

Fernanda Rodrigues Leivas

**Dinâmicas Estocásticas em Teoria de Jogos:
Percolação, cooperação e seus limites**

Brasil

2018

Fernanda Rodrigues Leivas

Dinâmicas Estocásticas em Teoria de Jogos: Percolação, cooperação e seus limites

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física-IF

Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFis

Orientador: Mendeli Henning Vainstein

Brasil

2018

CIP - Catalogação na Publicação

Rodrigues Leivas, Fernanda

Dinâmicas Estocásticas em Teoria de Jogos:
Percolação, cooperação e seus limites. / Fernanda
Rodrigues Leivas. -- 2018.

57 f.

Orientador: Mendeli Henning Vainstein.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Programa de
Pós-Graduação em Física, Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. Dilema do prisioneiro.. 2. Cooperação.. 3.
Replicador.. 4. Limiar de Percolação.. 5. Regras
Estocásticas.. I. Henning Vainstein, Mendeli,
orient. II. Título.

Agradecimentos

- Ao meu orientador Mendeli Henning Vainstein, pelos esclarecimentos, pelas discussões e por toda a dedicação.
- A minha mãe Diva e meu irmão Felipe, por serem minha maior felicidade e inspiração.
- Ao meu pai Luiz Fernando que sempre iluminará o meu caminho.
- Ao meu namorado Davi, por sempre estar presente e fazer minha vida mais leve.
- A todos os professores e amigos que me ajudaram e foram fundamentais para que esse trabalho fosse concluído.
- À CAPES pelo apoio financeiro, ao programa de pós graduação de Física da UFRGS e ao IF por proporcionar essa oportunidade.

Resumo

O estudo de Teoria de Jogos tem se expandido para diversas áreas, tendo sua aplicação inicial na economia, hoje é utilizado na psicologia, na filosofia e tem um papel importantíssimo na biologia evolutiva. O seu sucesso está ligado ao fato de que os jogos têm o poder de prever interações usando conceitos simples como a cooperação e a competição. Dentre os jogos há o famoso de Dilema do Prisioneiro (PD), em que indivíduos completamente racionais devem optar entre cooperar ou trair (desertar) seu companheiro de jogo. A estratégia dominante e o equilíbrio de Nash, para o PD, é a deserção mútua visto que os indivíduos são sempre tentados a não cooperar. O dilema é que eles obteriam um ganho melhor se cooperassem mutuamente. Na vida real os indivíduos se encontram em várias situações nas quais eles devem optar entre ser egoístas ou altruístas e, frequentemente, acabam optando pelo altruísmo. Mesmo com a previsão da deserção na teoria clássica dos jogos, em 1992 Nowak e May (NOWAK; MAY, 1992) mostraram que cooperação é mantida em jogos com interação espacial e evolutivos. A partir dessa descoberta, estudos de jogos em diversos tipos de rede foram propostos, entre eles as redes diluídas (que possuem sítios vacantes). Nesse tipo de rede foi observado que certas densidades favorecem a cooperação, particularmente próximo ao limiar de percolação para regras de atualização estocásticas (com ruído). Porém a probabilidade de troca do Replicador, mesmo sendo estocástica, não se encaixa nesse padrão observado. Descobrimos que esse comportamento anômalo está relacionado com estruturas formadas entre buracos e desertores que impedem alguns indivíduos de ter acesso ao ruído, assim a informação não flui livremente na rede. Consequentemente o sistema fica preso em um estado congelado, que pode ser quebrado com algum tipo de perturbação. Também abordamos a relação entre o limiar de percolação por sítio e a cooperação de uma forma mais quantitativa do que já foi apresentada até então, acompanhamos o desenvolvimento da cooperação dentro dos *clusters* e mostramos como o limiar de percolação afeta as estruturas básicas da rede.

Palavras-chaves: Dilema do Prisioneiro. Cooperação. Replicador. Limiar de Percolação. Regras Estocásticas.

Abstract

The study of Game Theory, having its initial application in economics, has expanded to several areas and is now used in psychology, philosophy and plays a major role in evolutionary biology. Its success is related to the fact that games have the power to predict and study interactions using simple concepts such as cooperation and competition. Among the games there is the famous Prisoner Dilemma (PD), where completely rational individuals have to choose between cooperating or betraying their game partner. The dominant strategy and the Nash equilibrium for PD is mutual desertion as individuals are always tempted to not cooperate. The dilemma is that they would get a higher payoff if they mutually cooperated. In real life, individuals find themselves in various situations where they must choose to be selfish or altruistic, and often they choose altruism. Even with the prediction of defection in classical game theory, in 1992, Nowak and May ([NOWAK; MAY, 1992](#)) showed that cooperation is maintained in evolutionary spatial games. With this discovery, the study of games on several types of networks was proposed, among them the diluted networks (which have vacant sites). In this type of lattice, it was observed that at certain densities cooperation is promoted, particularly close to the percolation threshold for stochastic updating rules. However, the exchange probability of the Replicator dynamics, despite being stochastic, does not obey this observed pattern. We found that this anomalous behavior is related to structures formed between holes and defectors that prevent some individuals from having access to noise, so information does not flow freely in the network. Consequently the system becomes trapped in a frozen state, but this state can be broken by perturbing the system. We also address the relationship between the percolation threshold and cooperation in a more quantitative way than has been presented lately, by following the development of cooperation within clusters and showing how the percolation threshold affects the basic structures of the lattice.

Key-words: Prisoner's dilemma. Cooperation. Replicator. Percolation Threshold. Stochastic Rules.

Sumário

	Introdução	11
1	Modelo	17
1.1	Regra de atualização das estratégias	18
1.2	Conexão com a física estatística	20
2	Comportamento anômalo da dinâmica com a probabilidade do Re- plicador (REP)	23
2.1	Auto-Interação	24
2.2	Estabilidade do REP	25
2.3	Persistência de desertores	26
2.4	Relação entre a densidade da rede e a convergência do REP	31
3	Análise do impacto do limiar de percolação na cooperação	33
3.1	Impacto na rede	33
3.2	Evolução dos <i>clusters</i> no tempo	34
	Conclusão	39
	Referências	43
	Apêndices	49
	APÊNDICE A – Dilema do Prisioneiro e o Equilíbrio de Nash	51
A.1	Dilema do Prisioneiro	51
A.2	Equilíbrio de Nash	51
	APÊNDICE B – Dinâmica do Replicador	53
	APÊNDICE C – Densidades de Ganho	55

Introdução

O estudo de Teoria de Jogos surgiu a partir de modelos matemáticos em ciências comportamentais, inicialmente focado na economia (NEUMANN; MORGENSTERN, 1944). O seu sucesso na previsão de interações simples fez com que ele se expandisse para outras áreas e atualmente tem sido aplicado com sucesso em diversos campos como na biologia (SMITH, 1982; PARKER; SMITH, 1990; WEIBULL, 1995; DUGATKIN; REEVE, 1998), em ciências políticas, na filosofia e até psicologia (RABIN, 1993; SCHARLEMANN et al., 2001; PERC; SZOLNOKI, 2015). Objetivando estudar e prever comportamentos entre seres, seja econômica ou evolutivamente, a Teoria de Jogos usa conceitos básicos como a cooperação e a competição. A evolução e a manutenção da cooperação são fenômenos muito importantes na natureza: são fundamentais na evolução de células, de organismos multicelulares e na biologia evolutiva como um todo (BOWLES; GINTIS, 2011; KERR et al., 2002). Podemos observar padrões cooperativos, não só entre organismos da mesma espécie mas também entre seres de espécies diferentes (BOUCHER, 1985). Como exemplo podemos citar o caranguejo paguro e a anêmona: o caranguejo serve de transporte para a anêmona enquanto esta o protege de seus predadores. No entanto, em oposição à cooperação, os seres também apresentam comportamentos competitivos. Por exemplo, atualmente, com o avanço da tecnologia de forma não sustentável encontramos problemas cooperativos como a tragédia dos comuns (*The Tragedy of the Commons*) (HARDIN, 1968). Esse fenômeno

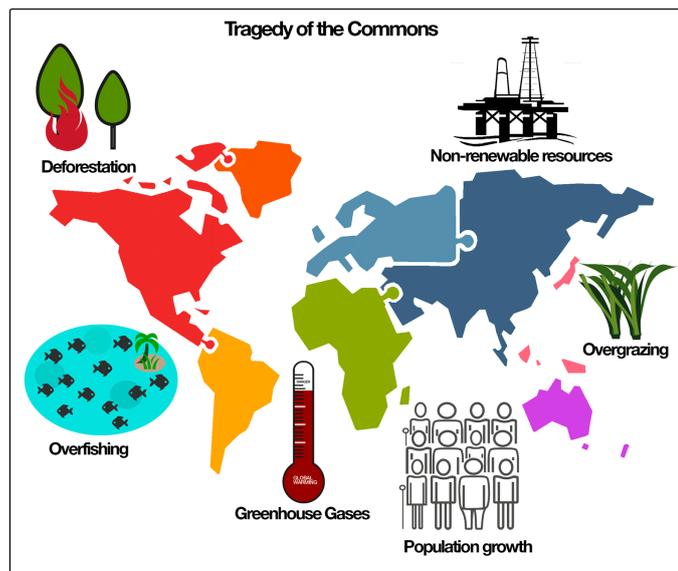


Figura 1 – A tragédia dos comuns. Fonte: <http://buddhajeans.com/encyclopedia/tragedy-of-the-commons-graphics/>

coletivo retrata a competição entre indivíduos frente à escassez iminente de algum recurso

comum, geralmente natural. Diversas soluções têm sido propostas para esse problema que ameaça os recursos do nosso planeta (OSTROM et al., 1999; BATTERSBY, 2017). Desse modo, observamos dois padrões opostos na natureza: a competição consequente da seleção natural e a cooperação que é fundamental para a evolução em sociedade. O que leva os seres a adotar uma ou outro comportamento é uma questão fundamental que a Teoria de Jogos tenta compreender.

Um jogo em Teoria de Jogos representa uma situação abstrata onde os jogadores devem tomar decisões com interesses conflituosos. O Dilema do Prisioneiro (PD) é um jogo simples e instigante que estuda a emergência da cooperação mesmo entre indivíduos egoístas (mais detalhes no Apêndice A.1). No PD os jogadores podem optar entre duas estratégias, ser um cooperador (C) ou um desertor (D). O maior ganho do jogo (a tentação) é dado ao desertor quando seu companheiro de jogo coopera, por esse motivo o indivíduo é sempre tentado a não cooperar. Numa situação real onde os seres são incentivadas a serem egoístas (não cooperar), como a cooperação pode se desenvolver? Sabemos que as pessoas tendem a cuidar de si em primeiro lugar, no entanto ainda assim a cooperação ocorre na nossa civilização (AXELROD, 1984). Ser um cooperador significa de certa forma renunciar a algum potencial para ajudar ao outro, porém também espera-se alguma recompensa pela atitude solidária (NOWAK, 2006). Um bom exemplo do problema da cooperação são as áreas de livre comércio, ou zonas de livre comércio, estabelecidas entre países. O objetivo desse acordo é a diminuição até a eliminação de tarifas e quotas na importação e exportação de bens e serviços, com o intuito de aumentar a relação comercial entre os envolvidos. Unilateralmente valeria a pena manter a sua barreira econômica enquanto a do outro está aberta ($D + C$), mas numa área de livre comércio os países cedem abrindo suas barreiras econômicas com a finalidade de ganhar os benefícios do aumento do fluxo de mercadorias ($C + C$). Contudo ambos os países tendo o incentivo a desertar, pelo ganho relacionado a taxaço na importação, podem ser levados a fechar suas barreiras ($D + D$), obtendo um ganho pior do que teria sido se eles tivessem cooperado entre si.

A ascensão do homem sobre as outras espécies pode estar relacionada à capacidade humana de cooperação em massa, mesmo que isso não as traga o mesmo benefício pessoal da deserção (como no PD). De acordo com Harari no livro Sapiens (HARARI, 2015), a comunicação humana é fortemente baseada na fofoca e o ser humano, sendo um ser sociável, torna a cooperação essencial para a sobrevivência e a reprodução. A importância da fofoca na comunicação é que ela é capaz de unir pessoas que acreditam em algo que nunca viram ou tocaram. Os mitos fazem com que os *sapiens* cooperem eficientemente e em grande número; é interessante mencionar a seguinte passagem do livro:

“Toda cooperação humana em grande escala – seja um Estado moderno, uma igreja medieval, uma cidade antiga ou uma tribo arcaica – se baseia em mitos partilhados que só existem na imaginação coletiva das pessoas. As

igrejas se baseiam em mitos religiosos partilhados. Dois católicos que nunca se conheceram podem, no entanto, lutar juntos em uma cruzada ou levantar fundos para construir um hospital porque ambos acreditam que Deus encarnou em um corpo humano e foi crucificado para redimir nossos pecados. Os Estados se baseiam em mitos nacionais partilhados. Dois sérvios que nunca se conheceram podem arriscar a vida para salvar um ao outro porque ambos acreditam na existência da nação sérvia, da terra natal sérvia e da bandeira sérvia. Sistemas judiciais se baseiam em mitos jurídicos partilhados. Dois advogados que nunca se conheceram podem unir esforços para defender um completo estranho porque acreditam na existência de leis, justiça e direitos humanos – e no dinheiro dos honorários.”

A religião faz um papel importantíssimo no desenvolvimento do homem como ser social, os mitos têm o poder de conter comportamentos possivelmente destrutivos dentro de uma sociedade. Respeitamos o próximo mesmo que isso não nos traga benefícios pois esperamos uma recompensa divina, ou tememos ser castigados por uma força maior. Esses fatores tornam os jogos, como o Dilema do Prisioneiro, que tentam explicar possíveis causas de cooperação ou de deserção, essenciais para entender a evolução e a manutenção da sociedade.

De acordo com a teoria clássica dos jogos, a deserção mútua é o equilíbrio de Nash (NASH., 1950) para o Dilema do Prisioneiro (Apêndice A.2), ou seja, a melhor resposta do jogo entre indivíduos completamente racionais. Pois se o seu parceiro deserta é melhor para o indivíduo desertar também, da mesma forma caso o parceiro coopere o indivíduo ganha mais ao desertar. Entretanto quando jogado repetidamente em uma população com memória, para um grande número de rodadas, a cooperação sobrevive contrariando o equilíbrio de Nash (AXELROD; HAMILTON, 1981). Esse fenômeno pode ser explicado se assumirmos que a racionalidade não é um conhecimento comum nos dilemas sociais repetidos. Isso levaria o jogo a um estado de informação incompleta, nele os jogadores racionais acabam cooperando para imitar os jogadores irracionais, criando assim o que chamamos de *reputação* (KREPS; WILSON, 1982). A maneira que estabelecemos a conexão entre os agentes, ou seja, a estrutura topológica da interação, também tem um enorme impacto na manutenção da cooperação (NOWAK; MAY, 1992; NOWAK; MAY, 1993; NAKAMARU; MATSUDA; IWASA, 1997; PONCELA et al., 2009; XU et al., 2016). Os cooperadores são capazes de sobreviver até mesmo para altos valores de tentação em modelos espaciais com interações fixas, formando *clusters* compactos que protegem o interior contra invasões (DOEBELI; HAUERT, 2005; PERC; SZOLNOKI, 2008). Inspirados pelo sucesso da reciprocidade espacial, muitos tipos de redes complexas foram estudadas em teoria dos jogos; Santos, Pacheco e Lenaerts obtiveram que a populações inhomogêneas podem favorecer a emergência da cooperação (SANTOS; PACHECO; LENAERTS, 2006;

SANTOS; PACHECO, 2005). Outros tipos de redes complexas também foram estudados, como populações crescentes e estruturas hierárquicas emergentes (LEE; HOLME; ZX., 2011; PONCELA et al., 2007; LOZANO; ARENAS; SANCHEZ, 2008). Redes diluídas, que são redes que possuem sítios vacantes, são modelos úteis para estudar o impacto de ambientes não homogêneos na interação entre indivíduos (VAINSTEIN; ARENZON, 2001). Como a cooperação é afetada pela variação da densidade populacional pode nos ajudar a entender melhor o comportamento animal sob condições de superlotação. Pesquisas indicam que a superpopulação pode levar ao aumento de patologias sociais, como o aumento do estresse, agressividade e até mesmo o infanticídio (CALHOUN, 1962). Com a densidade populacional variando podemos também implementar a difusão dos indivíduos na rede. Na vida real os seres se movem, e isso afeta as interações sociais e por consequência a cooperação (ENQUIST; LEIMAR, 1993; HAMILTON; TABORSKY, 2005; DUGATKIN; WILSON, 1991). Estudos indicam que a difusão, seja ela aleatória ou orientada, pode ser favorável à cooperação (VAINSTEIN; SILVA; ARENZON, 2007; YANG; WANG, 2011; SUZUKI; KIMURA, 2011; SICARDI et al., 2009; GELIMSON; CREMER; FREY, 2013; VAINSTEIN; ARENZON, 2014; CHENG et al., 2011; LIN; YANG; SHUAI, 2011; YANG; WU; WANG, 2010; LI; YE; ZHANG, 2016).

