

# Vibrações e Modos em Vigas Segmentadas Descontínuas na Seção Transversal

C. FRÖHLICH<sup>1</sup>, URI - Cerro Largo, RS, Brasil

T. TSUKAZAN<sup>2</sup>, Instituto de Matemática, UFRGS, 90001-000 Porto Alegre, RS, Brasil.

**Resumo.** Neste trabalho serão determinados os modos, as frequências naturais e as respostas forçadas para vigas definidas pela equação de Euler Bernoulli com propriedades descontínuas na seção transversal. Simulações foram realizadas com vigas bissegmentadas e trissegmentadas.

## 1. Introdução

O objetivo deste trabalho é a determinação das frequências e autofunções ou modos de vibração de vigas segmentadas com descontinuidade nas propriedades da seção transversal, modificadas pela ação de uma força que interage com os deslocamentos laterais e onde a deformação por cisalhamento e inércia de rotação são desprezados. Supõe-se que o equilíbrio das seções transversais planas não é afetado pela força axial, sua direção não muda, permanecendo plana e perpendicular ao eixo longitudinal da viga após o deslocamento. São consideradas vigas bissegmentadas e trissegmentadas. Numa viga bissegmentada, a origem do eixo espacial do primeiro segmento está no extremo esquerdo da viga e a origem do segundo segmento está no extremo direito da viga. Condições de continuidade das grandezas físicas são formuladas na posição de descontinuidade. As vigas trissegmentadas são consideradas simetricamente descontínuas com relação ao centro da viga e com condições de contorno iguais, e diferentes. Vibrações forçadas são discutidas para diferentes casos de condições de contorno clássicas com e sem apoios nas descontinuidades. O cálculo dos modos é realizado através de uma abordagem matricial. Para o cálculo da resposta forçada de uma carga harmônica utilizou-se o método espectral com o software Maple.

---

<sup>1</sup>clarifro@via-rs.net

<sup>2</sup>teresa@mat.ufrgs.br

## 2. A Equação Modal para Vibrações Livres

Adotando a viga dividida em duas partes, onde a origem do eixo espacial do primeiro segmento encontra-se no extremo esquerdo da viga e do segundo no extremo direito. O movimento oscilatório será representado por  $v_1(t, x)$  no primeiro segmento e por

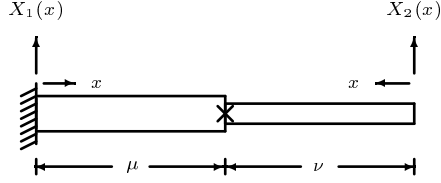


Figura 1: *Esquema de uma viga bissegmentada com descontinuidade na seção transversal*

$v_2(t, x)$  no segundo segmento. É descrito pelo modelo de uma viga Euler-Bernoulli

$$\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1(t, x)}{\partial t^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1(t, x)}{\partial x^4} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2(t, x)}{\partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2(t, x)}{\partial x^4} = 0. \quad (2.2)$$

Para vibrações livres harmônicas no tempo e com distribuição de amplitude espacial em cada segmento  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$ , tem-se as equações modais

$$X_1^{(iv)}(x) - a_1^2 \rho_1 A_1 X_1(x) = 0, \quad X_2^{(iv)}(x) - a_2^2 \rho_2 A_2 X_2(x) = 0,$$

onde  $a_i = \frac{\omega^2}{E_i I_i}$ . Assim,

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \mu_1, \\ X_2(L-x), & \text{se } \mu_1 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Para o caso de vigas com uma posição de descontinuidade, a solução da equação linear homogênea para cada segmento da viga é dada por

$$\begin{aligned} X_1 &= d_{11}\phi_1 + d_{21}\phi_2 + d_{31}\phi_3 + d_{41}\phi_4 = \Phi \mathbf{d}_1, \\ X_2 &= d_{12}\psi_1 + d_{22}\psi_2 + d_{32}\psi_3 + d_{42}\psi_4 = \Psi \mathbf{d}_2, \end{aligned}$$

