

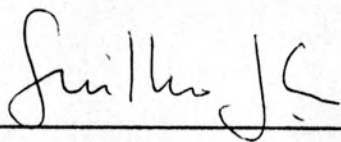
ANÁLISE DE PROBLEMAS DE FRATURA EM MATERIAIS VISCOELÁSTICOS
VIA ELEMENTOS FINITOS

JOÃO RICARDO MASUERO

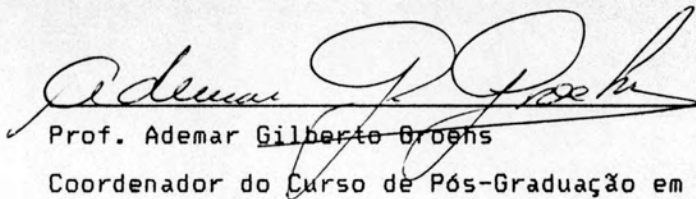
DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
GRANDE DO SUL, COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre
julho, 1992

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Guillermo Juan Creus
Orientador



Prof. Ademar Gilberto Grossi
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Guillermo Juan Creus (Orientador)
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Armando Miguel Awruch
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Paulo José Melaragno Monteiro
PhD pela Universidade da Califórnia
- Prof. Telmo Roberto Strohaecker
D.Sc. pela COPPE/UFRJ

AGRADECIMENTOS

Alguém já disse que estas são as únicas páginas da dissertação na qual podemos expressar nossos sentimentos em relação às pessoas e instituições que direta ou indiretamente contribuíram para a realização da mesma, com total liberdade de estilo, forma e conteúdo, sem a preocupação de possíveis críticas ou modificações, pois estas são páginas pessoais, que podem e devem refletir a personalidade de quem as escreve.

Dois são os tipos básicos de agradecimentos que quero aqui expressar. O primeiro é mais formal e menos pessoal, pois se dirige às instituições que forneceram os subsídios técnicos e financeiros para que esta dissertação chegasse a um bom termo. Neste sentido, gostaria de agradecer ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, na figura de seus professores e funcionários, por propiciar o conhecimento técnico e o ambiente material e cultural para que eu pudesse me aperfeiçoar; ao Conselho Nacional de Pesquisa, CNPq, pelo suporte financeiro ao longo de dois anos e meio e ao Centro Tecnológico da Aeronáutica, CTA, pela complementação de bolsa.

O segundo tipo de agradecimento, muito mais pessoal e vivo, refere-se às pessoas que de algum modo contribuíram para esta dissertação. Em primeiro lugar, ao Prof. Guillermo Juan Creus, que, mais do que orientador, soube fazer-se amigo, colega e companheiro, dando-me sempre incentivo e estímulo e, literalmente, "arregaçando as mangas" comigo nos tópicos mais difíceis do trabalho. Depois, aos colegas e amigos do curso, em especial Carla Saraiva, pelas inúmeras colaborações em trabalhos conjuntos e na discussão de tópicos de interesse comum; Paulo Jorge, em cujo trabalho e alegria me baseei para iniciar de forma mais confiante a dissertação; Luciano Scalabrin, Inácio Morsch e Fábio Teixeira, cuja convivência diária e partilha no interesse "quase fanático" pela computação aplicada à engenharia estrutural propiciou um saudável e estimulante clima de aperfeiçoamento mútuo. A minha esposa Angela, minha profunda gratidão por sua postura compreensiva e incentivadora, sabendo conciliar os primeiros meses de nosso casamento com dois "ossos duros de roer" (as nossas dissertações de

mestrado). Aos meus pais e irmão, por seu apoio e incentivo. Ao pessoal da secretaria e da biblioteca, cujo auxílio foi inestimável. Por fim, minha gratidão aos meus amigos que, sem nenhum conhecimento de engenharia, semanalmente contribuíram para que eu vislumbrasse uma sociedade mais humana e fraterna no meio dos meus temas de pesquisa, por vezes tão estéreis e impessoais.

Uma última observação gostaria de deixar registrada nestas páginas. Contribuiu para esta dissertação um projeto de pesquisa sobre o comportamento mecânico de propelentes, em convênio com o CTA, para o programa espacial brasileiro, com vistas à construção de um lançador de satélites nacional. A ciência e o conhecimento proporciona os meios, a política determina os fins. Que esta e todas as pesquisas sejam utilizadas de maneira construtiva, visando a valorização das condições de vida e a dignidade de cada ser humano, e não como instrumento de morte e destruição do homem pelo próprio homem.

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas minúsculas

a	Comprimento da trinca.
\dot{a}	Velocidade de crescimento/propagação da trinca.
\vec{b}	Vetor de cargas de volume.
d	Variável de dano.
$d(t, \tau)$	Derivada da função de fluência.
$d^o(t, \tau)$	Derivada da função de fluência para a parte volumétrica.
$d^s(t, \tau)$	Derivada da função de fluência para a parte desviadora.
e^o	Deformação específica volumétrica.
e^s_{ij}	Tensor de deformações específicas desviadoras.
$h_{x,y,z}$	Fluxos de calor por unidade de área nas direções x, y e z .
h^b	Calor gerado ou consumido por unidade de volume.
h^s	Fluxo de calor superficial.
p	Variável de estado para a pseudo energia potencial de deformação viscoelástica.
p^o	Variável de estado para a pseudo energia potencial de deformação para a parte volumétrica.
p^s	Variável de estado para a pseudo energia potencial de deformação para a parte desviadora.
q^o	Variável de estado para deformações volumétricas.
q^s_{ij}	Variáveis de estado para deformações desviadoras.
$r(t)$	parâmetro de dano.
s_{ij}	Tensor de tensões desviadoras.
t	Tempo.
t_i	Tempo de iniciação do crescimento da trinca.
\vec{t}	Vetor de cargas de superfície.
\vec{u}	Vetor de deslocamentos.
\vec{u}_i	Vetor de deslocamentos nodais.
v_2	Deslocamento da ponta da trinca normal ao seu eixo.

Letras romanas maiúsculas

\tilde{B}	Matriz de derivadas das funções de forma.
C	Conductibilidade térmica.
$C_{x,y,z}$	Conductibilidade térmica nas direções x,y e z.
\tilde{C}	Matriz de conductibilidade térmica.
C(t)	Função de fluência para estado plano de deformações.
D(t, τ)	Função de fluência.
E_{ijkl}	Tensor elástico instantâneo.
E(t, τ)	Função de relaxação.
\tilde{E}	Matriz elástica.
G	Taxa de liberação de energia de deformação.
G_o	Módulo de elasticidade transversal instantâneo.
$G_v(t)$	Taxa de liberação da pseudo-energia de deformação viscoelástica.
H_i	Fluxos de calor concentrados/nodais.
H(x)	Função salto unitário.
\tilde{K}	Matriz de rigidez.
\tilde{K}'	Matriz de rigidez para a parte de corte.
\tilde{K}''	Matriz de rigidez para a parte volumétrica.
K_I	Fator de intensidade de tensões para o modo I de fratura.
K_o	Módulo de compressibilidade volumétrica instantâneo.
\tilde{N}	Vetor de funções de forma.
\tilde{p}^b	Vetor de cargas de volume.
\tilde{p}^s	Vetor de cargas de superfície.
\tilde{p}^T	Vetor de pseudo-cargas térmicas.
\tilde{p}^V	Vetor de pseudo-cargas viscoelásticas.
T	Temperatura.

Letras gregas

δ	Abertura total da ponta da trinca.
δ_{ij}	Delta de Kroneker.
ϵ	Deformação específica.
ϵ^e	Deformação específica instantânea (elástica).
ϵ^v	Deformação específica diferida (viscoelástica).
ϵ_{ij}	Tensor de deformações específicas.
ϵ_{eq}	Deformação específica equivalente.
$\tilde{\epsilon}$	Vetor de deformações específicas totais.

$\tilde{\epsilon}_T$	Vetor de deformações específicas térmicas.
$\tilde{\epsilon}_V$	Vetor de deformações específicas viscoelásticas.
Φ	Energia complementar de Helmholtz.
Φ_e	Energia potencial elástica de deformação.
Φ_e^o	Energia potencial elástica volumétrica de deformação.
Φ_e^s	Energia potencial elástica desviadora de deformação.
Φ_v	Pseudo-energia potencial viscoelástica de deformação.
Φ_v^o	Pseudo-energia potencial viscoelástica volumétrica de deformação.
Φ_v^s	Pseudo-energia potencial viscoelástica desviadora de deformação.
$\bar{\gamma}$	Energia específica de formação de novas superfícies.
η	Viscosidade.
Ψ	Energia de Helmholtz.
$\Psi(T)$	Função de deslocamento.
ν	Coefficiente de Poisson.
$\vec{\nu}$	Versor normal.
ν_i	Componente do versor normal na direção i .
π	Potencial de dano.
σ	Tensão.
σ_c	Tensão de coesão na zona de processo de fratura.
σ_m	Tensão máxima de coesão na zona de processo de fratura.
σ_y	Tensão de escoamento.
σ_{ij}	Tensor de tensões.
θ	Tempo de retardação.
τ	Tempo.
ω	Comprimento da zona de processo de fratura.
ξ	Tempo corrigido pela temperatura.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

Figura 2.1.	Equilíbrio térmico em um sólido.....	12
Figura 2.2.	Malha e isothermas do exemplo 2.4.1.....	17
Figura 2.3.	Distribuição de temperaturas do exemplo 2.4.1.....	17
Figura 2.4.	Isothermas do exemplo 2.4.2.....	18
Figura 2.5.	Distribuição de temperaturas do exemplo 2.4.2.....	19
Figura 2.6.	Isothermas e malha do exemplo 2.4.3.....	20
Figura 2.7.	Distribuição de temperatura num cilindro vazado.....	20

CAPÍTULO 3

Figura 3.1.	Aplicação das variáveis de estado ao M.E.F.....	29
Figura 3.2.	Integração no tempo da função de deslocamento.....	36
Figura 3.3.	Discretização do cilindro do exemplo 3.7.1.....	38
Figura 3.4.	Malha do exemplo 3.7.2.....	40
Figura 3.5.	Cilindro vazado sob pressão interna - Tensões circunferen_ ciais - $\nu = 0.3$	41
Figura 3.6.	Cilindro vazado sob pressão interna - Tensões circunferen_ ciais - $\nu = 0.499$	42
Figura 3.7.	Cilindro sob variação de temperatura - Tensão radial jun- to à face interna : $\nu = 0.3$	43
Figura 3.8.	Cilindro sob variação de temperatura - Tensão radial jun- to à face interna : $\nu = 0.499$	43
Figura 3.9.	Tensões radiais do exemplo 3.7.4.....	46
Figura 3.10.	Tensões circunferenciais do exemplo 3.7.4.....	47
Figura 3.11.	Tensões circunferenciais ao longo do raio.....	47
Figura 3.12.	Cubo restringido lateralmente - Comparação entre os pro- cessos de integração no tempo.....	49
Figura 3.13.	Cubo restringido lateralmente - Integração reduzida e in- tervalo de tempo auto-adaptável.....	49

CAPÍTULO 4

Figura 4.1. Modelo coesivo de fratura.....	53
Figura 4.2. Modelo de Dugdale / Barenblatt.....	54
Figura 4.3. Deslocamento $\delta(t)$ e $\delta(\xi)$	60
Figura 4.4. Comportamento viscoelástico da fratura.....	69
Figura 4.5. Placa remotamente tensionada.....	69
Figura 4.6. Placa com trinca central.....	75
Figura 4.7. Resultados da placa com trinca central.....	77
Figura 4.8. Influência do modelamento da zona de processo de fratura via Mecânica do Dano Contínuo.....	81
Figura 4.9. Dano em uma placa com trinca central.....	82

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 3

Tabela 3.1.	Integração reduzida : deslocamentos.....	37
Tabela 3.2.	Integração reduzida : tensões circunferenciais.....	38
Tabela 3.3.	Integração reduzida : Tensões radiais.....	38
Tabela 3.4.	Integração reduzida : deslocamentos.....	39
Tabela 3.5.	Integração reduzida : tensões circunferenciais.....	39
Tabela 3.6.	Integração reduzida : Tensões radiais.....	39

RESUMO

A presente dissertação de mestrado tem por objetivo a avaliação numérica do fenômeno de crescimento de trincas em materiais viscoelásticos lineares termoreologicamente simples via Método dos Elementos Finitos para estado plano de tensões e deformações.

Uma análise termo-mecânica associada é feita através da utilização de elementos finitos de mesmo tipo e ordem de interpolação para a condução de calor em estado permanente e para o problema mecânico viscoelástico.

O comportamento viscoelástico é modelado via Método das Variáveis de Estado, com diferentes funções de fluência para as deformações volumétricas e desviadoras. A influência da temperatura sobre as propriedades viscoelásticas do material é considerada através da hipótese de material termoreologicamente simples. Integração reduzida é utilizada para o tratamento de materiais quase incompressíveis.

A avaliação dos parâmetros de crescimento da trinca está baseada em formulação desenvolvida por Schapery e adaptada para a utilização via elementos finitos. A taxa de liberação de energia de deformação para viscoelasticidade linear é obtida via extensão virtual da trinca. Uma avaliação qualitativa do comportamento do material na zona de processo de fratura é postulada com base na Mecânica do Dano Contínuo.

ABSTRACT

The aim of this work is the numerical evaluation of conditions for crack growth for thermo-rheologically simple linear viscoelastic materials using the Finite Elements Method for plane stress and plane strain.

An associated thermo-mechanic analysis is implemented using finite elements with the same type and interpolation degree for the steady state heat conduction and the viscoelastic mechanic problem.

State variables are used to model the viscoelastic behaviour, with different creep compliance functions for volumetric and shear strains and stresses. The influence of temperature over the viscoelastic properties of the material is represented by using the hypothesis of thermo-rheologically simple materials. Reduced integration is used for nearly incompressible materials.

Schapery's formulation is used to evaluate the crack growth initiation parameters, adapted for Finite Elements modeling. The strain energy release rate in viscoelasticity is evaluated by the virtual crack extension method. Continuum Damage Mechanics is qualitatively used for modeling crack tip process zone.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	ii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	iv
LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS.....	x
RESUMO.....	xi
ABSTRACT.....	xii
SUMÁRIO.....	xiii

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. O problema da fratura.....	1
1.2. Histórico do desenvolvimento da Mecânica da Fratura.....	3
1.3. Aplicação da Mecânica da Fratura via métodos numéricos.....	5
1.4. Escopo do trabalho.....	8

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ESTADO PERMANENTE

2.1. Introdução.....	10
2.2. Formulação geral.....	11
2.3. Aplicação a elementos finitos.....	14
2.4. Resultados numéricos.....	15
2.4.1. Placa retangular com 2 bordos à temperatura constante T e os demais a 0°C.....	16
2.4.2. Placa retangular com distribuição senoidal de temperatura em um dos bordos.....	18
2.4.3. Cilindro vazado com temperaturas prescritas nos bordos interno e externo.....	19

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS DE VISCOELASTICIDADE LINEAR VIA VARIÁVEIS DE ESTADO

3.1. Introdução.....	21
3.2. Método das variáveis de estado.....	23
3.3. Aplicação das variáveis de estado no M.E.F.....	27
3.4. Intervalo de tempo auto-adaptável.....	30
3.5. Incompressibilidade.....	32
3.6. Termoviscoelasticidade.....	34
3.7. Resultados numéricos.....	36
3.7.1. Cilindro vazado submetido à pressão interna.....	36
3.7.2. Cilindro vazado viscoelástico submetido à pressão interna.....	40
3.7.3. Cilindro vazado viscoelástico submetido à variação de temperatura.....	42
3.7.4. Cilindro vazado viscoelástico sob pressão interna e variação de temperatura ao longo do raio.....	44
3.7.5. Cubo sob tração restringido lateralmente.....	48

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE FRATURA EM VISCOELASTICIDADE LINEAR

4.1. Introdução.....	51
4.2. Modelo coesivo de fratura.....	52
4.3. Propagação de trincas em materiais viscoelásticos.....	57
4.3.1. Relações viscoelásticas básicas-princípio da correspondência..	58
4.3.2. Critério de fratura.....	60
4.3.3. Crescimento da zona de fratura.....	61
4.3.4. Crescimento da trinca propriamente dita.....	62
4.3.5. Discussão.....	66
4.5. Exemplo.....	69
4.6. Avaliação numérica do critério de fratura.....	71
4.6.1. Desenvolvimento da formulação via M.E.F.....	71
4.6.2. Exemplo de aplicação.....	75
4.6.3. Modelamento da zona de processo de fratura via Mecânica do Dano Contínuo.....	77

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1. Conclusões..... 83

5.2. Sugestões para futuros trabalhos..... 85

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 87

1. INTRODUÇÃO

1.1. O problema da fratura

Até há poucas décadas, a engenharia estrutural não tinha capacidade de prever ou até mesmo compreender o fenômeno de formação e propagação de fissuras. As peças eram projetadas com geometrias que evitassem concentrações de tensões, e periodicamente vistoriadas de modo a reparar ou substituir componentes que apresentassem alguma fissuração.

Se a ausência de colapsos em um maior número podia ser explicada pelo fato dos materiais estruturais clássicos apresentarem alta ductibilidade e resistência ao dano, o mesmo não pode ser esperado dos novos materiais compósitos desenvolvidos nos últimos anos, cuja altíssima resistência e reduzido peso faz com que sejam bem mais sensíveis a presença de fissuras.

A otimização de métodos não destrutivos de análise, tais como o ultra-som, mostraram que estruturas antes consideradas seguras apresentavam um grau de fissuração considerável, sem no entanto levar a uma falha catastrófica.

A necessidade de justificar porque componentes estruturais aceitos como são devido a uma "ignorância técnica ou tecnológica" não levavam necessariamente ao fim da vida útil deste componente fez com que diversos estudos fossem realizados nesta área, em especial após a Segunda Guerra Mundial, levando ao surgimento da Mecânica da Fratura.

Fundamentalmente a Mecânica de Fratura permite relacionar o tamanho máximo e a localização de uma trinca real ou hipotética com a máxima carga que pode ser aplicada em um componente estrutural para que não ocorra propagação instável da trinca; prever a taxa com que uma fissura se aproxima do tamanho crítico por fadiga, por efeitos de fluência lenta ou ambientais; determinar as condições em que a rápida propagação de uma fissura pode ser contida.

Por causa do desenvolvimento da Mecânica da Fratura e sua utilização gradativamente mais usual na engenharia vem a postura atual de

não mais substituir todos os componentes estruturais que apresentem alguma fissura, mas somente aqueles que as tenham próximas de um determinado tamanho crítico. Desta forma, o custo de reparo ou reposição de um determinado componente é quantificado frente a possibilidade de falha do mesmo e de sua tolerância ao dano.

A importância tecnológica e econômica da aplicação de critérios de previsão de crescimento de trincas é imensa. Na área aero-espacial, as severas penalidades na eficiência e viabilidade técnica devido a excesso de peso e sobredimensionamento têm levado à busca da utilização de materiais mais e mais resistentes para um mesmo peso com coeficientes de segurança reduzidos, mas sem perda de confiabilidade e segurança. Em reatores nucleares, vasos de pressão para materiais gasosos altamente inflamáveis e gasodutos, as consequências de uma falha catastrófica é um condicionante presente em todo o projeto. Para vasos de pressão, é comum o teste sob pressão para a averiguação da existência de fissuras antes da entrada em serviço do conjunto ("*test before fail*").

Economicamente, os gastos diretos e indiretos relacionados com fissuração de componentes estruturais são de vulto considerável. Segundo Duga et al. (Kaninen e Popelar, 1985), as perdas diretas e custos associados com acidentes de todos os tipos envolvendo fraturas, além dos gastos em sobredimensionamento devido a não uniformidade da qualidade dos materiais, inspeção, reparo e substituição de componentes danificados são da ordem de 120 bilhões de dólares anuais, somente nos Estados Unidos da América. Segundo estes estudos, aproximadamente 30% do total poderia ser economizado se a tecnologia de controle de fratura atualmente disponível fosse aplicada. Outros 23% poderiam ser salvos com a aplicação do conhecimento que estará sendo desenvolvido ao longo dos próximos anos.

A utilização cada vez mais intensa de materiais poliméricos, não somente como matriz para materiais compósitos estruturais, como também nas mais variadas aplicações do dia a dia, tem levado ao desenvolvimento de numerosas pesquisas sobre o comportamento do fenômeno de fratura nestes materiais. Exemplos de áreas de aplicação dos conhecimentos advindos da mecânica de fratura são os pneus de automóveis, caminhões ou aviões, que não devem sofrer fissuração devido ao desgaste mecânico do travamento ou devido a agentes agressivos do meio; as pinturas, que sob ação de agentes agressivos sofre fissuração e conseqüente descascamento; os selantes que, fissurados, perdem a impermeabilidade; os adesivos de um modo geral; os

materiais estruturais compósitos com vidro, grafite, boro ou carbono; o concreto asfáltico, que devido a fissuração e descolamento perde sua função de pavimentação; propelentes sólidos, cuja fissuração determina uma queima irregular e incontrolada.

A Mecânica da Fratura necessita, para a previsão de ruptura de uma determinada peça ou componente, da modelagem da trinca com um tamanho e posição definidas. Outras abordagens estão em desenvolvimento que prescindem desta modelagem, tais como a análise estatística, baseada nos trabalhos de Weibull, e a Mecânica do Dano Contínuo. Ambas postulam a existência de falhas e microfissuras dispersas ao longo do material.

1.2. Histórico do desenvolvimento da mecânica da fratura

Historicamente, o primeiro estudo sobre mecânica de fratura foi feito por Leonardo da Vinci, no século XV, estudando a variação de resistência de arames de aço de mesmo diâmetro em função de seu comprimento. Vários outros pesquisadores trabalharam no que hoje se denomina *efeito de escala*. Weibull, na primeira metade deste século, demonstrou através de técnicas estatísticas que este fenômeno estava relacionado com a presença de fissuras no material, sejam elas internas ou superficiais, como é o caso do vidro.

A primeira tentativa de modelagem matemática da Mecânica da Fratura foi feita por Inglis, em 1913, analisando o caso de um furo elíptico em uma placa sob tensões uniformes de tração em uma direção. Inglis mostrou que, quando a elipse tem uma de suas cordas tendendo a zero, assumindo o formato de uma trinca, as tensões na ponta da mesma apresentam valor infinito. A conclusão era de que nenhum material poderia suportar qualquer tensão se apresentasse uma trinca ou fissura, o que ia logicamente contra as constatações experimentais.

Um passo importante foi dado com o trabalho pioneiro de Griffith, nos primeiros anos da década de 20, o qual estudou o problema para materiais elásticos lineares frágeis através de considerações energéticas, postulando que uma trinca somente se tornaria instável se a taxa de energia de deformação liberada devido à extensão da trinca excedesse a taxa de aumento de energia superficial associada com a formação de novas superfícies de fratura.

O trabalho de Griffith permaneceu como uma curiosidade restrita aos

meios acadêmicos por mais de 20 anos, até que, durante e após a segunda Guerra Mundial, numerosos casos de colapso catastrófico devido a fratura levaram os pesquisadores a dedicar-se mais intensamente a esta área. São famosos os casos de navios mercantes construídos em chapas de aço soldadas pelos Estados Unidos durante o conflito, denominados *Liberty Ships*, que, dos 5000 construídos, 1000 sofreram problemas relacionados a fratura devido à fragilização de ligas de aço a baixas temperaturas, dos quais 150 graves; 10 navios partiram-se bruscamente ao meio, alguns inclusive ancorados no porto. (Rolfe e Barsom, 1977) (Kanninen e Popelar, 1985). Numerosos casos de fratura devido à fadiga envolvendo aviões comerciais Comet no pós-guerra foram também registrados.

Irwin, nos anos imediatamente após a Segunda Guerra Mundial, e alguns pesquisadores russos, estenderam os conceitos de Griffith, definindo o que denominamos Fator de Intensidade de Tensões ou Taxa de Liberação de Energia de Deformação ("*Strain Energy Release Rate*"), o quais são comparados a um único parâmetro, um valor crítico característico do material, chamado Resistência a Fratura. Para materiais elásticos lineares, os dois parâmetros acima são idênticos. O conceito foi estendido para outros materiais, ressaltando-se os trabalhos de Irwin e Orowan, que sugeriram extensões da expressões de Griffith levando em conta deformações plásticas em uma zona limitada na ponta da trinca (*small scale yielding*), e os de Dugdale e Barenblatt, que modelaram a ponta da trinca com forças coesivas geradas pelo material alterado em suas características ali encontrado.

Rice, em 1968, desenvolveu um método que, através de uma integral de linha, permite a obtenção dos parâmetros de fratura G ou J . Mostrou-se que o método era independente do caminho escolhido, permitindo a avaliação dos parâmetros por um caminho afastado da zona conturbada na ponta da trinca, dispensando uma modelagem precisa desta zona. O método é baseado em considerações energéticas, abrindo caminho para a aplicação da Mecânica de Fratura em materiais elásticos com não linearidade pronunciada e a conseqüente aproximação para problemas de elastoplasticidade.

Diversos pesquisadores postularam teorias que estendem os conceitos acima para materiais viscoelásticos, tais como os trabalhos de Knauss (1973), McCartney (1977), e Schapery (1975).

Schapery apresentou um desenvolvimento teórico de uma trinca em um material viscoelástico linear na qual, na ponta da mesma, existe uma região em que o material esteja alterado, apresentando relações constitutivas

quaisquer. Esta modelagem é análoga à de Barenblatt ou Dugdale, a qual é responsável pela presença de forças coesivas ou de fratura na ponta da trinca. A partir de consideração de tensões finitas nesta região, do trabalho realizado para a ruptura de uma parcela da zona de processo de fratura na ponta da trinca e da abertura da trinca, Schapery desenvolveu equações que permitem quantificar o tempo de início do crescimento da trinca (tempo de iniciação), a velocidade de crescimento da trinca, as condições para que haja crescimento estável ou propagação instável, e o tempo para se atingir a propagação. Posteriormente, Schapery desenvolveu uma formulação para materiais viscoelásticos lineares ou não baseados numa integral J modificada (Schapery, 1984 a e b).

Considerações mais detalhadas sobre Mecânica da Fratura aplicada a materiais viscoelásticos pode ser encontrada em (Kaminskii, 1980) e, mais especificamente para polímeros, em (Knauss, 1973) e (Williams, 1977 e 1987).

1.3. Aplicação da Mecânica de Fratura via métodos numéricos

Visto que os desenvolvimentos teóricos têm aplicação imediata apenas a problemas simples, com geometria, condições de contorno e carregamentos restritos, e que, dentro dos métodos numéricos/computacionais, o Método dos Elementos Finitos foi o que maior desenvolvimento e potencialidade apresentou nas últimas décadas, constituindo-se numa poderosa ferramenta para avaliação aproximada de problemas mecânicos com geometria e condições de contorno arbitrários, com uso largamente difundido, quer no meio acadêmico, quer no meio profissional, é natural que grande esforço tenha sido realizado para utilizá-lo na solução de problemas de fratura.

A primeira dificuldade encontrada foi o modelamento da singularidade de tensões e deformações na ponta da trinca. Os primeiros métodos empregados exigiam um intenso refinamento da malha na ponta da trinca para que elementos comuns conseguissem representar o elevado gradiente de tensões e deformações da região. Exigia-se que o tamanho dos elementos fosse da ordem de um centésimo a um milésimo do tamanho da trinca, gerando problemas de difícil solução computacional por suas exigências em termos de memória disponível e tempo de processamento. Vários pesquisadores tentaram desenvolver elementos que representassem a singularidade da ordem de $r^{-1/2}$ para as deformações na ponta da trinca para materiais elásticos,

tais como Tracey, Cook, Blackburn, Akin (Owen e Fawkes, 1983) e Benzley (1974). O princípio geral dos métodos empregados era tomar funções de interpolação que representassem o campo singular em elementos especiais, fazendo a compatibilidade na interface com elementos comuns. Posteriormente, trabalhos independentes de Henshell e Shaw (1975) e Barsoum (1976) apresentaram um método chamado *quarter points elements*, no qual, a partir de elementos isoparamétricos quadráticos de 8 nós para estado plano, a singularidade era obtida deslocando os nós do meio das faces concorrentes ao nó de ponta de trinca para a posição de um quarto do comprimento de cada face, fazendo com que ao longo das mesmas surgisse a singularidade necessária. Para que esta singularidade ocorresse ao longo de qualquer radial partindo do nó da ponta da trinca, bastava que se fizesse o colapso de toda uma face sobre este nó e posicionasse os nós do meio das faces adjacentes para a posição de um quarto, gerando assim um elemento triangular *quarter point* a partir de um quadrangular. A principal vantagem deste método é a não necessidade da utilização de elementos especiais para a ponta da trinca, podendo ser utilizado qualquer programa já existente com pequenas modificações. Barsoum mostrou sua aplicação para materiais elásticos e perfeitamente plásticos (Barsoum, 1977). O conceito de obtenção da singularidade necessária a partir da modificação da posição dos nós de meio de face foi estendido para elementos isoparamétricos cúbicos (Pu et al, 1978).