A percolação é outro fenômeno espacial que afeta o resultado de simulações evolutivas. Ela é um modelo simples que apresenta uma transição de fase (ADLER, 1991; STAUFFER, 1979) e exibe um conjunto de expoentes críticos ligados à estruturas fractais (SABERI, 2015) que podem ser explorados. O limiar de percolação é um conceito crucial na teoria da percolação: é a probabilidade de ocupação na qual surge um *cluster* que permite percorrer a rede de um extremo ao outro continuamente. A percolação é aplicável em muitas áreas, e tem sido intensamente estudada por físicos (SAHIMI, 1993; KIRKPATRICK, 1973; VIGOLO et al., 2005; ISICHENKO, 1992; BERNARD et al., 2006; DOTSENKO et al., 1993; KNECHT et al., 2012; BAEK; KIM, 2012; CALLAWAY et al., 2000; DERÉNYI; PALLA; VICSEK, 2005). Em Teoria de Jogos, estudos revelaram que a cooperação está estritamente ligada ao limiar de percolação (WANG; SZOLNOKI; PERC, 2012b; WANG; SZOLNOKI; PERC, 2012a), pois apresenta um pico próximo a esse limiar. A conexão entre o limiar de percolação e a interpretação geométrica para transições de fase e suas propriedades críticas, para agentes móveis fora da rede, é apresentada em (VAINSTEIN; BRITO; ARENZON, 2014).

O limiar de percolação tem um impacto enorme na cooperação, ele representa a densidade em que os agentes estão conectados o suficiente para apoiar a cooperação, e também diluídos o suficiente para evitar a invasão de desertores (WANG; SZOLNOKI; PERC, 2012b). Mas essa relação aparece apenas em regras de atualização estocásticas. Isso acontece pois é necessário que a informação se espalhe de maneira eficiente para que os resultados não dependam estritamente da condição inicial. Porém nosso estudo revela que, mesmo usando uma regra de atualização que possui um nível de incerteza (estocástica)

(CARDILLO et al., 2010), a probabilidade de troca do Replicador não apresenta a relação esperada entre a cooperação e o limiar de percolação. Essa probabilidade de troca é amplamente utilizada em jogos evolutivos, já que a equação do Replicador é a primeira dinâmica de jogo estudada relacionada à evolução biológica (SZABÓ; FÁTH, 2007), seguindo os dogmas básicos do darwinismo. Por isso a importância de entender esse comportamento anômalo. Neste trabalho, procuramos demonstrar o motivo de a probabilidade do Replicador ter esse comportamento inesperado, enfatizando a importância de entender bem sob quais condições o ruído das regras de atualização estocásticas é eficiente. Para finalizar vamos analisar o comportamento dos *clusters* de indivíduos de diferentes tamanhos ao longo do tempo, com o objetivo de construir uma visão mais completa de como a percolação, ao afetar a distribuição de indivíduos, se relaciona com a cooperação, levando à um máximo em regras de atualização estocásticas. Nossos resultados são úteis para entender melhor a cooperação em dinâmicas estocásticas e como ela se comporta em redes diluídas.

1 Modelo

O modelo consiste em uma rede quadrada bidimensional de tamanho $N = L^2$ com condições de contorno periódicas. Usamos uma rede diluída inhomogênea onde indivíduos são retirados aleatoriamente, e os sítios vagos são chamados de buracos. Os buracos são entes que não interagem e permanecem fixos durante toda a simulação. Inicialmente os indivíduos são designados como cooperadores (C) ou desertores (D) com iguais probabilidades. O número de buracos (de indivíduos retirados) depende da densidade utilizada, $\rho = (N_C + N_D)/N$, onde N_C é o número inicial de cooperadores e N_D de desertores. A Fig. 2 ilustra uma rede quadrada com buracos que tornam a rede inhomogênea, onde os traços representam as possíveis interações entre indivíduos.

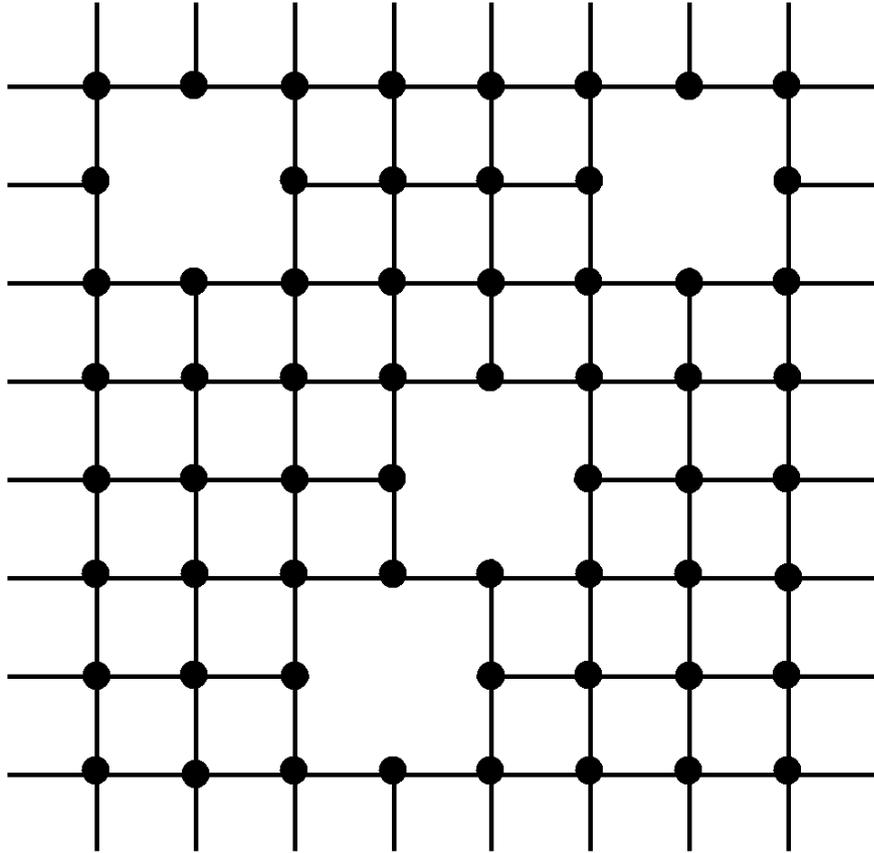


Figura 2 – Figura ilustrativa mostrando uma rede quadrada diluída e as possíveis interações entre os indivíduos (vértices), numa vizinhança de *von Neumann*.

Os jogadores interagem com seus quatro vizinhos mais próximos numa vizinhança de *von Neumann*, e somam seus ganhos (no inglês *payoff*) resultantes de cada interação. Cada tipo de interação tem um retorno específico: no caso de cooperação mútua, ambos recebem um pagamento R (recompensa pela cooperação); para a deserção mútua, ambos

recebem P (punição pela deserção). Um cooperador recebe S (*Sucker*, em português otário) se ele jogar contra um desertor, enquanto o desertor recebe T (tentação a não cooperar). Os ganhos devem obedecer a $T > R > P > S$ e $2R > T + S$, que caracterizam o Dilema do Prisioneiro: na interação entre pares, os indivíduos são sempre tentados a não cooperar. A segunda relação é necessária somente se o jogo utilizar diversas iterações, pois evita que dois jogadores alterem entre C e D mutuamente. As interações resultam na Tabela de ganhos 1.

	Coopera	Deserta
Coopera	R / R	T / S
Deserta	S / T	P / P

Tabela 1 – Tabela de ganhos (*payoff*).

Para facilitar nossa análise, fixamos alguns parâmetros usando uma tabela de ganhos simplificada, redimensionada para o Dilema do Prisioneiro fraco: $S = P = 0$, $R = 1$, $T = b$ ($b > 1$) (NOWAK; MAY, 1992). Lembrando que buracos não interagem, não existe ganho associado a eles. O número total de jogadores é mantido constante e, após a inicialização, as estratégias dos indivíduos são atualizadas por meio de uma simulação de Monte Carlo, cujos passos são determinados pela regra de atualização de estratégia utilizada.

1.1 Regra de atualização das estratégias

A regra de atualização de estratégia é a forma pela qual os agentes percebem o seu meio e a partir desse entendimento, como respondem a ele. Ela define quais serão suas próximas decisões, ou seja, a resposta do indivíduo ao seu ambiente. As regras de atualização adotadas podem ser determinísticas, onde os indivíduos sempre optam pela estratégia com maior ganho, ou estocásticas (probabilística, com ruído) onde é permitido que os indivíduos tomem decisões que não tragam o maior benefício. Os dois tipos de estratégias mencionados apresentam diferentes impactos no resultado da evolução dos agentes em redes diluídas. Enquanto a regra determinística pode fazer com que o sistema fique preso em um estado congelado, como vemos na regra de atualização “*choosing the best*”¹, a regra estocástica permite que o sistema explore melhor todo o espaço de configurações e atinja o seu ótimo global (explicaremos melhor esse conceito posteriormente). Neste trabalho, vamos nos concentrar na regra de atualização “comparação por pares” (*pairwise comparison*), nela o jogador escolhe um dos vizinhos aleatoriamente e decide se vai ou

¹ Na regra de atualização “*choosing the best*” o indivíduo vai adotar a estratégia do vizinho cujo o ganho (“*payoff*”) é maior; como não há probabilidade de erro, essa regra não é estocástica.

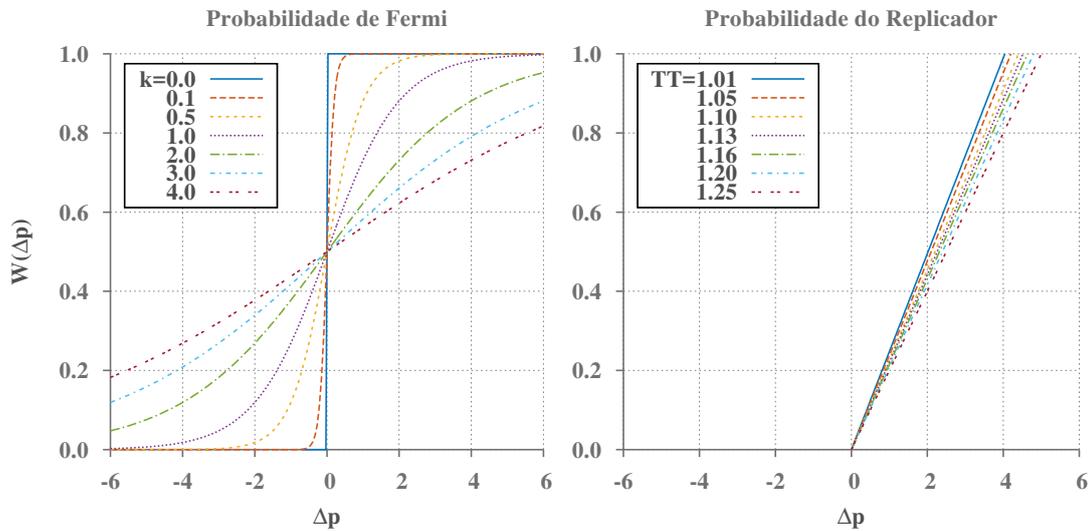


Figura 3 – Funções $W(\Delta P)$ de probabilidade de troca para Fermi, com diferentes valores de ruído K , e para o Replicador com diferentes valores de tentação $T = TT$.

não adotar a estratégia dele de acordo com a probabilidade de troca W , que depende da diferença de ganhos (*payoff*). Usamos um sistema de imitação onde a atualização é baseada nos estados vigentes da população sem antecipar possíveis alterações, e sem memória (Markoviano) (W depende dos ganhos atuais). A probabilidade de transição W nesse caso é que caracteriza a “estocasticidade” da regra de atualização por pares², pois ela que carrega o ruído, permitindo que os indivíduos mudem para uma estratégia com desempenho pior (irracionalidade) ou que deixem de mudar para uma estratégia com desempenho melhor. As regras de atualização podem ser modeladas de forma síncrona ou assíncrona; nós escolhemos a síncrona, onde toda a população atualiza simultaneamente suas estratégias em tempos discretos: primeiro todos os indivíduos jogam com sua vizinhança acumulando o ganho resultante de cada interação e, subsequentemente, cada jogador escolhe um vizinho aleatório e (se não for um buraco) compara seus respectivos ganhos através da probabilidade de troca W fixa (SZABÓ; FÁTH, 2007). A diferença entre a evolução de dinâmicas síncronas e assíncronas foi discutida em (GRILO; CORREIA, 2010), onde mostraram que as diferenças resultantes entre elas são em geral apenas quantitativas. Nesse trabalho usamos as seguintes probabilidades:

² Chamamos a regra de atualização por pares de estocásticas pois as probabilidades de troca W possui ruído.

- Probabilidade de Fermi: Ganha este nome por ser inspirada na função de Fermi. Um indivíduo x com ganho P_x tem a probabilidade W_{yx} de adotar a estratégia de seu vizinho escolhido aleatoriamente y com ganho P_y ,

$$W_{yx}(y \rightarrow x) = \frac{1}{1 + e^{-(P_y - P_x)/K}},$$

onde K é equivalente à temperatura que trabalhamos em física estatística. Ele funciona como um parâmetro de ruído, que também permite que os agentes tomem decisões irracionais (G.SZABO; C.TOKE, 1998). Definimos irracionalidade como a possibilidade do agente trocar para uma estratégia com menor ganho, mesmo que a sua seja mais bem sucedida. Note que, quanto maior o valor K maior a probabilidade de decisões irracionais, e caso $K = 0$ a regra vira determinística (Fig. 3). Nesse trabalho adotamos um valor fixo de $K = 0.1$.

- Probabilidade do Replicador (REP): Um indivíduo x com *payoff* P_x tem a probabilidade W_{xy} de adotar a estratégia do vizinho y com o ganho P_y ,

$$W_{yx}(y \rightarrow x) = \begin{cases} \frac{P_y - P_x}{4T}, & \text{para } P_y \geq P_x \\ 0, & \text{para } P_y < P_x. \end{cases}$$

onde T é a tentação (GINTIS, 2000). Observe que se $P_y < P_x$ apenas decisões racionais são permitidas. Portanto, a regra Replicador possui um ruído (é estocástica), pois o indivíduo pode decidir adotar ou não a estratégia do vizinho quando seu ganho é menor (que o do vizinho), porém não é irracional como a de Fermi. A REP recebe esse nome pois quando para população muito grande, essa probabilidade de troca converge para a famosa equação replicador (Apêndice B). Outros autores se referem a ela como “imitação proporcional” para enfatizar o fato de que outras regras têm o mesmo limite (CARDILLO et al., 2010).

Para visualizar melhor essas duas probabilidades de troca mostramos na Fig. 3 as funções $W(\Delta P)$ para Fermi e para o REP para valores de ΔP ilustrativos, onde $\Delta P = P_y - P_x$. Para Fermi mostramos para diferentes valores de K , e para o REP para diferentes valores de tentação T (que define a intensidade do ruído de REP).

