ainda abre portas para pesquisas maravilhosas. Agradeço-o também por se preocupar com minha formação, não sendo só o orientador deste trabalho como também o sendo do meu mestrado por inteiro e, é claro, da minha recente e futura carreira de pesquisador.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia para obtenção de *benchmarks* e prontuários de soluções para flexão de placas semi-espessas sob grandes deslocamentos. O modelo de placa de Mindlin foi o empregado para considerar a deformação cisalhante, e soluções semi-analíticas foram obtidas através de uma variação do método de Rayleigh-Ritz. O método, denominado *pb-2*, facilita a imposição das condições de contorno cinemáticas, ampliando consideravelmente a aplicabilidade do método de Rayleigh-Ritz convencional. A metodologia foi implementada utilizando programas de computação simbólica, o que permitiu a obtenção de soluções analíticas aproximadas para diversos problemas lineares. A geração de soluções similares no âmbito não linear não foi possível, e neste caso recorreu-se a ajuste de parâmetros para obtenção de superfícies de resposta representativas de um grande número de análises realizadas através do método dos elementos finitos. Esta abordagem permitiu incorporar às soluções as diversas variáveis que influenciam na resposta, particularmente a espessura, razão de aspecto da placa e a compressibilidade do material. Uma nova parametrização do carregamento transversal foi proposta a fim de minimizar a influência da compressibilidade nos resultados para deslocamento central da placa, levando assim a soluções parecidas com as já reportadas para placas finas. Curvas carga  $\times$  deslocamento podem assim ser extraídas diretamente dos ajustes realizados. Resultados para diversos casos de geometria e condições de contorno foram comparados com soluções disponíveis na literatura, mostrando boa concordância.

## ABSTRACT

### “A METHODOLOGY FOR THE ACHIEVEMENT OF SEMI-ANALYTICAL RESPONSE FOR LINEAR AND NONLINEAR BENDING OF THICK PLATES”

This work presents a methodology for generating of benchmark solutions and reference formulas for large displacement analysis of thick plates under bending. The Mindlin's plate model was used to take into account the shear deformability, and semi-analytical solutions were obtained through a variation of the Rayleigh-Ritz method. The method, called *pb-2*, facilitates the imposition of kinematically admissible conditions, extending considerably the applicability of the conventional Rayleigh-Ritz method. The methodology was implemented in a symbolic computation program, and approximated analytical solutions were generated for linear cases. Similar solutions for non-linear problems were not possible, and in such cases response surfaces were obtained using data provided by finite element analysis. The approach allowed incorporating explicitly to the approximate solution the influence of parameter such as thickness of the plate, aspect ratio of the plate, and the compressibility of the material. A new non-dimensional loading is proposed in order to minimize the influence of the compressibility on the response surfaces for central displacement, leading to displacement solutions similar to those reported for thin plates. Load  $\times$  displacement curves can be extracted directly from the fitted response. Results for several cases of geometry and boundary conditions are compared with other available solutions, and good agreement was found.

## ÍNDICE

1.	Introdução.....	1
1.1	Considerações Iniciais.....	1
1.2	Evolução Histórica das Teorias de Placas.....	4
1.3	Outras Considerações.....	9
1.4	Revisão Bibliográfica.....	12
1.5	Objetivos do Trabalho.....	20
1.6	Organização do Texto.....	21
2.	Flexão Linear e Não-linear de Placas de Mindlin.....	23
2.1	Sistema de Equações para o Sistema Não-linear.....	23
2.1.1	Domínio do Sistema.....	23
2.1.2	Campo de Deslocamentos.....	24
2.1.3	Campo de Deformações.....	24
2.1.4	Relações Constitutivas.....	26
2.1.5	Tensões Resultantes.....	28
2.1.6	Equações de Equilíbrio e Condições de contorno.....	29
2.2	Equações de Flexão Linear de Placas de Mindlin.....	31
2.2.1	Campo de Deslocamentos.....	32
2.2.2	Campo de Deformações.....	32
2.2.3	Relações Constitutivas e Tensões Resultantes.....	33
2.2.4	Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno.....	33
3.	O Método <i>pb-2</i> .....	35
3.1	Introdução do Método.....	35
3.1.1	Parametrização da Geometria do Sistema.....	39
3.1.2	Cálculo da Energia de Deformação Interna e do Trabalho Externo.....	40
3.2	Formulação Matricial.....	43
3.2.1	Simplificação do Sistema para a Resposta linear.....	46
3.3	Adimensionalização do Sistema.....	48
3.4	Método de Solução.....	49
3.4.1	Solução Direta.....	50
3.4.2	Método de Newton-Raphson Modificado.....	51
3.4.3	Fluxograma do Programa.....	53



3.5	Soluções Procuradas.....	56
4.	Ajuste de Parâmetros.....	58
4.1	Parâmetros das Análises.....	58
4.1.1	Condições de Contorno.....	59
4.1.2	Parâmetros Constitutivos.....	59
4.1.3	Parâmetros Geométricos.....	60
4.1.4	Carregamento.....	62
4.1.5	Elemento Finito.....	65
4.2	Metodologia.....	66
4.2.1	Equações Gerais.....	66
4.2.2	Equações Independentes do Coeficiente de Poisson.....	71
5.	Resultados.....	73
5.1	Análise Linear.....	73
5.1.1	Soluções Numéricas.....	74
5.1.2	Solução Semi-analítica.....	84
5.2	Análise Não-Linear.....	87
5.3	Resultados dos Ajustes de Parâmetros.....	88
5.3.1	Equação Genérica para Placas SSSS.....	88
5.3.2	Equação Genéricas para placas CCCC.....	94
5.3.3	Equações Invariantes ao coeficiente de Poisson.....	95
6.	Conclusões.....	98
A.I	Decomposição do Vetor de Deformações Não-Lineares.....	106
A.II	Montagem do Sistema Matricial de Flexão Não-Linear.....	108
A.III	Constantes das Equações Genéricas para Análise Não-Linear no MEF.....	109

## Lista de Símbolos

### Arábicos

$a$	lado menor da placa;
$a_i$	constantes para a interpolação da curva $w \times h$ ;
$b$	lado maior da placa;
$b_i$	forças de corpo; constantes de interpolação das curvas carga $\times$ deslocamento;
$c_{te}$	constante qualquer;
$\mathbf{c}_p$	vetores de constantes do método $pb-2$ ;
$d_{ij}$	constantes de interpolação da superfície carga $\times$ deslocamento $\times$ coeficiente de Poisson;
$e_{ijk}$	constantes de interpolação da equação carga $\times$ deslocamento $\times$ coeficiente de Poisson $\times$ razão de aspecto de espessura;
$f_{ijkl}$	constantes de interpolação da equação carga $\times$ deslocamento $\times$ coeficiente de Poisson $\times$ razão de aspecto de espessura $\times$ razão de aspecto de lados;
$g_p$	funções de aplicação das condições de contorno do método $pb-2$ ;
$h$	espessura da placa;
$m_\alpha$	momentos distribuídos aplicados à superfície média;
$m,n$	índices que tomam valores inteiros de 1 a $nc$ ;
$nc$	número de constantes de interpolação dos deslocamentos;
$ncc$	número de condições de contorno por eixo coordenado;
$nf$	número de forças pontuais aplicadas à superfície média;
$ng$	grau do polinômio primário da base de interpolação;
$np$	número de pontos da análise via MEF na curva $\bar{w}_2 \times \eta$ ;
$nr$	grau do polinômio de interpolação para $r$ ;
$nw$	grau do polinômio de interpolação para $\bar{w}_2$ ;
$n\eta$	grau do polinômio de interpolação para $\eta$ ;
$n\nu$	grau do polinômio de interpolação para $\nu$ ;
$o_{ij}$	constantes para as curvas carga $\times$ deslocamento $\times$ razão de aspecto da espessura com independência do coeficiente de Poisson;
$i, j, k, l$	índices que tomam valores inteiros de 1 a 3, quando não dito o contrário;
$p, q$	índices que tomam valores inteiros entre 1 e 5;

$p_i$	constantes para as curvas carga $\times$ deslocamento com independência do coeficiente de Poisson;
$q_\alpha$	carregamentos membranais distribuídos aplicados à superfície média;
$q_3$	carregamento transversal distribuído aplicado à superfície média;
$\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$	carregamentos transversais adimensionalizados;
$r$	razão de aspecto de lados;
$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$	vetores de desacoplamento das constantes nas deformações não-lineares;
$s_1, s_2$	eixos coordenados no sistema natural;
$t$	razão da progressão geométrica do carregamento transversal;
$t_{ijk}$	constantes para as curvas carga $\times$ deslocamento $\times$ razão de aspecto da espessura $\times$ razão de aspecto de lados com independência do coeficiente de Poisson;
$u_1, u_2, u_3$	deslocamentos membranal na direção 1 e 2 e deslocamento transversal;
$u_n, u_t$	deslocamento normal e tangencial a um contorno retilíneo;
$x, y$	eixos coordenados;
$x_{cc}$	posição da condição de contorno;
$x_i, x_{i+1}$	conjunto de resposta do método de Newton-Raphson algébrico;
$x_1, x_2, x_3$	eixos coordenados no sistema cartesiano;
$w, w_0$	deslocamento transversal e deslocamento transversal no centro da placa.
$\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, w_c$	adimensionais para o deslocamento transversal da placa;
$A$	rigidez de membrana de placas;
$\mathbf{B}_L$	matriz das funções de interpolação para as deformações lineares;
$\mathbf{B}_\alpha$	matriz das funções de interpolação para as deformações não-lineares;
$\mathbf{B}_{1\alpha}$	matrizes de modificação das funções de interpolação das deformações não-lineares;
$\mathbf{C}$	matriz constitutiva isotrópica linear;
$\mathbf{C}'$	matriz constitutiva isotrópica linear invariante ao módulo de elasticidade transversal;
$\mathbf{D}_L$	operador linear aplicado às deformações lineares;
$\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$	operadores lineares aplicados às deformações não-lineares;
$D$	rigidez de flexão de placas ou constante de Sophie;
$\mathbf{E}$	vetor de deformações;

$E_{ij}$	tensor de deformações de Green;
$\mathbf{F}$	vetor de forças pontuais;
$G$	módulo de elasticidade transversal;
$\mathbf{G}$	matriz que agrupa as funções de aplicação das condições de contorno do método <i>pb-2</i> ;
$\mathbf{H}$	matriz de desacoplamento da coordenada transversal para deformações lineares;
$\mathbf{J}, \mathbf{J}'$	matrizes para o método de Newton-Raphson modificado;
$\mathbf{N}$	matriz das funções de interpolação cinematicamente admissíveis;
$N_{\alpha\beta}$	tensões resultantes membranais;
$M_{\alpha\beta}$	tensões resultantes de flexão e torção;
$\bar{M}_{\alpha\beta}, {}^1\bar{M}_{\alpha\beta}$	adimensional para as tensões resultantes de flexão e torção;
${}^cM_{\alpha\beta}$	adimensional de convergência das tensões resultantes de flexão e torção;
$\mathbf{M}$	matriz que agrupa todas as funções de interpolação do método <i>pb-2</i> ;
$\mathbf{P}$	vetor carregamento;
$Q_\alpha$	tensões resultantes de cisalhamento transversal;
$\bar{Q}_\alpha, {}^1\bar{Q}_\alpha, {}^cQ_\alpha$	adimensional para as tensões resultantes de cisalhamento transversal;
$\mathbf{R}_L, \mathbf{R}_{AC}, \mathbf{R}_{NL}$	matrizes constitutivas linear, de acoplamento e não-linear;
$\tilde{\mathbf{R}}_L, \tilde{\mathbf{R}}_{AC}, \tilde{\mathbf{R}}_{NL}$	matrizes constitutivas linear, de acoplamento e não-linear, invariantes ao módulo de elasticidade transversal;
$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$	matrizes de desacoplamento das constantes nas deformações não-lineares;
$T_i$	forças de superfície;
$U_1, U_2, U_3$	deslocamentos da superfície média em relação aos eixos coordenados;
$U_e$	energia de deformação;
$\mathbf{V}_\alpha$	vetores de modificação das funções de interpolação das deformações não-lineares;
$V_e$	potencial de energia externa;
$\mathbf{Z}$	matriz de desacoplamento da coordenada transversal para deformações não-lineares;

## Gregos

$\alpha, \beta, \gamma$	índices que tomam valores de 1 e 2;
$\delta_{cc}$	expoente de aplicação das condições de contorno do método <i>pb-2</i> ;
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	deformações no plano da superfície média;
$\zeta_{\alpha}$	deformações cisalhantes transversais;
$\eta$	razão de aspecto da espessura;
$\eta_{\alpha}$	normais ao contorno curvo;
$\theta_1, \theta_2$	rotações normais as direções 1 e 2;
$\theta_n, \theta_t$	rotação tangencial e normal a um contorno retilíneo;
$\kappa^2$	fator de correção da tensão cisalhante transversal;
$\kappa_{\alpha\beta}$	deformações de flexão;
$\lambda$	vetor que agrupa todas as constantes do método <i>pb-2</i> ;
$\mu, \lambda$	1º e 2º parâmetro constitutivo de Lamé;
$\nu$	coeficiente de Poisson;
$\rho$	fator de relaxação;
$\sigma$	vetor de tensões;
$\sigma_{ij}$	tensor de tensões de Cauchy;
$\sigma_{\alpha\beta}$	tensões <i>in-plane</i> ;
$\sigma_{\alpha 3}$	tensões <i>out-plane</i> ;
$\bar{\sigma}_{\alpha 3}$	tensões <i>out-plane</i> corrigidas;
$\phi$	vetor de deformações não-lineares;
$\phi_{\alpha\beta}$	deformações não-lineares;
$\chi$	vetor de deformações lineares;
$\psi_p$	funções de interpolação cinematicamente admissíveis do método <i>pb-2</i> ;
$\omega_p$	funções de interpolação do método <i>pb-2</i> ;
$\bar{\omega}_{\gamma\alpha}$	relação entre as variações do sistema natural com o sistema cartesiano;
$\Gamma$	contorno da placa;
$\Gamma_t$	contorno onde são conhecidos as trações da placa;
$\Gamma_u$	contorno onde são conhecidos dos deslocamentos;
$\Delta_i$	vetor deslocamentos;

$\Delta$	vetor deslocamentos;
$\Lambda$	área da superfície média;
$\Pi$	funcional da mínima energia potencial;
$\Omega$	volume da placa;

### **Operadores Matemáticos e outros Símbolos**

$\delta_{ij}$	função delta de Kronecker;
$\delta(\bullet)$	variação;
$(\bullet)^L$	variável linear;
$(\bullet)^T, (\bullet)^{-1}$	operação de transposição matricial, operação de inversa matricial;
$(\hat{\bullet})$	variável interpolada;
$f(\bullet), f'(\bullet)$	função e derivada da função com variável independente $\bullet$ ;

## Índice de Figuras

Figura 1.1 - Consideração de Euler para vibração de placas .....	4
Figura 1.2 - Fibras transversais deformadas: (a) Teoria Clássica de Placas e (b) Teoria de placas de Mindlin .....	8
Figura 1.3 - Esquema das condições de contorno em placas de Lévy .....	15
Figura 2.1 - Domínio do objeto de estudo.....	23
Figura 2.2 - Graus de Liberdade do problema .....	24
Figura 2.3 - Distribuição dos esforços na placa em relação sua superfície deformada.....	28
Figura 3.1 - Graus de liberdade do contorno retilíneo da placa .....	36
Figura 3.2 - Exemplos de Condições de Contorno.....	38
Figura 3.3 - Parametrização da Geometria: (a) Coordenadas cartesianas e (b) Coordenadas naturais .....	40
Figura 3.4 - Fluxograma do programa .....	53
Figura 3.5 - Esquema de convergência das equações diferenciais de membrana e flexão: (a) sistema convergente (b) sistema divergente sem fator de relaxação e convergente com este fator .....	55
Figura 4.1 - $\bar{w}_2 \times \nu$ ( $\bar{q}_1 = 14,41$ e $r = 1$ ).....	60
Figura 4.2 - $\bar{w}_2 \times r$ ( $\nu = 0,3$ e $\eta = 0,15$ ) .....	61
Figura 4.3 - $\bar{w}_2 \times \eta$ ( $\nu = 0,1$ e $r = 1$ ) .....	61
Figura 4.4 - Exemplo de uma curva carga $\times$ deslocamento: (a) baixos valores de $\eta$ (b) altos valores de $\eta$ .....	64
Figura 4.5 - Elemento SHELL281 [Ansys v.11, 2008].....	65
Figura 4.6 - Esquema da obtenção das equações genéricas .....	67
Figura 5.1 - Convergência para placas SSSS: (a) $r = 1$ (b) $r = 2$ e (c) $r = 5$ .....	76
Figura 5.2 - Convergência das tensões resultantes em placas quadradas SSSS ( $\eta = 0,001$ ) .....	77
Figura 5.3 - Convergência de placas CCCC: (a) $r = 1$ (b) $r = 2$ e (c) $r = 5$ .....	79
Figura 5.4 - Convergência para placas SFSF: (a) $r = 1$ , (b) $r = 2$ e (c) $r = 5$ .....	80
Figura 5.5 - Curvatura anticlástica no domínio parametrizado em $r = 5$ : (a) $u_3$ (b) $M_{11}$ .....	82
Figura 5.6 - Convergência de placas SCSC: (a) $r = 1$ , (b) $r = 2$ e (c) $r = 5$ .....	83
Figura 5.7 - Placas SSSS: (a) $r = 1$ e (b) $r = 2$ .....	86
Figura 5.8 - Placas SCSC: (a) $r = 1$ e (b) $r = 2$ .....	86
Figura 5.9 - Placa SFSF: $r = 1$ .....	87
Figura 5.10 - Exemplo de interpolação da curva carga $\times$ deslocamento: $r = 1$ .....	89

Figura 5.11 - Exemplo de Superfície de Resposta .....	90
Figura 5.12 - Resultados da Equação Genérica para Placas Finas.....	91
Figura 5.13 - Superfície de resposta ( $r = 1$ e $\nu = 0,3$ ) .....	92
Figura 5.14 - Curvas cinemáticas para diversas espessuras ( $\nu = 0,3$ e $r = 1$ ).....	94
Figura 5.15 - Gráficos das soluções de placas CCCC.....	95
Figura 5.16 - Demonstração da invariância do coeficiente de Poisson através da troca do adimensional de carga .....	96
Figura 5.17 - Comparação dos resultados ( $r = 1$ ).....	96
Figura 5.18 - Outros resultados ( $r = 1$ ).....	97



## Índice de Tabelas

Tabela 4.1 - $\bar{q}_1$ máximo em relação as razões $\eta$ e condições de contorno .....	63
Tabela 5.1 - $\bar{w}_3$ no centro de placas SSSS ( $\nu = 0,3$ e $ng = 13$ ) .....	76
Tabela 5.2 - Tensões resultantes em placas quadradas SSSS ( $\nu = 0,3$ ) .....	77
Tabela 5.3 - $\bar{w}_3$ no centro de placas CCCC ( $\nu = 0,3$ ) .....	79
Tabela 5.4 - Tensões resultantes para placas quadradas CCCC.....	80
Tabela 5.5 - $\bar{w}_3$ em placas quadradas SFSF ( $\nu = 0,3$ ).....	81
Tabela 5.6 - Tensões resultantes em placas quadradas SFSF ( $\nu = 0,3$ ).....	81
Tabela 5.7 - $\bar{w}_3$ em placas SCSC ( $\nu = 0,3$ ).....	83
Tabela 5.8 - Tensões Resultantes em placas quadradas SCSC ( $\nu = 0,3$ ) .....	84
Tabela 5.9 - Resultados das análises semi-analíticas (equação (3.65)).....	85
Tabela 5.10 - Convergência da solução semi-analítica às soluções de placas finas .....	85
Tabela 6.1 - Trajetórias de equilíbrio para placas SSSS ( $\eta = 0,1$ e $r = 1$ ) .....	100
Tabela 6.2 - Trajetórias de equilíbrio de placas SSSS variando $\eta$ ( $\nu = 0,3$ e $r = 2$ ).....	100
Tabela AIII.1 - Constantes $f_{ijkl}$ para placas SSSS .....	109
Tabela AIII.2 - Constantes $f_{ijkl}$ para placas CCCC .....	110

## **1. INTRODUÇÃO**

### **1.1 Considerações Iniciais**

O uso de ferramentas numéricas para a simulação do comportamento cinemático e dinâmico de componentes mecânicos tem crescido devido o aumento exponencial da potência computacional e da redução dos seus custos. Essas ferramentas auxiliam o projeto mecânico, pois encontram de forma aproximada a resposta das equações diferenciais que governam o problema. No entanto, a redução dos coeficientes de segurança devido a questões econômicas, de projeto, e/ou de desempenho faz com que uma boa predição da resposta do sistema seja indispensável. Desse modo, uma boa verificação da ferramenta numérica utilizada para a solução dessas equações diferenciais é necessária a fim de provar que a mesma dê resultados próximos às suas soluções analíticas.

Dentre as ferramentas numéricas existentes, as mais utilizadas são os métodos que discretizam o domínio das equações diferenciais. O Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) são exemplos de ferramentas como estas. O MEF tem sido muito aceito devido sua versatilidade. Desde sua criação, diversos avanços foram obtidos nesse método. Inúmeros tipos de elementos, cada qual com sua teoria estrutural embutida além de diversas considerações como a possibilidade de inserir a influência da temperatura, análises multifísicas (ou seja, considerando diversos efeitos em conjunto como temperatura, campos magnéticos, interação fluido-estrutura, etc) bem como a possibilidade de se considerar não-linearidades materiais e geométricas. No entanto, como as variáveis primárias de um modelo estrutural baseado em elementos finitos são, geralmente, os deslocamentos dos nós da malha, um problema surge: sendo a relação entre o deslocamento e deformação uma derivada, perde-se um grau no polinômio de interpolação, ou seja, se a função de interpolação dos deslocamentos é linear dentro do elemento, suas tensões/deformações serão constantes dentro

deste. Sendo assim, a convergência da resposta nos deslocamentos não é a mesma que nas tensões, sendo que a da última pode ser muito mais lenta que a da primeira. O MEC elimina este problema calculando na mesma ordem tensões e deslocamentos. Ainda, devido sua formulação, podem-se aplicar tanto condições de contorno essenciais quanto naturais. No entanto, como calcula as variáveis apenas no contorno, necessita que todo este seja integrado novamente para cada ponto de interesse dentro do domínio. Também, se houver qualquer efeito dentro do domínio, como carregamentos concentrados ou distribuídos, entre outros, estes devem ser levados ao contorno ou deve-se introduzir uma malha de células que discretizem estes efeitos. Por trabalhar com integrais singulares e hiper-singulares, é necessária uma matemática mais refinada, tornando-se então, um método de nicho. Além desses dois métodos, existem outros como o método das Tiras Finitas, método das Diferenças Finitas, Volumes Finitos, etc. Todos esses métodos têm suas particularidades, porém todos discretizam o domínio/contorno. Dependendo da complexidade deste último, a discretização pode incorrer em alto custo computacional.

Para contornar o problema de discretização do domínio, podem-se utilizar métodos nos quais não é necessária a divisão deste por elementos. Estes métodos são erroneamente chamados de “meshless” e tem atraído diversos cientistas pelo fato de que o mesmo não necessita de discretização por elementos, como os métodos acima descritos, e sim, apenas a aplicação de uma nuvem de pontos sobre o domínio. Estes métodos utilizam funções de interpolação para cada ponto da malha se diferenciando dos métodos citados anteriormente, que as utilizam dentro de cada um dos seus elementos.

Como dito, existem diversas ferramentas numéricas para a obtenção de respostas aproximadas para diversas equações diferenciais, cada uma com suas vantagens e desvantagens. Ainda assim, o estudo de soluções analíticas e semi-analíticas é necessário para o teste de novas ferramentas bem como a verificação das já existentes. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é a obtenção de soluções semi-analíticas para as equações diferenciais que governam o comportamento de placas semi-espessas sob deslocamentos infinitesimais e finitos. A dificuldade de obtenção de soluções analíticas exatas para estes casos é grande devido à complexidade das equações diferenciais. Soluções semi-analíticas são mais simples de se obter, em relação as soluções analíticas. As primeiras obedecem as condições de contorno das equações diferenciais e resultam em respostas dependentes de um ou mais parâmetros do problema. Através de uma discretização numérica ou interpolação do domínio global, pode-se obter soluções que dependam de valores iniciais como propriedades constitutivas e geométricas. Como o advento da computação simbólica, a obtenção de soluções deste tipo ficou menos custosa computacionalmente. No entanto, em comparação a soluções estritamente numéricas, o custo

dessa solução ainda é alto. Devido esta dificuldade, projetistas têm utilizado os modelos numéricos supramencionados para a simulação do comportamento mecânico de tal modo que programas comerciais foram criados para suprir a demanda por essas ferramentas.

Com a popularização desses programas, projetistas têm confiado nos resultados obtidos em suas análises. Essas ferramentas têm sido testadas a fim de provar sua convergência à solução analítica. No entanto, devido a vários efeitos inseridos nos modelos numéricos, como não-linearidade geométrica, plasticidade, etc., soluções analíticas/semi-analíticas não são encontradas na literatura para comparação. Dessa forma, desenvolvedores têm verificado e ajustado seus modelos a testes experimentais. Além disso, eles têm comparado seus resultados com soluções analíticas de outras teorias estruturais. Ou seja, quando a geometria do componente tende a uma outra teoria estrutural. Um exemplo disto é quando uma placa tem uma razão de aspecto de lados muito alta, podendo assim ser comparada a uma viga e vice-versa, ou quando uma placa tem uma razão de aspecto da espessura muito alta ao ponto de poder ser comparada com a elasticidade tridimensional e vice-versa. A ocorrência de erros nessas comparações pode ser grande devido ao fato das equações diferenciais serem diferentes e suas respectivas condições de contorno incompatíveis. A tentativa de se equivaler esses modelos estruturais podem gerar diferenças nos resultados e discussões sobre a relação entre as condições de contorno das teorias confrontadas. De tal forma, as soluções analíticas e semi-analíticas para a averiguação das respostas de ferramentas numéricas devem considerar as mesmas equações diferenciais e suas respectivas condições de contorno.

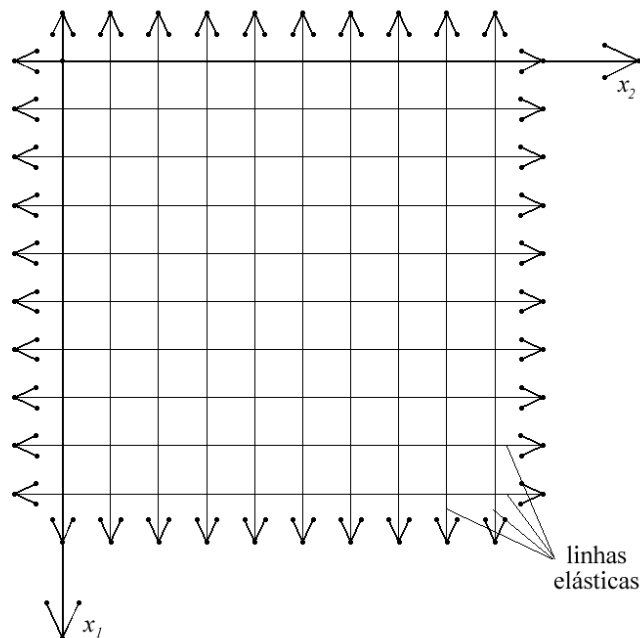
Estudos na tentativa de obtenção dessas soluções têm diminuído por causa da dificuldade de obtenção das mesmas bem como a criação de outros campos de pesquisa devido ao aumento da potência computacional, diminuindo os custos de algumas soluções numéricas. Diversas áreas na Mecânica dos Sólidos são escassas de soluções exatas. Uma delas ocorre quando o tensor de deformações de Green, que contém termos não-lineares, é utilizado na relação deslocamento-deformação. Isso é feito para considerar os efeitos de deslocamentos finitos em análises nas quais a hipótese de pequenos deslocamentos deixa de ser válida. A inserção de termos não-lineares no sistema gera dificuldades no desacoplamento das equações diferenciais. Se para casos lineares, ou seja, com deslocamentos infinitesimais, soluções analíticas ou semi-analíticas das equações diferenciais são escassas e disponíveis para apenas casos específicos, considerando grandes deslocamentos essas se tornam limitadas a poucos casos. Mesmo com o aumento da potência computacional e a utilização de metodologias estritamente numéricas, a solução deste sistema pode ser complicada devido a inúmeros erros que podem ser inseridos e ao grande custo computacional. Não convergência e instabilidade da resposta são alguns exemplos de problemas

que podem ser encontrados na tentativa de obtenção da solução de sistemas de equações diferenciais não-lineares.

Como já dito, um dos objetivos deste trabalho é a obtenção de soluções semi-analíticas de placas semi-espessas, tanto para deslocamentos infinitesimais quanto para grandes deslocamentos. Diversos livros descrevem o desenvolvimento das teorias de placas, desde as clássicas até as teorias de alta ordem, e os métodos utilizados para a obtenção de soluções das equações diferenciais propostas por estes modelos. Uma síntese da história do desenvolvimento das teorias de placas foi produzida a partir dos livros de Stephen Timoshenko [1953], Isaac Todhunter e Karl Pearson [2005], Eduard Ventsel e Theodor Krauthammer [2001] e Karl-Eugen Kurter [2008].

## 1.2 Evolução Histórica das Teorias de Placas

O primeiro pesquisador a estudar o problema de flexão de superfícies elásticas foi o matemático suíço Leonard Euler. Em 1767, para descrever a vibração de uma membrana flexível, ele considerou que esta é um sistema de cordas esticadas perpendiculares entre si (Figura 1.1). Cada corda funcionava como uma viga. Com isso, Euler obteve a equação diferencial de segunda ordem, tanto no termo espacial quanto no termo temporal.



**Figura 1.1 - Consideração de Euler para vibração de placas**

Em 1789, Jaques Bernoulli, sobrinho de Daniel Bernoulli, desenvolvedor da teoria de vigas que recebe seu nome, considerou a mesma relação do sistema de cordas sugerida por Euler (Figura 1.1) e obteve uma equação diferencial de quarta ordem no termo espacial para a deflexão

de placas sob um carregamento transversal. Bernoulli sabia que esta equação era apenas uma aproximação, pois se a utilizasse em um sistema de cordas não-perpendicular, os resultados seriam diferentes para casos com as mesmas condições de contorno em relação a um sistema com as cordas perpendiculares. No entanto, este trabalho foi a primeira tentativa de solução em problemas envolvendo placas.

Em 1809, Chladni, cientista alemão que trabalhava com acústica, realizou experimentos relacionados com vibrações de placas. O pesquisador aplicou uma fina camada de areia sobre a superfície da placa e conseguiu determinar linhas nodais para vários modos e suas frequências correspondentes.

Instigado pelos resultados experimentais de Chladni, o imperador Napoleão sugeriu que a Academia Francesa oferecesse um prêmio ao pesquisador que desenvolvesse a teoria de vibração de placas e que o mesmo comparasse seus resultados teóricos aos resultados de Chladni. Em 1811, perto da data da competição, apenas um candidato apresentou-se: a matemática francesa Marie-Sophie Germain.

Germain conhecia o trabalho de Euler em relação a curvas elásticas, que utilizava o cálculo variacional para a solução das equações diferenciais vindas da integral que representava a energia de deformação de flexão. Ela procedeu da mesma forma considerando que a energia de deformação da placa era uma função das curvaturas principais desta, deformada. Porém, Germain cometeu um erro e não pode obter a equação diferencial correta. Lagrange, seu mentor e um dos juízes da competição, encontrou esse erro e fazendo algumas correções obteve a primeira equação geral de placas conhecida como equação de placas de Germain-Lagrange. Germain, neste ano, não venceu o concurso. Por mais duas vezes, a Academia Francesa propôs o tema e apenas na última, ela venceu. Ainda sim, os juízes não ficaram satisfeitos com seu trabalho pela falta de uma explicação física sobre a expressão utilizada para o cálculo da energia de deformação em função das curvaturas principais.

Poisson, em 1814, resolveu este último problema propondo que a superfície média da placa era composta de partículas nas quais forças moleculares atuavam. Obtendo o equilíbrio do sistema de partículas, Poisson obteve a mesma equação de placas proposta por Germain-Lagrange. No entanto, como foi considerado que todas as partículas estavam na superfície média da placa, a constante de rigidez de flexão de placa obtida foi proporcional ao quadrado da espessura e não ao cubo, como deve ser.

Navier, em um trabalho apresentado na Academia em 1820 e publicado em 1823, como Poisson, considerou que a placa era composta de partículas. Porém, ele as distribuiu também na direção da espessura. Sendo assim, Navier obteve a equação diferencial para qualquer

carregamento transversal. Além disso, ele obteve a rigidez de flexão de placas correta, ou seja, cubicamente proporcional à espessura. Não sendo o bastante, ele foi o primeiro a resolver problemas de placas com resultados satisfatórios utilizando séries de Fourier.

Gustave Kirchhoff, em 1850, publicou um importante trabalho em relação a teoria de placas. Neste, Kirchhoff considerou duas hipóteses que hoje são largamente aceitas: as linhas perpendiculares à superfície média na configuração indeformada permanecem perpendiculares à esta superfície na configuração deformada (hipótese da normalidade das fibras transversais); os elementos da superfície média não sofrem deslocamento longitudinal sob a hipótese de pequenos deslocamentos (desacoplamento membrana-flexão) quando excitados transversalmente. Com elas, pode-se obter a correta expressão para a energia potencial de uma placa em flexão. Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, ele obteve a mesma equação que Germain-Lagrange e Navier. Além disso, ele demonstrou que apenas duas condições de contorno eram necessárias (esforço cortante e momento fletor, como condições de contorno naturais e deslocamento transversal e rotação tangencial, como condições de contorno essenciais) e não três como Poisson supôs (esforço cortante, momento fletor e momento torçor, como condições de contorno naturais e deslocamento transversal, rotação normal e tangencial, como condições de contorno essenciais). Porém o mesmo não deu um significado físico para esta condensação.

Em 1867, William Thomson (Lord Kelvin) publicou a explicação física da condensação das duas condições de contorno, já mostradas por Kirchhoff. Utilizando o princípio de sistemas de carregamentos estaticamente equivalentes de Saint-Venant, Thomson mostrou que o momento torsor pode ser transformado em um esforço cortante estaticamente equivalente nas arestas da placa. Portanto, provou-se que cada aresta da placa só necessitava de duas condições de contorno, quando as hipóteses de Germain eram utilizadas.

M. Lévy, em 1899, publicou um trabalho sobre a teoria de placas no qual resolveu com sucesso os casos nos quais duas arestas opostas estão simplesmente apoiadas e as outras arestas tendo quaisquer condições de contorno em placas retangulares. Ainda hoje, placas com condições de contorno similares as estudadas por Lévy recebem seu nome e seu método é aplicado para soluções de placas em diversas outras teorias.

No final do século 19, construtores de embarcações alteraram seus métodos de construção trocando a madeira pelo aço. Isso fez com que houvesse o desenvolvimento muito grande nas teorias de placas. Cientistas russos, em particular, Krylov e Bubnov, contribuíram para desenvolvimento da teoria de placas finas com as rigidezes de flexão e membrana. O último foi o primeiro a introduzir o moderno conceito de classificação de placas.

S. P. Timoshenko contribuiu de forma significativa para a teoria de placas e para

aplicações. Além de ter numerosas contribuições para a solução de placas circulares considerando grandes deslocamentos e formulação de problemas de estabilidade elástica, ele e Woinowsky-Krieger publicaram um livro [Timoshenko e Krieger, 1959] que se tornou uma referência no estudo de placas finas com soluções para diversas condições de contorno e carregamentos.

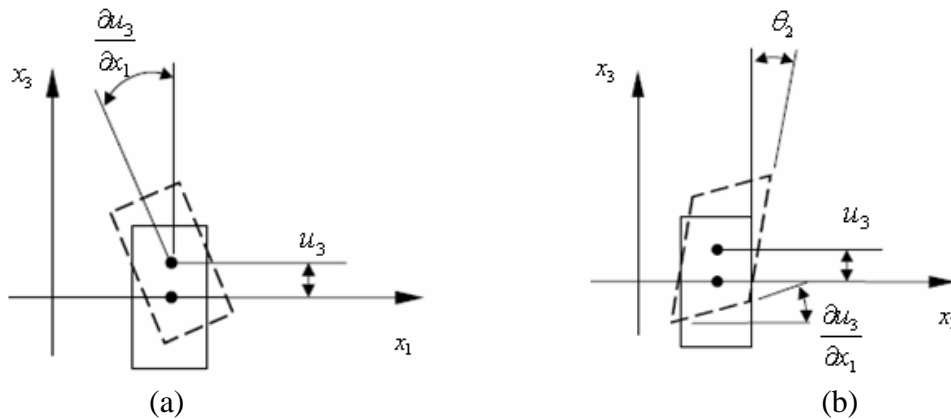
Outros pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento das teorias de placas. Entre eles estão Henky, Huber, von Kármán, Nadai e Föppl. O primeiro, em 1921, teve contribuições na teoria de grandes deslocamentos de placas finas e semi-espessas. Nadai, em 1915, estudou teoricamente e experimentalmente a precisão da teoria de placas de Kirchhoff. No seu estudo, ele considerou diferentes tipos de singularidade como forças concentradas, efeitos de suportes pontuais, entre outras. As equações gerais para placas muito finas foram simplificadas por Föppl, em livros publicados em 1944 e 1951. No entanto, a forma final das equações diferenciais considerando grandes deslocamentos para esta teoria foi desenvolvida por von Kármán, em trabalhos publicados nos anos de 1910 e 1932.

Todos esses estudiosos contribuíram para o estudo do que é hoje denominada teoria clássica de placas, ou teoria de placas de Kirchhoff. Porém, esta negligencia o efeito da deformação cisalhante quando considera que as fibras perpendiculares a superfície média da placa na configuração indeformada permaneçam perpendiculares a esta superfície na configuração deformada, como já dito. Esta hipótese considerada por Kirchhoff acopla o deslocamento transversal às rotações normais à placa. Isso torna o equacionamento dessa teoria mais simples. No entanto, a consideração do acoplamento gera uma rigidez espúria que obriga as normais à superfície inderformada permaneçam normais a esta, deformada. Ademais, devido a esse acoplamento, é necessária a condensação de duas condições de contorno em uma, como citado por Kirchhoff e explicado por Lord Kelvin. Não sendo o bastante, o requerimento estático de equilíbrio não é sempre satisfeito sendo necessário o uso de forças pontuais, nos vértices de placas poligonais. Apesar de todos esses aspectos negativos citados, esta teoria pode ser aplicada em placas com baixas razões de aspecto da espessura ( $h/a$  ou  $\eta$ , onde  $h$  e  $a$  são a espessura e largura da placa, respectivamente). O valor limite desta razão diverge de autores para autores Reddy [1999] e Dym e Shames [1979] citam que este valor pode chegar até  $1/20$  e  $1/10$ , respectivamente.

Reissner [1945; 1947] publicou dois artigos sobre o efeito da deformação cisalhante transversal sobre placas sob flexão. Nesses artigos, Reissner desenvolveu uma teoria de placas que considera o efeito dessa deformação. Esta teoria foi desenvolvida a partir do princípio variacional da energia de deformação complementar considerando uma distribuição de tensão



devido à flexão, linear, e uma distribuição devido à tensão cisalhante transversal, parabólica. Sendo assim, Reissner publicou a primeira teoria de placas semi-espessas. O campo de deslocamentos obtido por Reissner é muito semelhante ao da teoria clássica de placas, quando é considerado a média dos deslocamentos. Além disso, os problemas que surgem devido o acoplamento do deslocamento transversal às rotações normais, como condensação de condições de contorno e forças pontuais nas pontas da placa poligonais, não aparecem nesta teoria.