Um dos maiores problemas da aplicação do Método dos Elementos Finitos à Mecânica Elástica Linear de Fratura ("*LEFM*") reside na incompatibilidade da natureza finita do método numérico e do campo singular ou infinito de tensões e deformações na ponta da trinca. Em geral, o Método dos Elementos Finitos é formulado em termos do campo de deslocamentos, o que corresponde a uma minimização da energia potencial de deformação, uma solução do tipo limite inferior. Se o campo de tensões fosse utilizado, a minimização corresponderia à energia potencial complementar, uma solução tipo limite superior. Se ambos os campos fossem utilizados, tensões e deslocamentos, o que é conhecido como Formulação Mixta, um resultado entre os dois limites citados e, portanto, mais preciso, é esperado. Trabalhos neste sentido foram desenvolvidos por Rao et al. e Apostol (ver Owen e Fawkes, 1983).

Os métodos de avaliação dos parâmetros de fratura baseavam-se inicialmente no campo de deslocamentos encontrado na região da ponta da

trinca, em função dos quais há expressões analíticas para os fatores de intensidade de tensões. A obtenção do valor dos fatores de intensidade de tensões na ponta da trinca era obtido extrapolando-se os valores de pontos mais afastados, dando origem ao método chamado Extrapolação de Deslocamentos, primeiramente postulado por Chan et al. em 1970. Contudo, este método somente é facilmente aplicável à Mecânica Linear de Fratura (materiais elásticos lineares).

Métodos baseados na avaliação da taxa de liberação da energia de deformação em função do crescimento da trinca foram desenvolvidos nos trabalhos de Parks (1975) e Hellen (1975) para materiais elásticos lineares, e posteriormente estendidos para materiais não lineares (Hellen, 1989). Tais métodos (*Virtual Crack Extension*, *Strain Energy Release Rate*) são facilmente implementados em códigos de elementos finitos, desde que se possa expressar o potencial de energia de deformação para o material em questão. Apresentam a desvantagem de necessitar de duas análises para cada problema, uma com a trinca com seu comprimento original e outra com o comprimento com um pequeno acréscimo, para que se possa avaliar numericamente a derivada da energia de deformação em função do crescimento da trinca.

A integral J, desenvolvida por Rice, mostrou-se grandemente adequada ao Método dos Elementos Finitos, pois os parâmetros necessários à sua avaliação são facilmente obtidos e, devido à independência do caminho de integração, a mesma pode ser avaliada relativamente afastada da ponta da trinca, dispensando uma modelagem rigorosa da singularidade do campo de tensões e deformações naquela região. Como o método está baseado em considerações energéticas, sua extensão para alguns casos não lineares pode ser facilmente obtida.

Diversos outros pesquisadores desenvolveram elementos híbridos nos quais os fatores de intensidade de tensões são tratados como variáveis incógnitas do problema, junto com os deslocamentos. Para maiores detalhes, podem ser consultados (Walsh, 1971) ou (Owen e Fawkes, 1983).

Recentemente, o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno, por Brebbia e outros, abriu um novo campo para a aplicação de métodos numéricos aplicados a problemas de fratura. Problemas de propagação de trincas parecem ser facilmente tratados por este método, em virtude da facilidade de geração das malhas necessárias.

No Brasil, diversos grupos de pesquisa tem se dedicado ao estudo numérico do fenômeno de fratura. Entre os centros de maior importância,

podemos citar a PUC do Rio de Janeiro, com estudos de fissuração distribuída em materiais frágeis e dano contínuo aplicados a concreto; a COPPE/UFRJ, com estudo de propagação e controle de fissuração em estruturas marítimas de exploração de petróleo, utilizando elementos finitos e elementos de contorno; o LNCC, com estudos teórico-numéricos em critérios de avaliação de fraturas; e a UFRGS, com estudos de avaliação de parâmetros de crescimento de fraturas via elementos finitos, e de efeitos dinâmicos e estocásticos na propagação de trincas, via simulação com elementos de treliça espacial.

O presente trabalho se inclui em uma linha de pesquisa de avaliação de parâmetros de fratura em estruturas bidimensionais via elementos finitos, sob a orientação do Prof. Juan Guillermo Creus. O estudo de materiais elásticos e elasto-plásticos foi feito por Paulo Roberto Jorge em dissertação a ser apresentada, e a avaliação da integral J e integral C^* em materiais termo-viscoplásticos está sendo realizada por Luis Cunda.

1.4. Escopo do trabalho

O presente trabalho tem por objetivo a avaliação numérica, via elementos finitos, de problemas de fratura em materiais viscoelásticos lineares cujas características sejam dependentes da temperatura. Serão abordados apenas problemas de estado plano de tensões e deformações, através de elementos isoparamétricos quadráticos de 8 nós, os quais apresentam uma boa precisão para malhas relativamente esparsas e podem facilmente representar singularidades no campo de tensões e deformações na ponta da trinca pela técnica dos *quarter points elements*.

O capítulo 2 apresenta o desenvolvimento, via elementos finitos, de problemas de transmissão de calor em estado permanente, com o objetivo de permitir a obtenção das temperaturas em geometrias quaisquer às quais esteja associado um problema mecânico. A mesma malha e o mesmo tipo de elemento utilizados na análise mecânica são empregados na análise térmica, com vistas à otimização dos resultados e do código computacional resultante.

O capítulo 3 descreve o algoritmo utilizado para a modelagem do comportamento viscoelástico, o Método das Variáveis de Estado. É mostrada a formulação para sua implementação computacional via elementos finitos bem como algoritmos e métodos numéricos para seu emprego com intervalos de tempo auto-adaptáveis e problemas de incompressibilidade. As características

reológicas são alteradas pela temperatura a partir da hipótese de comportamento termo-reologicamente simples.

O capítulo 4 apresenta a formulação desenvolvida por Schapery para problemas de fratura em materiais viscoelásticos lineares, resultando em equações para o tempo de iniciação, tempo de propagação e velocidade de crescimento da trinca. Esta formulação é desenvolvida em termos de variáveis de estado para a Taxa de Energia de Deformação, e sua aplicação via elementos finitos para avaliação numérica do tempo de iniciação da fissura. O parâmetro de fratura é obtido através da análise, ao longo do tempo, de dois problemas idênticos em geometria, condições de contorno e carregamento, mas diferentes no comprimento das trincas, de modo similar ao método de Extensão Virtual da Trinca.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões obtidas com os métodos e algoritmos utilizados, bem como sugestões para futuros desenvolvimentos de trabalhos na mesma linha.

2. FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ESTADO PERMANENTE

2.1. Introdução

As propriedades de materiais com sensível comportamento viscoelástico, em especial polímeros, dependem fortemente da temperatura. Para que, numa análise mecânica via Elementos Finitos, se possa levar em consideração esta dependência, é necessária a caracterização com razoável precisão da distribuição de temperaturas no corpo a ser analisado, em especial o valor das mesmas nos nós ou nos pontos de integração dos elementos que compõem a malha da análise mecânica.

A condução de calor em sistemas bi e tri-dimensionais, onde a temperatura e o fluxo de calor devem ser tratados como funções de duas e três coordenadas, pode ser analisada por métodos analíticos, gráficos ou numéricos. Um completo tratamento das soluções analíticas requer o emprego de séries de Fourier, funções de Bessel, polinômios de Legendre, métodos da transformada de Laplace e teoria das variáveis complexas. A solução de problemas por este caminho torna-se tanto mais trabalhosa e difícil quanto mais complexas forem a geometria e as condições de contorno do problema (Kreith, 1977).

Os métodos gráficos podem ser aplicados com relativa rapidez mesmo a sistemas bidimensionais geometricamente complexos com contornos isotérmicos e isolados, mas sua precisão, além de estar limitada às características intrínsecas do método, depende muito da experiência de quem o está aplicando.

O primeiro método de campo numérico foi o Método das Diferenças Finitas (MDF), o qual é de fácil implementação e bastante eficiente. Ele continua ainda a ser empregado, especialmente na área de fenômenos de transporte.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), também muito eficiente, tem a

vantagem em relação ao primeiro, quando aplicado em problemas térmicos, de facilmente tratar geometrias arbitrárias e contínuos não homogêneos (Huebner, 1975). Essas vantagens são ainda maiores quando se implementa uma análise estrutural - térmica integrada, como a pretendida neste trabalho. A situação ótima é obtida quando os modelos numéricos para a parte térmica e estrutural estão em completa correspondência, pois a eficiência é aumentada e os erros são minimizados.

A utilização do MEF reduz o problema térmico à solução de um sistema de equações lineares cujas incógnitas são as temperaturas nos nós da malha na qual o corpo foi discretizado. A utilização da mesma malha da análise mecânica para a análise térmica, com elementos de mesma ordem de interpolação, fornece os valores do campo de temperaturas precisamente nos pontos necessários à primeira. Computacionalmente, a análise termo-mecânica associada via MEF permite a utilização de um grande número de rotinas comuns, mostrando-se vantajosa do ponto de vista da implementação bem como do tamanho do código resultante.

No estudo a seguir serão feitas as seguintes hipóteses básicas :

- a) O material segue a lei de Fourier de condução de calor.
- b) As partículas do corpo estão em repouso (não há convecção).
- c) Somente será analisado o fenômeno constante ou estacionário, sendo desprezado o fenômeno transiente.
- d) A transmissão de calor pode ser analisada de forma desacoplada em relação às condições de tensão e deformação.
- e) Não há mudança de fase, efeitos de calor latente ou radiação.

Maiores detalhes podem ser encontrados em (Bathe, 1982), (Huebner, 1975), (Zienkiewicz, 1977)

2.2. Formulação geral

Consideremos um meio contínuo no qual esteja ocorrendo transferência de calor. O equilíbrio das quantidades de calor que entram e saem de um dado volume do meio, levando em consideração as hipóteses acima, pode ser visualizado na figura 2.1:

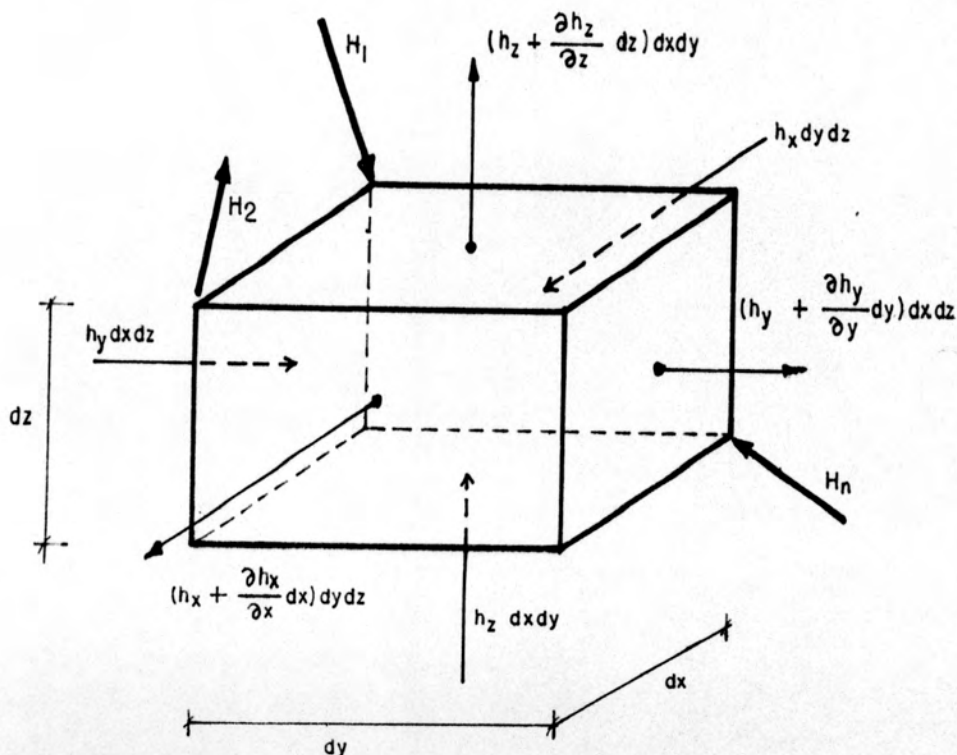


Figura 2.1 - Equilíbrio térmico em um sólido

onde $h_{x,y,z}$ = fluxos de calor por unidade de área.

H_i = fluxos de calor concentrados.

h^B = calor gerado ou consumido dentro do corpo por unidade de volume.

Considerando-se o equilíbrio face a face, convencionando-se como positivo o aumento de calor no corpo:

$$\begin{aligned}
 & (h_x - h_x - \frac{\partial h_x}{\partial x} dx) dy dz + (h_y - h_y - \frac{\partial h_y}{\partial y} dy) dx dz + (h_z - h_z - \frac{\partial h_z}{\partial z} dz) dx dy \\
 & + \sum_{i=1}^n H_i + h^B dx dy dz = 0 \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Resultando:

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = h^B + H_c \quad (2.2)$$

$$\text{Onde } H_c = \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{d_v}$$

n = número de fluxos concentrados

Supondo-se um campo escalar de temperaturas $T = T(x,y,z)$ e aceitando-se a validade da Lei de Fourier para condução de calor em materiais isotrópicos:

$$\vec{h} = -C \vec{\text{grad}} T \quad (2.3)$$

onde C é a condutibilidade térmica do material e \vec{h} é o vetor fluxo de calor em um dado ponto. O sinal negativo ocorre em (2.3) porque $\vec{\text{grad}} T$ é um vetor normal ao campo de temperaturas no sentido crescente e \vec{h} tem sentido decrescente.

Para materiais ortotrópicos, expressando-se em forma de componentes, a expressão (2.3) fica:

$$h_x = -C_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad h_y = -C_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad h_z = -C_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

ou, utilizando notação indicial:

$$h_i = -C_{i,j} T_{,j} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Expressando-se a relação (2.2) indicialmente, obtemos:

$$h_{i,i} = h^B + H_c \quad (2.5)$$

Multiplicando a expressão (2.5) por δT arbitrários e integrando-se em todo o volume, teremos:

$$\int_V \delta T h_{i,i} dV = \int_V \delta T H_c dV + \int_V \delta T h^B dV \quad (2.6)$$

$$\int_V \delta T H_c dV = \sum_{i=1}^n \delta T^i H_i \quad (2.7)$$

Integrando a (2.6) por partes e aplicando o teorema de Gauss, resulta:

$$-\int_{\mathbf{S}} \delta T_{,i} h_i \nu_i dS - \int_{\mathbf{V}} \delta T_{,i} h_i dV = \int_{\mathbf{V}} \delta T h^{\mathbf{B}} + \sum_{i=1}^n \delta T^i H_i \quad (2.8)$$

Onde ν_i é a componente i do versor $\vec{\nu}$ normal à superfície que limita o volume, orientado em direção ao interior do mesmo. A expressão $h_i \nu_i dS$ representa as componentes, segundo os eixos coordenados x_i , de um fluxo de calor $h^{\mathbf{B}}$ normal à superfície dS que limita o volume, de modo que a (2.8) fica:

$$-\int_{\mathbf{V}} \delta T_{,i} h_i dV = \int_{\mathbf{S}} \delta T h^{\mathbf{S}} dS + \int_{\mathbf{V}} \delta T h^{\mathbf{B}} dV + \sum_{i=1}^n \delta T^i H_i \quad (2.9)$$

Aplicando-se (2.4) em (2.9) obtém-se:

$$\int_{\mathbf{V}} \delta T_{,i} C_{i,T,i} dV = \int_{\mathbf{S}} \delta T h^{\mathbf{S}} dS + \int_{\mathbf{V}} \delta T h^{\mathbf{B}} dV + \sum_{i=1}^n \delta T^i H_i \quad (2.10)$$

2.3. Aplicação a elementos finitos

Tendo em vista o tipo de análise mecânica à qual será acoplada a análise térmica, considerar-se-á o caso de material isotrópico ($C_x, C_y, C_z = C$) e estado plano de fluxo de calor ($h_z = 0$; $\partial T / \partial z = 0$). A equação (2.10) será tratada numericamente dentro do domínio de cada elemento em que o meio contínuo foi discretizado, resultando em um sistema de equações lineares em temperaturas cuja solução garante a continuidade das mesmas.

Visando uma maior facilidade de entendimento e uma notação mais simbólica, a formulação abaixo será desenvolvida em notação matricial.

Para um determinado elemento, o valor do campo de temperaturas pode ser obtido em qualquer ponto em função de seus valores nos nós do elemento por:

$$T = \underline{N} \underline{T} \quad (2.11)$$

onde \underline{N} é o vetor de funções de forma no ponto especificado e \underline{T} o vetor de

temperaturas nodais. Analogamente, as derivadas das temperaturas em um ponto qualquer são dadas por:

$$\underline{T}_{,i} = \underline{B} \underline{T} \quad (2.12)$$

onde \underline{B} é a matriz de derivadas das funções de forma no ponto especificado. Os fluxos de calor aplicados na superfície do elemento podem ser expressos em função de seus valores nodais da forma:

$$\underline{h}^s = \underline{N} \underline{h}^s \quad (2.13)$$

onde \underline{h}^s é o vetor de valores nodais do fluxos de calor aplicados na superfície. Restringindo os fluxos de calor concentrados H_i aos nós do elemento, pode-se substituir o somatório da (2.10) por:

$$\sum_{i=1}^n \delta T_i H_i = \delta \underline{T}^T \underline{H} \quad (2.14)$$

onde \underline{H} é o vetor de fluxos concentrados nodais.

A aplicação da (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) na (2.10) resulta em:

$$\int_V \delta \underline{T}^T \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} \underline{T} dV = \int_S \delta \underline{T}^T \underline{N}^T \underline{N} \underline{h}^s dS + \int_V \delta \underline{T}^T \underline{N}^T \underline{h}^b dV + \delta \underline{T}^T \underline{H} \quad (2.15)$$

onde $\delta \underline{T}$ é o vetor de incrementos nodais arbitrários de temperatura. Sendo $\delta \underline{T}$ arbitrário e \underline{T} composto por valores nodais constantes, resulta:

$$\left[\int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} dV \right] \underline{T} = \int_S \underline{N}^T \underline{N} \underline{h}^s dS + \int_V \underline{N}^T \underline{h}^b dV + \underline{H} \quad (2.16)$$

Todas as integrais são calculadas numericamente pelo processo de GAUSS - LEGENDRE em cada elemento, resultado num sistema de equações lineares em temperaturas.

2.4. Resultados numéricos

A formulação teórica acima descrita foi implementada em um programa

computacional na linguagem FORTRAN. Para verificação da precisão das respostas obtidas através do mesmo, são apresentados alguns exemplos com solução analítica fechada, permitindo a obtenção de estimativas de erro dos resultados.

2.4.1. Placa retangular com 2 bordos à temperatura constante T e os demais a 0°C

Considerou-se uma placa retangular cujas faces $x=0$ e $y=0$ estejam a uma temperatura prescrita T e as demais a 0°C. A solução para este problema foi obtida pela superposição de dois casos mais simples em que somente uma das faces apresentava a temperatura prescrita T, sendo dada por (Jakob, 1949):

$$A_i = 2i+1$$

$$T(x,y) = \frac{4T}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{A_i} \left[\operatorname{sen} \frac{A_i \pi x}{a} \operatorname{cosech} \frac{A_i \pi b}{a} \operatorname{senh} \frac{A_i \pi (b-y)}{a} + \right. \\ \left. + \operatorname{sen} \frac{A_i \pi (b-y)}{b} \operatorname{cosech} \frac{A_i \pi a}{b} \operatorname{senh} \frac{A_i \pi (a-x)}{b} \right] \quad (2.17)$$

onde a e b são as dimensões dos lados do retângulo paralelos a x e a y, respectivamente.

Como exemplo foram utilizadas as dimensões $a=50$ e $b=50$, sendo a temperatura prescrita de $T=100^\circ\text{C}$. A malha utilizada para a discretização da placa contém 36 elementos e pode ser vista na Figura 2.2, bem como as isotermas obtidas. Na Figura 2.3 apresenta-se uma comparação entre os resultados obtidos via Elementos Finitos (pontos) e pelos primeiros 1800 termos da série (2.17), ao longo das retas $y=5$, $y=25$ e $y=45$.

O maior erro percentual obtido foi de 10.5%, próximo aos vértices superior esquerdo e inferior direito do retângulo. Nestes pontos, o modelo teórico admite uma mudança brusca de temperatura entre faces adjacentes, ao passo que o modelo via elementos finitos gera um gradiente de temperaturas entre nós adjacentes. O erro poderia ser minimizado através de um refinamento de malha nestes pontos.

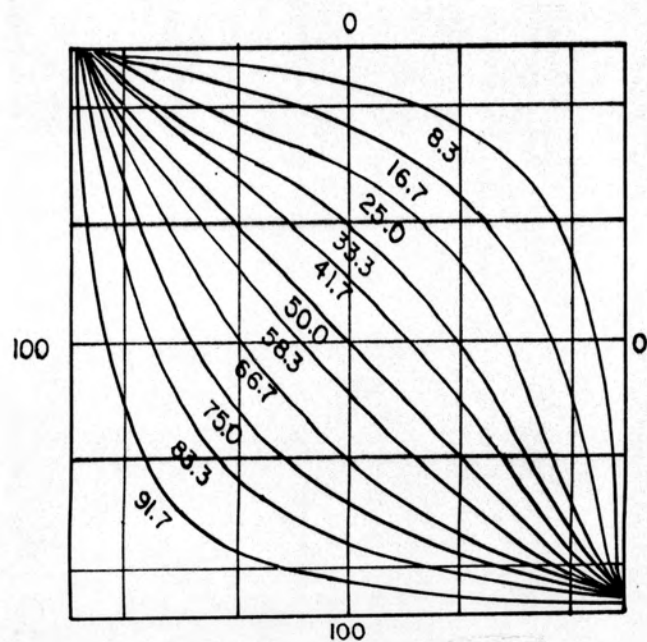


Figura 2.2 - Malha e isotermas do exemplo 2.4.1

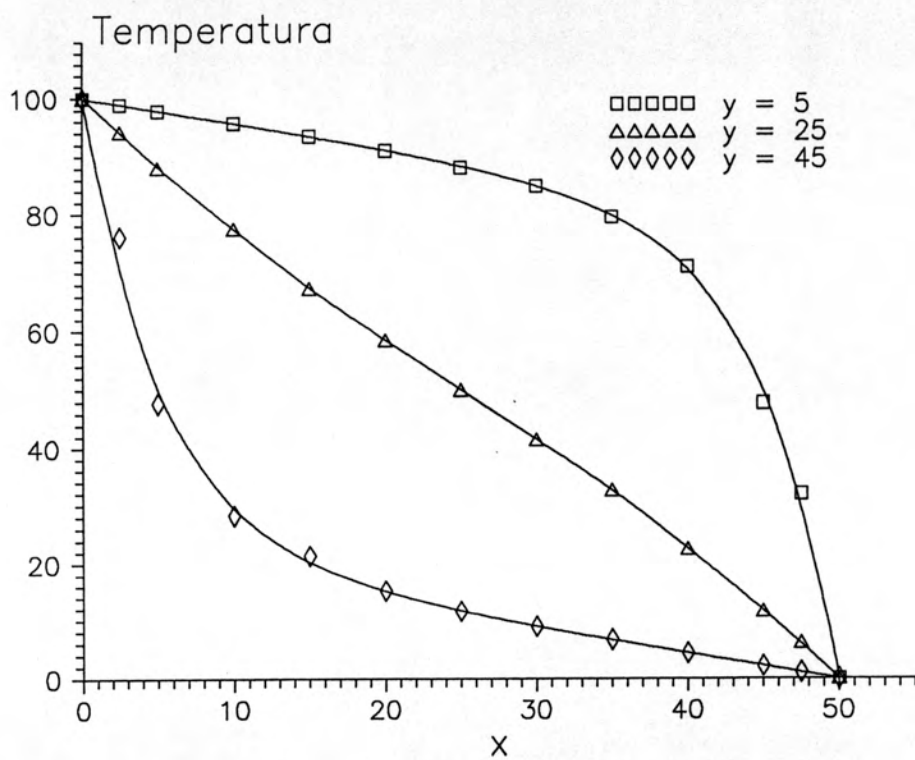


Figura 2.3 - Distribuição de temperatura do exemplo 2.4.1

2.4.2. Placa retangular com distribuição senoidal de temperatura em um dos bordos

Neste exemplo foi considerada uma placa retangular com dimensões a e b nas direções x e y , respectivamente, e em cujo lado $y=b$ se prescreve uma distribuição senoidal de temperaturas da forma:

$$T(x,b) = T \text{ sen}(\pi x/a) \quad (2.18)$$

A solução analítica para este problema pode ser encontrada em (Kreith, 1975) e é dada por:

$$T(x,y) = T \frac{\text{senh}(\pi y/a)}{\text{senh}(\pi b/a)} \text{ sen}(\pi x/L) \quad (2.19)$$

Considerou-se uma placa de mesmas dimensões que a do exemplo 2.4.1., com $T=100^\circ\text{C}$. As isotermas obtidas podem ser vistas na Figura 2.4. O gráfico da figura 2.5 mostra uma comparação entre os resultados obtidos pela equação (2.19) (linha cheia) e via elementos finitos (pontos), ao longo de retas paralelas ao eixo y . O erro percentual máximo encontrado foi de 0.17%, explicado pela ausência de descontinuidades na distribuição de temperaturas.

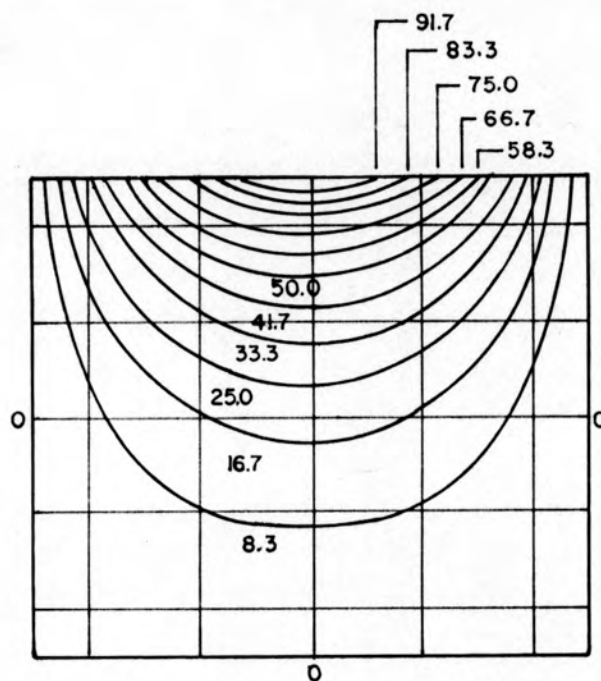


Figura 2.4 - Isotermas do exemplo 2.4.2

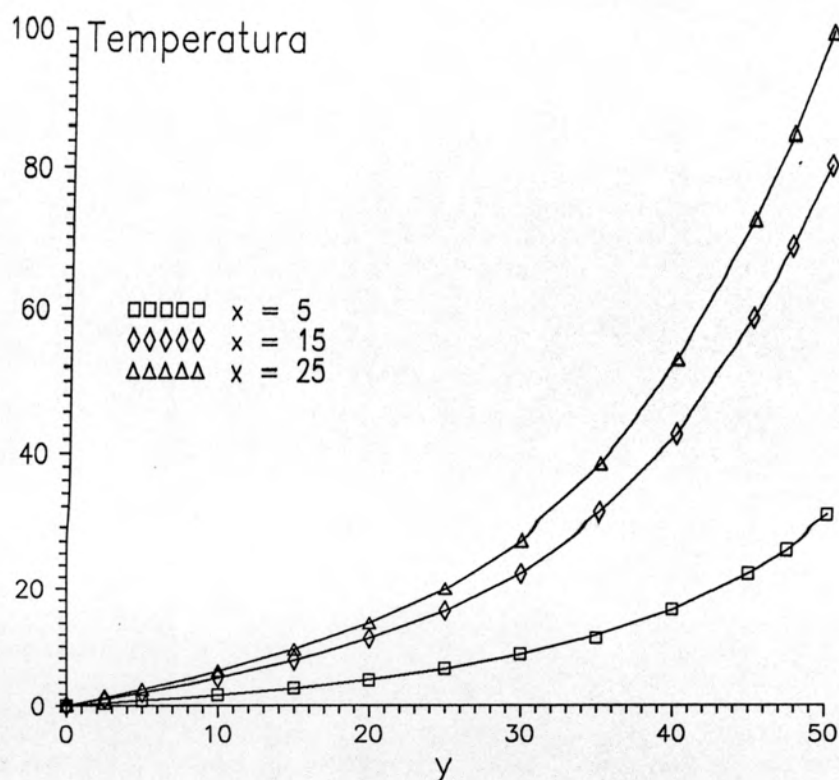


Figura 2.5 - Distribuição de temperaturas do exemplo 2.4.2.