1.2 Conexão com a física estatística

Agora, tome uma matriz de ganhos \mathbf{M} resultante das interações de um jogo com Q estratégias puras em uma rede de tamanho $N = L^2$. Imagine um jogador que ocupa o sítio $x \in N$ e adota uma estratégia \mathbf{s}_x dentro das possíveis estratégias, caracterizadas por um conjunto de vetores unitários com Q componentes (1 para a estratégia adotada, 0

para as outras), então:

$$\mathbf{s}_x = \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{N \text{ vetores}} \} Q \text{ estratégias} \quad (1.1)$$

O ganho do jogador x é resultado da interação com seus vizinhos y e depende da matriz \mathbf{M} de ganhos,

$$U_x = \sum_{y \in \Omega_x} \mathbf{s}_x^T \mathbf{M} \mathbf{s}_y,$$

onde a soma ocorre sobre os vizinhos y do jogador x da vizinhança Ω_x , para $y \in \Omega_x$. Assim o ganho total relativo a todo o sistema será

$$U = \sum_{x=1}^N U_x = \sum_{x,y \in \Omega_x} \mathbf{s}_x^T \mathbf{M} \mathbf{s}_y. \quad (1.2)$$

Note que em jogos potenciais ($M_{ij} = M_{ji}$) (SZABÓ; FÁTH, 2007) essa formula é equivalente ao negativo da energia do modelo de Ising. Então, se $Q = 2$, $M_{ij} = -\delta_{ij}$ e U corresponde ao Hamiltoniano do modelo de Ising ferromagnético, onde os *spins* na rede são *up* ou *down*. Dentro do formalismo do gás de rede, os *spins up* e *down* equivalem à sítios ocupados e vazios. Esse tipo de equivalência abre um caminho direto para a aplicação de métodos de física estatística nesta classe de jogos evolutivos. No nosso caso, a matriz \mathbf{M} e os possíveis vetores \mathbf{s} são

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} P & T \\ S & R \end{pmatrix}, \quad |D\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |C\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

onde D representa a deserção e C a cooperação.

Equivalentemente ao modelo de Glauber para *spins*, cada etapa de Monte Carlo (MCS) permite que cada jogador adote a estratégia de um de seus vizinhos, dependendo das probabilidades W . Os passos de Monte Carlo são as etapas descritas anteriormente; inicialmente todos os indivíduos, ao mesmo tempo, jogam com sua vizinhança acumulando o ganho das interações, e subsequentemente escolhem um vizinho aleatório para atualizar sua estratégia. As simulações foram realizadas com $L = 512$ e o tempo típico de relaxamento (em MCS) necessário para atingir um estado estacionário variou de 10^4 a 10^6 . Foram utilizadas aproximadamente 10 amostras com condições iniciais distintas para realização das médias. Foram utilizadas poucas amostras pois o tamanho da rede é grande o suficiente para minimizar as barras de erro.

2 Comportamento anômalo da dinâmica com a probabilidade do Replicador (REP)

Nesse trabalho usa-se a regra de atualização estocástica de comparação por pares (OHTSUKI; NOWAK, 2006), com as probabilidades de transição de Fermi e do Replicador (REP). A Fig. 4 mostra a fração assintótica de cooperadores, $\rho_c = N_C/(N_C + N_D)$, em função da densidade populacional total $\rho = (N_C + N_D)/N$ para as duas probabilidades de troca W analisadas. Os nossos resultados mostram que ambas apresentam características gerais em comum; quando $\rho \rightarrow 0$, os indivíduos estão em sua maioria

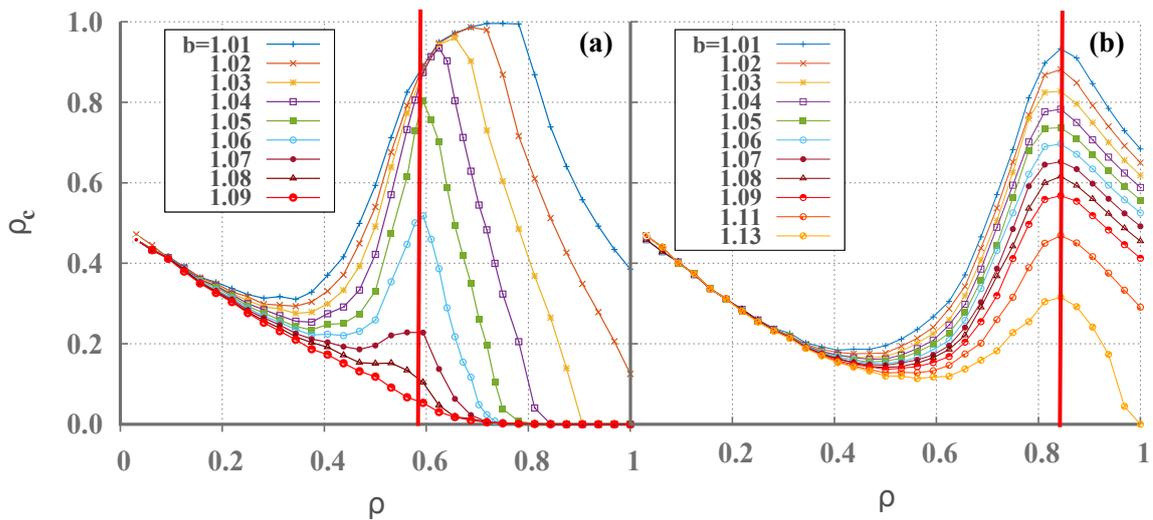


Figura 4 – Fração assintótica de cooperadores ρ_c em função da densidade populacional ρ para diferentes valores da tentação b , para o PD na rede quadrada sob atualização síncrona. O painel (a) usa a regra de atualização de Fermi com $K = 0.1$ e (b), a regra de atualização do Replicador. A linha vermelha representa o pico da cooperação para as probabilidades estudadas.

isolados permanecendo assim no seu estado inicial, consequentemente $\rho_c = 0.5$. Conforme ρ aumenta, o número de *clusters* formados por pares ou trios aumenta e ρ_c diminui, pois esses *clusters* tendem a ser dominados por desertores. Note que essas propriedades aparecem independentemente do valor da tentação $T = b$. Quando ρ se torna grande o suficiente para que *clusters* maiores se formem, ρ_c começa a aumentar, apresentando um pico em um certo valor ρ^* que depende tanto de W quanto de b . Sabe-se que a densidade populacional ótima (*the optimum population density*), o pico na cooperação, está fortemente relacionado ao limiar de percolação por sítio p_c para regras de atualização estocásticas (que possuem ruído) (WANG; SZOLNOKI; PERC, 2012a), especialmente em valores altos de b , quando

a cooperação está próxima da extinção. Note que na Fig. 4 (a), que usa W de Fermi, a densidade populacional ótima ρ^* é muito próxima do limiar de percolação por sítio para redes quadradas $p_c = 0.59$. No entanto, para o W do REP (Fig. 4 (b)) o pico ρ^* parece não estar relacionado com p_c . Surpreendentemente, o que obtemos é que para todos os valores de b , $\rho^* \approx 0.85$. Portanto, deve existir algum mecanismo que faz com que a dinâmica com W do REP, mesmo usando uma regra de atualização estocástica, seja aprisionada em um estado congelado¹ e seu pico não deve representar um ótimo global. Lembrando que a densidade ótima representa o pico da cooperação pra qualquer regra de atualização, porém se o sistema fica preso em um estado congelado o resultado depende fortemente das condições iniciais, nesse caso o pico não representa um ótimo global.

2.1 Auto-Interação

Entre os diferentes tipos de vizinhança estudadas em Teoria de Jogos, uma delas propõe que além de os indivíduos interagirem com seus vizinhos eles também interagem com eles mesmos, o que chamamos de auto-interação. Assim, como utilizamos uma rede

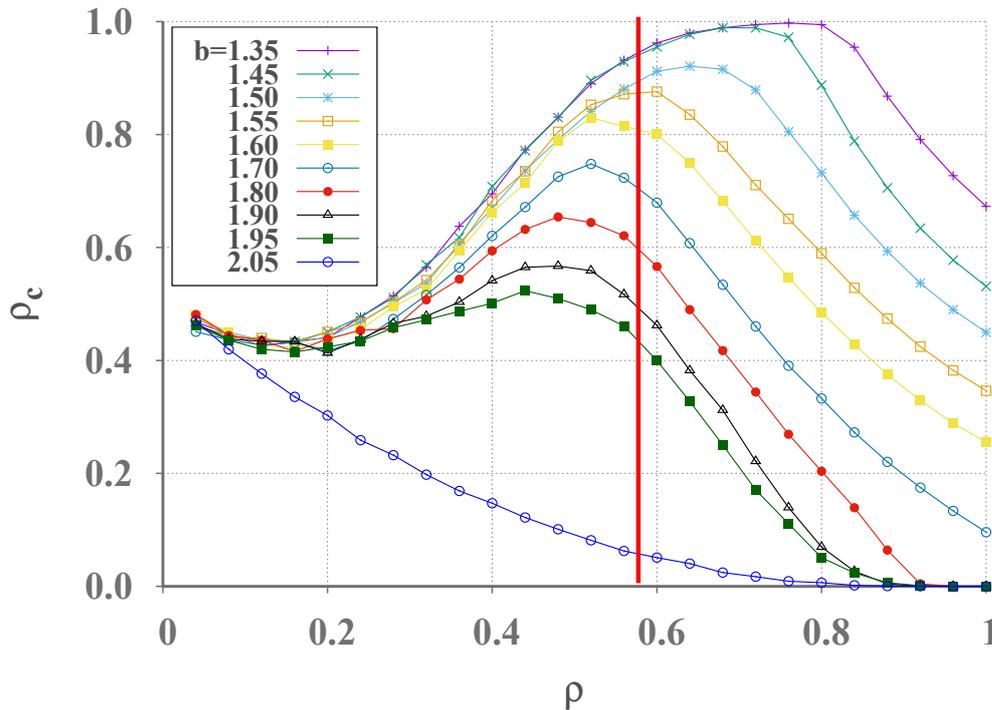


Figura 5 – Fração assintótica dos cooperadores ρ_c em função da densidade populacional ρ para diferentes valores da tentação b , para PD na rede quadrada sob atualização sequencial usando a regra Replicador com auto-interação.

quadrada os agentes interagirão com eles e com seus 4 vizinhos mais próximos, e o ganho

¹ O estado congelado acontece quando o sistema não explora todo o seu espaço de configurações, pois se mantém estacionado em algum arranjo que tranca o fluxo de informações. Ele surge em regras de atualizações determinísticas justamente pelo seu viés determinístico.

total será a soma dessas cinco interações. A auto-interação torna-se relevante pois podemos explorar valores maiores de tentação b (SZABÓ; FÁTH, 2007) e também a formação de vários padrões específicos. Quando exploramos maiores valores de b alcançamos outros espaços não explorados anteriormente por não haver existência mútua entre C e D para tais valores de tentação, assintoticamente. Assim a Fig. 5 mostra o gráfico de ρ_c por ρ para o REP com auto-interação. O fato curioso dessa figura é que o pico da cooperação ρ^* caminha para o limiar de percolação p_c , como esperado para estratégias estocásticas. Porém ele não só vai em direção à p_c , ele passa, isso deve acontecer pela a auto-interação favorecer apenas cooperadores, os tornando capazes de sobreviver até densidades mais baixas. O que observamos aqui é que, de acordo com as ideias discutidas anteriormente, o REP com auto-interação deve chegar ao seu verdadeiro ótimo global, pois o pico na cooperação apresenta uma relação com p_c . De alguma forma, a auto-interação quebra o estado congelado observado na Fig. 4(b).

2.2 Estabilidade do REP

Na seção anterior vimos que a auto-interação é capaz de quebrar o estado congelado no REP (Fig. 4b). Portanto podemos considerar o estado congelado como um possível estado metaestável, pois existem mecanismos capazes de quebra-lo, ele não é estável. Se isso for verdade, ao perturbar o sistema, quebramos a metaestabilidade e passaremos a ver a relação entre p_c e ρ^* das regras de atualização estocásticas. O que faremos é usar Fermi para perturbar a probabilidade do REP (sem auto-interação obviamente). Primeiro, os indivíduos atualizarão suas estratégias usando a probabilidade W do REP até a cooperação atingir valores assintóticos, em seguida muda-se para o W de Fermi por um curto período de tempo e depois volta-se ao REP novamente. Perturbamos o sistema com diferentes intervalos temporais, resultando em diferentes ordens de perturbação ϕ , definidas como o número de passos de Monte Carlo usando Fermi (MCS_F) dividido pelos passos de Monte Carlo totais MCS_T .

$$\phi = \frac{MCS_F}{MCS_T}. \quad (2.1)$$

A Fig. 6 mostra o resultado da fração de cooperadores pela densidade da rede para o REP com quatro ordens de perturbação $\phi = 0.005; 0.01; 0.05; 0.1$, e diferentes valores de b . Essa figura revela que a perturbação proposta tem um impacto interessante; à medida que aumentamos o valor de ϕ , fica mais claro que existem dois picos na cooperação, ou a superposição deles para baixos valores de b . Um pico ρ_c aparece exatamente na mesma densidade populacional ótima $\rho \approx 0.85$ do REP original (Fig. 4 (b)) e o outro aparece próximo ao limiar de percolação $\rho \approx p_c$. Como o pico na Fig. 4(b) não desaparece quando perturbamos o sistema, ele deve ser estável. No entanto, as linhas de cooperação apresentam um resultado bem diferente quando comparado ao sistema sem perturbação.

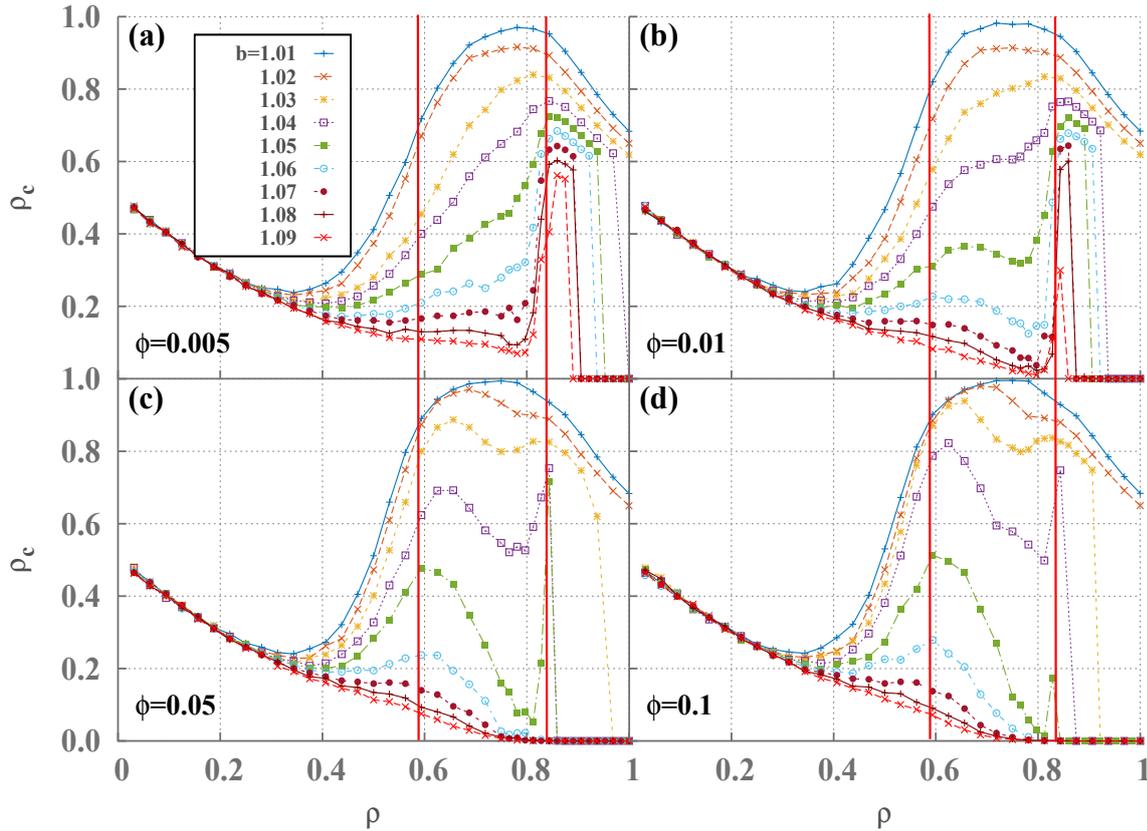


Figura 6 – Fração assintótica de cooperadores ρ_c pela densidade da rede ρ para diferentes valores de b . Os indivíduos usam a probabilidade do REP até a convergência. Depois, por um curto período, usa-se a probabilidade de Fermi e, em seguida, volta-se ao REP. Foram utilizadas diferentes ordens de perturbação ϕ , que é o número de passos de MCS usando Fermi dividido por MCS total. O painel (a) usa $\phi = 0.005$, (b) $\phi = 0.01$, (c) $\phi = 0.05$ e (d) $\phi = 0.1$.