**Figura 1.2 - Fibras transversais deformadas: (a) Teoria Clássica de Placas e (b) Teoria de placas de Mindlin**

Seguindo a mesma linha, Mindlin [1951], sugeriu outra teoria na qual o efeito da deformação cisalhante é considerado. Mindlin relaxou a hipótese de normalidade das fibras transversais de Kirchhoff, conforme a Figura 1.2. Pode-se ver a diferença entre a deformada das fibras transversais em cada uma das teorias. Permitindo a rotação das fibras normais à superfície média, Mindlin inseriu uma deformação cisalhante transversal constante em relação à espessura. No entanto, o valor líquido obtido da tensão cisalhante transversal, integrando-se esta ao longo da espessura, diferia de soluções da elasticidade tridimensional. Para compensar este efeito, Mindlin inseriu o fator de correção do cisalhamento transversal, que minora o módulo de elasticidade transversal a fim de corrigir essa incoerência. Além disso, este considerou que a placa era inextensível na direção da espessura. Sendo assim, o campo de deslocamentos obtido por Mindlin é semelhante ao campo de deslocamentos obtido por Kirchhoff. Porém, a rotação da placa não é uma função do deslocamento transversal, como considera a teoria clássica.

Nas décadas posteriores, devido o aumento de uso de chapas reforçadas e placas laminadas, a consideração da deformação cisalhante transversal apenas constante ou parabólica não pôde ser utilizada devido a maior complexidade do cisalhamento nessas situações. Sendo assim, pesquisadores desenvolveram inúmeras teorias de placas que consideram a tensão cisalhante em ordem maior que a teoria de placas de Mindlin ou Reissner. Entre eles estão Reddy [1984], Lo et al. [1977], Reissner [1983] e outros. Conforme Lo et. al. [1977], essas teorias são

baseadas em campos de deslocamentos nos quais séries de potência através da espessura são truncadas, tanto para termos de deslocamentos longitudinais quanto para o deslocamento transversal. Quanto maior o grau do polinômio em função da espessura, maior será a precisão da teoria em capturar o cisalhamento transversal. Além disso, nessas teorias não é necessário adotar um fator de correção do módulo de cisalhamento, como na teoria de Mindlin. Porém, com o aumento desse grau, dois problemas surgem: uma maior necessidade computacional para a solução do sistema, pois o grau do polinômio em função da espessura age diretamente no grau das equações diferenciais e variáveis com nenhum sentido físico, ou seja, perde-se o caráter físico que se tinha em teorias da placas como a clássica, Mindlin e Reissner. Ademais, os resultados para placas não-compostas dessas últimas teorias são semelhantes aos das teorias de alta ordem com um custo computacional menor. Ou seja, ainda é válido aplicar teorias de baixa ordem em placas homogêneas nas quais os resultados se aproximam muito aos da elasticidade tridimensional.

Para a teoria clássica de placas, existem soluções analíticas, tanto para pequenos deslocamentos quanto para deslocamentos finitos, para diversas condições de contorno e carregamento, como já dito acima. Já para placas semi-espessas de baixa ordem, ou seja, para teoria de Mindlin e Reissner, essas são escassas e limitadas a deslocamentos infinitesimais e certas condições de contorno, a não ser para alguns casos de placas circulares. Além disso, são baseadas em séries infinitas e nem sempre podem ser truncadas nos termos iniciais para uma convergência satisfatória [Lee et. al., 2002; Wang et. al., 2001], como em várias soluções de placas finas [Timoshenko e Krieger, 1959].

### **1.3 Outras Considerações**

Para a solução analíticas/semi-analíticas das equações diferenciais parciais de placas finas bem como semi-espessas é usado, comumente, o método da expansão por séries de Fourier e métodos como o de Garlekin e Rayleigh-Ritz. O método da expansão por séries Fourier foi introduzido por Navier, para a solução das equações diferenciais de Germain-Lagrange. Este se baseia na interpolação dos graus de liberdade por séries trigonométricas. Além disso, pode-se usar formulações semi-inversas com esta metodologia [Levy, 1942]. Já o método de Rayleigh-Ritz minimiza o funcional da mínima energia potencial. Os graus de liberdade do conjunto de equações diferenciais são interpoladas por uma combinação linear de funções cinematicamente admissíveis. Comumente, as funções de interpolação escolhidas para o uso deste método são funções polinomiais e trigonométricas. Através do princípio variacional citado, obtêm-se as constantes da combinação linear das variáveis interpoladas de modo que se obtenha a mínima energia potencial de deformação [Singh e Elaghabash, 2003]. O método de Garlekin ortogonaliza

o erro da aproximação das funções de interpolação de modo com que as constantes da combinação sejam ótimas [Banerjee e Datta, 1981]. Este último método é base para MEF. Além desses três métodos, existem os métodos de solução direta das equações diferenciais como método de separação de variáveis, etc. Para estes, as equações diferenciais devem ser trabalhadas de forma que fiquem com a forma das soluções desses métodos. O trabalho algébrico para essa equiparação pode ser muito extenso e muitas vezes impossível.

Apesar da grande dificuldade de obtenção de soluções analíticas e semi-analíticas, estas são importantes para desenvolver *benchmarks* para novos métodos numéricos e para os já existentes. O uso dessas soluções também pode ser estendido para conselhos normativos, podendo assim reduzir os coeficientes de segurança intrínsecos nessas normas. Ademais, podem ser utilizadas por projetistas, em casos mais simples, para a obtenção rápida dos deslocamentos e tensões resultantes sem a necessidade de um modelamento numérico e todas as conseqüências por traz deste, como convergência de malha, entre outras. Porém essas soluções não substituem os métodos numéricos já mencionados. Soluções analíticas e semi-analíticas são desenvolvidas para casos simples, muitas vezes sem aplicação prática. Do outro lado, os métodos numéricos adquiriram uma grande versatilidade. Desta forma, essas soluções não substituem os mesmos. Apenas corroboram sua utilização na forma de confiança nos resultados obtidos por esses modelos.

No entanto, diferentemente do projetista, o programador dessas ferramentas numéricas deve dar mais atenção a estas soluções. Os resultados numéricos obtidos devem se aproximar muito dos resultados analíticos ou semi-analíticos. Além disso, deve-se tomar muito cuidado com a relação a elasticidade tridimensional. Quando a geometria do sistema se aproxima das geometrias de outras teorias estruturais, como placas e cascas (uma dimensão muito menor que as outras) ou vigas e barras (uma dimensão muito maior que as outras), muitas vezes suas soluções da teoria tridimensional não são ótimas, quando comparadas as soluções dessas teorias estruturais. Portanto, para o desenvolvedor, é interessante a existência de soluções analíticas ou semi-analíticas para as equações diferenciais que o mesmo está tentando resolver de forma estritamente numérica.

Ainda há a grande questão do uso de modelos numéricos baseados apenas na elasticidade tridimensional. Devido o aumento da potência computacional, muitos desenvolvedores têm dado atenção a modelos tridimensionais considerando que estes não têm considerações/simplificações dos demais modelos baseados em teorias estruturais. Essa afirmativa é válida. No entanto, para um modelo tridimensional ser sensível a efeitos importantes, é necessário que a malha seja muito refinada, aumentando o custo computacional. Um exemplo disso é a flexão de placas. Para a

consideração completa do momento fletor, são necessários, no mínimo de 3 a 6 elementos quadráticos (função de interpolação quadrática) na direção da espessura, considerando o MEF. Além disso, como ocorre em muitas variáveis de placas submetidas às teorias de alta ordem, perde-se o sentido físico de parâmetros como esforços internos e tensões resultantes. Estes dados, que são gerados naturalmente nas teorias uni e bidimensionais, devem ser obtidos através a integração das tensões ao longo da espessura. Muitas vezes, essas tensões devem, antes da integração, ser linearizadas para a aplicação de normas de conselhos normativos. De tal forma, é válido o uso de teorias estruturais que reduzem uma ou duas dimensões do sistema e que, muitas vezes, simplificam as equações diferenciais e as condições de contorno do componente em análise.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é obter soluções semi-analíticas para placas de Mindlin nas quais são considerados deslocamentos infinitesimais e finitos. O método de Rayleigh-Ritz, também chamado de MRR, será utilizado para a obtenção da solução das equações diferenciais. Como já dito, este método utiliza funções de interpolação globais. Utilizando o Princípio da Mínima Energia Potencial, encontram-se os pesos de cada uma das funções de interpolação através da minimização do funcional gerado pela diferença entre a energia de deformação interna e do trabalho externo. Uma modificação do método, chamada de *pb-2*, permite a aplicação das condições de contorno de forma mais automática, resolvendo parcialmente uma dificuldade do MRR. Sendo assim, a base para interpolar a resposta não precisa obedecer, inicialmente, às condições de contorno. Através deste método, é possível a obtenção de respostas analíticas ou semi-analíticas globais.

O método *pb-2* é muito usado por pesquisadores em áreas como estática, dinâmica, flambagem, pós-flambagem, etc. de placas pela sua versatilidade e fácil implementação. Com uma metodologia consistente, o mesmo pode gerar respostas semi-analíticas através do uso da computação simbólica. Esta consegue trabalhar com variáveis literais ao invés de dados estritamente numéricos. No entanto, necessita de algoritmos especiais e uma grande manipulação de processamento e memória. Com o aumento da potência computacional, a obtenção de soluções semi-analíticas fica mais acessível. Muitos softwares comerciais têm implementado nos seus códigos a possibilidade de trabalho com computação simbólica, como Maple, Mathematica e Matlab. No entanto, mesmo com o aumento da potência computacional e o avanço de softwares de computação simbólica, soluções semi-analíticas são caras computacionalmente e muitas vezes impossíveis devido as características do problema.

Além do uso do MRR para a solução de placas, o Método dos Elementos Finitos será utilizado para o desenvolvimento de equações de resposta para o caso não-linear de placas semi-

espessas sob um carregamento transversal uniforme, em função de parâmetros constitutivos e geométricos da placa. Essas superfícies serão montadas a fim de se obter o maior número de soluções das equações diferenciais não-lineares em apenas algumas equações de resposta. Um estudo sobre o efeito da compressibilidade do material na resposta final também será feito de forma que as equações de resposta independam do coeficiente de Poisson.

#### 1.4 Revisão Bibliográfica

Como já descrito na introdução, diversos pesquisadores alinharam suas pesquisas na solução de problemas envolvendo placas. Diversas teorias que tentam prever o comportamento desses componentes foram desenvolvidas. Entre as teorias de baixa ordem, as mais aceitas são a teoria clássica, a teoria de Mindlin [1951] e a teoria de Reissner [1945; 1947]. Como já dito, as duas últimas consideram a deformação gerada pelo esforço cisalhante transversal. A primeira considera que as normais a superfície média permaneçam normais na superfície média deformada (Figura 1.2). Com esta hipótese, Kirchhoff força o acoplamento entre o deslocamento e as rotações gerando uma rigidez virtual na flexão de placas. Ainda, com este acoplamento, a deformação cisalhante é negligenciada. Além disso, três condições de contorno devem ser contraídas em duas, como cita Reissner [1944]. Ademais, em placas poligonais, o requerimento estático só é satisfeito através da aplicação de cargas pontuais nos vértices da superfície elástica. Como Reissner [1944; 1945] demonstra, nenhum desses efeitos aparecem quando se considera a deformação cisalhante transversal no cálculo da energia de deformação da placa. Ou seja, são necessárias três condições de contorno por aresta, ou seja, momento fletor, momento torçor e cisalhante transversal, considerando condições de contorno essenciais e deslocamento transversal, rotação normal e tangencial, considerando condições de contorno naturais, e o requerimento estático de equilíbrio é satisfeito naturalmente. No entanto, os efeitos da deformação cisalhante transversal são sensíveis apenas quando a razão de aspecto é relativamente alta ou quando há carregamentos pontuais aplicados sobre a superfície média. Ou seja, quando a placa é fina e os carregamentos aplicados são distribuídos, ainda é válida a aplicação da teoria clássica. No entanto, o valor limite da razão de aspecto da espessura para a aplicabilidade dessa teoria varia de caso para caso.

Dym e Shames [1979] fazem um estudo criterioso em relação à ordem do cisalhamento transversal e da tensão normal à superfície média em relação à espessura da placa a fim de obter um limite para a utilização da teoria clássica. Os autores comentam que os esforços cisalhantes transversais são menores para qualquer ordem de  $\eta$ , em relação o esforço cisalhante contido no plano médio da placa. A tensão normal ao plano médio da placa é menor em uma ordem de  $\eta^2$

que as outras tensões normais. Então, concluem os autores, a teoria clássica pode ser usada até uma ordem de  $\eta < 0,1$ . Acima deste valor ou em casos onde o carregamento é concentrado, é interessante o uso de teorias que considerem o cisalhamento transversal. Com relação a cargas pontuais, Craig [1987] faz um estudo utilizando este tipo de carregamento em placas semi-espessas usando a teoria de Reissner. Este autor chega a mesma conclusão que Dym e Shames [1979], na qual, quando há carregamentos pontuais aplicados, não pode-se aplicar a teoria clássica. Já Reddy [1999] comenta que a teoria de placas de Kirchhoff dá resultados satisfatórios até uma razão de aspecto,  $\eta$ , menor que  $1/20$ , devido o fato que a mesma superestima os valores de carga crítica para flambagem e frequências naturais de placas.

Com relação a soluções de placas finas, Timoshenko e Krieger [1959] publicaram um livro que contém uma série de soluções de placas finas sob diversos tipos de carregamento e condições de contorno. Além de tabelas com as soluções, os autores demonstram a metodologia utilizada para a obtenção dos deslocamentos transversais e tensões resultantes. Porém este trabalho engloba apenas placas finas. Considerando os problemas já citados que são encontrados com esta teoria, pesquisadores voltaram seus estudos para teorias nas quais o cisalhamento transversal é levado em consideração na energia de deformação da placa.

Dessa forma, duas teorias de placas são criadas nos meados dos anos 50. Reissner [1945; 1947] publicou os primeiros artigos que sugeriam uma nova teoria de placas com deformação cisalhante transversal. O autor considerou que a tensão devido à flexão variava linearmente e a tensão devido o cisalhante transversal variava parabolicamente ao longo da espessura. Aplicou o campo de tensões sugerido no princípio variacional da energia de deformação complementar (teorema do Mínimo Trabalho) e obteve um campo de deslocamentos semelhante ao da teoria clássica, considerando a média dos deslocamentos. Dessa forma, Reissner desenvolveu a primeira teoria de placas na qual a deformação cisalhante transversal não era negligenciada.

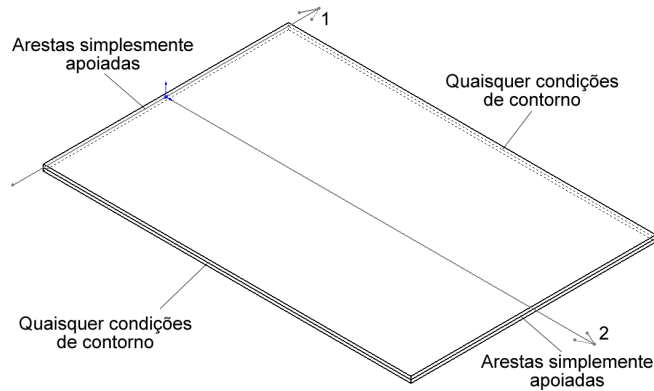
Mindlin [1951] propôs uma segunda teoria de placas que levava em consideração a deformação cisalhante transversal. Mindlin relaxou a hipótese de normalidade das fibras transversais de Kirchhoff (Figura 1.2b). Permitindo que essas seções normais rotacionassem constantemente em relação à espessura, o autor inseriu no sistema uma deformação cisalhante transversal constante. Porém, o valor líquido da tensão cisalhante transversal obtida por sua teoria diferia de resultados analíticos da elasticidade tridimensional. Sendo assim, o autor adotou um fator de correção do módulo de cisalhamento transversal, aplicado na obtenção das tensões cisalhantes transversais. Como a relaxação da hipótese adotada por Mindlin não alterava o campo de deslocamentos, este ficou semelhante ao da teoria clássica e a teoria de Reissner.

Sendo assim, devido à grande semelhança entre os campos de deslocamentos das duas

teorias que consideravam o cisalhamento transversal, muitos autores citavam as teorias como “Teoria de Mindlin-Reissner”. Fica claro, como já citado anteriormente, que a teoria de Reissner foi obtida através de uma hipótese de distribuição de tensões ao longo da espessura. Inserindo essa suposição de campos de tensão no princípio do Mínimo Trabalho de Castigliano [Reissner, 1944; Reissner, 1945; Reissner 1947], Reissner obteve as equações diferenciais e as condições de contorno de sua teoria. Já a teoria de Mindlin [1951] foi obtida através de uma hipótese cinemática. Como descreve Wang et. al. [2001], ambas teorias foram formuladas através de princípios e hipóteses diferentes, portanto não podem ser igualadas, em geral.

Antes de iniciar a revisão sobre as soluções encontradas por diversos pesquisadores, é necessária a explicação do método de Lévy e suas considerações. Autores como Lee et. al. [2002], Wang et al. [2001], Kant [1983], Kant e Hinton [1983], Timoshenko e Krieger [1959] e Cooke e Levinson [1980] utilizam a metodologia desenvolvida por Lévy, em 1899, para a obtenção das soluções analíticas/numéricas das equações diferenciais das teorias de baixa ordem, ou seja, Mindlin, Reissner e também da teoria clássica.

A metodologia de Lévy simplifica a forma de obtenção das soluções das equações diferenciais pois elimina o cálculo dos coeficientes de interpolação de uma das direções da placa, impondo uma função que rege as variáveis intrínsecas. Basicamente, a interpolação do sistema é feita por funções trigonométricas em uma direção e hiperbólica na outra, condicionando assim, que duas arestas opostas tenham condições de contorno simplesmente apoiadas, conforme mostrado na Figura 1.3. Isso pode gerar falta de simetria em respostas nas quais as condições de contorno com o carregamento são simétricos. Essa não-simetria é encontrada em soluções numéricas [Kant, 1983; Kant e Hinton, 1983] quanto em soluções analíticas [Lee et. al., 2002; Wang et. al., 2001]. Isso acontece porque a direção interpolada por funções trigonométricas necessita de muitos termos a mais que a direção na qual é interpolada por funções hiperbólicas. No entanto, problemas numéricos como *overflow* e *underflow* podem ser encontrados utilizando a última família de funções [Taylor e Govindjee, 2004]. Maiores explicações sobre o método de Lévy podem ser encontradas em Timoshenko e Krieger [1959].



**Figura 1.3 - Esquema das condições de contorno em placas de Lévy**

Também, antes de se iniciar um estudo sobre as soluções de placas finas e semi-espessas, é necessário inserir a nomenclatura utilizada pelo presente trabalho com as relações de contorno classicamente empregadas em placas. Essas podem ser três: livre, apoiada e engastada. A nomenclatura adotada pelo presente trabalho, quando comentado sobre as condições de contorno é livre (F), apoiada (S) e engastada (C). Por exemplo, em uma placa com duas arestas opostas apoiadas e as outras duas engastadas, a condição de contorno desta placa pode ser dita como SCSC. Outro exemplo é quando a condição de contorno da placa é duas arestas consecutivas apoiadas e as outras duas livres. Esta seria descrita como SSFF. A relação de cada tipo de condições de contorno (livre, simplesmente apoiada e engastada) com relação aos graus de liberdade no contorno da placa será apresentada no capítulo 3.

Os pesquisadores, então, voltaram sua atenção para a solução das equações diferenciais dessas novas teorias. Salerno e Goldberg [1960] resolvem, para placas de Lévy e carregamento uniformemente distribuído, as equações de placas de Reissner. Os autores, inicialmente, resolvem as equações para os esforços cisalhantes transversais para qualquer tipo de condição de contorno. Aplicada estas, os autores obtêm, em função de séries trigonométricas, tanto os esforços cisalhantes transversais quanto o deslocamento transversal. As condições de contorno abordadas neste trabalho foram SSSS e SFSF. Concluem o artigo comentando sobre a propriedade da teoria de Reissner [1944; 1945; 1947], também observada na teoria de Mindlin, na qual não é necessária a aplicação de cargas concentradas nos cantos de placas poligonais, como na teoria clássica de placas.

Kant e Hinton [1983], utilizando o Método da Segmentação em conjunto com a metodologia de Lévy, obtêm soluções numéricas para placas de Mindlin com condições de contorno de placas de Lévy. Fazem um grande estudo comparativo com as soluções de placas finas além de comprovar a convergência da solução obtida. Cooke e Levinson [1983] publicaram um artigo com soluções analíticas para placas de Mindlin aplicando a metodologia de Lévy. No



entanto, conforme Lee et. al. [2002], os autores cometeram um erro na simplificação do seu sistema. Cooke e Levinson [1983] consideram que a diferença entre as derivadas das rotações em relação ao eixo normal a estas podia ser negligenciada. Esta simplificação também é utilizada por Lim et. al. [1988] e é usada para desacoplar as equações diferenciais para as rotações na teoria de Mindlin. No entanto, de acordo com Reddy [2001], a negligência deste termo pode gerar uma rigidez espúria indesejada na flexão de placas. Sendo assim, Lee et. al. [2002] prova que esta consideração só pode ser usada em placas de Navier, ou seja, placas SSSS.

Utilizando o método de diferenças finitas, Craig [1987], obtêm diversas soluções numéricas para placas de Reissner. Inicialmente, o autor aplica um carregamento uniforme à placa e compara seus resultados aos obtidos por Salerno e Goldberg [1960], demonstrando assim, o efeito da flexibilidade gerada na placa com o aumento da espessura, devido o efeito do cisalhamento transversal. Então, o autor explora o caso no qual um carregamento concentrado no centro da placa. Este gera tensões cisalhantes transversais que não podem ser negligenciadas, mesmo a baixas espessuras. Sob a razão de espessura citada por Reddy [1999] como uma razão limite para o uso da teoria clássica ( $\eta = 0,1$ ), o erro associado entre as teorias fica em torno de 15%, na deflexão central. Para placas com razão de aspecto da espessura  $\eta = 0,15$ , esse erro pode chegar até 35%. Além de verificar as diferenças em relação o deslocamento máximo, Craig [1987] analisou as diferenças entre as tensões da placa sob carregamento transversal uniforme e pontual. No primeiro, com uma razão de aspecto da espessura próxima de 0,1, as tensões de ambas as teorias ficaram próximas. Porém, conforme o autor, a presença do carregamento pontual cria uma grande concentração de tensão cisalhante transversal próxima a este. Como a teoria clássica não absorve este efeito, seus resultados são errados para este caso de carregamento. Além disso, este fator é majorado com o aumento da espessura da placa.

Após esses pesquisadores desenvolverem soluções numéricas para as teorias de Mindlin e Reissner, Lee et. al. [2002] e Wang et. al. [2001] desenvolveram soluções analíticas para as respectivas teorias. Lee et. al. [2002], através do conceito do carregamento equivalente, relaciona a teoria clássica com a teoria de Mindlin e obtêm soluções analíticas para a última utilizando o supramencionado método de Lévy. Sendo assim, os autores demonstram o erro cometido por Cooke e Levinson [1983] através de sua solução. Considerando o conceito de carregamento equivalente, novamente, os autores obtêm a relação entre a teoria clássica e a teoria de Reissner, obtendo a solução analítica da última também.

Diferente de Lee et. al. [2002], Wang et. al. [2001] relaciona diretamente a teoria de Mindlin com a teoria de Reissner, para, analiticamente e numericamente, apresentar as diferenças entre as duas. Utilizando o mesmo conceito de carregamento equivalente usado por

Lee et. al. [2002] e obtêm as relações entre o deslocamento transversal, momentos fletores e torsor e esforços cisalhantes transversais entre as duas teorias de baixa ordem.

Para placas SSSS, os autores demonstram que os esforços cisalhantes transversais são os mesmos. No entanto, o deslocamento transversal e os momentos fletores e torsor não são. Nos outros casos de condições de contorno, SCSC e SFSF, é mostrado que nem o deslocamento transversal nem as tensões resultantes são iguais. Com relação ao primeiro, como já dito, a teoria de Mindlin sempre fornece resultados de deslocamento transversal maiores que a teoria de Reissner. Ou seja, a teoria de Mindlin é mais flexível que a teoria de Reissner.

No entanto, apesar de Lee et. al. [2002] e Wang et. al. [2001] apresentassem soluções analíticas para ambas as teorias de baixa ordem, suas soluções são baseadas na metodologia de Lévy. Como já dito, esta pode apresentar assimetria em soluções que deveriam ser simétricas. Não está sendo dito que essas soluções são incorretas. Apenas que, para a direção na qual são usadas funções de interpolação trigonométricas, a taxa de convergência das tensões resultantes é menor que para a direção que as funções de interpolação hiperbólicas são utilizadas [2004]. Todos os artigos referenciados no presente trabalho que usam a metodologia de Lévy para a solução do sistema de equações diferenciais apresentam essa falta de simetria, principalmente nos esforços cisalhantes transversais. Dessa forma, para a obtenção das soluções analíticas perfeitamente simétricas é necessário um número de termos muito grande. Lee et. al. [2002] e Wang et. al. [2001] utilizam 40 termos para a obtenção das tensões resultantes e ainda assim, os esforços cisalhantes transversais não ficaram simétricos. Dessa forma, mostra-se que o método de Lévy facilita a obtenção da solução de placas, porém, perde-se a simetria do sistema e fixa-se duas condições de contorno em arestas opostas como simplesmente apoiada, ou seja, SxSx onde x é uma condição de contorno qualquer (F para livre, S para apoiada e C para engastadas).

Nota-se que, em todas as referências citadas, apenas Timoshenko e Krieger [1959] apresentam soluções para placas com as quatro arestas engastadas. A solução de placas com este tipo de condições de contorno é um pouco mais complexa. Superpõe-se a solução de placas de Navier com momentos aplicados nas arestas de forma que as rotações normais a estas sejam nulas. Timoshenko e Krieger [1959] resolvem inúmeros casos de carregamento para placas com todas as arestas engastadas. No entanto, Taylor e Govindjee [2004] demonstram que estas soluções são imprecisas. Devido o fato de que em Timoshenko e Krieger [1959] as soluções são baseadas em séries infinitas truncadas no primeiro termo, Taylor e Govindjee [2004] encontram erros no segundo dígito do momento fletor em y ( $M_y$ ) e no terceiro dígito no momento fletor em x ( $M_x$ ). Os últimos autores apresentam soluções para placas engastadas com até 10 dígitos significativos, para várias razões de lados. Ainda sim, ambas as soluções [Timoshenko e Krieger,

1959; Taylor e Govindjee, 2004] são para placas finas.

Levy [1942] desenvolveu um estudo sobre grandes deslocamentos em placas quadradas sob carregamento transversal. As condições de contorno utilizadas pelo autor são semelhantes à engastada. Porém, os deslocamentos longitudinais normais as arestas não foram fixados. Levy interpolou os deslocamentos com séries de Fourier e a função tensão com essas séries somadas a polinômios. Para inserir as condições de contorno de rotação nula, o autor aplica momentos nas arestas considerando que a rotação gerada por estes fosse nula, semelhantemente à metodologia utilizada por Timoshenko e Krieger [Timoshenko e Krieger, 1959]. Os resultados obtidos não puderam ser comparados por falta de soluções não-lineares de placas.

Berger [1955] simplifica as equações não-lineares de placas finas negligenciando o segundo invariante de deformação. Apesar do autor não encontrar uma explicação física para esta desconsideração, ele menciona que em soluções de placas circulares sob grandes deslocamentos, o segundo invariante não influencia significativamente no deslocamento transversal. Através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, o autor encontra as equações de equilíbrio e as suas respectivas condições de contorno. Devido a desconsideração do segundo invariante de deformação, as equações de equilíbrio puderam ser facilmente desacopladas. Utilizando o sistema sugerido, o autor resolve placas circulares e quadradas com arestas apoiadas (SSSS) e engastadas (CCCC).

Banerjee e Datta [1981], no entanto, citam que a negligência do segundo invariante proposta por Berger [1955] pode gerar resultados errôneos quando os deslocamentos paralelos à superfície média, no contorno desta, não forem fixados. Isto é, quando as arestas da placa forem móveis no plano da superfície média. Os autores sugerem um novo método de desacoplamento das equações diferenciais de placas finas, sem negligenciar o segundo invariante de deformação. Resolvem o sistema aplicando o método de Galerkin e obtém uma curva carga  $\times$  deslocamento parametrizada por dois coeficientes. Estes coeficientes dependem das condições de contorno e da geometria da placa. Apresentam resultados para placas circulares e quadradas, engastadas e apoiadas, com as arestas móveis e imóveis.

Rushton [1970] utiliza o método da Relaxação Dinâmica em conjunto com o Método de Diferenças Finitas para a obtenção da solução das equações diferenciais de placas finas com curvatura inicial, sob deslocamentos finitos. O autor resolve o sistema variando a curvatura inicial em placas engastadas e apoiadas. Seus resultados chegam a deslocamentos máximos na ordem de 6 vezes a espessura da placa. Além disso, o autor estuda a influência da curvatura inicial na rigidez de flambagem de placas e demonstra essa influência através das cargas críticas de instabilidade.

Nota-se que todos os pesquisadores citados exploram o caso de deslocamentos finitos em placas finas. Isso é devido ao fato, já mencionado, do acoplamento das rotações com o deslocamento transversal tornar mais fácil o equacionamento do problema.

Pica et. al. [1980] desenvolvem um elemento finito utilizando a teoria de Mindlin na sua formulação que absorve o efeito de grandes deslocamentos. Eles solucionam placas quadradas, rômicas, circulares e elípticas sob condições de contorno SSSS e CCCC. Por falta de referências, os autores utilizam os elementos finitos produzidos para a solução de placas finas sob grandes deslocamentos. Os resultados obtidos são comparados com as soluções encontradas na literatura.

Boresi e Wilson [1964], incluem o efeito do cisalhamento transversal na análise de placas circulares engastadas. Através da teoria de Reissner, os autores resolvem numericamente as equações e comentam que com um carregamento parametrizado em relação a uma razão de aspecto da espessura, ocorre um aumento de 5% na deflexão transversal da placa quando o cisalhante transversal é inserido na análise não-linear. Considerando os mesmo parâmetros, as tensões baixaram, porém menos de 2% quando esta tensão resultante é inserida.

Azizian e Dawe [1985] utilizaram o método das tiras finitas para a obtenção da solução de placas de Mindlin sob grandes deslocamentos. Resolvem placas SSSS e SCSC. Diferente de Pica et. al. [1980], os autores analisam placas semi-espessas com sua metodologia. Comparam resultados com espessuras diferentes e mostram o efeito do cisalhamento transversal, quando a espessura é maior.

Lim et. al. [1988] simplificam as equações da teoria de alta ordem de Reddy [1984] para aplica-las a casos lineares e não-lineares geométricos. A simplificação adotada pelos autores é semelhante a adotada por Cooke e Levinson [1983], porém comentam que esta consideração só pode ser adotada em placas quadradas, isotrópicas e com carregamentos e condições de contorno simétricas. Para o caso linear, os autores desacoplam os deslocamentos causados pela flexão e pelo cisalhamento transversal. Algebricamente, mostram que o deslocamento da placa pode ser escrito por duas equações diferenciais desacopladas: uma idêntica à equação diferencial de placas finas e outra em função dos deslocamentos causados pelo cisalhamento transversal. Como a primeira equação já tem soluções para diversas condições de contorno e tipos de carregamento [Timoshenko e Krieger, 1959], os autores apenas resolveram a segunda equação diferencial.

No entanto, para o caso não-linear, Lim et. al. [1988] não puderam desacoplar facilmente o sistema. Sendo assim, os autores interpolaram os deslocamentos de flexão e cisalhamento transversal em séries duplas de Fourier. Solucionam o sistema encontrando uma curva carga-deslocamento para placas SSSS e CCCC.

Da mesma forma que Lim et. al. [1988] utilizou uma teoria de alta ordem para a obtenção

da resposta de placas sob pequenos e grandes deslocamentos, Bencharif e Ng [1994a; 1994b] desenvolveram uma teoria tridimensional de placas semi-espessas considerando não-linearidade geométrica. Simplificam suas equações considerando pequenas rotações. Aplicam o método de diferenças finitas centrais e frontais para transformar o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações algébricas. Resolvem placas sob carregamento transversal uniforme e de condições de contorno SSSS e CCCC. Comparam seus resultados com soluções não-lineares de placas finas e obtêm ótimos resultados.

Singh e Elaghabash [2003], a partir da teoria de Mindlin, montam um sistema para a análise não-linear geométrica de placas quadrangulares não retangulares. Utilizando o método de Ritz para a solução do sistema que é interpolado por funções polinomiais. Para a aplicação das condições de contorno, os autores zeram manualmente as constantes que fariam com que a função global deixasse de ser cinematicamente admissível. Resolvem placas sob carregamento transversal uniforme e cargas pontuais no centro da placa. As condições de contorno abordadas pelos autores foram SSSS e CCCC. Obtêm resultados para placas finas quadrangulares e rômicas.

O método de Rayleigh-Ritz modificado, *pb-2*, é utilizado por diversos pesquisadores em várias áreas: Liew et. al. [1993] utiliza o método para a obtenção de frequências e modos de placas semi-espessas com várias condições de contorno. Devido a facilidade da modificação do método em aplicar condições de contorno essenciais, os autores puderam aplicar sua metodologia para 21 casos diferentes de condições de contorno. Neste artigo, os autores citam outros 7 trabalhos que utilizam o método *pb-2*, para a obtenção de respostas dinâmicas de placas. Kitipornchai et. al. [1994] aplica o método para a obtenção de modos e frequências naturais para placas semi-espessas trapezoidais. Wang e Aung [2007] o aplicam para a análise plástica de flambagem e pós-flambagem em placas semi-espessas.

## 1.5 Objetivos do Trabalho

Durante o período de pré-modelagem de um componente, o uso de soluções algébricas é comumente empregado para o assentamento de variáveis de projeto. Métodos estritamente numéricos, como os citados no capítulo 1, deixam de ser eficazes nesta etapa do projeto mecânico, pois necessitam que os parâmetros de projeto sejam muito bem definidos. Através da revisão bibliográfica (seção 1.4) pode-se notar a inexistência de soluções para placas semi-espessas de rápido uso, mesmo quando em regime linear. As soluções existentes, neste regime, são geradas através de séries infinitas contendo termos trigonométricos e trigonométricos hiperbólicos. Os autores necessitam de 40 termos desse somatório para a obtenção da convergência da resposta. Apesar da mesma ser analítica, esta perde praticidade de uso.

Desse modo, o objetivo deste trabalho é obter soluções semi-analíticas para placas de Mindlin para deslocamentos infinitesimais e finitos. O MRR foi utilizado para a obtenção da solução das equações diferenciais. O espaço polinomial será utilizado para a interpolação dos graus de liberdade do sistema linear e não-linear. As bases para a interpolação das variáveis independentes serão idênticas a fim de evitar o problema de falta de simetria encontrado em soluções analíticas já citadas [Lee et. al., 2002; Wang et. al., 2001]. Devido ao grande custo computacional necessário para a obtenção de uma resposta semi-analítica para carregamentos que geram grandes deslocamentos, superfícies de resposta foram criadas através da interpolação de soluções obtidas via MEF. Dessa forma foram geradas equações que regem o deslocamento transversal máximo de placas semi-espessas sob deslocamentos finitos. Estas equações compreendem deslocamentos transversais na ordem de 6 vezes a razão de aspecto da espessura. Um estudo com relação a modificação da parametrização do carregamento transversal será apresentado para que a influência do coeficiente de Poisson seja minimizada. Uma comparação com os resultados da literatura foi feita a fim de verificar a validade das metodologias propostas.

Com as equações propostas para o regime linear elástico (utilizando o método *pb-2* em conjunto com a computação simbólica) e não-linear elástico (interpolação de resultados via MEF), espera-se uma boa contribuição a engenheiros na pré-modelagem de seus produtos assim como um maior conhecimento da sensibilidade dos parâmetros de projeto com a resposta do sistema. Além disso, o uso dessas equações pode se estender para a verificação de ferramentas numéricas bem como para o uso em normas de engenharia.

## 1.6 Organização do Texto

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. O capítulo 2 descreve a metodologia usada para a obtenção da solução de placas de Mindlin considerando deslocamentos finitos e infinitesimais. Nele é desenvolvida a forma de obtenção da energia de deformação e o trabalho externo, matricialmente. No capítulo 3, é explicada a aplicação do método *pb-2* para a solução das equações diferenciais de placas de Mindlin, tanto para o caso linear bem como para o não-linear. Além disso, é apresentado os métodos numéricos utilizados na obtenção da solução do sistema. No capítulo 4, é utilizado o método dos Elementos Finitos para a obtenção das soluções de placas de Mindlin considerando grandes deslocamentos para vários casos alterando, como nos capítulos anteriores, parâmetros como geometria da placa e condições de contorno. No capítulo 5 são mostrados e discutidos os resultados obtidos com os métodos descritos nos capítulos anteriores. O capítulo 6 resume as principais conclusões obtidas neste trabalho e delinha alguns tópicos para a continuidade do presente trabalho.

Para um melhor entendimento do equacionamento, o presente trabalho é organizado na

seguinte forma:

- A notação indicial e matricial são usadas;
- A contração do somatório é sempre válida a não ser que seja explicitado o contrário;
- Os índices arábicos  $i, j, k$  e  $l$  podem tomar valores inteiros entre 1 e 3, quando não dito outros valores iniciais e finais;
- Os índices arábicos  $m$  e  $n$  podem tomar valores inteiros entre 1 e  $nc$ , sendo  $nc$  o número de constantes usadas na interpolação;
- Os índices arábicos  $p$  e  $q$  podem tomar valores inteiros entre 1 e 5;
- Os índices gregos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  podem tomar apenas os valores 1 e 2;
- O acento circunflexo acima das variáveis significa que as mesmas estão sendo interpoladas/aproximadas;
- As condições de contorno serão mostradas como livre (F), apoiada (S) e engastada (C).

## 2. FLEXÃO LINEAR E NÃO-LINEAR DE PLACAS DE MINDLIN

O objetivo deste capítulo é revisar o equacionamento da teoria de placas de Mindlin quando considerado grandes deslocamentos bem como deslocamentos infinitesimais. Inicialmente, o campo de deslocamentos será apresentado. Para a relação deslocamento-deformação, o tensor de Green é utilizado. As tensões na qual a placa está submetida foram obtidas através da Lei de Hooke. Estas foram descritas através dos deslocamentos da placa. As equações de equilíbrio e as condições de contorno foram obtidas através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. O sistema de equações encontrado foi reduzido para o caso de flexão linear.

### 2.1 Sistema de Equações para o Sistema Não-linear

#### 2.1.1 Domínio do Sistema

O domínio do sistema é caracterizado por um volume  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$  que pode ser descrito como  $\Lambda \times \pm h/2$ , sendo  $\Lambda$  a área da superfície média, como mostra a Figura 2.1. Todas as relações cinemáticas serão escritas através das variáveis independentes  $x_\alpha$ .