onde  $\Psi_1 = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]$  é uma base de soluções do primeiro segmento e  $\Psi_2 = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]$  do segundo segmento. Condições de contorno genéricas afim de incluir condições clássicas e não clássicas podem ser escritas como

$$\begin{aligned} A_{11}X_1(0) + B_{11}X_1'(0) + C_{11}X_1''(0) + D_{11}X_1'''(0) &= 0, \\ A_{12}X_1(0) + B_{12}X_1'(0) + C_{12}X_1''(0) + D_{12}X_1'''(0) &= 0, \\ A_{21}X_2(0) + B_{21}X_2'(0) + C_{21}X_2''(0) + D_{21}X_2'''(0) &= 0, \\ A_{22}X_2(0) + B_{22}X_2'(0) + C_{22}X_2''(0) + D_{22}X_2'''(0) &= 0. \end{aligned}$$

As condições de continuidade do deslocamento, da rotação, do momento fletor e da força de cisalhamento na posição de descontinuidade da seção transversal podem ser escritas por  $X_1(\mu) = X_2(\nu)$ ,  $X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$ ,  $X_1''(\mu) = \alpha^4 X_2''(\nu)$ ,  $X_1'''(\mu) = -\alpha^4 X_2'''(\nu)$ . No caso de um apoio no ponto de descontinuidade as condições de continuidade podem ser expressas como :  $X_1(\mu) = 0$ ,  $X_2(\nu) = 0$ ,  $X_1'(\mu) = -X_2'(\nu)$ ,  $X_1''(\mu) = X_2''(\nu)$ . As condições de contorno genéricas e as condições de continuidade para a base de soluções clássicas ou soluções dinâmicas podem ser escritas na forma matricial  $\mathcal{B}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{0}$  onde,  $\mathbf{c} = \text{col}[\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2]$ . A matriz  $\mathcal{B}$  é a matriz associada às condições de contorno da viga nos blocos superior e inferior e as condições de continuidade no bloco no meio.

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A matriz  $\Phi$  é associada à base de soluções e suas derivadas nas extremidades da viga bem como à posição de descontinuidade

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1(\mu) & \phi_2(\mu) & \phi_3(\mu) & \phi_4(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'(\mu) & \phi_2'(\mu) & \phi_3'(\mu) & \phi_4'(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1''(\mu) & \phi_2''(\mu) & \phi_3''(\mu) & \phi_4''(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'''(\mu) & \phi_2'''(\mu) & \phi_3'''(\mu) & \phi_4'''(\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1(\nu) & \psi_2(\nu) & \psi_3(\nu) & \psi_4(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'(\nu) & \psi_2'(\nu) & \psi_3(\nu) & \psi_4'(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1''(\nu) & \psi_2''(\nu) & \psi_3(\nu) & \psi_4''(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'''(\nu) & \psi_2'''(\nu) & \psi_3'''(\nu) & \psi_4'''(\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1(0) & \psi_2(0) & \psi_3(0) & \psi_4(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'(0) & \psi_2'(0) & \psi_3(0) & \psi_4'(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1''(0) & \psi_2''(0) & \psi_3(0) & \psi_4''(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'''(0) & \psi_2'''(0) & \psi_3'''(0) & \psi_4'''(0) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A equação característica de cada tipo de viga é obtido mediante  $\det(\mathbf{B}\Phi) = \mathbf{0}$  e os modos, resolvendo-se o sistema de equações lineares .

### Cálculo Simbólico dos Modos

A base espectral clássica do primeiro segmento é  $\phi_1 = \text{sen}(\varepsilon_1 x)$ ,  $\phi_2 = \text{cos}(\varepsilon_1 x)$ ,  $\phi_3 = \text{senh}(\varepsilon_1 x)$ ,  $\phi_4 = \text{cosh}(\varepsilon_1 x)$  e a base espectral do segundo segmento é  $\psi_1 = \text{sen}(\varepsilon_2 x)$ ,  $\psi_2 = \text{cos}(\varepsilon_2 x)$ ,  $\psi_3 = \text{senh}(\varepsilon_2 x)$ ,  $\psi_4 = \text{cosh}(\varepsilon_2 x)$ , onde  $\varepsilon_1 = (a_1^2 \rho_1 A_1)^{1/4}$ ,

$$\varepsilon_2 = \theta \varepsilon_1, \quad \theta = \frac{\varphi}{\alpha}, \quad \varphi = \sqrt[4]{\frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}} \quad \text{e} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}}.$$