Se o sistema atingisse um estado estável, essa perturbação não seria capaz de alterar significativamente o resultado. Também fizemos o contrário, perturbamos Fermi com o Replicador, e obtemos que Fermi volta ao seu estado original, portanto é estável.

2.3 Persistência de desertores

É oportuno analisar e comparar o desenvolvimento das estratégias do REP e de Fermi ao longo do tempo para entender suas diferenças, e em função disso, encontrar os mecanismos responsáveis pelo comportamento anômalo do REP. A Fig. 7 mostra a evolução temporal para as probabilidades de troca W estudadas: as figuras que apresentam 1 depois das letras Fig. 7(A1, B1, C1, D1, E1) são referentes à probabilidade de Fermi, e as que apresentam 2 depois das letras Fig. 7(A2, B2, C2, D2, E2), são referentes ao REP. Os *snapshots* variam de 0 MCS até 800 MCS, com $b = 1.03$ e $\rho = 0.75$. Para esse valor de ρ ambas as probabilidades atingem o mesmo valor de $\rho_c \approx 0.60$. Note que, ainda que elas apresentem valores similares de ρ_c e sendo semelhantes próximos da convergência (E1 e

E2), a evolução temporal da distribuição das estratégias na rede é diferente. Enquanto para Fermi conseguimos acompanhar e distinguir melhor o crescimento dos aglomerados de cooperadores no tempo, para o REP (A2, B2, C2, D2, E2) os cooperadores parecem mais espalhados na rede. Para Fermi quando comparamos o estado inicial (A1) com o *snapshot* B1 (sistema com apenas 100 MCS), percebemos que há uma mudança significativa na distribuição de cooperadores e desertores na rede. Fazendo a mesma comparação para REP (A2 e B2), nota-se que as mudanças observadas em Fermi não são tão explícitas. Na verdade a probabilidade do REP parece fazer com que o sistema fique mais dependente das condições iniciais. De fato, ao acompanhar o sistema que usa W do REP nos passos de

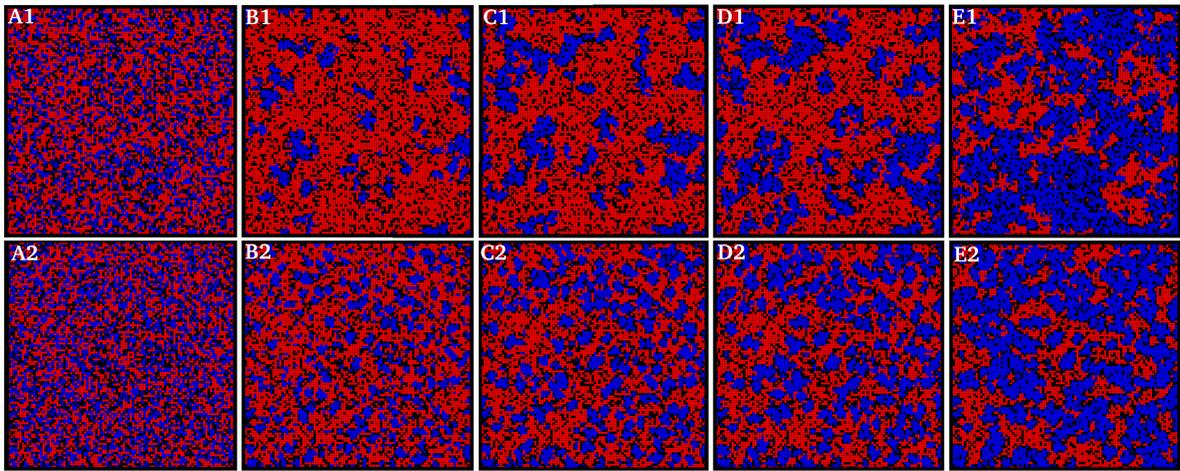


Figura 7 – *Snapshots* da evolução temporal para as probabilidades de **Fermi** (A1, B1, C1, D1, E1) e do **REP** (A2, B2, C2, D2, E2), para uma rede quadrada com $b = 1.03$, $\rho = 0.75$ e $L = 100$. As figuras A1, A2 estão no estado inicial, as B1, B2 estão com 100 MCS, as C1, C2 com 300 MCS, as D1, D2 com 500 MCS e as E1, E2 com 800 MCS

Monte Carlo, verificamos que a evolução das estratégias se apresentam mais dependentes da rede, já que certos padrões dos estados iniciais (A2 e B2) parecem se conservar durante a simulação. Em oposição, para Fermi a evolução é mais dinâmica, os aglomerados de cooperadores não permanecem necessariamente estáticos na rede. Tais diferenças sugerem que, na probabilidade de troca do REP, há algum dispositivo freando a propagação das estratégias na rede. Se o fluxo da cooperação for barrado, haverá a formação de aglomerados de desertores promovendo grandes regiões de baixo ganho (*payoffs*), que se mantêm fixas no tempo. O mesmo fenômeno deve acontecer com cooperadores resultando em regiões de alto ganho que, da mesma forma, sustentam-se temporalmente. Alguns agentes pertencentes a esse tipo de aglomerado devem manter suas estratégias durante toda a simulação, ou seja, devem ser persistentes.

A Figura 8 mostra, para as probabilidades de troca estudadas, a evolução temporal da persistência, que é definida como a porcentagem de indivíduos que prosseguem com

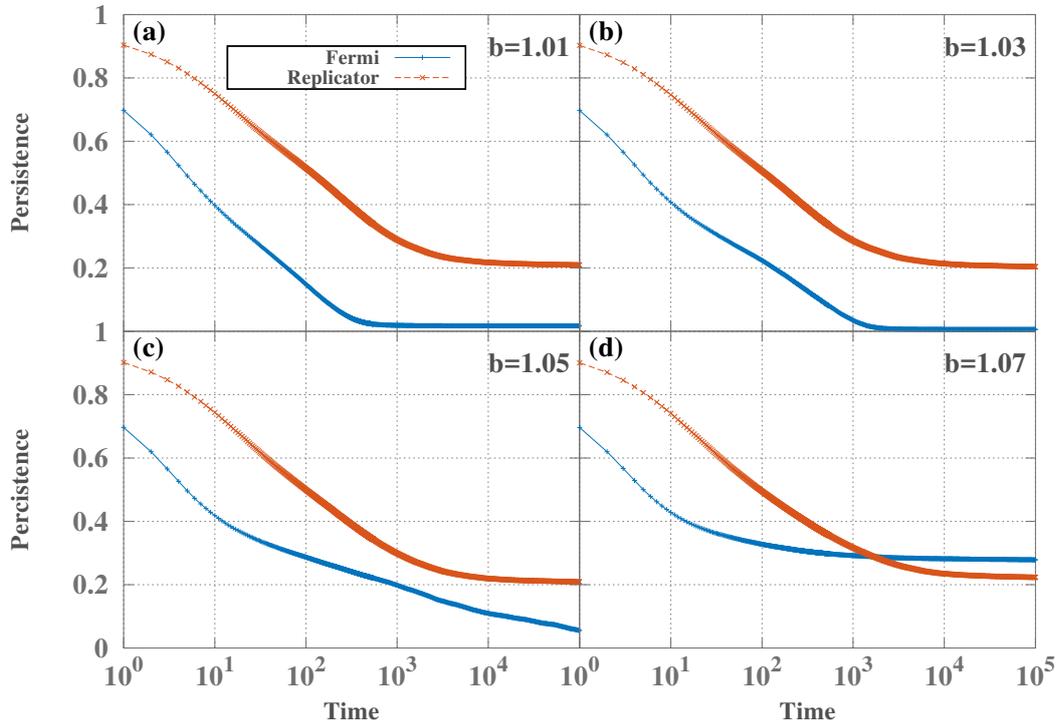


Figura 8 – Evolução temporal da persistência (porcentagem de indivíduos que mantêm sua estratégia inicial) dos indivíduos para as probabilidades de Fermi e do REP com $\rho = 0.75$ e diferentes valores de tentação b : (a) 1.01, (b) 1.03, (c) 1.05 e (d) 1.07

sua estratégia inicial durante toda a simulação. Foi utilizado $\rho = 0.75$, como nas figuras anteriores e variamos os valores de tentação. Vê-se que para as tentações $b = 1.01, 1.03$ e 1.05 mostradas nas Figs. 8(a,b,c), respectivamente, pelo menos 20% dos agentes se mantêm persistentes mesmo em valores assintóticos para o W do REP. Em contrapartida para Fermi nenhum, ou quase nenhum, manteve sua estratégia inicial durante toda a simulação. Nesse caso, como grande parte dos indivíduos no REP são persistentes assintoticamente em oposição a Fermi, verificamos que existem regiões de alto e baixo ganho que se mantêm no tempo (para o REP, evidentemente), como observado na Fig. 7. Tal conjuntura verifica a forte dependência das condições iniciais sugeridas anteriormente. Na Fig. 8(d) os indivíduos em Fermi são mais persistentes que no REP, contudo, isso é consequência de que para esse valor de tentação a rede é dominada rapidamente por desertores ($\rho_c \rightarrow 0$ para Fermi Fig. 4(a)). Assim, muitos indivíduos não têm a oportunidade de mudar sua estratégia, o que é normal quando a rede é dominada rapidamente por uma única estratégia. Logo, a Fig.8(d) não contraria as análises anteriores Fig.8(a,b,c).

Na Figura 9, apresentamos o *snapshot* do sistema sob a probabilidade de troca do REP, com valores assintóticos (10^4 MCS). Usamos também uma rede um pouco menor ($L = 70$) se comparado com a Fig. 7, objetivando distinguir de maneira mais eficiente os

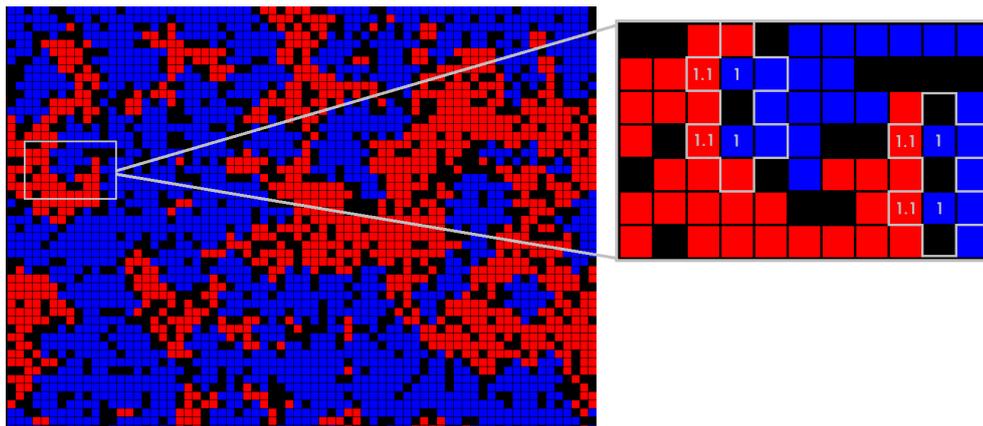


Figura 9 – *Snapshot* do sistema usando a probabilidade W do REP após 10^4 MCS com $\rho = 0.75$, $b = 1.1$ e $L = 70$. Os cooperadores estão representados em azul, os desertores em vermelho e os buracos em preto. O *zoom* mostra a intersecção entre aglomerados de cooperadores e desertores, com o ganho dos indivíduos nas bordas destacados. Note que os desertores ganham mais que os cooperadores.

indivíduos, e entender melhor certos comportamentos microscópicos do sistema. A partir dessa figura, nota-se que desertores e cooperadores parecem se distribuir obedecendo certas estruturas intrínsecas à rede; pois nas bordas dos aglomerados de desertores encontramos frequentemente buracos, tal como se eles delimitassem um perímetro de interação entre desertores e cooperadores. Os desertores estão se concentrando em aglomerados, comportamento esperado em cooperadores. Esses fatos indicam que são buracos os responsáveis, de alguma forma, por impedir que a cooperação e a deserção se espalhem de maneira eficiente na rede. Ou seja, os buracos parecem barrar o fluxo de informação. Ocorre que os desertores, “em aliança” com os buracos, bloqueiam a entrada de cooperadores nas bordas de seus aglomerados. Já sabemos que a probabilidade do REP não permite que os agentes alterem sua estratégia se seu ganho for maior do que o do seu vizinho. O *zoom* na Fig. 9 mostra quatro casos em que os desertores jamais mudarão sua estratégia, porque seu ganho será sempre maior do que o dos vizinhos cooperadores (como vemos nas interações destacadas). Nesses casos os cooperadores têm apenas um vizinho de mesma estratégia, os outros são buracos ou desertores, portanto o ganho deles é apenas a recompensa R . Esses cooperadores são vizinhos de um desertor que pertence a um aglomerado fixo de desertores, que ganha no mínimo $T = b$. Sabendo que $T = b > R$, o desertor sempre manterá a estratégia e os cooperadores não obterão sucesso em espalhar sua estratégia nessa região. Para essas configurações, a deserção permanece protegida pelos buracos, formando estruturas compactas que pressupomos ser um dos principais componentes que faz o sistema atingir um estado congelado.

Com o intuito de tornar mais consistente as observações acerca dos buracos, estudamos os ganhos dos agentes, pois eles devem representar a importância de cada possível interação dentro da rede. A Fig. 10 mostra a densidade de desertores que têm o ganho

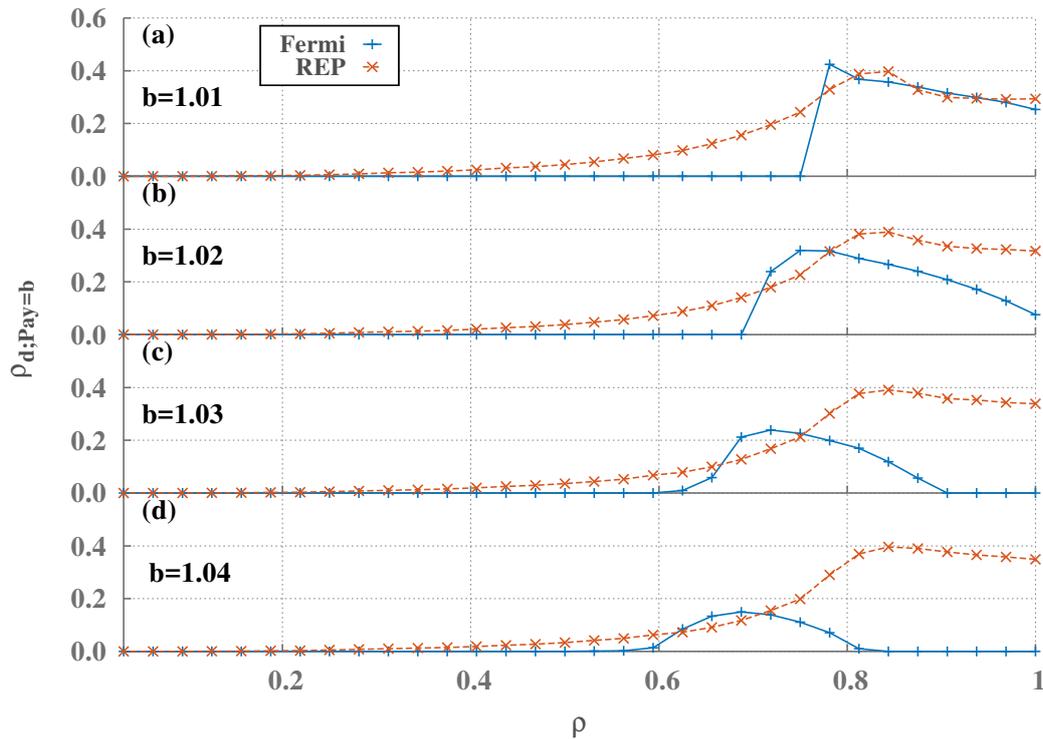


Figura 10 – Fração assintótica de desertores com ganho $T = b$ (com apenas um vizinho cooperador) em função da densidade populacional ρ para as probabilidades de Fermi e do REP com diferentes valores da tentação b .

específico de $T = b$ (o Apêndice C contém as outras densidades de ganho) pela densidade da rede. Mais especificamente, essa densidade de desertores é o número de desertores com ganho $T = b$ dividido pelo número total de desertores na rede $\rho_{d,b} = N_{d,b}/(\sum_{i=0}^4 N_{d,ib})$. Foram utilizadas as probabilidades de Fermi e do REP e mostramos os resultados para diferentes valores de b . Apresentamos nesse capítulo apenas a densidade de desertores com o ganho b , que é um desertor com apenas um vizinho cooperador, pois é ela que exibe um comportamento significativamente diferente entre Fermi e REP: enquanto para Fermi os desertores com ganho b se extinguem rapidamente em densidades menores que a ótima $\rho \lesssim \rho^*$, para o REP eles sobrevivem até densidades mais baixas da rede. A presença desse tipo de desertor, que possui apenas um vizinho cooperador, é fundamental para a existência das estruturas encontradas na Fig. 9. Já que esses desertores são extintos em Fermi mas mantidos no REP, enquanto as outras densidades de ganho não apresentam diferenças robustas entre as probabilidades (Apêndice C), conclui-se que o estado congelado do REP deve ser consequência da presença desse tipo de desertor, que junto aos buracos, barram o fluxo de informação na rede.