2.4.5. Cilindro vazado com temperaturas prescritas nos bordos interno e externo.

O último exemplo apresentado corresponde a um cilindro vazado de raio interno $R_i = 3$, raio externo $R_e = 10$, temperatura no bordo interno $T_i = 100^\circ\text{C}$ e temperatura do bordo externo $T_e = 0^\circ\text{C}$. A solução teórica deste problema, encontrada em (Kutadeladze, 1963) é:

$$T(r) = T_i - \frac{T_e - T_i}{\ln(R_e/R_i)} \ln(r/R_i) \quad (2.56)$$

Na figura 2.6 está representada a malha utilizada para a discretização do cilindro em Elementos Finitos e as isothermas obtidas. A figura 2.7 mostra uma comparação entre os valores obtidos com a (2.56) e via elementos finitos. O erro percentual máximo foi de 3.82%

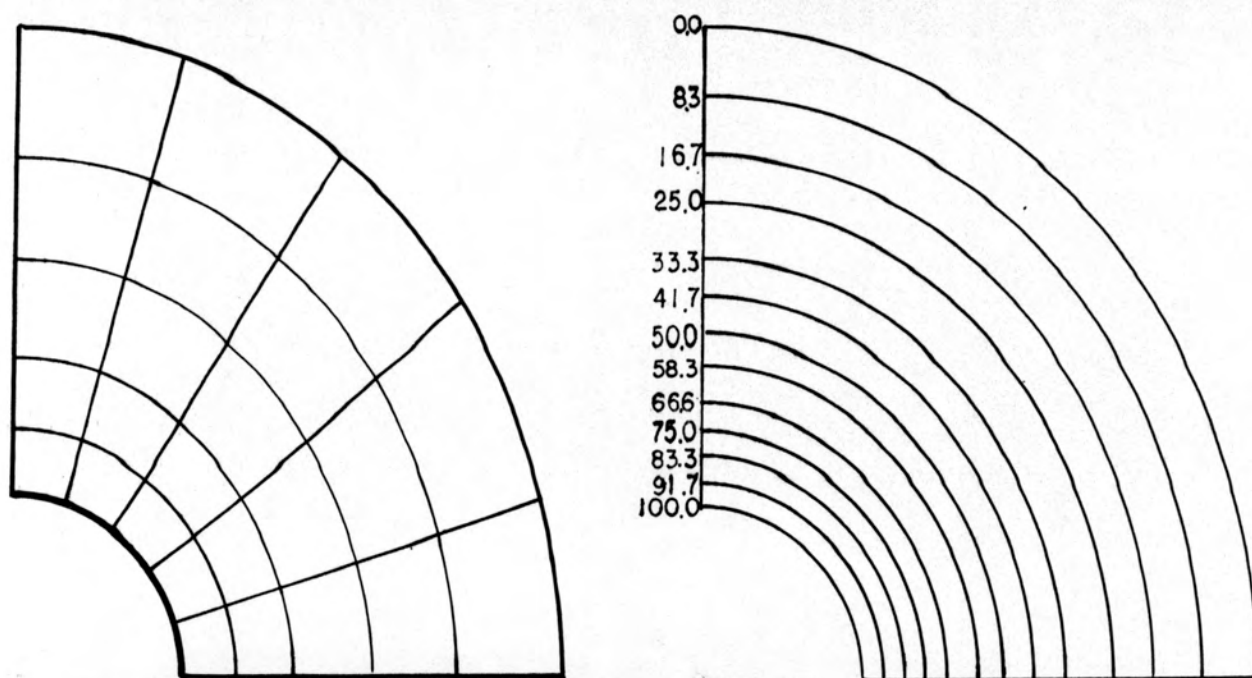


Figura 2.6 - Isotermas e malha do exemplo 2.4.3.

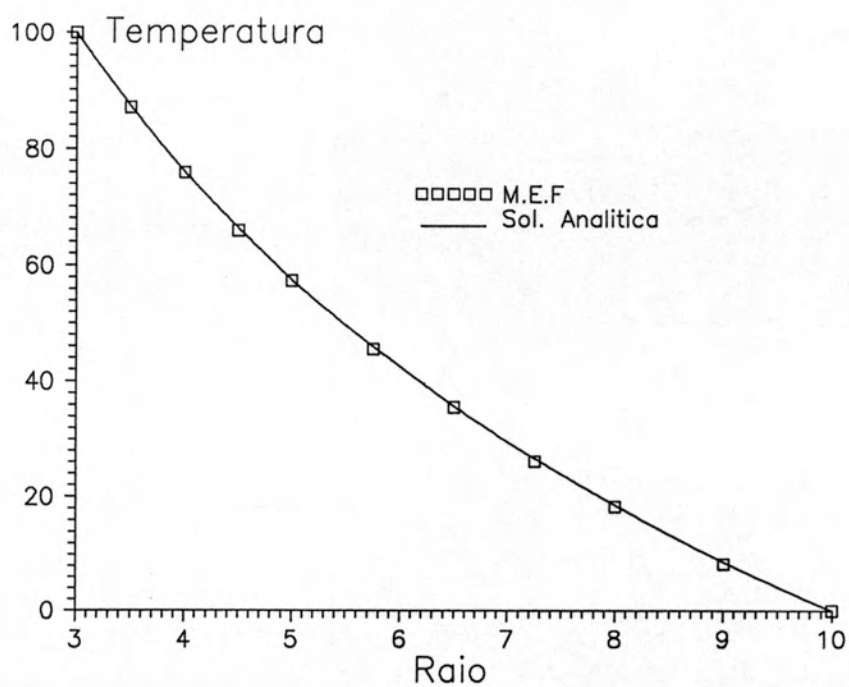


Figura 2.7 - Distribuição de temperatura num cilindro vazado

3. FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS DE VISCOELASTICIDADE LINEAR VIA VARIÁVEIS DE ESTADO.

3.1. Introdução

Os princípios gerais da mecânica, isto é, as equações de equilíbrio e compatibilidade, são válidos para todos os materiais. O que matematicamente distingue as características e propriedades do comportamento dos diferentes materiais são as equações constitutivas. O aspecto mais característico do comportamento viscoelástico é o papel essencial que o tempo desempenha nas relações tensão - deformação.

Um corpo viscoelástico sob um ensaio de fluência, no qual é aplicada uma tensão constante no tempo a partir de um instante inicial, sofre uma deformação instantânea tipicamente elástica no momento de aplicação da tensão, e a deformação total cresce ao longo do tempo, podendo ou não convergir para um valor finito final. Se a tensão atuante no corpo é removida, a deformação diminui de um valor instantâneo tipicamente elástico, continuando a decrescer ao longo do tempo com um comportamento similar ao da fase de carregamento.

Se agora submetermos o corpo a um teste de relaxação, isto é, se aplicarmos uma deformação constante no tempo, constata-se que as tensões apresentam um comportamento instantâneo elástico, diminuindo ou relaxando ao longo do tempo. Se removermos a deformação, a diminuição das tensões neste instante também é elástica, seguindo-se o mesmo processo de relaxação em valor absoluto.

Em ambos os casos, o corpo apresenta uma resposta elástica a qualquer mudança nas tensões ou deformações impostas a que está sendo submetido, sendo seu comportamento subsequente similar a ter o módulo de elasticidade diminuindo ao longo do tempo a partir de seu valor original "elástico". Isto sugere uma relação constitutiva não somente dependente do tempo em termos absolutos, mas de toda história de tensões e deformações impostas a que foi submetido.

Um comportamento viscoelástico é dito linear se, para uma história de tensões:

$$\sigma(\tau) = \sigma_1(\tau) + \sigma_2(\tau) \quad ; \quad \tau \in (\tau_0, t) \quad (3.1)$$

obtem-se uma história de deformações:

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_1(\tau) + \varepsilon_2(\tau) \quad (3.2)$$

onde $\varepsilon_1(\tau)$ e $\varepsilon_2(\tau)$ são as histórias de deformação relacionadas às histórias de tensões arbitrárias $\sigma_1(\tau)$, $\sigma_2(\tau)$ respectivamente, ou seja, o princípio da superposição de efeitos é válido para histórias de tensões e deformações.

Um comportamento viscoelástico é dito contínuo se, para duas experiências com histórias de tensões próximas, correspondem duas histórias de deformações tão próximas quanto for desejado.

Pelo teorema de Riesz (Creus, 1985), para um comportamento viscoelástico linear e contínuo, pode-se definir as equações constitutivas como:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{\tau_0}^t D_{ijkl}(t, \tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{\tau_0}^t E_{ijkl}(t, \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

onde $\varepsilon_{kl}(t)$ e $\sigma_{kl}(t)$ são os tensores de deformação e de tensão, $D_{ijkl}(t, \tau)$ e $E_{ijkl}(t, \tau)$ são chamadas de funções de fluência e de relaxação, respectivamente.

Integrando a (3.3) por partes e considerando que o tensor elástico instantâneo E_{ijkl} não se altera com o tempo, obtemos:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\sigma_{kl}(t)}{E_{ijkl}} + \int_{\tau_0}^t d_{ijkl}(t, \tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

$$\text{onde: } d_{ijkl}(t, \tau) = -\frac{\partial D_{ijkl}(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (3.6)$$

A primeira e a segunda parcelas do segundo termo da (3.5) correspondem, respectivamente, à parte instantânea (elástica) e diferida das deformações. Para o caso de ausência de envelhecimento, ou seja, quando as funções de fluência e relaxação não se alteram ao longo do tempo, a (3.5)

fica:

$$e_{ij}(t) = \frac{\sigma_{kl}(t)}{E_{ijkl}} + \int_{\tau_0}^t d_{ijkl}(t-\tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Grande número de materiais viscoelásticos de elevada importância tecnológica na área estrutural, entre os quais diversos polímeros, apresentam marcado comportamento viscoelástico linear apenas para as tensões e deformações de corte, tendo a parte volumétrica comportamento elástico e, por vezes, incompressível.

Para que a formulação a ser desenvolvida tenha versatilidade suficiente para analisar estes tipos de materiais, deve-se levar em consideração funções de fluência específicas para a parte volumétrica e desviadora.

$$e^o(t) = \frac{\sigma^o(t)}{3K_o} + \int_{\tau_0}^t d^o(t-\tau) \sigma^o(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

$$e_{ij}^s(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G_o} + \int_{\tau_0}^t d^s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

onde $\sigma^o(t)$ é o primeiro invariante do tensor de tensões, chamado tensão volumétrica, $s_{ij}(t)$ é tensor de tensões desviadoras ou de corte, $e^o(t)$ é o primeiro invariante do tensor de deformações específicas, chamado deformação volumétrica específica, $e_{ij}^s(t)$ o tensor de deformações desviadoras (ou de corte) específicas, K_o o módulo de compressibilidade volumétrica instantâneo, G_o o módulo de elasticidade transversal instantâneo, e $d^o(t-\tau)$ e $d^s(t-\tau)$ as derivadas das funções de fluência volumétrica e desviadora, respectivamente.

3.2. Método das variáveis de estado

A utilização da formulação dada em (3.8) e (3.9) através do Método dos Elementos Finitos mostra-se bastante inconveniente na solução de problemas de mecânica dos sólidos, visto que a formulação integral ali apresentada requer o armazenamento de toda a história de tensões ao longo do processo viscoelástico, nos nós ou nos pontos de integração de todos os

elementos no qual o meio contínuo foi discretizado. Em problemas de porte médio e até mesmo pequeno, o grande número de graus de liberdade e equações envolvidos impossibilitariam a análise numérica em função de parâmetros como tempo de processamento e memória requerida nos equipamentos atualmente disponíveis.

O método das variáveis de estado baseia-se numa aproximação das derivadas das funções de fluência por meio de séries exponenciais convergentes, transformando a formulação integral num sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem desacopladas ou num sistema de equações incrementais desacopladas, sendo necessário o armazenamento de apenas uma pequena parte da história de tensões.

Computacionalmente, o método é de fácil implementação a partir de um código para análise elástica e, embora necessite que os intervalos de tempo utilizados ao longo do processo sejam menores do que em outros métodos, tais como o Método da Superposição Incremental (Yadagiri e Reddy, 1985), (Saraiva et al., 1990), sua eficiência computacional, medida como tempo de máquina para um certo nível de precisão, mostrou-se bastante mais vantajosa (Saraiva et al., 1991), (Masuero et al., 1991).

A formulação desenvolvida neste trabalho consiste numa generalização daquela apresentada em (Creus, 1985).

Considerando que as derivadas das funções de fluência para as partes volumétrica e desviadora podem ser aproximadas por séries exponenciais de Dirichlet-Prony do tipo:

$$d(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} e^{-(t-\tau)/\theta_i} \quad (3.10)$$

variáveis de estado para a parte volumétrica e desviadora são definidas como:

$$q_l^o(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\eta_l^o} e^{-(t-\tau)/\theta_l^o} \sigma^o(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

$$q_{ijk}^s(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\eta_k^s} e^{-(t-\tau)/\theta_k^s} s_j(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

Esta representação é equivalente a idealizar-se o comportamento viscoelástico através de um modelo reológico de Kelvin generalizado, onde o

i -ésimo elemento tem um tempo de retardação θ_i , amortecedor de viscosidade η_i e mola de constante η_i/θ_i . A soma das variáveis de estado em (3.11) e (3.12) sobre k e l correspondem às deformações diferidas na parte volumétrica e de corte, respectivamente. Considerando a (3.11) em $(t+\Delta t)$ e separando a integral em duas parcelas, uma de τ_0 a t e outra de t a $t+\Delta t$, resulta:

$$q_l^o(t+\Delta t) = \int_{\tau_0}^t e^{-\Delta t/\theta_l^o} \left[\frac{1}{\eta_l} e^{-(t-\tau)/\theta_l^o} \sigma^o(\tau) \right] d\tau + \\ + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\eta_l} e^{-(t+\Delta t-\tau)/\theta_l^o} \sigma^o(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

O termo $e^{-(\Delta t/\theta_l^o)}$ na primeira integral não depende da variável de integração τ , sendo portanto uma constante e podendo ser colocado fora do sinal de integração. A integral da parte restante, entre colchetes, corresponde ao valor da variável de estado no tempo t , de modo que a (3.13) fica:

$$q_l^o(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_l^o} q_l^o(t) + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\eta_l} e^{-(t+\Delta t-\tau)/\theta_l^o} \sigma^o(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

A equação incremental resultante depende do comportamento das tensões no intervalo $t, t+\Delta t$. Considerando a história de tensões possa ser considerada constante neste intervalo, obtém-se:

$$q_l^o(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_l^o} q_l^o(t) + \frac{1}{\eta_l} e^{-(t+\Delta t)/\theta_l^o} \sigma^o(t) \int_t^{t+\Delta t} e^{-\tau/\theta_l^o} d\tau \quad (3.15)$$

$$q_l^o(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_l^o} q_l^o(t) + \frac{\sigma^o(t)}{3K_l} (1 - e^{-\Delta t/\theta_l^o}) \quad (3.16)$$

Analogamente, para a equação (3.12), obtém-se:

$$q_{ijk}^s(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_k^s} q_{ijk}^s(t) + \frac{s_{ij}(t)}{2G_k} (1 - e^{-\Delta t/\theta_k^s}) \quad (3.17)$$

As equações incrementais (3.16) e (3.17) reduzem a solução da formulação integral a um sistema de equações lineares desacopladas, sendo necessário apenas o armazenamento das tensões e das variáveis de estado no tempo anterior.

Quanto melhor a aproximação utilizada para a história de tensões no intervalo $t, t+\Delta t$ na (3.14) tanto maior é o intervalo de tempo Δt que pode ser considerado para um mesmo nível de precisão. Portanto, um melhor resultado deve ser obtido se a história de tensões for aproximada por uma função linear do tipo:

$$\sigma^o(\tau) = \sigma^o(t) + \frac{\Delta\sigma^o(t)}{\Delta t} (\tau-t) \quad t \leq \tau \leq t+\Delta t \quad (3.18)$$

onde $\Delta\sigma^o(t)$ e Δt são, respectivamente, o incremento de tensões e o intervalo de tempo do passo anterior. A utilização desta aproximação resulta em:

$$q_l^o(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_l^o} q_l^o(t) + \frac{\sigma^o(t)}{3K_l} (1 - e^{-\Delta t/\theta_l^o}) + \frac{\Delta\sigma^o(t)}{3K_l \Delta t} \left[\Delta t - \theta_l^o (1 - e^{-\Delta t/\theta_l^o}) \right] \quad (3.19)$$

$$q_{ijk}^s(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_k^s} q_{ijk}^s(t) + \frac{s_{ij}(t)}{2G_k} (1 - e^{-\Delta t/\theta_k^s}) + \frac{\Delta s_{ij}(t)}{\Delta t 2G_k} \left[\Delta t - \theta_k^s (1 - e^{-\Delta t/\theta_k^s}) \right] \quad (3.20)$$

Em comparação com a (3.15) e (3.16), as equações (3.19) e (3.20) exigem o armazenamento de dois dados das etapas anteriores, ao invés de um, para cada variável de estado de cada ponto de integração de todos os elementos que compõem a malha.

As variáveis de estado correspondem às parcelas diferidas da deformação em cada elemento Kelvin do modelo reológico adotado. As deformações totais resultam da aplicação da (3.10) na (3.8) e (3.9):

$$e^o(t) = \frac{\sigma^o(t)}{3K_o} + \sum_{l=1}^{n^o} q_l^o(t) \quad (3.21)$$

$$e_{ij}^s(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G_0} + \sum_{k=1}^n q_{ijk}^s(t) \quad (3.22)$$

ou, de uma maneira mais sintética:

$$e^o(t) = e^{oe}(t) + e^{ov}(t) \quad (3.23)$$

$$e_{ij}^s(t) = e_{ij}^{se}(t) + e_{ij}^{sv}(t) \quad (3.24)$$

onde o superíndice "e" e "v" designam, respectivamente, as parcelas elástica e viscoelástica ou diferida. As deformações totais, elástica e diferida, podem ser obtidas por:

$$e_{ij}^e(t) = \frac{e^{oe}(t)}{3} \delta_{ij} + e_{ij}^{se}(t) \quad (3.25)$$

$$e_{ij}^v(t) = \frac{e^{ov}(t)}{3} \delta_{ij} + e_{ij}^{sv}(t) \quad (3.26)$$

$$e_{ij}(t) = e_{ij}^e(t) + e_{ij}^v(t) \quad (3.27)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kroneker.

3.3. Aplicação das variáveis de estado no Método dos Elementos Finitos

Ao contrário da seção anterior, onde a notação indicial mostrava-se vantajosa, será utilizada nesta seção a notação matricial, por ser esta a mais usual nas formulações de elementos finitos.

Tomando-se a expressão do princípio dos trabalhos virtuais aplicado a um elemento qualquer do corpo no qual o meio contínuo foi discretizado (Bathe, 1982), (Creus, 1985):

$$\int_V \delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dv = \int_V \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{b}} dv + \int_S \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{t}} ds \quad (3.28)$$

onde $\underline{\underline{\epsilon}}$ é o vetor de deformações específicas totais, $\underline{\underline{\sigma}}$ o vetor de tensões, $\underline{\underline{u}}$ o vetor de deslocamentos, $\underline{\underline{b}}$ o vetor de cargas de volume e $\underline{\underline{t}}$ o vetor de

cargas de superfície.

Considerando-se que somente a parte elástica das deformações produz tensões:

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon}_e \quad (3.29)$$

onde \underline{E} é a matriz elástica. O subíndice, e não mais o superíndice, indica as partes elástica e diferida. De forma análoga, considerando a (3.27):

$$\underline{\sigma} = \underline{E} (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_v - \underline{\epsilon}_T) \quad (3.30)$$

onde $\underline{\epsilon}_v$ é o vetor de deformações viscoelásticas e $\underline{\epsilon}_T$ é o vetor de deformações térmicas.

Expressando os valores incógnitos em função dos deslocamentos nodais u^i do elemento i:

$$\underline{u} = \underline{N} u^i \quad (3.31)$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} u^i \quad (3.32)$$

Aplicando (3.30), (3.31) e (3.32) em (3.28), resulta:

$$\int_V \delta u^{iT} \underline{B}^T \underline{E} (\underline{B} u^i - \underline{\epsilon}_T - \underline{\epsilon}_v) dV = \int_V \delta u^{iT} \underline{N}^T \underline{b} dV + \int_S \delta u^{iT} \underline{N}^T \underline{t} dS \quad (3.33)$$

Como δu^{iT} são valores arbitrários e constantes dentro das integrais, resulta:

$$\int_V \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} dV u^i = \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV + \int_S \underline{N}^T \underline{t} dS + \int_V \underline{B}^T \underline{E} \underline{\epsilon}_T dV + \int_V \underline{B}^T \underline{E} \underline{\epsilon}_v dV \quad (3.34)$$

ou:

$$\underline{K}^i u^i = \underline{p}^b + \underline{p}^s + \underline{p}^T + \underline{p}^v \quad (3.35)$$

onde : \underline{K}^i é a matriz de rigidez do elemento

u^i é o vetor de deslocamentos nodais

\underline{p}^b é o vetor de cargas de volume

\underline{p}^s é o vetor de cargas aplicadas no contorno

\underline{p}^T é o vetor de pseudo-cargas térmicas

\underline{p}^v é o vetor de pseudo-cargas viscoelásticas.

Fazendo-se a montagem das contribuições individuais de cada elemento em um sistema global onde se faz a compatibilidade interelementar dos deslocamentos nodais, obtém-se um sistema de equações lineares em deslocamentos, os quais, uma vez obtidos, permitem calcular as tensões e deformações.

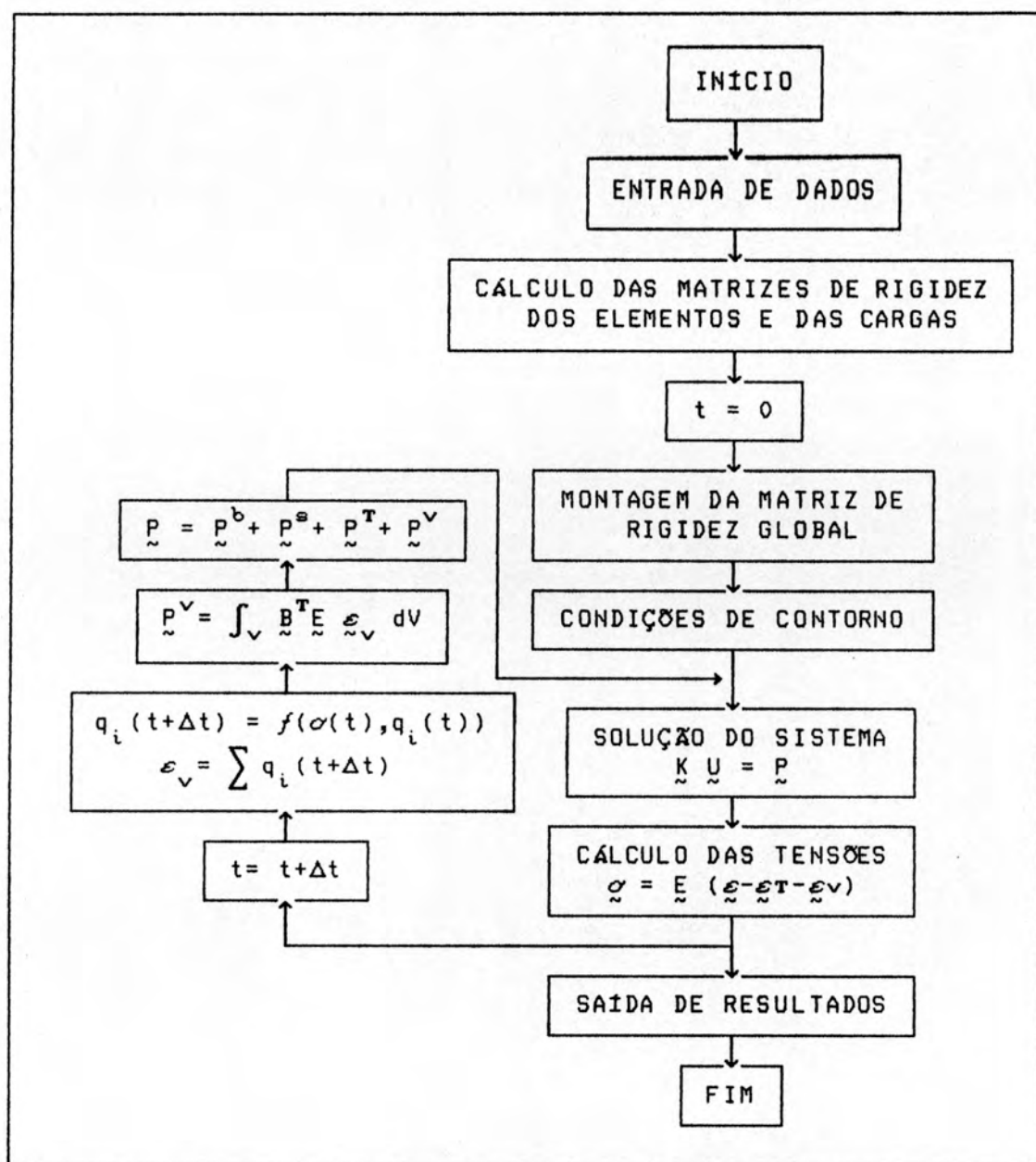


Figura 3.1 - Aplicação das Variáveis de Estado ao M.E.F.

Utilizando-se as variáveis de estado, pode-se calcular o comportamento viscoelástico de um corpo a partir da (3.35) em forma incremental no tempo. Considerando que, para $t=\tau_0$, as deformações viscoelásticas e, conseqüentemente, as variáveis de estado são nulas, as

ensões obtidas em cada passo atualizam as variáveis de estado para o passo seguinte, as quais formam o vetor de pseudo-cargas viscoelástico para o passo seguinte. O processo de cálculo está esquematizado no fluxograma da figura 3.1.

3.4. Intervalo de tempo auto-adaptável

O processo de integração no tempo, descrito nas seções anteriores sob a forma incremental, apresenta forte dependência quanto à convergência e precisão com o intervalo de tempo utilizado no processo. Testes efetuados por (Masuero et al., 1991) mostram que o intervalo de tempo ótimo para o método das variáveis de estado situa-se entre $\beta/3$ a $\beta/10$, sendo β o menor tempo de relaxação dos elementos Kelvin utilizados no modelamento do material. Valores maiores do que estes levam a uma perda de precisão inaceitável e, até mesmo, divergência do processo.