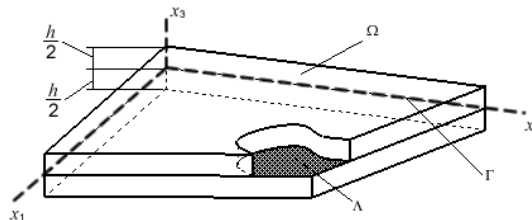


Figura 2.1 - Domínio do objeto de estudo

A metodologia que será apresentada necessita que o contorno da superfície média seja feito através de quatro segmentos de linhas retas. Os ângulos dos vértices desse quadrilátero devem ser menores que  $180^\circ$ .



### 2.1.2 Campo de Deslocamentos

O campo de deslocamentos proposto por Mindlin [1951] considera um deslocamento linear das fibras transversais ao longo da espessura desacoplando assim, o deslocamento transversal das rotações da placa. O campo de deslocamentos é escrito como:

$$U_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \quad (2.1a)$$

$$U_3(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2) \quad (2.1b)$$

onde  $U_\alpha$  e  $U_3$  são as translações nas direções coordenadas,  $u_\alpha$  são os deslocamentos de membrana da superfície média,  $u_3$  é o deslocamento transversal da superfície média e  $\theta_\alpha$  são as rotações das normais à superfície média.

Como pode ser visto, o campo de deslocamentos proposto por Mindlin é similar as da teoria clássica. Porém, devido à relaxação da hipótese de perpendicularidade das fibras transversais, não é possível fazer a relação direta entre rotação das normais com o deslocamento transversal, como na teoria de Kirchhoff.

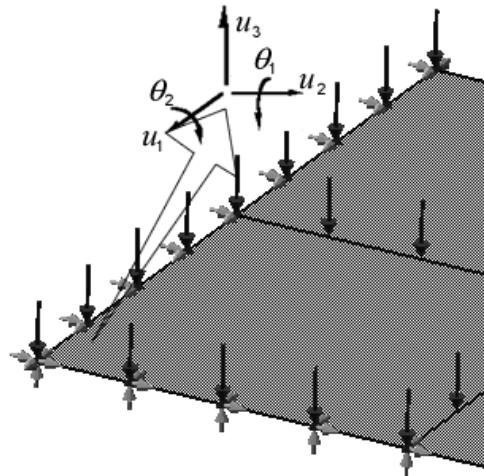


Figura 2.2 - Graus de Liberdade do problema

A Figura 2.2 mostra os graus de liberdade do problema. Cada ponto da placa em análise tem cinco possibilidades de deslocamento, três deslocamentos e duas rotações. Esses graus de liberdade, citados no campo de deslocamento (equações (2.1)) e demonstrados na Figura 2.2 podem ser agrupados em um vetor ( $\Delta$ ) na forma:

$$\Delta = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \theta_1 \quad \theta_2\}^T \quad (2.2)$$

### 2.1.3 Campo de Deformações

A relação deslocamentos-deformações utilizada é o tensor de deformações de Green

$(E_{ij})$ . Este considera a não-linearidade geométrica. Em forma indicial [Dym e Shames, 1979]:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} [U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j}] \quad (2.3)$$

É importante salientar que o produto entre as derivadas dos deslocamentos na equação (2.3) é o termo que insere a não-linearidade geométrica no sistema. Sendo assim, este termo pode ser desconsiderado quando o produto das derivadas é de ordem menor que a sua soma. No entanto, se a hipótese dos deslocamentos infinitesimais não for satisfeita, este termo pode tomar valores da ordem da soma. Nesse caso este produto não pode ser negligenciado. Além disso, pode-se notar que este termo é um somatório do produto das derivadas em relação aos três eixos:

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} = \frac{\partial U_1}{\partial x_j} \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{\partial U_2}{\partial x_j} \frac{\partial U_2}{\partial x_i} + \frac{\partial U_3}{\partial x_j} \frac{\partial U_3}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

O produto das derivadas dos deslocamentos longitudinais será desconsiderado, pois é pressuposto que as mesmas são de ordem menor que o produto das derivadas do deslocamento transversal. Estas desconsiderações são consistentes com as usuais hipóteses de von Kármán. Porém, como citam Azizian e Dawe [1985], para placas moderadamente espessas, esses termos tem efeitos pequenos, mas não desprezíveis. Por simplicidade, estes termos serão desconsiderados resultando no desacoplamento das rotações dos efeitos de membrana. Portanto, a equação (2.3) pode ser reescrita como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} [U_{i,j} + U_{j,i} + U_{3,i} U_{3,j}] \quad (2.5)$$

Aplica-se o campo de deslocamentos descrito nas equações (2.1) na equação (2.5) e obtém-se:

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - x_3 \kappa_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta} \quad (2.6a)$$

$$E_{\alpha 3} = \zeta_{\alpha} \quad (2.6b)$$

onde:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (2.7a)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \quad (2.7b)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad (2.7c)$$

$$\zeta_\alpha = \frac{1}{2}(u_{3,\alpha} - \theta_\alpha) \quad (2.7d)$$

A equação (2.7a) avalia as deformações membranais normais ( $\alpha = \beta$ ) e a deformação cisalhante longitudinal ( $\alpha \neq \beta$ ). A equação (2.7b) refere-se as deformações de flexão (curvatura). Já a equação (2.7d) fornece as deformações cisalhantes transversais. Pode-se ver com facilidade que, na teoria clássica, a equação (2.7d) se anula e, obrigatoriamente,  $u_{3,\alpha} = \theta_\alpha$ . A equação (2.7c) corresponde às parcelas das deformações não-lineares. As equações propostas em (2.6) e (2.7) são semelhantes às usadas por Singh e Elaghabash [2003] para a solução de placas finas utilizando a teoria de placas de Mindlin.

A deformação normal à superfície média é nula. Sendo assim, a teoria de placas de Mindlin considera a placa inextensível na direção da espessura. As cinco deformações consideradas, então, podem ser agrupadas em um vetor deformação ( $\mathbf{E}$ ) escrito na forma:

$$\mathbf{E} = \{E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12} \quad 2E_{13} \quad 2E_{23}\}^T \quad (2.8)$$

Este vetor pode ser decomposto em um produto matricial no qual se desacopla as deformações lineares das não-lineares:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\phi} \quad (2.9)$$

onde:

$$\boldsymbol{\chi} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\zeta_1 \quad 2\zeta_2 \quad \kappa_{11} \quad \kappa_{22} \quad 2\kappa_{12}\}^T \quad (2.10a)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \{\phi_{11} \quad \phi_{22} \quad 2\phi_{12} \quad 0 \quad 0\}^T \quad (2.10b)$$

e:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10c)$$

Nota-se que os vetores  $\boldsymbol{\chi}$  e  $\boldsymbol{\phi}$  compreendem as deformações lineares e as deformações não-lineares, respectivamente. A dependência da coordenada transversal está contida na matriz  $\mathbf{Z}$ .

#### 2.1.4 Relações Constitutivas

Na relação de tensão-deformação será utilizada a teoria de Hooke generalizada. Esta pode

ser expressa na forma [Dym e Shames, 1979]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \quad (2.11)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são os primeiro e segundo parâmetros de Lamé, respectivamente e  $\sigma_{ij}$  são tensões de Cauchy.  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker.

É importante ressaltar que o tensor de Cauchy (equação (2.11)) e o tensor de Green (equação (2.5)) são entidades eulerianas e lagrangeanas, respectivamente. Dessa forma, a relação entre esses tensores resultaria na perda de objetividade da relação constitutiva. No entanto, devido o fato de que o fator de proporcionalidade entre o 2º tensor de Piola-Kirchhoff, que é uma entidade lagrangeada de tensões, e o tensor de Cauchy é próximo da identidade, a equação (2.11) não incorre em erro. Ou seja, a relação constitutiva mantém sua objetividade. Isso ocorre porque, mesmo em grandes deslocamentos, a placa não sofre grandes deformações. A prova desta afirmação pode ser encontrada em Fung [1965].

Sendo assim, aplicam-se as equações (2.6) na equação (2.11) e obtêm-se:

$$\sigma_{\alpha\beta} = G \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} - x_3 (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + u_{3,\alpha} u_{3,\beta} + \frac{2\nu \delta_{\alpha\beta}}{1-2\nu} \left( u_{\gamma,\gamma} - x_3 \theta_{\gamma,\gamma} + \frac{1}{2} u_{3,\gamma} u_{3,\gamma} \right) \right] \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{\alpha 3} = G(u_{3,\alpha} - \theta_\alpha) \quad (2.12b)$$

onde  $G$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson, respectivamente. A tensão normal à superfície média ( $\sigma_{33}$ ) não é considerada aqui. Esta pode ser obtida através da lei de Hooke generalizada, mostrada na equação (2.11), após se conhecer as deformações normais de membrana (pós-processamento). Além disso, considerando que o valor líquido da tensão cisalhante transversal diferia de resultados analíticos da elasticidade tridimensional, Mindlin adicionou um fator de correção ( $\kappa^2$ ) que minora o módulo de elasticidade transversal nas tensões cisalhantes. Dessa forma, a equação (2.12b) é reescrita na forma:

$$\bar{\sigma}_{\alpha 3} = \kappa^2 G(u_{3,\alpha} - \theta_\alpha) \quad (2.13)$$

De forma matricial, a relação constitutiva pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{CE} \quad (2.14)$$

no qual:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}\}^T \quad (2.15a)$$

e

$$\mathbf{C} = \mathbf{G}\mathbf{C}' = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \frac{2}{1-\nu} & \frac{2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-\nu} & \frac{2}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 \end{bmatrix} \quad (2.15b)$$

### 2.1.5 Tensões Resultantes

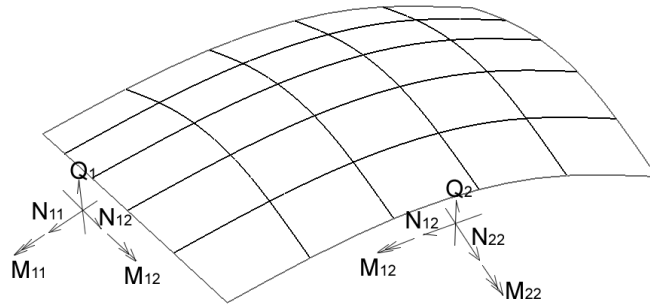
A convenção adotada no presente trabalho está ilustrada na Figura 2.3. Os esforços internos são calculados da seguinte forma:

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (2.16a)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.16b)$$

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{-h/2} \bar{\sigma}_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.16c)$$

onde  $N_{\alpha\beta}$  são os esforços de membrana normais ( $\alpha = \beta$ ) e cisalhante no plano da superfície média ( $\alpha \neq \beta$ ) e  $M_{\alpha\beta}$  são os momentos fletores ( $\alpha = \beta$ ) e torçor ( $\alpha \neq \beta$ ) e  $Q_\alpha$  são os esforços cisalhantes transversais atuantes na placa.



**Figura 2.3 - Distribuição dos esforços na placa em relação sua superfície deformada**

Integram-se as equações (2.16), utiliza-se das equações (2.12a) e (2.13), e obtendo:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{A(1-\nu)}{2} \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha}u_{3,\beta} + \frac{2\nu\delta_{\alpha\beta}}{1-2\nu} \left( u_{\gamma,\gamma} + \frac{1}{2}u_{3,\gamma}u_{3,\gamma} \right) \right] \quad (2.17a)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ \theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu\delta_{\alpha\beta}}{1-2\nu} \theta_{\gamma,\gamma} \right] \quad (2.17b)$$

$$Q_\alpha = \kappa^2 \frac{A(1-\nu)}{2} (u_{3,\alpha} - \theta_\alpha) \quad (2.17c)$$

onde  $D = E_y h^3 / 12(1-\nu^2) = Gh^3 / 6(1-\nu)$ , também conhecida como a Constante de Sophie ou rigidez de flexão de placas e  $A = E_y h / (1-\nu^2) = 2Gh / (1-\nu)$ , também conhecida como constante de rigidez de membrana da placa.

Nota-se que a inclusão da não-linearidade geométrica não afeta a forma das equações dos momentos fletores e tissor e esforços cisalhantes. De acordo com Singh e Elaghabash [2003], a não-linearidade só altera a forma das equações das deformações associadas aos efeitos de membrana. Isso ocorre pela simplificação adotada, considerando apenas o produto das derivadas em relação ao deslocamento transversal. No entanto, é incorreto deduzir que apenas os esforços de membrana sejam afetados pela inserção do termo não linear na relação cinemática descrita na equação (2.3). Devido a própria natureza da não-linearidade, inserindo o acoplamento entre esforços de membrana e flexão, concluí-se que todas as tensões resultantes são alteradas.

Pode-se obter as equações de equilíbrio através do equilíbrio dos esforços internos, mostrados na Figura 2.3. No entanto, devido à consideração de grandes deslocamentos, ocorre o acoplamento entre esforços planares e transversais. Sendo assim, é mais direto utilizar o Princípio dos Trabalhos Virtuais para a obtenção das mesmas. Através deste princípio pode-se obter as condições de contorno necessárias para a solução das equações diferenciais que governam o comportamento da placa.

### 2.1.6 Equações de Equilíbrio e Condições de contorno

As equações de equilíbrio e as condições de contorno podem ser adquiridas através dos Princípios dos Trabalhos Virtuais [Dym e Shames, 1979]:

$$\int_{\Omega} b_i \delta \Delta_i d\Omega + \int_{\Lambda} T_i \delta \Delta_i d\Lambda = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta E_{ij} d\Omega \quad (2.18)$$

onde  $b_i$  são forças de corpo e  $T_i$  são forças de superfície.

Considera-se, inicialmente, a variação da energia interna de deformação. Esta aparece na parte direta da equação (2.18). Sendo assim:

$$\delta U_e = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta E_{ij} d\Omega \quad (2.19)$$

Aplicam-se as equações (2.6) com as respectivas variações nas deformações e chega-se à:

$$\begin{aligned} \delta U_e = \int_{\Omega} & \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + x_3 \sigma_{11} \delta \kappa_{11} + \sigma_{11} \delta \phi_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{22} - 2x_3 \sigma_{12} \delta \kappa_{12} + 2\sigma_{12} \delta \phi_{12} + \\ & + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} - x_3 \sigma_{22} \delta \kappa_{22} + \sigma_{22} \delta \phi_{22} + 2\sigma_{13} \delta \zeta_1 + 2\sigma_{23} \delta \zeta_2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.20)$$

Integrando-se a equação (2.20) na espessura, utilizando as relações (2.16) e aplicando-se o teorema de Green nas integrais contendo derivadas das variações resulta:

$$\begin{aligned}
\delta U_e = & \int_{\Lambda} \delta u_1 (-N_{11,1} - N_{12,2}) + \delta u_2 (-N_{12,1} - N_{22,2}) + \delta u_3 (-N_{11,1}u_{3,1} - N_{11}u_{3,11} - Q_{1,1} - \\
& - N_{22,2}u_{3,2} - N_{22}u_{3,22} - Q_{2,2} - N_{12,1}u_{3,2} - 2N_{12}u_{3,12} - N_{12,2}u_{3,1}) + \\
& + \delta \theta_1 (M_{11,1} - Q_1 + M_{12,2}) + \delta \theta_2 (M_{22,2} - Q_2 + M_{12,2}) d\Lambda + \\
& + \oint_{\Gamma} -\delta u_1 N_{12} - \delta u_2 N_{22} - \delta u_3 (N_{22}u_{3,2} + Q_2 + N_{12}u_{3,1}) + \delta \theta_1 M_{12} + \delta \theta_2 M_{22} dx_1 + \\
& + \oint_{\Gamma} \delta u_1 N_{11} + \delta u_2 N_{12} + \delta u_3 (N_{11}u_{3,1} + Q_1 + N_{12}u_{3,1}) + \delta \theta_1 M_{11} + \delta \theta_2 M_{12} dx_2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Tomando-se agora a parte esquerda da equação (2.18), considera-se então que não há forças de corpo no sistema. Isso não quer dizer que os efeitos como gravidade não podem ser considerados. Esses efeitos podem ser condensados e aplicados como carregamentos em relação à superfície média. Sendo assim, essa parte da equação pode ser reescrita na forma:

$$-\delta V_e = \int_{\Lambda} \delta \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{P} d\Lambda \tag{2.22}$$

sendo que o vetor  $\mathbf{P}$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{P} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad m_1 \quad m_2\} \tag{2.23}$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são carregamentos contidos no plano da superfície média, ou carregamentos *in-plane*,  $q_3$  é um carregamento transversal á superfície média ou carregamento *out-plane* e  $m_1$  e  $m_2$  são momentos distribuídos sobre a placa. Sendo assim, a equação (2.22) pode ser escrita na forma:

$$-\delta V_e = \int_{\Lambda} q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3 + m_1 \delta \theta_1 + m_2 \delta \theta_2 d\Lambda \tag{2.24}$$

Leva-se em conta a equação (2.18) a partir das equações (2.21) e (2.24). Condensando-a através da contração do somatório e considerando um contorno curvo, relacionando os diferenciais  $dx_{\alpha}$  retilíneos com  $d\Gamma$  curvo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \delta u_{\alpha} (N_{\alpha\beta,\beta} + q_{\alpha}) + \delta u_3 [(N_{\alpha\beta}u_{3,\alpha})_{,\beta} + Q_{\gamma,\gamma} + q_3] + \delta \theta_{\alpha} (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + m_{\alpha}) d\Lambda + \\
& + \oint_{\Gamma} \delta u_{\alpha} N_{\alpha\beta} \eta_{\beta} + \delta u_3 (N_{\alpha\beta} \eta_{\beta}) + \delta \theta_{\alpha} (M_{\alpha\beta} \eta_{\beta}) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde  $\eta_{\beta}$  é a normal ao contorno curvo contidas no plano da superfície média indeformada.

A equação (2.25) redundando nas equações de equilíbrio:

$$N_{\alpha\beta,\beta} + q_{\alpha} = 0 \tag{2.26a}$$

$$\left(N_{\alpha\beta}u_{3,\alpha}\right)_{,\beta} + Q_{\gamma,\gamma} + q_3 = 0 \quad (2.26b)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + m_\alpha = 0 \quad (2.26c)$$

sujeitas às condições de contorno:

$$u_\alpha \text{ em } \Gamma_u \text{ ou } N_{\alpha\beta}\eta_\beta \text{ para } \Gamma_t \quad (2.27a)$$

$$u_3 \text{ em } \Gamma_u \text{ ou } N_{\alpha\beta}\eta_\alpha u_{3,\beta} + Q_\alpha \eta_\alpha \text{ para } \Gamma_t \quad (2.27b)$$

$$\theta_\alpha \text{ em } \Gamma_u \text{ ou } M_{\alpha\beta}\eta_\beta \text{ para } \Gamma_t \quad (2.27c)$$

onde  $\Gamma_u$  é o contorno no qual é conhecido os deslocamentos,  $\Gamma_t$  é o contorno no qual é conhecido as trações e  $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = 0$ .

Deve-se atentar para a condição de contorno para o deslocamento transversal (equação (2.27b)). Esta tem o termo de acoplamento entre os esforços planares com esforços transversais. Esses esforços são multiplicados pela derivada do deslocamento transversal, que nada mais é que a inclinação da superfície média no contorno da placa. Devido a este acoplamento, para a aplicação da condição de contorno natural é necessário que o método de solução seja iterativo pois esta condição depende da resposta da análise e vice-versa.

Considerando-se o caso onde apenas o carregamento transversal é aplicado. As equações de equilíbrio (equações (2.26)) podem ser reescritas em apenas uma equação:

$$N_{\alpha\beta}u_{3,\alpha\beta} + M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + q_3 = 0 \quad (2.28)$$

Os passos adotados para a obtenção da equação (2.28) são: considerando que não há carregamentos longitudinais aplicados na placa, pela equação (2.26a) obtém-se que  $N_{\alpha\beta,\beta} = 0$ ; a partir da equação (2.26c) podem-se relacionar os esforços cisalhantes com as derivadas dos momentos, já que não há momentos distribuídos aplicados à placa. Aplicando essas relações na equação (2.26b) obtém-se a equação (2.28). Esta pode ser reescrita através dos deslocamentos apenas, utilizando as equações (2.17), que relacionam as tensões resultantes com estes.

## 2.2 Equações de Flexão Linear de Placas de Mindlin

O objetivo desta subseção é particularizar as equações obtidas na subseção anterior para o caso no qual as deformações são infinitesimais, ou seja, as equações propostas aqui consideram apenas a flexão linear de placas semi-espessas. O sobre-índice  $L$  nas variáveis indica entidades lineares.



### 2.2.1 Campo de Deslocamentos

O estudo da flexão linear de placas de Mindlin considera o mesmo campo de deslocamentos citado na subsecção 2.1.2 (equação (2.1)). No entanto, devido a hipótese de Kirchhoff onde, em pequenos deslocamentos, não há interação membrana-flexão, estes graus de liberdade podem ser analisados separadamente. De tal forma, como o objetivo do presente trabalho é estudar flexão de placas, os graus de liberdade de membrana serão desconsiderados. Portanto, a equação (2.1) pode ser reescrita na forma:

$$U_{\alpha}^L(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \theta_{\alpha}(x_1, x_2) \quad (2.29a)$$

$$U_3^L(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2) \quad (2.29b)$$

onde os graus de liberdade podem ser agrupados na forma:

$$\Delta^L = \{u_3 \quad \theta_1 \quad \theta_2\}^T \quad (2.30)$$

conforme a Figura 2.2.

### 2.2.2 Campo de Deformações

A relação cinemática linear pode ser escrita na forma:

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} [U_{i,j}^L + U_{j,i}^L] \quad (2.31)$$

O tensor descrito na equação (2.31) é também conhecido como tensor infinitesimal de deformações. Aplicando o campo de deslocamentos, descrito nas equações (2.29), obtêm-se as deformações, que são escritas:

$$2E_{\alpha\beta}^L = -x_3 (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \quad (2.32a)$$

$$2E_{\alpha 3}^L = u_{3,\alpha} - \theta_{\alpha} \quad (2.32b)$$

As deformações da superfície média podem ser agrupadas em um vetor, semelhante ao descrito na equação (2.8). Este pode ser desacoplado, de forma semelhante ao vetor de deformações não-linear, de modo que:

$$\mathbf{E}^L = \mathbf{H}\boldsymbol{\chi}^L \quad (2.33)$$

onde:

$$\boldsymbol{\chi}^L = \{\kappa_{11} \quad \kappa_{22} \quad 2\kappa_{12} \quad 2\zeta_1 \quad 2\zeta_2\}^T \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34b)$$

sabendo que  $\zeta_\alpha$  e  $\kappa_{\alpha\beta}$  são explicitados na equação (2.7b) e (2.7d), respectivamente. A dependência da coordenada transversal está definida na matriz  $\mathbf{H}$  de forma semelhante a sua respectiva no caso não-linear (equação (2.10c)).

### 2.2.3 Relações Constitutivas e Tensões Resultantes

Considera-se a relação constitutiva descrita na equação (2.11) e a aplicação do fator de correção ao módulo de elasticidade transversal ( $\kappa^2$ ) aplicado às tensões cisalhantes transversais, obtêm-se as tensões na qual a placa está sujeita quando aplicado um carregamento transversal. Essas tensões podem ser escritas:

$$\sigma_{\alpha\beta}^L = -x_3 G \left[ \theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-2\nu)} \theta_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.35a)$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha 3}^L = \kappa^2 G (u_{3,\alpha} - \phi_\alpha) \quad (2.35b)$$

Integram-se as tensões acima para a obtenção das tensões resultantes da placa, conforme citado nas equações (2.16):

$$N_{\alpha\beta}^L = 0 \quad (2.36a)$$

$$M_{\alpha\beta}^L = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ \theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu\delta_{\alpha\beta}}{(1-2\nu)} \theta_{\gamma,\gamma} \right] \quad (2.36b)$$

$$Q_\alpha^L = \kappa^2 \frac{A(1-\nu)}{2} (u_{3,\alpha} - \theta_\alpha) \quad (2.36c)$$

O motivo nos quais as tensões resultantes de membrana serem nulas é pelo desacoplamento entre os esforços transversais com os longitudinais.

### 2.2.4 Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno

As equações de equilíbrio e suas respectivas condições de contorno para o caso de flexão linear foram obtidas do mesmo modo que no caso de flexão não-linear. Devido o fato desta explicação estar contida em Dym e Shames [1979], o desenvolvimento da mesma não será apresentado. Sendo assim, as equações de equilíbrio do sistema são:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^L - Q_\alpha^L = 0 \quad (2.37a)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^L - q_3 = 0 \quad (2.37b)$$

e suas respectivas condições de contorno:

$$\theta_\alpha \text{ em } \Gamma_u \text{ ou } M_{\alpha\beta}^L \eta_\beta \text{ em } \Gamma_t \quad (2.38a)$$

$$u_3 \text{ em } \Gamma_u \text{ ou } Q_\alpha^L \eta_\alpha \text{ em } \Gamma_t \quad (2.38b)$$

As equações de equilíbrio mostradas nas equações (2.37) estão em função das tensões resultantes. No entanto, em muitos casos, é necessário que as mesmas estejam em função dos deslocamentos da superfície média. Deste modo, Lee et. al. [2002], demonstra a forma de obtenção dessas equações e desacopla o deslocamento transversal com as rotações da superfície média. Sendo assim:

$$D\nabla^4 u_3 = \left(1 - \frac{D}{\kappa^2 Gh} \nabla^2\right) q_3 \quad (2.39a)$$

$$\nabla^4 \theta_1 = -\frac{1}{D} \frac{\partial q_3}{\partial x_1} + \frac{2\kappa^2 Gh}{D(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.39b)$$

$$\nabla^4 \theta_2 = -\frac{1}{D} \frac{\partial q_3}{\partial x_2} - \frac{2\kappa^2 Gh}{D(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.39c)$$

Conforme já dito, a simplificação adotada por Cooke e Levinson [1983] considera que  $\theta_{1,2} = \theta_{2,1}$ . Isso faz com que o último termo das equações (2.39b) e (2.39c) se anule, desacoplando também as rotações da superfície média. No entanto, como mostrado por Lee et. al. [2002], isso só é válido para placas de Navier, ou seja, placas com condições de contorno SSSS. Além disso, a consideração de  $\theta_{1,2} = \theta_{2,1}$  gera uma rigidez de flexão virtual indesejada, conforme Reddy [2001].

### 3. O MÉTODO *pb-2*

#### 3.1 Introdução do Método

O Método de Rayleigh-Ritz utiliza comumente como princípio variacional o Princípio da Mínima Energia Potencial (PMEP). Os graus de liberdade da equação diferencial são interpolados por combinações lineares de funções. O peso de cada função é encontrado através do princípio variacional citado de forma que [Tauchert, 1973]: “De todos os campos de deslocamentos que satisfazem as condições de contorno prescritas, o estado correto é aquele que faz com que a energia potencial total da estrutura seja mínima”.

O PMEP se baseia na primeira variação da diferença entre a energia de deformação interna e do potencial do trabalho externo. Considerando a variação dessa diferença nula, encontra-se o mínimo do sistema, encontrando-se então o conjunto de constantes, que multiplicam as funções de interpolação, que geram a mínima energia potencial. Matematicamente:

$$\Pi = U_e - V_e \therefore \delta\Pi = \delta(U_e - V_e) = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\Pi$  é o funcional da mínima energia potencial,  $U_e$  a energia de deformação de deformação e  $V_e$ , o potencial externo.

A interpolação dos graus de liberdade de uma placa de Mindlin pode ser escrita como:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \cong \hat{\mathbf{\Delta}} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{c}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{c}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 \mathbf{c}_3 \\ \boldsymbol{\omega}_4 \mathbf{c}_4 \\ \boldsymbol{\omega}_5 \mathbf{c}_5 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

no qual  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{c}_3$ ,  $\mathbf{c}_4$  e  $\mathbf{c}_5$  são os conjuntos de constantes para os deslocamentos longitudinais (sub-índice 1 e 2), para o deslocamento transversal (sub-índice 3), e para as rotações (sub-índice 4 e 5). Além disso,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$  e  $\omega_5$  são as funções de interpolação das respectivas variáveis interpoladas. Estas podem ser de qualquer família desde que seu grau seja diferenciável em relação a metodologia adotada e que obedecem as condições de contorno. A primeira restrição é facilmente contornada. Podem-se utilizar funções trigonométricas que são infinitamente diferenciáveis ou ajustar a função para que tenha grau superior ao do número de derivações usadas pela metodologia para a obtenção da resposta das equações diferenciais. Além disso, o método permite que as funções de interpolação globais possam ser infinitamente enriquecidas, conforme a necessidade do problema e da potência computacional disponível. A segunda restrição é mais complicada, pois dependendo da geometria do componente, pode-se tornar impossível encontrar uma base que respeite as condições de contorno.

A Figura 3.1 mostra os graus de liberdade de uma aresta da placa. Esses graus de liberdade são mostrados em coordenadas locais pois as condições de contorno são aplicadas nessas coordenadas.

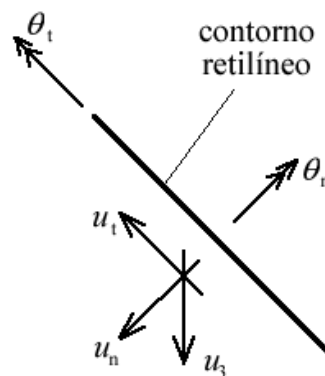


Figura 3.1 - Graus de liberdade do contorno retilíneo da placa

Para resolver o problema de aplicação das condições de contorno, uma modificação no método de Rayleigh-Ritz, denominada *pb-2*, foi adotada para inserir as condições de contorno em formas de zeros nas funções de interpolação. Diversos pesquisadores utilizaram o método *pb-2* para solucionar as equações diferenciais dos seus problemas [Kitipornchai, 1994; Liew et. al., 1993; Wang e Aung, 2007]. As funções de interpolação são modificadas na forma:

$$\Psi_1 = g_1 \omega_1 \quad (3.3a)$$

$$\Psi_2 = g_2 \omega_2 \quad (3.3b)$$

$$\Psi_3 = g_3 \omega_3 \quad (3.3c)$$

$$\Psi_4 = g_4 \mathbf{\omega}_4 \quad (3.3d)$$

$$\Psi_5 = g_5 \mathbf{\omega}_5 \quad (3.3e)$$

onde  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$ ,  $\Psi_4$  e  $\Psi_5$  são as novas funções de interpolação que obedecem as condições de contorno. As funções  $g_i$  tem a forma:

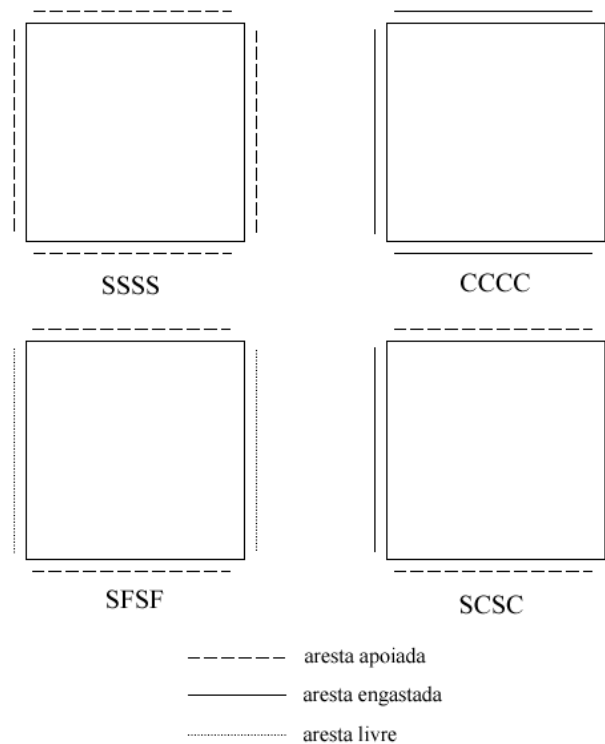
$$g_i = \prod_{j=1}^{ncc} (x_j - x_{cc})^{\delta_{cc}} \quad (3.4)$$

onde  $x_j - x_{cc}$  é a equação da linha de contorno (contorno retilíneo mostrado na Figura 3.1) e  $ncc$  é o número de condições de contorno aplicados ao grau de liberdade, que em placas poligonais tomam o valor do número de arestas da placa. O expoente  $\delta_{cc}$  pode assumir dois valores, com respeito às condições de contorno: 0 para arestas livres (ou seja, deslocamentos ou rotações diferentes de zero) e 1 para arestas fixas (ou seja, deslocamentos ou rotações nulas). Para o caso de uma aresta livre (F), considerando placas de Mindlin, o expoente, para todos os graus de liberdade, é zero. Então, considerando a Figura 3.1, os expoentes relacionados aos deslocamentos longitudinais ( $u_n$  e  $u_t$ ) e o deslocamento transversal ( $u_3$ ) bem como as rotações ( $\theta_n$  e  $\theta_t$ ) são nulos na aresta. No caso de uma aresta simplesmente apoiada (S), o expoente para os graus de liberdade translacionais ( $u_n$ ,  $u_t$  e  $u_3$ ) e rotacional normal ( $\theta_n$ ) é 1 e para os rotacional tangencial ( $\theta_t$ ) é 0, novamente, considerando a Figura 3.1. Já se considerarmos uma aresta engastada (C), o expoente para todos os graus de liberdade é 1. Ainda sim, esta modificação permite a inserção de outros tipos de condições de contorno. Como exemplo, o expoente, para o caso de uma aresta apenas apoiada, dos graus de liberdade translacionais longitudinais e rotacionais recebe valores nulo enquanto o expoente do grau de liberdade translacional transversal, unitário. Porém, apenas as três primeiras condições de contorno explicadas serão utilizadas no presente trabalho. Exemplos de condições de contorno que podem ser aplicadas com facilidades utilizando a modificação do Método de Rayleigh-Ritz, *pb-2*, estão mostradas na Figura 3.2.

Esta modificação bem como os exemplos mostrados são aplicados a teoria de placas de Mindlin. Caso a teoria clássica de placas seja usada, o expoente  $\delta_{cc}$  pode receber três valores: 0 para aresta livre (F), 1 para aresta apoiada (S) e 2 para aresta engastada (C). Isso porque, nesta teoria, as rotações da superfície média ( $\theta_n$  e  $\theta_t$ ) estão acopladas com o deslocamento transversal ( $u_3$ ). De tal forma, para o caso de uma aresta engastada, além da inserção de uma raiz nas funções de interpolação do deslocamento transversal na posição da condição de contorno é

necessário que sua derivada seja nula nessa posição também. Portanto, o uso do expoente 2 insere os zeros tanto na função quanto na sua derivada [Liew et. al., 1993].

Existe uma grande discussão sobre os tipos de condições de contorno que podem ser aplicadas: naturais bem como essenciais ou uma combinação dessas. Dessa forma, aparecem algumas questões como condições de contorno simplesmente apoiadas *soft* ou *hard*. O mesmo acontece com relação ao engaste, que pode ser *soft* ou *hard*. É necessário que se diga que apenas condições de contorno *soft* são aplicadas pelo método *pb-2*. Além disso, é importante mencionar que na teoria clássica de placas apenas condições de contorno *hard* podem ser aplicadas. O motivo disso é o acoplamento entre o deslocamento transversal e as rotações da placa. Uma melhor explicação sobre os tipos de condições de contorno pode ser encontrada em Szabó e Babuska [1991].



**Figura 3.2 - Exemplos de Condições de Contorno**

Nota-se que com esse método, as condições de contorno essenciais do sistema são aplicadas às funções de interpolação fazendo com que as últimas não sejam, necessariamente, cinematicamente admissíveis.

Com a modificação explicitada nas equações (3.3) e (3.4), a interpolação do campo de deslocamentos muda na forma:

$$\hat{u}_1 = \Psi_1 \mathbf{c}_1 \quad (3.5a)$$

$$\hat{u}_2 = \Psi_2 \mathbf{c}_2 \quad (3.5b)$$

$$\hat{u}_3 = \Psi_3 \mathbf{c}_3 \quad (3.5c)$$

$$\hat{\theta}_1 = \Psi_4 \mathbf{c}_4 \quad (3.5d)$$

$$\hat{\theta}_2 = \Psi_5 \mathbf{c}_5 \quad (3.5e)$$

A primeira variação da diferença da energia interna de deformação e do trabalho externo, com um campo de deslocamento interpolado pelas funções de interpolação explicitadas nas equações (3.5) gera:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{c}_i} = \frac{\partial U_e}{\partial\mathbf{c}_i} - \frac{\partial V_e}{\partial\mathbf{c}_i} = 0 \quad (3.6)$$

No presente trabalho, funções de interpolação polinomiais serão usadas. Sendo assim, essas funções, explicitadas nas equações (3.5) podem ser escritas na forma:

$$\Psi_{k\ m} = g_k x_1^i x_2^{j-i} \quad (3.7)$$

onde:

$$m = \frac{(j+1)(j+2)}{2} - i \quad (3.8)$$

sabendo que  $m$  é a posição no vetor de uma das funções de interpolação e  $k$  descreve para qual grau de liberdade está sendo montada a base de interpolação. O número de constantes ( $nc$ ) necessárias para cada interpolação é dado por:

$$nc = \frac{(ng+1)(ng+2)}{2} \quad (3.9)$$

onde  $ng$  é o grau primário da base de interpolação. Diz-se primário, pois este muda após a aplicação das condições de contorno. Este valor ( $ng$ ) influencia diretamente no número de constantes necessárias para a interpolação, como pode ser observado na equação (3.9).

### 3.1.1 Parametrização da Geometria do Sistema

A parametrização da geometria do sistema foi introduzida a fim de se pode aplicar a metodologia a placas quadrilaterais não retangulares. Esta parametrização é idêntica à comumente utilizada no elemento finito bilinear de 4 nós, como mostra a Figura 3.3.

A parametrização foi aplicada no cálculo das deformações do sistema. Inicialmente, os sistemas de coordenadas foram relacionados através dos quatro vértices. Então, as derivadas do sistema de coordenadas cartesianas foram substituídas pelas derivadas do sistema de



coordenadas natural, na forma:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \cdot}{\partial s_\gamma} \bar{\omega}_{\gamma\alpha} \quad (3.10)$$

na qual  $\bar{\omega}_{\gamma\alpha} = \partial s_\gamma / \partial x_\alpha$ . As deformações podem ser escritas no sistema de coordenadas natural.

Dessa forma:

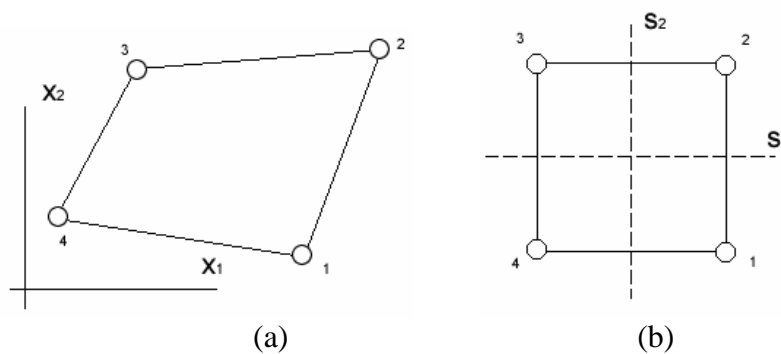
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\gamma} \bar{\omega}_{\gamma\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial s_\gamma} \bar{\omega}_{\gamma\alpha} \right) \quad (3.11a)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial s_\gamma} \bar{\omega}_{\gamma\beta} + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial s_\gamma} \bar{\omega}_{\gamma\alpha} \right) \quad (3.11b)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial s_\gamma} \bar{\omega}_{\gamma\alpha} \frac{\partial u_3}{\partial s_\tau} \bar{\omega}_{\tau\beta} \right) \quad (3.11c)$$

$$\zeta_\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial s_\gamma} \bar{\omega}_{\gamma\alpha} - \theta_\alpha \right) \quad (3.11d)$$

A relação constitutiva, por ser objetiva, não necessitou de alterações.