Agora que entendemos melhor os mecanismos relacionados ao comportamento anômalo do sistema que usa o W do REP, é simples perceber o porque na Fig. 6 surge

um pico próximo à p_c ; uma vez que a perturbação implementada torna os cooperadores capazes de invadir as estruturas formadas por buracos e desertores, as destruindo, e quebrando a barreira que congela o sistema. Assim verificamos o comportamento esperado nas dinâmicas estocásticas (o segundo pico $\rho \approx 0.85$ será discutido na próxima seção). O mesmo efeito aparece na Fig. 5, a auto-interação permite que os cooperadores tenham um ganho maior, tornando-os capazes de invadir os aglomerados de desertores.

2.4 Relação entre a densidade da rede e a convergência do REP

É fácil notar que é necessário um número mínimo de buracos para formar a estrutura de desertores e buracos que congelam o sistema. Se os buracos estiverem muito espalhados, o número de configurações que vimos na Fig. 9 é muito baixo, e não será capaz de barrar o fluxo de estratégias. Como consequência, a perturbação do REP por Fermi não alterará o resultado, pois o sistema retornará gradativamente à sua configuração anterior assim que os agentes voltarem a usar o W do REP (se o sistema não for dominado por uma estratégia). Esse é ser o motivo pelo qual os altos valores de cooperação em $\rho \approx 0.85$ são mantidos. Portanto, tais dados nos permitem concluir que a convergência estável/metaestável verificada está fortemente relacionada à densidade da rede ρ . Quando $\rho > 0.85$, os buracos estão espalhados demais para proteger os desertores. Neste caso, não veremos diferenças significativas nos resultados mesmo os indivíduos tendo utilizado brevemente a probabilidade de Fermi, pois o W do REP atinge um estado estável frente a perturbações. Ao comparar a Fig. 4(b) com a Fig. 6, constata-se que ρ_c para essa região atinge valores bastante similares, caso os desertores não dominem a rede durante a perturbação. Por outro lado, quando $\rho < 0.85$ as estruturas que barram o fluxo de estratégias emergem; no entanto, estas estruturas não são estáveis e certas perturbações irão destruí-las. Assim, o sistema não retomará sua configuração anterior à perturbação quando “desligamos” a probabilidade de Fermi. Então a probabilidade do REP não é estável apenas para $\rho < 0.85$. Mesmo para pequenos valores de ϕ (Fig. 6(a)), é possível notar que um pequeno pico próximo ao limiar de percolação começa a aparecer. Acontece que os buracos tornam alguns desertores completamente racionais, pois como o ganho deles é sempre maior que o dos vizinhos ele sempre adotará a melhor estratégia, já que o REP não permite decisões irracionais. Como consequência o ruído será mascarado. Com o ruído disfarçado a informação não fluirá eficientemente na rede, então para $\rho < 0.85$ o viés estocástico do REP será escondido.

Sucintamente, o pico na fração de cooperadores ρ^* parece estar sempre relacionado com p_c para todas as regras de atualização que possuem algum ruído, como vemos em Fermi. A probabilidade do REP também possui um pequeno ruído, mas quando a rede tem um determinado número de buracos certas estruturas são formadas, tornando alguns agentes completamente racionais. Ou seja, essas estruturas espaciais fazem com que um

comportamento emergente de racionalidade surja mesmo num sistema probabilístico. Assim o sistema fica preso em um estado congelado, como em regras de atualização determinísticas (VAINSTEIN; ARENZON, 2001). Quando usamos a auto-interação ou quando impomos alguma perturbação, as estruturas que congelam o sistema são quebradas e a relação entre a ρ^* e p_c aparece.

A Figura 11 mostra a probabilidade do REP com um segundo pequeno ruído adicionada à adoção de estratégias, fazendo com que os indivíduos se tornem irracionais (como em Fermi). Os agentes atualizarão sua estratégia usando o REP, porém, caso a decisão do indivíduo for não mudar de estratégia, ele ainda terá uma segunda chance de mudar novamente com probabilidade $\beta = 0.05$. Como esperado, a Fig. 11 mostra que, quando garantimos que todos os indivíduos tenham acesso à algum ruído, o ρ^* aparece próximo do p_c . Um resultado semelhante é mostrado em (WANG; SZOLNOKI; PERC, 2012a) com a regra de atualização determinística “choosing the best”.

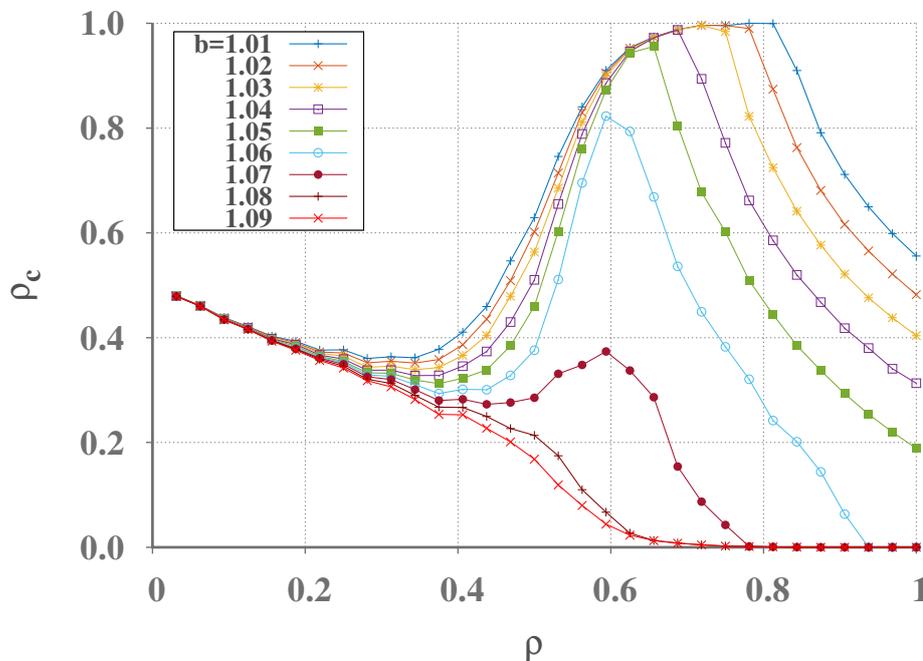


Figura 11 – Fração assintótica dos cooperadores ρ_c pela densidade da rede ρ para diferentes valores da tentação de desertar b , para PD na rede quadrada sob atualização síncrona. Os indivíduos usam a probabilidade Replicadora com uma pequena probabilidade fixa $\beta = 0.05$ de mudar sua estratégia novamente, garantindo uma incerteza na adoção de estratégia.

3 Análise do impacto do limiar de percolação na cooperação

3.1 Impacto na rede

Nesse capítulo vamos nos focar apenas na probabilidade de troca de Fermi, pois ela é que apresenta a relação mais clara entre a densidade ótima e o limiar de percolação p_c . Já é sabido que $\rho \approx p_c$ representa a densidade em que os agentes estão conectados o suficiente para suportar a cooperação, e diluídos o suficiente para evitar invasões (WANG; SZOLNOKI; PERC, 2012b). Mas por que exatamente o valor p_c determina o limite entre essas duas fases, e por que essa relação é mais forte quando a cooperação está próxima da extinção (altos valores de b), são questões que não foram amplamente exploradas. Já sabemos que a percolação tem um enorme impacto na distribuição dos indivíduos na rede, usamos a Fig. 12 para ilustrá-lo. Ela mostra o histograma da porcentagem de ocupação por tamanho do *cluster* (de indivíduos), para diferentes valores de densidade ρ . A partir dos histogramas nas Figs. 12(a, b, c) (acima do limiar de percolação, $\rho > p_c$) constata-se que os *clusters* maiores que 5000 ocupam a maior porcentagem da rede. Eles na verdade não são vários, mas geralmente são um único *cluster* gigante. Em contraste com $0.50 < \rho < p_c$ (Fig. d, e, f)), abaixo do limiar de percolação, todos os tamanhos de *clusters* contribuem quase equivalentemente. E, finalmente, para $\rho \leq 0.50$ (Fig. (g, h, i)), a influência dos pequenos aumenta a medida que a densidade diminui. Os comportamentos recém descritos são bem esperados e compreendidos. Porém entre esses eventos conhecidos, queremos salientar que; para $\rho > p_c$ a rede é dominada por um único *cluster* gigante que ocupa quase toda ela e percola, e para $\rho < p_c$ não existem mais os gigantes, mas sim muitos com vários tamanhos (que obviamente não percolam). O fato de que para $\rho > p_c$ um *cluster* gigante ocupa quase toda a rede indica que, para este regime, o comportamento do sistema deve ser basicamente determinado por ele. A Figura 13 corrobora isso. As linhas dessa figura representam o número de cooperadores do *cluster* gigante (N_{cb}) dividido pelo número total de indivíduos na rede $N_{cb}/N_C + N_D$, e os pontos a densidade de cooperadores para o sistema total $N_C/(N_C + N_D)$, como na Fig. 4(a). Para $\rho > p_c$, os pontos se sobrepõem exatamente às linhas e, em seguida, para $\rho < p_c$, as linhas vão para zero rapidamente. Assim, toda a dinâmica do sistema está contida no maior *cluster* para $\rho > p_c$, e os outros são apenas uma flutuações. E para $\rho < p_c$, o *cluster* gigante é fragmentado, e a dinâmica é o resultado da soma de grupos isolados. Tudo isso é consistente com a Fig. 12. Assim, o limiar de percolação determina dois regimes do sistema; acima dele, onde basta olhar para o maior *cluster* para compreender o comportamento do sistema, e abaixo dele, onde os grupos de indivíduos estão fragmentados, e as análises devem ser feitas sob cada fragmento.

3.2 Evolução dos *clusters* no tempo

Para entender o motivo do limiar de percolação definir o ótimo global¹, precisa-se estudar a evolução dos *clusters* durante a simulação. Ou seja, compreender como a cooperação responde a grupos isolados, conectados e a variação da densidade. Então observamos a dinâmica, acompanhando a evolução nos passos de Monte Carlo da cooperação dentro dos grupos de indivíduos. Usamos o algoritmo Hoshen-Kopelman (HOSHEN; KOPELMAN, 1976) para encontrar os *clusters* na rede, salvamos eles, e calculamos o número de cooperadores e desertores dentro deles no tempo. Assim, seremos capazes de estabelecer a relação entre tamanho do *cluster* e sua convergência. A Fig. 14 mostra a evolução no tempo para o maior *cluster* da rede, sendo os histogramas alguns exemplos de como os outros, menores, evoluem no tempo. Todos usando tentação $b = 1.01$. O gráfico de cima (Fig. 14(a)) usa a densidade de rede $\rho = 0.62$, acima do limiar de percolação. Pode-se verificar na Fig. 12 que para essa densidade, os *clusters* (fora o maior, que percola) são em geral bem pequenos. Tal comportamento reflete na Fig. 14(a), onde o maior com

¹ Definimos que o ótimo global aparece apenas nas estratégias estocásticas em que todos os indivíduos tenham acesso ao ruído, pois a fração de cooperadores nessas regras é sempre maior quando comparada com as outras para a mesma densidade da rede ρ .

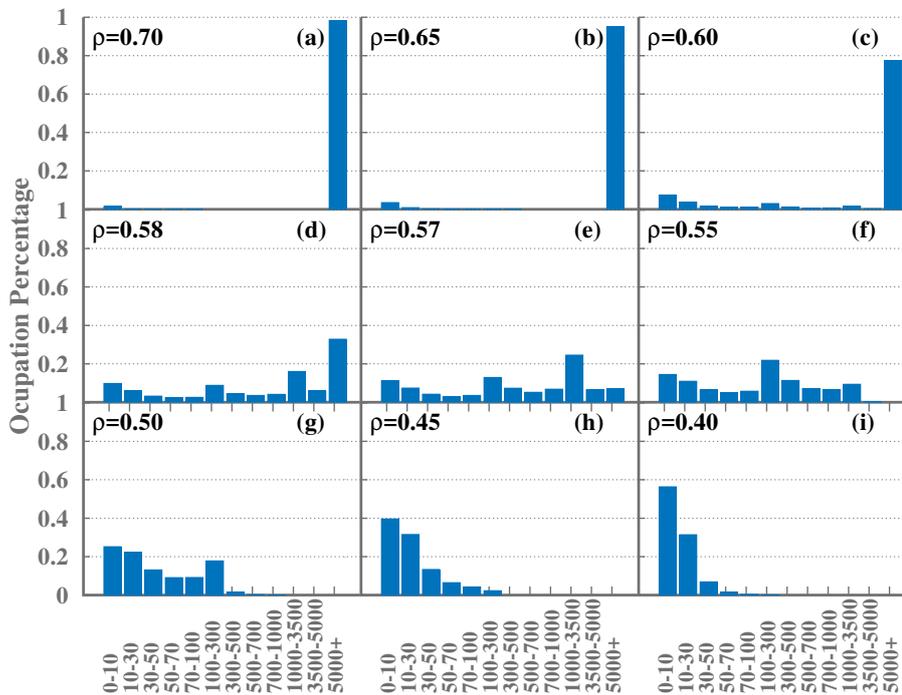


Figura 12 – Histograma da porcentagem de ocupação para diferentes intervalos de tamanhos de *clusters* em uma rede quadrada $L = 500$. Foram feitas médias entre 100 amostras. A porcentagem de ocupação significa o número de indivíduos pertencentes ao *cluster* com um determinado tamanho, dividido pelo número total de indivíduos. O painel (a) mostra o histograma para $\rho = 0.70$, (b) $\rho = 0.65$, (c) $\rho = 0.60$, (d) $\rho = 0.58$, (e) $\rho = 0.57$, (f) $\rho = 0.55$, (g) $\rho = 0.50$, (h) $\rho = 0.45$ e (i) $\rho = 0.40$