A maioria dos métodos de modelamento matemático de curvas de fluência ou relaxação conduzem a tempos de retardação θ_i bastante diversos para cada elemento Kelvin, normalmente em progressão de décadas ou múltiplos de 10.

A utilização de intervalos de tempo constantes na análise de tais materiais levaria a um processo incremental com milhares de passos, tornando inviável seu emprego em microcomputadores. Portanto, uma estratégia visando a minimização do número de etapas sem perda de precisão torna-se altamente necessária.

Analizando-se uma curva de fluência ou relaxação de um material viscoelástico, constata-se que as maiores variações nas deformações ou tensões ocorrem na fase inicial do processo, sendo progressivamente atenuadas ao longo do tempo. Pode-se supor, portanto, que pequenos intervalos somente serão necessários nos primeiros passos, podendo ser progressivamente aumentados. Partindo desta constatação, foi desenvolvido um algoritmo que define, após cada etapa, o tamanho do intervalo para a etapa seguinte.

Considerando a curva de fluência de um elemento Kelvin isolado:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-t/\theta} \right) \quad (3.36)$$

$$\epsilon_v(t+\Delta t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-(t+\Delta t)/\theta} \right) \quad (3.37)$$

Subtraindo (3.36) de (3.37) resulta:

$$\Delta \varepsilon_v(t+\Delta t) = \frac{\sigma}{E} \left(e^{-t/\theta} - e^{-(t+\Delta t)/\theta} \right) \quad (3.38)$$

O algoritmo baseia-se na suposição de que, se durante a fase inicial da deformação, existe estabilidade, a mesma continuará existindo se, nas etapas posteriores, não houver um incremento de deformação viscoelástica maior que o da primeira etapa. Como a razão de crescimento da deformação viscoelástica torna-se gradativamente menor ao longo do tempo, os intervalos de tempo a serem utilizados na integração podem ser sucessivamente aumentados.

Considerando um incremento de deformação $\Delta \varepsilon_v$ constante ao longo do processo na (3.38), resulta:

$$\left(e^{-t/\theta} - e^{-(t+\Delta t)/\theta} \right) = \frac{E}{\sigma} \Delta \varepsilon_v = \text{cte} = A \quad (3.39)$$

$$1 - e^{-\Delta t/\theta} = A e^{t/\theta} \quad : \quad \frac{-\Delta t}{\theta} = \ln \left(1 - A e^{t/\theta} \right)$$

$$\Delta t = -\theta \ln \left(1 - A e^{t/\theta} \right) \quad (3.40)$$

A equação (3.40) define, para cada etapa do processo de integração, qual deve ser o intervalo de tempo para o incremento de deformação viscoelástica seja constante (A) ao longo de todo o processo. Este incremento de deformação está relacionado a um valor inicial, obtido na primeira etapa, e, conseqüentemente, a um intervalo de tempo inicial. Tomando-se como intervalo de tempo inicial ($t=0$) uma fração $1/B$ do tempo de retardação, e aplicando em (3.39), resulta:

$$A = \left(1 - e^{-1/B} \right) : \Delta t_{\text{inicial}} = \frac{\theta}{B} \quad (3.41)$$

Este processo deve ser feito com todos os elementos Kelvin com os quais foi modelado o material, tanto da parte volumétrica como de corte, sendo adotado o menor intervalo de tempo resultante. Testes mostram que a utilização de um divisor B entre 10 e 20 dá excelentes resultados para a grande maioria dos problemas analisados.

3.5. Incompressibilidade

Vários materiais de acentuado comportamento viscoelástico, tais como plásticos de tipo similar à borracha e propelentes sólidos são frequentemente considerados incompressíveis, isto é, depois da deformação cada elemento do meio contínuo tem o mesmo volume que antes da deformação. Este fenômeno pode ser caracterizado matematicamente por um coeficiente de Poisson $\nu = 0.5$, ou por um módulo de compressibilidade volumétrico K muito maior (tendendo ao infinito) que o módulo de elasticidade transversal G .

Em elasticidade teórica, a formulação incompressível apresenta-se, via de regra, de forma bem mais simples que a correspondente formulação compressível. Contudo, na aplicação de métodos numéricos, surgem graves problemas ligados à singularidade na formulação obtida. Considerando, por exemplo, a matriz elástica correspondente ao estado plano de deformações abaixo:

$$\tilde{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

percebe-se que, para $\nu=0.5$, todos os termos tornam-se singulares.

Contudo, fisicamente a hipótese de singularidade apresenta paradoxos. Um sólido confinado submetido a um aumento de temperatura estaria submetido a tensões infinitas pela restrição às dilatações térmicas.

Ensaio experimentais tem mostrado que, para os materiais acima, a deformação volumétrica é pequena em relação à deformação por corte, mas não nula, dando origem à coeficientes de Poisson da ordem de 0.48 ou 0.49. Portanto, parece vantajoso a abordagem de problemas envolvendo estes materiais com uma formulação compressível, desde que se possam empregar técnicas numéricas que minimizem o mal condicionamento das matrizes resultante do emprego de ν de tal ordem, visto que em tais situações os resultados obtidos são bastante precários.

Dois são os caminhos empregados na solução deste tipo de problema: a formulação mista e o conceito de integração reduzida e seletiva. O primeiro apresenta a desvantagem de necessitar um campo extra de variáveis relevantes, o que gera um custo computacional adicional, e sua generalização a problemas não lineares é complexa. O segundo tem a vantagem de ser facilmente aplicado a códigos já existentes para análise de materiais

compressíveis, embora possa causar sérios problemas em problemas com deformações finitas.

Tomando por base a matriz de rigidez de um elemento finito qualquer, expressa genericamente por:

$$\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} dV \quad (3.43)$$

A matriz de constantes elásticas $\underline{\underline{E}}$ pode ser separada em duas parcelas, $\underline{\underline{E}}'$ e $\underline{\underline{E}}''$, sendo a primeira correspondente ao corte e a segunda ao resto. A matriz de rigidez do elemento pode então ser expressa na forma:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}' + \underline{\underline{K}}'' \quad (3.44)$$

$$\text{onde } \underline{\underline{K}}' = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}}' \underline{\underline{B}} dV \quad (3.45)$$

$$\underline{\underline{K}}'' = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}}'' \underline{\underline{B}} dV \quad (3.46)$$

O sistema global de equações a ser resolvido é:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}}^i = \underline{\underline{P}} \quad \text{ou} \quad (\underline{\underline{K}}' + \underline{\underline{K}}'') \underline{\underline{u}}^i = \underline{\underline{P}} \quad (3.47)$$

À medida que ν aproxima-se de 0.5, ou que K torna-se muito maior que G , $\underline{\underline{K}}''$ torna-se muito maior que $\underline{\underline{K}}'$, e o sistema a ser resolvido aproxima-se de:

$$\underline{\underline{K}}'' \underline{\underline{u}}^i = 0 \quad (3.48)$$

o que fornece $\underline{\underline{u}}^i$ nulo, uma solução extremamente rígida e trivial. Para que se possa ter $\underline{\underline{u}}^i$ não nulo em (3.48), $\underline{\underline{K}}''$ deve ser singular, o que é obtido numericamente pela redução da ordem de integração de Gauss, ou seja, a utilização de um número menor de pontos de integração que os estipulados pela formulação em elementos finitos. A integração reduzida é dita seletiva quando feita somente sobre a parte volumétrica, e uniforme quando atua também sobre a parte de corte.

Trabalhos desenvolvidos têm mostrado que, para elementos isoparamétricos de oito nós para estado plano de tensões e deformações, a

integração reduzida uniforme não somente fornece resultados tão precisos quanto a seletiva como também seu emprego é altamente recomendado em todos os casos, e não somente para os casos incompressíveis. A utilização de 2x2 pontos de integração, ao invés de 3x3, faz com que as tensões sejam calculadas nos pontos que fornecem a maior precisão possível, além de possibilitar uma suavização de tensões ao nível de elemento (Hinton e Campbell, 1974), (Hinton e Owen, 1977), (Zienckiewicz, 1977). Por simplicidade computacional, será empregada integração reduzida para todos os casos no código implementado.

3.6. Termoviscoelasticidade

Materiais viscoelásticos apresentam, em sua maioria, forte dependências de seu comportamento diferido com a temperatura. Mesmo pequenas alterações de temperatura levam a alterações significativas nas deformações ou tensões. Neste trabalho, será considerada a hipótese de materiais termo-reologicamente simples, na qual as propriedades instantâneas permanecem inalteradas (Christensen, 1971).

Considerando um material qualquer cujas funções de fluência e relaxação para uma temperatura de referência $T = T_0$ são indicadas por $D(t)$ e $E(t)$. As mesmas funções, dependentes da temperatura, são indicadas por $\bar{D}(t, T)$ e $\bar{E}(t, T)$, onde T é a temperatura absoluta e $\bar{D}(t, T_0) = D(t)$. Mudando a variável independente de $D(t)$ para uma forma logarítmica:

$$D(t) = D^L(\log t) \quad (3.49)$$

Define-se como material termoreologicamente simples aquele para o qual:

$$\bar{D}(t, T) = D^L(\log t + \psi(T)) \quad (3.50)$$

o que equivale a dizer que a influência da temperatura se faz perceber pela translação da função de fluência numa escala temporal logarítmica. Devido à esta propriedade, a função $\psi(T)$ é chamada de função de deslocamento (*shift function*). Redefinindo $\Psi(T)$ como:

$$\psi(T) = \log \Psi(T) \quad (3.51)$$

e aplicando na (3.50), junto com a (3.49), obtém-se:

$$\bar{D}(t, T) = D(\Psi(T)t) \quad (3.52)$$

ou seja, a influência da temperatura pode ser levada em consideração simplesmente alterando-se a escala temporal a cada instante, obtendo um tempo corrigido ξ da forma:

$$\xi = \Psi(T) t \quad ; \quad \Delta\xi = \Psi(T)\Delta t \quad (3.53)$$

A formulação acima é válida para temperatura constante ao longo do tempo. Caso a temperatura à qual o material está sendo submetido varie ao longo do tempo, a equação (3.53) fica:

$$\xi = \int_0^t \Psi(T(\tau)) d\tau \quad ; \quad \Delta\xi = \int_t^{t+\Delta t} \Psi(T(\tau)) d\tau \quad (3.54)$$

Consideremos que a função de deslocamentos seja conhecida apenas para algumas temperaturas, como é o caso das curvas obtidas em ensaios de temperatura constante. Consideremos que a função de deslocamentos possa ser linearizada entre estas temperaturas sem perda significativa de precisão, ou seja:

$$\Psi_i(T) = a_i + b_i T \quad ; \quad T_i \leq T \leq T_{i+1} \quad (3.55)$$

onde o índice i indica o intervalo de temperaturas de validade da função.

Como o método de análise viscoelástico empregado discretiza o comportamento no tempo em intervalos, a variação de temperaturas ao longo do corpo e do tempo somente poderá ser considerada através de seus valores nos limites destes intervalos. Supondo que uma variação linear de temperatura dentro de cada intervalo de tempo possa ser considerada sem perda significativa de precisão, ou seja:

$$T_j(t) = c_j + d_j t \quad ; \quad t_j \leq t \leq t_{j+1} \quad (3.56)$$

onde j indica o intervalo de tempo de validade da função. A aplicação de (3.55) e (3.56) em (3.54) resulta em :

$$\Delta\xi = \int_t^{t+\Delta t} a + b(c + d\tau) d\tau = \int_t^{t+\Delta t} \alpha + \beta\tau d\tau \quad (3.57)$$

A equação (3.57) deve ser integrada por subdomínios definidos pelos tempos correspondentes, em uma variação linear, às temperaturas de definição da função de deslocamento, como mostrado na figura 3.2.

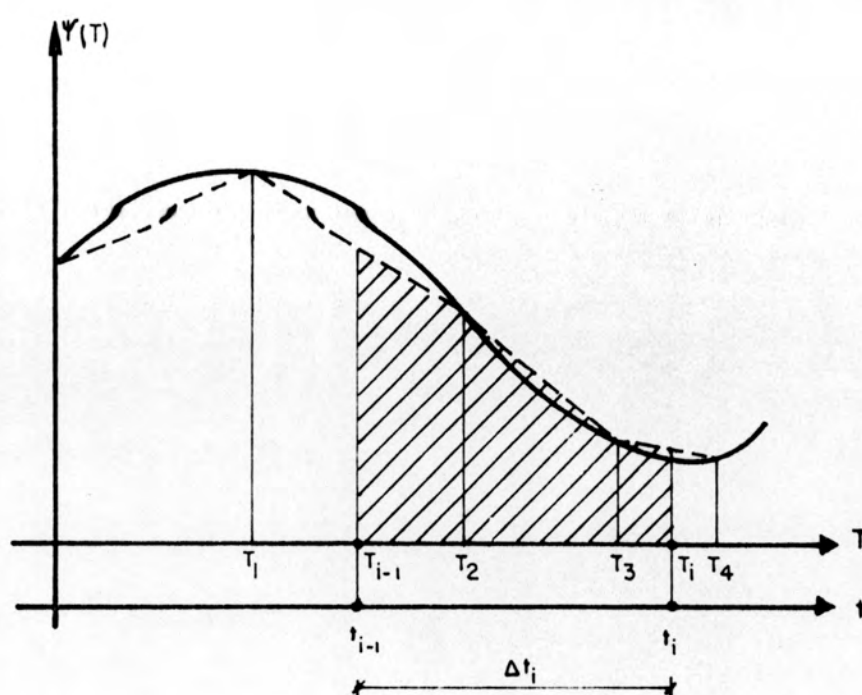


Figura 3.2. - Integração no tempo da função de deslocamentos

3.7. Resultados numéricos

A seguir serão apresentados diversos exemplos cuja solução analítica fechada é encontrada na bibliografia, com o objetivo de verificar a precisão alcançada com o método numérico implementado ou apresentar determinadas particularidades de sua aplicação.

3.7.1. Cilindro vazado elástico submetido a pressão interna

O sólido a ser analisado é um cilindro vazado de raio externo $b = 1000$ e raio interno $a = 500$ submetido a uma pressão interna P de 100

unidades e confinado por uma casca externa infinitamente rígida. O sólido foi analisado em estado plano de deformações com módulo de elasticidade $E = 1000000$ e coeficiente de Poisson variando de 0.3 a 0.49999. A malha utilizada pode ser vista na figura 3.3. Foi feita uma análise elástica, objetivando determinar o ganho de precisão com o uso de integração reduzida.

A solução exata do problema (Flügge, 1975) é dada por:

$$\sigma_r = - \frac{P a^2}{(1-2\nu) b^2 + a^2} \left[1 + (1-2\nu) \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (3.58)$$

$$\sigma_\theta = - \frac{P a^2}{(1-2\nu) b^2 + a^2} \left[1 - (1-2\nu) \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (3.59)$$

$$u = \frac{P b a^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{E [(1-2\nu) b^2 + a^2]} \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right) \quad (3.60)$$

onde u é o deslocamento radial, σ_r e σ_θ são as tensões radiais e circunferenciais, respectivamente.

As tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 mostram uma comparação entre os resultados obtidos nos nós ou pontos de integração mais próximos da superfície interna.

Os resultados mostram que tanto para deslocamentos como para tensões o processo de integração reduzida uniforme obteve melhores resultados. Enquanto que para deslocamentos os erros de ambos os processos foram desprezíveis, para tensões o processo de integração normal apresentou erros de até 15%, os quais, numa formulação viscoelástica baseada nas tensões, levariam a um processo de acúmulo de erro inaceitável.

Tabela 3.1 - Integração reduzida : deslocamentos ($\times 10^3$)

RAIO = 500

Poisson	Exato	2x2	Erro%	3x3	Erro%
0.30000	30.000000	30.012074	0.04	29.987838	0.04
0.40000	23.333333	23.344023	0.05	23.321591	0.05
0.45000	15.535714	15.543394	0.05	15.526062	0.06
0.49000	4.138888	4.141096	0.05	4.135388	0.09
0.49900	0.446130	0.446374	0.06	0.445671	0.10
0.49990	0.044961	0.044986	0.06	0.044894	0.15
0.49999	0.004499	0.004502	0.07	0.004482	0.38

Tabela 3.2 - Integração reduzida : Tensões circunferenciais

RAIO = 552.83

RAIO = 528.19

Poisson	Exato	2x2	Erro%	Exato	3x3	Erro%
.30000	11.878	12.076	1.67	16.683	18.080	8.37
.40000	-19.199	-19.055	0.75	-15.728	-13.262	15.69
.45000	-48.057	-47.963	0.19	-45.825	-42.356	7.57
.49000	-86.533	-86.509	0.03	-85.955	-81.132	5.61
.49900	-98.557	-98.555	---	-98.495	-93.244	5.33
.49990	-99.855	-99.854	---	-99.848	-94.555	5.30
.49999	-99.985	-99.985	---	-99.985	-94.689	5.30

Tabela 3.3 - Integração reduzida : Tensões radiais

RAIO = 552.83

RAIO = 528.19

Poisson	Exato	2x2	Erro%	Exato	3x3	Erro%
.30000	-88.800	-88.950	0.17	-93.607	-90.899	2.89
.40000	-91.912	-92.018	0.12	-95.383	-91.957	3.59
.45000	-94.800	-94.869	0.07	-97.032	-92.941	4.22
.49000	-98.652	-98.670	0.02	-99.230	-94.244	5.03
.49900	-99.856	-99.857	----	-99.918	-94.648	5.27
.49990	-99.985	-99.985	----	-99.992	-94.696	5.30
.49999	-99.999	-99.998	----	-99.999	-94.703	5.30

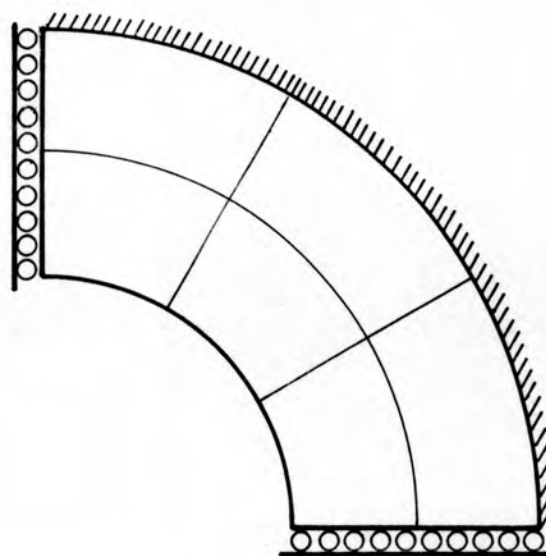


Figura 3.3 - Discretização do cilindro do exemplo 3.7.1

Uma outra forma de existirem termos singulares nas equações da elasticidade é quando o módulo de elasticidade transversal G é muito maior que o módulo de compressibilidade volumétrico K , sendo equivalente a um

coeficiente de Poisson igual a -1. Embora nos últimos anos tenham sido desenvolvidos uns poucos materiais com coeficiente de Poisson negativos, $\nu = -1$ parece não apresentar ainda nenhuma aplicação prática. Contudo, isto corresponde à situação instantânea de um material modelado como sendo elástico volumetricamente e viscoelástico segundo o modelo Kelvin em corte. Esta modelagem aparece em inúmeras soluções teóricas fechadas, sendo, portanto, de relevância significativa.

A mesma malha acima foi utilizada para a verificação da precisão dos resultados para coeficientes de Poisson gradativamente mais próximos de -1, como mostram as tabelas 3.4, 3.5 e 3.6. Ao contrário do caso anterior, o uso de integração reduzida uniforme 2 x 2 resultou em maiores erros em deslocamentos que os obtidos com integração 3 x 3, embora ambos em níveis bastante baixos.

Tabela 3.4 - Integração reduzida : deslocamentos ($\times 10^3$)

RAIO = 500

Poisson	Exato	2x2	Erro%	3x3	Erro%
-0.9500	0.19841	0.19873	0.16	0.19857	0.08
-0.9800	0.07788	0.07801	0.16	0.07794	0.08
-0.9900	0.03870	0.03876	0.16	0.03873	0.08
-0.9990	0.00385	0.00386	0.17	0.00385	0.09
-0.9999	0.00038	0.00039	0.09	0.00039	0.09

Tabela 3.5 - Integração reduzida : Tensões circunferenciais

RAIO = 552.83

RAIO = 528.19

Poisson	Exato	2x2	Erro%	Exato	3x3	Erro%
-0.9500	67.413	67.503	0.13	73.836	74.604	-1,03
-0.9800	67.683	67.773	0.13	74.108	74.886	-1,69
-0.9900	67.770	67.861	0.13	74.196	74.977	-1.04
-0.9990	67.848	67.939	0.13	74.274	75.059	-1.05
-0.9999	67.856	67.947	0.13	74.282	75.067	-1.05

Tabela 3.6 - Integração reduzida : Tensões radiais

RAIO = 552.83

RAIO = 528.19

Poisson	Exato	2x2	Erro%	Exato	3x3	Erro%
-0.9500	-83.286	-83.533	0.30	-90.477	-90.477	1.62
-0.9800	-83.259	-83.505	0.30	-90.462	-90.462	1.62
-0.9900	-83.250	-83.497	0.30	-90.457	-90.457	1.62
-0.9990	-83.242	-83.489	0.30	-90.453	-90.453	1.62
-0.9999	-83.242	-83.488	0.30	-99.918	-90.452	1.62

3.7.2. Cilindro vazado viscoelástico sob pressão interna

Foi analisado um cilindro vazado com raios interno e externo iguais a a e b , respectivamente, contido por um invólucro infinitamente rígido e submetido a uma pressão interna constante P . O material foi considerado elástico com constante K em compressão, e viscoelástico seguindo o modelo Maxwell em corte, com constantes G e η para a mola e o amortecedor, respectivamente.

A solução para a evolução das tensões ao longo do tempo pode ser encontrada em (Flügge, 1975), dada por:

$$\lambda = \frac{6Ka^2}{6Kp_1a^2 + q_1(3b^2 + a^2)} \quad ; \quad p_1 = \frac{\eta}{G} \quad ; \quad q_1 = 2\eta \quad (3.61)$$

$$\sigma_{r,\theta} = -P \left[1 - \frac{\lambda q_1 b^2 (r^2 \mp a^2)}{2Ka^2 r^2} e^{-\lambda t} \right] \quad (3.62)$$

correspondendo o sinal negativo para σ_r (tensão radial) e o positivo para σ_θ (tensão circunferencial). Considerou-se $a = 10\text{mm}$, $b = 30\text{mm}$ e $P = 10\text{kN/mm}^2$. A malha empregada pode ser vista na Figura 3.4. As constantes da parte de corte foram tomadas como $G=1000 \text{ kN/mm}^2$ e $\eta/G = 1 \text{ h}$. Considerou-se 2 módulos de compressibilidade: $K = 2166.67 \text{ kN/mm}^2$ e $K = 499667 \text{ kN/mm}^2$, correspondentes a coeficientes de Poisson instantâneos (ν_0) de 0.3 e 0.499.

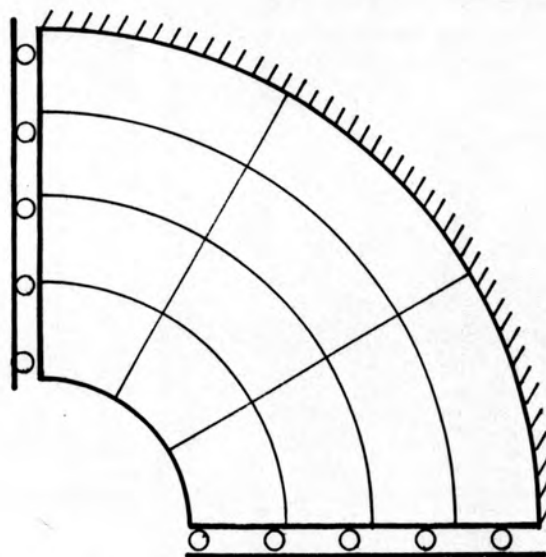


Figura 3.4 - Malha do exemplo 3.7.2.

Uma comparação entre a solução analítica e os resultados via M.E.F. para diversos intervalos de tempo podem ser vistos nas figuras 3.5 e 3.6, para $\nu_0 = 0.3$ e 0.499 , respectivamente. São mostradas as tensões circunferenciais nos pontos de integração mais próximos das superfícies interna e externa por ser esta a tensão que apresentou maior erro.

Percebe-se, na figura 3.6, a forte oscilação da resposta numérica em torno da solução analítica para os intervalos de tempo de 2h e 1h, em especial para o primeiro, fenômeno ausente para $\nu_0 = 0.3$. Isto sugere que a incompressibilidade afeta o processo de convergência do método das Variáveis de Estado, exigindo uma discretização no tempo mais refinada. Para intervalos de tempo de 0.2h, foram encontrados erros percentuais máximos da ordem de 0.20% para $\nu_0 = 0.3$ e 0.005% para $\nu_0 = 0.499$.

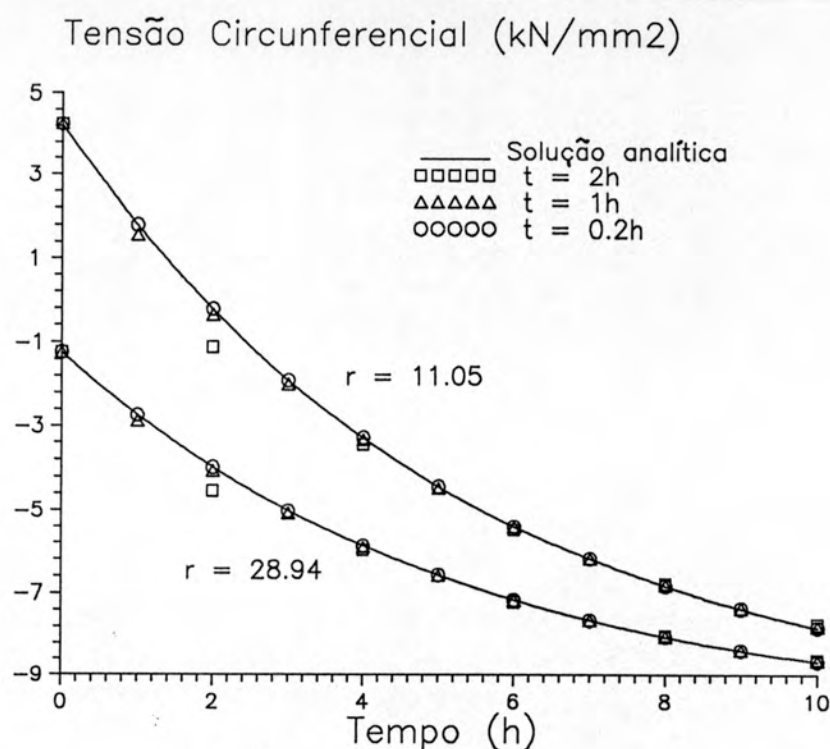


Figura 3.5 - Cilindro vazado sob pressão interna
Tensões circunferenciais - $\nu = 0.3$

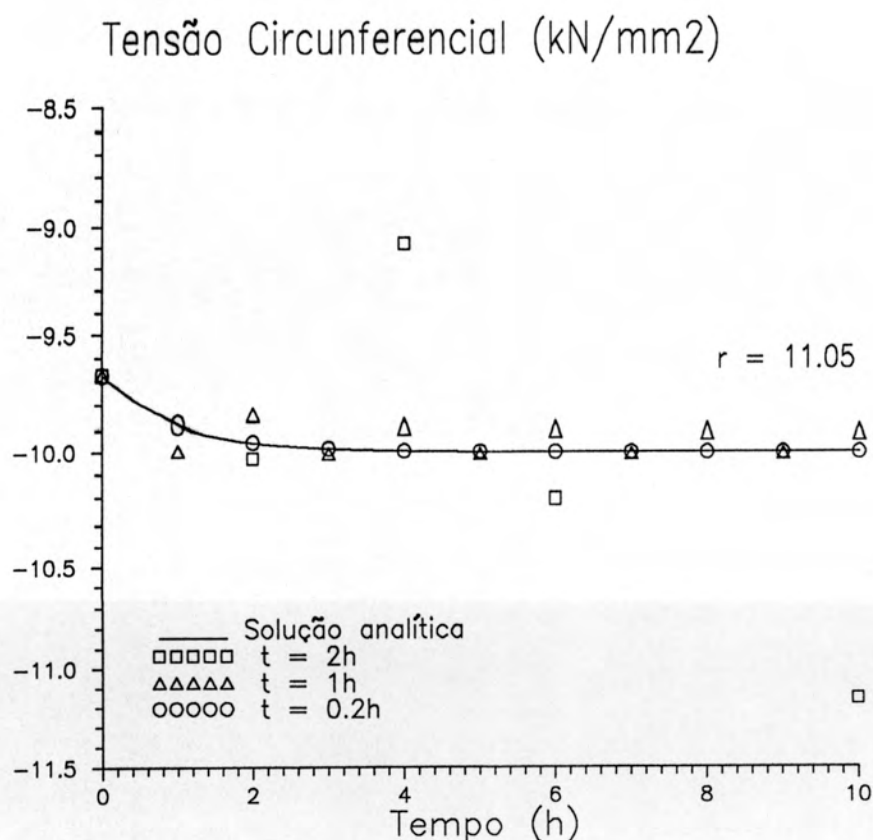


Figura 3.6 - Cilindro vazado sob pressão interna
Tensões circunferenciais - $\nu = 0.499$

3.7.3. Cilindro vazado viscoelástico submetido a resfriamento uniforme

Um cilindro com a mesma geometria do exemplo anterior foi analisado sob um resfriamento uniforme exponencial do tipo:

$$T(t) = -250 (1 - e^{-2t}) \quad (3.63)$$

O material foi considerado elástico à compressão, com constante K , e viscoelástico em corte, seguindo o modelo Standard com constantes G_0 e G_1 para as molas e tempo de retardação $\theta_1 = \eta/G_1$. A solução analítica deste problema pode ser encontrada em (Freudenthal e Shinozuka, 1963)

As constantes do material foram consideradas como $G_0 = 1000 \text{ kN/mm}^2$, $G_1 = 100 \text{ kN/mm}^2$ e $\theta = 5.5\text{h}$. Dois valores para o módulo de compressibilidade volumétrica foram considerados: $K = 2166.67$ ($\nu_0 = 0.3$) e $K = 499667$ ($\nu_0 = 0.499$).

