

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DIFUSIVO  
DE NÊUTRONS UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ

por

Bernardo Luiz Knackfuss

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, junho de 2018



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DIFUSIVO  
DE NÊUTRONS UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ

por

Bernardo Luiz Knackfuss

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Thamy Cristina Hayashi  
Coordenadora do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Energia e Fenômenos de Transporte**

Orientador: Prof. Bardo E. J. Bodmann

Comissão de Avaliação:

Prof.

Prof.

Prof.

Porto Alegre, junho de 2018.

KNACKFUSS, B. L. **Obtenção de Soluções Estacionárias da Equação de Transporte Difusivo de Nêutrons Utilizando Aproximantes de Padé.** 2018. 15 pgs. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

## **RESUMO**

Desenvolveu-se uma metodologia para obtenção de soluções para equações de transporte utilizando funções racionais na forma de aproximantes de Padé. O trabalho objetiva demonstrar o potencial da abordagem para a modelagem de fenômenos complexos de transporte obtendo-se soluções para o modelo difusivo de nêutrons em três dimensões; um caso simplificado da equação de transporte de Boltzmann comumente utilizado na modelagem de reatores nucleares. Obteve-se nesta primeira abordagem, para uma função racional com termos quadráticos, uma solução com erro médio na ordem de meio por cento relativo à solução exata.

**PALAVRAS-CHAVE:** aproximante de Padé, fluxo escalar de nêutrons, transporte difusivo.

KNACKFUSS, B. L. **Obtention of Stationary Solutions for Neutron Diffusive Transport Equation Applying Padé Approximants**. 2018. 15 pgs. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

## **ABSTRACT**

A methodology for the obtention of solutions for transport equations utilizing rational functions in the form of Padé approximants was developed. This paper aims to demonstrate the potential of applying this approach to the modeling of complex transport phenomena through the obtention of solutions for the diffusive neutron transport model in three dimensions, a simplified case of the Boltzmann transport equation usually utilized in the modeling of nuclear reactors. It was obtained, in this first approach, with a rational function with quadratic terms, solutions with a mean error of half a percent relative to the exact solution.

**KEYWORDS:** Padé approximant, neutron scalar flux, diffusive transport.

## ÍNDICE

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2. OBJETIVOS .....</b>	<b>1</b>
<b>3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>1</b>
3.1 Conceitos de Engenharia Nuclear .....	1
3.2 Modelo Difusivo de Nêutrons .....	2
3.2.1 Motivação.....	2
3.2.2 Hipóteses e Lei de Fick .....	3
3.4 Aproximante de Padé .....	5
<b>4. METODOLOGIA .....</b>	<b>6</b>
4.1 Tratamento Tridimensional e Simetrias .....	6
4.2 Condições de Contorno .....	7
4.3 Pré-Condicionamento da Solução.....	8
4.4 Refino dos Coeficientes .....	9
<b>5. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>6. CONCLUSÕES .....</b>	<b>14</b>
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>15</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa realizar os primeiros passos na direção de desenvolver um método matemático que possibilite, com relativa facilidade, obter soluções aproximadas para a equação de transporte de Boltzmann. Tendo-se em mente que a equação de Boltzmann é uma equação diferencial parcial não-linear que apresenta sete variáveis independentes, começar o desenvolvimento do método por ela seria, sem dúvidas, uma tortuosa e desestimulante jornada. Apresenta-se então um modelo de complexidade reduzida, comumente utilizado na modelagem de reatores nucleares, que diz respeito à uma simplificação da equação de transporte geral. Este modelo, chamado modelo difusivo de nêutrons, consegue capturar com fidelidade o comportamento espacial do fluxo escalar de nêutrons contidos em um elemento de combustível nuclear. O modelo difusivo torna possível o cálculo da potência, a simulação de acidentes e, dentre outras aplicações, a realização de cálculos de engenharia de segurança de reatores nucleares.

Até o presente momento, nem mesmo a existência de soluções analíticas fechadas da equação de Boltzmann para o caso geral foram provadas por completo (como discutido por De Camargo et al. 2013). Desta maneira, para fins de engenharia, são realizadas simplificações, como por exemplo os métodos de Lattice-Boltzmann (Succi, 2001) utilizados em simulações computacionais de dinâmica de fluidos, que resolvem uma forma discretizada de Boltzmann. O método matemático iniciado neste trabalho fornece, de maneira introdutória, uma possível abordagem para a obtenção analítica de soluções aproximadas para o problema completo (contínuo) de transporte de Boltzmann. Um resumo dos métodos utilizados para a obtenção de soluções para alguns casos da equação de Boltzmann pode ser encontrado em Rodriguez, 2011.

## 2 OBJETIVOS

Objetiva-se com este trabalho evidenciar a utilidade do emprego de funções racionais para aproximar soluções das equações de transporte, comumente utilizadas em cálculos de engenharia. Utiliza-se o modelo difusivo de transporte de nêutrons (equação de Helmholtz) como ponto de partida uma vez que a solução geral para o caso estacionário tridimensional desta equação existe e é conhecida, tornando possível a validação das soluções aproximadas obtidas pelo método desenvolvido.

Argumenta-se que as funções racionais têm um potencial de aproximação das soluções verdadeiras muito superior em relação a outros métodos comumente utilizados como, por exemplo, aproximações polinomiais, uma vez que a contribuição dos termos presentes no denominador da função ajuda-a a modelar curvas menos comportadas. Desta forma, o objetivo último desta linha de pesquisa seria continuar o desenvolvimento do método de modo a tornar possível a obtenção de soluções aproximadas para a equação de transporte de Boltzmann.

## 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Serão apresentados de forma breve alguns conceitos pertinentes da área de engenharia nuclear como forma de preparar o leitor para a apresentação do modelo difusivo de nêutrons. Em seguida, será feita uma breve motivação para a utilização do modelo difusivo de nêutrons. O modelo então será detalhado e suas hipóteses e dependências serão comentadas de maneira a expor suas aplicações práticas. Em seguida serão apresentados os conceitos matemáticos referentes à aproximante de Padé.

### 3.1 Conceitos de Engenharia Nuclear

Um reator nuclear é definido como um dispositivo utilizado para iniciar e controlar uma reação nuclear em cadeia de modo a gerar energia útil através do calor gerado pela fissão nuclear de átomos de um certo combustível nuclear, comumente urânio-235. Existem diversos tipos de reatores nucleares, sendo o reator de nêutrons térmicos o mais comum. Nêutrons térmicos são nêutrons que sofrem uma desaceleração (têm sua energia dissipada através de

colisões) ao interagir com um meio chamado 'moderador'. Estes nêutrons são desacelerados até atingirem um nível de energia abaixo de 1eV, que é um nível energético muito inferior ao nível dos nêutrons recém liberados pela fissão nuclear (chamados nêutrons rápidos, na ordem de grandeza de 1MeV). Os nêutrons térmicos possuem esta nomenclatura devido ao fato de se encontrarem em equilíbrio térmico com seu meio (moderador e estrutura). Para mais detalhes, ver Stacey, 2007.

Os parâmetros de saída dos reatores nuclear (como a potência do reator e sua eficiência energética), são, de maneira óbvia, diretamente relacionados às interações que acontecem em nível nuclear nas células de combustível destes reatores. Estas interações (ou reações), podem ser descritas em termos matemáticos de maneira precisa com a introdução de alguns conceitos. O primeiro conceito a ser apresentado é o conceito de grupos energéticos de nêutrons. A energia dos nêutrons em um reator nuclear varia dentro de uma escala que contempla 8 ordens de grandeza [Barcellos, 2016]. A probabilidade de um nêutron sofrer uma interação varia drasticamente de acordo com seu nível energético graças às características das interações nucleares, dessa forma, é extremamente complicado capturar simultaneamente todos os diferentes tipos de reações que acontecem nos diferentes níveis energéticos. Para simplificar o tratamento do problema da cinética de nêutrons, é comum na literatura encontrar uma quantização do espectro de energias dos nêutrons em grupos que descrevem certas faixas energéticas bem definidas (como em Nagaya e Kobayashi, 1994). Desta forma podemos caracterizar reações que causam um nêutron a passar de um grupo a outro, ganhando ou perdendo energia, e que, conseqüentemente, alteram seu comportamento e seu papel dentro do reator nuclear ao longo do tempo.