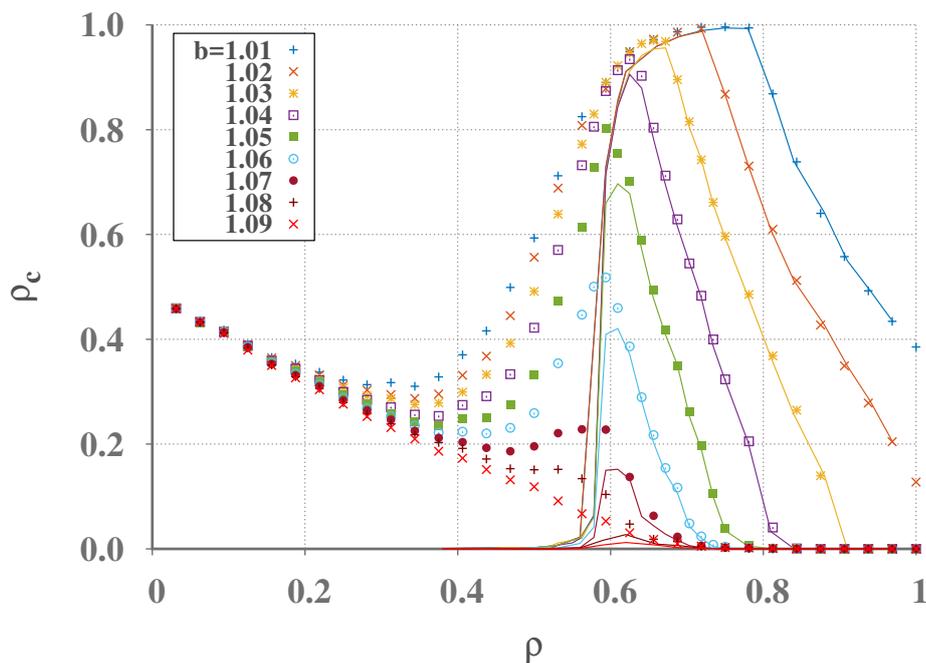


Figura 13 – Fração assintótica de cooperadores ρ_c em função da densidade populacional ρ para diferentes valores de tentação b , para PD na rede quadrada sob a regra de atualização síncrona com probabilidade de Fermi. Os pontos são os mesmos valores de densidade da Fig. 4(a). As linhas são o número de cooperadores no maior *cluster* dividido pelo número de indivíduos na rede $N_{cb}/(N_C + N_D)$. Note que as linhas sobrepõem os pontos somente para valores $\rho > 0.59$ (limiar de percolação).

tamanho de 149166 indivíduos, ocupa 96.23% da rede. Os outros *clusters* representados nos histogramas, que são bem pequenos, são dominados por desertores. A Fig. 14(b) é semelhante à anterior, porém usando uma densidade menor $\rho = 0.53$, abaixo do limiar de percolação. Podemos verificar que o maior *cluster* (tamanho = 915) representa menos de 1% da rede. Os *clusters* para essas densidades possuem uma grande variedade de tamanhos, o que é esperado. Os desertores ainda dominam os pequenos (tamanho = 32), mas, por outro lado, existem grupos grandes o suficiente para fornecer um ambiente favorável ao sucesso da cooperação. E esse fato é interessante, porque os cooperadores não apenas sobrevivem, mas geralmente dominam inteiramente esses *clusters*. Pode-se relacionar isso ao fato de que eles não percolam, portanto a informação não flui livremente e fica presa nas bordas, sendo mais fácil assim ser dominado por uma estratégia. É possível supor que, se esperamos um tempo muito grande alguma configuração levará à uma única estratégia sobrevivente dentro de cada *cluster*.

Para facilitar nossas análises vamos dividir os *clusters* em três categorias, cujos limites foram escolhidos a partir de observações: os gigantes que são os que percolam, os grandes que são maiores que 100 e que não percolam, e os pequenos que são maiores que 2 e menores que 100 (em nossas análises desconsideramos indivíduos isolados e pares

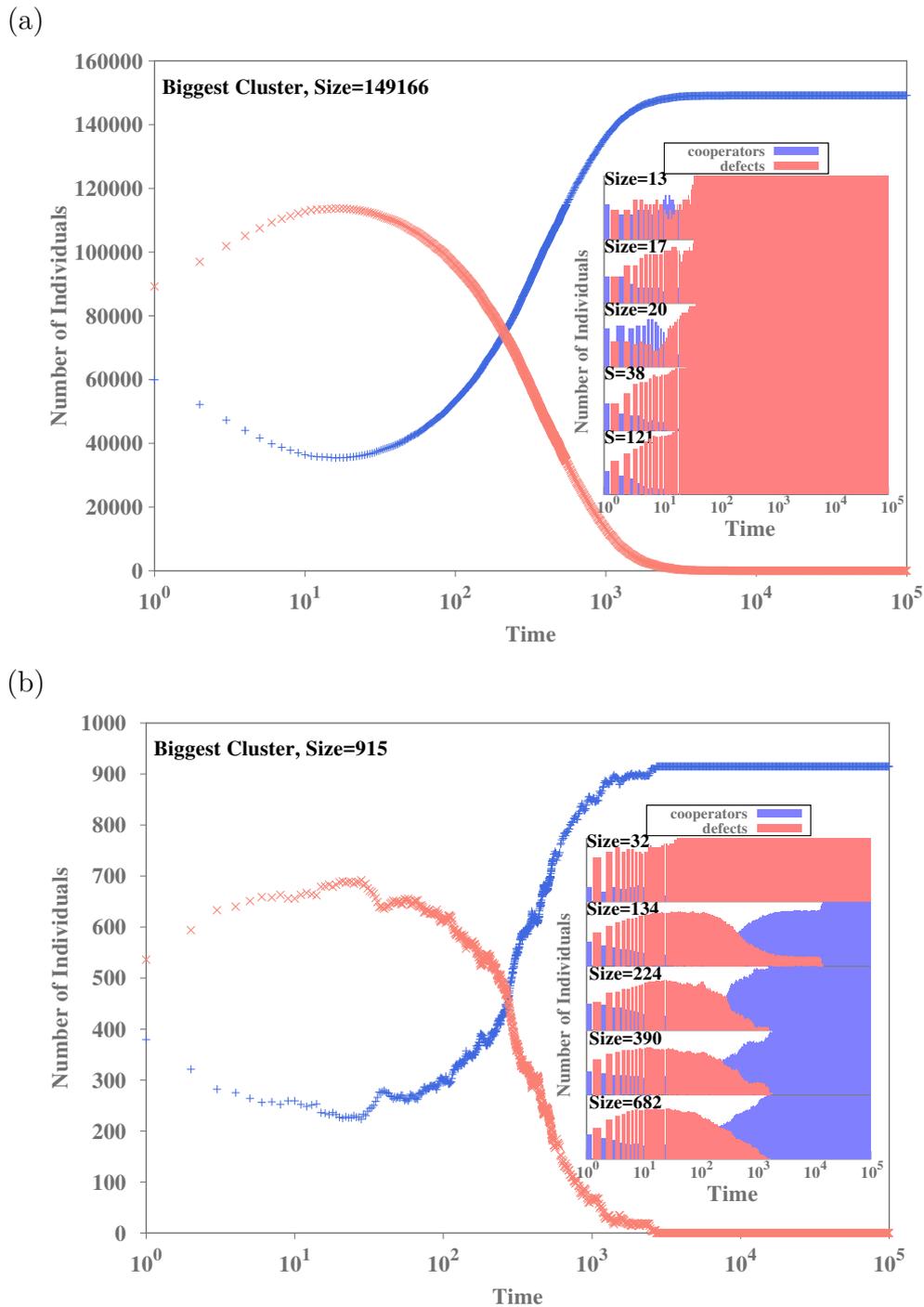


Figura 14 – Os pontos representam a evolução no tempo dos cooperadores (azul) e desertores (vermelho) para o maior *cluster* da rede quadrada. Os histogramas menores são a evolução no tempo também para cooperadores e desertores para alguns exemplos de outros *clusters* menores. Foi usada a tentação $b = 1.01$. Sendo (a) $\rho = 0.62$ e (b) $\rho = 0.53$.

porque seu comportamento é bem determinado em (XU et al., 2016)). A Tabela 2 mostra, para diferentes valores de tentação b , a porcentagem de grandes e pequenos *clusters* (já convergidos) que foram dominados por cooperadores, desertores, e aqueles que possuem as duas estratégias. Avaliando a convergência de pequenos na Tabela 2, vemos que eles são

sempre dominados por uma estratégia, e a maioria deles é dominada por desertores. Os cooperadores devem se manter agrupados para sobreviver, portanto, pequenos grupos não fornecem o ambiente propício à cooperação. Alguns estados iniciais específicos, obviamente, são propícios para sucesso da cooperação. Os grandes ($100 < \text{tamanho} < \text{gigante}$) tendem a ser dominados pelos cooperadores. No entanto, se a tentação for muito alta, os desertores se espalharão rapidamente e os cooperadores podem não ter o mesmo sucesso ($b = 1.06$). A Tabela 2 também mostra que o número de *clusters* (grandes) misturados aumenta com a tentação, talvez eles precisem de mais tempo, para serem dominados por uma estratégia. Caso esse tempo seja computacionalmente atingível, e se a maior parte deles for dominado por cooperadores, manteremos a fração de *clusters* grandes sendo normalmente dominados por cooperadores, como observamos para tentações menores.

Agora, podemos caracterizar melhor as duas fases divididas por p_c . Quando $\rho > p_c$ existe um *cluster* gigante que percola e determina o comportamento do sistema, e os pequenos são apenas flutuações. Neste regime a informação flui mais eficientemente devido à percolação, a rede está “mais conectada”. Quando $\rho < p_c$, existem pequenos e grandes *clusters*, os pequenos são predominantemente dominados por desertores, e os grandes por cooperadores. Para $0.3 < \rho < 0.59 = p_c$, a medida que nos aproximamos de p_c maior será o número de grandes *clusters* e por consequência, maior será a densidade de cooperadores (para $\rho < 0.3$, o comportamento de convergência é determinado por indivíduos isolados e pares). No entanto, quando a densidade se torna maior que o limiar de percolação $\rho > p_c$, se a tentação for baixa $1.01 < b < 1.05$, a conectividade da rede favorecerá a cooperação até certo limite. Pois quando a rede estiver muito densa, o número de desertores em torno dos aglomerados de cooperadores² será suficiente para quebrar a cooperação nas fronteiras das interações entre estratégias, diminuindo o tamanho efetivo dos aglomerados de cooperadores e enfraquecendo-os. Por esta razão, para valores baixos de b , o pico da cooperação não é necessariamente perto de p_c , mas pode aparecer em densidades mais altas. Agora, se a tentação for alta, a conectividade da rede favorecerá os desertores, assim eles serão capazes de se espalhar rapidamente e a cooperação morrerá em seguida. Por essa razão, a relação entre p_c e o pico da cooperação é mais evidente quando a cooperação está próxima da extinção.

Como mencionado no começo do capítulo, já sabíamos que $\rho \approx p_c$ era o valor de densidade em que a rede era diluída o suficiente para evitar invasões e conectada o suficiente para suportar a cooperação. O nosso estudo, visando compreender mais profundamente o impacto da percolação na cooperação, permitiu traduzir esses conceitos em elementos observáveis. Compreendemos que para $\rho < p_c$ existirá uma quantidade muito grande de *clusters* exclusivamente dominados por desertores, o que não é favorável à cooperação. Porém, se nos aproximarmos do limiar de percolação $\rho \rightarrow p_c$ o número de grandes *clusters*

² Lembrando que o sucesso da cooperação, em nosso modelo, está relacionado com a reciprocidade espacial, que permite que os cooperadores sobrevivam se protegendo em aglomerados.

Tabela 2 – Porcentagem de *clusters* dominados por cooperators, desertores ou com estratégias mistas para grandes *clusters* **que não percolam** (tamanho >100) e pequenos ($2 < \text{tamanho} \leq 100$). Esses dados são o resultado da soma de todos os *clusters* encontrados a partir das densidades estdadas.

b	$2 < \text{cluster} \leq 100$			$100 < \text{cluster}$		
	Coope.	Defec.	Mixed	Coope.	Defec.	Mixed
1.01	34.05%	65.95%	00.00%	98.36%	01.64%	00.00%
1.02	30.30%	69.70%	00.00%	96.16%	03.84%	00.00%
1.03	26.83%	73.17%	00.00%	94.87%	05.13%	00.00%
1.04	23.12%	76.87%	00.00%	86.45%	13.05%	00.50%
1.05	19.95%	80.05%	00.00%	62.25%	22.12%	15.63%
1.06	17.35%	82.65%	00.00%	25.63%	43.12%	31.25%

(que são em geral dominados por cooperadores) aumentará, o que fortalece a cooperação. Quando atingimos valores $\rho \approx p_c$ a grande conexão da rede, relativo ao *cluster* gigante que percola, fará com que a cooperação se espalhe de maneira ainda mais eficiente. Porém existirá uma certa densidade $\rho > p_c$, que depende de b , na qual a rede será densa o suficiente para quebrar a cooperação nas bordas, enfraquecendo-a. Nesse regime a conexão da rede favorecerá os desertores. Esse conjunto de fatores é que caracterizam o equilíbrio ideal entre conexão e “diluição” próximo ao limiar de percolação p_c .

Conclusão

Estudos anteriores revelaram que estruturas espaciais e a maneira de estabelecer a interação entre os indivíduos são cruciais para o surgimento e a manutenção da cooperação. O limiar de percolação p_c é uma propriedade importante da rede que parece estar ligada com a densidade populacional ótima, ou seja, o pico na densidade de cooperadores ρ^* . Porém, isso só acontece quando a adoção de estratégias possuem ruído (estratégias estocásticas), caso contrário a informação não se espalha de forma eficiente e o resultado depende fortemente das condições iniciais. Nesse trabalho usamos a regra de atualização de pares, que é estocástica, com duas probabilidades de troca: a de Fermi e a do Replicador. A dinâmica do Replicador é um modelo evolucionário importante na biologia, pois é baseada na ideia de que o crescimento de uma espécie está diretamente relacionada com seu ganho, seguindo os dogmas básicos do darwinismo. A probabilidade de troca do Replicador recebe esse nome pois para certos limites ela converge para equação do Replicador. Observamos que, ao contrário de Fermi, mesmo usando uma regra de atualização estocástica, ou probabilística, o Replicador não apresenta a relação esperada entre a densidade populacional ótima ρ^* e o limiar de percolação ($p_c = 0,59$ para redes quadradas).

Nesse trabalho conclui-se que o comportamento inesperado do Replicador é consequência de certas estruturas, formadas por buracos e desertores, que impedem alguns agentes de ter acesso ao ruído relacionado à probabilidade de troca. Dessa forma observamos padrões emergentes de atualizações determinísticas mesmo usando regras probabilísticas. Ocorre que os buracos protegem os aglomerados de desertores contra a invasão de cooperadores: nas bordas (dos aglomerados de desertores) os cooperadores ganham menos que os desertores devido ao número de buracos vizinhos e porque $T = b > R = 1$, pois estamos usando o Dilema do Prisioneiro (PD) fraco. Assim, de acordo com a probabilidade de transição do Replicador, os desertores manterão sua estratégia e por consequência acabam barrando o fluxo de informação. Os indivíduos com ganho $P = b$ (desertores com um vizinho cooperador) são fundamentais nessas estruturas. A Fig. 10 mostra que esses desertores sobrevivem para densidades mais baixas no Replicador, ao contrário de Fermi onde eles se extinguem rapidamente para densidades menores que a ótima $\rho < \rho^*$. No Apêndice C, mostramos que essa é a diferença mais significativa entre Fermi e o Replicador (para as possíveis densidades de ganho dos indivíduos). Assim, concluímos que as estruturas sugeridas devem ser um dos principais mecanismos que mantêm o Replicador em um estado congelado.