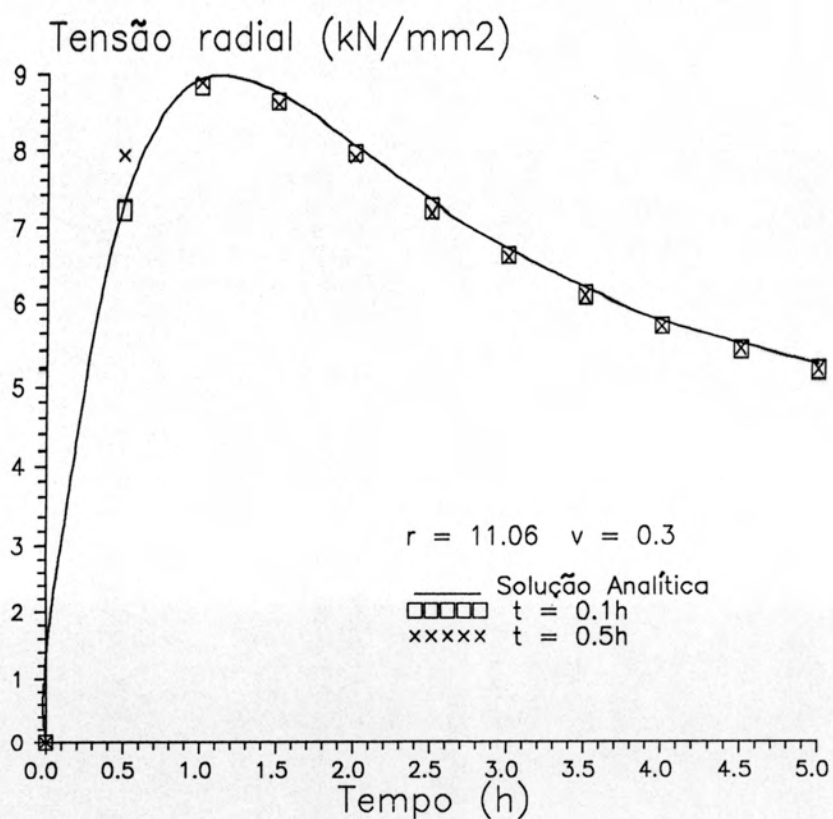


Figura 3.7. - Cilindro sob variação de temperatura
Tensão radial junto a face interna - $\nu = 0.3$

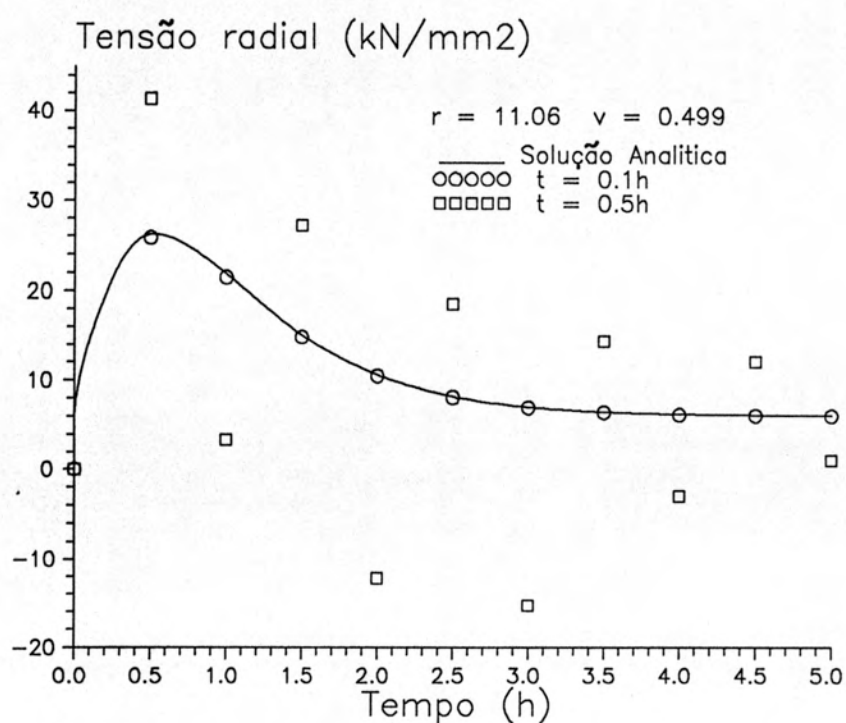


Figura 3.8. - Cilindro sob variação de temperatura
Tensão radial junto a face interna - $\nu = 0.499$

As figuras 3.7 e 3.8 mostram uma comparação entre a solução analítica e os valores numéricos obtidos para a tensão radial nos pontos de integração mais próximos da superfície interna, onde ocorreram os maiores erros percentuais. Percebe-se que, para intervalo de tempo de 0.5h, o método das variáveis de estado apresentou forte oscilação em torno da solução, para o material quase incompressível, fenômeno já registrado no exemplo anterior. Para $\nu_0 = 0.3$, os erros máximos obtidos foram 8.6% para intervalo de tempo $dt = 0.5h$ e 1.28% para $dt = 0.1h$. Para $\nu_0 = 0.499$ e $dt = 0.1h$, o erro máximo foi de 1.81%.

3.7.4. Cilindro vazado viscoelástico sob pressão interna e variação de temperatura ao longo do raio

Neste exemplo será analisado um cilindro vazado cujo raio externo b é o dobro do raio interno a , submetido a uma pressão interna π e cuja distribuição de temperaturas em estado constante varia ao longo do raio segundo a expressão:

$$T(x) = T_0 + \frac{(T_1 - T_0) \ln x}{\ln 2} \quad (3.64)$$

onde $x = r / a$, T_0 é a temperatura no contorno interno e T_1 a temperatura no contorno externo. Os valores considerados foram $T_0 = 298$ e $T_1 = 328$. A função de deslocamento que define o comportamento termo-reologicamente simples é dada por:

$$\Psi(T) = \exp \left\{ 5.6 \cdot 10^5 \left[\frac{1}{298^2} - \frac{1}{T^2} \right] \right\} \quad (3.64)$$

$$\lambda(x) = \Psi (T(x)) \quad (3.65)$$

O material é incompressível, com comportamento viscoelástico em corte representado por um modelo Kelvin cuja função de relaxação é dada por:

$$G(\xi) = G_0 e^{-\xi/\tau} \quad (3.66)$$

A solução analítica deste problema é dada por (Morland e Lee, 1960):

$$M(x) = \int_1^x \frac{dx'}{\lambda(x') x'^3} \quad (3.67)$$

$$\sigma_x(x,t) = -\pi \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) + \left[\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \frac{M(x)}{M(2)} \right] e^{-\frac{3}{8M(2)} \frac{t}{\tau}} \right\} \quad (3.68)$$

$$\sigma_\theta(x,t) = \pi \left\{ \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - 1 - \left[\frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{M(x)}{M(2)} - \frac{1}{x^2 \lambda(x) M(2)} \right] e^{-\frac{3}{8M(2)} \frac{t}{\tau}} \right\} \quad (3.69)$$

onde σ_x e σ_θ são as tensões radiais e circunferenciais, respectivamente.

Os dados considerados foram $a=100$, $b=200$ e $\pi = 10$. A função de deslocamento foi aproximada por 10 trechos lineares. O comportamento reológico foi aproximado por uma mola de constante $K_0 = 2000000$ na parte volumétrica e por um modelo standard de constantes $G_0 = 3000000$, $G_1 = 1000$ e $\theta_1 = 20$. As molas que definem o comportamento instantâneo tem suas constantes muito maiores que a terceira a fim de simular a incompressibilidade e o modelo Kelvin. A distribuição de temperaturas dada por (3.64) foi obtida via M.E.F. para as condições de contorno em temperaturas especificadas. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Figuras 3.9 e 3.10, onde é mostrada a evolução das tensões em 4 pontos ao longo do tempo. Na Figura 3.11 é mostrada a distribuição das tensões ao longo do raio para alguns tempos determinados.

Nestas figuras, os valores teóricos instantâneos fornecidos pelas equações acima constituem valores limites que diferem consideravelmente da resposta fornecida pela solução numérica. A solução do problema de um cilindro vazado sob pressão interna é dada por (Flügge, 1975):

$$\sigma_r = \frac{\pi a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad ; \quad \sigma_\theta = \frac{\pi a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (3.70)$$

que não depende das constantes elásticas e, portanto, não deveria sofrer variação ao longo do tempo. Contudo, a variação da temperatura ao longo do raio faz com que cada ponto do material tenha uma velocidade de deformação viscoelástica diferente, gerando uma variação nas características mecânicas do material ao longo do raio. Isto é responsável pela descontinuidade da

resposta analítica em $t=0$, o que é expressa como um forte gradiente de tensões ao longo dos tempos iniciais na resposta numérica obtida. Para $t = 0.102$, os valores máximos são alcançados e, a partir deste tempo, a solução numérica e a teórica coincidem, com um erro máximo de 0.79% para σ_x e 0.61% para σ_θ , nos pontos de integração mais próximos do contorno externo. Para t tendendo ao infinito, a variação de temperatura já não produz efeitos nas velocidades de deformação viscoelástica, fazendo com que as tensões assumam novamente o valor expresso em (3.70).

Este problema exigiu intervalos de tempo muito menores que os usuais para que a solução não apresentasse instabilidade numérica caracterizada por forte oscilação em torno da resposta teórica. Os intervalos de tempo utilizados foram de 0.0005 até $t=4$, 0.001 até $t=6$ e 0.002 até $t=57$, o que resulta num intervalo de tempo 10000 vezes menor que o tempo de retardação. Isto talvez se deva devido à diferença muito grande entre as constantes do modelo reológico e ao caráter de amplificação da escala temporal devido ao efeito de temperatura. Para uma malha de 16 elementos, este exemplo consumiu aproximadamente 93 horas de processamento em um computador tipo IBM PC AT 286.

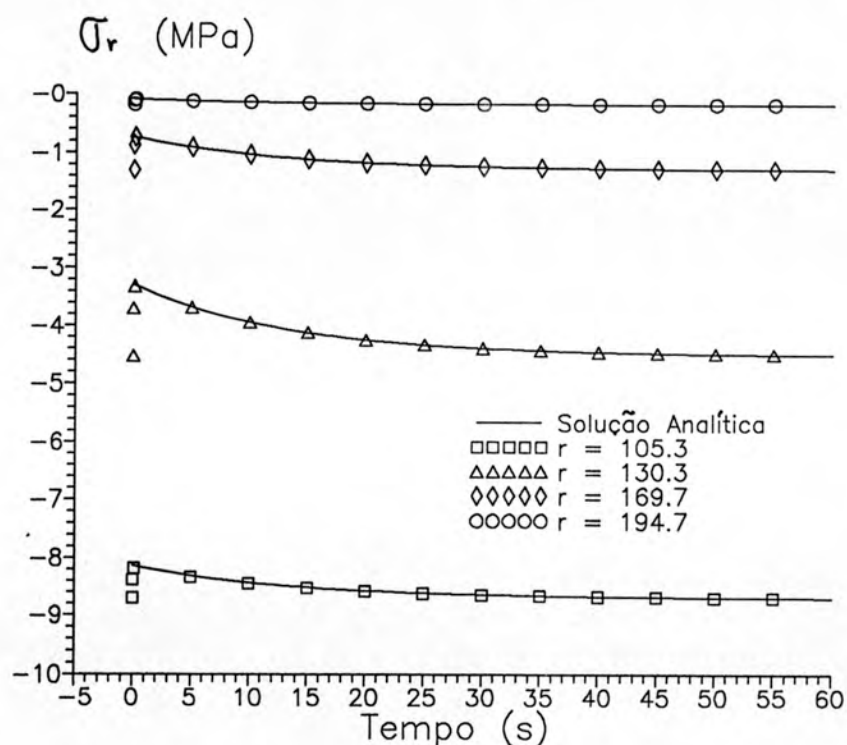


Figura 3.9 - Tensões radiais do exemplo 3.7.4.

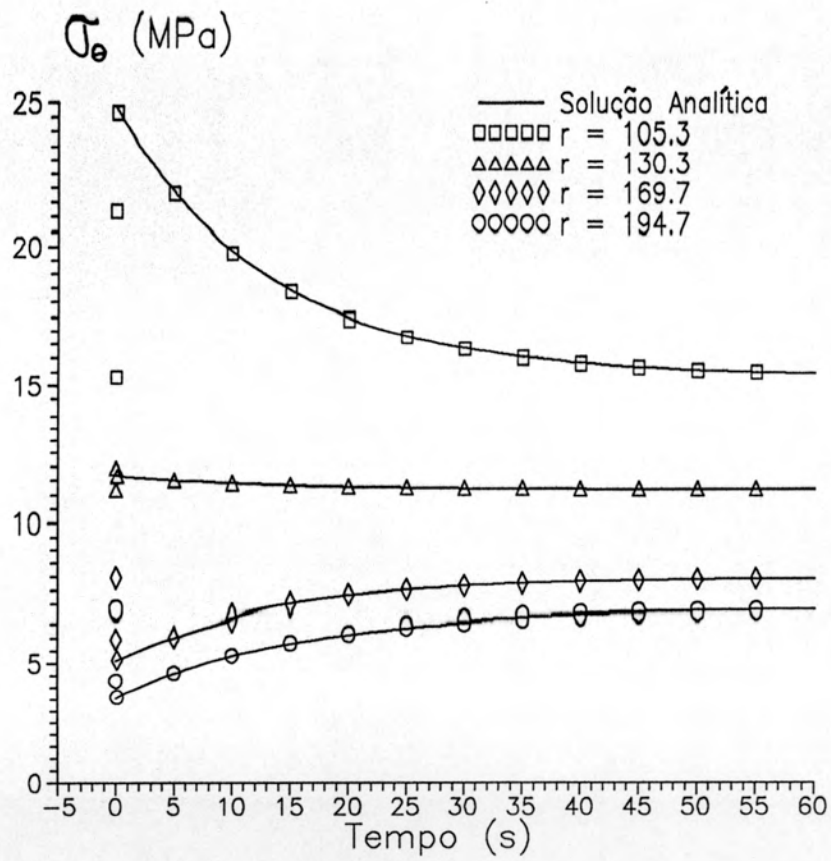


Figura 3.10 - Tensões circunferenciais do exemplo 3.7.4

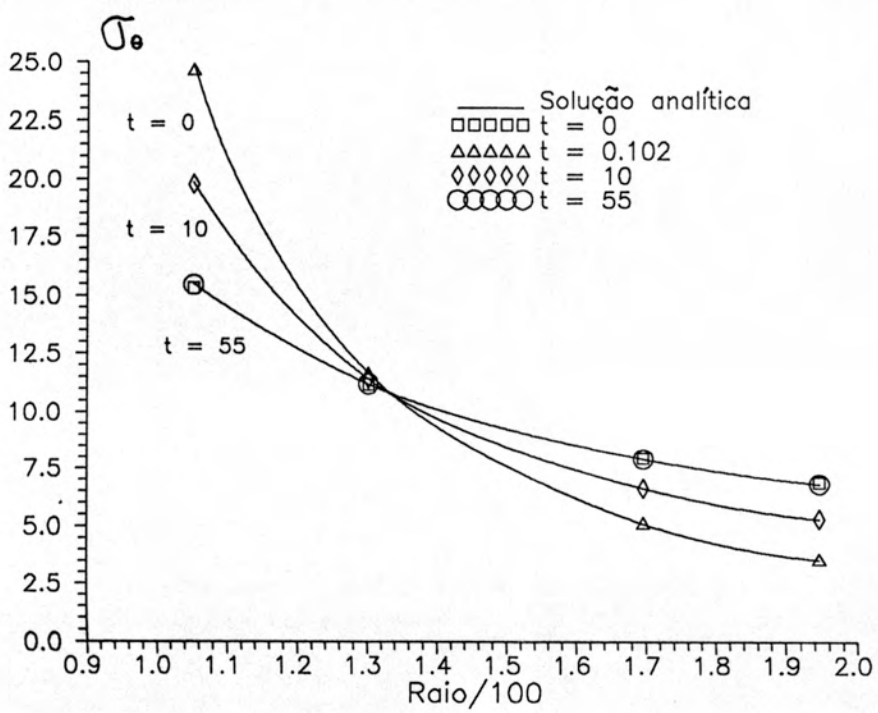


Figura 3.11 - Tensões circunferenciais ao longo do raio

3.7.5. Cubo sob tração restringido lateralmente

Neste exemplo será analisado um cubo submetido a uma tensão de tração ao longo do eixo y , tendo as deformações nas direções x e z restringidas. O material que constitui foi modelado por uma mola de constante K_0 na parte volumétrica e por um modelo standard de constantes G_0 , G_1 e θ_1 na parte de corte, onde $\theta_1 = \eta_1/G_1$ é o tempo de relaxação, sendo η_1 a viscosidade do amortecedor.

A solução para este problema é (Saraiva et al., 1990):

$$\sigma(t) = \sigma_1 \frac{3K_0 G_1 + 3K_0 G_0 (1 - e^{-t/\theta_1}) - 2G_0 G_1}{3K_0 G_1 + 3K_0 G_0 (1 - e^{-t/\theta_1}) + 4G_0 G_1} \quad (3.71)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 \left[\frac{1}{27K_0 G_0} \right] + \sigma \left[\frac{2}{27K_0 G_0} \right] + \frac{1}{3G_1} (\sigma_1 - \sigma) \left[1 - e^{-t/\theta_1} \right] \quad (3.72)$$

onde σ_1 é a tensão atuante na direção livre, $\sigma(t)$ a tensão atuante nas direções restringidas e $\varepsilon(t)$ a deformação na direção livre.

Este problema foi utilizado para testar a eficiência dos processos de integração indicados em (3.15) e (3.16) (tensões constantes em cada intervalo) e (3.19) e (3.20) (variação linear de tensões dentro do intervalo). Considerou-se um cubo com 100 mm de aresta, discretizado por um único elemento. A tensão aplicada σ_1 foi de 1 kN/mm² e as constantes do material adotadas foram $K_0 = 1000$, $G_0 = 1000$, $G_1 = 1000$, todas em kN/mm², e $\theta = 4$ horas. Foi utilizado o algoritmo de tempo auto-adaptável, com um intervalo de tempo inicial de 0.8 horas, ou $\theta/5$. Este intervalo foi adotado intencionalmente grande para que as diferenças de resultados entre os dois processos de integração tornassem-se mais visíveis.

Os resultados obtidos pelos processos numéricos em comparação com a solução analítica podem ser vistos na Figura 3.12. O erro obtido considerando-se variação linear de tensões alcançou um máximo de 3.05%, contra 5.91% obtido com tensões constantes, sendo em cada passo o erro do segundo de 2 a 3 vezes maior que o do primeiro.

Para exemplificar a performance do tratamento numérico de incompressibilidade e de intervalo de tempo auto-adaptável, considerou-se o mesmo problema com os seguintes modelos reológicos: $K_0 = 10000$ kN/mm², $G_0 = G_1 = 4615.4$ kN/mm² e $\theta = 4$ horas (coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$) e $G_0 = G_1$

= 201.3 kN/mm², $\theta = 4$ horas ($\nu = 0.49$). Utilizou-se a mesma malha do problema anterior, com um intervalo de tempo inicial de 0.2 horas ($\theta/20$).

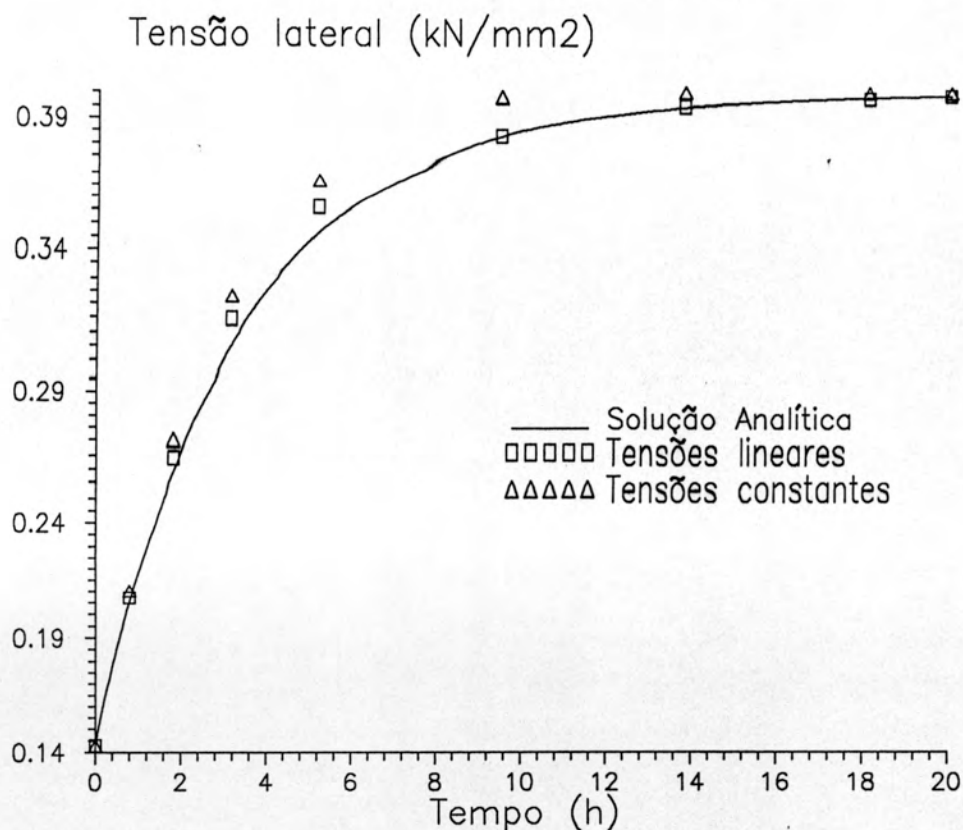


Figura 3.12 - Cubo restringido lateralmente
 Comparação entre processos de integração no tempo

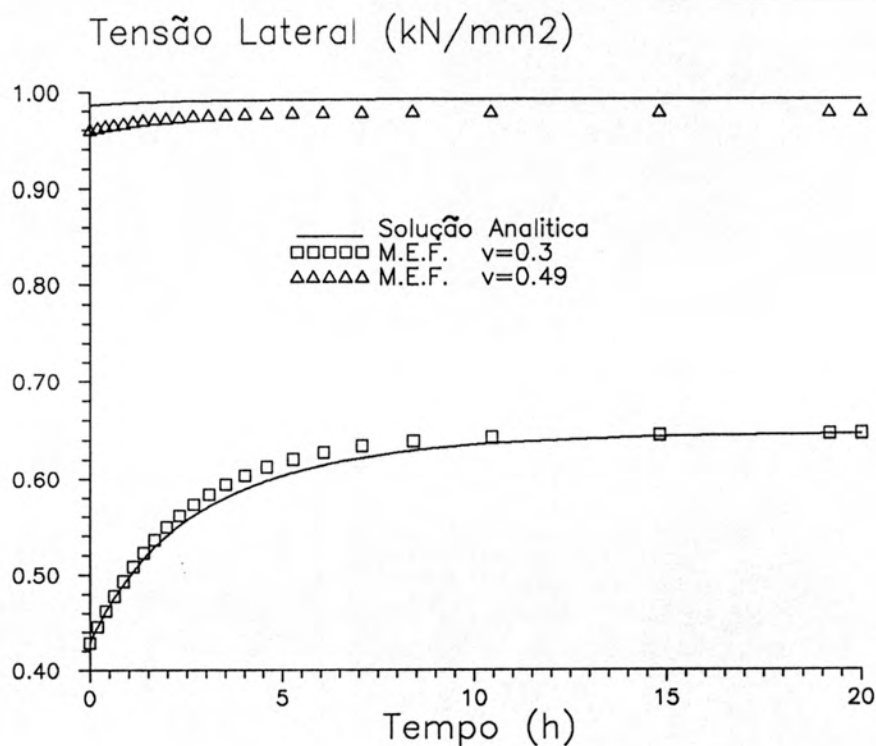


Figura 3.13 - Cubo restringido lateralmente
 Integração reduzida e intervalo de tempo auto-adaptável

A figura 3.13 mostra os resultados obtidos em comparação com a solução analítica. O intervalo de tempo máximo foi de 4.37 horas, com erros percentuais máximos de 2.43% para $\nu=0.3$ e 2.60% para $\nu = 0.49$.

4. ANÁLISE DE FRATURA EM VISCOELASTICIDADE LINEAR

4.1 Introdução

Os materiais viscoelásticos, quando submetidos a um incremento de tensões, experimentam uma deformação instantânea elástica seguida por uma deformação crescente no tempo, que pode ou não se estabilizar, fenômeno este chamado de fluência (*"creep"*). Componentes estruturais construídos com estes materiais podem chegar à ruptura por crescimento de trincas em presença de fluência. Os metais exibem fluência para temperaturas superiores a 30% da correspondente temperatura absoluta de fusão. Muitos componentes de turbinas, usinas termo-nucleares ou convencionais e componentes aero-espaciais são solicitados acima do patamar de fluência descrito. O concreto, os materiais poliméricos e os materiais compósitos com matriz polimérica apresentam fluência já em temperatura ambiente, sendo o fenômeno viscoelástico significativamente mais importante quando estes materiais são utilizados em substituição ao aço e às ligas de alumínio em turbinas e componentes aero-espaciais, onde as temperaturas são bastante altas.

Em todos estes casos, a vida útil dos componentes estruturais é ditada pelo possível crescimento de trincas ao longo do tempo. Segundo Kanninen e Popelar (1985), há dois mecanismos contrastantes e concorrentes envolvidos no crescimento das trincas. A deformação de fluência, que pode relaxar o campo de tensões ao redor da trinca, retardando seu crescimento, e o acúmulo de dano ao longo do material na ponta da trinca, caracterizado por microfissuras e falhas, que tendem a acelerar o crescimento da trinca à medida que se unem. Conforme domine um ou outro fenômeno, há ou não o crescimento da trinca sob fluência.