**Vigas trissegmentadas simetricamente descontínuas com condições de contorno iguais.**

As vigas estudadas são da forma segúm a Figura 2. As vigas deste tipo possuem

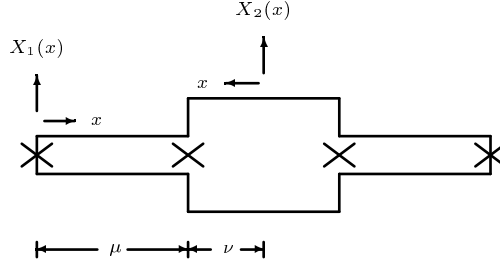


Figura 2: *Viga trissegmentada simetricamente descontínua com condições de contorno iguais*

modos simétricos e anti-simétricos.

Pode-se determinar facilmente os modos anti-simétricos considerando a metade da viga, em cujo extremo direito anulam-se o deslocamento e o momento fletor, dando origem à condição apoiada,

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0, \quad X_2(0) = X_2''(0) = 0.$$

Os modos simétricos calculam-se considerando a metade da viga, em cujo extremo direito anulam-se a força de cisalhamento e a rotação, dando lugar à condição deslizante,

$$X_1(0) = X_1'(0) = 0, \quad X_2'(0) = X_2'''(0) = 0.$$

Nestes casos são utilizados os resultados referentes às vigas bissegmentadas com apoio no extremo direito, com ou sem apoio na descontinuidade.

**Vigas trissegmentadas simetricamente descontínuas com condições de contorno diferentes.**

Neste caso, é necessário introduzir três funções de deslocamento. Na figura 3, é apresentada, como exemplo, uma viga fixa-apoiada. Para vibrações livres harmônicas no tempo e com distribuição de amplitude espacial em cada segmento  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$ ,  $X_3(x)$  tem-se as equações modais para

$$X_1^{(iv)}(x) - a_1^2 \rho_1 A_1 X_1(x) = 0,$$

$$X_2^{(iv)}(x) - a_2^2 \rho_2 A_2 X_2(x) = 0,$$

$$X_3^{(iv)}(x) - a_1^2 \rho_1 A_1 X_3(x) = 0,$$

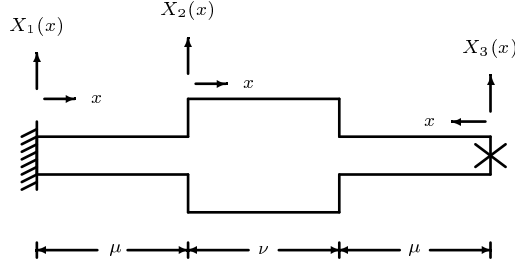


Figura 3: Viga trissegmentada simetricamente descontínua com condições de contorno diferentes

onde  $a_i = \frac{\omega^2}{E_i I_i}$ , para  $i=1, 2$ . As funções  $X_1(x)$  e  $X_3(x)$  utilizam as funções de base  $\phi_i(x)$  definidas anteriormente, e a função  $X_2(x)$  utiliza as funções de base  $\psi_i(x)$ . As funções  $X_1(x)$  e  $X_3(x)$  utilizam as funções de base  $\phi_i(x)$  definidas anteriormente, e a função  $X_2(x)$  utiliza as funções de base  $\psi_i(x)$ .