É simples notar que as estruturas encontradas precisam de um número mínimo de buracos para serem formadas, ou seja, dependem da densidade de indivíduos. Portanto, a informação flui livremente como em estratégias estocásticas irracionais, se a densidade

de buracos for suficientemente baixa para impedir formação das estruturas observadas. Perturbando o sistema após sua convergência observamos que o ruído relativo ao Replicador é eficiente apenas para $\rho > 0.85$, e que para $\rho < 0.85$ os buracos e desertores se dispõe de forma que o ruído seja mascarado, as estratégias não fluem eficientemente e o sistema fica preso em um estado congelado. Dessa forma encontramos uma transição perto de $\rho \approx 0.85$. Usando o Replicador com auto-interação obtemos a relação esperada entre o pico da cooperação ρ^* e o limiar de percolação p_c . Isso acontece porque a auto-interação, favorecendo a cooperação, quebra a barreira formada por desertores e buracos, tornando os cooperadores aptos a invadir o aglomerado de desertores. O mesmo acontece se adicionarmos uma incerteza à probabilidade de troca. Finalmente, concluímos que quando garantimos que todos os indivíduos tenham acesso ao ruído, obtemos a relação entre ρ^* e p_c previstas em estratégias estocásticas irracionais.

Objetivando encontrar alguns fatores quantitativos responsáveis pela densidade próximo ao limiar de percolação ser, ao mesmo tempo, diluída e conectada o suficiente para caracterizar o ótimo global, analisamos a distribuição de *clusters* (com relação aos indivíduos) no tempo. Observamos que, os que intitulamos de “grandes” tendem a ser dominados por cooperadores e os de “pequenos” por desertores. Evidentemente essa tendência varia com o valor da tentação b , discutimos esses limites no texto. Também lembramos que, para densidades maiores que o limiar de percolação ($\rho > p_c$), o número final de cooperadores e desertores é determinado por um único *cluster* gigante que ocupa praticamente toda a rede. Em contrapartida, para $\rho < p_c$ a rede se encontra fragmentada e cada fragmento contribui para a densidade resultante de cooperadores. Com essas observações fomos capazes de entender que para $\rho < p_c$, quanto mais próximo do limiar de percolação $\rho \rightarrow p_c$, maior será o número de grandes *clusters* e a densidade de cooperação aumentará. No entanto, para densidades maiores que o limiar de percolação ($\rho > p_c$), o *cluster* gigante aparece, ele evidentemente percola e os agentes estarão mais conectados, a informação se espalhará mais rapidamente. Este fato pode favorecer a cooperação para $\rho \approx p_c$, porém quando a rede atinge uma certa densidade, esse fator favorece a deserção prejudicando a cooperação, esse limite depende da tentação b . Por essa razão, para valores baixos de b , a densidade populacional ideal ρ^* não aparece necessariamente perto de p_c . Pela mesma razão, para altas tentações, a cooperação se extinguirá rapidamente para $\rho \gtrsim p_c$ e observamos $\rho^* \approx p_c$.

Nossas conclusões ajudam a entender melhor a cooperação em dinâmicas estocásticas, seus limites e sua relação com a rede quadrada diluída e o limiar de percolação. Como já mencionamos, a cooperação é um fenômeno muito importante na natureza, portando entender como ela funciona e como ela é afetada por fatores espaciais (como os indivíduos interagem entre si), é essencial para entendermos a própria história da evolução humana e sua relação com o meio. Para os próximos trabalhos esperamos expandir nossas análises para redes com difusão, onde os agentes podem se mover através dos buracos. Essa difusão

pode ser de maneira racional, onde os indivíduos se movem para lugares com melhores ganhos, ou aleatória. Para difusão direcionada pretendemos fazer uma análise similar à do Capítulo 3, com a proposta de entender os principais mecanismos relativos à difusão e como isso se desenvolve no tempo e reflete na cooperação. Com esses resultado poderemos inferir possíveis relações entre a cooperação e padrões migratórios.

Referências

- ADLER, J. Bootstrap percolation. *Physica A*, v. 171, p. 453–470, 1991. Citado na página [14](#).
- AXELROD, R. *The Evolution of Cooperation*. New York: BasicBooks, 1984. Citado na página [12](#).
- AXELROD, R.; HAMILTON, W. The evolution of cooperation. *Science.*, v. 211, p. 1390, 1981. Citado na página [13](#).
- BAEK, S. K.; KIM, B. J. Critical condition of the water-retention model. *Phys. Rev. E*, v. 85, p. 032103, 2012. Citado na página [14](#).
- BATTERSBY, S. News feature: Can humankind escape the tragedy of the commons? *PNAS*, v. 114, n. 1, p. 7–10, 2017. Citado na página [12](#).
- BERNARD, D. et al. Conformal invariance in two-dimensional turbulence. *Nature*, v. 2, p. 24–128, 2006. Citado na página [14](#).
- BOUCHER, H. D. *The Biology of Mutualism*. 200 Madison Avenue, New York, NY 10016: Oxford University Press, 1985. Citado na página [11](#).
- BOWLES, S.; GINTIS, H. *A cooperative species: Human reciprocity and its evolution*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011. Citado na página [11](#).
- CALHOUN, J. Population density and social pathology. *Sci. Am.*, v. 206, p. 139–150, 1962. Citado na página [14](#).
- CALLAWAY, D. S. et al. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 5468–5471, 2000. Citado na página [14](#).
- CARDILLO, A. et al. Coevolution of strategies and update rules in complex prisoner’s dilemma networks. *New J. Phys.*, v. 12, p. 103034, 2010. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [20](#).
- CHENG, H. et al. Payoff-related migration enhances cooperation in the prisoner’s dilemma game. *New J. Phys.*, v. 13, p. 043032, 2011. Citado na página [14](#).
- DERÉNYI, I.; PALLA, G.; VICSEK, T. Clique percolation in random networks. *Phys. Rev. Lett.*, v. 94, p. 160202, 2005. Citado na página [14](#).
- DOEBELI, M.; HAUERT, C. Models of cooperation based on the prisoner’s dilemma and the snowdrift game. *Ecology Letters*, v. 8, p. 748–766, 2005. Citado na página [13](#).
- DOTSENKO, V. S. et al. Critical and topological properties of cluster boundaries in the 3d ising model. *Phys. Rev. Lett.*, v. 71, p. 811–814, 1993. Citado na página [14](#).
- DUGATKIN, L.; REEVE, H. *Game Theory and Animal Behavior*. New York: Oxford University Press, 1998. Citado na página [11](#).

- DUGATKIN, L. A.; WILSON, D. S. Rover: a strategy for exploiting cooperators in a patchy environment. *Am. Nat.*, v. 138, n. 3, p. 687–701, 1991. Citado na página 14.
- ENQUIST, M.; LEIMAR, O. The evolution of cooperation in mobile organisms. *Anim. Behav.*, v. 45, p. 747–757, 1993. Citado na página 14.
- FRIEDMAN, J. W. A non-cooperative equilibrium for supergames. *Rev. Econ. Stud.*, v. 38, n. 1, p. 1–12, 1971. Citado na página 54.
- GELIMSON, A.; CREMER, J.; FREY, E. Mobility, fitness collection, and the breakdown of cooperation. *Phys. Rev. E*, v. 87, n. 4, p. 042711, 2013. Citado na página 14.
- GINTIS, H. *Game Theory Evolving: A Problem-centered Introduction to Modeling Strategic Behavior*. [S.l.]: Princeton University Press, 2000. (Economics / Princeton University Press). Citado 2 vezes nas páginas 20 e 53.
- GRILO, C.; CORREIA, L. Effects of asynchronism on evolutionary games. *J. Theor. Biol.*, v. 239, p. 109, 2010. Citado na página 19.
- G.SZABO; C.TOKE. Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice. *Phys. Rev. E*, v. 58, p. 1, 1998. Citado na página 20.
- HAMILTON, I. M.; TABORSKY, M. Contingent movement and cooperation evolve under generalized reciprocity. *Proc. R. Soc. B*, v. 272, p. 2259–2267, 2005. Citado na página 14.
- HARARI, Y. *Sapiens: A Brief History of Humankind*. Israel: HarperCollins, 2015. Citado na página 12.
- HARDIN, G. The tragedy of the commons. *Science*, v. 162, n. 3859, p. 1243–1248, 1968. Citado na página 11.
- HOSHEN, J.; KOPELMAN, R. Percolation and cluster distribution. i. cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Phys. Rev. B*, v. 14, p. 8, 1976. Citado na página 34.
- ISICHENKO, M. B. Percolation, statistical topography, and transport in random media. *Rev. Mod. Phys.*, v. 64, p. 961–1043, 1992. Citado na página 14.
- KERR, B. et al. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors. *Nature*, v. 418, p. 171–174, 2002. Citado na página 11.
- KIRKPATRICK, S. Percolation and conduction. *Rev. Mod. Phys.*, v. 45, p. 574–588, 1973. Citado na página 14.
- KNECHT, C. L. et al. Retention capacity of random surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, v. 108, p. 045703, 2012. Citado na página 14.
- KREPS, D. M.; WILSON, R. Reputation and imperfect information. *J. Econ. Theory*, v. 27, n. 2, p. 253 – 279, 1982. Citado na página 13.
- LEE, S.; HOLME, P.; ZX., W. Emergent hierarchical structures in multiadaptive games. *Phys Rev Lett.*, v. 14, p. 106, 2011. Citado na página 14.
- LI, Y.; YE, H.; ZHANG, H. Evolution of cooperation driven by social-welfare-based migration. *Physica A*, v. 445, p. 48–56, 2016. Citado na página 14.

- LIN, H.; YANG, D.-P.; SHUAI, J. Cooperation among mobile individuals with payoff expectations in the spatial prisoner's dilemma game. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 44, p. 153–159, 2011. Citado na página 14.
- LOZANO, S.; ARENAS, A.; SANCHEZ, A. Mesoscopic structure conditions the emergence of cooperation on social networks. *PLoS ONE*, v. 3, p. e1892, 2008. Citado na página 14.
- NAKAMARU, M.; MATSUDA, H.; IWASA, Y. The evolution of cooperation in a lattice-structured population. *J. Theor. Biol.*, v. 184, p. 65, 1997. Citado na página 13.
- NASH., J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, v. 36, p. 48–49, 1950. Citado na página 13.
- NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944. Citado na página 11.
- NOWAK, M. A. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, v. 314, p. 1560, 2006. Citado na página 12.
- NOWAK, M. A.; MAY, R. M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, v. 359, p. 826, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 5, 7, 13 e 18.
- NOWAK, M. A.; MAY, R. M. The spatial dilemmas of evolution. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, v. 3, n. 1, p. 35–78, 1993. Citado na página 13.
- OHTSUKI, H.; NOWAK, M. A. The replicator equation on graphs. *J. Theor. Biol.*, v. 243, p. 86 – 97", 2006. Citado na página 23.
- OSTROM, E. et al. Revisiting the commons: Local lessons, global challenges. *Science*, v. 284, n. 5412, p. 278–282, 1999. Citado na página 12.
- PARKER, G. A.; SMITH, J. M. Optimality theory in evolutionary biology. *Nature*, v. 348, p. 27–30, 1990. Citado na página 11.
- PERC, M.; SZOLNOKI, A. Social diversity and promotion of cooperation in the spatial prisoner's dilemma game. *Phys. Rev. E*, v. 77, p. 011904, 2008. Citado na página 13.
- PERC, M.; SZOLNOKI, A. A double-edged sword: Benefits and pitfalls of heterogeneous punishment in evolutionary inspection games. *Nature*, v. 22, p. 617–640, 2015. Citado na página 11.
- PONCELA, J. et al. Robustness of cooperation in the evolutionary prisoner's dilemma on complex networks. *New J. Phys.*, v. 9, p. 083031, 2007. Citado na página 14.
- PONCELA, J. et al. Evolutionary game dynamics in a growing structured population. *New J. Phys.*, v. 11, p. 184, 2009. Citado na página 13.
- RABIN, M. Incorporating fairness into game theory and economics. *Am Econ Rev*, v. 83, p. 1281–1302, 1993. Citado na página 11.
- SABERI, A. A. Recent advances in percolation theory and its applications. *Phys. Rep.*, v. 578, p. 1–32, 2015. Citado na página 14.

- SAHIMI, M. Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing. *Rev. Mod. Phys.*, v. 65, p. 1393–1534, 1993. Citado na página 14.
- SANTOS, F. C.; PACHECO, J. M. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 098104, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- SANTOS, F. C.; PACHECO, J. M.; LENAERTS, T. Evolutionary dynamics of social dilemmas in structured heterogeneous populations. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, v. 103, p. 3490, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- SCHARLEMANN, J. P. W. et al. The value of a smile: Game theory with a human face. *J ECON PSYCHOL*, v. 22, p. 617–640, 2001. Citado na página 11.
- SICARDI, E. A. et al. Random mobility and spatial structure often enhance cooperation. *J. Theor. Biol.*, v. 256, n. 2, p. 240–246, 2009. Citado na página 14.
- SMITH, J. M. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. Citado na página 11.
- STAUFFER, D. Scaling theory of percolation clusters. *Phys. Rep.*, v. 54, p. 1–74, 1979. Citado na página 14.
- SUZUKI, S.; KIMURA, H. Oscillatory dynamics in the coevolution of cooperation and mobility. *J. Theor. Biol.*, v. 287, p. 42–47, 2011. Citado na página 14.
- SZABÓ, G.; FÁTH, G. Evolutionary games on graphs. *Phys. Rep.*, v. 446, p. 97–216, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 15, 19, 21, 25 e 51.
- VAINSTEIN, M.; BRITO, C.; ARENZON, J. J. Percolation and cooperation with mobile agents: Geometric and strategy clusters. *Phys. rev. E*, v. 90, p. 022132, 08 2014. Citado na página 14.
- VAINSTEIN, M. H.; ARENZON, J. J. Disordered environments in spatial games. *Phys. Rev. E*, v. 64, p. 051905, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 32.
- VAINSTEIN, M. H.; ARENZON, J. J. Spatial social dilemmas: dilution, mobility and grouping effects with imitation dynamics. *Physica A*, v. 394, p. 145, 2014. Citado na página 14.
- VAINSTEIN, M. H.; SILVA, A. T. C.; ARENZON, J. J. Does mobility decrease cooperation? *J. Theor. Biol.*, v. 244, p. 722–728, 2007. Citado na página 14.
- VIGOLO, B. et al. An experimental approach to the percolation of sticky nanotubes. *Science*, v. 309, p. 920–923, 2005. Citado na página 14.
- WANG, Z.; SZOLNOKI, A.; PERC, M. If players are sparse social dilemmas are too: Importance of percolation for evolution of cooperation. *Nature Sci. Rep.*, v. 2, p. 369, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 14, 23 e 32.
- WANG, Z.; SZOLNOKI, A.; PERC, M. Percolation threshold determines the optimal population density for public cooperation. *Phys. Rev. E*, v. 85, n. 3, p. 037101, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 33.

- WEIBULL, J. *Evolutionary Game Theory*. Cambridge: MIT Press, 1995. Citado na página 11.
- XU, C. et al. Understanding cooperative behavior in structurally disordered populations. *Eur. Phys. J. B*, v. 89, p. 152, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 36.
- YANG, H.; WANG, B. Universal role of migration in the evolution of cooperation. *Chin. Sci. Bull.*, v. 56, p. 3693–3696, 2011. Citado na página 14.
- YANG, H.-X.; WU, Z.-X.; WANG, B.-H. Role of aspiration-induced migration in cooperation. *Phys. Rev. E*, v. 81, n. 6, p. 065101(R), 2010. Citado na página 14.

Apêndices

APÊNDICE A – Dilema do Prisioneiro e o Equilíbrio de Nash

A.1 Dilema do Prisioneiro

O Dilema do Prisioneiro foi formalizado pelo matemático Albert Tucker em 1950. A estória é contada da seguinte forma: Imagine que dois suspeitos (A e B) de um crime foram levados para prisão para serem interrogados, eles são separados e não possuem informação a respeito do que o outro prisioneiro diz. No entanto a polícia não tem provas suficientes para os condenar, então ela oferece a ambos o mesmo acordo: Caso um suspeito entregue o outro, e o outro fique em silêncio, o delator será absolvido e livre e o delatado receberá uma pena de 3 anos. Caso os dois fiquem em silêncio, não entregando o outro, os dois receberão uma pena de 1 ano de prisão. Se ambos traírem seu parceiro, eles serão condenados a 2 anos de prisão. O resultado dessas interações gera a seguinte matriz de ganhos:

	B silêncio	B trai
A silêncio	(-1,-1)	(-3,0)
A trai	(0,-3)	(-2,-2)

Na vida real as pessoas frequentemente se encontram numa situação parecida com a do Dilema do Prisioneiro, onde elas precisam escolher ser egoístas ou altruístas. É interessante perceber que a cooperação mútua traria um ganho maior para ambos os jogadores, porém a deserção é o equilíbrio de Nash desse sistema, e esse é o dilema.