O fenômeno de crescimento de trincas sob fluência pode ser perturbado por efeitos ambientais e outros fenômenos também dependentes do tempo, como envelhecimento, corrosão, fadiga, etc. Estes efeitos não serão considerados na presente análise, que estará limitada fundamentalmente a aplicações em materiais poliméricos que possam ser considerados como corpos viscoelásticos lineares. O desenvolvimento teórico desta análise pode ser encontrada em (Schapery, 1975 e 1984), (Williams, 1984), (Kanninen e

Popelar, 1985).

O crescimento de trincas sob fluência será analisado pela divisão do fenômeno em três etapas distintas:

i) Crescimento da zona de fratura: a trinca cresce pelo aumento do comprimento da zona de fratura ao longo do tempo. Este fenômeno é intermitente e irregular, ocorrendo desde o instante de carregamento até um instante denominado tempo de iniciação (t_i). Normalmente o intervalo de tempo desde o carregamento até o início do crescimento da trinca é muito menor que o período de crescimento até o tempo de ruptura (t_f).

ii) Crescimento da trinca propriamente dita: a partir do tempo de iniciação, a trinca passa a crescer com velocidade \dot{a} finita, mantendo-se o comprimento da zona de fratura (ω) e a forma da trinca constantes.

iii) Propagação instável da trinca: a partir de um instante denominado tempo de falha ou ruptura (t_f), a trinca passa a crescer instavelmente com uma velocidade \dot{a} muito grande, tendendo teoricamente ao infinito, quando os efeitos de inércia não são levados em consideração.

Uma análise teórica será inicialmente feita para o fenômeno de crescimento e propagação como um todo para o caso de viscoelasticidade linear. Não serão considerados efeitos de inércia. A determinação do início do crescimento da trinca propriamente dita será feita numericamente via Método dos Elementos Finitos.

Neste trabalho não serão abordados os conceitos básicos de mecânica da fratura nem sua aplicação em materiais elásticos lineares, por ser este assunto de uma dissertação de mestrado já iniciada no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil e que deve ser concluída em 1993.

4.2. Modelo coesivo de fratura

Reconhecendo a importância de se incorporar uma zona de processo de fratura em um modelo de fratura dependente do tempo, Knauss (1970) e Schapery (1975) estenderam o modelo de Dugdale (1960) para incluir materiais viscoelásticos, conforme figura 4.1.

As seguintes hipóteses são feitas:

- a) O material fora da zona de fratura é viscoelástico linear;
- b) O material dentro da zona de fratura tem relações constitutivas quaisquer;
- c) A camada de material danificado ao longo das faces da trinca forma uma

zona difusa de espessura pequena o suficiente para não interferir nas previsões do deslocamento v .

- d) As forças externas são aplicadas simetricamente com respeito à trinca, de modo que as tensões tangenciais τ_x são nulas (Modo I de fratura).

O ponto P de abscissa $x_1 = a(t)$ é chamado de ponta efetiva da trinca, e a grandeza $a(t)$ o comprimento efetivo da trinca. O ponto $x_1 = a(t) - \omega$ é a ponta aparente da trinca. Para que se possa considerar na vizinhança de P um estado plano de deformações, Schapery postula que a distância entre P e o contorno do corpo ou outra trinca seja muito maior que ω , que o raio de curvatura em P (raio de curvatura da extremidade da zona de processo de fratura) seja muito maior que ω e que σ_z fora da vizinhança de P seja muito menor que σ_y dentro da vizinhança.

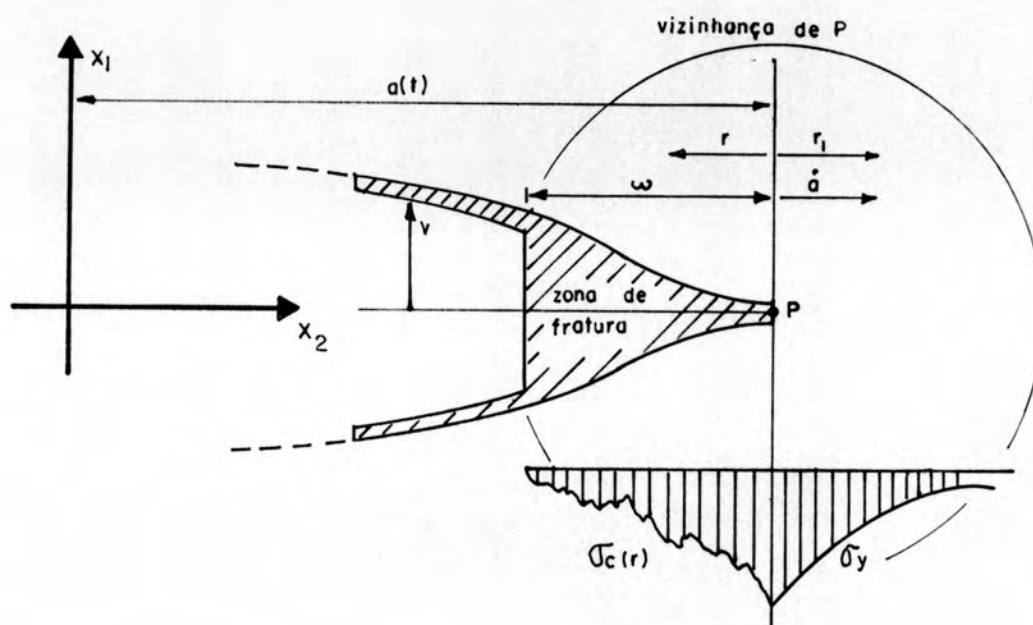


Figura 4.1 - Modelo coesivo de fratura

Aplicando a metodologia de Dugdale / Barenblatt para materiais elásticos (figura 4.2), a situação do corpo submetido a cargas externas e com forças coesivas na região da ponta da trinca pode ser expressa pela decomposição em duas situações mais simples:

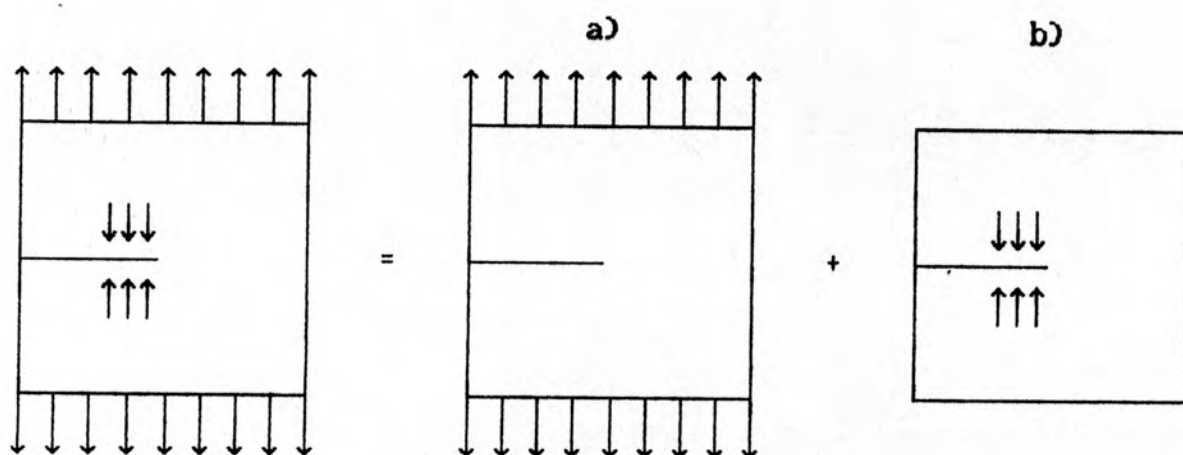


Figura 4.2. - Modelo de Dugdale / Barenblatt

a) Corpo submetido às tensões externas com as faces da trinca livres de tensões.

A solução em tensões e deslocamentos para este caso é dada por Kanninen e Popelar (1985):

$$\sigma_{22}^{(\alpha)} = \frac{K_I}{(2\pi r_1)^{1/2}} H(r_1) \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + O(r_1^{1/2}) \quad (4.1)$$

$$v_2^{(\alpha)} = \frac{K_I}{2\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} H(r) \sin \frac{\theta}{2} \left[k + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + O(r^{3/2}) \quad (4.2)$$

Onde O indica um resto de ordem superior, $H(x)$ a função salto unitário, K_I é o fator de intensidade de tensões para o modo I de fratura (tração na direção perpendicular ao plano de fratura), r_1 é a distância radial a partir de P em direção ao meio viscoelástico linear, r é a distância radial a partir de P em direção à zona de processo de fratura, θ é a inclinação em relação à linha de propagação da fratura, no sentido anti-horário e

$$k = 3-4\nu \text{ para E.P.D.}, \quad (3-\nu)/(1+\nu) \text{ para E.P.T.} \quad (4.3)$$

onde E.P.T. é estado plano de tensões e E.P.D. de deformações.

Ao longo da linha $x_2 = 0$, as equações (4.1) e (4.2) ficam:

$$\sigma_{22}^{(\alpha)} = \frac{K_I}{(2\pi r_1)^{1/2}} H(r_1) + O(r_1^{1/2}) \quad (\theta = 0) \quad (4.4)$$

$$v_2^{(\alpha)} = 4 C_\theta K_I \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} H(r) + O(r^{3/2}) \quad (\theta = \pi) \quad (4.5)$$

onde $C_e = 1/E$ para E.P.T.

$$C_e = (1-\nu^2)/E \text{ para E.P.D.} \quad (4.6)$$

b) Corpo submetido a tensões coesivas atuando sobre as faces da trinca.

Considerando-se plastificação em pequena escala, $\omega \ll a$, a solução em tensões e deslocamentos perto da ponta da trinca fica (Kanninen e Popelar, 1985):

$$\sigma_{22}^{(b)} = - \frac{H(r_1)}{\pi(r_1)^{1/2}} \int_0^\omega \frac{\sigma_c(\xi)}{\xi^{1/2}} d\xi \quad (4.7)$$

$$v_2^{(b)} = - \frac{2C_e}{\pi} H(r) \int_0^\omega \sigma_c(\xi) \ln \left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{r}}{\sqrt{\xi} - \sqrt{r}} \right| d\xi \quad (4.8)$$

A solução procurada é dada pela soma das soluções de a) e b).

$$\sigma_{22} = \frac{KI}{(2\pi r_1)^{1/2}} H(r_1) - \frac{H(r_1)}{\pi(r_1)^{1/2}} \int_0^\omega \frac{\sigma_c(\xi)}{\xi^{1/2}} d\xi + O(r_1^{1/2}) \quad (4.9)$$

Para que a tensão total σ_{22} seja finita em $r_1=0$, os termos singulares devem anular-se, de modo que:

$$\frac{KI}{(2\pi r_1)^{1/2}} H(r_1) - \frac{H(r_1)}{\pi(r_1)^{1/2}} \int_0^\omega \frac{\sigma_c(\xi)}{\xi^{1/2}} d\xi = 0$$

$$KI = \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} \int_0^\omega \frac{\sigma_c(\xi)}{\xi^{1/2}} d\xi \quad (4.10)$$

A equação (4.10) dá o comprimento da zona de fratura, conhecida a distribuição de tensões coesivas $\sigma_c(\xi)$.

Expressando $\sigma_c(\xi)$ em função de seu valor máximo σ_m e um fator de forma $f^*(\xi)$, e fazendo a mudança de variável $\eta^2 = \xi/\omega$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_m f^*(\xi) & , \quad d\xi &= 2\eta\omega d\eta \\ \xi = 0 &\rightarrow \eta = 0 & , \quad \xi = \omega &\rightarrow \eta = 1 \end{aligned}$$

$$KI = \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} \int_0^1 \frac{\sigma_m f^*(\omega\eta^2)}{\eta\omega^{1/2}} 2\eta\omega d\eta$$

Sendo $\omega = \text{constante}$, $f^*(\omega\eta^2) = f(\eta^2)$, obtém-se:

$$K_I = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} 2\omega^{1/2} \sigma_m \int_0^1 f(\eta^2) d\eta$$

$$\omega = \frac{K_I^2 \pi}{8 \sigma_m^2 D^2} \quad (4.11)$$

$$D = \int_0^1 f(\eta^2) d\eta \leq 1 \quad (4.12)$$

Se $\sigma_c(r) = \sigma_y = \text{constante}$, $D=1$ e a (4.11) fica:

$$\omega = \frac{K_I^2 \pi}{8 \sigma_y^2} \quad (4.13)$$

que é o resultado de Dugdale para plastificação em pequena escala (*small scale yielding*).

Considerando $r \rightarrow 0$, $O(r^{3/2}) \rightarrow 0$, somando (4.5) e (4.8) e aplicando (4.10), resulta:

$$\begin{aligned} v_2 = & 4 C_e \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} H(r) \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\omega \frac{\sigma_c(\xi)}{\xi^{1/2}} d\xi - \\ & - \frac{2C_e}{\pi} H(r) \int_0^\omega \sigma_c(\xi) \ln \left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{r}}{\sqrt{\xi} - \sqrt{r}} \right| d\xi \\ v_2 = & \frac{2C_e H(r)}{\pi} \int_0^\omega \sigma_c(\xi) \left[2 \left(\frac{r}{\xi} \right)^{1/2} - \ln \left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{r}}{\sqrt{\xi} - \sqrt{r}} \right| \right] d\xi \quad (4.14) \end{aligned}$$

Para $\sigma_c(r) = \sigma_y$, a (4.14) fica:

$$v_2 = \frac{2C_e H(r)}{\pi} \sigma_y \int_0^\omega \left[2 \left(\frac{r}{\xi} \right)^{1/2} - \ln \left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{r}}{\sqrt{\xi} - \sqrt{r}} \right| \right] d\xi$$

Para avaliar a integral faz-se:

$$u = \sqrt{x+a} \quad , \quad x = u^2 - 2ua + a^2 \quad , \quad dx = 2(u-a)du$$

$$\int \ln(\sqrt{x} + a) dx = \int 2 \ln u (u-a) du = \int 2u \ln u du - \int 2a \ln u du =$$

Integrando por partes, obtém-se:

$$u^2 \ln u - \frac{u^2}{2} - 2au \ln u + 2au = \ln u \left[u^2 - 2au \right] - \left[\frac{u^2}{2} - 2au \right] =$$

Retornando à variável x :

$$\int \ln(\sqrt{x} + a) dx = \ln(\sqrt{x} + a) (x - a^2) - \left(\frac{x}{2} - a\sqrt{x} - \frac{3}{2} a^2 \right)$$

De modo similar:

$$\int \ln(\sqrt{x} - a) dx = \ln(\sqrt{x} - a) (x - a^2) - \left(\frac{x}{2} + a\sqrt{x} - \frac{3}{2} a^2 \right)$$

Resultando:

$$\int_0^{\omega} \ln \left| \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} - a} \right| dx = (x - a^2) \ln \left| \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} - a} \right| + 2a\sqrt{x}$$

$$v_z = \frac{2C_0 H(r)}{\pi} \sigma_y \left[4\sqrt{r\xi} - (x-r) \ln \left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{r}}{\sqrt{\xi} - \sqrt{r}} \right| - 2\sqrt{r\xi} \right]_0^{\omega}$$

$$v_z = \frac{2C_0 H(r)}{\pi} \sigma_y \left[2\sqrt{r\omega} - (\omega-r) \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{r}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{r}} \right| \right]$$

Fazendo a mudança de variável $r = a(\tau) - x_1$, a abertura total da trinca fica:

$$\delta = 2v_z = \frac{8C_0 H(r)}{\pi} \sigma_y \left[\sqrt{\omega(a(\tau) - x_1)} - \frac{\omega + x_1 - a(\tau)}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{a(\tau) - x_1}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{a(\tau) - x_1}} \right| \right] \quad (4.15)$$

4.3. Propagação de trincas em materiais viscoelásticos

Será apresentada a seguir a formulação utilizada para a avaliação da propagação de trincas em materiais viscoelásticos.

4.3.1. Relações viscoelásticas básicas - Princípio da correspondência

Quando um corpo viscoelástico é submetido a uma tensão constante uniaxial aplicada a partir de um instante τ_0 , isto é:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t-\tau_0)$$

a resposta viscoelástica pode ser definida por:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t-\tau_0) \quad \text{para estado plano de tensões.}$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 C(t-\tau_0) \quad \text{para estado plano de deformações.}$$

$$\text{onde } C(t-\tau_0) = (1 - \nu^2(t-\tau_0)) D(t-\tau_0)$$

Sem perda de generalidade, considerar-se-á que a tensão foi aplicada no instante 0, ou seja, $\tau_0 = 0$. Deste modo, pode-se definir:

$$C(0) = \frac{1-\nu_0^2}{E_0} \quad , \text{ onde } \nu_0 = \nu(0) \text{ e } E_0 = 1 / D(0)$$

$$C(\infty) = \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty} \quad , \text{ onde } \nu_\infty = \nu(\infty) \text{ e } E_\infty = 1 / D(\infty)$$

Para a maioria dos polímeros, podemos aproximar a função $C(t)$ em determinados períodos de interesse pela função:

$$C(t) = C_0 + C_2 t^m \tag{4.16}$$

A (4.16) possibilita a obtenção de soluções fechadas no desenvolvimento a seguir, apesar de não ser limitada para t tendendo a infinito. Para que se tenha uma solução limitada em $t = \infty$, pode-se utilizar a aproximação:

$$C(t) = C_1 + C_3(1 - e^{-t}) \tag{4.17}$$

Quando a solução de um problema elástico equivalente é conhecida, a solução de um problema viscoelástico pode ser produzida por meio do princípio da correspondência. Se $v_z(0) = C\varepsilon_1$ é o campo de deslocamentos elásticos, o campo correspondente viscoelástico é obtido substituindo-se a constante do material pelo operador viscoelástico equivalente:

$$v_2(t) = \int_0^t C(t-\tau) \frac{\partial v_1}{\partial \tau} d\tau \quad (4.18)$$

Este princípio pode ser aplicado em corpos viscoelásticos que contenham trincas estacionárias ou em propagação, desde que as seguintes hipóteses sejam cumpridas (Schapery, 1975):

- a) Não haja decréscimo no tamanho da trinca;
- b) As tensões elásticas ao longo da linha de propagação $x_2=0$ independam de E e ν ;
- c) A dependência de v_2 ao longo das faces da trinca com relação a E, ν deve poder ser posta na forma separável $f(E, \nu)g(r)$.

Estas condições devem ser preenchidas por toda a trinca e sua extensão até o máximo tempo de interesse, e não apenas na vizinhança de P na trinca instantânea.

A condição b) é satisfeita se as tensões coesivas ou de fratura $\sigma_c(r)$ são prescritas *a priori* como no modelo de Dugdale, e o corpo é isostaticamente vinculado ou tem as condições de contorno somente em tensões.

A condição c) é satisfeita se a força resultante em qualquer contorno fechado é nula. Para outras condições de contorno que não as especificadas anteriormente, v_2 não pode ser posto na forma separável. No entanto, se considerarmos o coeficiente de Poisson ν constante ao longo do tempo, condição esta satisfeita por muitos polímeros, o princípio de correspondência ainda é válido mesmo quando v_2 não é separável na solução elástica.

Se o princípio de correspondência é válido, as tensões do caso viscoelástico são as mesmas do elástico, e a única equação em tensões necessária é a (4.11), com K_I sendo calculado para o caso elástico com $\sigma_c(r) = 0$.

Como na (4.15) a condição c) é satisfeita, a versão viscoelástica desta equação fica na forma:

$$\delta = \frac{8}{\pi} \sigma_y \int_{t_1}^t C(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\sqrt{\omega(a(\tau)-x_1)} - \frac{\omega + x_1 - a(\tau)}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega + \sqrt{a(\tau)-x_1}}}{\sqrt{\omega - \sqrt{a(\tau)-x_1}}} \right| \right] d\tau \quad (4.19)$$

considerando-se que não há abertura da trinca em $x=a(t_1)$ antes da chegada da ponta da trinca em um processo de crescimento.

4.3.2. Critério de fratura

O trabalho exercido pelo meio contínuo em uma tira de material na extremidade esquerda da zona de fratura (Ponta aparente da trinca - figura 4.1), de área dA , desde o início da deformação até a deformação máxima, por unidade de superfície (ou comprimento, considerando-se espessura unitária) é:

$$2\bar{\gamma} = \int \sigma_c d\delta \quad (4.20)$$

onde $\bar{\gamma}$ pode ser considerado como a energia específica necessária para a propagação da fissura, formando novas superfícies na ponta aparente da trinca (energia de fratura).

Considerando que a zona de ruptura permanece com forma constante ao longo do intervalo de tempo necessário a propagação do comprimento ω durante o processo de crescimento da trinca, o deslocamento δ pode ser expresso em função da coordenada temporal ou de coordenadas espaciais, conforme figura 4.3.

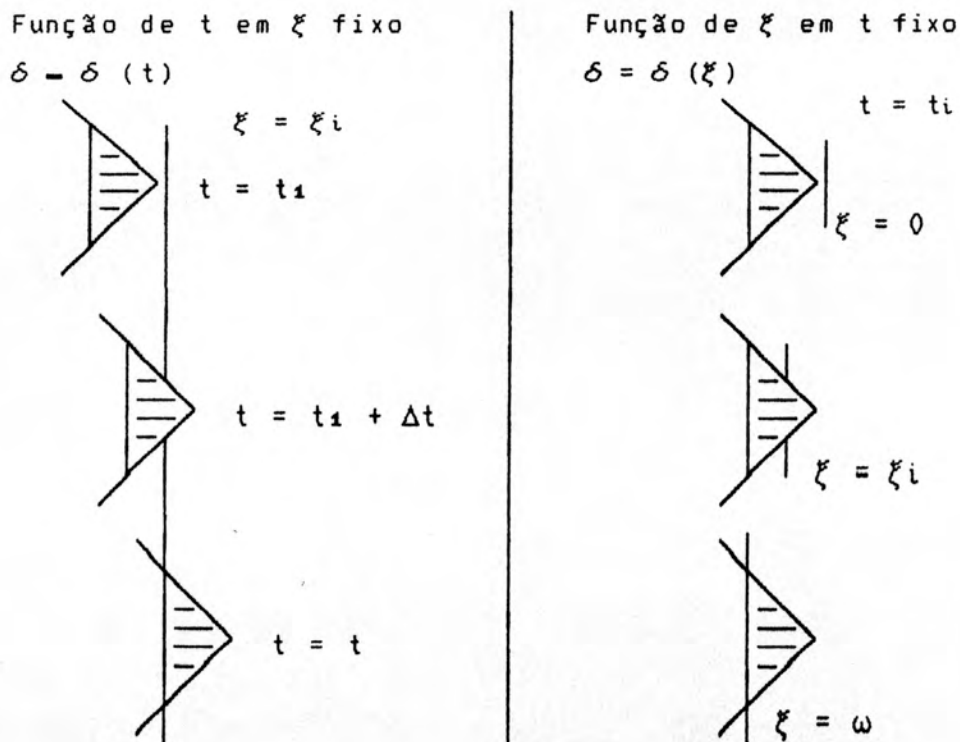


Figura 4.3. - Deslocamento $\delta(t)$ e $\delta(\xi)$

No primeiro caso, a expressão (4.20) fica:

$$2\bar{\gamma} = \int \sigma_c \frac{\partial \delta}{\partial t} dt \quad (4.21)$$

e, no segundo :

$$2\bar{\gamma} = \int \sigma_c \frac{\partial \delta}{\partial \xi} d\xi \quad (4.22)$$

as quais, para uma tensão coesiva constante, se reduzem a:

$$2\bar{\gamma} = \sigma_y \delta_c = \sigma_y \delta_t \quad (4.23)$$

4.3.3. Crescimento da zona de fratura

A partir da aplicação das tensões, a zona de fratura passa a crescer até atingir seu comprimento final ω , quando então começa o crescimento da trinca propriamente dita. Até o tempo de iniciação t_i em que ocorre o crescimento da trinca, a abertura da trinca em $x_1 = a_0$, onde a_0 é o comprimento inicial da trinca, é dado por (4.19) com $a(\tau) - x_1 = \omega(\tau)$, $\omega = \omega(\tau)$ e $t_1 = 0$.

$$\delta = \frac{8}{\pi} \sigma_y \int_0^{t_i} C(t_i - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\sqrt{\omega(\tau)^2} - \frac{\omega(\tau) - \omega(\tau)}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega(\tau) + \sqrt{\omega(\tau)}}}{\sqrt{\omega(\tau) - \sqrt{\omega(\tau)}}} \right| \right] d\tau$$

$$\delta = \frac{8}{\pi} \sigma_y \int_0^{t_i} C(t_i - \tau) \frac{\partial \omega(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

Aplicando a (4.23) e (4.11) resulta:

$$2\bar{\gamma} = \sigma_y \delta_c = \frac{8}{\pi} \sigma_y^2 \int_0^{t_i} C(t_i - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{K_I(\tau)^2 \pi}{8 \sigma_y^2} d\tau$$

$$2\bar{\gamma} = \int_0^{t_i} C(t_i - \tau) \frac{\partial K_I(\tau)^2}{\partial \tau} d\tau \quad (4.24)$$

A equação (4.24), posta em função da taxa de liberação de energia de deformação G , ou do valor da integral J de Rice, avaliados para o caso

elástico, resulta:

$$2\bar{\gamma} = \int_0^{t_i} C(t_i - \tau) \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_0^{t_i} C(t_i - \tau) \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.25)$$

onde E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

Para o caso da tensão remota ser do tipo $\sigma(t) = H(t)\sigma$, $K_I(t) = H(t)K_I$, $t=0$, da (4.24) obtém-se:

$$2\bar{\gamma} = \sigma_y \delta_c = C(t_i) K_I^2 \quad (4.26)$$

Como ilustração, consideremos que, ao longo do período de tempo de interesse, possamos fazer a aproximação (4.16), onde C_0 , C_2 e m são quantidades positivas. Aplicado a (4.16) na (4.26) resulta:

$$2\bar{\gamma} = (C_0 + C_2 t_i^m) K_I^2$$

$$t_i = \left[\frac{\frac{2\bar{\gamma}}{K_I^2} - C_0}{C_2} \right]^{1/m} \quad (4.27)$$

Fazendo a aproximação (4.17), obtém-se

$$2\bar{\gamma} = \left[C_1 + C_3(1 - e^{-t_i}) \right] K_I^2$$

$$t_i = - \ln \left[1 - \frac{\left[\frac{2\bar{\gamma}}{K_I^2} - C_1 \right]}{C_3} \right] \quad (4.28)$$

3.4. Crescimento da trinca propriamente dita

Durante o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ durante o qual a trinca propaga um incremento ω , considerar-se-á ω e \dot{a} constantes, de modo que $\omega = \dot{a}(t_2 - t_1)$. Para tensão de coesão constante, a combinação das equações (4.23) e (4.19) resulta

$$2\bar{\gamma} = \frac{8}{\pi} \sigma_y^2 \int_{t_1}^{t_2} C(t_2 - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[2\sqrt{\omega(a(\tau) - x_1)} - \frac{\omega + x_1 - a(\tau)}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{a(\tau) - x_1}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{a(\tau) - x_1}} \right| \right] d\tau$$

$$\omega = \dot{a}(t_2 - t_1)$$

$$r = a(\tau) - x_1 = \dot{a}(\tau - t_1), \quad \tau \geq t_1$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\omega \dot{a}(\tau - t_1)} = \sqrt{\omega \dot{a}} / (2\sqrt{\tau - t_1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\omega - \dot{a}(\tau - t_1)}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}} \right| \right] = -\frac{\dot{a}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}} \right| +$$

$$\frac{\omega - \dot{a}(\tau - t_1)}{2} \left[\frac{\sqrt{\dot{a}}}{(\sqrt{\omega} + \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}) 2\sqrt{\tau - t_1}} + \frac{\sqrt{\dot{a}}}{(\sqrt{\omega} - \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}) 2\sqrt{\tau - t_1}} \right] =$$

$$-\frac{\dot{a}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}} \right| + \frac{\sqrt{\dot{a}\omega}}{2\sqrt{\tau - t_1}}$$

$$2\bar{\gamma} = \frac{8}{\pi} \sigma_y^2 \int_{t_1}^{t_2} C(t_2 - \tau) \frac{\dot{a}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}} \right| d\tau$$