O próximo conceito a ser apresentado relaciona-se com a probabilidade de um nêutron sofrer uma interação com um núcleo atômico. Denomina-se por seção de choque microscópica esta probabilidade, caracterizada pela unidade física *barns*, que equivale a  $10^{-28}m$ . A seção de choque microscópica é sempre relacionada à alguma interação neutrônica específica, como espalhamento, absorção, remoção ou fissão, e quanto maior a seção de choque microscópica de determinada reação nuclear envolvendo um nêutron, maior a probabilidade de tal reação ocorrer [Espinosa, 2015].

A seção de choque microscópica pode ser unida ao conceito de densidade atômica do núcleo alvo para gerar a seção de choque macroscópica dos nêutrons. A seção macroscópica é útil, por sua vez, quando unida com o conceito de fluxo de nêutrons, já que a multiplicação destas duas grandezas permite o cálculo da taxa de reações por unidade de volume do reator. O fluxo de nêutrons é uma quantidade escalar definida como a multiplicação da densidade de nêutrons no reator pelas suas velocidades. Para obtermos a taxa de reações do reator, devemos integrar a multiplicação da seção de choque macroscópica (probabilidade de ocorrência de interação atômica) com o fluxo de nêutrons (também chamado de fluxo escalar) com respeito à energia de zero a infinito. Com a taxa de reações, torna-se possível calcular a potência do reator. Para maiores elucidaciones sobre conceitos nucleares, checar o trabalho seminal de Reuss, 2008.

## 3.2 Modelo Difusivo de Nêutrons

### 3.2.1 Motivação

O estudo do fenômeno de transporte de nêutrons é de extrema importância prática para o entendimento e para o projeto de reatores nucleares. O transporte de nêutrons é descrito com as propriedades físicas essenciais pela equação de transporte de Boltzmann (3.2.1.1), que caracteriza o balanço de nêutrons em um sistema levando em consideração os ganhos e perdas devido a forças externas, colisões e difusão dos nêutrons. Por se tratar de uma equação diferencial parcial não linear de alta dimensionalidade, soluções analíticas para casos particulares são de difícil obtenção, sendo que uma solução analítica geral para a equação ainda não foi encontrada. Métodos numéricos para a resolução das equações de Boltzmann diretamente são aplicáveis, porém são extremamente custosos computacionalmente. Dessa forma, torna-se inviável a utilização da equação de Boltzmann geral para fins de engenharia de reatores nucleares.

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\mathbf{v}(E)} \frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathbf{\Omega}} \cdot \nabla + \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \right) \psi(\mathbf{r}, E, \widehat{\mathbf{\Omega}}, t) \\
&= \frac{\chi_p(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' v_p(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \varphi(\mathbf{r}, E', t) + \sum_{i=1}^N \frac{\chi_{di}(E)}{4\pi} \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\
&+ \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \widehat{\mathbf{\Omega}}' \rightarrow \widehat{\mathbf{\Omega}}, t) \psi(\mathbf{r}, E, \widehat{\mathbf{\Omega}}', t) + s(\mathbf{r}, E, \widehat{\mathbf{\Omega}}, t)
\end{aligned} \tag{3.2.1.1}$$

Uma breve explicação dos símbolos presentes na equação acima será realizada e, em seguida, será fornecida uma intuição sobre os termos da equação. Para mais detalhes ver Duderstadt e Martin, 1979. Temos que  $\mathbf{r}$  representa o vetor posição,  $E$  a energia,  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  o vetor unitário (ângulo sólido) na direção do movimento,  $t$  o tempo,  $\mathbf{v}(E)$  o vetor velocidade de nêutrons,  $\psi(\mathbf{r}, E, \widehat{\mathbf{\Omega}}, t)$  o fluxo angular de nêutrons,  $\varphi(\mathbf{r}, E', t)$  o fluxo escalar de nêutrons,  $v_p$  o número médio de nêutrons,  $\chi_p(E)$  a função probabilidade de densidade de nêutrons com energia de saída  $E$  dentre todos os nêutrons produzidos por fissão,  $\chi_{di}(E)$  a função probabilidade de densidade de nêutrons com energia de saída  $E$  dentre todos os nêutrons produzidos por precursores de nêutrons atrasados,  $\Sigma_t(\mathbf{r}, E, t)$  a seção de choque macroscópica total,  $\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)$  a seção de choque macroscópica de fissão,  $\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \widehat{\mathbf{\Omega}}' \rightarrow \widehat{\mathbf{\Omega}}, t)$  o espalhamento duplo de um nêutron incidente com energia  $E'$  e direção  $\widehat{\mathbf{\Omega}}'$  para uma energia final  $E$  e uma direção final  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$ ,  $N$  o número de precursores de nêutrons atrasados,  $\lambda_i$  a constante de decaimento para o precursor  $i$ ,  $C_i(\mathbf{r}, t)$  o número total de precursores  $i$  em  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  e, finalmente,  $s(\mathbf{r}, E, \widehat{\mathbf{\Omega}}, t)$  o termo fonte.

A equação (3.2.1.1) pode ser aplicada para um determinado espaço de fases  $\Gamma(\mathbf{r}, E, \widehat{\mathbf{\Omega}}, t)$  de interesse. Seu primeiro termo representa a variação temporal de nêutrons no sistema. O segundo termo descreve o movimento de nêutrons para dentro ou para fora do volume espacial de interesse. O terceiro termo leva em conta as colisões de nêutrons no espaço de fases considerado. O primeiro termo no lado direito da igualdade é a produção de nêutrons devido à fissão no espaço de fase, enquanto que o segundo termo leva em conta a produção de nêutrons devido aos precursores de nêutrons atrasados. O terceiro termo neste lado da igualdade descreve o espalhamento de nêutrons de um outro espaço de fases para dentro do espaço de fases de interesse. O último termo da equação refere-se ao termo fonte.

A equação (3.2.1.1) foi apresentada para fim expositivo, com o objetivo de apresentar os desafios a serem superados em trabalhos subsequentes e também para fornecer o alicerce da teoria de transporte de nêutrons. A obtenção de soluções para a equação de Boltzmann é o objetivo maior que norteia este trabalho, sendo que para tal, inicialmente, devemos implementar com sucesso o método para um caso mais simples. Dessa forma, serão descritas a seguir as particularidades do modelo difusivo de nêutrons, que reduz o transporte de Boltzmann com sete variáveis (três coordenadas espaciais cartesianas, duas direções angulares, energia e tempo) para um problema estacionário função de três variáveis espaciais.

### 3.2.2 Hipóteses e Lei de Fick

O modelo difusivo de nêutrons pode ser obtido a partir da equação (3.2.1.1) realizando algumas hipóteses simplificadoras. Este modelo, mesmo consistindo de uma simplificação da equação de transporte, consegue caracterizar com fidelidade suficiente a física nuclear presente na grande maioria dos reatores em operação, sendo sua utilização motivada pela facilidade na obtenção de soluções.

O modelo difusivo depende do emprego da Lei de Fick, que, em sua formulação clássica na química, diz que se a concentração de soluto em uma região é maior que em outra em uma solução, então o soluto difunde da região de maior concentração para a região de menor concentração, com uma magnitude proporcional ao gradiente de concentração [Bird e Stewart, 2001].