**Figura 3.3 - Parametrização da Geometria: (a) Coordenadas cartesianas e (b) Coordenadas naturais**

### 3.1.2 Cálculo da Energia de Deformação Interna e do Trabalho Externo

A energia de deformação interna pode ser calculada pelo produto interno do tensor de tensão de Cauchy e do tensor de deformações de Green na forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} d\Omega \quad (3.12)$$

Sendo material isotrópico, a equação (2.14) pode ser reescrita como:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} d\Omega \quad (3.13)$$

Inserem-se as equações (2.6) e (2.15a) na equação (3.13) e obtém-se:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \chi^T \mathbf{Z}^T \mathbf{C} \mathbf{Z} \chi + 2\chi^T \mathbf{Z}^T \mathbf{C} \phi + \phi^T \mathbf{C} \phi d\Omega \quad (3.14)$$

Conforme o sistema de Azizian e Dawe [1985], a equação (3.14) pode ser dividida em relação a ordem dos termos dos deslocamentos. O primeiro relaciona os termos quadráticos dos deslocamentos. Esse termo corresponde às deformações lineares do sistema. O segundo termo da equação (3.14) trata os termos cúbicos dos deslocamentos. Este, relaciona as deformações de membrana e flexão linear com os termos de flexão não-linear. Já o terceiro termo da equação (3.14) lida com deslocamentos quárticos, que relaciona apenas os termos de flexão não-linear.

Considera-se o produto das matrizes  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{C}$  no primeiro termo da equação (3.14). Este pode ser feito antes do produto com os vetores de deformação:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{C} \mathbf{Z} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \frac{2}{1-\nu} & \frac{2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & \frac{2x_3}{1-\nu} & \frac{2\nu x_3}{1-\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-\nu} & \frac{2}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\nu x_3}{1-\nu} & \frac{2x_3}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2x_3}{1-\nu} & \frac{2\nu x_3}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & \frac{2x_3^2}{1-\nu} & \frac{2\nu x_3^2}{1-\nu} & 0 \\ \frac{2\nu x_3}{1-\nu} & \frac{2x_3}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\nu x_3^2}{1-\nu} & \frac{2x_3^2}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

O mesmo é feito com os produtos matriciais no segundo termo da equação (3.14). Isto é:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{C} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \frac{2}{1-\nu} & \frac{2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-\nu} & \frac{2}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 \\ \frac{2x_3}{1-\nu} & \frac{2\nu x_3}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu x_3}{1-\nu} & \frac{2x_3}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Considerando que apenas esses termos dependem da espessura, pode-se integrar a equação (3.14) na direção  $x_3$ . Sabendo que:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \{c_{te} \quad c_{te}x_3 \quad c_{te}x_3^2\} dx_3 = \left\{ c_{te}h \quad 0 \quad c_{te} \frac{h^3}{12} \right\}$$

as equações (3.15) e (3.16) podem ser reescritas na forma:

$$\mathbf{R}_L = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{Z}^T \mathbf{C} \mathbf{Z} dx_3 = G \begin{bmatrix} \frac{2h}{1-\nu} & \frac{2h\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h\nu}{1-\nu} & \frac{2h}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{h^3}{1-\nu} & \frac{1}{6} \frac{\nu h^3}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{\nu h^3}{1-\nu} & \frac{1}{6} \frac{h^3}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{R}_{AC} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{Z}^T \mathbf{C} dx_3 = G \begin{bmatrix} \frac{2h}{1-\nu} & \frac{2h\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h\nu}{1-\nu} & \frac{2h}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Através das equações (3.17) e (3.18), a equação (3.14) pode ser reescrita na forma:

$$U_e = \frac{1}{2} G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \boldsymbol{\chi}^T \tilde{\mathbf{R}}_L \boldsymbol{\chi} + 2 \boldsymbol{\chi}^T \tilde{\mathbf{R}}_{AC} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \tilde{\mathbf{R}}_{NL} \boldsymbol{\varphi} ds_2 ds_1 \quad (3.19)$$

onde:

$$\mathbf{R}_{NL} = h \mathbf{C} \quad (3.20)$$

As variáveis na equação (3.19) já estão parametrizadas conforme explicado na subseção 3.1.1 e as matrizes constitutivas já estão invariantes ao módulo de elasticidade transversal (matrizes com  $\tilde{\bullet}$ ). A integração acima pode ser feita de diversas formas. A melhor dependerá do tipo de função de interpolação utilizada. No caso do uso de polinômios, a quadratura de Gauss é a melhor forma, pois seu resultado é exato quando utilizado o número correto de pontos de integração. A informação da relação entre a área parametrizada e a área real, ou seja, o

Jacobiano, está inserida dentro de cada um dos vetores de deformação, conforme mostrado nas equações (3.10) e (3.11). Fazendo-se os produtos matriciais e colocando-se em evidência os valores de  $\bar{\omega}_{\gamma\alpha}$ , o Jacobiano aparece naturalmente.

A obtenção do potencial de trabalho externo é mais simples. Este é escrito na forma:

$$V_e = \int_{-1-1}^{-1-1} \Delta^T \mathbf{P} ds_2 ds_1 + \sum_{i=1}^{nf} \Delta^T(s_a, s_b) \mathbf{F} \quad (3.21)$$

onde o primeiro termo considera os carregamentos de superfície e o último considera os carregamentos pontuais.  $\mathbf{F}$  é o vetor no qual estão agrupados os carregamentos concentrados, semelhante ao vetor  $\mathbf{P}$  e  $nf$  é o número de forças concentradas aplicadas na superfície média.  $s_a$  e  $s_b$  são as posições, em relação ao sistema coordenado natural, da aplicação dos carregamentos pontuais.

### 3.2 Formulação Matricial

Uma formulação matricial será adotada devido a simplicidade da mesma e fácil implementação. Os vetores de constantes (equação (3.2)) agrupam-as em relação aos respectivos graus de liberdade. Estes vetores podem ser unidos em uma única entidade. Esta tem a forma:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{ \mathbf{c}_1^T \quad \mathbf{c}_2^T \quad \mathbf{c}_3^T \quad \mathbf{c}_4^T \quad \mathbf{c}_5^T \right\}^T \quad (3.22)$$

As funções de interpolação são agrupadas em uma matriz “diagonal” na forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}_5^T \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

As funções das condições de contorno podem ser unidas em uma matriz diagonal, de tal modo:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

no qual a matriz  $\mathbf{G}$  agrupa as funções que aplicarão as condições de contorno nas funções de interpolação. Tomando as equações (3.5) e as equações (3.22) – (3.24), pode-se escrever os

deslocamentos interpolados como:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{GM}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (3.25)$$

onde a matriz  $\mathbf{N}$  é composta pelas funções de interpolação do sistema, já cinematicamente admissíveis. As dimensões da matriz  $\mathbf{N}$  são parâmetros para o custo computacional para a solução do problema. Como pode-se ver, esta matriz é gerada através de um produto matricial entre as matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{M}$  (equação (3.25)). É sabido que a matriz  $\mathbf{G}$  é quadrada de dimensões 5. Já a matriz  $\mathbf{M}$  é retangular e suas dimensões são  $5 \times 5nc$ . Dessa forma, a matriz  $\mathbf{N}$  terá dimensões  $5 \times 5nc$ .

O vetor  $\boldsymbol{\chi}$ , explicitado na equação (2.10a), que corresponde ao agrupamento das deformações lineares, pode ser escrito em função dos deslocamentos interpolados através de um produto com um operador matricial. Este produto tem a forma:

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_L \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{D}_L \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{D}_L$  é um operador linear dado por:

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A equação (3.26) põe em evidência as constantes do método de Rayleigh-Ritz. Isso também pode ser feito com o vetor  $\boldsymbol{\varphi}$ , mostrado na equação (2.10b), o que resulta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{S}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{r}_2 = \\ &= \mathbf{S}_1 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

sendo:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha \mathbf{N} \quad (3.32)$$

O apêndice I demonstra os passos para a separação das constantes das deformações não-lineares.

Com os vetores de deformação linear e não-linear em função das constantes, pode-se escrever a energia de deformação e o trabalho externo em função das mesmas. Portanto, aplicam-se as equações (3.26) e (3.28) nas equações (3.19) e (3.21), obtém-se:

$$\begin{aligned} U_e = & \frac{1}{2} G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda^T \mathbf{B}_L^T \tilde{\mathbf{R}}_L \mathbf{B}_L \lambda + 2\lambda^T \mathbf{B}_L \tilde{\mathbf{R}}_{AC} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T \lambda + \\ & + 2\lambda^T \mathbf{B}_L \tilde{\mathbf{R}}_{AC} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T \lambda + \lambda^T \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \tilde{\mathbf{R}}_{NL} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T \lambda + \\ & + 2\lambda^T \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \tilde{\mathbf{R}}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T \lambda + \lambda^T \mathbf{V}_2 \lambda^T \mathbf{B}_{12}^T \tilde{\mathbf{R}}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T \lambda \, ds_2 ds_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$V_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda^T \mathbf{N}^T \mathbf{P} \, ds_2 ds_1 + \sum_{i=1}^{nf} \lambda^T \mathbf{N}^T (s_a, s_b) \mathbf{F} \quad (3.34)$$

onde:

$$\mathbf{B}_{1\alpha} = \mathbf{S}_\alpha \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{V}_\alpha = \mathbf{B}_2^T \mathbf{r}_\alpha \quad (3.35)$$

Os detalhes da obtenção da equação (3.33) é apresentada no apêndice II.

Substituindo as equações (3.33) e (3.34) em (3.1) obtém-se o potencial total da superfície elástica:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} \lambda^T G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \tilde{\mathbf{R}}_L \mathbf{B}_L ds_2 ds_1 \lambda + \lambda^T G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L \tilde{\mathbf{R}}_{AC} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T ds_2 ds_1 \lambda + \\
& + \lambda^T G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L \tilde{\mathbf{R}}_{AC} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda + \frac{1}{2} \lambda^T G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \tilde{\mathbf{R}}_{NL} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T ds_2 ds_1 \lambda + \\
& + \lambda^T G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \tilde{\mathbf{R}}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda + \frac{1}{2} \lambda^T G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_2 \lambda^T \mathbf{B}_{12}^T \tilde{\mathbf{R}}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda + \\
& - \lambda^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{P} ds_2 ds_1 - \lambda^T \sum_{i=1}^{nf} \mathbf{N}^T(s_a, s_b) \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Minimizando o sistema, obtém-se a equação geral do problema. O ponto de estacioneidade é dado por:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_L \mathbf{B}_L ds_2 ds_1 \lambda + 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T ds_1 ds_2 \lambda + \\
& + 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T ds_2 ds_1 \lambda + \\
& + 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_2 \lambda^T \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda - \\
& - \frac{1}{G} \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{P} ds_2 ds_1 - \sum_{i=1}^{nf} \mathbf{N}^T(s_a, s_b) \mathbf{F} \right] = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

### 3.2.1 Simplificação do Sistema para a Resposta linear

Tomando-se a equação (3.13) e considerando-se as equações (2.31) e (2.33), pode-se reescrever a energia potencial da estrutura, quando sob a hipótese dos pequenos deslocamentos. Esta pode ser definida como:

$$U_e^L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^{LT} \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} \boldsymbol{\chi}^L d\Omega \tag{3.38}$$

Integrando-se a equação (3.38) na espessura e parametrizando as deformações conforme o capítulo 3.1.1, tem-se:

$$U_e^L = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \boldsymbol{\chi}^{LT} \mathbf{R}_L^L \boldsymbol{\chi}^L ds_2 ds_1 \tag{3.39}$$

onde:

$$\mathbf{R}_L^L = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} dx_3 = G \begin{bmatrix} \frac{h^3}{6(1+\nu)} & \frac{\nu h^3}{6(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu h^3}{6(1+\nu)} & \frac{h^3}{6(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa h \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

O vetor de deformações lineares  $\boldsymbol{\chi}^L$  pode ser desacoplado aplicando-se um operador linear, conforme seu respectivo quando em grandes deslocamentos (equação (3.26)). Dessa forma:

$$\boldsymbol{\chi}^L = \mathbf{B}_L^L \boldsymbol{\lambda}^L = \mathbf{D}_L^L \mathbf{N}^L \boldsymbol{\lambda}^L \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{D}_L^L$  é o operador linear que pode ser escrito como:

$$\mathbf{D}_L^L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} & 1 & 0 \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e a matriz  $\mathbf{N}^L$  e o vetor  $\boldsymbol{\lambda}^L$  são idênticos aos seus respectivos na análise não-linear (equação (3.25) e (3.22), respectivamente) porém considerando apenas os graus de liberdade interpolados pela análise linear, mostrados na equação (2.30).

Dessa forma, inserindo a equação (3.41) na equação (3.39), obtém-se a energia de deformação, com as constantes do MRR em evidência. Portanto:

$$U_e^L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^{L^T} G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^{L^T} \tilde{\mathbf{R}}_L^L \mathbf{B}_L^L ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}^L \quad (3.43)$$

Nota-se que a diferença entre a energia de deformação considerando grandes deslocamentos (equação (3.14)) e a energia considerando deslocamentos infinitesimais (equação (3.43)) são os dois últimos termos da primeira. Como já dito, estes termos consideram o acoplamento entre os esforços de membrana com o de flexão. Devido à hipótese de Kirchhoff de que, em pequenos deslocamentos, não há essa interação, esses termos não aparecem na energia



de deformação linear (equação (3.43)). Comparando a energia de deformação linear com a não-linear pode-se ver com clareza a influência dos dois termos na última equação. Quando o requisito de pequenos deslocamentos não é satisfeito, ou seja, quando o cosseno do ângulo da superfície média não satisfaz a relação da unidade, a energia externa aplicada à placa deve-se dividir em termos de flexão e de membrana. No entanto, esses efeitos não influem na deflexão da placa de forma separada. Como a curvatura da superfície média é afetada pela flexão e a quantidade de energia inserida nos efeitos de membrana depende desse ângulo, os efeitos se acoplam. Além disso, o acoplamento é majorado com relação a este ângulo. Os efeitos de membrana podem gerar momentos e alterar ainda mais esta inclinação. Além de tudo, pode-se ver que, em deslocamentos infinitesimais, a equação (3.14) se reduz a equação (3.43), pois os termos do vetor  $\boldsymbol{\phi}$ , que contêm as deformações não-lineares, são de ordens menores que o vetor  $\boldsymbol{\chi}$ . Sendo assim, o segundo e o terceiro termo da equação (3.14) ficam de ordens menores em relação ao primeiro. Ou seja, a equação (3.14) se reduz à (3.43) quando em pequenos deslocamentos.

O potencial externo em pequenos deslocamentos, que na análise não-linear é descrito pela equação (3.34), é idêntico considerando apenas que na análise linear apenas três graus de liberdade são interpolados (equação (2.30)), ao invés de cinco.

O funcional da mínima energia potencial (equação (3.1)) então é escrito:

$$\Pi^L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^{L^T} G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^{L^T} \tilde{\mathbf{R}}_L^L \mathbf{B}_L^L ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}^L - \boldsymbol{\lambda}^{L^T} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{P}^L ds_2 ds_1 \quad (3.44)$$

O ponto de estacionariedade é dado por:

$$G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^{L^T} \tilde{\mathbf{R}}_L^L \mathbf{B}_L^L ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}^L - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{P}^L ds_2 ds_1 = 0 \quad (3.45)$$

### 3.3 Adimensionalização do Sistema

Todo o sistema foi adimensionalizado para aumentar a simplicidade do mesmo e para a comparação de resultados, além de torná-los mais gerais. A adimensionalização seguida pelo presente trabalho é semelhante a usada por diversos autores [Lee et. al., 2002; Wang et. al., 2001; Pica et. al., 1980; Rushton, 1970].

A adimensionalização utilizada para o carregamento é:

$$\bar{q}_1 = \frac{q_3 a^4}{E_y h^4} \quad q_3 = \frac{\bar{q}_1 E_y h^4}{a^4} \quad (3.46)$$

sendo que  $q_3$  é o carregamento transversal real aplicado à superfície média,  $\bar{q}_1$  é o carregamento

adimensional e  $a$  é o menor lado da placa.

Tomando-se a equação (3.45), pode-se sugerir um outro adimensional para o carregamento que se ajuste melhor ao caso linear. Este é:

$$\bar{q}_2 = 2(1 + \nu)\bar{q}_1 = \frac{q_3 a^4}{Gh^4} \quad (3.47)$$

onde  $\bar{q}_2$  é um dos adimensionais propostos pelo presente trabalho.

Nota-se que o carregamento real é proporcional ao módulo de elasticidade longitudinal (equação (3.46)) ou transversal (equação (3.47)). Como será visto a seguir (capítulo 3.4.1 para o caso linear e capítulo 3.4.2 para o caso não-linear), pode-se mostrar que a resposta do sistema é linear a este parâmetro constitutivo. O uso desta parametrização no carregamento faz com que a solução independa do módulo de elasticidade longitudinal/transversal.

Com relação a adimensionalização da deflexão transversal, existem duas formas mais utilizadas. Elas são:

$$\bar{w}_2 = \frac{w_0}{h} \quad (3.48)$$

$$\bar{w}_3 = \frac{w_0 D}{q_3 a^4} \quad (3.49)$$

onde  $\bar{w}_2$  e  $\bar{w}_3$  são as deflexões adimensionalizadas,  $w_0$  é o deslocamento da placa em uma posição específica, normalmente no centro da placa. No entanto, para o caso de placas SFSF, pode-se estar se referindo ao deslocamento no meio da aresta livre. O adimensional da equação (3.48) é usado por autores como Pica et. al. [1980] e Rushton [1970]. Já o adimensional da equação (3.49) é utilizado por Lee et. al. [2002] e Wang et. al. [2001], entre outros.

Os adimensionais usados para as tensões resultantes são:

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{q_3 a^2} \quad (3.50)$$

$$\bar{Q}_\alpha = \frac{Q_\alpha}{q_3 a} \quad (3.51)$$

### 3.4 Método de Solução

Tanto a solução do sistema não-linear dado pela equação (3.37) quanto a do sistema linear dado pela equação (3.45) pode ser direta. O MRR não necessita de rotinas de solução iterativas para a obtenção das constantes de interpolação. No entanto, a metodologia utilizada pelo presente trabalho para a obtenção da solução é iterativa para o caso de grandes

deslocamentos (equação (3.37)) e direta para o caso de deslocamentos infinitesimais. O método de Newton-Raphson Modificado será aplicado para a obtenção da resposta não-linear. Já a resposta linear será obtida através da inversão da matriz que contém as funções de interpolação já multiplicada pelos parâmetros constitutivos e geométricos.

### 3.4.1 Solução Direta

Tomando-se o vetor de carga  $\mathbf{P}$ , descrito na equação (2.23), rearranjando-o conforme os graus de liberdade interpolados pela análise linear (equação (2.30)) e considerando apenas carregamentos transversais, tem-se:

$$\mathbf{P}^L = \{q_3 \quad 0 \quad 0\} \quad (3.52)$$

Considera-se então o carregamento adimensional explicitado na equação (3.47). A equação (3.52) pode ser reescrita conforme:

$$\mathbf{P}^L = \frac{\bar{q}_2 Gh^4}{a^4} \{1 \quad 0 \quad 0\} = \frac{\bar{q}_2 Gh^4}{a^4} \mathbf{e}_3 \quad (3.53)$$

Tomam-se então as equações (3.40) e (3.43). A última pode ser reescrita com a modificação da matriz constitutiva na forma:

$$U_e^L = \frac{1}{2} G \boldsymbol{\lambda}^{L^T} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^{L^T} \tilde{\mathbf{R}}_L^L \mathbf{B}_L^L ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}^L \quad (3.54)$$

onde  $\tilde{\mathbf{R}}_L^L = \mathbf{R}_L^L / G$ . Conforme a equação (3.40), a matriz  $\tilde{\mathbf{R}}_L^L$  depende apenas do coeficiente de Poisson, com relação aos parâmetros constitutivos.

Considerando então a equação (3.45) e percebendo-se que o carregamento não depende das variáveis de integração:

$$\boldsymbol{\lambda}^L = \frac{\bar{q}_2 h^4}{a^4} \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^{L^T} \tilde{\mathbf{R}}_L^L \mathbf{B}_L^L ds_2 ds_1 \right]^{-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{e}_3 ds_2 ds_1 \quad (3.55)$$

Nota-se que o valor das constantes é linearmente proporcional ao carregamento parametrizado e que o módulo de elasticidade transversal não influencia na resposta do sistema quando usada a parametrização sugerida na equação (3.47).

Observa-se que o sistema pode ser resolvido com certa facilidade pois as dimensões das matrizes na equação (3.55) são proporcionais ao número de graus de liberdade e do grau do polinômio de interpolação primário. A matriz que será invertida tem dimensões  $5nc \times 5nc$ . Como o valor de  $nc$  depende do grau primário do polinômio de interpolação ( $ng$ ), como mostrado na equação (3.9), o custo desta operação dependerá deste último.

Esta formulação pode ser usada tanto para soluções semi-analíticas como para soluções numéricas. Por causa da primeira, não se pode aplicar decomposições matriciais para evitar ou facilitar a inversão da matriz. Isso porque esta pode conter variáveis literais, podendo assim, tornar essas operações impossíveis ou muito custosas. Como já dito, as dimensões da matriz que será invertida são pequenas ao ponto de não tornar essa operação custosa de forma que se buscasse alternativas para este processo.

### 3.4.2 Método de Newton-Raphson Modificado

O método de Newton-Raphson modificado [Borche, 2008; Faires et. al., 2001; Cohen et. al., 2003] foi utilizado para a obtenção das constantes do sistema não-linear. Este método foi escolhido devido sua fácil implementação e por sua boa convergência, que para casos gerais é quadrática. A modificação no método é utilizada para evitar o cálculo de uma matriz inversa a cada interação, em detrimento da sua convergência.

Sendo assim, considerando uma função algébrica, as raízes da função  $f$  são encontradas na forma:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3.56)$$

Considerando um sistema matricial, conforme explicitado na equação (3.37), a equação (3.56) pode ser escrita como:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \mathbf{J}'(\lambda_0)^{-1} \mathbf{J}(\lambda_i) \quad (3.57)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\lambda_i) = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_L \mathbf{B}_L ds_2 ds_1 \lambda_i + 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{11} \lambda_i \mathbf{V}_1^T ds_1 ds_2 \lambda_i + \\ & + 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{12} \lambda_i \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda_i + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \lambda_i^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{11} \lambda_i \mathbf{V}_1^T ds_2 ds_1 \lambda_i + \\ & + 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \lambda_i^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda_i \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda_i + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_2 \lambda_i^T \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda_i \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \lambda_i - \\ & - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{P} ds_2 ds_1 - \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^T (s_a, s_b) \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}'(\boldsymbol{\lambda}_0) = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_L \mathbf{B}_L ds_2 ds_1 + 6 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{11} \boldsymbol{\lambda}_0 \mathbf{V}_1^T ds_1 ds_2 + \\
& + 6 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{12} \boldsymbol{\lambda}_0 \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 + 6 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{11} \boldsymbol{\lambda}_0 \mathbf{V}_1^T ds_2 ds_1 + \\
& + 12 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \boldsymbol{\lambda}_0 \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 + 6 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_2 \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \boldsymbol{\lambda}_0 \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1
\end{aligned} \tag{3.59}$$

e  $\boldsymbol{\lambda}_0$  é o conjunto de constantes da solução linear.

No entanto, mesmo utilizando a modificação do método de Newton-Raphson, a derivada inicial do problema é extensa e de grande custo computacional, considerando que a mesma poderá ser calculada com parâmetros literais, na solução semi-analítica. Sendo assim, em detrimento da convergência, todos os termos não-lineares foram desconsiderados. Espera-se então, que a medida que os efeitos não-lineares se tornem aparentes, a convergência da solução desacelere. Então, a equação (3.59) pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{J}' = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_L \mathbf{B}_L ds_2 ds_1 \tag{3.60}$$

que é independente das constantes do sistema.

A solução do sistema, descrito na equação (3.37), é dada como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_{i+1} = & \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_L \mathbf{B}_L ds_2 ds_1 \right]^{-1} \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{P} ds_2 ds_1 + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^T(s_a, s_b) \mathbf{F} - \right. \\
& - 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{11} \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{V}_1^T ds_1 ds_2 \boldsymbol{\lambda}_i - 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{12} \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}_i - \\
& - 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{11} \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{V}_1^T ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}_i - 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}_i \\
& \left. - 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{V}_2 \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{V}_2^T ds_2 ds_1 \boldsymbol{\lambda}_i \right]
\end{aligned} \tag{3.61}$$

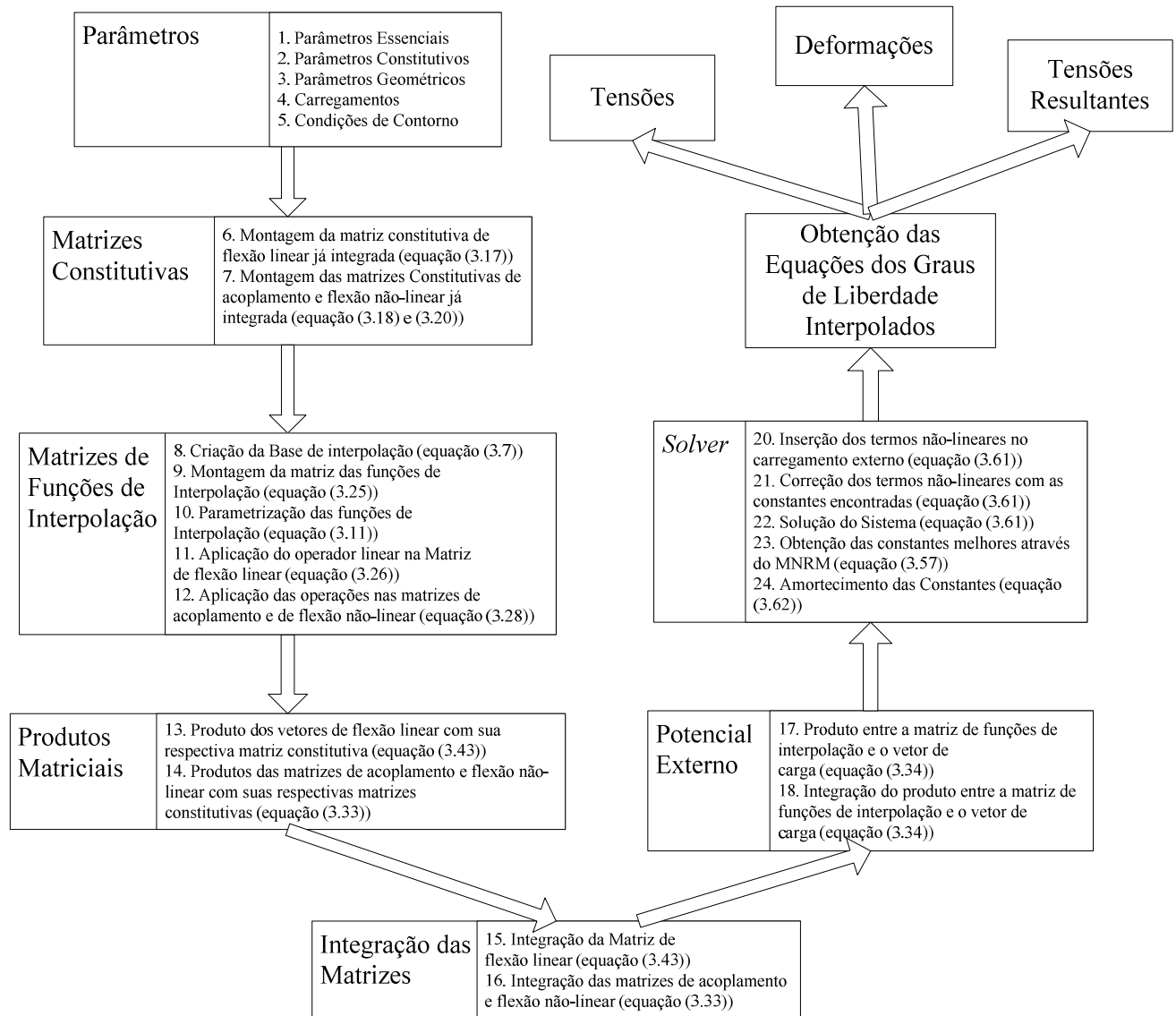
Dessa forma, obtêm-se um novo conjunto de constantes, insere-se este na equação (3.57) e obtêm-se uma nova estimativa. Após isso, para evitar a divergência da solução, um fator de relaxação é adotado que altera o vetor de constantes na forma:

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1} = \rho \boldsymbol{\lambda}_i + (1 - \rho) \boldsymbol{\lambda}_{i-1} \tag{3.62}$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}_i$  é o conjunto de constantes obtidos resolvendo o sistema da equação (3.61) e  $\boldsymbol{\lambda}_{i-1}$  é o conjunto utilizado para na parte não-linear. Então, o novo conjunto obtido na equação (3.62) é aplicado na parte não-linear da equação (3.61). Sendo assim, esses passos são repetidos a cada

interação até a obtenção da convergência.

### 3.4.3 Fluxograma do Programa



**Figura 3.4 - Fluxograma do programa**

Para melhor mostrar os métodos de solução utilizados neste trabalho, é necessário indicar o funcionamento do programa criado para a obtenção da resposta. A rotina do programa é a mesma para a análise linear quanto para a não-linear, exceto que na primeira apenas um único passo é requerido (análise não-iterativa).

A inserção dos parâmetros, no início da rotina, é a posição de entrada dos dados para a análise. Os parâmetros essenciais são: número do grau do polinômio de interpolação de cada um dos graus de liberdade; uma *flag* para informar se a análise é linear ou não-linear; sendo esta

não-linear, parâmetros como relaxamento da solução e número máximo de iterações também são informados. Considerando que a análise é elástica, nos parâmetros constitutivos é necessário indicar ao programa o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson. Nos parâmetros geométricos, são inseridos os vértices e a espessura da placa. Conforme a posição dos pontos, a possibilidade de se analisar placas quadrangulares não retangulares é considerada pelo programa. O carregamento aplicado é parametrizado conforme a equação (3.47). As condições de contorno são aplicadas nas arestas como mostra a equação (3.4).

Dessa forma, o resto da rotina é automático, em funções dos parâmetros inseridos. A montagem da matriz constitutiva para a análise linear é feita com seus termos já integrados. O mesmo ocorre para as matrizes de acoplamento e de flexão não-linear. No entanto, este último passo é produzido apenas se a análise for não-linear.

Sendo assim, é criada a base de interpolação dos graus de liberdade. A dimensão da mesma vai depender do grau do polinômio primário inserido nos parâmetros e dos graus de liberdade interpolados. Uma base é criada para cada grau de liberdade, já cinematicamente admissível para as condições de contorno aplicadas ao sistema. De tal modo, a matriz  $\mathbf{N}$  (equação (3.25)) é criada com essas bases. Esta matriz é parametrizada conforme explicado na seção 3.1.1. É aplicado o operador linear,  $\mathbf{D}_L$  (equação (3.27)) para análise não-linear e  $\mathbf{D}_L^L$  (equação (3.42)) para o caso linear, à matriz  $\mathbf{N}$ , gerando a matriz  $\mathbf{B}_L$  (equação (3.26)) para grandes deslocamentos e  $\mathbf{B}_L^L$  (equação (3.41)) para deslocamentos infinitesimais. As operações listadas nas equações (3.28) – (3.32) e (3.35), detalhadas no anexo I, são aplicadas caso a análise não-linear seja solicitada. Dessa forma, as matrizes  $\mathbf{B}_{1\alpha}$  (equação (3.35)) e os vetores  $\mathbf{V}_\alpha$  (equação (3.35)) são gerados.

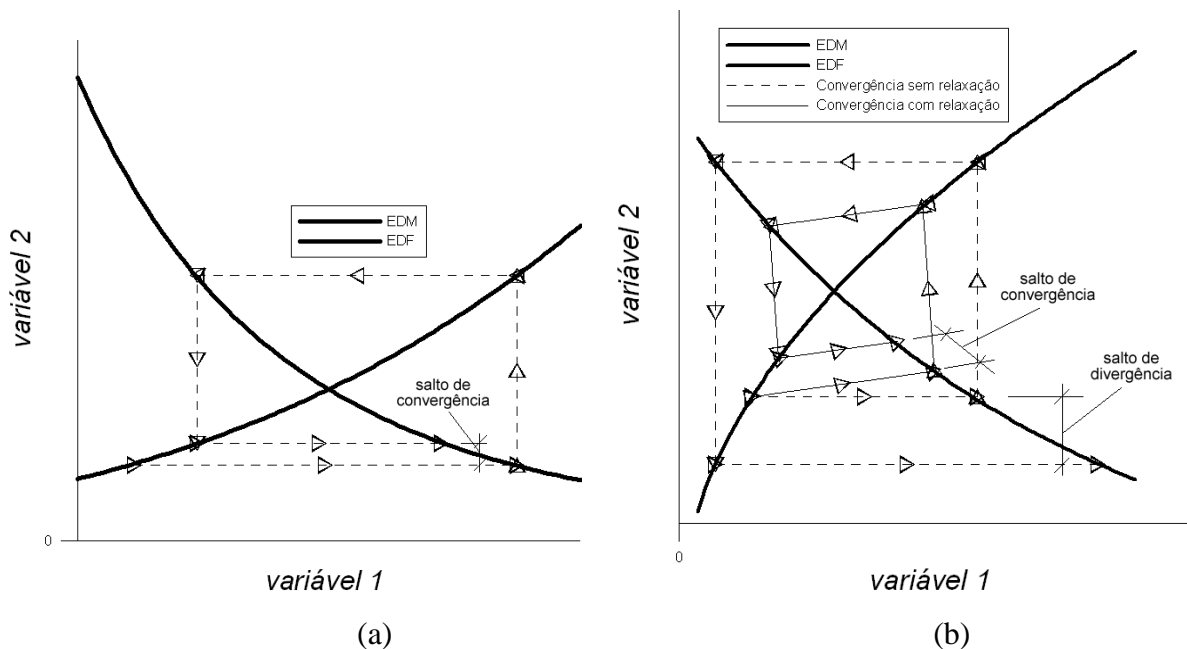
Então, são realizados os produtos matriciais. Inicialmente, o produto da matriz de interpolação aplicada ao operador linear com sua respectiva matriz constitutiva é feito. Neste ponto, respeita-se o caso da análise considerar grandes deslocamentos ou não. Aqui, a matriz de interpolação aplicada ao operador linear é que muda:  $\mathbf{B}_L$  para não-linear geométrico e  $\mathbf{B}_L^L$  para o linear. A matriz constitutiva muda também, porém apenas pela matriz que detém a coordenada normal à superfície média:  $\mathbf{H}$  (equação (2.34b)) para o caso linear e  $\mathbf{Z}$  (equação (2.10c)) para o caso não-linear. Portanto, os produtos das matrizes de acoplamento e flexão não-linear são feitos respeitando o caso no qual são inseridos esses efeitos.

A seguir, o produto da matriz de flexão linear é integrado em relação às variáveis do sistema de coordenadas natural,  $s_1$  e  $s_2$ . Os produtos das matrizes de acoplamento e das matrizes de flexão não-linear são integrados também pelas mesmas variáveis independentes

respeitando novamente a consideração da análise ser não-linear ou não.

Neste ponto, a energia de deformação está completamente computada. O potencial externo é obtido pelo produto da matriz das funções de interpolação pelo vetor de carga. Este produto é integrado nas variáveis independentes  $s_1$  e  $s_2$ .

Desse modo, o sistema está completo e em função apenas das constantes, no caso numérico, e dos parâmetros selecionados para a resposta semi-analítica, no caso semi-analítico. Então, as constantes são inseridas na parte não-linear que é somada ao carregamento externo, como mostra a equação (3.61). Como já dito, no passo inicial as constantes da solução linear são substituídas. Fica claro que este passo só ocorre na análise não-linear. Sendo assim, o sistema é resolvido e novas constantes são obtidas. Essas então, são modificadas pelo Método de Newton-Raphson Modificado e amortecidas pelo parâmetro de relaxação já citado (seção 3.4.2).



**Figura 3.5 - Esquema de convergência das equações diferenciais de membrana e flexão: (a) sistema convergente (b) sistema divergente sem fator de relaxação e convergente com este fator**

Através das Figura 3.5, pode-se notar de maneira esquemática, a forma como o fator de relaxação atua na solução iterativa. As linhas mais espessas correspondem às soluções das equações diferenciais quando submetidas à um carregamento qualquer onde EDM relaciona as soluções das equações diferenciais de membrana e EDF as soluções de flexão. A resposta no qual os dois efeitos estão incluídos é o ponto de interseção entre as duas curvas. Nota-se que o sistema pode entrar em convergência em casos no qual a metodologia sem o fator de relaxação divergiria (Figura 3.5(b)). No entanto, pode-se perder em velocidade de convergência, quando este fator atua em soluções que convergiriam normalmente.



Então, com as constantes convergidas, são montadas as equações dos graus de liberdade interpolados e a partir dessas, são encontradas as tensões, deformações e tensões resultantes da placa, dentro do domínio normalizado.

### 3.5 Soluções Procuradas

As soluções estritamente numéricas são função de parâmetros fixados numericamente, como coeficiente de Poisson, razão de aspecto de lados e de espessura bem como as condições de contorno. Como na literatura já existem soluções analíticas lineares para placas baseadas na formulação de Mindlin [Lee et. al., 2002, Wang et. al., 2001], estas análises foram produzidas para verificar a convergência numérica a estas soluções. Os valores utilizados para a razão de aspecto de lados ( $r$ ) foram: 1, 2 e 5. Já para a razão de aspecto da espessura ( $\eta$ ), foram usados os valores de 0,001, 0,01, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2 e 0,25. O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) foi fixado em 0,3. As condições de contorno, como já mencionado, foram SSSS, CCCC, SFSF e SCSC. O carregamento da análise linear é considerado unitário e para a análise não-linear o mesmo utilizado para a análise via MEF. Este último será explicado no próximo capítulo.

Já as soluções semi-analíticas são função dos parâmetros considerados como literais, e têm a forma geral:

$$w = f(q_3, \eta, \nu, r) \quad (3.63)$$

onde  $w$  é o deslocamento transversal central da placa. As condições de contorno não foram consideradas parâmetros literais, pois estas alteram fortemente a resposta além de serem base para a criação do polinômio interpolador (equação (3.7)).

Foi observado que para análises que consideravam dois ou mais parâmetros literais, o consumo de memória era tal que o software de computação algébrica não suportava a grande necessidade de manipulação desta gerando erros fatais ou a simples não solução do sistema. Dessa forma, as equações obtidas foram através de apenas um parâmetro. O parâmetro considerado principal, neste caso, foi a razão de aspecto da espessura ( $\eta$ ). Sendo assim, a forma da equação procurada pode ser reescrita como:

$$w_0 = \bar{q}_2 f(\eta) \quad (3.64)$$

onde:

$$f(\eta) = \sum_{i=1}^{n\eta} a_i \eta^{i-1} \quad (3.65)$$

sabendo que  $n\eta$  é o número de constantes da interpolação da equação semi-analítica e  $a_i$  são as

constantes obtidas através da minimização do erro da curva obtida na resposta da análise. O método utilizado é o dos Mínimos Quadrados [Borche, 2008; Faires et. al., 2001, Cohen et. al., 2003], foi utilizado para encontrar de forma automática os valores que modificavam o valor final da resposta da equação. Ou seja, foi verificado o valor de  $n\eta$  no qual a equação (3.64) convergia a um dado número de dígitos significativos. Além disso, como será visto no capítulo 4, o valor da derivada  $(d\bar{q}_2/dw_2)$  tem grande importância na análise. Dessa forma, também foi verificada a convergência deste valor, com relação ao valor de  $n\eta$ .