Aplicando a (4.13), resulta:

$$2\bar{\gamma} = \frac{8}{\pi} \frac{K_I^2}{\omega} \frac{\pi}{8} \int_{t_1}^{t_2} C(t_2 - \tau) \frac{\dot{a}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\dot{a}(\tau - t_1)}} \right| d\tau$$

Fazendo a mudança de variáveis:

$$s^* = \frac{\dot{a}(\tau - t_1)}{\omega}, \quad \tau = \frac{s^* \omega}{\dot{a}}, \quad d\tau = \frac{\omega}{\dot{a}} ds^*$$

$$\text{para } \tau = t_1, \quad s^* = 0$$

$$\text{para } \tau = t_2, \quad s^* = \frac{\dot{a}}{\omega} (t_2 - t_1) = \frac{\dot{a}}{\omega} \frac{W}{\dot{a}} = 1$$

$$2\bar{\gamma} = \frac{KI^2}{2\omega} \int_0^1 C\left(t_2 - \frac{s^* \omega}{a} - t_1\right) \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{s^*}}{1 - \sqrt{s^*}} \right| \frac{\omega}{a} ds^*$$

$$2\bar{\gamma} = \frac{KI^2}{2} \int_0^1 C\left(\frac{\omega}{a} - s^* \frac{\omega}{a}\right) \ln \left| \frac{1 + \sqrt{s^*}}{1 - \sqrt{s^*}} \right| ds^*$$

Definindo:

$$s = 1 - s^*, ds^* = -ds$$

$$\text{para } s^* = 1, s = 0$$

$$s^* = 0, s = 1$$

$$2\bar{\gamma} = \frac{KI^2}{2} \int_1^0 C\left(\frac{\omega}{a} s\right) \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-s}}{1 - \sqrt{1-s}} \right| (-1) ds$$

$$2\bar{\gamma} = \frac{KI^2}{2} \int_1^0 C\left(\frac{\omega}{a} s\right) \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right| ds \quad (4.29)$$

Para que possamos posteriormente estudar alguns casos limites, calcularemos o valor da integral:

$$\int_1^0 \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right| ds$$

$$\text{Fazendo } u = 1 - \sqrt{1-s}, u^2 = 2 - 2\sqrt{1-s} - s$$

$$s = 2u - u^2, ds = 2(1-u) du$$

$$\int \ln(1 - \sqrt{1-s}) = \int 2 \ln(u) (1-u) du = \ln(u) \left[2u - u^2 \right] - \left[2u - \frac{u^2}{2} \right] =$$

$$\ln(1 - \sqrt{1-s}) s - 1 + \sqrt{1-s} - s/2$$

De maneira similar:

$$\int \ln(1 + \sqrt{1-s}) ds = \ln(1 + \sqrt{1-s}) s - 1 - \sqrt{1-s} - s/2$$

$$\int_1^0 \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right| ds = \left[s \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right) + 2\sqrt{1-s} \right]_1^0 =$$

$$\left[\ln \left(\frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right) + 2\sqrt{1-s} \right]_1^0 = [0 + 2 - 0 - 0] = 2 \quad (4.30)$$

Como ilustração, consideremos que, ao longo do período de tempo de interesse, possamos fazer a aproximação (4.16), onde C_0 , C_2 e m são quantidades positivas. Aplicado a (4.16) na (4.29) resulta:

$$2\bar{\gamma} = \frac{K_I^2}{2} \int_1^0 \left(C_0 + C_2 \left(\frac{\omega}{a} s \right)^m \right) \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right| ds =$$

$$\frac{K_I^2}{2} \int_1^0 C_0 \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right| ds + \frac{K_I^2}{2} \int_1^0 C_2 \left(\frac{\omega}{a} s \right)^m \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right| ds$$

Considerando a (4.30) podemos escrever:

$$2\bar{\gamma} = K_I^2 C_0 + K_I^2 C_2 \frac{\omega^m}{a^m} I \quad (4.31)$$

$$\text{onde } I = \frac{1}{2} \int_1^0 s^m \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}} \right| ds$$

Considerando a (4.13) resulta:

$$\omega^m = \frac{\pi^m}{\theta^m} \frac{K_I^{2m}}{\sigma_y^{2m}}$$

$$2\bar{\gamma} = K_I^2 C_0 + \frac{K_I^{2+2m}}{\sigma_y^{2m}} \frac{C_2 I \pi^m}{a^m \theta^m}$$

$$\dot{a} = \frac{K_I^{2+2/m}}{\sigma_y^2} \frac{\pi}{\theta} \left[\frac{C_2 I}{2\bar{\gamma} - K_I^2 C_0} \right]^{1/m} \quad (4.32)$$

Se considerarmos a aproximação (4.17), a (4.29) fica:

$$2\bar{\gamma} = \frac{KI^2}{2} \int_1^0 C_1 \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds + \frac{KI^2}{2} \int_1^0 C_2 \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds -$$

$$\frac{KI^2}{2} \int_1^0 C_3 e^{-\omega s/a} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds \quad (4.33)$$

4.3.5. Discussão

Consideremos um corpo cujo trabalho para a criação de novas trincas seja $2\bar{\gamma}$, independentemente da velocidade de propagação da trinca \dot{a} , e cujas características do material sejam viscoelásticas lineares.

Se a ponta da trinca for modelada matematicamente como tendo uma forma aguda, sem uma zona de processo de fratura, o campo de tensões apresenta uma singularidade na ponta da trinca. Neste caso, independentemente da velocidade \dot{a} , o descarregamento da ponta da trinca será instantâneo, de modo que a abertura da ponta da trinca é governada pelas propriedades elásticas instantâneas. O trabalho, calculado em função das condições ao redor da ponta da trinca, é dado por:

$$2\bar{\gamma} = C(0) KI^2 \quad (4.34)$$

Este resultado pode ser confirmado fazendo $\sigma_y \rightarrow \infty$ na equação (4.13), fornecendo:

$$\omega = \frac{KI^2 \pi}{8 \sigma_y^2} \rightarrow 0$$

de modo que a (4.29) fica:

$$2\bar{\gamma} = \frac{KI^2}{2} \int_1^0 C(0) \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds$$

que, usando a (4.28), fica:

$$2\bar{\gamma} = C(0) KI^2$$

que reproduz o resultado da (4.34), mostrando que, se a ponta da trinca é modelada sem uma zona de processo de fratura, o comportamento viscoelástico é idêntico ao elástico. Em virtude de inúmeras análises experimentais demonstrarem o crescimento diferido de trincas em materiais sob fluência, verifica-se a necessidade de modelagem de uma zona de processo de fratura na ponta da trinca.

Por outro lado, se modelarmos a ponta da trinca como tendo uma zona de processo de fratura, onde o material sofre grandes deformações, então o comportamento do fenômeno passa a ser dependente da velocidade de propagação \dot{a} .

Se a velocidade de propagação for baixa, $\dot{a} \rightarrow 0$, o material sofre uma deformação lenta na zona de fratura, sofrendo um descarregamento lento, de forma que sua resposta será equivalente a uma resposta elástica em que as características do material fosse iguais às características viscoelástica de estabilização a longo prazo $C(\infty)$. O trabalho será expresso por:

$$2\bar{\gamma} = C(\infty) K_{I0}^2 \quad (4.35)$$

onde o índice de K_I se refere á velocidade de crescimento.

Similarmente, se a velocidade de crescimento for muito rápida, $\dot{a} \rightarrow \infty$, o descarregamento do elemento se dará de forma instantânea, e a resposta será similar à elástica com propriedades instantâneas $C(0)$, de modo que o trabalho é dado por:

$$2\bar{\gamma} = C(0) K_{I0}^2 \quad (4.36)$$

Para verificar as afirmações acima, testaremos os casos limite $\dot{a} \rightarrow 0$ e $\dot{a} \rightarrow \infty$ nas equações desenvolvidas nas seções anteriores.

Fazendo $\dot{a} \rightarrow 0$, a (4.29) fica, usando a (4.30):

$$2\bar{\gamma} = \frac{K_I^2}{2} \int_1^0 C(\infty) \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds = \frac{K_I^2}{2} C(\infty) \int_1^0 \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds$$

$$2\bar{\gamma} = K_I^2 C(\infty)$$

que é o resultado obtido e (4.35).

Quando $\dot{a} \rightarrow \infty$, a (4.29) fica:

$$2\bar{\gamma} = \frac{K_I^2}{2} \int_1^0 C(0) \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds = \frac{K_I^2}{2} C(0) \int_1^0 \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}} \right| ds$$

$$2\bar{\gamma} = K_I^2 C(0)$$

que é o mesmo resultado obtido em (4.36).

Considerando a aproximação (4.16), aplicando na (4.36):

$$K_{I\infty}^2 = \frac{2\bar{\gamma}}{C(0)} = \frac{2\bar{\gamma}}{C_0}$$

Aplicando o resultado acima na (4.32) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{a}^m &= \frac{C_z I K_I^{2m+2} \pi^m}{8^m \sigma_y^{2m} 2\bar{\gamma} \left(1 - K_I^2 / K_{I\infty}^2\right)} \\ \dot{a} &= \frac{K_I^{2+2/m}}{\sigma_y^2} \frac{\pi}{8} \left[\frac{C_z I}{2\bar{\gamma} \left(1 - K_I^2 / K_{I\infty}^2\right)} \right]^{1/m} \end{aligned} \quad (4.37)$$

A (4.37) mostra que, se $K_I \rightarrow K_{I\infty}$, $\dot{a} \rightarrow \infty$, ou seja, ocorre propagação instável da trinca. O mesmo pode ser mostrado a partir da (4.27), onde, para $t_i \rightarrow 0$, resulta:

$$\frac{2\bar{\gamma}}{K_I^2} - C_0 \rightarrow 0, \quad K_I^2 \rightarrow \frac{2\bar{\gamma}}{C_0}, \quad K_I \rightarrow K_{I0}$$

Considerando-se a (4.33) e a (4.34), levando-se em conta (4.30), para $\dot{a} \rightarrow 0$ obtém-se:

$$2\bar{\gamma} = K_I^2 (C_1 + C_3), \quad K_I^2 = \frac{2\bar{\gamma}}{C_1 + C_3} = \frac{2\bar{\gamma}}{C(\infty)} = K_{I0}^2$$

Logo, para $K_I \leq K_{I0}$, $\dot{a} = 0$, não existindo crescimento da trinca.

Baseando-se nos resultados obtidos acima pode-se concluir que se o valor de K_I for inferior ao valor sub-crítico K_{I0} (correspondente à situação de estabilização a longo prazo), não haverá crescimento da trinca, permanecendo o corpo estável. Por outro lado, se K_I for superior ao valor crítico $K_{I\infty}$ (correspondente à situação elástica instantânea), ocorrerá

propagação instável da trinca, com velocidade de propagação tendendo ao infinito quando não são considerados efeitos de inércia, levando à ruptura total ou colapso do corpo. Para valores de K_I entre K_{I0} e $K_{I\infty}$, ocorre crescimento lento da trinca, até que a mesma atinja um tamanho que propicie a propagação instável. Este fenômeno, chamado propagação sub-crítica, ocorre também em ensaios de corrosão sob tensão e fadiga.

O comportamento acima descrito está ilustrado na figura 4.4.

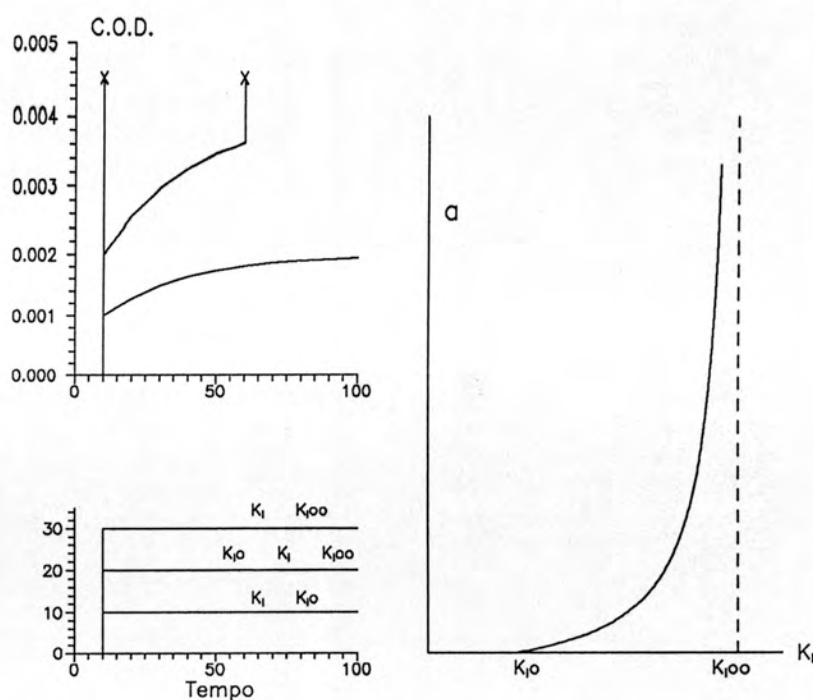


Figura 4.4. Comportamento viscoelástico da fratura

4.5. EXEMPLO

Considerando uma placa remotamente tensionada, com a tensão aplicada na forma de degrau $\sigma = \sigma H(t)$ com uma trinca central de tamanho inicial $2a_0$ muito menor que a largura da placa, conforme figura 4.5.

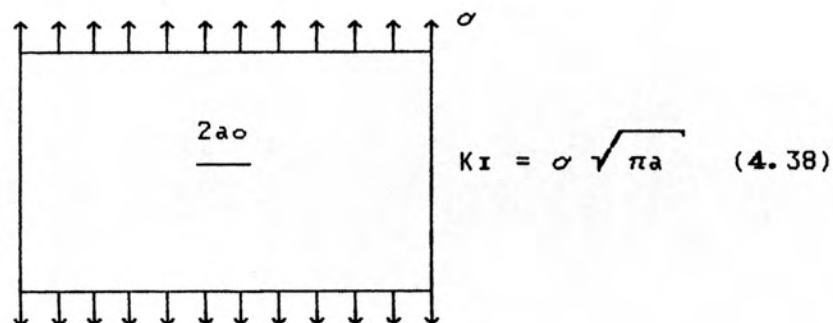


Figura 4.5 - Placa remotamente tensionada

Aplicando a (4.38) na (4.37), considerando a (4.36), resulta:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\sigma^2 \pi a}{\sigma_y^2} \right)^{1+1/m} \left[\frac{C_2 I}{C_0 K_{I00}^2 (1 - \sigma^2 \pi a / K_{I00}^2)} \right]^{1/m}$$

Chamando $a_{\infty} = K_{I00}^2 / (\pi \sigma^2)$ resulta:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right) \pi a \left(\frac{C_2 I}{C_0} \right)^{1/m} \left[\frac{\sigma^2 \pi a}{K_{I00}^2 (1 - a/a_{\infty})} \right]^{1/m}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right) a \left(\frac{C_2 I}{C_0} \right)^{1/m} \left[\frac{a}{a_{\infty} (1 - a/a_{\infty})} \right]^{1/m}$$

$$dt = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left(\frac{C_0}{C_2 I} \right)^{1/m} \left[\frac{a_{\infty} - a}{a} \right]^{1/m} \frac{da}{a}$$

$$t = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left(\frac{C_0}{C_2 I} \right)^{1/m} \int_{a_0}^a \left[\frac{a_{\infty}}{\xi} - 1 \right]^{1/m} \frac{d\xi}{\xi} \quad (4.39)$$

Para que ocorra a propagação instável da trinca, é necessário que:

$$K_I \rightarrow K_{I00}, \quad a \rightarrow a_{\infty}, \quad a = \frac{K_{I00}^2}{\pi \sigma^2} = \frac{2\bar{\gamma}}{C_0 \pi \sigma^2} \quad (4.40)$$

A ruptura ocorre em $t=t_f$ quando $a = a_{\infty}$, ou seja:

$$t_f = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left(\frac{C_0}{C_2 I} \right)^{1/m} \int_{a_0}^{a_{\infty}} \left[\frac{a_{\infty}}{\xi} - 1 \right]^{1/m} \frac{d\xi}{\xi}$$

Definindo :

$$\eta = \xi/a_{\infty}, \quad d\xi = a_{\infty} d\eta$$

Para $\xi = a_0$, $\eta = a_0/a_{\infty}$

$$\xi = a_{\infty}, \quad \eta = 1$$

$$t_f = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left(\frac{C_0}{C_2 I} \right)^{1/m} \int_{a_0/a_{\infty}}^1 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^{1/m} \frac{a_{\infty} d\eta}{a_{\infty} \eta}$$

$$t_f = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left(\frac{C_0}{C_2 I} \right)^{1/m} \int_{a_0/a_{\infty}}^1 (1-\eta)^{1/m} \eta^{-1-1/m} d\eta \quad (4.41)$$

O tempo de iniciação pode ser definido considerando-se a (4.27) e a (4.40), resultando:

$$t_i = \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^{1/m} \left(\frac{K_{I\infty}^2}{K_I^2} - 1 \right)^{1/m} = \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^{1/m} \left(\frac{K_{I\infty}^2}{\sigma^2 \pi a} - 1 \right)^{1/m}$$

$$t_i = \left(\frac{C_0}{C_2} \right)^{1/m} \left(\frac{a_{\infty}}{a} - 1 \right)^{1/m} \quad (4.42)$$

4.6. Avaliação numérica do critério de fratura

4.6.1. Desenvolvimento da formulação via M.E.F.

O critério de fratura estabelecido na seção 4.3.2. pode ser facilmente implementada em um programa de análise viscoelástica via Método dos Elementos Finitos, no que se refere a identificação do início do crescimento da trinca propriamente dito. Para tanto, utilizar-se-á como base a formulação apresentada por (Schapery, 1984). Toma-se como base a equação (4.25), substituindo-se o operador $C(t-\tau)$ por $(1-\nu^2) D(t-\tau)$, resultando:

$$2\bar{\gamma} = E_0 \int_0^{t_i} D(t_i - \tau) \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.43)$$

Onde E_0 é o valor elástico (instantâneo) do Módulo de Elasticidade do material. Por analogia ao parâmetro G para o caso elástico, definiremos um parâmetro similar para o caso viscoelástico dependente do tempo, da forma:

$$G_v(t) = E_0 \int_0^t D(t - \tau) \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.44)$$

de modo que o início do crescimento da trinca ocorre quando $G_V(t_i)$ iguala a $2\bar{\gamma}$, a energia de fratura.

A equação (4.44) representa o valor de G transformado para o plano viscoelástico através do operador viscoelástico, relacionando as tensões e deformações no corpo viscoelástico com as tensões e deformações de um corpo elástico equivalente, com a mesma geometria e sujeito ao mesmo carregamento (princípio de correspondência).

A taxa de liberação de energia de deformação G é definida como:

$$G = - \frac{\partial \Phi_e}{\partial a} \quad : \quad \Phi_e = \int_V \left[\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \right] dV \quad (4.45)$$

onde Φ_e é a energia potencial de deformação e "a" o comprimento da trinca. De forma similar a (4.44), pode-se definir uma pseudo-energia de deformação viscoelástica da forma:

$$\Phi_V(t) = E \int_0^t D(t-\tau) d\Phi_e \quad (4.46)$$

de modo que o critério de fratura se torna:

$$2\bar{\gamma} = - \frac{\partial \Phi_V(t_i)}{\partial a} \quad (4.47)$$

A (4.46) é válida apenas para os casos em que o coeficiente de Poisson é constante ao longo do tempo, isto é, o comportamento viscoelástico pode ser descrito com uma única função $D(t-\tau)$. Contudo, em numerosas situações de relevância tecnológica, deve-se considerar leis reológicas diferentes para as deformações volumétricas e de corte, resultantes de um coeficiente de Poisson variável com o tempo. Para estes casos, a pseudo energia de deformação em (4.45) deve ser decomposta em parcelas relacionadas somente com o comportamento volumétrico ($\Phi_e^o(t)$) ou em corte ($\Phi_e^s(t)$):

$$\Phi_e^o = \int_V \left[\int_0^{\epsilon^o} \sigma^o d\epsilon^o \right] dV \quad (4.48)$$

$$\Phi_e^s = \int_V \left[\int_0^{\epsilon_{ij}^s} s_{ij} d\epsilon_{ij}^s \right] dV \quad (4.49)$$

$$\Phi_v^o(t) = K_o \int_0^t D^o(t, \tau) d\Phi^o \quad (4.50)$$

$$\Phi_v^s(t) = G_o \int_0^t D^s(t, \tau) d\Phi^s \quad (4.51)$$

$$\Phi_v(t) = \Phi_v^o(t) + \Phi_v^s(t) \quad (4.52)$$

onde G_o e K_o são os valores instantâneos do módulo de compressibilidade volumétrica e do módulo de elasticidade transversal, e $D^o(t, \tau)$ e $D^s(t, \tau)$ as funções de fluência para a parte volumétrica e de corte, respectivamente.

É importante salientar que as tensões e deformações elásticas utilizadas em (4.48) e (4.49) devem ser determinadas em cada tempo de interesse através da análise viscoelástica, correspondendo às parcelas elásticas destas grandezas em cada tempo. Desta forma, elas incluem eventuais efeitos de redistribuição devido a não-homogeneidades, as quais podem ser inerentes à estrutura ou desenvolvidas ao longo do processo viscoelástico. Correspondem a este último caso efeitos térmicos, que alteram as características viscoelásticas localmente, ou processos de dano.

Considerando um comportamento elástico linear, as equações (4.48) e (4.49) podem ser escritas como:

$$\Phi_e^o = \int_V \frac{1}{\sigma} \sigma^o e^o dV \quad : \quad \Phi_e^s = \int_V \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} dV \quad (4.53)$$

Considerando que a análise viscoelástica é feita via Método dos Elementos Finitos, e que é impossível determinar a parcela elástica das deformações a partir do valor dos deslocamentos nodais, estas quantidades serão avaliadas através das tensões nos pontos de integração, um produto usual da análise via MEF. Deste modo, as expressões em (4.53) tornam-se:

$$\Phi_e^o = \int_V \frac{1}{18K_o} (\sigma^o)^2 dV \quad : \quad \Phi_e^s = \int_V \frac{1}{4G_o} (s_{ij})^2 dV \quad (4.54)$$

Aplicando (4.54), (4.50) e (4.51) em (4.52) e integrando por partes, pode-se escrever:

$$\Phi_v(t) = \Phi_e(t) + K_o \int_0^t d^o(t-\tau) \Phi_e^o(\tau) d\tau + G_o \int_0^t d^s(t-\tau) \Phi_e^s(\tau) d\tau \quad (4.55)$$

onde $d^o(t-\tau)$ e $d^s(t-\tau)$ foram definidas no capítulo anterior. De forma similar ao que foi feito no capítulo 3 para deformações, aproximando as derivadas das funções de fluência por séries exponenciais de Dirichlet-Prony, é possível definir variáveis de estado para Φ^o e Φ^s na forma:

$$p_j^o(t) = \int_0^t \frac{1}{\eta_j} e^{-(t-\tau)/\theta_j} \Phi_e^o(\tau) d\tau \quad (4.56)$$

$$p_k^s(t) = \int_0^t \frac{1}{\eta_k} e^{-(t-\tau)/\theta_k} \Phi_e^s(\tau) d\tau \quad (4.57)$$

de modo que a equação (4.55) pode ser escrita como:

$$\Phi_v(t) = \Phi_e(t) + K_o \sum_{j=1}^n p_j^o(t) + G_o \sum_{k=1}^m p_k^s(t) \quad (4.58)$$

Se admitirmos que $\Phi_e^o(\tau)$ e $\Phi_e^s(\tau)$ variam linearmente no intervalo $\{t, t+\Delta t\}$, é possível obter expressões similares a (3.19) e (3.20):

$$p_j^o(t+\Delta t) = p_j^o(t) e^{-\Delta t/\theta_j^o} + \frac{\Phi_e^o(t)}{K_j} \left[1 - e^{-\Delta t/\theta_j^o} \right] + \frac{\Delta \Phi_e^o(t)}{\Delta t K_j} \left[\Delta t - \theta_j^o (1 - e^{-\Delta t/\theta_j^o}) \right] \quad (4.59)$$

$$p_k^s(t+\Delta t) = p_k^s(t) e^{-\Delta t/\theta_k^s} + \frac{\Phi_e^s(t)}{G_k} \left[1 - e^{-\Delta t/\theta_k^s} \right] + \frac{\Delta \Phi_e^s(t)}{\Delta t G_k} \left[\Delta t - \theta_k^s (1 - e^{-\Delta t/\theta_k^s}) \right]$$

Usando esta aproximação, as variáveis de estado para deformação e para a pseudo-energia de deformação são calculadas na mesma subrotina.

A análise viscoelástica de crescimento de trinca é feita através da análise de dois corpos idênticos no material, condições de contorno e história de carga, mas tendo o primeiro uma trinca de comprimento "a", e o segundo, "a + Δa ". O parâmetro de fratura $G_v(t)$ pode ser calculado, em cada

tempo, por:

$$G_v(t) = \frac{\Phi_{v1}(t) - \Phi_{v2}(t)}{\Delta a} \quad (4.60)$$

O crescimento da trinca ocorre quando a condição

$$G_v(t) = 2 \bar{\gamma}(t) \quad (4.61)$$

for atingida, podendo a energia de fratura ser ou não dependente do tempo.

4.6.2. Exemplo de aplicação

O exemplo considerado é uma placa de largura $2W$ sob uma tensão remota uniforme, contendo uma trinca central de comprimento $2a$ perpendicular à direção do carregamento, como indicado na figura 4.6. O comprimento $2L$ foi considerado igual a $5W$ de modo a aproximar uma placa de comprimento infinito. Os valores considerados foram $a=4\text{cm}$, $W=10\text{cm}$, $L=25\text{cm}$, espessura de 1cm e tensão remota aplicada de 10 Mpa .

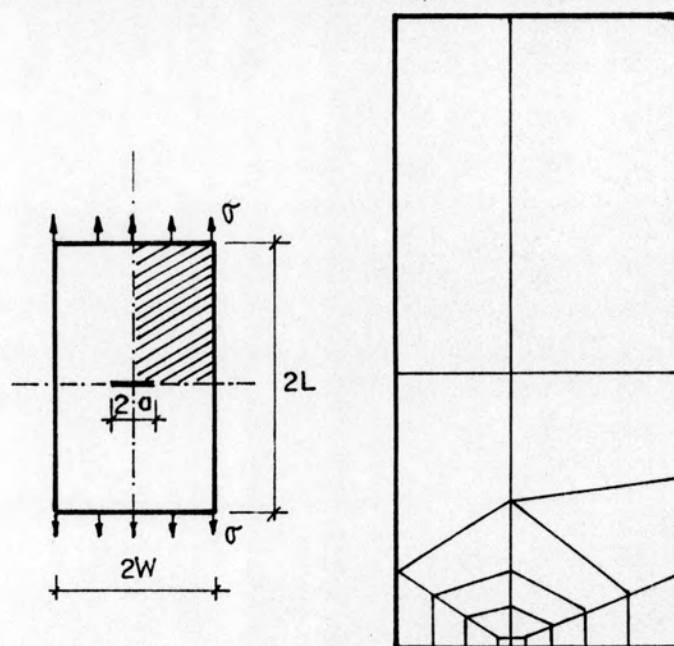


Figura 4.6 - Placa com trinca central

O material foi considerado viscoelástico tanto volumetricamente

como em corte. Os modelos reológicos utilizados para ambas as partes foram do tipo Standard com constantes definidas como:

$$\begin{aligned} K_1 &= 83.333 \text{ MPa} & ; & & K_2 &= 83.333 \text{ MPa} & ; & & \theta_K &= 10 \text{ segundos} \\ G_1 &= 38.461 \text{ MPa} & ; & & G_2 &= 38.461 \text{ MPa} & ; & & \theta_G &= 10 \text{ segundos} \end{aligned}$$

As constantes acima correspondem a um material com coeficiente de Poisson constante no tempo, igual a 0.3, e módulo de elasticidade instantâneo de 100 MPa.