A lei de Fick possui uso típico em problemas de engenharia na análise de transferência de calor, assumindo a forma da lei de Fourier [Incropera, 2014]. O equacionamento da lei de Fick para o caso nuclear relaciona, através de um coeficiente de difusão  $D_o$  (em  $m^2/s$ ), a densidade de corrente de nêutrons  $\vec{j}$  com o negativo do gradiente tridimensional do fluxo escalar de nêutrons, conforme a eq. (3.2.2.1) abaixo.

$$\vec{j} = -D_o \nabla \varphi \quad (3.2.2.1)$$

O emprego da Lei de Fick é válido desde que as seguintes condições sejam respeitadas:

1. *Meio infinito* (de modo que a solução não sofra 'reflexões' nas fronteiras).
2. *Fontes e sumidouros afastados* (pois tornam o problema singular, matematicamente).
3. *Meio uniforme* (interfaces entre materiais representam descontinuidades nas propriedades do meio).
4. *Espalhamento de nêutrons isotrópico* (ocorre em energias baixas, porém não é verdade de modo geral).
5. *Meio pouco absorvedor* (é assumido que o fluxo escalar varia lentamente; grandes variações ocorrem quando a seção de choque macroscópica de absorção é grande).
6. *Fluxo temporalmente independente*.

A formulação matemática da teoria difusiva de nêutrons é baseada no balanço de nêutrons em um elemento de volume diferencial. Para caracterizar, no balanço, a variação da densidade de nêutrons, são consideradas somente a produção devido à uma fonte, a taxa de absorção e a taxa de vazamento de nêutrons, sendo negligenciada a transformação de nêutrons em prótons através do decaimento beta. O vazamento de nêutrons do sistema pode ocorrer quando nêutrons escapam pelas extremidades do reator antes de atingirem o estado térmico ou antes de serem absorvidos.

A equação do modelo difusivo de nêutrons (3.2.2.2) resulta da união da lei de Fick com uma forma simplificada da equação de Boltzmann, e descreve o fluxo escalar de nêutrons em termos das coordenadas espaciais (para os detalhes da sua derivação, veja Sekimoto, 2007).

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) = v \Sigma_f(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) \quad (3.2.2.2)$$

A constante  $D$  na equação (3.2.2.2) é a constante difusiva original  $D_o$  (em  $cm^2/s$ ) dividida pela velocidade dos nêutrons,  $v$  (em  $cm/s$ ). Para o caso especial (de interesse neste trabalho) em que o termo fonte é igual a zero e a constante difusiva  $D$ , a seção de choque macroscópica de absorção  $\Sigma_a$  e o termo  $v \Sigma_f$  (número de nêutrons liberados na fissão multiplicado pela seção de choque macroscópica de fissão), independem da posição  $\mathbf{r}$ , a equação (3.2.2.2) assume a forma da equação de Helmholtz (3.2.2.3).

$$\Delta \varphi(x, y, z) + k^2 \varphi(x, y, z) = 0 \quad (3.2.2.3)$$

Sendo  $\varphi(x, y, z)$  o fluxo escalar de nêutrons em função das coordenadas espaciais,  $\Delta$  o operador laplaciano definido em coordenadas cartesianas como  $\Delta \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$  e  $k^2$  um coeficiente dependente da física do problema. A tabela 3.2.2.1 (Oliveira, 2013) fornece parâmetros nucleares de referência para nêutrons térmicos.

Tabela 3.2.2.1 – Parâmetros nucleares

Parâmetro	Valor
$v \Sigma_f [cm^{-1}]$	$3,3303 \times 10^{-2}$
$\Sigma_a [cm^{-1}]$	$1,5843 \times 10^{-2}$
$D [cm]$	0,96343

Pode-se relacionar a constante  $k^2$  com os parâmetros nucleares comparando-se os termos das equações (3.2.2.3) e (3.2.2.2), resultando na igualdade abaixo.

$$k^2 = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (3.2.2.4)$$

### 3.3 Aproximante de Padé

O método da aproximante de Padé, desenvolvida em torno de 1890 pelo matemático Henri Padé, consiste em encontrar a função racional que melhor aproxima uma função de interesse [Wuytack, 1979]. O método é interessante pois com frequência fornece uma aproximação melhor à função do que um truncamento da expansão em série de Taylor da função, sendo que a aproximante de Padé pode convergir para uma solução mesmo quando a série de Taylor não converge [Kallrath, 2002]. Caso tenha-se uma série divergente, apenas rearranjando os termos da expansão de Taylor de ordem  $L$ ,  $T_L(x)$ , na forma da aproximante de Padé, consegue-se recuperar a informação perdida na série divergente de maneira a obter-se um resultado útil utilizando apenas os primeiros termos da série [Press, 1992]. Esta característica curiosa do método de Padé permite que sejam obtidas informações sobre a função no domínio de interesse mesmo que este contenha uma singularidade (assíntotas). Polinômios, por si só, usualmente não fornecem aproximações muito boas para soluções de problemas de transporte, já que são impossibilitados de modelar assíntotas e têm uma forte tendência a oscilar. As funções racionais, por sua vez, retêm a simplicidade da forma dos polinômios e ainda têm a capacidade de reproduzir uma gama maior de fenômenos geométricos.

Definimos a aproximante de Padé de ordem  $(m/n)$  da função  $f(x)$  como a função  $R(x)$  que concorda com as derivadas de  $f(x)$  até a mais alta ordem possível, conforme a eq. (3.3.1) e o sistema de equações (3.3.2) abaixo.

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} f(0) &= R(0) \\ f'(0) &= R'(0) \\ f''(0) &= R''(0) \\ &\vdots \\ f^{(m+n)}(0) &= R^{(m+n)}(0) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

É tomado, por definição,  $b_0 = 1$  para garantir a unicidade das soluções obtidas. Caso contrário, toda solução seria única apenas com respeito à multiplicação de uma constante.

Se a expressão (3.3.1) for igualada à expansão em série de Taylor da função  $f(x)$  (como demonstrado na eq. 3.3.3), serão obtidos, diretamente, os coeficientes desconhecidos realizando uma comparação entre os termos de mesma ordem, como demonstrado no sistema de equações (3.3.4). Com  $c_i$  fornecidos pela série de Taylor de  $f(x)$ , cada nova linha em (3.3.4) introduz duas novas incógnitas,  $a_i$  e  $b_i$ . Tomando o grau do numerador como  $m$  e do denominador como  $n$ , tem-se que o sistema é determinado desde que a série de Taylor seja conhecida, no mínimo, até o termo de ordem  $m + n$ , sendo que não necessariamente precisa-se ter  $n = m$ .

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + c_0b_1 \\ a_2 &= c_2 + c_1b_1 + c_0b_2 \\ a_3 &= c_3 + c_2b_1 + c_1b_2 + c_0b_3 \\ &\dots \quad \dots \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

O método clássico será adaptado neste trabalho para que se possa utilizá-lo para aproximar as soluções de uma equação diferencial parcial. Sendo assim, enquanto que no método tradicional a expansão em série de Taylor da função  $f(x)$  é utilizada para encontrar os coeficientes  $a_m$  e  $b_n$  de maneira direta com um sistema linear de equações, no método aqui descrito isto não é possível, uma vez que a expansão de Taylor da solução é desconhecida. Dessa forma, primeiramente, serão utilizadas considerações de simetria conhecidas do problema de forma a reduzir o número de coeficientes independentes da solução. E então serão analisados, individualmente, casos particulares em que a solução dependerá somente de um ou outro coeficiente, de modo que seja possível obter cada coeficiente diretamente.

## 4 METODOLOGIA

Será aqui considerado um elemento de combustível de seção quadrada, com 20 centímetros de lado e 400 centímetros de altura, sendo que se define as distâncias entre o centro geométrico do elemento até suas bordas como  $L_x = L_y = 10cm$  e  $L_z = 200cm$ . Serão discutidas nas seções seguintes as considerações de simetrias geométricas do problema, assim como suas condições de contorno. Uma análise da solução analítica da equação de Helmholtz para o caso tridimensional será realizada para permitir uma estimativa inicial (porém informada) a respeito dos coeficientes desconhecidos da solução aproximada. Em seguida, será descrita a metodologia empregada pelo autor para o refino dos valores numéricos obtidos na aproximação inicial.