## 4. AJUSTE DE PARÂMETROS

Este capítulo tem por objetivo explicar a metodologia utilizada para o ajuste de parâmetros em análises não-lineares solucionadas por um *software* comercial [Ansys v11.0, 2008], baseado no MEF. Diversas análises foram submetidas a este programa, variando os parâmetros sensíveis a este problema. As soluções obtidas foram inseridas em uma metodologia de sucessivos mínimos quadrados para a obtenção de equações genéricas para a deflexão central de placas deformáveis ao cisalhamento transversal. O uso desta metodologia visa a obtenção do comportamento dos parâmetros em relação à resposta para então, obter equações gerais para a deflexão central em função desses parâmetros. Essas equações poderão ser usadas como *benchmark* assim como referências rápidas a engenheiros que necessitem de respostas de placas sob grandes deslocamentos sem a necessidade de uma modelagem numérica.

Conforme dito acima, os parâmetros sensíveis à resposta de deflexão central de placas foram variados. Com isso, pode-se obter o comportamento dessas variáveis em relação ao deslocamento da placa. Notou-se que o conjunto de carregamento utilizado por Pica et. al. [1980] e Singh e Elaghabash [2003] só pode ser utilizado para placas finas. Dessa forma, um novo conjunto de carregamentos é sugerido, em função da forma da curva carga-deslocamento e do limite físico encontrado de carregamento real.

Ainda assim, uma nova parametrização do carregamento é sugerida a fim de minorar a influência do coeficiente de Poisson na resposta final. Isso faria com que a equação geral obtida através desta metodologia fosse dependente apenas dos parâmetros geométricos da placa.

### 4.1 Parâmetros das Análises

Os parâmetros considerados no presente trabalho são como parâmetros constitutivos: o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson; como parâmetros geométricos: a razão de aspecto de lados e razão de aspecto da espessura da placa; as condições de contorno e o

carregamento. Cada uma dessas variáveis influencia na resposta de sua forma, porém as condições de contorno alteram fortemente a solução. Sendo assim, as análises serão classificadas através deste parâmetro.

Análises preliminares foram produzidas a fim de se conhecer as características da resposta bem como a sensibilidade desta em relação aos parâmetros variados. Como neste método é necessário a entrada de uma equação interpoladora, um estudo sobre o comportamento desses parâmetros, um em relação ao outro, foi produzido a fim de se obter as curvas ótimas para a interpolação de cada efeito. Curvas ótimas são aqui empregadas para descrever curvas com o menor erro e com o menor número de constantes possível.

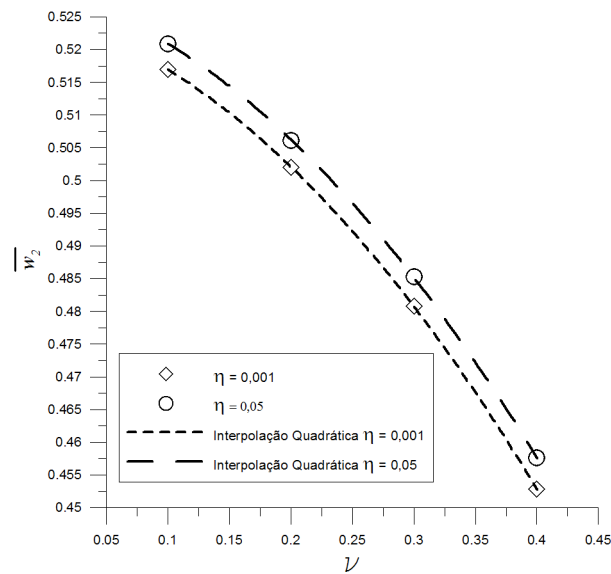
#### 4.1.1 Condições de Contorno

Foram analisadas duas condições de contorno: SSSS e CCCC. Elas foram escolhidas pelo fato de serem simétricas e por haver alguns resultados para placas finas sob grandes deslocamentos. Além disso, também foram escolhidas por serem as mesmas condições de contorno que as análises lineares produzidas. A importância das análises sob hipótese de pequenos deslocamentos será mostrada na interpolação das curvas pelo método dos mínimos quadrados.

#### 4.1.2 Parâmetros Constitutivos

Foi verificado que a influência do módulo de elasticidade longitudinal na resposta é linear. Isso pode ser visto na equação (3.33), que rege a energia de deformação. Considerando que o carregamento parametrizado será idêntico ao da equação (3.46), este parâmetro não influencia na resposta. É importante ressaltar que o módulo de elasticidade influencia na resposta, como já dito. No entanto, como o sistema utilizado é adimensional, sua influência na resposta parametrizada é nula. Dessa forma, nenhum valor específico de módulo de elasticidade longitudinal foi usado. No entanto, para a inserção do sistema no software comercial baseado em MEF, o valor deste parâmetro constitutivo foi considerado como  $2 \cdot 10^{11}$  Pa, semelhante ao valor do aço.

O coeficiente de Poisson afeta a rigidez da flexão bem como a rigidez de membrana da placa. Este não pode ser retirado do sistema como o módulo de elasticidade longitudinal. No entanto, seu efeito pode ser reduzido através da escolha de novos adimensionais de carga e deslocamento, conforme será mostrado. Serão propostos dois tipos de equações gerais: uma considerando o efeito da compressibilidade e outra invariante a este. Dessa forma, para a primeira, os valores de coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) utilizados são: 0,1, 0,2, 0,3 e 0,4.



**Figura 4.1** -  $\bar{w}_2 \times \nu$  ( $\bar{q}_1 = 14,41$  e  $r = 1$ )

Utilizando os adimensionais propostos, equação (3.46) e equação (3.48), e considerando todos os outros parâmetros fixos (ou seja, razão de aspecto de lados e espessura bem como o carregamento parametrizado aplicado), a variação da deflexão central em relação à compressibilidade da placa pode ser descrito como um polinômio quadrático (Figura 4.1). Os valores do coeficiente de regressão nessas interpolações foram muito próximos da unidade. Os valores utilizados na Figura 4.1 são apenas exemplos. Esses valores foram utilizados para demonstrar que uma interpolação polinomial quadrática se comporta bem com a variação da resposta do sistema em função dos parâmetros variados ( $\bar{w}_2$  e  $\nu$ ).

#### 4.1.3 Parâmetros Geométricos

Serão verificadas seis razões de aspecto de lados ( $r$ ): 1, 1,35, 1,65, 2, 3 e 4. O menor lado ( $a$ ) terá sempre o valor unitário. Sendo assim, o maior lado ( $b$ ) toma os valores acima citados. A variação da  $\bar{w}_2 \times r$  pode ser caracterizada por um polinômio cúbico. Esta variação unida a interpolação está mostrada na Figura 4.2. Conforme a Figura 4.1, os valores são apenas exemplos da interpolação deste efeito. Observa-se, que esta curva tende a uma assíntota. Isso pode ser explicado utilizando a analogia de Euler quando este descreveu a superfície média de uma placa com cordas perpendiculares entre si. Considerando o caso no qual a placa é quadrada ( $r = 1$ ), ambas as direções tem a mesma rigidez e então, ambas influenciam no deslocamento transversal central. No entanto, a medida que a razão de aspecto de lados aumenta, a rigidez do lado maior diminui, tornando a placa mais flexível, fazendo com que o lado menor seja o maior responsável pela rigidez da placa, em relação ao deslocamento transversal. Dessa forma, chega-

se a um valor no qual a influência do lado maior na rigidez da placa cessa e a partir deste ponto, não é necessária a inserção da sua influência na análise de placas.

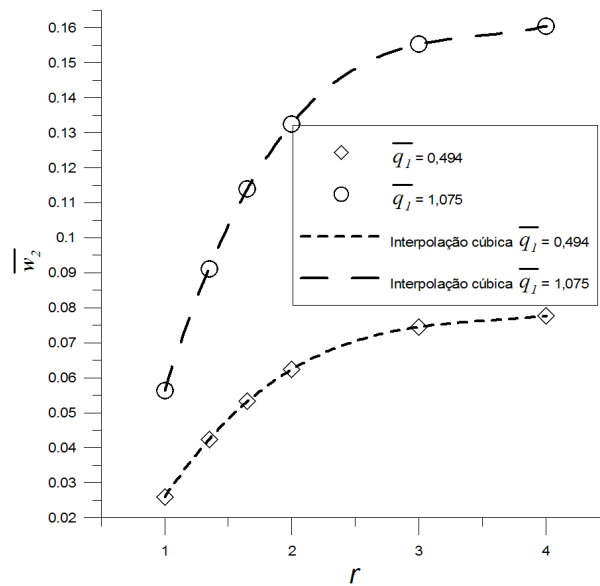


Figura 4.2 -  $\bar{w}_2 \times r$  ( $\nu = 0,3$  e  $\eta = 0,15$ )

Seis valores de razão de aspecto de espessura ( $\eta$ ) diferentes foram considerados: 0,001, 0,01, 0,05, 0,1, 0,2 e 0,25. Foi verificado através de análises preliminares que poucos valores de  $\eta$  não geravam equações gerais fisicamente corretas. Sendo assim, mais seis valores de  $\eta$  foram adicionados ao conjunto explicitado acima (0,025, 0,075, 0,125, 0,15, 0,175 e 0,225). A variação de  $\bar{w}_2$  com a  $r$  pode ser descrita como um polinômio cúbico, como mostra a Figura 4.3.

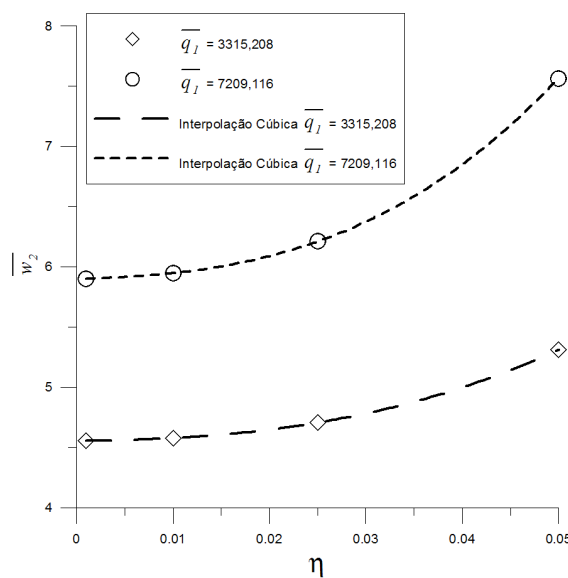


Figura 4.3 -  $\bar{w}_2 \times \eta$  ( $\nu = 0,1$  e  $r = 1$ )

Conforme a Figura 4.1 e Figura 4.2, os valores utilizados na plotagem da interpolação na Figura 4.3 são apenas exemplos dos valores utilizados.

#### 4.1.4 Carregamento

Com as análises preliminares, considerando deslocamentos finitos, foram encontrados diversos problemas com relação a convergência da resposta. Foi visto que os carregamentos utilizados por Pica et. al. [1980] e Singh e Elaghabash [2003] só podem ser aplicados em placas finas. Sendo assim, um estudo sobre a sensibilidade da resposta do sistema, variando-se todos os outros parâmetros da análise, em relação ao carregamento máximo aplicado foi produzido em um novo conjunto de carregamentos foi sugerido.

Inicialmente, considerando-se um problema de convergência numérica de uma solução não-linear, procurou-se elementos distorcidos na malha na configuração deformada. No entanto, como esperado, nenhum elemento estava distorcido. Isto só foi feito como uma averiguação já que, como já dito, placas sob grandes deslocamentos, excitadas transversalmente, não sofrem grandes deformações (capítulo 2.1.4). Então foi visto que a superfície deformada da placa, passos antes da perda de convergência, nas razões de aspecto de espessura acima de 0,05, apresentava problemas no contorno. Os elementos da superfície média deformada, no contorno, estavam praticamente perpendiculares à superfície média indeformada. Ou seja, a rotação normal a aresta da placa estava praticamente em  $\pi/2$ . O estudo da rigidez de placas sob estas condições é um campo muito interessante, matematicamente. No entanto, o objetivo deste trabalho é a obtenção de equações genéricas para placas sob grandes deslocamentos que sejam práticas. Placas com estas condições já chegaram ao escoamento. Dessa forma, como já dito, foi feita uma análise sobre os carregamentos máximos possíveis, considerando a variação de todos os outros parâmetros considerando como limite a proximidade de perpendicularidade dos elementos no contorno da placa.

A razão de aspecto de lados da placa ( $r$ ) influenciou relativamente pouco. O carregamento máximo se reduziu cerca de 30%, relacionando a maior com o menor valor de  $r$ . O motivo deste decréscimo é o fato de que quanto maior o valor de  $r$ , menor sua rigidez. Considerando que o objetivo deste capítulo é a geração de equações de resposta em função do maior número de parâmetros, a carga máxima considerada será àquela na qual a placa tem  $r = 4$ .

Outro parâmetro importante considerado nesse estudo foi a razão de aspecto de espessura ( $\eta$ ) da placa. Esta influenciou fortemente no carregamento máximo aplicado. Dois motivos foram encontrados para essa grande influência: a parametrização do carregamento e a flexibilidade aparente adicionada quando se considera a deformação pelo cisalhamento

transversal. A flexibilidade é dita aparente pois é sabido que a rigidez de flexão de placas e a rigidez de membrana de placas são cubicamente e linearmente proporcionais à espessura, respectivamente. No entanto, os efeitos da deformação cisalhante transversal são majorados pela espessura. Além disso, a carga real, aplicada a superfície média, é quarticamente proporcional a espessura (equação (3.46)). Sendo assim, um pequeno aumento na espessura gera um grande aumento no carregamento não parametrizado aplicado à placa.

As condições de contorno também alteraram fracamente as cargas máximas aplicadas à placa. Notou-se que a condição de contorno CCCC não obtinha convergência com os mesmos valores que placas com condições de contorno SSSS. No entanto, a diferença entre ambas ficou em cerca de 5% no carregamento máximo.

Quanto os parâmetros constitutivos, o módulo de elasticidade longitudinal, como já dito, não tem nenhum efeito sobre o carregamento máximo parametrizado. Já o coeficiente de Poisson influencia fracamente, sabendo-se que quanto maior o valor da compressibilidade do material, menor a carga máxima.

Dessa forma, após se concluir as análises preliminares, os carregamentos máximos aplicados na superfície média foram obtidos e estão listados na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1 -  $\bar{q}_1$  máximo em relação as razões  $\eta$  e condições de contorno**

$\eta$	0,001 - 0,05	0,075 - 0,1	0,125 - 0,2	0,225 - 0,25
SSSS	7209,1156	908,2	113,648	58,5636
CCCC	7209,1156	862,79	107,9656	55,63542

É importante mencionar que os valores do carregamento máximo nas razões  $\eta = 0,001$  e  $\eta = 0,01$  não foram limites. Estes podem chegar a até duas vezes os valores listados na Tabela 4.1. No entanto, estes valores foram usados iguais à razão  $\eta = 0,05$  para melhor conveniência na representação das equações de resposta.



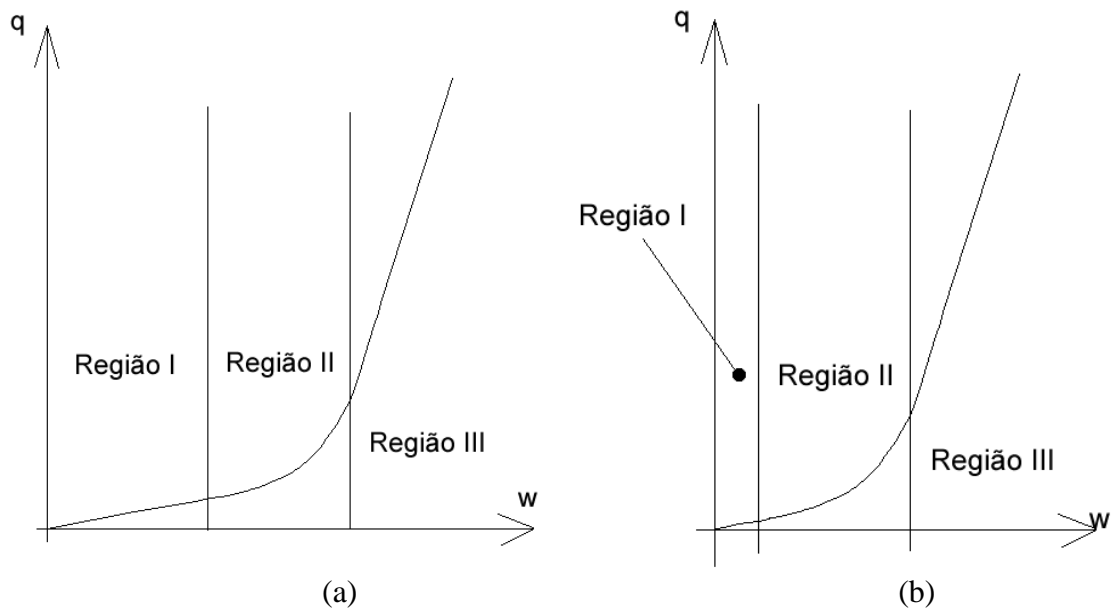


Figura 4.4 - Exemplo de uma curva carga  $\times$  deslocamento: (a) baixos valores de  $\eta$  (b) altos valores de  $\eta$

A sugestão de uma nova classe de carregamentos foi feita a partir dos carregamentos máximos, listados na Tabela 4.1, da forma das curvas carga  $\times$  deslocamentos obtidas nas análises preliminares. Essas curvas tem a característica de iniciarem com uma reta (região linear) e logo que entram no regime não-linear, aumentam sua derivada rapidamente. Então, quando os termos não-lineares de deformação têm ordem superior aos lineares, novamente a curva se estabiliza com uma pequena derivada segunda. Observa-se o comportamento da trajetória cinemática na Figura 4.4. Nota-se que para baixas razões de aspecto de espessuras, a região I é mais predominante. Com o aumento desta razão, esta região se torna menor no gráfico carga  $\times$  deslocamento.

Sabendo-se que as equações para a representação da resposta serão aproximadas pelo método dos Mínimos Quadrados, devem-se concentrar os pontos nas regiões de interesse. Em interpolações preliminares, foi visto que os maiores erros se encontravam na região I, principalmente nos pontos mais próximos à origem. Dessa forma, o conjunto de carregamentos deve estar mais concentrado nessa região. Sendo assim, foi proposto que o conjunto de cargas seguiria uma progressão geométrica com nove carregamentos na qual:

$$\bar{\mathbf{q}}_1 = \{\bar{q}_{1,1} \quad \bar{q}_{1,2} \quad \bar{q}_{1,3} \quad \bar{q}_{1,4} \quad \bar{q}_{1,5} \quad \bar{q}_{1,6} \quad \bar{q}_{1,7} \quad \bar{q}_{1,8} \quad \bar{q}_{1,9}\} \quad (4.1a)$$

$$\bar{q}_{1,1} = 0,002 \bar{q}_{1,9} \quad (4.1b)$$

onde:

$$\bar{q}_{1,i} = \bar{q}_{1,1} t^{i-1} \quad (4.1c)$$

$$t = 2,17 \quad (4.1d)$$

Com relação às características da curva carga-deslocamento, pode-se dizer que a mesma corresponde a um polinômio cúbico, quando em baixas razões de aspecto de espessura. Isso pode ser visto nas aproximações de Banerjee e Datta [1981] e Chia [1980], que utilizam polinômios nessa ordem para a solução da deflexão central em relação ao carregamento transversal aplicado. Sabe-se, no entanto, que os mesmos utilizaram a teoria clássica de placas como base de suas análises. Considerando placas semi-espessas, este grau polinomial não tem enriquecimento suficiente para interpolar o comportamento desta curva. Ainda assim, mesmo com a utilização de graus polinomiais maiores, duas condições básicas não são satisfeitas: a curva inicia com derivada negativa em muitos casos, e ocorria uma inflexão espúria na região intermediária da curva. As soluções desses problemas são demonstradas na seção 4.2.

#### 4.1.5 Elemento Finito

Diversos elementos finitos foram testados. O escolhido foi aquele que obteve os maiores deslocamentos parametrizados. Muitos problemas de convergência foram observados, principalmente àqueles já citados. O elemento finito eleito, dentre todos aqueles disponíveis foi o elemento de 8 nós, isoparamétrico, *Serendipity* e com interpolação mista dos componentes tensoriais (Figura 4.5). Este é formulado através do artigo de Bathe e Dvorkin [1986] e obteve os maiores valores de  $\bar{w}_2$  em relação ao outros elementos implementados neste programa comercial. Conforme o manual do Ansys v11.0 [2008], este elemento segue a teoria de primeira ordem do cisalhamento transversal. Este elemento fixa o valor do fator de correção do cisalhamento transversal ( $\kappa^2$ ) em 5/6. Com este elemento, foi possível chegar a deslocamentos parametrizados de até 6 vezes a espessura, em placas finas. Em placas semi-espessas, foi possível obter valores de 1,5 a espessura (razão de aspecto da espessura 0,25).

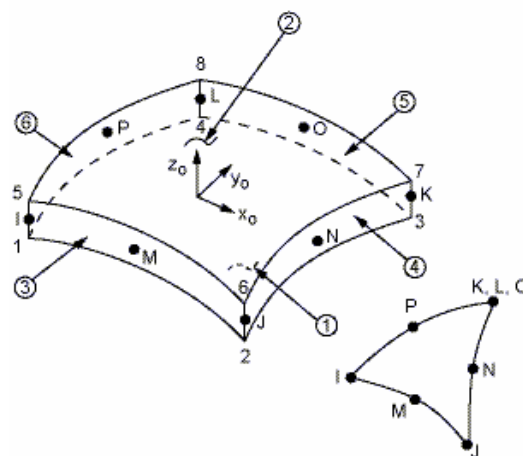


Figura 4.5 - Elemento SHELL281 [Ansys v.11, 2008]

## 4.2 Metodologia

O método utilizado para a obtenção da superfície de resposta dos diversos parâmetros de placas semi-espessas sob não-linearidade geométrica foi o método dos Mínimos Quadrados. Através da variação desses parâmetros, como já citado, pode-se ajustar equações gerais do tipo carga x deslocamento.

### 4.2.1 Equações Gerais

A curva carga × deslocamento foi interpolada através de uma combinação linear de monômios. A Figura 4.6 demonstra os passos de obtenção da superfície de resposta com relação à variação dos parâmetros já citados.

Inicialmente, diversas análises de placas sob não-linearidade geométrica foram produzidas com relação aos parâmetros já citados nas seções de 4.1.2 a 4.1.4. Através das respostas dessas análises foram produzidas curvas carga × deslocamento (item (a) da Figura 4.6), nas quais todos os outros parâmetros eram fixos. Essa interpolação pode ser descrita como:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = \sum_{i=1}^{nw} b_i \bar{w}_2^i \quad (4.2)$$

onde  $b_i$  são as constantes da interpolação que serão encontradas através do método dos Mínimos Quadrados e  $nw$  é o grau do polinômio de interpolação.

No entanto, não se pode utilizar diretamente a equação (4.2) para a interpolação do conjunto de dados obtidos via MEF. Os ajustes tinham características físicas incoerentes: a derivada inicial era negativa e o monômio quadrático gerava uma inflexão na curva, entre as regiões I e II (vide Figura 4.4). Nota-se que nas soluções apresentadas por Banerjee e Datta [1981] e Chia [1980], esse termo não aparece.

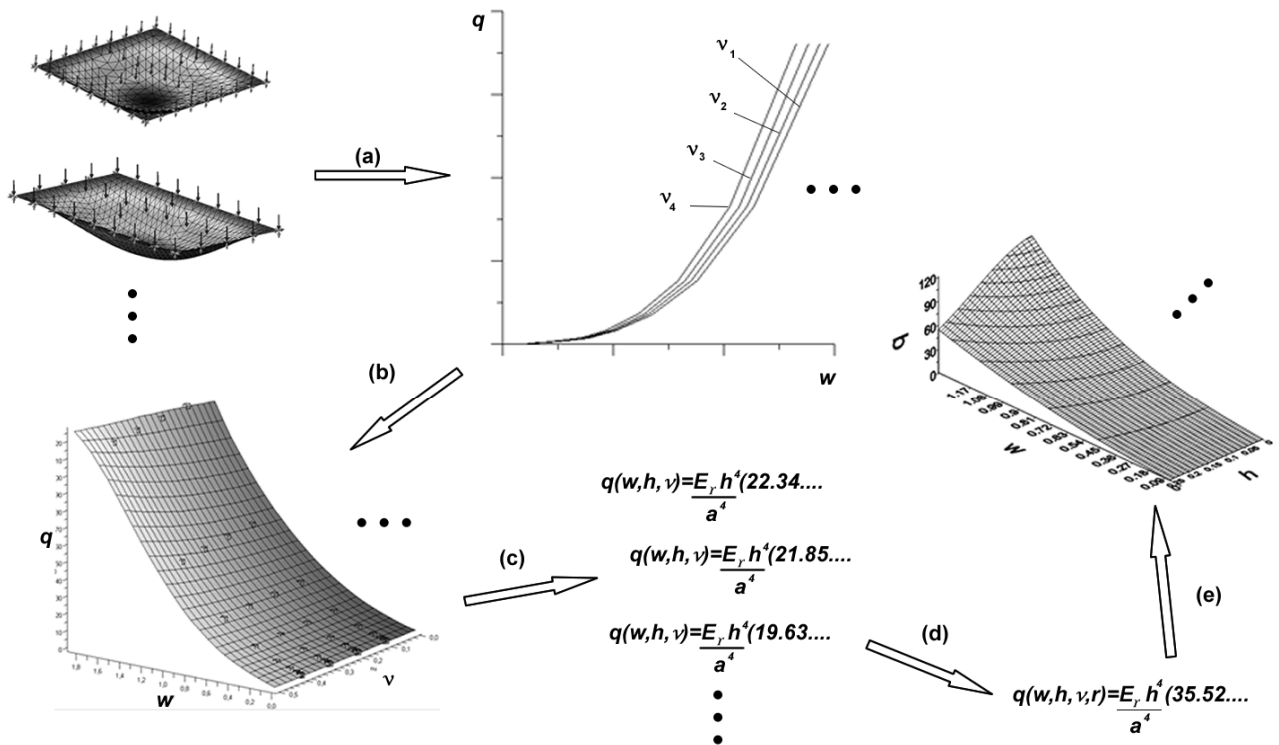


Figura 4.6 - Esquema da obtenção das equações genéricas

Para a solução destes problemas, duas medidas foram adotadas. A primeira é com relação a derivada inicial. Pode-se inserir esta informação no método dos Mínimos Quadrados. Inicialmente, deriva-se a equação (4.2) considerando deslocamento nulo, obtendo:

$$\frac{d\bar{q}_1}{d\bar{w}_2} = \sum_{i=1}^{mw} i b_i \bar{w}_2^{i-1} \therefore \left. \frac{d\bar{q}_1}{d\bar{w}_2} \right|_{\bar{w}_2=0} = b_1 \quad (4.3)$$

Considerando que na região próxima à origem o comportamento ainda é linear, pode-se utilizar as fórmulas semi-analíticas para placas semi-espessas no regime linear. Da derivada da equação (3.64):

$$\frac{d\bar{q}_1}{d\bar{w}_2} = \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta)} \quad (4.4)$$

Para resolver a segunda questão o monômio quadrático foi retirado da interpolação. No entanto, isso aumentava os erros nos ajustes quando em altos valores de  $\eta$  ( $\eta > 0,1$ ). Sendo assim, o polinômio interpolador teve de ser enriquecido para que esses erros se mantivessem pequenos.

A combinação linear utilizada para a interpolação da curva carga-deslocamento, após as modificações supramencionadas, é:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} b_i \bar{w}_2^i \quad (4.5)$$

Para a obtenção das constantes  $b_i$  em relação ao método dos Mínimos Quadrados e que as mesmas considerem a informação da derivada inicial fixa, uma simples modificação no carregamento foi aplicada, de tal modo que:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) - \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta)} \bar{w}_2 = \sum_{i=3}^{nw} b_i \bar{w}_2^i \quad (4.6)$$

As constantes são então obtidas através da solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} {}^1\bar{w}_2^3 & {}^1\bar{w}_2^4 & \dots & {}^1\bar{w}_2^{nw} \\ {}^2\bar{w}_2^3 & {}^2\bar{w}_2^4 & \dots & {}^2\bar{w}_2^{nw} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{np}\bar{w}_2^3 & {}^{np}\bar{w}_2^4 & \dots & {}^{np}\bar{w}_2^{nw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{nw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1({}^1\bar{w}_2) - \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta)} {}^1\bar{w}_2 \\ \bar{q}_1({}^2\bar{w}_2) - \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta)} {}^2\bar{w}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_1({}^{np}\bar{w}_2) - \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta)} {}^{np}\bar{w}_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

O sobre-índice a direita dos dimensionais referenciam os valores das análises via MEF.  $np$  considera o número de pontos da curva. De acordo com o vetor de carregamento (equação (4.1a)) proposto na seção 4.1.4, é definido  $np = 9$ .

No entanto, a matriz da equação (4.7), na maioria das vezes é retangular, ou seja, sem solução direta. Dessa forma, o método dos Mínimos Quadrados é aplicado para o melhor ajuste das constantes  $b_i$ . Nota-se que a informação da derivada é inserida através da retirada da sua influência no carregamento externo.

Pode-se ver que a equação (4.7) deve ser utilizada para cada um dos valores de coeficientes de Poisson, razão de aspecto de lados e de espessura. Considerando os valores já citados para estes parâmetros, obtêm-se 288 curvas para cada uma das condições de contorno. Portanto, levando em conta as condições de contorno, resultam 576 curvas.

A consideração do coeficiente de Poisson foi feita como mostra a equação:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2, \nu) = \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{n\nu} d_{ij} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \quad (4.8)$$

onde  $d_{ij}$  são os coeficientes da combinação linear. A obtenção da equação (4.8) corresponde ao item (b) da Figura 4.6. Essas constantes podem ser encontradas através do método dos Mínimos Quadrados utilizando como base as análises produzidas pelo MEF. No entanto, pode-se minimizar seu erro com relação aos coeficientes da curva carga-deslocamento (equação (4.5)).

Considerando que essas constantes foram obtidas para coeficientes de Poisson fixo ( $\nu_0$ ), pode-se reescrever a equação (4.8) na forma:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2, \nu_0) = \frac{1}{12(1-\nu_0^2)f(\eta)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} d_{ij} \bar{w}_2^i \nu_0^{j-1} \quad (4.9)$$

Para um mesmo coeficiente de Poisson, as equações (4.5) e (4.9) devem ser idênticas. Dessa forma:

$$\sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} d_{ij} \bar{w}_2^i \nu_0^{j-1} = \sum_{i=3}^{nw} b_i \bar{w}_2^i \quad (4.10)$$

que gera:

$$\sum_{j=1}^{nv} d_{3j} \nu_0^{j-1} = b_3 \therefore \sum_{j=1}^{nv} d_{4j} \nu_0^{j-1} = b_4 \quad \dots \quad (4.11)$$

Considerando um conjunto de coeficientes de Poisson testados, a equação (4.11) se transforma em um sistema de equações que pode ser agrupado matricialmente na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^1\nu_0 & {}^1\nu_0^2 & \dots & {}^1\nu_0^{n-1} \\ 1 & {}^2\nu_0 & {}^1\nu_0^2 & \dots & {}^2\nu_0^{n-1} \\ 1 & {}^3\nu_0 & {}^1\nu_0^2 & \dots & {}^3\nu_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & {}^m\nu_0 & {}^1\nu_0^2 & \dots & {}^m\nu_0^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \\ \vdots \\ d_{3 \ n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1b_3 \\ {}^2b_3 \\ {}^3b_3 \\ \vdots \\ {}^mb_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

que dependendo do grau do polinômio interpolador para o coeficiente de Poisson e do número do grau de interpolação da curva carga  $\times$  deslocamento, pode-se tornar um sistema de equações retangular. Dessa forma, o método dos Mínimos Quadrados é utilizado para ajustar o conjunto de constantes  $d_{ij}$  em função das constantes  $b_i$ .

É importante mencionar que o exemplo descrito acima (equação (4.12)) é apenas uma parte do processo para a obtenção do conjunto de constantes  $d_{ij}$ . Para cada grau de interpolação da curva carga-deslocamento é necessária a aplicação do método dos Mínimos Quadrados. Exemplificando, um polinômio de grau 6 nos deslocamentos ( $nw=6$ ) necessita de 4 mínimos quadrados para a obtenção completa das constantes da superfície listada na equação (4.8).

Conforme feito na equação (4.8), a equação com a razão de aspecto da espessura como variável independente fica:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2, \nu, \eta) = \frac{1}{12(1-\nu_0^2)f(\eta)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} \sum_{k=1}^{n\eta} e_{ijk} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \eta^{k-1} \quad (4.13)$$

Considerando que a equação (4.8) foi descrita para uma espessura fixa ( $\eta_0$ ) e adotando a

mesma metodologia para a obtenção dos coeficientes  $d_{ij}$ , pode-se escrever que:

$$\sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} \sum_{k=1}^{n\eta} e_{ijk} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \eta_0^{k-1} = \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} d_{ij} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \quad (4.14)$$

que gera:

$$\sum_{k=1}^{n\eta} e_{31k} \eta_0^{k-1} = d_{31} \quad \therefore \quad \sum_{k=1}^{n\eta} e_{32k} \eta_0^{k-1} = d_{32} \quad \dots \quad (4.15)$$

O conjunto de constantes  $e_{ijk}$  pode ser encontrado através de vários ajustes. A quantidade de ajustes necessária para a obtenção dos coeficientes da equação (4.13) dependerá do grau dos polinômios de interpolação do deslocamento e coeficiente de Poisson. A equação (4.15) corresponde ao item (c) da Figura 4.6. Considerando que a equação (4.13) não pode ser plotada, é possível a obtenção de outras superfícies com relação a outros parâmetros.

Por fim, o parâmetro  $r$  é inserido na equação conforme a razão  $\eta$  e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). A equação geral de placas sob não-linearidade geométrica é dada por:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2, \nu, \eta, r) = \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta, r)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} \sum_{k=1}^{n\eta} \sum_{l=1}^{nr} f_{ijkl} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \eta^{k-1} r^{l-1} \quad (4.16)$$

Pela metodologia já explicada, chega-se à:

$$\sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} \sum_{k=1}^{n\eta} \sum_{l=1}^{nr} f_{ijkl} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \eta^{k-1} r_0^{l-1} = \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{nv} \sum_{k=1}^{n\eta} e_{ijk} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \eta^{k-1} \quad (4.17)$$

obtendo-se:

$$\sum_{l=1}^{nr} f_{311l} r_0^{l-1} = e_{311} \quad \therefore \quad \sum_{l=1}^{nr} f_{312l} r_0^{l-1} = e_{312} \quad \dots \quad (4.18)$$

Novamente, considerando as respostas para vários valores de razão de aspecto de lados, pode-se encontrar os valores das constantes  $f_{ijkl}$  em função das constantes  $e_{ijk}$ . A equação (4.18) é referenciada pelo item (d) da Figura 4.6.

O único fator não influenciado pela inserção dos fatores da superfície foi a derivada inicial. Um dos termos do denominador na equação (4.4),  $f(\eta)$ , depende da razão  $r$ . Através da análise linear, é possível a obtenção deste em função deste parâmetro, considerando novamente, uma interpolação por mínimos quadrados. Sendo assim, como mostrado na equação (4.16), este fator dependerá tanto de  $\eta$  quanto de  $r$ .

Com a metodologia proposta pode-se facilmente obter as equações que compõem a resposta de placas semi-espessas sob grandes deslocamentos através de vários ajustes utilizando

o método dos Mínimos Quadrados.

#### 4.2.2 Equações Independentes do Coeficiente de Poisson

Devido ao padrão verificado nas curvas carga deslocamento em função do coeficiente de Poisson, um novo adimensional é proposto para minimizar o efeito da compressibilidade na resposta. Isto é, a equação geral não dependerá do coeficiente de Poisson e os erros gerados através desta simplificação ficarão em faixas aceitáveis.

A parametrização do carregamento será modificada pela equação:

$$\bar{q}_3 = \frac{\bar{q}_1}{(1+\nu)} = \frac{q_0 a^4}{E_y h^4 (1+\nu)} \quad (4.19)$$

Com essa simples modificação, pode-se unir as curvas carga-deslocamento em uma única curva, com erros aceitáveis. Sendo assim, a obtenção das equações que compreendam os outros parâmetros verificados, isto é, razão de aspecto de espessura e de lados seguem o padrão já explicado no capítulo 4.2, com algumas modificações.

Claramente, não será mais necessária a obtenção da resposta em função do coeficiente de Poisson. Os mesmos problemas observados na explicação anterior, com relação ao monômio quadrático e a derivada inicial da curva, foram encontrados nesta interpolação e os mesmas soluções foram adotadas. No entanto, como pode-se ver na equação (4.3), a derivada inicial depende do coeficiente de Poisson. Dessa forma, foi feito um estudo do comportamento da derivada em função deste coeficiente e foi verificado que, para todos os casos, a consideração deste coeficiente como nulo, na derivada, gerava os menores erros na interpolação. Dessa forma, a equação (4.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\bar{q}_3}{d\bar{w}_2} = \frac{1}{12f(\eta)} \quad (4.20)$$

Não foi encontrada nenhuma explicação física para a consideração do coeficiente de Poisson nulo na derivada do sistema. Isso foi apenas feito devido aos erros da interpolação da curva carga-deslocamento, ou seja, uma consideração heurística.

Dessa forma, a equação carga-deslocamento pode ser escrita como:

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2) = \frac{1}{12f(\eta)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} p_i \bar{w}_2^i \quad (4.21)$$

onde os coeficientes  $p_i$  são obtidos através do método de Mínimos Quadrados utilizando como base as análises no MEF. Para a sua obtenção, foram usadas as mesmas relações para utilização da derivada na metodologia de interpolação.



A consideração da razão de aspecto da espessura pode ser feita na forma:

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2, \eta) = \frac{1}{12f(\eta)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{n\eta} o_{ij} \bar{w}_2^i \eta^{j-1} \quad (4.22)$$

onde os coeficientes  $o_{ij}$  são obtidos pela minimização do erro com relação aos coeficientes  $p_i$ , conforme já explicado.

A inserção da razão de aspecto de lados modifica a equação (4.22) conforme:

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2, \eta, r) = \frac{1}{12f(\eta, r)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^{nw} \sum_{j=1}^{n\eta} \sum_{k=1}^{nr} t_{ijk} \bar{w}_2^i \eta^{j-1} r^{k-1} \quad (4.23)$$

sabendo-se que os coeficientes  $t_{ijk}$  são obtidos através da minimização do erro com relação aos coeficientes  $o_{ij}$ .

Pode-se ver que a equação (4.23) depende apenas de fatores geométricos como as razões  $\eta$  e  $r$ . Toda a parte constitutiva do problema está inserida no carregamento. Ou seja, não é necessário o conhecimento das propriedades constitutivas para a obtenção de uma curva carga  $\times$  deslocamento central da placa, quando são conhecidos todos os fatores geométricos. Se o projetista tem uma restrição quanto ao deslocamento central da placa, este pode desenvolver, em função das propriedades constitutivas, um material que suporte tal condicionamento.