Uma vez determinadas as funções  $X_1(x)$ ,  $X_2(x)$  e  $X_3(x)$ , a solução  $X(x)$  da equação modal é dada por

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \mu, \\ X_2(x - \mu), & \text{se } \mu \leq x \leq 1 - \mu, \\ X_3(1 - x), & \text{se } 1 - \mu \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

De maneira genérica, as condições de contorno da viga trissegmentada podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} A_{11}X_1(0) + B_{11}X_1'(0) + C_{11}X_1''(0) + D_{11}X_1'''(0) = 0 \\ A_{12}X_1(0) + B_{12}X_1'(0) + C_{12}X_1''(0) + D_{12}X_1'''(0) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{cases} A_{21}X_3(0) + B_{21}X_3'(0) + C_{21}X_3''(0) + D_{21}X_3'''(0) = 0 \\ A_{22}X_3(0) + B_{22}X_3'(0) + C_{22}X_3''(0) + D_{22}X_3'''(0) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

As condições de continuidade das grandezas físicas na posição de descontinuidade da seção transversal podem ser escritas, na primeira descontinuidade, como:

$$\begin{aligned} X_1(\mu) - X_2(0) &= 0, \\ X_1'(\mu) - X_2'(0) &= 0, \\ X_1''(\mu) - \alpha^4 X_2''(0) &= 0, \\ X_1'''(\mu) - \alpha^4 X_2'''(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

que origina a matriz

$$\mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 \end{bmatrix}.$$

Para as condições de continuidade na segunda descontinuidade, temos

$$\begin{aligned} X_3(\mu) - X_2(\nu) &= 0, \\ X_3'(\mu) + X_2'(\nu) &= 0, \\ X_3''(\mu) - \alpha^4 X_2''(\nu) &= 0, \\ X_3'''(\mu) + \alpha^4 X_2'''(\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

que origina a matriz

$$\mathcal{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \end{bmatrix}.$$

Então, formamos a matriz  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}.$$

Agora, formamos a matriz  $\Phi$  como segue

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi_1(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Psi_1(\mu) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi_2(0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi_2(\nu) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Psi_1(\mu) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Psi_1(0) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

sendo

$$\Psi_1(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi'(x) \\ \phi''(x) \\ \phi'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \phi_3(x) & \phi_4'(x) \\ \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & \phi_3(x) & \phi_4''(x) \\ \phi_1'''(x) & \phi_2'''(x) & \phi_3'''(x) & \phi_4'''(x) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

e

$$\Psi_2(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \\ \psi''(x) \\ \psi'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) & \psi_4(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) & \psi_3(x) & \psi_4'(x) \\ \psi_1''(x) & \psi_2''(x) & \psi_3(x) & \psi_4''(x) \\ \psi_1'''(x) & \psi_2'''(x) & \psi_3'''(x) & \psi_4'''(x) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Então, o sistema linear de equações a ser resolvido é

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}$$

é o vetor formado a partir das equações

$$X_1(x) = [ \phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x) ] \mathbf{d}_1,$$

$$X_2(x) = [ \psi_1(x) \quad \psi_2(x) \quad \psi_3(x) \quad \psi_4(x) ] \mathbf{d}_2$$

e

$$X_3(x) = [ \phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x) ] \mathbf{d}_3.$$

### Vibrações forçadas.

No caso forçado, é considerada uma força harmônica

$$p(t, x) = P_o \text{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$$

na seção  $x = a$  da viga, localizada no primeiro segmento de uma viga trissegmentada simetricamente descontínua na seção transversal. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1(t, x)}{\partial t^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1(t, x)}{\partial x^4} &= p(t, x), \\ \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2(t, x)}{\partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2(t, x)}{\partial x^4} &= 0. \end{aligned}$$

Neste caso, pelo método de variação de parâmetros de Lagrange [6], tem-se que a resposta forçada com condições iniciais nulas é dada por

$$v(t, x) = \int_0^t \int_0^1 h(t - \tau, x, s) p(\tau, s) ds, \quad (2.15)$$

onde  $h(t, x)$  é a solução fundamental

$$h(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_n(s) X_n(x)}{\|X_n\|^2} \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \frac{1}{m}. \quad (2.16)$$

Decorre que

$$v(t, x) = \left[ \frac{X_n(a) [\hat{\omega} \text{sen}(\omega_n t) - \omega_n \text{sen}(\hat{\omega}t)]}{\|X_n\|^2 (\hat{\omega}^2 - \omega_n^2) \omega_n} \right] X_n(x). \quad (2.17)$$

A seguir, apresentamos resultados gráficos para vigas bissegmentadas fixa-livre com apoio na descontinuidade e trissegmentadas apoiada-livre com apoios nas descontinuidades, para diferentes valores de  $\theta$ .