### 4.1 Tratamento Tridimensional e Simetrias

Neste trabalho aplica-se o conceito da aproximante de Padé a um problema tridimensional, tornando-se necessário que se leve em consideração todas as simplificações disponíveis para uso no tratamento do problema. Para tal, é considerado que a origem se localiza no centro geométrico da célula de combustível. Utilizaremos coordenadas cartesianas por questões de praticidade no tratamento da geometria.

No caso da célula de combustível do reator sendo modelado, pode-se dividir seu volume em oito octantes simétricos. Dessa forma, torna-se necessário calcular apenas as soluções para um octante. Para isso, uma condição importante a ser satisfeita pela solução é a de que ela seja uma função par. Isto traduz-se matematicamente como a possibilidade de se inverter os sinais das coordenadas  $x, y$  e  $z$  sem alterar a forma da solução.

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(-x, y, z) \quad (4.1.1)$$

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, -y, z) \quad (4.1.2)$$

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z) \quad (4.1.3)$$

Fisicamente, esta condição implica que o fluxo escalar de nêutrons dentro do elemento de combustível é simétrico reflexivamente em relação aos eixos de coordenadas cartesianas. A hipótese é uma boa suposição para a maior parte do tempo de operação de um reator, sendo assim, a análise das soluções possíveis na forma de funções racionais será limitada àquelas com  $m = 2$  e  $n = 2$ , uma vez que este é o menor grau que atende ao critério da paridade. Não obstante, o grau dos polinômios não identifica a sua paridade, uma vez dada a existência de termos cruzados na formulação da aproximante de Padé; por exemplo, a multiplicação de um termo linear com quadrático, resultando em um grau ímpar. Torna-se necessário então ignorar os termos lineares e termos com grau total ímpar. Parte-se da forma geral (4.1.4) do polinômio (com todos os termos cruzados referentes às coordenadas  $x, y$  e  $z$ ) para obter-se a forma reduzida de paridade par (4.1.5).

$$P(x, y, z) = a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + \dots + a_{102}xz^2 + \dots + a_{220}x^2y^2 + a_{222}x^2y^2z^2 \quad (4.1.4)$$

$$P(x, y, z) = a_{000} + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{202}x^2z^2 + a_{220}x^2y^2 + a_{022}y^2z^2 + a_{222}x^2y^2z^2 \quad (4.1.5)$$

Onde os índices em  $a_{ijk}$  denotam, no termo, o grau associado às coordenadas  $x, y, z$  respectivamente. Poder-se-ia considerar o termo independente  $a_{000} = 1$  caso se desejasse, já que seu papel se refere somente à escala da solução, como demonstrado a seguir.

Sendo  $R(r) = P(r)/Q(r)$ , pode-se escrever  $Q(r)R(r) = P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_m r^m$ . Dividindo ambos lados da igualdade por  $a_0$  obtém-se  $Q(r)R(r)/a_0 = 1 + (a_1/a_0)r + (a_2/a_0)r^2 + \dots + (a_m/a_0)r^m$ . Denominando-se  $c_i = (a_i/a_0)$  pode-se reescrever a equação anterior como  $(1/a_0)R(r) = (1 + c_1r + c_2r^2 + \dots + c_m r^m)/Q(r)$  Onde  $a_0$  é agora explicitado como um fator de escala que divide a solução.

Simplifica-se ainda mais a forma anterior em (4.1.5) a partir da consideração de simetria em torno do eixo  $z$ . Esta suposição traduz-se para coordenadas cartesianas de modo a permitir a permutabilidade das coordenadas  $x$  e  $y$ , reduzindo a quantidade de parâmetros independentes da solução. Assim, tem-se que  $a_{200} = a_{020}$  e  $a_{202} = a_{022}$ . A eq. (4.1.5) reduz-se à forma (4.1.6).

$$P(x, y, z) = a_{000} + a_{200}(x^2 + y^2) + a_{002}z^2 + a_{202}(x^2z^2 + y^2z^2) + a_{220}x^2y^2 + a_{222}x^2y^2z^2 \quad (4.1.6)$$

O mesmo tratamento é realizado de forma idêntica para o denominador  $Q(x, y, z)$  da função racional em (3.3.1) com  $m = n = 2$ . Estas considerações diminuem o número total de coeficientes para somente 11, reduzindo drasticamente a dimensionalidade do problema de otimização.

## 4.2 Condições de Contorno

Todo modelo matemático que almeje representar fidedignamente uma situação física deve incorporar em sua formulação as condições de contorno presentes na situação física. Torna-se necessário, por conta da continuidade geométrica, que a derivada da função  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , calculada para qualquer ponto em um plano descrito por dois eixos de coordenadas, seja igual à zero em relação à coordenada normal a este plano. Esta condição é descrita pelo conjunto de equações (4.2.1) e é satisfeita pela forma quadrática dos termos de  $P$  e  $Q$  na estrutura da solução proposta.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.2.1)$$

O fluxo de nêutrons nas extremidades de uma célula de combustível de um reator nuclear real é diferente de zero devido à ocorrência de escapamento de nêutrons através das paredes da célula. Porém, por questão de praticidade, adota-se que o fluxo nas fronteiras é zero pois o domínio de cálculo é arbitrário e não influencia na validade do método de nenhuma forma. Poder-se-ia estender o domínio de cálculo de  $L_x$  para  $L_x + \partial x$  e realizar-se uma extrapolação linear para se levar em conta um fluxo pequeno (porém diferente de zero) nas fronteiras, mas isto seria uma distração dos objetivos deste trabalho, uma vez que o método é aqui mais importante que a modelagem física. Desse modo, é possível obter-se o conjunto de coeficientes  $\{a_m\}$  do numerador  $P$  diretamente, uma vez que a condição de fluxo zero na fronteira força a aparição de raízes conhecidas no polinômio, permitindo a fatorização do mesmo na forma abaixo (4.2.2).

$$P(x, y, z) = (x^2 - L_x^2)(y^2 - L_y^2)(z^2 - L_z^2) \quad (4.2.2)$$

Comparando-se os coeficientes resultantes da expansão dos termos da equação acima com o polinômio  $P$  da equação (4.1.6), são obtidas, diretamente, as equações abaixo:

$$a_{000} = L_x^2 L_y^2 L_z^2 \quad (4.2.3)$$

$$a_{200} = a_{020} = -L_x^2 L_z^2 = -L_y^2 L_z^2 \quad (4.2.4)$$

$$a_{002} = -L_x^2 L_y^2 \quad (4.2.5)$$

$$a_{220} = L_z^2 \quad (4.2.6)$$

$$a_{202} = a_{022} = L_x^2 = L_y^2 \quad (4.2.7)$$

$$a_{222} = -1 \quad (4.2.8)$$

Sendo assim, é apresentada na equação (4.2.9) a forma final da proposta de solução aproximada para a equação de transporte difusivo em função da geometria e do parâmetro de escala  $a_{000}$ , utilizando como base a estrutura da aproximante de Padé.

$$\varphi(x, y, z) = \frac{a_{000} - L_x^2 L_z^2 (x^2 + y^2) - L_x^2 L_y^2 (z^2) + L_z^2 (x^2 y^2) + L_x^2 (x^2 z^2 + y^2 z^2) - (x^2 y^2 y^2)}{1 - b_{200} (x^2 + y^2) - b_{002} (z^2) + b_{220} (x^2 y^2) + b_{202} (x^2 z^2 + y^2 z^2) - b_{222} (x^2 y^2 y^2)} \quad (4.2.9)$$