A.2 Equilíbrio de Nash

Supondo uma população completamente racional, O equilíbrio de Nash é o estado em que os jogadores não têm mais nenhum incentivo unilateral para mudar de estratégia, ou seja, eles chegaram à melhor “resposta” (*best response*). O equilíbrio de Nash representa a melhor previsão para o resultado de jogos não cooperativos (SZABÓ; FÁTH, 2007), em outras palavras, a “solução” do jogo.

Matematicamente é representado da seguinte forma: sendo um jogo com $n = 1, \dots, N$ participantes, onde $S_n = \{e_{n1}, e_{n2}, \dots, e_{nQ}\}$ é o conjunto de todas as possíveis Q estratégias puras disponíveis para o jogador n . Tome s_n como um elemento dentro desse conjunto $s_n \in S_n$. Sabendo que $u = (u_1(s), \dots, u_n(s))$ é a função de ganho (*payoff*), que depende

do conjunto de estratégias $s = (s_1, \dots, s_N)$ escolhidas por cada jogador. Dessa forma um certo jogador n terá associado à ele o ganho $u_n(s)$, que depende tanto da sua como das estratégias dos outros. Define-se s_{-n} como o conjunto de estratégias de todos os jogadores exceto o do n . Um conjunto de estratégias s^* é um equilíbrio de Nash caso nenhuma mudança unilateral da estratégia seja favorável para o jogador, acontece que

$$\forall n \text{ tal que } s_n, s_n^* \in S_n \text{ e } s_n^* \neq s_n \Rightarrow u_n(s_n^*, s_{-n}^*) \geq u_n(s_n, s_{-n}^*). \quad (\text{A.1})$$

APÊNDICE B – Dinâmica do Replicador

A equação do Replicador é frequentemente usada para descrever evoluções biológicas, uma vez que os ganhos podem estar diretamente relacionados ao sucesso reprodutivo. O objetivo desse apêndice é demonstrar a razão da probabilidade de troca de Replicador receber esse nome. Partindo de uma população muito grande, em que a probabilidade de um indivíduo de estratégia $i = \{C, D\}$ encontrar um outro com a mesma estratégia num determinado tempo t , será a fração ρ_i^t . Se P_i^t é o ganho (*payoff*) deste indivíduo no tempo t e W_{ij}^t é a probabilidade dele mudar para outra estratégia $j = \{C, D\} \neq i$, pode-se assumir que W_{ij}^t depende da diferença dos ganhos da seguinte forma (GINTIS, 2000):

$$W_{ij}^t = \begin{cases} \beta(P_j^t - P_i^t) & \text{para } P_j^t > P_i^t \\ 0 & \text{para } P_j^t \leq P_i^t. \end{cases}$$

Ou seja, existe uma probabilidade de o indivíduo não mudar de estratégia mesmo se $P_j > P_i$. Porém se $P_j \leq P_i$ então ele nunca mudará de estratégia. Sabendo que cada indivíduo, em um intervalo dt , pode mudar de estratégia com probabilidade W_{ij}^t e supondo que tal probabilidade está relacionada com uma taxa de troca $\alpha > 0$, chega-se na expressão para a densidade da população ρ_i^{t+dt} no instante $t + dt$. Que é na verdade a densidade ρ_i^t no tempo t menos a fração em dt que mudou para j , e mais a que mudou para i .

$$\rho_i^{t+dt} = \rho_i^t - \alpha dt \rho_i^t \sum_{j=i+1}^n \rho_j^t \beta(P_j^t - P_i^t) + \alpha dt \rho_i^t \sum_{j=1}^i \rho_j^t \beta(P_i^t - P_j^t) \quad (\text{B.1})$$

O primeiro somatório engloba todas as interações em que $P_i^t < P_j^t$ e o segundo em que $P_i^t > P_j^t$. Trocando de lugar P_j e P_i no primeiro somatório chega-se na seguinte expressão:

$$\rho_i^{t+dt} = \rho_i^t + \alpha dt \rho_i^t \sum_{j=1}^n \rho_j^t \beta(P_i^t - P_j^t). \quad (\text{B.2})$$

Como $\sum_{j=1}^n f_j P_j = \bar{P}$ é o ganho médio da rede e $\sum_{j=1}^n \rho_j = 1$ então a expressão fica:

$$\rho_i^{t+dt} = \rho_i^t + \alpha dt \rho_i^t \beta(P_i^t - \bar{P}). \quad (\text{B.3})$$

Subtraindo ρ_i^t dos dois lados, dividindo por dt e tomando o limite $dt \rightarrow 0$, chega-se à seguinte expressão:

$$\dot{\rho}_i = \alpha \beta \rho_i (P_i - \bar{P}), \quad (\text{B.4})$$

que é a equação do replicador. Nesse trabalho definimos $\beta = 1/nT$ onde n é o numero de vizinhos na rede $n = 4$.

É possível chegar também à equação do replicador partindo do ganho médio para a população de cooperadores f_c e de desertores f_d , supondo uma população grande e bem

misturada em que cada indivíduo pode interagir com qualquer outro:

$$\begin{aligned} f_c &= \rho_c R + \rho_d S \\ f_d &= \rho_c T + \rho_d P, \end{aligned} \tag{B.5}$$

sendo $\rho_{(c,d)}$ a densidade de cooperadores e desertores, respectivamente. Usando a mesma lógica chega-se na expressão para o ganho médio f da população total que é a média ponderada de f_c e f_d :

$$f = \rho_c f_c + \rho_d f_d. \tag{B.6}$$

Com base em (B.5) e (B.6), é possível chegar na expressão para a taxa de crescimento de cada população $\frac{\dot{\rho}_{(c,d)}}{\rho_{(c,d)}}$ que é postulado como sendo proporcional à diferença entre $f_{(c,d)}$ e f :

$$\frac{\dot{\rho}_{(c,d)}}{\rho_{(c,d)}} = \alpha(f_{(c,d)} - f). \tag{B.7}$$

Isolando $\dot{\rho}_{(c,d)}$ obtém-se novamente a equação da dinâmica do replicador:

$$\dot{\rho}_{(c,d)} = \alpha \rho_{(c,d)}(f_{(c,d)} - f). \tag{B.8}$$

A equação (B.8) pode ser generalizada para mais de duas estratégias ou populações, é uma equação não linear e é um bom modelo para prever a estabilidade em sistemas evolutivos estudando os pontos de estabilidade de Nash (*The Folk Theorem*) (FRIEDMAN, 1971).

APÊNDICE C – Densidades de Ganho

A Figura 15 mostra para as probabilidades de Fermi e do Replicador as densidades de cooperadores (15 (a,b)) e desertores (15 (d,e)) com cada ganho (*payoff*) possível dependendo do número de vizinhos cooperadores, com tentação $b = 1.02$. As densidades são calculadas entre os indivíduos da mesma estratégia:

$$\rho_{s,p} = \frac{N_{s,p}}{\sum_p N_{s,p}}, \quad (\text{C.1})$$

onde s é a estratégia e p são os possíveis ganhos da estratégia s . Mostramos apenas um valor de tentação pois os outros se comportam de forma semelhante. Observa-se que a densidade de cada ganho para a cooperação não muda muito quando mudamos a probabilidade de troca W (15 (a,b)), seus máximos aparecem em valores similares da densidade da rede. O que vemos é que os ganhos dos cooperadores parecem estar fortemente relacionados com a distribuição dos números de vizinhos k , $P(K, k)$, retratada na Fig.15(c). Onde $P(K, k)$ é a probabilidade de um indivíduo ter exatamente k sítios ocupados entre seus K vizinhos; como estamos numa rede quadrada usamos $K = 4$ e k variando de zero a quatro.

$$P(K, k) = \binom{K}{k} \rho^k (1 - \rho)^{K-k}. \quad (\text{C.2})$$

O primeiro termo à direita do sinal de igualdade é a combinação sem repetição C_k^K . Comparando as figuras 15(a,b) e 15(c), nota-se que o máximo de $\rho_{c,p=2}$ (15(a,b)) é próximo ao máximo de $P(K = 4, k = 2)$ (15c), que é a probabilidade de um indivíduo ter apenas dois sítios ocupados na sua vizinhança. Isso se repete para todos os valores de p e k na cooperação. Existem alguns comportamentos que não são previstos por $P(K, k)$ como o mínimo em $p = 1$, mas como estamos tratando de densidades correlacionadas, esse mínimo deve estar relacionado com o máximo de $p = 3$, já que observa-se uma anti-simetria dessas curvas em torno de $\rho_c \approx 0.25$ para $\rho \gtrsim 0.45$. Existe também uma pequena diferença entre as probabilidades de troca: o pico de $p = 2$ é bem menor em REP se comparado com Fermi. Se a densidade de cooperadores com um determinado ganho p diminui, outro deve aumentar, o que vemos é que $p = 1$ é mais alto nessa mesma região quando comparamos novamente com Fermi. Essa diferença pode estar relacionada com as estruturas discutidas na seção 2.3, que aumentam o número de cooperadores com apenas um vizinho cooperador ($p = 1$) nessa região (para REP, evidentemente).

Nos gráficos 15 (d,e), mostramos os possíveis ganhos dos desertores para as probabilidades de troca estudadas. Na seção 2.3, discutimos apenas a diferença entre eles para $p = b$ e sua relação com o estado congelado do REP, pois argumentamos que os outros valores de ganho não mostravam diferenças promissoras. Vamos abordar aqui brevemente

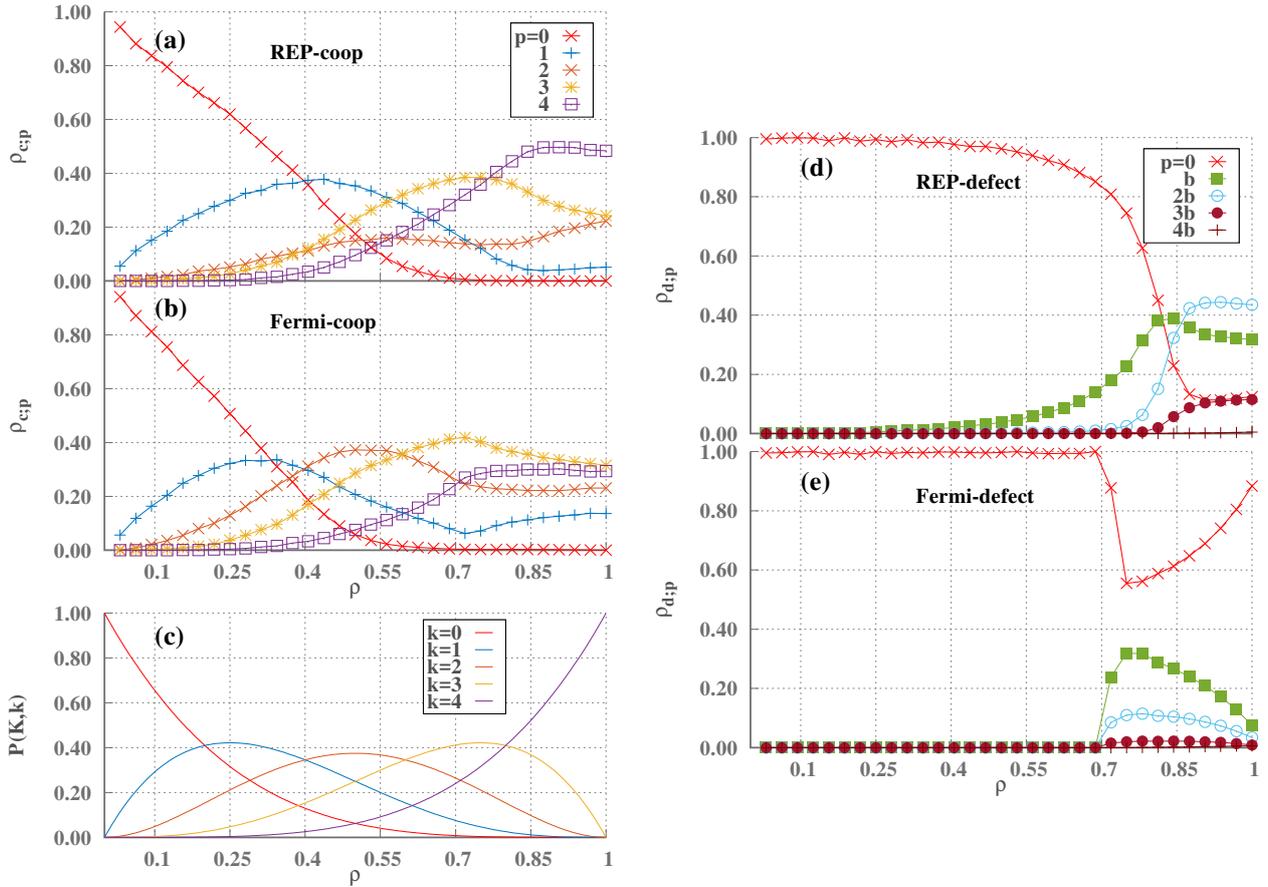


Figura 15 – Gráficos da fração assintótica dos ganhos dos cooperadores $\rho_{c,p} = N_{c,p}/(\sum_p N_{c,p})$ para as probabilidade do REP (a) e de Fermi (b), e da fração dos ganhos dos desertores $\rho_{d,p} = N_{d,p}/(\sum_p N_{d,p})$ também para REP (d) e para Fermi (e). O gráfico (c) mostra a probabilidade $P(K, k) = C_k^K \rho^k (1 - \rho)^{K-k}$, que é a probabilidade de um indivíduo ter exatamente k sítios ocupados entre seus K vizinhos.

os outros valores de ganho de desertores ($p = 2b, 3b, 4b$) para solucionar possíveis dúvidas. Pode-se relacionar o comportamento de $p = 2b, 3b$ e $4b$ com a densidade de cooperadores; quanto maior ρ_c , maior o número de desertores com mais vizinhos cooperadores, portanto ganhando mais. Por isso as densidades $\rho_{d,p=2b,3b,4b}$ são maiores próximas ao pico da cooperação ρ^* . Notamos também que para Fermi na região $\rho < \rho^*$, os desertores se encontram sem vizinhos cooperadores ($p = 0$ domina). Para altas tentações pode-se relacionar isso com o próprio limiar de percolação, pois para $\rho < p_c$ só existem *clusters* compactos que não percolam (evidentemente), e eles tendem a ser dominados (se a informação fluir livremente na rede—dinâmicas estocásticas) por uma única estratégia (isso é discutido no capítulo 3—vide Tabela 2). Para baixas tentações, entre $p_c < \rho < \rho^*$, o *cluster* gigante (definido no Cap. 3) acaba sendo dominado por cooperadores, enquanto o resto da rede é composto por pequenos *clusters* compactos que, novamente, são dominados por uma

única estratégia. Por esses motivos, para $\rho < \rho^*$, os desertores se encontrarão isolados (sem vizinhos cooperadores) e seu ganho será $p = 0$. Em contraposição, para o REP, os desertores com $p \neq 0$ não se extinguem para densidades logo abaixo do pico da cooperação. Isso acontece porque os desertores com ganho $p = b$ não serão extintos tão rapidamente, devido às estruturas formadas entre eles e os buracos que, por “congelar” o sistema, mantêm desertores e cooperadores coexistindo mesmo em *clusters* que não percolam (Fig. 9).

Resumidamente, os cooperadores são bastante afetados pela distribuição de buracos na rede e o ganho dos desertores está relacionado com ρ_c . As diferenças dos ganhos dos indivíduos entre REP e Fermi mais significativas estão na seção 2.3 e apontam que as estruturas mostradas na Fig. 9 devem ser um dos principais fatores que impedem que REP atinja seu ótimo global.