## 5. RESULTADOS

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos pelas metodologias explicadas nos capítulos 3 e 4. Inicialmente serão apresentados os resultados da análise linear utilizando o método  $pb-2$ . Estudos de convergência da solução, para valores de razão de aspecto de espessura e de lados bem como as condições de contorno propostas são produzidos para provar a precisão da metodologia. Para certificar seu desempenho, os resultados convergidos são comparados com resultados numéricos e analíticos encontrados na literatura. Na falta de resultados numéricos de placas que consideram a deformação cisalhante transversal, os valores obtidos com baixas razões de aspecto de espessura serão comparados com soluções de placas finas. Após isso, as equações semi-analíticas são apresentadas e novamente comparadas com as referências já citadas. Então, os resultados da análise não-linear serão discutidos. As equações genéricas obtidas pela interpolação dos diversos resultados gerados pelas análises baseadas no MEF considerando não-linearidade geométrica serão mostradas e comparadas com a literatura encontrada.

### 5.1 Análise Linear

A convergência numérica da metodologia proposta será apresentada em relação a cada condição de contorno e razão de aspectos de lados ( $r$ ). Então, o valor convergido de cada análise será comparado com soluções analíticas e numéricas encontradas na literatura. Verificada a concordância dos resultados, as curvas semi-analíticas serão mostradas e confrontadas com outras soluções. Para ambas as análises (numéricas e semi-analíticas), as condições de contorno utilizadas são: SSSS, CCCC, SFSF e SCSC. As razões de aspecto de espessuras ( $\eta$ ) verificados no caso numérico são: 0,001, 0,01, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2 e 0,25. Com relação às razões  $r$ , as analisadas são: 1, 2 e 5 na análise numérica e 1, 1,35, 1,65 e 2, na análise semi-analítica. Mesmo considerando que a razão de aspecto de lados ( $r$ ) igual a 5 já considera que apenas a rigidez do

menor lado influencia a resposta do sistema conforme mostrado na Figura 4.2 e discutido na seção 4.1.3, este é utilizado para a comparação com resultados analíticos propostos na literatura e para estudos de convergência com relação a este parâmetro na metodologia proposta. O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) foi fixado em  $\nu = 0,3$ , em todas as análises lineares. O módulo de elasticidade longitudinal foi desconsiderado, conforme sua invariância com a resposta em relação ao carregamento parametrizado, mostrado na equação (3.47). Este carregamento ( $\bar{q}_3$ ) foi considerado unitário. O *software* Maple v12.0 [2009] foi utilizado para a obtenção das soluções numéricas bem como as semi-analíticas. Este foi escolhido pela simplicidade na geração de rotinas com variáveis literais.

Para a consideração da convergência, diversos graus do polinômio primário foram testados. Nota-se que, para o caso numérico, o grau máximo possível para os polinômios de interpolação foi 19. Acima deste valor, devido a problemas de manipulação de memória por parte do software, o sistema matricial não podia ser resolvido. Será mostrado que a convergência para os deslocamentos transversais foi relativamente rápida considerando os dígitos significativos obtidos. No entanto, o mesmo não aconteceu para as tensões resultantes, principalmente para os esforços cisalhantes transversais, nas condições de contorno SFSF e SCSC. O motivo da baixa convergência das tensões resultantes será debatido na seção 5.1.1.

### 5.1.1 Soluções Numéricas

A convergência da solução linear foi testada a fim de se conhecer o grau do polinômio interpolador necessário para a obtenção de uma resposta aproximada a analítica. Na falta desta, soluções de placas finas serão usadas para a verificação da convergência da solução a baixas espessuras.

Foi verificado que para todas as condições de contorno, razões de aspecto de espessura e razões de aspecto de lados analisadas, a convergência do método não era monotônica. No entanto, com o aumento do grau do polinômio de interpolação, a norma do erro diminuía. Foi notado também que para placas com as condições de contorno SSSS, SFSF e SCSC, a norma de erro diminuía muito pouco com graus de polinômio primário pares, em relação ao seu precedente ímpar. Já em placas com condições de contorno CCCC os graus de polinômio primários ímpares não alteravam de forma significativa o erro com relação ao seu precedente par. Dessa forma, para placas SSSS, SFSF e SCSC, o do polinômio de interpolação é sempre ímpar. Já para placas CCCC, este é sempre par. Ademais, foi visto que a convergência era mais lenta para razões de aspecto de lados maiores. Isso foi percebido em todas os casos analisados.

Para os gráficos de convergência das soluções numéricas, novos adimensionais foram

propostos para o deslocamento transversal bem como para as tensões resultantes. Estes são dados por:

$$\bar{w}_1 = \frac{w_0}{w_c} \quad (5.1)$$

$${}^1\bar{M}_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{{}^cM_{\alpha\beta}} \quad (5.2)$$

$${}^1\bar{Q}_\alpha = \frac{Q_\alpha}{{}^cQ_\alpha} \quad (5.3)$$

onde  $w_c$ ,  ${}^cM_{\alpha\beta}$  e  ${}^1Q_\alpha$  é o deslocamento transversal, momento fletor ou torção e cisalhante transversal convergidos, respectivamente. Esses adimensionais são introduzidos para a verificação da precisão das respostas apresentadas neste trabalho.

Nota-se que, a convergência em razões  $r$  maiores é mais demorada (Figura 5.1). A Figura 5.1(a) mostra que com  $ng = 5$ , a diferença entre o resultado obtido com este grau polinomial e o valor convergido fica abaixo de 1%, para placas  $r = 1$ . Já com  $r = 2$ , esta diferença só foi obtida com  $ng = 7$ . No caso da Figura 5.1(c), com  $r = 5$ , pode-se ver que este valor só foi alcançado com grau do polinômio primário igual a 11. Percebe-se também, que no caso de placas com condições SSSS, a influência da espessura não alterou de forma significativa a taxa de convergência.

Os valores convergidos de cada uma das razões de aspecto foram comparados com soluções obtidas na literatura. Nota-se a concordância das soluções do presente trabalho com a solução analítica proposta por Lee et. al. [2002] e numérica proposta por Kant [1983], mostradas na Tabela 5.1. Também, como dito no capítulo 1, as soluções utilizando a teoria de placas de Reissner [Salerno e Goldberg, 1960] geram valores de deslocamento transversal menor que as soluções utilizando a teoria de placas de Mindlin [Lee et. al., 2002; Kant, 1983].

Com relação ao custo computacional, a metodologia proposta pelo presente trabalho se mostra muito bem aplicável. A solução proposta por Lee et. al. [2002], mostrada na Tabela 5.1, é baseada numa série infinita composta por funções trigonométricas e hiperbólicas. Os resultados listados utilizam 40 termos na série. Com a metodologia apresentada, cada grau de liberdade foi interpolado com polinômios de grau 13. Como o principal parâmetro para custo computacional é o número de constantes a serem encontradas, este ficou em 315 constantes. Ou seja, a matriz resultante do produto matricial da equação (3.43), que representa a energia de deformação linear, tem dimensões  $315 \times 315$ . Além disso, para este número de constantes, foram obtidos dois dígitos significativos a mais nas razões de aspecto de lados 1 e um dígito significativo a mais nas demais razões com relação aos resultados analíticos propostos por Lee et. al. [2002]. Ainda,

observa-se que a metodologia proposta converge para solução de placas finas quando a razão de aspecto da espessura tende a zero. Isto é, a metodologia obtém valores convergidos à solução analítica com baixo custo computacional além de se reduzir à teoria clássica de placas, quando a  $h \rightarrow 0$ .

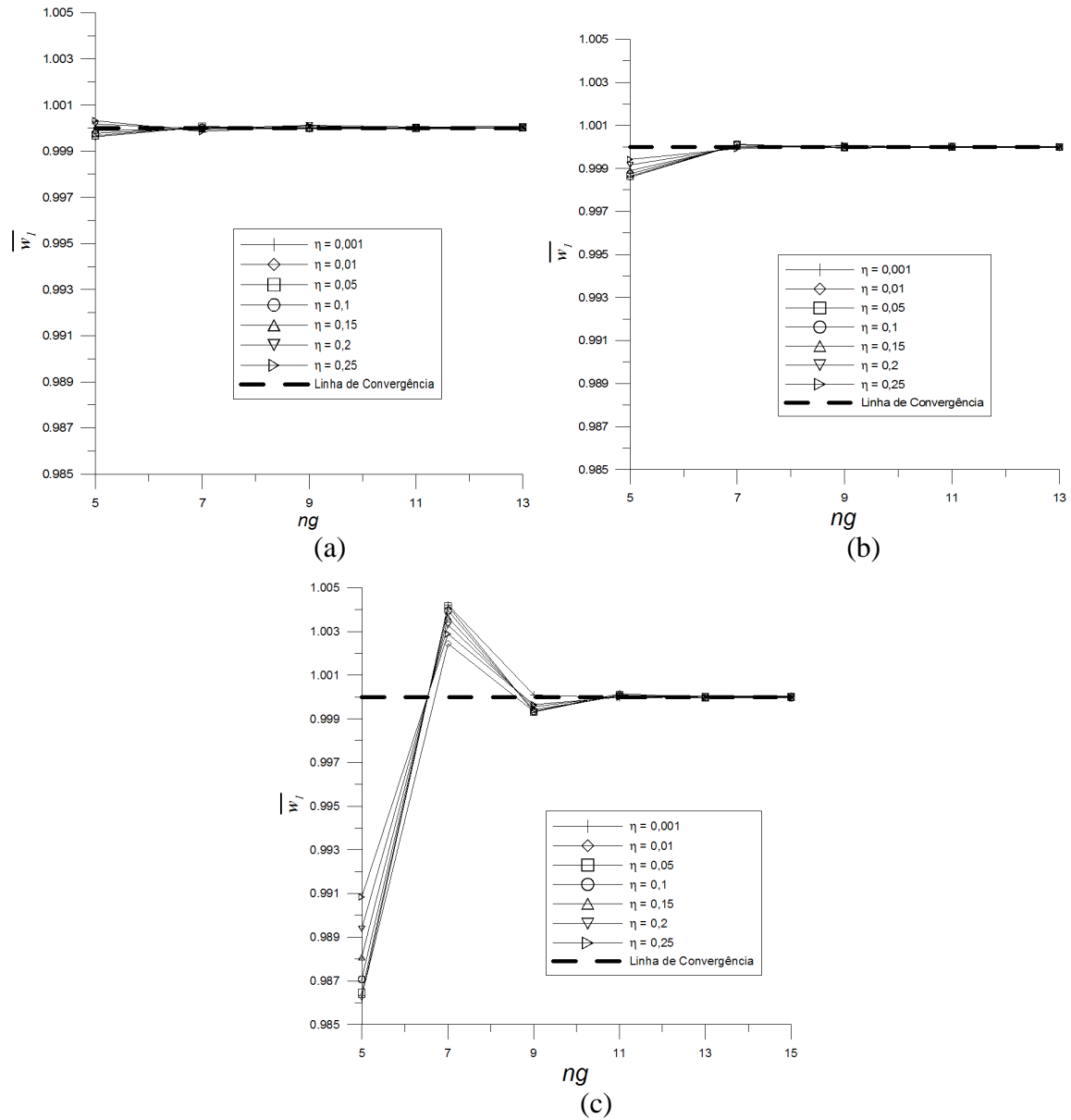


Figura 5.1 - Convergência para placas SSSS: (a)  $r = 1$  (b)  $r = 2$  e (c)  $r = 5$

Tabela 5.1 -  $\bar{w}_3$  no centro de placas SSSS ( $\nu = 0,3$  e  $ng = 13$ )

$\eta$	$r = 1$			$r = 2$			$r = 5$			
	Presente Trabalho	Lee et al. [2002]	Salerno & Goldberg [1960]	Kant [1983]	Presente Trabalho	Lee et al. [2002]	Salerno & Goldberg [1960]	Presente Trabalho	Lee et al. [2002]	Salerno & Goldberg [1960]
TCP §	0,00406				0,01013			0,01297		
0,001	0,0040624	-	-	-	0,010129	-	-	0,012971	-	-

0,010	0,0040645	0,00406	0,00406	0,00406	0,010132	0,01013	0,01013	0,012974	0,01297	0,01297
0,050	0,0041149	0,00411	0,00411	-	0,010210	0,01021	0,0102	0,013060	0,01306	0,01305
0,100	0,0042728	0,00427	0,00424	0,00424	0,010454	0,01045	0,01041	0,013328	0,01333	0,01327
0,150	0,0045360	0,00454	0,00446	-	0,010861	0,01086	0,01075	0,013774	0,01377	0,01365
0,200	0,0049040	0,00490	0,00478	0,00480	0,011430	0,01143	0,01123	0,014398	0,01440	0,01418
0,250	0,0053778	-	-	-	0,012162	-	-	0,015201	-	-

§ Teoria Clássica de Placas [Timoshenko e Krieger, 1959]

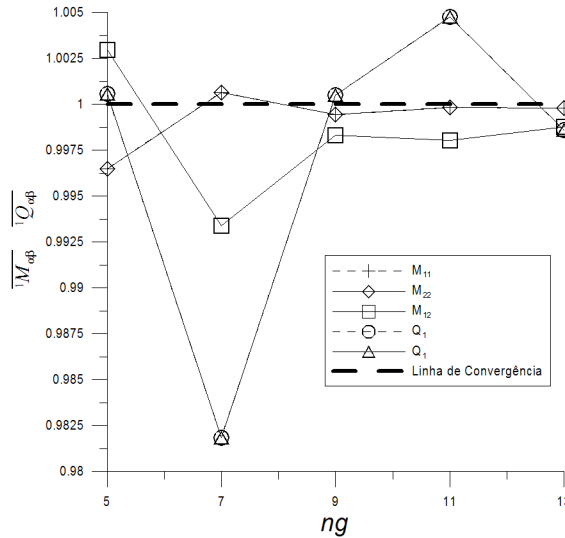


Figura 5.2 - Convergência das tensões resultantes em placas quadradas SSSS ( $\eta = 0,001$ )

Tabela 5.2 - Tensões resultantes em placas quadradas SSSS ( $\nu = 0,3$ )

$\eta$	$\bar{M}_{11}(s_1 = 0, s_2 = 0)$				$\bar{M}_{22}(s_1 = 0, s_2 = 0)$				$\bar{M}_{12}(s_1 = 0, s_2 = 0)$			
	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Kant (1982)	Wang et. al. (2001)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Kant (1982)	Wang et. al. (2001)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Kant (1982)	Wang et. al. (2001)
TCP §	0,0479				0,0479				0,0325			
0,001	0,0478	0,0479	-	0,0479	0,0478	0,0479	-	0,0479	0,0324	0,0325	-	0,0325
0,010	0,0478	0,0479	0,0478	0,0479	0,0478	0,0479	0,0479	0,0479	0,0324	0,0325	0,0324	0,0325
0,050	0,0478	0,0479	-	0,0480	0,0478	0,0479	-	0,0480	0,0324	0,0325	-	0,0322
0,100	0,0478	0,0479	0,0480	0,0482	0,0478	0,0479	0,0480	0,0482	0,0324	0,0325	0,0317	0,0316
0,150	0,0478	0,0479	-	0,0485	0,0478	0,0479	-	0,0485	0,0325	0,0325	-	0,0304
0,200	0,0478	0,0479	0,0484	0,0491	0,0478	0,0479	0,0485	0,0491	0,0324	0,0325	0,0299	0,0288
0,250	0,0478	-	-	-	0,0478	-	-	-	0,0324	-	-	-

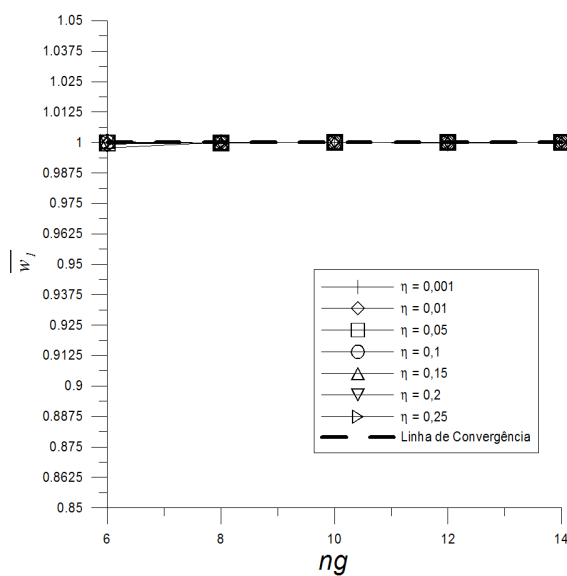
$\eta$	$\bar{Q}_1(s_1 = -1, s_2 = 0)$				$\bar{Q}_2(s_1 = 0, s_2 = -1)$			
	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Kant (1982)	Wang et. al. (2001)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Kant (1982)	Wang et. al. (2001)
TCP §	0,338				0,338			
0,001	0,338	0,333	-	0,333	0,338	0,338	-	0,338
0,010	0,338	0,333	0,332	0,333	0,338	0,338	0,337	0,338
0,050	0,338	0,333	-	0,333	0,338	0,338	-	0,338
0,100	0,338	0,333	0,332	0,333	0,338	0,338	0,337	0,338
0,150	0,338	0,333	-	0,333	0,338	0,338	-	0,338
0,200	0,338	0,333	0,332	0,333	0,338	0,338	0,337	0,338
0,250	0,338	-	-	-	0,338	-	-	-

§ Teoria Clássica de Placas [Timoshenko e Krieger, 1959]

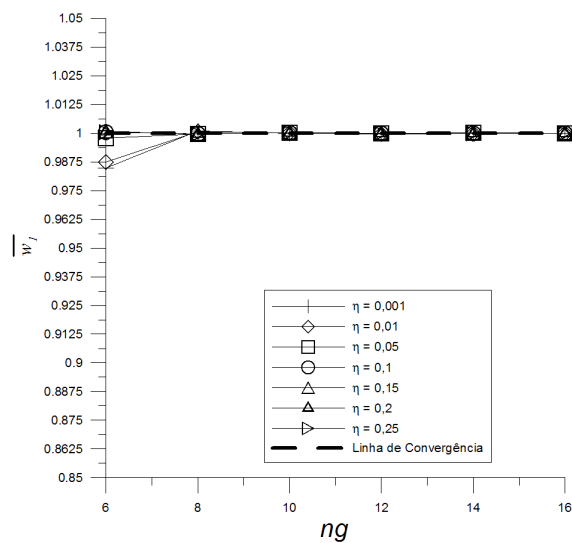
A Figura 5.2 mostra a convergência das tensões resultantes em placas quadradas SSSS. A razão  $\eta$  usada foi 0,001 apenas como exemplo, já que este parâmetro não influenciou fortemente na convergência dessas tensões resultantes. Percebe-se que a simetria entre as tensões resultantes aparece na Figura 5.2. Dessa forma, o problema encontrado nas soluções de Lee et. al. [2002] e Wang et. al. [2001], foi contornado no presente trabalho com o uso de funções de interpolação simétricas. Ainda assim, a convergência do momento torsor ( $M_{12}$ ) e dos esforços cisalhantes transversais ( $Q_1, Q_2$ ) foi lenta porém sempre com o decréscimo da norma de erro em função do aumento de  $ng$ . Uma comparação dos valores obtidos com a presente metodologia e os valores encontrados na literatura estão mostrados na Tabela 5.2.

Para placas CCCC, as curvas de convergência são mostradas na Figura 5.3. Como pode ser visto, como em placas SSSS, para valores de  $r$  maiores, a taxa de convergência foi menor. Novamente, a razão  $\eta$  não alterou fortemente a convergência.

A Figura 5.3(a) mostra que com  $ng = 6$ , a diferença fica inferior a 1% em relação ao valor convergido. Para  $r = 2$ , é necessário  $ng = 8$  para a obtenção de uma diferença semelhante. Como mostra a Figura 5.3(c), é preciso um valor de  $ng = 12$  para a obtenção de uma diferença de 1% em relação ao valor de convergência. Prova-se que para este caso de condições de contorno, como em placas SSSS, a convergência do sistema é afetada pela razão  $r$ . No entanto, diferentemente de placas SSSS, a razão  $\eta$  tem influência visível na convergência da solução. Pode-se ver com clareza na Figura 5.3(b) e Figura 5.3(c) que, em relação ao mesmo  $ng$ , baixas razões  $\eta$  obtiveram um maior erro com relação a solução convergida.



(a)



(b)

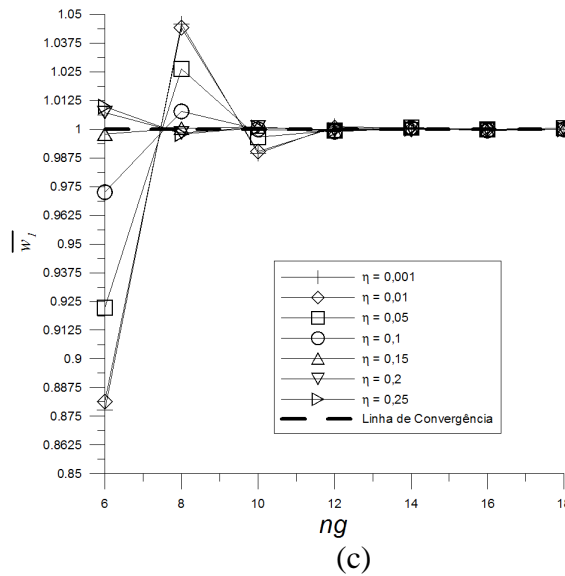


Figura 5.3 - Convergência de placas CCCC: (a)  $r = 1$  (b)  $r = 2$  e (c)  $r = 5$

Não foram encontradas soluções de placas semi-espessas para placas CCCC. Isso porque, a maioria dos estudos utiliza a metodologia de Lévy para a solução das equações governantes. Portanto, os valores aqui obtidos são confrontados com as soluções de placas finas obtidas por Timoshenko e Krieger [1959] e Taylor e Govindjee [2004].

Tabela 5.3 -  $\bar{w}_3$  no centro de placas CCCC ( $\nu = 0,3$ )

$\eta$	$r = 1$			$r = 2$			$r = 5$		
	Presente Trabalho	Taylor & Govindjee (2004)	Timoshenko e Krieger (1959)	Presente Trabalho	Taylor & Govindjee (2004)	Timoshenko e Krieger (1959)	Presente Trabalho	Taylor & Govindjee (2004)	Timoshenko e Krieger (1959)
0,001	0,0012654	0,00126532	0,00126	0,0025330	0,00253295	0,00254	0,002604	0,00241666 ¥	0,00260 §
0,010	0,0012678	-	-	0,002608	-	-	0,002608	-	-
0,100	0,0015046	-	-	0,002962	-	-	0,002962	-	-
0,250	0,0026580	-	-	0,004837	-	-	0,004837	-	-

§ Valor considerando a razão de aspecto de lados infinita.

¥ Valor considerando a razão de aspecto de lados igual a 20.

A Tabela 5.3 mostra que os resultados obtidos pelo presente trabalho convergem às soluções de placas finas de Taylor e Govindjee [2004] e Timoshenko e Krieger [1959]. Valores com espessuras maiores são também apresentados a título de ilustração.

Nota-se o erro destacado por Taylor e Govindjee [2004] nas tensões resultantes obtidas por Timoshenko e Krieger [1959]. Isso demonstra que a presente metodologia obteve valores próximos aos de Taylor e Govindjee [2004], mesmo nas tensões resultantes. Pode ser visto que, diferentemente das tensões resultantes obtidas em placas quadradas SSSS, os momentos fletores no centro de placas quadradas CCCC aumentam em relação a um incremento de  $\eta$ . Será visto que isso também ocorre em placas com as outras condições de contorno. Ou seja, placas

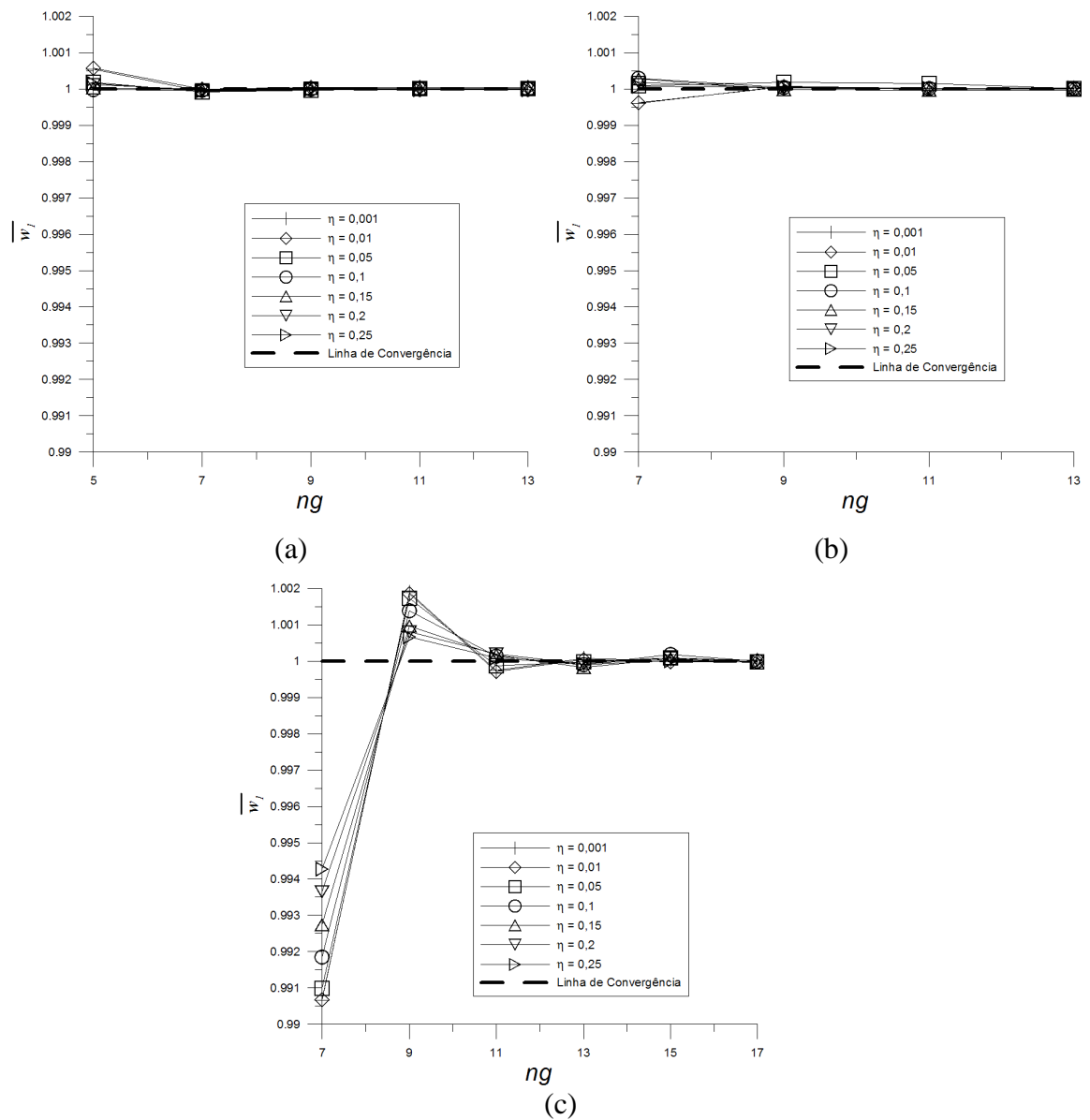


quadradas SSSS são uma exceção da invariância das tensões resultantes com relação à espessura.

**Tabela 5.4 - Tensões resultantes para placas quadradas CCCC**

$\eta$	$\bar{M}_{11}(s_1 = 0, s_2 = 0)$			$\bar{M}_{22}(s_1 = 0, s_2 = 0)$		
	Presente Trabalho	Taylor & Govindjee (2004)	Timoshenko e Krieger (1959)	Presente Trabalho	Taylor & Govindjee (2004)	Timoshenko e Krieger (1959)
0,001	0,0229	0,02290508	0,0231	0,0229	0,02290508	0,0231
0,010	0,0229	-	-	0,0229	-	-
0,100	0,0232	-	-	0,0232	-	-
0,250	0,0237	-	-	0,0237	-	-

A convergência da solução SFSF é mostrada nas Figura 5.4.



**Figura 5.4 - Convergência para placas SFSF: (a)  $r = 1$ , (b)  $r = 2$  e (c)  $r = 5$**

Novamente, para placas SFSF, a razão  $r$  influenciou na convergência. Com  $r = 1$ , foi possível obter um erro de 1% em relação ao valor convergido com  $ng = 5$ . Para  $r = 2$ , foi necessário ter  $ng = 7$  para a obtenção de um erro semelhante. Já com  $r = 5$ ,  $ng = 13$  foi preciso. Além disso, para os casos de razões  $r = 1$  e  $r = 2$ , foi necessário um valor de  $ng = 13$  para a convergência. Considerando  $r = 5$ , foi preciso  $ng = 17$  para a obtenção desta.

Percebe-se que os valores da presente metodologia, apresentados na Tabela 5.5, convergiram bem à solução analítica proposta por Lee et. al. [2002] e se reduziram a solução de placas finas [Timoshenko e Krieger, 1959], quando a razão  $\eta \rightarrow 0$ , tanto para a deflexão central quanto para o deslocamento no meio da aresta livre.

**Tabela 5.5 -  $\bar{w}_3$  em placas quadradas SFSF ( $\nu = 0,3$ )**

$\eta$	Centro da Placa				Meio da aresta livre		
	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Wang et. al. (2001)	Kant (1982)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Wang et. Al. (2001)
TCP §	0,01309				0,01509		
0,001	0,013094	-	-	-	0,015011	-	-
0,010	0,013097	-	-	0,0131	0,015023	-	-
0,050	0,013187	-	-	-	0,015214	-	-
0,100	0,013459	0,01346	0,01341	0,0134	0,015600	0,01560	0,01557
0,150	0,013910	0,01391	0,01379	-	0,016161	0,01616	0,01609
0,200	0,014539	0,01454	0,01433	0,0143	0,016898	0,01690	0,01678
0,250	0,015347	0,01536	0,01502	-	0,017809	0,01781	0,01762

§ Teoria clássica de placas [Timoshenko e Krieger, 1959]

**Tabela 5.6 - Tensões resultantes em placas quadradas SFSF ( $\nu = 0,3$ )**

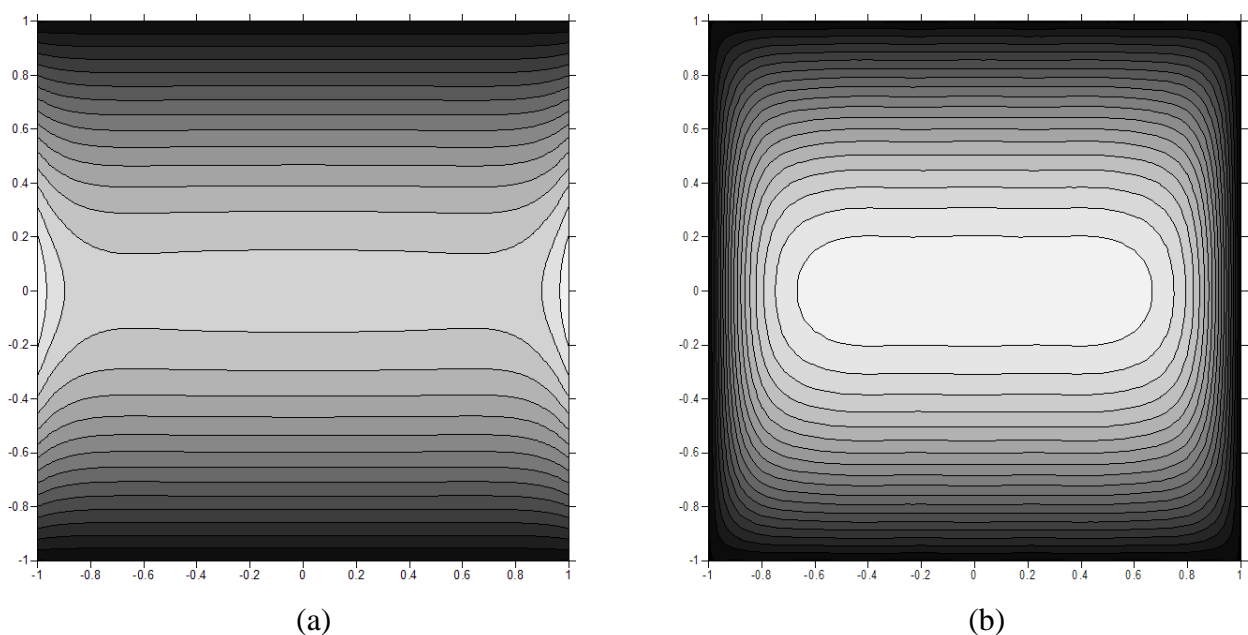
$\eta$	$\bar{M}_{11}(s_1 = 0, s_2 = 0)$		$\bar{M}_{22}(s_1 = 0, s_2 = 0)$		$\bar{M}_{12}(s_1 = 0, s_2 = 0)$	
	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)
TCP §	0,1225		0,0271		-	
0,001	0,1225	0,1225	0,0271	0,02704	0,0271	0,0000
0,010	0,1225	0,1225	0,0270	0,02695	0,0200	0,0000
0,050	0,1225	0,1225	0,0264	0,02641	0,0000	0,0000
0,100	0,1225	0,1225	0,0256	0,02564	0,0000	0,0000
0,150	0,1226	0,1226	0,0247	0,02474	0,0000	0,0000
0,200	0,1229	0,1229	0,0237	0,02372	0,0000	0,0000
0,250	0,1233	-	0,0226	-	0,0000	-

§ Teoria clássica de Placas [Timoshenko e Krieger, 1959]

Finalmente, nota-se que a metodologia incorpora a flexibilidade adicionada pela aresta livre caracterizada pela curvatura anti-clástica. Esta curvatura é inversa ao gradiente do momento fletor (Figura 5.5).

Nota-se nos gráficos da Figura 5.6 que a convergência para placas SCSC foi pior em

relação às outras condições de contorno apresentadas. Com razão  $r = 1$  e  $r = 2$ , o erro foi menor que 1% para valor de  $ng = 7$ . Já para a razão  $r = 5$ , percebe-se que, para atingir uma diferença de 1%, foi necessário  $ng = 11$ . Traduzindo-se isso em número de constantes para a interpolação, para os casos de razão  $r = 1$  e  $r = 2$ , foram usadas 108 constantes. Para o caso faltante, 234 constantes foram necessárias. Ainda assim, para a convergência requerida, as razões  $r = 1$  e  $r = 2$  necessitaram de valores de  $ng = 11$  e  $ng = 13$ , respectivamente. A razão  $r = 5$  exigiu  $ng = 17$ , mostrando assim, como em todas as outras condições de contorno, a forte influência desse parâmetro à convergência. Como em placas CCCC e SFSF, a convergência também foi afetada pela razão  $\eta$ .



**Figura 5.5 - Curvatura anticlástica no domínio parametrizado em  $r = 5$ : (a)  $u_3$  (b)  $M_{11}$**

A Tabela 5.7 mostra a convergência do deslocamento central em placas SCSC. Nota-se a boa concordância com a solução analítica proposta por Lee et. al. [2002] e também a convergência a solução de placas finas, quando  $\eta \rightarrow 0$ .

Quanto às tensões resultantes, Tabela 5.8, percebe-se a boa convergência da metodologia com relação a solução analítica proposta por Lee et. al. [2002]. No entanto, observa-se que a baixas razões de  $\eta$ , as convergências do momento torsor e cisalhante transversal na direção  $s_1$  não foram obtidas. Ainda assim, para a direção  $s_2$ , mesmo convergindo, os dígitos significativos para essas razões de  $\eta$  foi menor. Para espessuras maiores estes valores convergiram para a solução analítica.

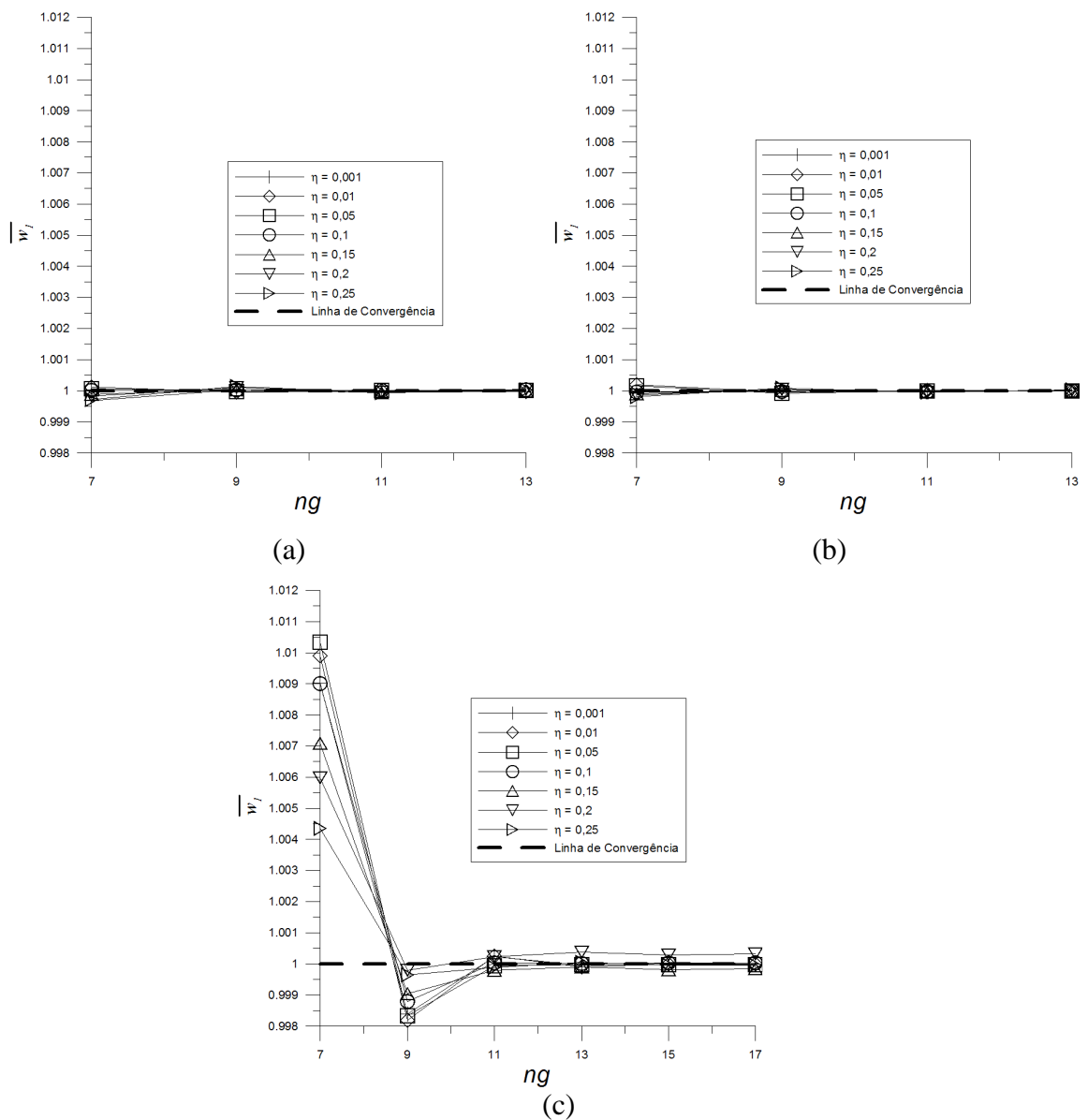


Figura 5.6 - Convergência de placas SCSC: (a)  $r = 1$ , (b)  $r = 2$  e (c)  $r = 5$

Tabela 5.7 -  $\bar{w}_3$  em placas SCSC ( $\nu = 0,3$ )

$\eta$	$r = 1$			$r = 2$			$r = 3$		
	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Wang et. al. (2001)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Wang et. al. (2001)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Wang et. al. (2001)
TCP §	0,00192			0,00844			-		
0,001	0,0019172	-	-	0,0084451	-	-	0,012931	-	-
0,010	0,0019202	0,00192	0,00192	0,0084492	0,00845	0,00845	0,012935	0,01293	0,01293
0,050	0,0019918	0,00199	0,00199	0,0085481	0,00855	0,00854	0,013021	0,01302	0,01301
0,100	0,0022087	0,00221	0,00220	0,0088500	0,00885	0,00882	0,013290	0,01329	0,01324
0,150	0,0025558	0,00256	0,00254	0,0093379	0,00934	0,00926	0,01374	0,01374	0,01362
0,200	0,0030211	0,00302	0,00298	0,0100000	0,01000	0,00985	0,01436	0,01436	0,01415
0,250	0,0035957	-	-	0,010827	-	-	0,01517	-	-

**Tabela 5.8 - Tensões Resultantes em placas quadradas SCSC ( $\nu = 0,3$ )**

$\eta$	$s_1 = 0, s_2 = 0$						$s_1 = -1, s_2 = 0$		$s_1 = 0, s_2 = -1$	
	$\bar{M}_{11}$		$\bar{M}_{22}$		$\bar{M}_{12}$		$\bar{Q}_1$		$\bar{Q}_2$	
	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)	Presente Trabalho	Lee et. al. (2002)
TCP §	0,0244		0,0332		-		-		-	
0,001	0,0244	0,02439	0,0334	0,03324	0,0000 ¥	0	0,000 ¥	0,2393	0,52	0,5162
0,010	0,0244	0,02440	0,0332	0,03325	0,0000 ¥	0,00101	0,000 ¥	0,2394	0,51	0,5149
0,050	0,0248	0,02476	0,0333	0,03326	0,0000 ¥	0,00466	0,000 ¥	0,2404	0,514	0,5092
0,100	0,0258	0,02579	0,0333	0,03327	0,0084	0,00850	0,248	0,2431	0,501	0,5004
0,150	0,0273	0,02733	0,0332	0,03331	0,0117	0,01170	0,252	0,2468	0,489	0,4887
0,200	0,0292	0,02921	0,0331	0,03305	0,0143	0,01435	0,256	0,2512	0,475	0,4749
0,250	0,0313	-	0,0328	-	0,0165	-	0,261	-	0,461	-

§ Teoria Clássica de Placas [Timoshenko e Krieger, 1959]

¥ Valores não-convergidos pela metodologia apresentada

### 5.1.2 Solução Semi-analítica

No capítulo anterior demonstrou-se convergência do método para as soluções analíticas propostas por Lee et. al. [2002]. Foi visto que a metodologia reproduz a curvatura anti-clástica em placas SFSF e tem uma boa convergência, também, às tensões resultantes. Dessa forma, a partir dessa metodologia, foram produzidas soluções semi-analíticas para os casos numéricos já apresentados na seção 5.1.1. Apenas um termo foi considerado literal. Isso porque, considerando mais termos, o software de matemática simbólica utilizado (Maple v12.0) não comportava o uso de tanta memória e processamento gerando erros fatais ou simplesmente a não solução do sistema.