### 4.3 Pré-Condicionamento da Solução

Para que seja possível realizar uma decisão informada na definição dos valores numéricos iniciais dos coeficientes da solução proposta, deve-se ter uma intuição prévia a respeito das soluções verdadeiras da equação a qual propõe-se resolver. A ordem de grandeza dos coeficientes, principalmente, é de extrema importância na análise da solução, uma vez que as funções racionais podem gerar assíntotas e assumir outros comportamentos geométricos inadequados em função dos valores numéricos fornecidos. Desta forma, torna-se útil analisar uma solução referência (4.3.1) (que consiste no termo dominante de uma solução exata, segundo Oliveira, 2017) da equação de Helmholtz estacionária em três dimensões para obter-se uma noção da ordem de grandeza dos coeficientes. Vale ressaltar que a equação de Helmholtz é linear, ou seja, uma solução da equação multiplicada por uma constante também é uma solução. Desta forma, é impossível encontrar uma solução que satisfaça um referencial absoluto, sendo sempre necessário que um fator de escala ( $a_{000}$ ) seja fornecido para que a solução se adeque ao caso de interesse.

$$\varphi(x, y, z) = a_{000} \cos\left(\frac{\pi}{2L_x} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2L_y} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2L_z} z\right) \quad (4.3.1)$$

De modo a reduzir o número de coeficientes independentes na estrutura de  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , inicia-se a análise em cima do eixo  $x$ , tomando como primeiro passo  $\varphi = \varphi(x, 0, 0)$ . Desta forma, os termos que multiplicam as coordenadas  $y$  e  $z$  dentro da estrutura da solução (eq. 4.2.9) são zerados, tornando a obtenção do coeficiente  $b_{200}$  um processo direto, dependendo apenas da realização de uma estimativa do comportamento da solução em algum ponto sobre o eixo  $x$ . Para realizar tal estimativa, considera-se a equação (4.3.1) para a construção da relação (4.3.2). Substitui-se agora a função  $\varphi$  no lado esquerdo da igualdade pela função (4.2.9) calculada em  $x = 2L_x/3, y = z = 0$ . Este passo permite obter-se diretamente  $b_{200}$  como demonstrado em (4.3.3), uma vez que os parâmetros  $\{a_{ijk}\}$  são conhecidos e o comprimento  $L_x$  é um dado da geometria do problema.

$$\varphi\left(\frac{2L_x}{3}, 0, 0\right) = \frac{1}{2} \varphi(0, 0, 0) \quad (4.3.2)$$

$$\frac{1}{2}a_{000} = \frac{a_{000} + a_{200} \left(\frac{2L_x}{3}\right)^2}{1 + b_{200} \left(\frac{2L_x}{3}\right)^2} \quad (4.3.3)$$

Repete-se a estratégia empregando a mesma condição para  $\varphi = \varphi(0,0,z)$ , obtendo-se o coeficiente  $b_{002}$ . Uma vez que o coeficiente que multiplica a coordenada  $y$  também é  $b_{200}$  (devido às questões de simetria descritas anteriormente, verificado na eq. 4.1.6), torna-se trivial a análise particular em  $\varphi = \varphi(0,y,0)$ . Após, analisa-se o terceiro caso,  $\varphi = \varphi(x,0,z)$ , para obter-se o coeficiente  $b_{202}$  como descrito nas igualdades (4.3.4) e (4.3.5) abaixo.

$$\varphi\left(\frac{2L_x}{3}, 0, \frac{2L_z}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varphi(0,0,0) \quad (4.3.4)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 a_{000} = \frac{a_{000} + a_{200} \left(\frac{2L_x}{3}\right)^2 + a_{002} \left(\frac{2L_z}{3}\right)^2 + a_{202} \left(\frac{2L_x}{3}\right)^2 \left(\frac{2L_z}{3}\right)^2}{1 + b_{200} \left(\frac{2L_x}{3}\right)^2 + b_{002} \left(\frac{2L_z}{3}\right)^2 + b_{202} \left(\frac{2L_x}{3}\right)^2 \left(\frac{2L_z}{3}\right)^2} \quad (4.3.5)$$

O coeficiente  $b_{220}$  é obtido de forma idêntica, analisando-se em  $\varphi = \varphi(x,y,0)$ , e após termos quatro dos cinco coeficientes desconhecidos, podemos então equacionar relações similares para o caso  $\varphi = \varphi(x,y,z)$  e obter o último coeficiente  $b_{222}$ .

Os valores obtidos nesta etapa são muito úteis pois guiam os coeficientes da função racional na direção correta em termos de suas ordens de grandeza e sinal. Os valores numéricos obtidos, assim como os gráficos respectivos a estes resultados, serão discutidos no capítulo 5.

#### 4.4 Refino dos Coeficientes

A metodologia descrita na seção anterior fornece, de maneira informada, valores iniciais dos coeficientes para que seja possível começar a análise da solução. Agora é necessário realizar a análise separando o problema tridimensional em domínios com menos dimensões para que seja possível visualizar a contribuição de cada coeficiente de maneira individual com respeito às curvas geradas.

Como pode ser visualizado na equação (4.3.3), a solução em  $\varphi = \varphi(x,0,0)$  depende somente de um coeficiente, sendo a mesma afirmação válida para o caso  $\varphi = \varphi(0,0,z)$ . Deste modo, o comportamento da curva aproximada nestes casos pode ser analisado visualmente sob variação individual dos parâmetros plotando-se gráficos  $\varphi = \varphi(x)$  e  $\varphi = \varphi(z)$ . Para o caso de  $b_{200}$  e  $b_{002}$ , a estimativa inicial já fornece valores que representam a curva com exatidão, respectivamente, sobre o eixo  $x$  e  $z$ , como será mostrado nas figuras do capítulo seguinte. Sendo assim, os parâmetros  $b_{200}$  e  $b_{002}$  serão fixados nas análises consequentes.

O próximo subdomínio de análise é descrito por  $\varphi = \varphi(x,y,0)$ . Substituir o valor de  $z$  na equação (4.2.9) por zero resulta em uma função de  $b_{200}$  e  $b_{220}$  apenas. O parâmetro  $b_{200}$  foi fixado na etapa anterior, de modo que a curva pode ser ajustada em função apenas de  $b_{220}$ . O processo é repetido para  $\varphi = \varphi(x,0,z)$ , obtendo-se um ajuste no valor do coeficiente  $b_{202}$ . Então, com os coeficientes  $b_{200}$ ,  $b_{002}$ ,  $b_{220}$  e  $b_{202}$  fixos, realiza-se um ajuste do coeficiente  $b_{222}$  no domínio completo  $x, y, z$ . Para gerar o gráfico necessário para o refino do coeficiente  $b_{222}$ , utilizou-se uma face descrita no plano  $xy$  pela reta  $x = y$ .

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Serão expostos neste capítulo os gráficos obtidos, primeiramente, com a estimativa inicial dos coeficientes e, posteriormente, com os valores ajustados através de aproximação visual. Após, será comentada a questão dos erros de aproximação obtidos com a proposta de solução.

Conforme descrito na seção 4.4, para  $\varphi(x, 0, 0)$  e  $\varphi(0, 0, z)$ , os valores iniciais dos coeficientes obtidos igualando a solução aproximada à solução de referência em um ponto fornecem já resultados bastante satisfatórios. Esta afirmação evidencia-se nas figuras 5.1 e 5.2 abaixo, onde ambas as curvas de referência e aproximadas são plotadas de maneira sobreposta.