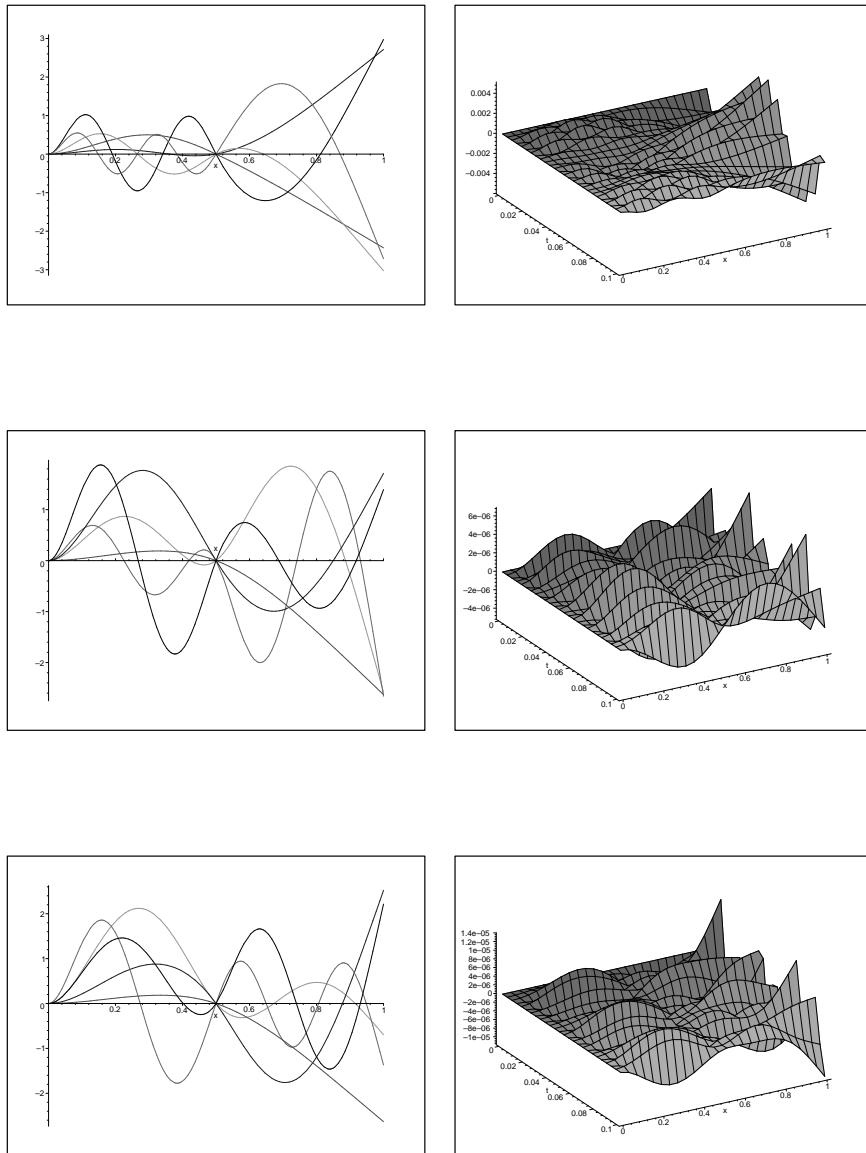


Figura 4: Modos normalizados e vibração forçada para viga fixa-livre bissegmentada com simetria na posição da descontinuidade e apoio, para  $\theta = 0.299$ ,  $\theta = 0.8647$  e  $\theta = 1.4032$ .