A forma da equação procurada está explicitada na equação (3.64). A Tabela 5.9 mostra os resultados das constantes de interpolação da resposta semi-analítica para os casos avaliados. Os resultados apresentados foram obtidos com  $ng = 5$  para placas SSSS, SCSC e SFSF e  $ng = 6$  para placas CCCC. Valores maiores de  $ng$  foram testados a fim de se obter uma solução com erros menores. No entanto, devido a complexidade do sistema a ser solucionado, o software utilizado não suportava tamanho custo computacional gerando erros fatais ou a simples não solução do sistema.

Pode-se verificar que para placas SSSS, apenas um polinômio quadrático foi necessário para se obter uma curva convergida. No entanto, para todas as outras condições de contorno foi necessário um polinômio de 5ª ordem para esta convergência. Isso porque a verificação dos dígitos significativos foi feita na derivada da função descrita na equação (3.64) pelo fato de que esta é usada na geração das superfícies de resposta das análises não-lineares geométricas, como comentado na seção 4.2.1 e 4.2.2.

**Tabela 5.9 - Resultados das análises semi-analíticas (equação (3.65))**

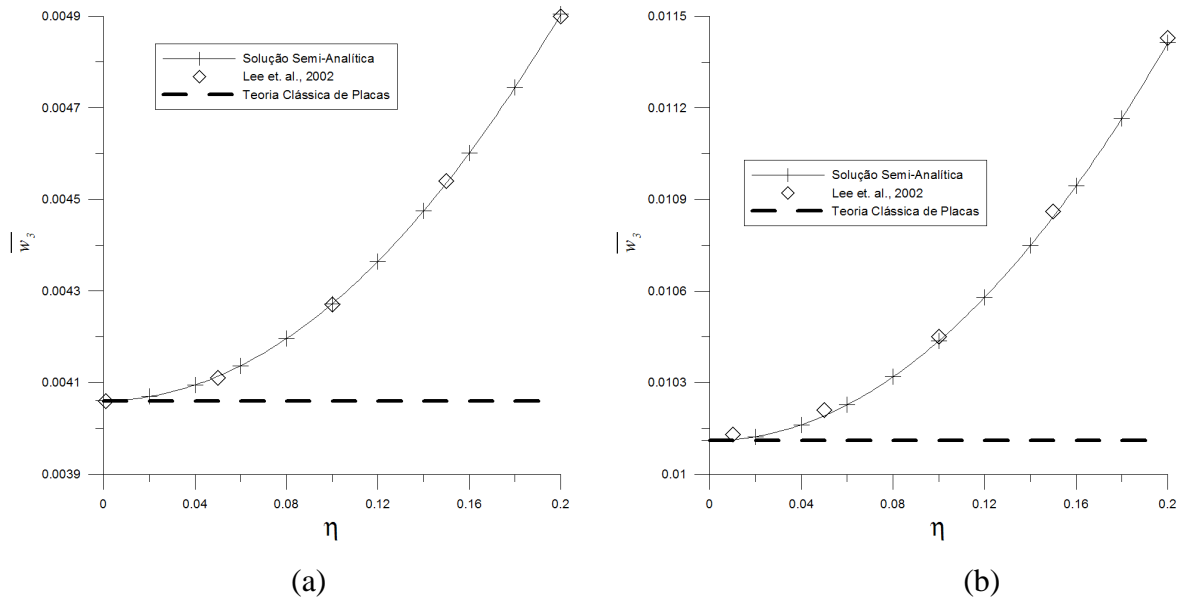
	$r$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
SSSS	1,00	0,004061	0	0,02110	0	0	0
	1,35	0,006742	0	0,02698	0	0	0
	1,65	0,008573	0	0,03020	0	0	0
	2,00	0,010110	0	0,03260	0	0	0
CCCC	1,00	0,00126	0,00008	0,02431	-0,00949	-0,01561	0,06569
	1,35	0,00199	0,00033	0,02666	0,03017	-0,10755	0,27689
	1,65	0,00233	0,00077	0,02344	0,07749	-0,31589	0,44471
	2,00	0,00249	0,00131	0,02069	0,09141	-0,29759	0,35772
SFSF	1,00	0,01310	-0,00060	0,04480	-0,04402	0,07339	0
	1,35	0,04436	-0,00111	0,09605	-0,21213	0,70352	-0,91537
	1,65	0,10038	-0,00126	0,14654	-0,29543	0,86315	-1,01987
	2,00	0,21942	-0,00159	0,22572	-0,44526	1,13023	-1,15651
SCSC	1,00	0,00193	-0,00069	0,04341	-0,12023	0,39030	-0,53692
	1,35	0,00426	-0,00040	0,04790	-0,09195	0,27263	-0,37795
	1,65	0,00635	0,00015	0,04267	-0,04086	0,11663	-0,19000
	2,00	0,00842	0,00081	0,03791	-0,03482	0,18575	-0,35542

Nota-se que os termos  $a_1$  devem convergir à solução de placas finas, pois tendendo-se  $h$  a zero na equação (3.64), este é o único termo remanescente. Isto é mostrado na Tabela 5.10. Pode-se observar a boa convergência das soluções semi-analíticas às soluções de placas finas propostas por Timoshenko e Krieger [1969].

**Tabela 5.10 - Convergência da solução semi-analítica às soluções de placas finas**

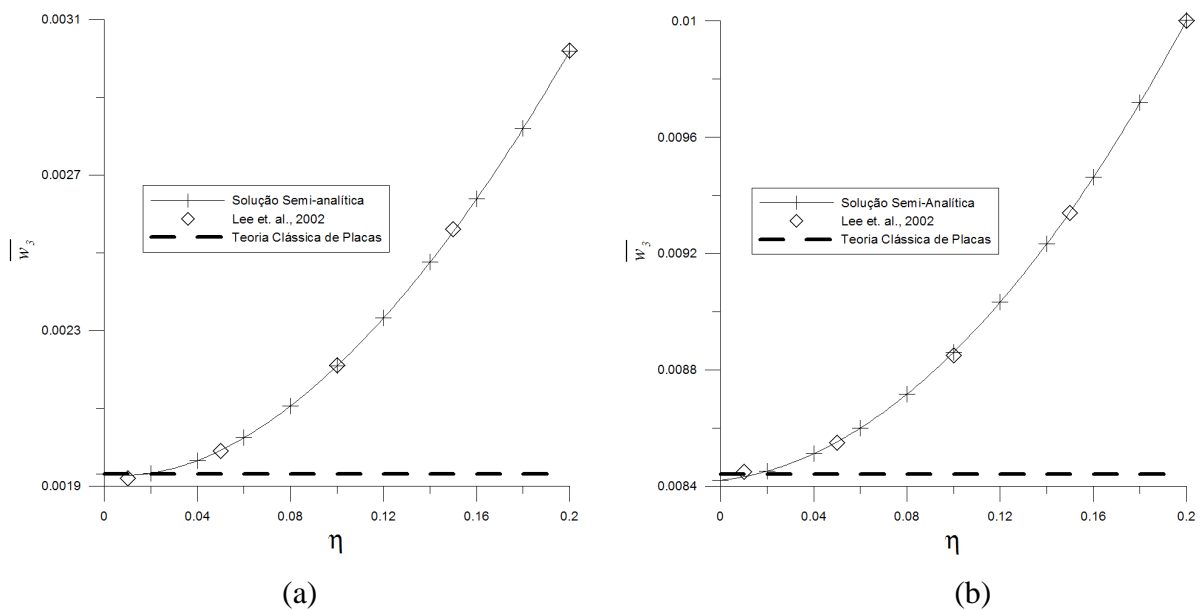
SSSS				CCCC			
$r = 1$		$r = 2$		$r = 1$		$r = 2$	
$a_1$	TCP §	$a_1$	TCP §	$a_1$	TCP §	$a_1$	TCP §
0,004061	0,00406	0,010110	0,01013	0,00126	0,00126	0,00249	0,00254
SFSF				SCSC			
$r = 1$		$r = 2$		$r = 1$		$r = 2$	
$a_1$	TCP §	$a_1$	TCP §	$a_1$	TCP §	$a_1$	TCP §
0,01310	0,01309	0,21942	-	0,00193	0,00192	0,00842	0,00844

§[Timoshenko e Krieger, 1959]



**Figura 5.7 - Placas SSSS: (a)  $r = 1$  e (b)  $r = 2$**

A seguir foi verificada a convergência das curvas com relação às soluções de placas semi-espessas que foram propostas por Lee et. al. [2002]. A Figura 5.7 mostra as curvas da solução semi-analítica obtida pelo presente trabalho, a solução proposta por Lee et. al. [2002] e a solução da teoria clássica de placas [Timoshenko e Krieger, 1959]. Nota-se, que há uma ótima concordância entre as soluções obtidas. No entanto, para a  $r = 2$ , há uma pequena divergência dos resultados. O erro máximo entre os pontos da curva de Lee et. al. [2002] e da curva proposta é de 0,2%, para este caso, e para a  $r = 1$ , o valor do erro máximo é de 0,1%.



**Figura 5.8 - Placas SCSC: (a)  $r = 1$  e (b)  $r = 2$**

Para o caso de placas SCSC, os erros máximos foram obtidos no início da curva.

Observa-se que, quando  $\eta \rightarrow 0$ , no caso de placas com essas condições de contorno, há uma diferença no quinto dígito significativo entre a solução proposta pelo presente trabalho e a solução de placas finas proposta por Timoshenko e Krieger [1959]. O erro máximo foi de 0,38%, para  $r = 1$ . Já  $r = 2$ , o erro máximo ficou em 0,21%. Ainda assim, pode-se ver pela Figura 5.8 a ótima convergência à solução analítica.

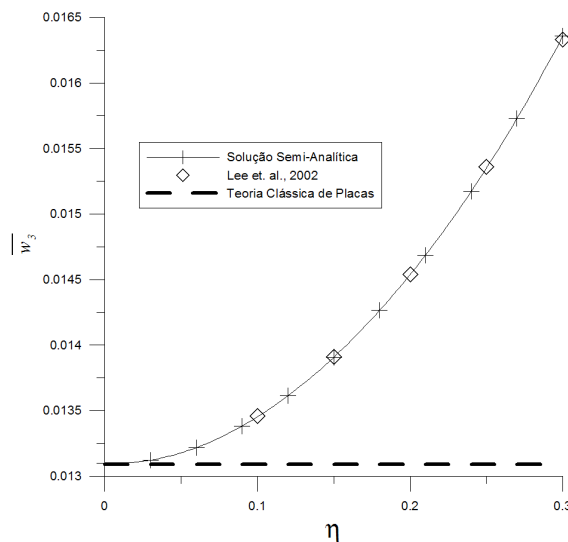


Figura 5.9 - Placa SFSF:  $r = 1$

Para placas SFSF, apenas  $r = 1$  foi testado. Com relação à sua convergência a solução analítica, o erro máximo obtido nessa curva foi de 0,17%. Novamente, uma ótima convergência com esta solução foi obtida.

Note-se que todas as curvas apresentadas são produzidas com coeficiente de Poisson igual a 0,3. Como já dito, através do problema apresentado pelo software de manipulação simbólica, não foi possível a obtenção de soluções com dois parâmetros literais. No entanto, como mostra as convergências numéricas e as figuras desta seção, a metodologia é consistente e gera soluções com baixos erros em relação às soluções exatas. Possivelmente, em um futuro próximo, soluções dessa forma (considerando dois ou mais parâmetros literais) poderão ser encontradas com o desenvolvimento de softwares de manipulação simbólica e com a redução dos custos computacionais.

## 5.2 Análise Não-Linear

Não foi possível obter resultados satisfatórios na análise não-linear. Devido o grande consumo de memória e processamento na rotina de solução, o *software* de computação simbólica utilizado [Maple v12, 2008], não obtinha a solução requisitada. Após conhecer o padrão das respostas do sistema linear, pode-se concluir que o custo computacional aumentaria a medida



que cada iteração fosse realizada. Além disso, existe ainda o custo devido o aumento da riqueza das funções de interpolação.

Apesar da utilização do método de Newton-Raphson Modificado para acelerar a convergência e do fator de relaxação para evitar a divergência, não foi possível obter resultados confiáveis na análise não-linear.

### 5.3 Resultados dos Ajustes de Parâmetros

Os resultados do método de ajuste de parâmetros serão mostrados nesta seção. Devido o número de constantes necessárias para a descrição da equação genérica (equação (4.16)), valores de  $f_{ijkl}$  estão no anexo III para as condições de contorno analisadas. Neste capítulo serão mostradas apenas algumas soluções advindas dessas equações para a comparação com soluções existentes bem como para futura referência.

Alguns resultados com relação a equação genérica invariante ao coeficiente de Poisson (equação (4.23)) serão apresentados como título de ilustração e comparação com resultados da literatura.

A razão de aspecto de lados ( $r$ ) foi considerada como: 1, 1,35, 1,65, 2, 3 e 4, para placas SSSS e 1, 1,35, 1,65 e 2, para placas CCCC. A razão de aspecto da espessura ( $\eta$ ) foi avaliada como: 0,001, 0,01, 0,025, 0,05, 0,075, 0,1, 0,125, 0,15, 0,175, 0,2, 0,225 e 0,25. Já o valor do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) foi variado através dos valores de 0,1, 0,2, 0,3 e 0,4. O carregamento segue a regra sugerida nas equações (4.1) em conjunto com a Tabela 4.1.

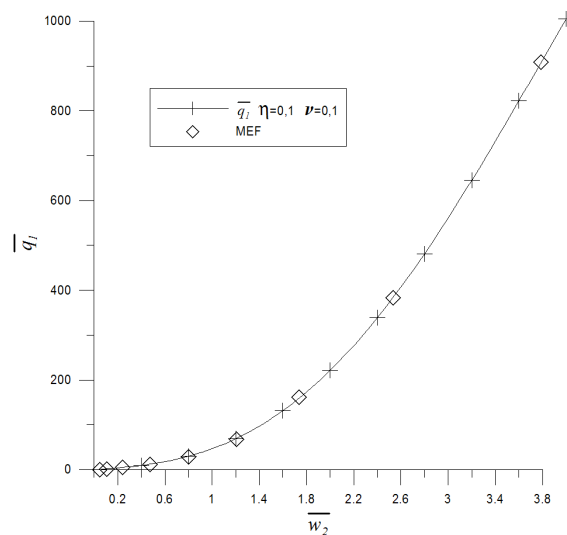
#### 5.3.1 Equação Genérica para Placas SSSS

Na interpolação da curva carga x deslocamento foram utilizados os diversos dados das análises não-lineares via MEF. Foi visto que a soma de um monômio linear e um monômio cúbico representa bem o deslocamento de placas com baixos valores de  $\eta$  [Banerjee e Datta, 1981; Chia, 1980]. No entanto, com o aumento de  $\eta$ , o polinômio não tem enriquecimento suficiente para interpolar a curva carga-deslocamento com precisão, principalmente em grandes deslocamentos. Valores de  $n_w$  foram variados a fim de se conhecer um grau polinomial que interpolasse bem o comportamento da trajetória de equilíbrio. Notou-se que um polinômio de quinto grau interpolava bem esta trajetória, tanto em pequenos deslocamentos quanto em deslocamentos finitos. Desta forma, o valor escolhido para  $n_w$  foi 5.

Através da equação (4.5), foi obtido um conjunto de constantes para curvas de carga-deslocamento mantendo todos os outros parâmetros fixos. Considerando os parâmetros em análise, foi um total de 288 curvas, correspondendo a 864 constantes diferentes, ou seja, três por

curva. É necessário citar que a inserção da derivada inicial como uma relação a rigidez de flexão linear de placas semi-espessas retira uma constante de cada interpolação. Ou seja, elimina-se o cálculo de 288 constantes.

A Figura 5.10 mostra um exemplo de interpolação da curva carga-deslocamento gerada no presente trabalho. Nota-se uma ótima concordância entre os pontos da análise numérica com a curva interpolada. Dentre as 288 curvas, o maior erro foi de cerca de 6% no deslocamento central ( $\eta = 0,1$  e  $r = 3$ ). Este erro se encontra entre a região I e II da Figura 4.4. No entanto, para grandes deslocamentos, região III, os erros encontrados foram de cerca de 0,1%, em relação aos resultados da análise via MEF. Com a adição do coeficiente de Poisson (equação (4.8)), tornando a resposta uma superfície, não houve adição de significativa de erros. O polinômio que interpola este efeito tem grau 2 ( $n\nu = 2$ ). Considerando todos os parâmetros variados, foram obtidas 72 superfícies de resposta, que variavam com o coeficiente de Poisson e deflexão central. O número total de constantes, neste caso, foi de 648 (9 constantes por superfície).

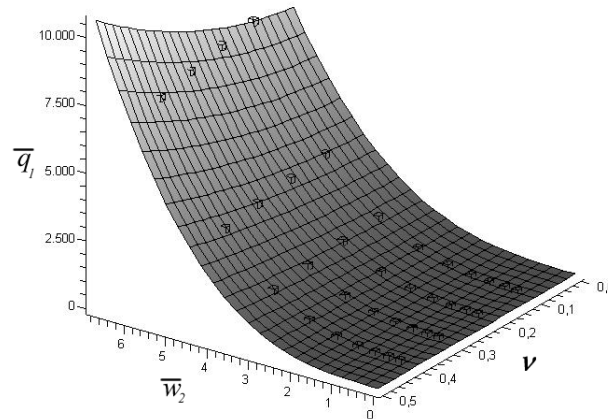


**Figura 5.10 - Exemplo de interpolação da curva carga  $\times$  deslocamento:  $r = 1$**

Pode-se ver na Figura 5.11 um exemplo de uma superfície que considera o deslocamento central com relação ao coeficiente de Poisson. Os símbolos ( $\square$ ) representam as respostas obtidas na análise via MEF. Nota-se uma ótima concordância da superfície de interpolação com relação a esses parâmetros. Como já dito, a inserção do coeficiente de Poisson como um polinômio quadrático não adicionou erros na equação, mantendo esta com erro máximo em 6%.

A inserção da razão de aspecto de espessuras foi produzida como mostrado no capítulo 4.2.1. O polinômio utilizado para a interpolação deste efeito é cúbico. Dessa forma foi obtido 6 equações parametrizadas pela deflexão central, coeficiente de Poisson e  $\eta$ . Cada uma dessas equações contém 36 constantes, totalizando 216. O erro gerado na inserção deste parâmetro foi

pequeno, sendo que o valor máximo encontrado nas interpolações com relação aos resultados das análises de Elementos Finitos foi de 8%.



**Figura 5.11 - Exemplo de Superfície de Resposta**

A rotina de geração da equação genérica foi alimentada com as 216 constantes das superfícies interpoladas para cada uma das razões de aspecto de lados avaliadas. Dessa forma, uma equação geral, que leva em conta todos os parâmetros listados acima foi criada. Esta equação tem no total 144 constantes. A inserção deste efeito fez os erros subirem a 10%. O polinômio utilizado para a interpolação deste efeito tem grau 3. As constantes obtidas estão apresentadas no anexo III.

Conhecendo-se o valor dos polinômios de interpolação de cada um dos parâmetros variados, pode-se reescrever a equação (4.16) como:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2, \nu, \eta, r) = \frac{1}{12(1-\nu^2)f(\eta, r)} \bar{w}_2 + \sum_{i=3}^5 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 f_{ijkl} \bar{w}_2^i \nu^{j-1} \eta^{k-1} r^{l-1} \quad (5.4)$$

Com a equação (5.4) é possível gerar curvas e superfícies em relação à parâmetros de projeto. No entanto é importante mostrar as limitações desta equação. Inicialmente, conforme a Tabela 4.1 mostra, o limite do valor do carregamento é uma função dos grupos de  $\eta$ . Como os valores utilizados para as sucessivas interpolações estão dentro deste domínio, é desaconselhável utilizar esta equação para valores superiores àqueles mostrados nesta tabela. Além disso, outros parâmetros têm uma variação fixa. A  $\eta$  pode ser usada até valores de 0,25.  $r$  tem valores fixados entre 1 e 4. Valores menores podem ocasionar erros de *overflow* pois uma das raízes da interpolação do efeito da razão de lados na derivada inicial está entre 0 e 1 (mais precisamente entre 0,5 e 0,8, sendo que o valor exato varia com a espessura da placa). Valores maiores podem gerar resultados incoerentes com a realidade. Deve-se atentar também com a extrapolação do

coeficiente de Poisson. Valores acima e abaixo dos limites de interpolação não foram verificados.

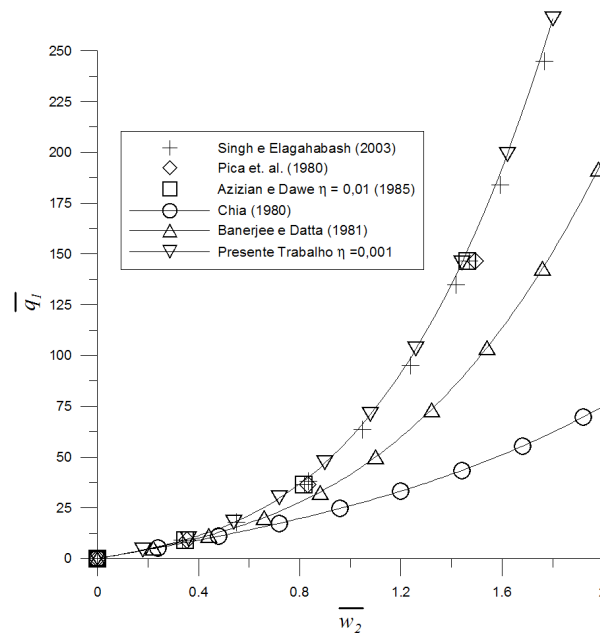


Figura 5.12 - Resultados da Equação Genérica para Placas Finas

A equação que rege a curva do presente trabalho ( $\nabla$ ) na Figura 5.12 é:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 22,56455\bar{w}_2 + 33,4494611\bar{w}_2^3 + 2,7009597277\bar{w}_2^4 - 0,15312777\bar{w}_2^5 \quad (5.5)$$

A equação (5.4) encontrada se reduz bem a resultados de placas finas (equação (5.5)). Nota-se na Figura 5.12 que a equação obtida aplicando-se uma  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\nu = 0,3$  e  $r = 1$ , os resultados obtidos se aproximam bem dos resultados de Singh e Elaghabash [2003], Azizian e Dawe [1985] e Pica et. al. [1980]. Percebe-se também que os resultados obtidos por Chia [1980] e Banerjee e Datta [1981] consideram a mesma inclinação inicial (região linear). No entanto, os autores subestimam o acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão. Deve-se comentar também que as equações propostas por Chia [1980] e Banerjee e Datta [1981] são produzidas através da teoria clássica de placas. Já as propostas pelo presente trabalho, por Azizian e Dawe [1985], Singh e Elaghabash [2003] e Pica et. al. [1980] são produzidas através de teorias que consideram a deformação cisalhante transversal.

A grande contribuição que equações como a equação (5.4) trazem é o estudo mais detalhado sobre a sensibilidade de cada parâmetro em relação à resposta das equações diferenciais que governam o problema. Esta equação nada mais é do que uma solução aproximada destas equações. Através de sucessivos mínimos quadrados, foi obtido um polinômio que tem como variáveis independentes alguns parâmetros de entrada, como razão de aspecto de espessura e coeficiente de Poisson do material no qual a placa é produzida. Dessa

forma, pode-se encontrar superfícies de resposta, quando dois parâmetros são conhecidos. Essa superfície mostra qual será o comportamento do sistema com relação aos parâmetros desconhecidos. Um exemplo de superfícies que podem ser montadas esta representada na Figura 5.13. Pode-se ver a flexibilidade aparente que o uso do carregamento parametrizado faz com que placas mais espessas tenham deslocamentos parametrizados maiores que placas mais finas e que este efeito é majorado com o aumento do carregamento.

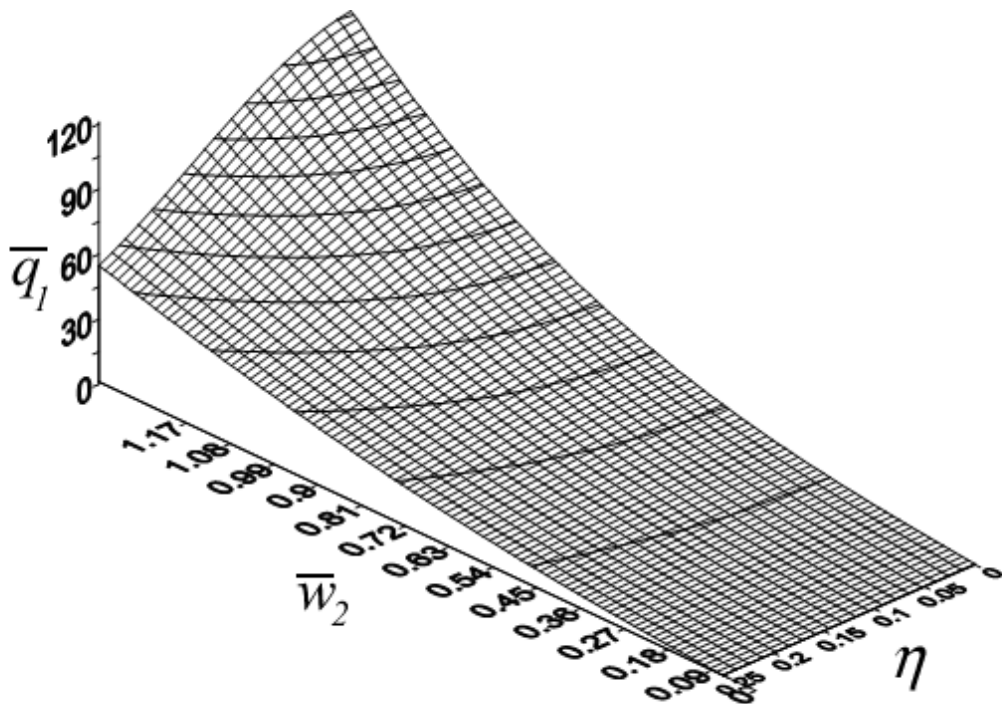


Figura 5.13 - Superfície de resposta ( $r = 1$  e  $\nu = 0,3$ )

É importante mencionar que os erros encontrados nas interpolações com relação à derivada inicial. Sem dúvida, a inserção dessa informação no sistema melhorou significativamente a interpolação, tornando-a fisicamente correta. Isso porque, muitas interpolações começavam com inclinação negativa. É sabido que essa inclinação inicial é idêntica à derivada da solução linear, pois neste trecho da curva carga-deslocamento, os termos não-lineares do tensor deformação não afetam significativamente os deslocamentos da placa, ou seja, ainda se está sob a hipótese de pequenos deslocamentos. No entanto, a solução semi-analítica proposta pelo presente trabalho foi utilizada para a obtenção desta derivada e esta foi obtida considerando  $\eta$  como variável. Ou seja, ela foi obtida para valores de  $r$  e  $\nu$  fixos. A Tabela 5.9 mostra os resultados das constantes de interpolação deste efeito com relação a  $r$ . Esta relação foi interpolada por mínimos quadrados e obteve-se uma equação para cada uma das

constantes em função deste parâmetro. No entanto, isto não foi feito para o coeficiente de Poisson. Todas as constantes produzidas foram geradas em relação ao coeficiente de Poisson 0,3. Nota-se que os maiores erros nas interpolações estão na faixa entre a região I e II (Figura 4.4). No entanto, estes erros são muito semelhantes aos erros do início da curva, que são gerados pela não consideração da variação do coeficiente de Poisson com a derivada inicial. Isso não torna a equação produzida nem a metodologia apresentada inconsistente. Mostra que erros menores podem ser produzidos através de uma consideração melhor da derivada inicial. Sendo assim, através da metodologia proposta, pode-se obter equações genéricas para a deflexão de placas com carregamentos que geram grandes deslocamentos com erros significativamente menores que os apresentados aqui.

A Figura 5.14 mostra curvas cinemáticas para diversos valores de  $\eta$  considerando outros parâmetros fixos ( $\nu = 0,3$  e  $r = 1$ ). As equações de cada uma das curvas da Figura 5.14 são:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 22,564553\bar{w}_2 + 33,449461\bar{w}_2^3 + 2,700959\bar{w}_2^4 - 0,153128\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,001 \quad (5.6a)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 22,552942\bar{w}_2 + 33,687765\bar{w}_2^3 + 2,412640\bar{w}_2^4 - 0,231813\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,01 \quad (5.6b)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 22,517830\bar{w}_2 + 33,861431\bar{w}_2^3 + 2,071983\bar{w}_2^4 - 0,3149936\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,02 \quad (5.6c)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 22,459553\bar{w}_2 + 33,946087\bar{w}_2^3 + 1,708786\bar{w}_2^4 - 0,392211\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,03 \quad (5.6d)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 22,378469\bar{w}_2 + 33,948873\bar{w}_2^3 + 1,321842\bar{w}_2^4 - 0,461921\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,04 \quad (5.6e)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 22,275075\bar{w}_2 + 33,876927\bar{w}_2^3 + 0,909945\bar{w}_2^4 - 0,522578\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,05 \quad (5.6f)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 20,868955\bar{w}_2 + 31,675854\bar{w}_2^3 - 3,096615\bar{w}_2^4 - 0,533053\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,125 \quad (5.6g)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 20,200997\bar{w}_2 + 30,617808\bar{w}_2^3 - 4,847224\bar{w}_2^4 - 0,2914562\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,150 \quad (5.6h)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 19,464709\bar{w}_2 + 29,583496\bar{w}_2^3 - 6,836829\bar{w}_2^4 + 0,112909\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,175 \quad (5.6i)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 18,67915\bar{w}_2 + 28,684467\bar{w}_2^3 - 9,084300\bar{w}_2^4 + 0,7041765\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,2 \quad (5.6j)$$

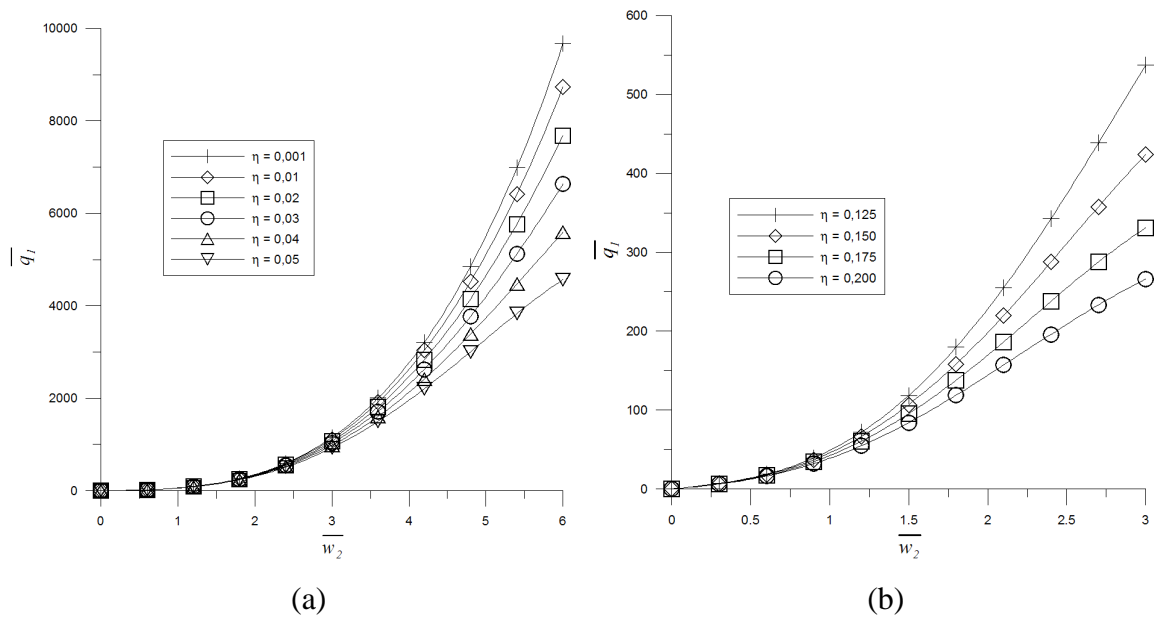


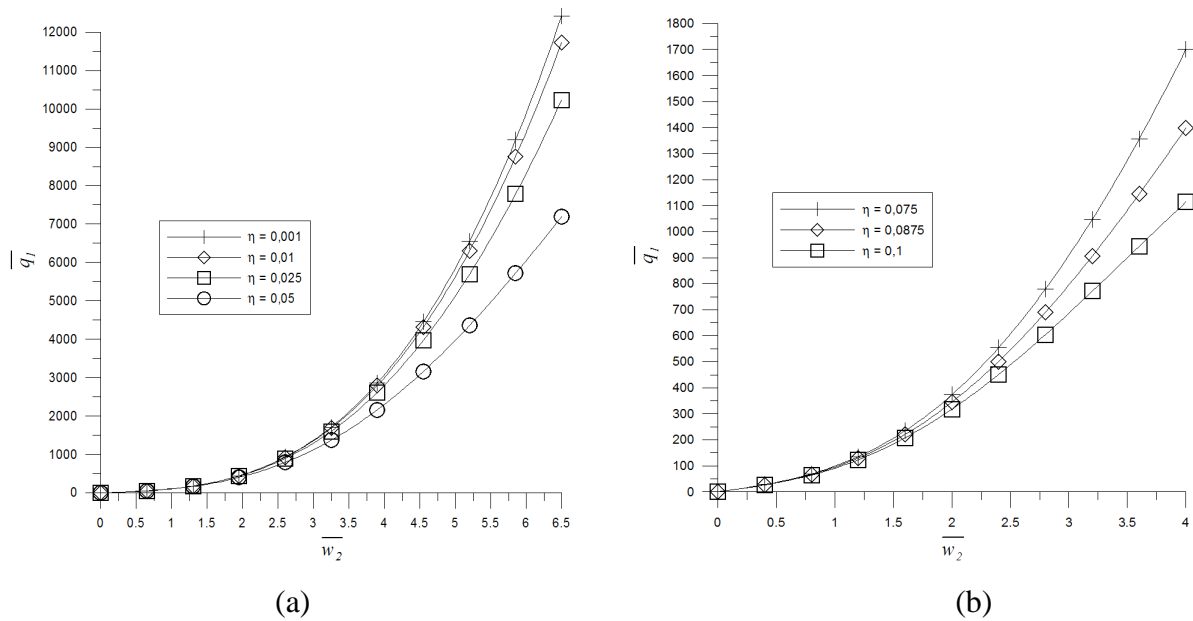
Figura 5.14 - Curvas cinemáticas para diversas espessuras ( $\nu = 0,3$  e  $r = 1$ )

### 5.3.2 Equação Genéricas para placas CCCC

O mesmo processo utilizado para placas SSSS foi aplicado em placas CCCC. Interessantemente, os mesmos valores de graus polinomiais para a interpolação dos parâmetros em placas SSSS foram utilizados em placas CCCC. No entanto, percebeu-se que, à medida que  $\eta$  aumentava, os erros ficavam cada vez maiores ao ponto da interpolação perder seu sentido físico. Dessa forma, o limite utilizado para a geração da equação genérica de placas CCCC para a razão de aspecto da espessura ficou em 0,1.

Outro problema encontrado na interpolação das respostas de placas CCCC foi na inserção da razão de aspecto de lados na derivada inicial. Como já dito, esta foi produzida considerando apenas a razão de aspecto da espessura como uma variável. Sendo assim, no caso de placas SSSS, as constantes foram interpoladas para inserir o efeito da razão de aspecto de lados. Neste caso, apenas duas constantes são utilizadas e seu comportamento é bem definido. Este não é o caso das constantes de placas CCCC. São 6 no total, e seu comportamento não é tão definido ao ponto de se poder utilizar extrapolação. Neste caso, o mesmo limite utilizado para as constantes da equação linear ( $r = 2$ ) foi usado para a equação genérica.

Em relação aos erros inerentes da interpolação dos parâmetros, estes ficaram em cerca de 8%, menores que na interpolação de placas SSSS devido o fato que os limites de cada uma das equações genéricas são diferentes.