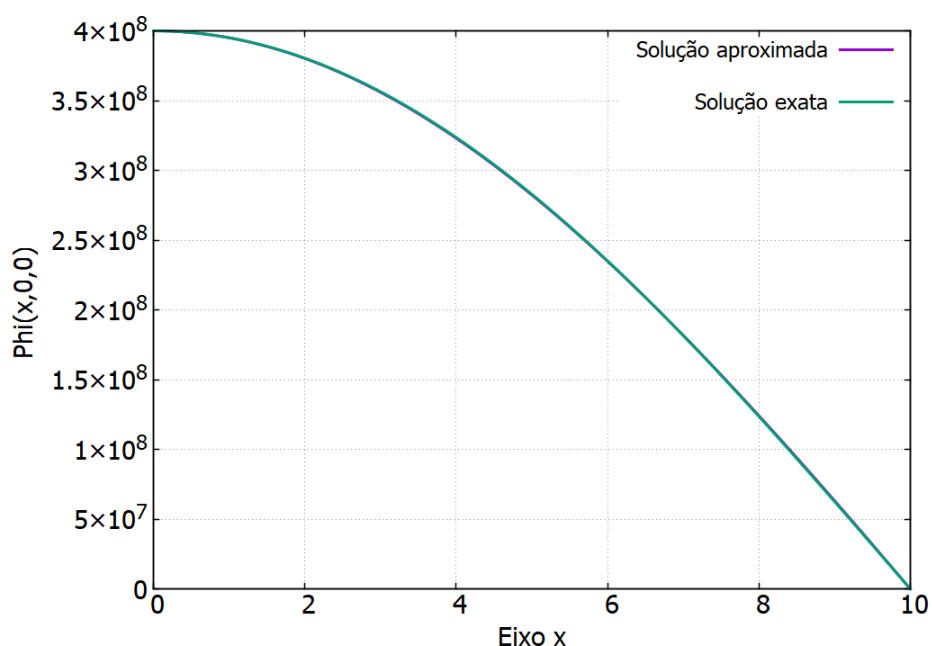


Figura 5.1 – Variação do fluxo escalar sobre o eixo  $x$  (em  $cm$ ). Sobreposição das soluções aproximada e exata.  $b_{200} = 0.0025$ .  $a_{000} = L_x^2 L_y^2 L_z^2$ .

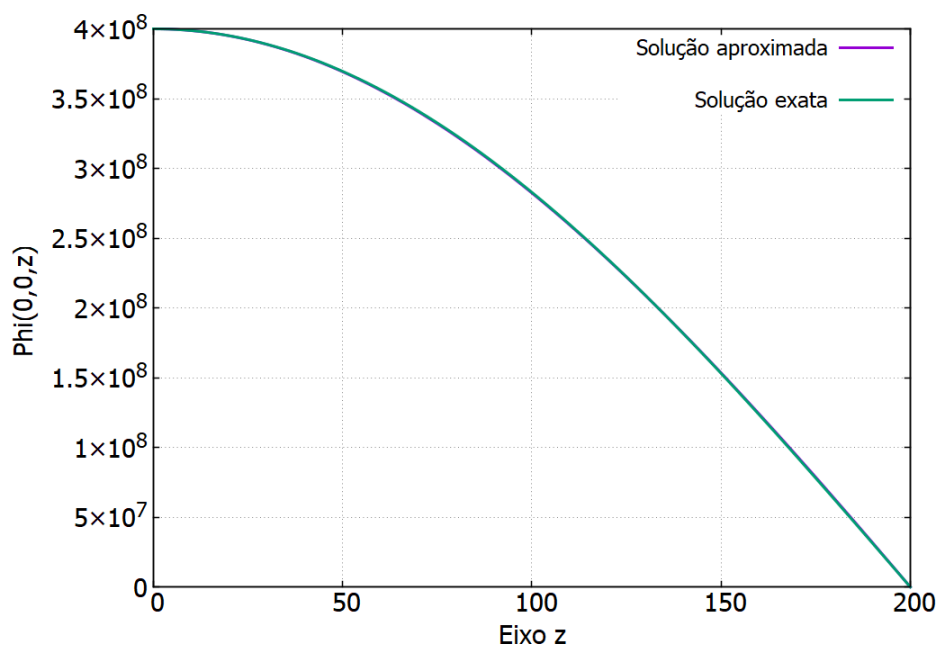


Figura 5.2 – Variação do fluxo escalar sobre o eixo  $z$  (em  $cm$ ). Sobreposição das soluções aproximada e exata.  $b_{002} = 6,25e - 6$ .  $a_{000} = L_x^2 L_y^2 L_z^2$ .

A figura 5.3 mostra, similarmente, uma comparação da solução aproximada com a solução referência, agora no plano  $xy$  com  $z = 0$ . Após a realização do ajuste do coeficiente  $b_{220}$ , obteve-se o resultado da figura 5.4. De modo semelhante, os resultados utilizando valores iniciais e ajustados no plano  $xz$  com  $y = 0$  são expostos nas figuras 5.5 e 5.6, respectivamente.

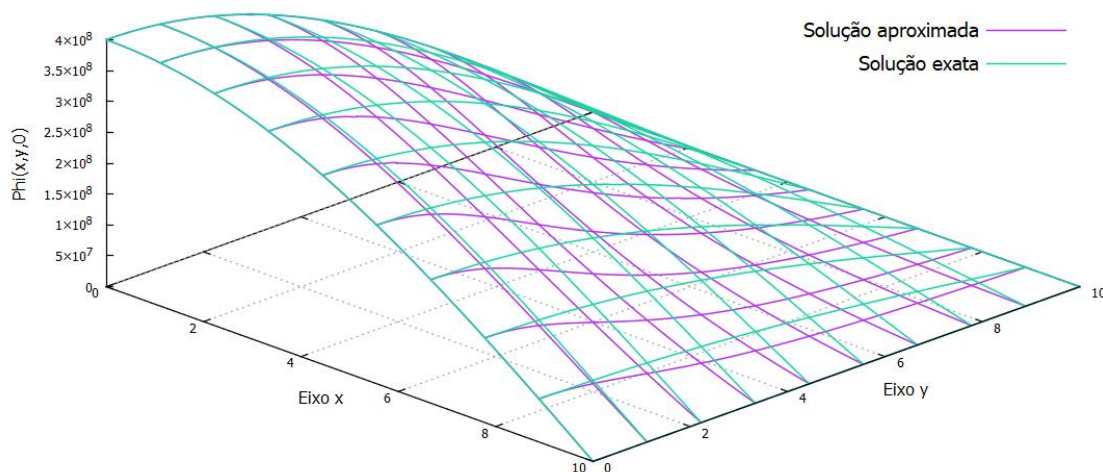


Figura 5.3 - Variação do fluxo escalar no espaço  $(x, y, 0)$ . Eixos  $x$  e  $y$  em cm. Sobreposição das soluções aproximada e exata.  $b_{002} = 6,25e - 6$ .  $b_{200} = 0.0025$ .  $b_{220} = 1,633e - 3$ .  $a_{000} = L_x^2 L_y^2 L_z^2$ .

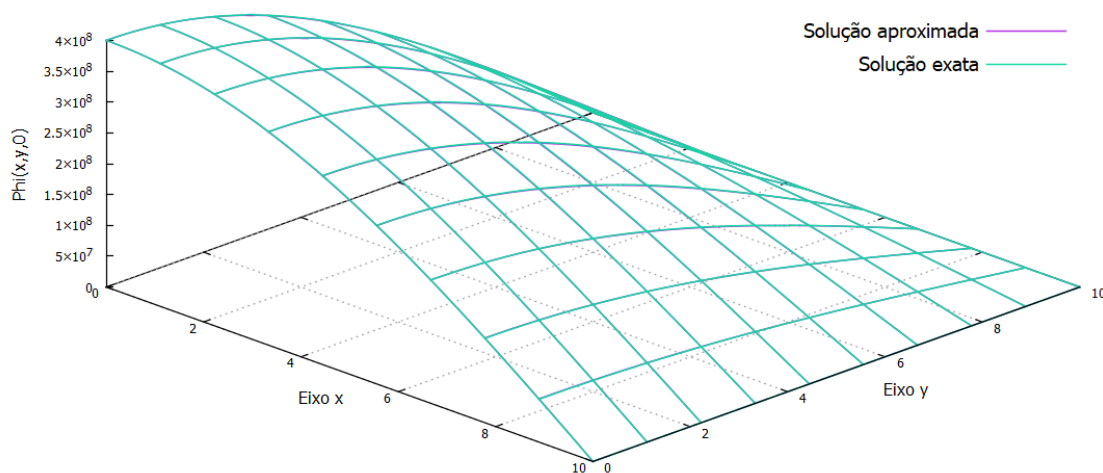


Figura 5.4 - Variação do fluxo escalar no espaço  $(x, y, 0)$ . Eixos  $x$  e  $y$  em cm. Sobreposição das soluções aproximada e exata.  $b_{002} = 6,25e - 6$ .  $b_{200} = 0.0025$ .  $b_{220} = 1e - 5$ .  $a_{000} = L_x^2 L_y^2 L_z^2$ .