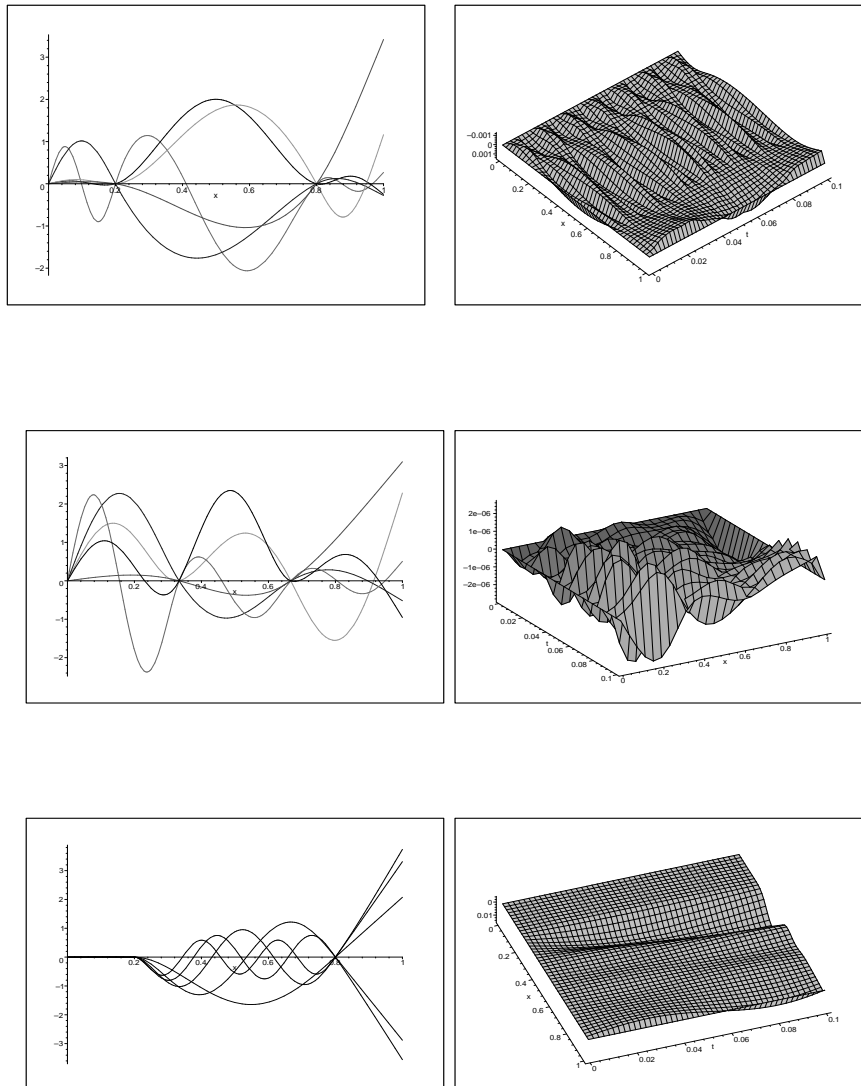


Figura 5: Modos normalizados e vibração forçada para viga apoiada-livre trissegmentada com simetria na posição da descontinuidade e apoios para  $\theta = 0.299$ ,  $\theta = 0.8647$  e  $\theta = 4.980$ .

**Abstract.** In this work it will be determined the modes, natural frequencies and forced responses for beams defined by the Euler-Bernoulli equation with discontinuous properties in the transversal section.

## Referências

- [1] J.R. Claeysen, G.C. Suazo e C.R. Jung, A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations, *Applied Numerical Mathematics*, **39** (1999), 65-78.
- [2] J.R. Claeysen e R.A. Soder, A dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *Journal of Sound and Vibration*, to appear.
- [3] D. Gorman, “Free Vibration Analysis of Beams and Shafts”, John Wiley, 1975.
- [4] W.D. Pilkey, “Formulas for Strain, Stress and Structural Matrices”, John Wiley, New York, 1994.
- [5] L. Meirovitch, “Principles and Techniques of Vibrations”, Prentice Hall, 1997.
- [6] M.K. Giareta e J.R. Claeysen, Vibrações forçadas em vigas com força axial, em “Aplicon”, São Carlos, 2001.
- [7] S.S. Rao, “Mechanical Vibration”, Addison-Wesley Publishing Co., 1990.