**Figura 5.15 - Gráficos das soluções de placas CCCC**

As equações que regem os gráficos da Figura 5.15 foram produzidas com alguns parâmetros fixos:  $r = 1$  e  $\nu = 0,3$ . Elas são dadas por:

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 70,430232\bar{w}_2 + 38,591301\bar{w}_2^3 + 2,110013\bar{w}_2^4 - 0,207009\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,001 \quad (5.7a)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 70,204200\bar{w}_2 + 39,584412\bar{w}_2^3 + 1,602722\bar{w}_2^4 - 0,212316\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,01 \quad (5.7b)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 69,376516\bar{w}_2 + 40,438312\bar{w}_2^3 + 0,571404\bar{w}_2^4 - 0,20141\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,025 \quad (5.7c)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 66,679994\bar{w}_2 + 40,350396\bar{w}_2^3 - 1,667740\bar{w}_2^4 - 0,116326\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,05 \quad (5.7d)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 63,294664\bar{w}_2 + 39,558729\bar{w}_2^3 - 4,563993\bar{w}_2^4 + 0,082129\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,075 \quad (5.7e)$$

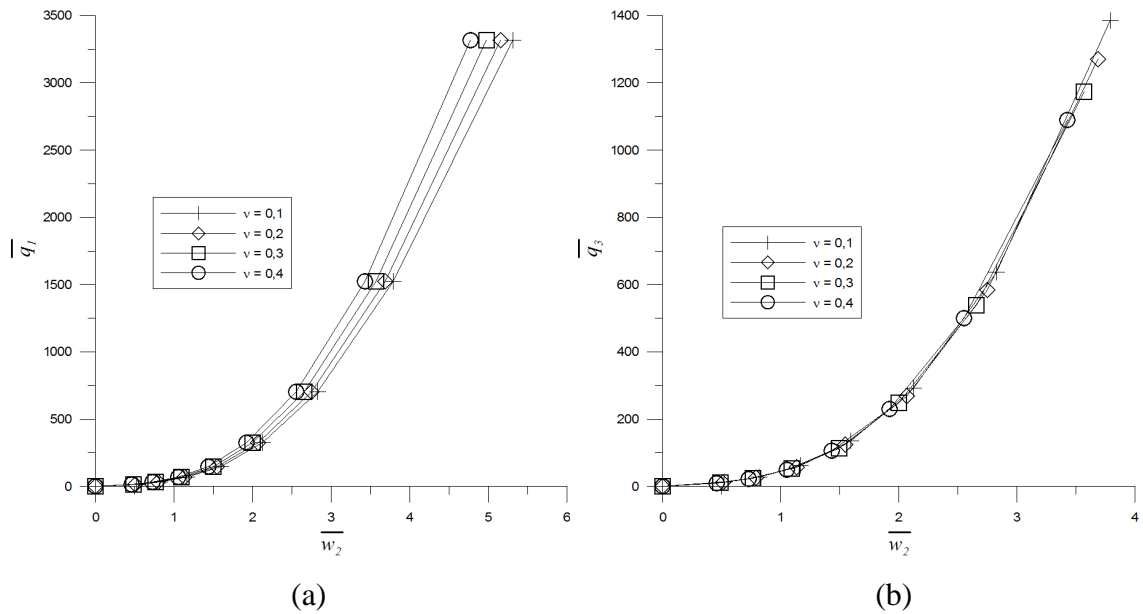
$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 61,218321\bar{w}_2 + 39,326310\bar{w}_2^3 - 6,260973\bar{w}_2^4 + 0,2,33177\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,0875 \quad (5.7f)$$

$$\bar{q}_1(\bar{w}_2) = 59,017993\bar{w}_2 + 39,430737\bar{w}_2^3 - 8,125153\bar{w}_2^4 + 0,423882\bar{w}_2^5 \quad \therefore \eta = 0,1 \quad (5.7g)$$

### 5.3.3 Equações Invariantes ao coeficiente de Poisson

Quando as trajetórias de equilíbrio são plotadas, com uma razão de aspecto de lados e de espessura fixa, variando apenas o coeficiente de Poisson, uma possível relação entre elas aparece. Alterando a carga parametrizada explicitada na equação (3.46), pode-se fazer com que a influência do coeficiente de Poisson no sistema seja minimizada. A modificação neste carregamento é mostrado no capítulo 4.2.2 e altera as curvas como mostra a Figura 5.16.

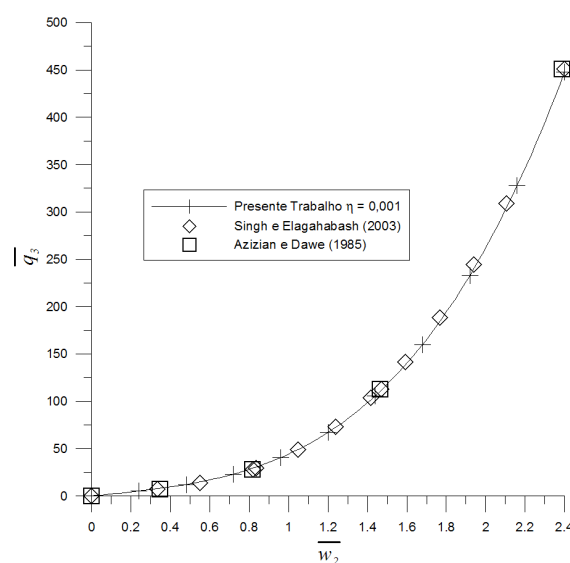




**Figura 5.16 - Demonstração da invariância do coeficiente de Poisson através da troca do adimensional de carga**

Nota-se que as curvas, antes separadas, ficaram unidas. Desta forma, pode-se utilizar o procedimento adotado para a geração das equações genéricas considerando agora, apenas os parâmetros geométricos do sistema, já que o módulo de elasticidade não influencia no sistema parametrizado e o coeficiente de Poisson foi absorvido pelo parâmetro sugerido.

No entanto, deve-se observar que os pontos das análises não estão exatamente sobre uma curva. Utilizando o parâmetro sugerido, eles se aproximam ao ponto de se poder interpolar uma curva entre todos os pontos com erros aceitáveis.



**Figura 5.17 - Comparação dos resultados ( $r = 1$ )**

A Figura 5.17 compara os resultados obtidos com duas soluções da literatura. Nota-se a

boa concordância dos resultados encontrados. A equação para o gráfico da Figura 5.17 é:

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2) = 20,520291\bar{w}_2 + 18,591639\bar{w}_2^3 + 5,701346\bar{w}_2^4 - 0,594863\bar{w}_2^5 \therefore \eta = 0,001 \quad (5.8)$$

Os valores apresentados acima são para placas com baixas razões de aspecto da espessura. Observou-se que, a medida que esta razão aumenta, a parametrização sugerida deixa de ser válida. Ou seja, os pontos das análises obtidas pelo MEF, ficavam mais distantes. O limite encontrado para o uso do carregamento parametrizado sugerido pelo presente trabalho é  $\eta = 0,05$ . Ou seja, o uso desta parametrização é restringido para placas finas. No entanto, pode-se procurar um adimensional que funcione, também, para placas semi-espessas.

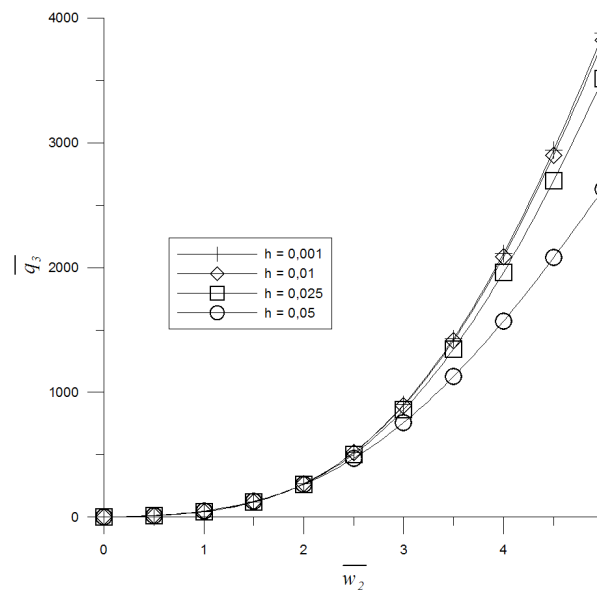


Figura 5.18 - Outros resultados ( $r = 1$ )

As curvas obtidas para outros valores de  $\eta$  estão ilustradas na Figura 5.18. Estas são dadas por:

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2) = 20,520291\bar{w}_2 + 18,591639\bar{w}_2^3 + 5,701346\bar{w}_2^4 - 0,594863\bar{w}_2^5 \therefore \eta = 0,001 \quad (5.9a)$$

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2) = 20,453976\bar{w}_2 + 18,995891\bar{w}_2^3 + 6,346878\bar{w}_2^4 - 0,937235\bar{w}_2^5 \therefore \eta = 0,01 \quad (5.9b)$$

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2) = 20,453976\bar{w}_2 + 18,995891\bar{w}_2^3 + 6,346878\bar{w}_2^4 - 0,937239\bar{w}_2^5 \therefore \eta = 0,025 \quad (5.9c)$$

$$\bar{q}_3(\bar{w}_2) = 20,257267\bar{w}_2 + 30,103446\bar{w}_2^3 - 0,631152\bar{w}_2^4 - 0,2,68878\bar{w}_2^5 \therefore \eta = 0,05 \quad (5.9d)$$

## 6. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi desenvolvido um sistema de solução de placas deformáveis ao cisalhamento transversal através da teoria de placas de Mindlin utilizando carregamentos que geram grandes deslocamentos. A metodologia é baseada no método *pb-2*, que é uma modificação do método de Rayleigh-Ritz que facilita a aplicação das condições de contorno. O sistema é empregado a um *software* de computação simbólica que permite a obtenção de soluções semi-analíticas, ou seja, soluções que utilizam técnicas numéricas, porém em função de um ou mais parâmetros de entrada. O objetivo do trabalho é a obtenção de soluções semi-analíticas que englobassem o maior número de parâmetros do sistema. Uma redução do sistema foi feita para a obtenção de soluções semi-analíticas de placas semi-espessas, em pequenos deslocamentos. Além disso, 5184 análises foram produzidas através do Método dos Elementos Finitos, utilizando o *software* comercial Ansys v11.0, para a geração de superfícies de resposta para a deflexão central de placas sob grandes deslocamentos, para as condições de contorno SSSS e CCCC. Ademais, uma possibilidade de retirada da influência do coeficiente de Poisson na resposta através da escolha de um novo adimensional foi analisada.

Através da metodologia proposta na seção 3.2.1, foram obtidas soluções semi-analíticas para placas semi-espessas para diversas condições de contorno para deslocamentos infinitesimais. Inicialmente, resultados numéricos foram providos para a verificação da convergência dos valores da presente metodologia com soluções encontradas na literatura. Notando-se que as soluções estritamente numéricas convergiam às com soluções numéricas e analíticas propostas por diversos autores, as soluções semi-analíticas em relação ao razão de aspecto da espessura e condições de contorno são apresentadas. Notou-se que o erro introduzido pela interpolação polinomial foi pequeno (na ordem de décimos percentuais dos valores analíticos). Desta forma, as equações semi-analíticas propostas para pequenos deslocamentos

podem ser utilizadas para *benchmark* bem como para uma referência rápida a projetistas. Provou-se ainda que estas se reduzem as soluções de placas finas quando a espessura tende a zero.

A importância da introdução de equações como as apresentadas na seção 5.1.2 é a referência rápida para engenheiros. Devido à complexidade das equações analíticas propostas por Lee et. al. [Lee et. al., 2002] além dos problemas já citados na seção 1.4 sobre as soluções apresentadas por estes autores, essas equações deixam de ter a praticidade de uma equação polinomial com poucos termos e concordante com as soluções encontradas na literatura.

Foi visto que devido à potência computacional, soluções com mais de um parâmetro não puderam ser obtidas com enriquecimento necessário para a convergência às soluções encontradas na literatura. No entanto, com o avanço de *softwares* de computação simbólica, soluções como estas poderão ser facilmente encontradas, através de metodologias como a apresentada neste trabalho. Todas as soluções semi-analíticas apresentadas neste texto foram obtidas considerando um coeficiente de Poisson fixo de valor 0,3.

Conforme dito no texto (seção 5.2), não foi possível obter soluções para o caso no qual é considerado grandes deslocamentos. Devido o grande consumo de memória e processamento, soluções semi-analíticas não puderam ser obtidas.

As equações genéricas para placas com deformação cisalhante transversal sob grandes deslocamentos foram obtidas através de sucessivos mínimos quadrados. Essa metodologia foi produzida devido o não conhecimento da forma da equação final, que é um dado de entrada no método. Além disso, observou-se a influência de cada um dos parâmetros em relação à deflexão central. Dessa forma, duas equações genéricas foram geradas para as condições de contorno CCCC e SSSS.

Através da superfície de resposta de placas SSSS, podem-se obter diversas equações com variáveis independentes a escolha do projetista. Algumas delas são apresentadas na Tabela 6.1 e Tabela 6.2. Para valores de razão de aspecto de lados, espessura e coeficiente de Poisson podem-se construir trajetórias cinemáticas. As equações apresentadas são apenas exemplos de relações que podem ser obtidas.

**Tabela 6.1 - Trajetórias de equilíbrio para placas SSSS ( $\eta = 0,1$  e  $r = 1$ )**

$\frac{q_3 a^4}{D} = 234,22567w + 359,39617 \frac{w^3}{h^2} - 48,63539 \frac{w^4}{h^3} + 4,78842 \frac{w^5}{h^4}$	$\nu = 0,15$
$\frac{q_3 a^4}{D} = 234,22567w + 355,07024 \frac{w^3}{h^2} - 11,92770 \frac{w^4}{h^3} - 8,93202 \frac{w^5}{h^4}$	$\nu = 0,32$
$\frac{q_3 a^4}{D} = 234,22567w + 347,72216 \frac{w^3}{h^2} + 7,23367 \frac{w^4}{h^3} - 16,33727 \frac{w^5}{h^4}$	$\nu = 0,39$

**Tabela 6.2 - Trajetórias de equilíbrio de placas SSSS variando  $\eta$  ( $\nu = 0,3$  e  $r = 2$ )**

$\frac{q_3 a^4}{D} = 98,04500w + 233,17705 \frac{w^3}{h^2} - 8,18301 \frac{w^4}{h^3} - 2,21326 \frac{w^5}{h^4}$	$\eta = 0,05$
$\frac{q_3 a^4}{D} = 95,75060w + 216,92733 \frac{w^3}{h^2} - 11,04656 \frac{w^4}{h^3} - 6,84367 \frac{w^5}{h^4}$	$\eta = 0,10$
$\frac{q_3 a^4}{D} = 92,15639w + 191,28367 \frac{w^3}{h^2} - 16,28161 \frac{w^4}{h^3} - 8,93223 \frac{w^5}{h^4}$	$\eta = 0,15$
$\frac{q_3 a^4}{D} = 87,55514w + 177,16324 \frac{w^3}{h^2} - 38,90141 \frac{w^4}{h^3} - 4,35970 \frac{w^5}{h^4}$	$\eta = 0,20$

Ainda sim, foi observado um padrão com relação às trajetórias cinemáticas em relação ao coeficiente de Poisson. Através de uma nova parametrização do carregamento transversal pode-se reduzir a influência deste parâmetro na resposta do sistema. No entanto, foi visto que esta parametrização funcionava bem em placas finas apenas. Com o aumento da razão de aspecto da espessura, a influência do coeficiente de Poisson aparecia novamente.

Existem diversas sugestões para trabalhos futuros. Inicialmente, pode-se modificar o sistema desenvolvido para a obtenção da solução da análise não-linear para uma formulação incremental. No entanto, deve-se atentar para que a rotina não absorva os mesmos problemas da formulação adotada neste texto. Ainda assim, pode-se obter soluções lineares com mais de um parâmetro literal com a simples alteração do programa de computação simbólica utilizado. A escolha de um programa compilado em 64 bits já aumentaria a memória na qual o programa pode manipular. Pode-se também amplificar o uso desta metodologia aplicando-a em sistemas constitutivos ortotrópicos.

## Referências Bibliográficas

Ansys v.11, 2008, “**User Manual**”.

Azizian, Z. G., Dawe, D. J., 1985, “Geometrically Nonlinear Analysis of Rectangular Mindlin Plates using the Finite Strip Method”, **Computers & Structures**, v. 21, n° 3, pp 423-436.

Szabó, B., Babuska, I., 1991, “**Finite Element Analysis**”, Wiley-Interscience.

Banerjee, B., Datta, S., 1981, “A New Approach to an Analysis of Large Deflections of Thin Elastic Plates”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 16, n° 1, pp 47-52.

Bencharif, N., Ng, S. F., 1994, “Linear and Nonlinear Deflection Analysis of Thin Rectangular Plates-I. Theoretical Derivation”, **Computers & Structures**, v. 50, n° 6, pp 757-761.

Bencharif, N., Ng, S. F., 1994, “Linear and Nonlinear Deflection Analysis of Thin Rectangular Plates-II. Numerical Applications”, **Computers & Structures**, v. 50, n° 6, pp 763-776.

Berger, H. M., 1955, “A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates”, **Journal of Applied Mechanics**, v. 22, pp 465-472.

Borche, A., 2008, “**Métodos Numéricos**”, Editora UFRGS, Porto Alegre.

Chia, C. Y., 1980, “**Nonlinear Analysis of Plates**”, McGraw-Hill, New York.

Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., Aiken, L. S., 2003, “**Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for Behavioral Sciences**”, Lawrence Erlbaum Associates, London.

Cooke, D. W., Levinson, M., 1983, “Thick Rectangular Plates-II. The Generalized Lévy Solution”, **International Journal of Mechanics Sciences**, v. 25, pp. 207-215.

Craig, R. T., 1987, “Finite Difference Solutions of Reissner’s Plate Equations”, **Journal of Engineering Mechanics**, v. 113, n° 113, pp 31-48.

Dym, C. L., Shames, I. H., 1979, “**Solid Mechanics: A Variational Approach**”, McGraw-Hill, New York.

Faires, J., Douglas, J., Burden, R., 2003, “**Análise Numérica**”, Editora Thompson Learning, São Paulo.

Fung, Y. C., 1965, “**Foundations of Solid Mechanics**”, Prentice Hall.

Kant, T., 1983, “Numerical Analysis of Thick Plates”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 31, pp 1-18.

Kant, T., Hinton, E., 1983, “Mindlin Plate Analysis by Segmentation Method”, **Journal of Engineering Mechanics**, v. 109, n° 2, pp 537-556.

Kitipornchai, S., Xiang, Y., Liew, K. M., Lim, M. K., 1994, “A Global Approach for Vibration of Thick Trapezoidal Plates”, **Computers & Structures**, v. 53, n° 1, pp 83-92.

Kurrer, K-E., 2008, “**The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics**”, Ernst & Sohn, Berlin.

Lee, K. H., Lim, G. T., Wang, C. M., 2002, “Thick Lévy plates re-visited”, **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n° 1, pp 127-144.

Levy, S., 1942, “Square Plate with Clamped Edges Under Normal Pressure Producing Large Deflections”, **National Advisory Committee for Aeronautics**, TN n° 847.

Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., 1993, “Transverse Vibration of Thick Rectangular Plates-I. Comprehensive Sets of Boundary Conditions”, **Computers & Structures**, v. 49, n° 1, pp 1-29.

Lim, S. P., Lee, K. H., Crow, S. T., Senthilnathan, N. R., 1988, “Linear and Nonlinear Bending of Shear-Deformable Plates”, **Computers & Structures**, v. 30, n° 4, pp 945-952.

Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M., 1977, "A High-Order Theory of Plate Deformation Part 1: Homogeneous Plates", **Journal of Applied Mechanics**, v. 44, n° 4, pp 669-676.

Maple v.12, 2009, "**User Manual**".

Mindlin, R. D., 1951, "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Elastic Plates", **Journal of Applied Mechanics**, v. 18, pp 31-38.

Pica, A., Wood, R. D., Hinton, E., 1980, "Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behavior using a Mindlin Formulation", **Computers & Structures**, v. 11, pp 203-215.

Reddy, J. N., 1984, "A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation", **International Journal of Solids and Structures**, v. 20, pp 881-896.

Reddy, J. N., 1999, "**Theory and Analysis of Elastic Plates**", Taylor & Francis, Philadelphia.

Reddy, J. N., Wang, C. M., Lim, G. T., Ng, K. H., 2001, "Bending Solutions of Levinson Beams and Plates in Terms of the Classical Theories", **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, pp 4701-4720.

Reissner, E., 1944, "On the Theory of Bending of Elastic Plates", **Journal of Mathematics and Physics**, v. 23, pp 184-191.

Reissner, E., 1945, "The Effect of Transversal Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", **Journal of Applied Mechanics**, v. 12, pp 69-77.

Reissner, E., 1947, "On Bending of Elastic Plates", **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 5, n° 1, pp 55-68.

Reissner, E., 1983, "A Twelfth Order Theory of Transverse Bending of Transversely Isotropic Plates", **Zeitschrift fuer angewandte Matematik und Mechanik**, v. 63, n° 7, pp 285-289.

Rushton, K. R., 1970, "Large Deflections of Plates with Initial Curvature", **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 12, pp 1037-1051.



- Sabzo, B. A., Babuska, I., 1991, "**Finite Element Analysis**", Wiley-IEEE, New York.
- Salerno, V. L., Goldberg, M. A., 1960, "Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates", **Journal of Applied Mechanics**, v. 27, pp 54-58.
- Singh, A. V., Elaghabash, Y., 2003, "On Finite Displacement Analysis of Quadrangular Plates", **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 38, n° 8, pp 1149-1162.
- Tauchert, T. R., 1974, "**Energy Principles in Structural Mechanics**", McGraw-Hill, New York.
- Taylor, R. L., Govindjee, S., 2004, "Solutions of Clamped Rectangular Plate Problems", **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 20, n° 10, pp 757-765.
- Timoshenko, S. P., 1953, "**History of Strength of Materials: With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**", McGraw-Hill, New York.
- Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S., 1959, "**Theory of Plates and Shells**", McGraw-Hill, New York.
- Todhunter, I., Pearson, K., 2005, "**A History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials**", Adamant Media Corporation, Boston.
- Ventsel, E., Krauthammer, T., 2001, "**Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications**", CRC Press LLC, USA.
- Wang, C. M., Aung, T. M., 2007, "Plastic Buckling Analysis of Thick Plates using p-Ritz Method", **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n° 18-19, pp 6239-6255.
- Wang, C. M., Lim, G. T., Reddy, J. N., Lee, K. H., 2001, "Relationship between Bending Solutions of Reissner and Mindlin plate Theories", **Engineering Structures**, v. 23, n° 7, pp 838-849.
- Wilson, P. E., Boresi, A. P., 1964, "Large Deflection of a Clamped Circular Plate Including

Effects of Transverse Shear”, **Journal of Applied Mechanics**, v. 4, pp 540-541.

### Anexo I - Decomposição do Vetor de Deformações Não-linear

Considera-se o vetor de graus de liberdade proposto na equação (2.2) e o vetor de deformações não-lineares ( $\boldsymbol{\varphi}$ ) proposto na equação (2.7c). A fim de se fatorar os produtos das derivadas, define-se os vetores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.1})$$

É direto verificar que os termos de (2.7c) estão presentes na matriz  $\mathbf{A}$ , dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \quad (\text{AI.2})$$

ou:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{3,1}^2 & u_{3,1}u_{3,2} & u_{3,1}u_{3,2} & 0 & 0 \\ u_{3,1}u_{3,2} & u_{3,2}^2 & u_{3,2}^2 & 0 & 0 \\ u_{3,1}^2 & u_{3,1}u_{3,2} & u_{3,1}u_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.3})$$

Agora os termos da diagonal de  $\mathbf{A}$  podem ser seletivamente extraídos através de uma seqüência adequada de operações. Primeiramente os vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  são operados por  $\mathbf{A}$  para gerar dois novos vetores,  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha \quad (\text{AI.4})$$

onde:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{Bmatrix} u_{3,1}^2 \\ u_{3,1}u_{3,2} \\ u_{3,1}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{Bmatrix} u_{3,1}u_{3,2} \\ u_{3,2}^2 \\ u_{3,1}u_{3,2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.5})$$

O próximo passo é extrair o primeiro termo de  $\mathbf{n}_1$  e o segundo e terceiro termo de  $\mathbf{n}_2$ . Para tanto, as operações elementares de  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$  (equação (3.29)) são aplicadas sobre os vetores de (AI.5), tal que:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{S}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{n}_2 = \mathbf{S}_1 \mathbf{A} \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{A} \mathbf{r}_2 = \mathbf{S}_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T \mathbf{r}_2 \quad (\text{AI.6})$$

Considerando os operadores lineares descritos na equação (3.31), reescreve-se a equação (AI.1) na forma:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{D}_1 \Delta, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{D}_2 \Delta \quad (\text{AI.7})$$

obtendo-se:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{S}_1 \mathbf{D}_1 \Delta \Delta^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{D}_2 \Delta \Delta^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{r}_2 \quad (\text{AI.8})$$

A equação (AI.8) é reescrita considerando a interpolação do vetor deslocamentos, mostrado na equação (3.25), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{S}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{r}_2 = \\ &= \mathbf{S}_1 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (\text{AI.9})$$

que é idêntica a equação (3.28) mostrada no capítulo 3.2.

## Anexo II - Montagem do Sistema Matricial de Flexão Não-Linear

Considerando a equação (3.33), que representa a energia de deformação da placa considerando deslocamentos finitos. Ela advém da equação (3.19) onde são inseridas as decomposições dos vetores de deformação linear ( $\chi$ ) e não-linear ( $\phi$ ) mostrados nas equações (3.26) e (3.28), respectivamente.

O primeiro termo da equação (3.19) corresponde às deformações lineares. Sua montagem é simples e direta. O segundo termo avalia o acoplamento das deformações de membrana com as de flexão. Este é escrito na forma:

$$T_2 = 2\chi^T \mathbf{R}_{AC} \phi \quad (\text{AII.1})$$

Substituindo as equações (3.26) e (3.28), tem-se:

$$T_2 = 2\lambda^T \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} (\mathbf{S}_1 \mathbf{B}_1 \lambda \lambda^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{r}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{B}_1 \lambda \lambda^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{r}_2) \quad (\text{AII.2})$$

e considerando as equações (3.35) a fazendo o produto, reescreve-se a equação (AII.2) na forma:

$$T_2 = 2\lambda^T \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{11} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_1 + 2\lambda^T \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{12} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_2 \quad (\text{AII.3})$$

Ainda sim, pode-se modificar a equação (AII.3) para sua simples derivação em relação ao vetor de constantes ( $\lambda$ ). O produto dos vetores  $\lambda$  e  $\mathbf{V}_\alpha$  pode ser considerado como um produto interno. Sendo assim, pode-se modificá-lo na forma:

$$\lambda^T \mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha^T \lambda \quad (\text{AII.4})$$

alterando a equação (AII.3), tornando-a:

$$T_2 = 2\lambda^T \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T \lambda + 2\lambda^T \mathbf{B}_L^T \mathbf{R}_{AC} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T \lambda \quad (\text{AII.5})$$

A equação (AII.5) é idêntica ao segundo e terceiro termo da equação (3.33).

Como já dito, pode-se ver que o terceiro termo da equação (3.19) relaciona os termos de flexão não-linear. Este pode ser escrito na forma:

$$T_3 = \phi^T \mathbf{R}_{NL} \phi \quad (\text{AII.6})$$

Substituindo a equação (3.28) e considerando a equação (3.35), tem-se:

$$T_3 = (\mathbf{V}_2 \lambda \lambda^T \mathbf{B}_{12}^T + \mathbf{V}_1 \lambda \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T) \mathbf{R}_{NL} (\mathbf{B}_{11} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_1 + \mathbf{B}_{12} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_2) \quad (\text{AII.7})$$

Fazendo-se o produto da equação (AII.7), obtém-se:

$$T_3 = \mathbf{V}_2^T \lambda \lambda^T \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{11} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^T \lambda \lambda^T \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1^T \lambda \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{11} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1^T \lambda \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \lambda^T \mathbf{V}_2 \quad (\text{AII.8})$$

O primeiro e o último termo da equação são simétricos e, além disso, pode-se usar a relação explicitada na equação (AII.4), obtendo:

$$T_3 = \lambda^T \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{11} \lambda \mathbf{V}_1^T \lambda + 2\lambda^T \mathbf{V}_1 \lambda^T \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T \lambda + \lambda^T \mathbf{V}_2 \lambda^T \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{R}_{NL} \mathbf{B}_{12} \lambda \mathbf{V}_2^T \lambda \quad (\text{AII.9})$$

### Anexo III - Equações Genéricas para Análise Não-Linear no MEF

Os valores de  $f_{ijkl}$  para placas SSSS estão listados na tabela abaixo. Através destes valores, pode-se montar a equação genérica, utilizando a equação (4.16), para placas semi-espessas sob grandes deslocamentos.

**Tabela AIII.1 - Constantes para placas SSSS**

$f_{1111}$	61,4695	$f_{1121}$	121,0397	$f_{1131}$	100,1056	$f_{1141}$	147,3582
$f_{2111}$	7,3928	$f_{2121}$	-129,5584	$f_{2131}$	-1254,5540	$f_{2141}$	-1224,5791
$f_{3111}$	-1,4514	$f_{3121}$	38,9395	$f_{3131}$	-148,3156	$f_{3141}$	3339,7384
$f_{1211}$	31,3436	$f_{1221}$	-694,0059	$f_{1231}$	7185,7607	$f_{1241}$	-17474,6224
$f_{2211}$	1,4634	$f_{2221}$	655,1678	$f_{2231}$	-8032,5444	$f_{2241}$	18341,9481
$f_{3211}$	1,7357	$f_{3221}$	-234,6435	$f_{3231}$	3079,1036	$f_{3241}$	-6636,1945
$f_{1311}$	108,4327	$f_{1321}$	1065,9423	$f_{1331}$	-18974,6737	$f_{1341}$	22931,0242
$f_{2311}$	12,7291	$f_{2321}$	-452,3723	$f_{2331}$	11533,9324	$f_{2341}$	27526,8936
$f_{3311}$	2,3188	$f_{3321}$	-126,1213	$f_{3331}$	-2197,8005	$f_{3341}$	-25393,2654
$f_{1112}$	-53,4166	$f_{1122}$	-70,0567	$f_{1132}$	-1187,0774	$f_{1142}$	2967,3682
$f_{2112}$	-7,1522	$f_{2122}$	79,3175	$f_{2132}$	2195,1522	$f_{2142}$	-1168,5117
$f_{3112}$	1,5924	$f_{3122}$	-39,3136	$f_{3132}$	37,3136	$f_{3142}$	-3287,4980
$f_{1212}$	-25,3943	$f_{1222}$	787,5275	$f_{1232}$	-8720,1845	$f_{1242}$	21374,7925
$f_{2212}$	-3,3176	$f_{2222}$	-754,7747	$f_{2232}$	9640,1635	$f_{2242}$	-21738,2265
$f_{3212}$	-1,5561	$f_{3222}$	256,6781	$f_{3232}$	-3470,9338	$f_{3242}$	7076,9930
$f_{1312}$	-105,5377	$f_{1322}$	-1720,0136	$f_{1332}$	25957,6576	$f_{1342}$	-36605,8088
$f_{2312}$	-9,8608	$f_{2322}$	705,7877	$f_{2332}$	-13899,3649	$f_{2342}$	-32248,1346
$f_{3312}$	-3,5420	$f_{3322}$	167,9319	$f_{3332}$	1494,7223	$f_{3342}$	33424,5228
$f_{1113}$	20,5736	$f_{1123}$	39,3895	$f_{1133}$	363,2910	$f_{1143}$	-967,8273
$f_{2113}$	2,4982	$f_{2123}$	-31,2754	$f_{2133}$	-827,3041	$f_{2143}$	462,4240
$f_{3113}$	-0,5675	$f_{3123}$	14,5328	$f_{3133}$	-19,1595	$f_{3143}$	1257,3119
$f_{1213}$	6,6945	$f_{1223}$	-309,0790	$f_{1233}$	3557,3633	$f_{1243}$	-8949,8315
$f_{2213}$	1,1458	$f_{2223}$	307,6403	$f_{2233}$	-4016,8296	$f_{2243}$	9527,0035
$f_{3213}$	0,6355	$f_{3223}$	-103,6127	$f_{3233}$	1432,0165	$f_{3243}$	-3127,3546
$f_{1313}$	40,7767	$f_{1323}$	759,6617	$f_{1333}$	-10973,3253	$f_{1343}$	17452,1438
$f_{2313}$	3,2910	$f_{2323}$	-346,0068	$f_{2333}$	6067,4061	$f_{2343}$	8907,2483
$f_{3313}$	1,3622	$f_{3323}$	-51,6448	$f_{3333}$	-692,0334	$f_{3343}$	-11742,1478
$f_{1114}$	-2,4606	$f_{1124}$	-5,7316	$f_{1134}$	-31,9884	$f_{1144}$	87,9974
$f_{2114}$	-0,2800	$f_{2124}$	3,9065	$f_{2134}$	93,3433	$f_{2144}$	-41,1307
$f_{3114}$	0,0645	$f_{3124}$	-1,7273	$f_{3134}$	4,0187	$f_{3144}$	-154,9453

$f_{1214}$	-0,6097	$f_{1224}$	37,7540	$f_{1234}$	-445,6329	$f_{1244}$	-445,6329
$f_{2214}$	-0,1189	$f_{2224}$	-38,7943	$f_{2234}$	514,0441	$f_{2244}$	-1262,4575
$f_{3214}$	-0,0833	$f_{3224}$	13,1192	$f_{3234}$	-183,6499	$f_{3244}$	421,6701
$f_{1314}$	-4,8736	$f_{1324}$	-97,4618	$f_{1334}$	1390,7653	$f_{1344}$	-2362,6835
$f_{2314}$	-0,3666	$f_{2324}$	47,3884	$f_{2334}$	-798,6966	$f_{2344}$	-741,2250
$f_{3314}$	-0,1581	$f_{3324}$	4,7572	$f_{3334}$	101,2512	$f_{3344}$	1291,8802

Para placas CCCC, as constantes de interpolação estão mostradas na tabela abaixo.

**Tabela AIII.2 - Constantes para placas CCCC**

$f_{1111}$	186,9008	$f_{1121}$	-57,040	$f_{1131}$	29288,5827	$f_{1141}$	-236841,5409
$f_{2111}$	3,5976	$f_{2121}$	392,1172	$f_{2131}$	-39252,1940	$f_{2141}$	254927,5313
$f_{3111}$	-0,2831	$f_{3121}$	-156,4632	$f_{3131}$	8279,2359	$f_{3141}$	-53130,0701
$f_{1211}$	82,4740	$f_{1221}$	-2761,7913	$f_{1231}$	59117,8196	$f_{1241}$	-361917,4546
$f_{2211}$	-6,3680	$f_{2221}$	1334,8479	$f_{2231}$	-40163,4579	$f_{2241}$	273230,5252
$f_{3211}$	0,8452	$f_{3221}$	-223,8849	$f_{3231}$	8610,5290	$f_{3241}$	-65884,6344
$f_{1311}$	140,7172	$f_{1321}$	4829,7380	$f_{1331}$	-165326,7245	$f_{1341}$	754949,3004
$f_{2311}$	74,6340	$f_{2321}$	-3259,1229	$f_{2331}$	128449,6087	$f_{2341}$	-673383,1398
$f_{3311}$	-9,5646	$f_{3321}$	751,9897	$f_{3331}$	-41108,8812	$f_{3341}$	252480,3906
$f_{1112}$	-294,6018	$f_{1122}$	351,0107	$f_{1132}$	-58077,7182	$f_{1142}$	466822,2704
$f_{2112}$	-3,5116	$f_{2122}$	-796,9406	$f_{2132}$	71446,9406	$f_{2142}$	-473422,7752
$f_{3112}$	0,2744	$f_{3122}$	284,6664	$f_{3132}$	-14951,2045	$f_{3142}$	97334,5306
$f_{1212}$	-137,5008	$f_{1222}$	5989,5371	$f_{1232}$	-128833,1426	$f_{1242}$	769528,8799
$f_{2212}$	19,3872	$f_{2222}$	-2892,0475	$f_{2232}$	83778,5944	$f_{2242}$	-556214,0554
$f_{3212}$	-2,2156	$f_{3222}$	456,8655	$f_{3232}$	-17012,2283	$f_{3242}$	126906,3171
$f_{1312}$	-175,3032	$f_{1322}$	-10566,7106	$f_{1332}$	306178,1049	$f_{1342}$	-1358977,5307
$f_{2312}$	-129,0579	$f_{2322}$	6202,0912	$f_{2332}$	-217096,4394	$f_{2342}$	1080788,2131
$f_{3312}$	16,3809	$f_{3322}$	-1289,9886	$f_{3332}$	66894,8078	$f_{3342}$	-400086,8710
$f_{1113}$	172,7294	$f_{1123}$	-178,0399	$f_{1133}$	33632,3879	$f_{1143}$	-273455,7305
$f_{2113}$	1,2413	$f_{2123}$	460,2844	$f_{2133}$	-41991,2931	$f_{2143}$	279217,2819
$f_{3113}$	-0,1043	$f_{3123}$	-167,0497	$f_{3133}$	8784,3520	$f_{3143}$	-57186,5110
$f_{1213}$	85,0269	$f_{1223}$	-4203,8152	$f_{1233}$	90322,7515	$f_{1243}$	-533806,3372
$f_{2213}$	-16,3912	$f_{2223}$	2021,8101	$f_{2233}$	-57206,0024	$f_{2243}$	375510,5150
$f_{3213}$	1,7611	$f_{3223}$	-308,0165	$f_{3233}$	11221,7341	$f_{3243}$	-82621,2954
$f_{1313}$	80,2827	$f_{1323}$	7580,3905	$f_{1333}$	-200805,3100	$f_{1343}$	900765,9261
$f_{2313}$	80,0592	$f_{2323}$	-4143,2735	$f_{2333}$	133617,3716	$f_{2343}$	-661295,5292
$f_{3313}$	-9,9616	$f_{3323}$	791,2696	$f_{3333}$	-39107,5128	$f_{3343}$	232607,4000

$f_{1114}$	-33,3221	$f_{1124}$	24,8842	$f_{1134}$	-6279,8954	$f_{1144}$	51927,6566
$f_{2114}$	-0,1720	$f_{2124}$	-85,6152	$f_{2134}$	8069,6794	$f_{2144}$	-53891,6261
$f_{3114}$	0,0163	$f_{3124}$	32,1124	$f_{3134}$	-1696,1874	$f_{3144}$	11050,5122
$f_{1214}$	-17,9409	$f_{1224}$	929,7196	$f_{1234}$	-19784,1165	$f_{1244}$	114904,2577
$f_{2214}$	4,0316	$f_{2224}$	-444,8563	$f_{2234}$	12318,9640	$f_{2244}$	-79438,6891
$f_{3214}$	-0,4209	$f_{3224}$	66,3751	$f_{3234}$	-2374,0103	$f_{3244}$	17213,2441
$f_{1314}$	-10,9065	$f_{1324}$	-1709,2324	$f_{1334}$	42606,9126	$f_{1344}$	-190955,3604
$f_{2314}$	-16,6559	$f_{2324}$	865,7607	$f_{2334}$	-27245,7874	$f_{2344}$	133445,0918
$f_{3314}$	2,0323	$f_{3324}$	-161,5518	$f_{3334}$	7666,6698	$f_{3344}$	-45284,7207