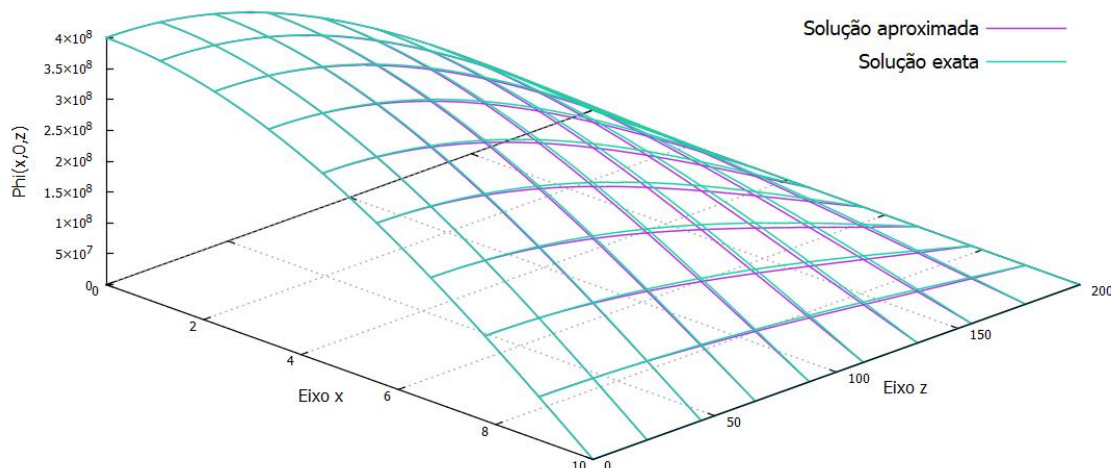


Figura 5.5 - Variação do fluxo escalar no plano  $(x, 0, z)$ . Eixos  $x$  e  $z$  em cm. Sobreposição das soluções aproximada e exata.  $b_{002} = 6,25e - 6$ .  $b_{200} = 0.0025$ .  $b_{202} = 1,56e - 7$ .  $a_{000} = L_x^2 L_y^2 L_z^2$ .

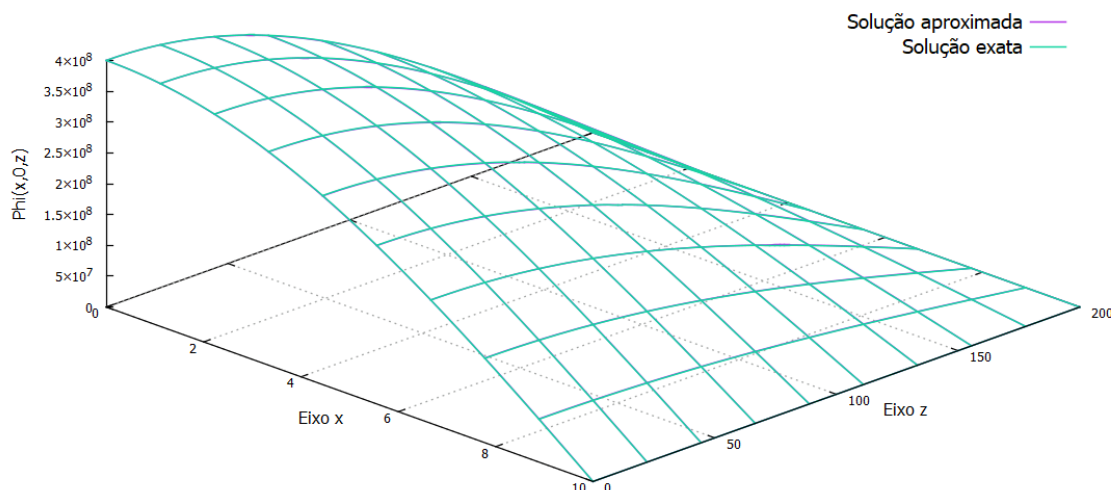


Figura 5.6 - Variação do fluxo escalar no plano  $(x, 0, z)$ . Eixos  $x$  e  $z$  em cm. Sobreposição das soluções aproximada e exata.  $b_{002} = 6,25e - 6$ .  $b_{200} = 2.5e - 3$ .  $b_{202} = 1e - 8$ .  $a_{000} = L_x^2 L_y^2 L_z^2$ .

Os resultados obtidos no domínio  $(x, y, z)$  positivo são mostrados na figura 5.7 e 5.8, onde são demonstrados os erros relativos da solução aproximada com relação a solução exata para os valores de coeficientes iniciais e ajustados, respectivamente. Calculou-se o erro subtraindo o valor de  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  aproximado, ponto a ponto, pelo valor exato, obtido utilizando a equação (4.3.1), e então normalizando a diferença pelo valor exato. Para obter uma estimativa do erro máximo no domínio da solução, discretizou-se o volume utilizando 34 pontos em  $x$  e  $y$ , e 5 pontos

na altura  $z$ , totalizando 5780 pontos de cálculo do erro. Obteve-se então, em um destes pontos, um erro máximo de 4,28 por cento.

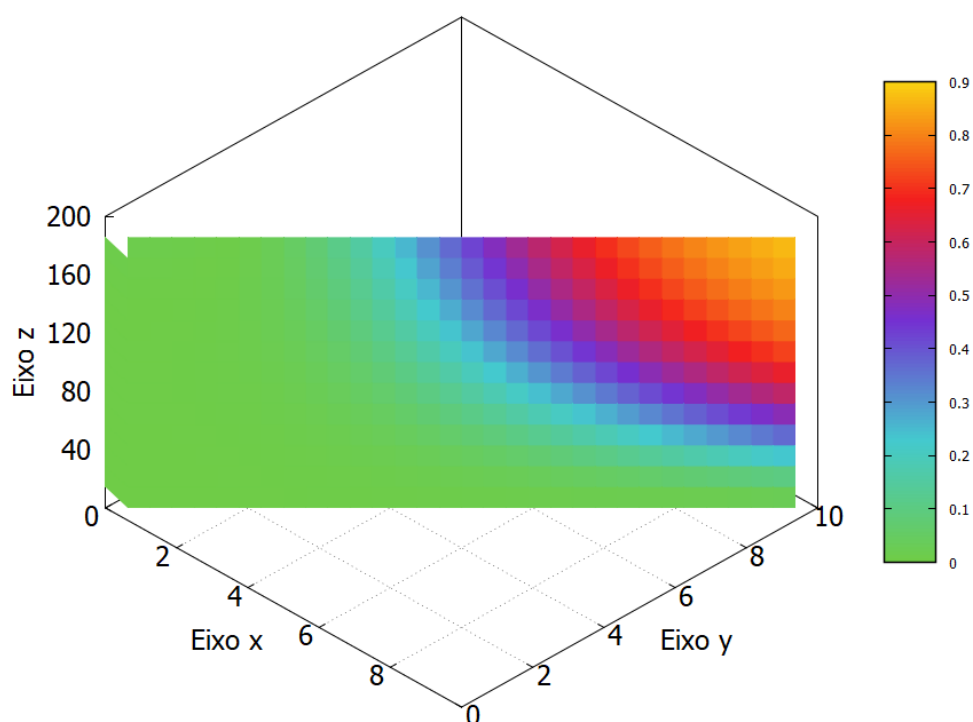


Figura 5.7 – Erro relativo da solução em um plano com  $x = y$  para  $b_{222} = 4.5e - 8$ . Erro relativo médio = 0.216. Eixos em cm.

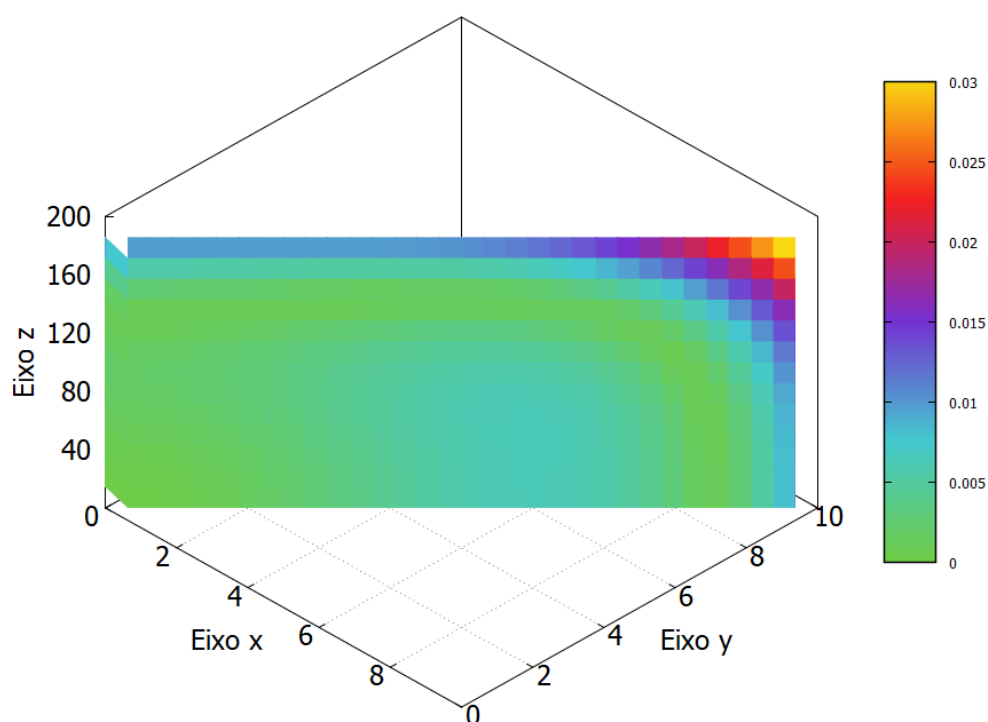


Figura 5.8 – Erro relativo da solução em um plano com  $x = y$  para  $b_{222} = 1e - 10$ . Erro relativo médio = 0.00523. Eixos em cm.

## 6 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos mostraram-se satisfatórios, de modo que a aproximação por função racional na forma da aproximante de Padé com grau  $m = n = 2$  conseguiu, satisfatoriamente, representar o comportamento da equação de transporte difusivo. Um erro médio na ordem de 1 por cento foi alcançado, mesmo utilizando os valores mínimos de  $\{m, n\}$  necessários para representar a solução. É argumentável que, utilizando uma aproximante de Padé com grau maior, seja possível obter resultados ainda melhores.

É importante ressaltar, novamente, que não é o objetivo deste trabalho obter, de forma automática, os melhores coeficientes possíveis para uma função racional com determinada combinação  $\{m, n\}$  de expoentes, mas sim demonstrar a capacidade e explicitar o potencial desta abordagem para resolver equações de transportes de modelos mais complexos começando por um modelo simplificado. Deste modo, a metodologia adotada ainda não é robusta o suficiente para ser considerada uma abordagem geral, abordagem essa, que, quando desenvolvida, conseguirá estimar os coeficientes com precisão, mesmo para uma estimativa inicial menos informada a respeito da solução exata da equação de interesse. Com este avanço, será possível partir para modelos de complexidade mais elevada, com número maior de variáveis independentes. Desta maneira, também cresce o número de coeficientes necessários para descrever a solução, uma vez que um modelo mais complexo captura comportamentos mais sinuosos, torna-se necessária uma função racional de maior grau para modelar corretamente as soluções.

Recomenda-se, como próximo passo para este trabalho, a implementação de um algoritmo do tipo Monte Carlo para realizar o refinamento dos coeficientes. Outras implementações, como algoritmos de otimização por métodos matriciais, também podem ser realizadas visando automatizar o processo e melhorar os resultados numericamente.

O método de utilização da aproximante de Padé para aproximar soluções de equações diferenciais parciais de transporte, aqui desenvolvido, mostrou-se uma abordagem de sucesso. Sendo que a solução analítica da equação de Boltzmann permanece uma incógnita, é esperado que abordagens como esta (e também de outros tipos), possam, futuramente, não só fornecer ferramentas práticas de resolução das equações de transporte para a física e para a engenharia, mas também ajudar a elucidar a questão maior de interesse relativa às soluções da equação de Boltzmann.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barcellos, L. F.; **“On a Continuous Energy Monte Carlo Simulator for Neutron Interactions in Reactor Core Material Considering Up-Scattering Effects in the Thermal Energy Region”**, UFRGS, Porto Alegre, 2016.

Bird, R. B., Stewart, W. E.; **“Transport Phenomena”**, second edition, John Willey & Sons, 2001.

De Camargo, D. Q., Bodmann, B. E. J. et al.; **“A Stochastic Model for Neutrons Simulation Considering the Spectrum and Nuclear Properties with Continuous Dependence of Energy”**, Progress in Nuclear Energy (New series), v. 69, p. 59-63, 2013.

Duderstadt, J. J., Martin, W. R.; **“Transport Theory”**, University of Michigan, 1979.

Espinosa, C. E.; **“Modelagem e Simulação dos Venenos no Combustível Nuclear em Cenários com Escala de Tempo de Longa Duração”**, UFRGS, Porto Alegre, 2015.

Incropera, F. P. et al.; **“Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa”**, sétima edição, Ltc, 2014.

Kallrath, J.; **“On Rational Function Techniques and Padé Approximants”**, Germany, 2002.

Nagaya, Y., Kobayashi, K.; **“Solution of 1-D Multi-Group Time-Dependent Diffusion Equations Using the Coupled Reactors Theory”**, Annals of Nuclear Energy vol 22, No. 7, pp. 421-440, 1995.

Oliveira, F. R.; **“Solução Analítica da Equação de Multigrupo de Cinética de Nêutrons em Geometria Cartesiana e Cilíndrica Unidimensionais”**, UFRGS, Porto Alegre, 2013.

Oliveira, F.R.; **“Solução da Equação de Cinética de Difusão de Nêutrons em Geometria Cilíndrica Tridimensional”**, UFRGS, Porto Alegre, 2017.

Press, W. H.; **“Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing”**, second edition, Cambridge University Press, pp 194-197, 1992.

Reuss, P.; **“Neutron Physics”**, EDP Sciences, 2008.

Rodriguez, B., Vilhena, M. T. M. B., Bodmann, B. E. J.; **“An Overview of The Boltzmann Transport Equation Solution for Neutrons, Photons and Electrons in Cartesian Geometry.”**, Progress in Nuclear Energy (New series), v. 53, p. 1119-1125, 2011.

Sekimoto, H.; **“Nuclear Reactor Theory”**, Tokyo Institute of Technology, 2007.

Stacey, W. M.; **“Nuclear Reactor Physics”**, second edition, Wiley, 2007.

Wuytack, L. (Ed.); **“Padé Approximation and its Applications”**, Springer, 1979.