O valor de G instantâneo para este caso é 154.84 N/mm. Utilizando a equação (4.44), o valor de $G_V(t)$ é dado por:

$$G_V(t) = 154.84 (2 - e^{-t/\theta}) \text{ N/mm} \quad (4.62)$$

Para este exemplo foi utilizada uma malha definida em (Owen & Fawkes, 1983), onde, utilizando-se de simetria, somente um quarto da placa foi discretizada em elementos finitos (Figura 4.6.). Os resultados obtidos através do algoritmo desenvolvido são mostrados na figura 4.7, onde as soluções numérica e analítica são comparadas. O erro observado na solução numérica foi de 3.68%, constante ao longo de todo o processo. Este processo sugere que o erro foi gerado na solução do passo elástico devido a malha relativamente esparsa utilizada, e não por perda de precisão no algoritmo viscoelástico utilizado. Se o valor de $G_V(0)$ obtido no passo elástico, 149.41 N/mm, fosse utilizado em (4.62), seria obtida a solução elástica transformada da figura 4.7, mostrando que uma malha mais refinada aumentaria a precisão do processo numérico sobre todo o tempo de análise.

A aproximação numérica utilizando elementos finitos para a análise de trincas em materiais viscoelásticos permite grande flexibilidade na representação de geometrias, cargas e condições de contorno. O algoritmo de análise viscoelástica desenvolvido permite também o modelamento de propriedades de materiais de forma bastante geral. Como exemplo, pode-se analisar a placa anterior para um material elástico volumetricamente e viscoelástico em corte. O algoritmo apresentado pode tratar este problema facilmente utilizando uma mola de constante K_1 como modelo reológico da parte volumétrica. O resultado da análise é mostrado na figura 4.7. A curva do parâmetro viscoelástico de fratura $G_V(t)$ para este caso está sempre abaixo da referente ao caso anterior, um resultado esperado uma vez que não há energia diferida Φ sendo gerada na parte volumétrica.

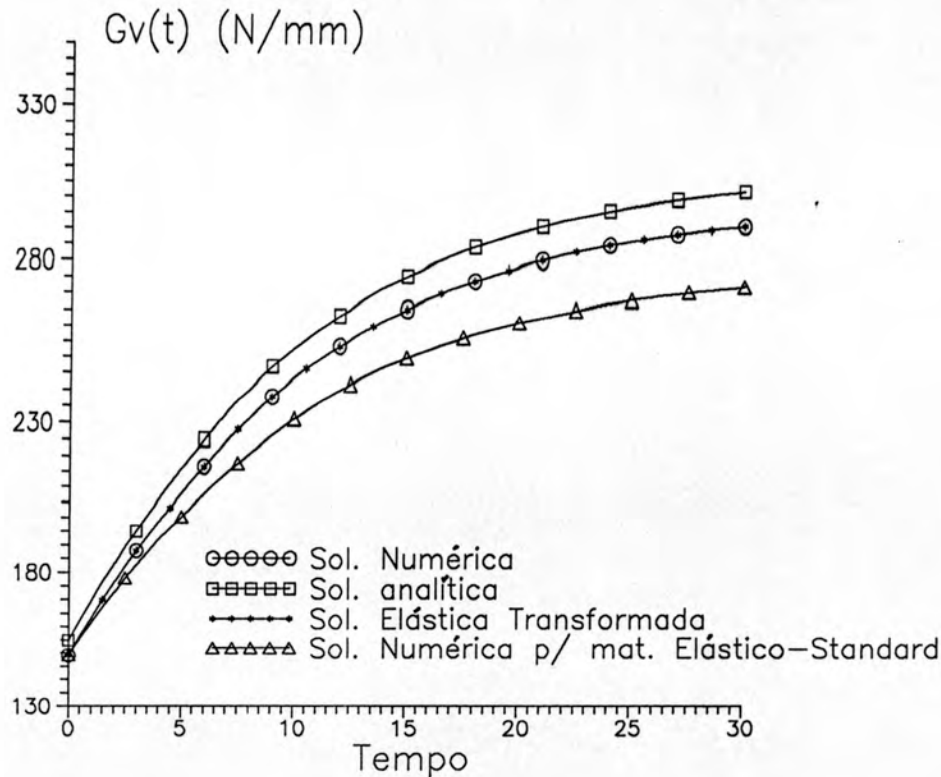


Figura 4.7 - Resultados da placa com trinca central

4.6.3. Modelamento da zona de processo de fratura via dano contínuo

Como foi mostrado nas seções anteriores, a consideração da existência de uma zona de processo de fratura na ponta da trinca é fundamental para o desenvolvimento matemático de um modelo que prediga crescimento diferido de fissuras. É da consideração desta zona profundamente não linear que é postulado o critério de fratura em (4.20), (4.24) e (4.25).

Contudo, devido à abordagem utilizada, a solução viscoelástica para o problema é fundamentada apenas nas características viscoelásticas lineares do material que circunda esta zona. Os valores do parâmetro de fratura, transformados para o plano viscoelástico, são obtidos da situação elástica pelo princípio da correspondência, situação esta que não leva em consideração a existência de uma zona não linear na ponta da trinca.

Uma modelagem que reproduziria mais adequadamente a realidade deveria levar em consideração processos não lineares localizados na ponta da trinca, tal como é feito quando se considera plastificação em pequena escala (*small scale yielding*). Uma maneira alternativa de se considerar o efeito

não linear é através da Mecânica do Dano Contínuo.

O dano representa o processo de microfissuração existente no material em zonas altamente solicitadas, onde o crescimento de cavidades e imperfeições, e sua conseqüente união, leva a uma redução da seção transversal efetiva em todas as direções. Numericamente, a redução da seção transversal efetiva do material pode ser considerada pela redução das constantes elásticas do material em função dos níveis de tensão ou deformação alcançados em cada ponto, dependendo do modelo adotado. Propõe-se a utilização de um modelo de dano contínuo baseado em deformações, que se adequa à fase de crescimento da zona de fratura descrita nas seções iniciais deste capítulo, pois o crescimento das deformações ao longo do processo viscoelástico faz com que haja um aumento da zona com danificação apreciável no entorno da ponta da trinca.

O modelo de dano adotado está baseado nos conceitos de Kachanov (1986), sendo a formulação utilizada apresentada por Simo (1987), Simo e Ju (1987) e desenvolvida por Saraiva e Creus (1991).

A Energia de Helmholtz para materiais viscoelásticos é dada por:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon : E : \varepsilon - \sigma^V : \varepsilon + \Theta(\varepsilon^V) \quad (4.63)$$

onde ε é a deformação específica total, E o tensor elástico, σ^V as pseudo-tensões viscoelásticas e Θ o potencial viscoelástico, função das deformações viscoelástica ε^V . σ^V é dada por:

$$\sigma^V = E : \varepsilon^V \quad (4.64)$$

A Energia Complementar de Helmholtz é dada por:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma : E^{-1} : \sigma + \varepsilon^V : \sigma + \Omega(\varepsilon^V) \quad (4.65)$$

onde σ é o tensor de tensões e Ω o potencial viscoelástico complementar. Tensões e deformações estão termodinamicamente associadas por:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E : \varepsilon - \sigma^V = E : (\varepsilon - \varepsilon^V) \quad (4.66)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = E^{-1} : \sigma + \varepsilon^V = \varepsilon^e + \varepsilon^V \quad (4.67)$$

onde ε^e é a parcela elástica das deformações. Considerando o dano

isotrópico, modificando somente as propriedades elásticas do material, a Energia de Helmholtz e a Energia de Helmholtz Complementar ficam:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon : E (1-d) : \varepsilon - (1-d) \sigma^V : \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^V : E (1-d) : \varepsilon^V \quad (4.68)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma : \frac{E^{-1}}{(1-d)} : \sigma + \varepsilon^V : \sigma \quad (4.69)$$

onde d é a variável de dano, que representa a parcela de vazios em um volume unitário do material. De ambas as expressões pode-se obter as expressões tensão-deformação para o caso viscoelástico:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (1-d) : (\varepsilon - \varepsilon^V) \quad (4.70)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{E^{-1}}{(1-d)} : \sigma + \varepsilon^V \quad (4.71)$$

Introduzindo as equações (4.70) e (4.71) na relação viscoelástica dada em (3.5), obtém-se:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\sigma_{ij}(t)}{E_{ijkl}(1-d)} + \int_{\tau_0}^t d_{ijkl}(t,\tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (4.72)$$

A equação de equilíbrio para o Método dos Elementos Finitos, dada por (3.34) e (3.35), torna-se :

$$\int_V \underline{B}^T \underline{E}(1-d) \underline{B} dV \underline{u}^i = \underline{P}^b + \underline{P}^s + \int_V \underline{B}^T \underline{E}(1-d) \underline{\varepsilon}_T dV + \int_V \underline{B}^T \underline{E}(1-d) \underline{\varepsilon}_T dV \quad (4.73)$$

Embora a inclusão do dano introduza não-linearidade na relação viscoelástica, a solução incremental adotada no capítulo 3 será utilizada como uma primeira aproximação, desde que os intervalos de tempo utilizados sejam consideravelmente pequenos. Um processo iterativo poderia ser utilizado para controlar os erros numéricos.

A lei de evolução do dano, baseada em (Simo, 1987), é dada por:

$$\dot{d} = \Pi(\varepsilon_{eq}, d) \dot{\varepsilon}_{eq} \quad (4.74)$$

onde Π é o potencial de dano e ε_{eq} uma tensão equivalente, dada por:

$$\varepsilon_{eq} = (\langle \varepsilon \rangle : E : \langle \varepsilon \rangle)^{1/2} \quad (4.75)$$

onde $\langle \rangle$ são os colchetes de McAuley ($\langle x \rangle = (x + |x|)/2$), de modo que o dano está associado somente com deformações de tração (alongamentos).

O aumento do processo de danificação, representado pelo crescimento da variável de dano d , ocorre quando:

$$\varepsilon_{eq} - r(t) \geq 0 \quad (4.76)$$

onde $r(t)$ é o parâmetro de dano, dado por:

$$r(t) = \max \left\{ r(0), \max (\varepsilon_{eq}(\tau)) \right\}, \quad \tau \in (-\infty, t) \quad (4.77)$$

A quantidade $r(0)$ representa a deformação equivalente mínima para que se inicie o processo de dano. O potencial de dano empregado é o proposto por Kachanov para fluência, dado por:

$$\Pi (\varepsilon_{eq}, d) = A \left[\frac{\varepsilon_{eq}}{(1-d)} \right]^\alpha \quad (4.78)$$

onde A e α são parâmetros do material.

Aplicando a (4.78) na (4.74) e considerando que o processo de derivação será feito numericamente, obtém-se:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = A \left[\frac{\varepsilon_{eq}}{(1-d)} \right]^\alpha \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{\Delta t} \quad ; \quad \Delta d = A \left[\frac{\varepsilon_{eq}}{(1-d)} \right]^\alpha \Delta \varepsilon_{eq} \quad (4.79)$$

A formulação acima foi aplicada a uma placa com trinca central, com a mesma geometria e propriedades reológicas do primeiro exemplo da seção 4.6.2., com $A = 0.01$, $\alpha = 0.01$ e $r(0) = 0$. A curva obtida é mostrada na figura 4.8., mostrando que o processo de dano aumenta a energia disponível para o crescimento da trinca.

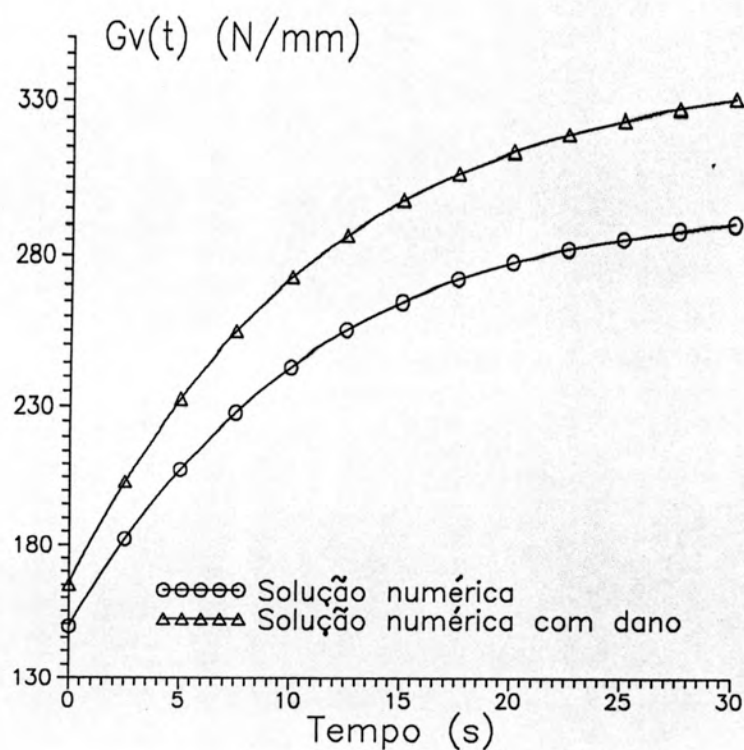


Figura 4.8. - Influência do modelamento da zona de processo de fratura via Mecânica do Dano Contínuo

A figura 4.9 mostra que o dano se concentra no entorno da ponta da trinca, como admitido no modelo teórico, e que nenhum dano relevante ocorre longe deste ponto.

Este exemplo é uma amostra qualitativa das potencialidades do acoplamento entre a Mecânica da Fratura e a Mecânica do Dano Contínuo. Não houve preocupação com o modelamento das duas abordagens de forma a fazer com que ambas indiquem o crescimento da trinca ($G_v(t) = G_{crítico}$, $d = d_{crítico}$) no mesmo instante. Ainda se carece de um estudo mais profundo sobre a equivalência das duas formulações, bem como da possibilidade de utilizar-se exclusivamente a Mecânica do Dano Contínuo para previsão de crescimento de trincas (Masuero et al., 1991).

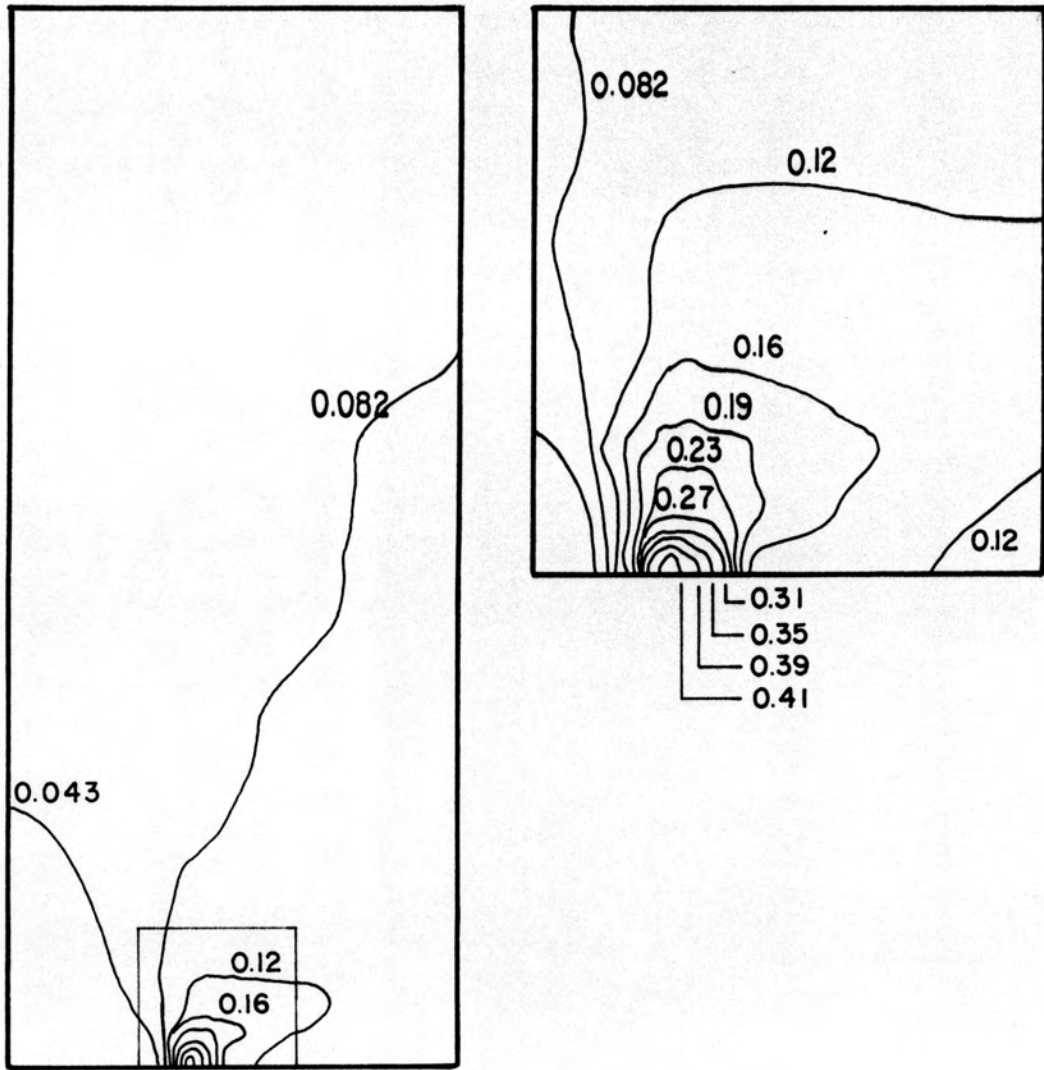


Figura 4.9. - Dano em uma placa com trinca central

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1. Conclusões

Ao longo do desenvolvimento da formulação descrita, visando a solução numérica de problemas de fratura em termo-viscoelasticidade linear via elementos finitos, e de sua aplicação em alguns problemas de interesse, foi possível obter as seguintes conclusões:

O elemento isoparamétrico quadrático de 8 nós para condução de calor em estado permanente apresenta um bom desempenho, permitindo a obtenção de valores do campo de temperaturas com considerável precisão, mesmo com malhas esparsas. Única exceção ocorre em pontos próximos a descontinuidades no campo de temperaturas, via de regra devido a condições de contorno, onde o método numérico gera um gradiente de temperaturas entre os nós mais próximos. Este efeito pode ser minimizado com o uso de malhas mais refinadas localmente.

A utilização do algoritmo das Variáveis de Estado para o modelamento do comportamento viscoelástico linear mostrou-se grandemente vantajoso, quer por sua facilidade de implementação em códigos elásticos previamente existentes, pela facilidade de modelamento de reologias diversas para as partes volumétrica e de corte, quer por sua eficiência computacional frente a outros algoritmos (Masuero et al., 1991-a), (Saraiva et al., 1991). O método mostrou-se estável para intervalos de tempo maiores que $\beta/2$ a $\beta/3$, sendo β o menor tempo de relaxação do material. A faixa ótima, para a qual existe a melhor relação entre tempo de processamento e precisão obtida, situa-se entre $\beta/3$ e $\beta/10$. O método, contudo, por ter a formulação baseada em funções de fluência para o modelo generalizado de Kelvin, requer processos numéricos auxiliares para a conversão de dados experimentais, geralmente expressos em função de constantes para funções de relaxação. No modelamento de características reológicas, o algoritmo de Variáveis de Estado da forma desenvolvida apresenta dificuldade em tratar materiais

elásticos volumetricamente e com comportamento tipo Kelvin em corte.

O algoritmo implementado para variação automática do intervalo de tempo utilizado mostrou-se eficiente, permitindo a análise de sólidos cuja reologia caracterizava-se por apresentar tempos de retardação em décadas sem acarretar um esforço computacional excessivo. Nenhum problema de estabilidade foi verificado ao longo do processo quando o intervalo de tempo inicial situava-se dentro da faixa ótima.

O processo de integração reduzida uniforme atendeu perfeitamente os requisitos de precisão exigidos, especificamente para o elemento isoparamétrico quadrático de 8 nós para estado plano de tensões e deformações. Seu uso é recomendado não somente para problemas de quase incompressibilidade, mas em todas as situações, visto que, para a ordem de integração 2×2 , a posição dos pontos de integração correspondentes é a que maximiza a precisão das tensões obtidas, o que se torna significativamente mais relevante em um processo de análise viscoelástica cujas tensões são a base para a solução do passo seguinte.

A consideração de um modelo coesivo de fratura na ponta da trinca é imprescindível para a solução do paradoxo entre a fratura diferida observada em ensaios experimentais para materiais viscoelásticos e o modelamento do problema via parâmetros dependentes do campo de tensões (K_I), que permanece inalterado para testes tipo ensaio de fluência. A trinca não apresenta crescimento sempre que o nível de tensões for inferior a um valor de K crítico correspondente às propriedades mecânicas do material já estabilizadas (após um período de tempo muito grande). Ocorre crescimento diferido quando o nível de tensões aplicado na peça estiver acima do anterior e abaixo do relativo a um valor de K crítico correspondente às características instantâneas do material; acima deste patamar ocorre propagação instável da trinca.

O algoritmo desenvolvido para a avaliação do parâmetro viscoelástico de fratura mostrou-se bastante apropriado para predição do tempo de iniciação via M.E.F., desde que o princípio da correspondência continue válido. Somente estados de carga não decrescentes são admitidos. A utilização de um processo tipo extensão virtual da trinca, em comparação com métodos mais diretos tais como integral J , tem a desvantagem de requerer duas análises no tempo para cada problema, e conseqüentemente, o dobro do esforço computacional. Contudo, esta abordagem permite a separação dos efeitos viscoelásticos sobre as partes volumétrica e de corte, de grande

importância prática, o que não nos parece possível com integral J.

Apesar de ser da consideração de uma zona de processo de fratura na ponta da trinca que pôde ser estipulado um critério de ruptura, a modelagem precisa desta zona no método numérico não se faz estritamente necessário, visto ser a contribuição desta zona pequena em relação à energia de deformação liberada em todo o corpo. O processo empregado, assim com integral J, mostra-se pouco sensível a uma modelagem imprecisa desta região (*far field solution*).

Apesar do tipo de elemento finito empregado ser consideravelmente potente para a solução de problemas mecânicos, não nos parece ser ele o elemento mais indicado para a utilização em problemas de propagação de trincas em geometrias arbitrárias, em função da dificuldade de implementação de algoritmos de geração automática de malhas.

A utilização da Mecânica do Dano Contínuo acoplada com a Mecânica da Fratura parece ser promissora para a modelagem mais exata da zona de processo de fratura.

5.2. Sugestões para trabalhos futuros

Visando um maior desenvolvimento da análise numérica de problemas de fratura em viscoelasticidade dentro das diretrizes seguidas por esta dissertação, são apresentadas as seguintes sugestões para trabalhos de pesquisa futuros:

A implementação de um algoritmo de variáveis de estado baseadas em funções de relaxação aumentaria particularmente a flexibilidade operacional do modelo de análise viscoelástica, permitindo a escolha do tipo de função mais adequada para o problema a ser resolvido ou para os dados de reologia disponíveis.

Desenvolvimento da formulação apresentada para materiais viscoelásticos com envelhecimento, permitindo a modelagem de problemas mecânicos e de fratura para concreto ou materiais similares. A fissuração das cascas de concreto em usinas nucleares ou em barragens devido ao calor de hidratação são exemplos de grande relevância neste contexto.

A adaptação da formulação desenvolvida para elementos triangulares, acoplados a potentes algoritmos de geração de malhas não estruturadas para geometrias quaisquer possibilitaria um estudo numérico do fenômeno de

crescimento e propagação de trincas em viscoelasticidade. Contudo, é importante verificar se a utilização destes elementos não possa gerar problemas quando se analisa materiais incompressíveis com o uso de integração reduzida.

Estudo da possibilidade de acoplamento efetivo entre as abordagens da Mecânica da Fratura e a Mecânica do Meio Contínuo, de forma a verificar se as duas formulações se equivalem quanto à predição de crescimento de trincas. A possibilidade de tal acoplamento abre perspectivas bastante vantajosas quanto a determinação de parâmetros de fratura e modelagem difusa de fissuras.

Estudo da utilização de elementos de contorno (*Boundary Elements*) para problemas de fratura em viscoelasticidade, devido à facilidade e esforço computacional reduzido de modificação da malha para acompanhar o fenômeno de crescimento e propagação de trincas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BATHE, K.J. **Finite element procedures in engineering analysis.** Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982. 735p.
2. BARSQUM, R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.10, p.25-37, 1976.
3. _____. Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.11, p.85-98, 1977.
4. BENZLEY, S.E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.8, p.537-545, 1974.
5. CHRISTENSEN, R.M. **Theory of viscoelasticity.** New York: Academic Press, 1971. 245p.
6. CREUS, G.J. **Viscoelasticity: basic theory and applications to concrete structures.** Berlin: Springer, 1986. 169p.
7. FLÜGGE, W. **Viscoelasticity.** 2. ed. rev. Berlin: Springer, 1975. 194p.
8. FREUDENTHAL, A.M., SHINOZUKA, M. Shrinkage stresses in a thick-walled viscoelastic cylinder bonded to a rigid case. **AIAA Journal**, V.1, n.1, p.107-115, Jan. 1963.
9. HENSHELL, R.D., SHAW, K.G. Crack tip finite elements are unnecessary. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.9, p.495-507, 1975.
10. HINTON, E., OWEN, D.R.J. **Finite element programming.** London: Academic Press, 1977. 305p.
11. HINTON, E., CAMPBELL, J.S. Local and global smoothing of discontinuous finite elements functions using a least squares method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.8, p.461-480, 1974.

12. HUEBNER, K.H. **The finite element method for engineers.** New York: John Wiley, 1975. 500p.
13. JAKOB, M. **Heat transfer.** London: John Wiley, 1949. 758p. V.1.
14. KAMINSKII, A.A. Investigations in the field of mechanics of the fracture of viscoelastic bodies. **Soviet Applied Mechanics**, V.16, n.9, p.741-836, Sept. 1980.
15. KANNINEN, M.F., POPELAR, C.H. **Advanced fracture mechanics.** New York: Oxford University Press, 1985. 573p.
16. KACHANOV, M. **Introduction to continuum damage mechanics.** Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1986. 135p.
17. KNAUSS, W.G. The mechanics of polymer fracture. **Applied Mechanics Reviews**, V.26, p.1-17, 1973.
18. KREITH, F. **Princípios de transmissão de calor.** 3.ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1977. 550p.
19. KUTADELADZE, S.S. **Fundamentals of heat transfer.** London: Edward Arnold, 1963. 495p.
20. MASUERO, J.R et al. Análise de sólidos viscoelásticos incompressíveis : comparação de duas formulações distintas. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25, 1991, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: Departamento de Engenharia Civil - CPGEC/UFRGS, 1991. V.1, p.283-294.
21. MASUERO, J.R., SARAIVA, K.S., CREUS, G.J. Viscoelastic fracture analysis using a continuum damage mechanics. In: CONGRESSO IBERO-LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 12, 1991. **Anais...** Paraná, Argentina: Asociacion Argentina de Mecanica Computacional, 1991. V.12, p.661-668.
22. McCARTNEY, L.N. Crack propagation, resulting from a monotonic increasing applied stress, in a linear viscoelastic material. **International Journal of Fracture**, V.13, n.5, p.641-654, Oct. 1977.
23. _____. Crack propagation in linear viscoelastic solids: some new results. **International Journal of Fracture**, V.14, n.6, p.547-554, Dec. 1978.
24. _____. On the energy balance approach to fracture in creeping materials. **International Journal of Fracture**,

- V.19, p.99-113, 1982.
26. MORLAND, L.W., LEE, E.H. Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation. *Transactions of the Society of Rheology*, V.IV, p.233-263, 1960.
 25. OWEN, D.R.J., FAWKES, A.J. **Engineering fracture mechanics: numerical methods and applications.** Swansea: Pineridge Press, 1983. 305p.
 26. PU, S.L., HUSSAIN, M.A., LORENSEN, W.E. The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V.12, p.1727-1742, 1978.
 27. ROLFE, S.T., BARSOM, J.M. **Fracture and fatigue control in structures - applications of fracture mechanics.** Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977. 562p.
 28. SARAIVA, K.S., AWRUCH, A.M., CREUS, G.J. **Análise numérica de sólidos elásticos e viscoelásticos incompressíveis com juntas de epóxi.** Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1990. (Caderno Técnico, 99)
 29. SARAIVA, K.S. e CREUS, G.J. **Mecânica do dano contínuo: revisão bibliográfica e aplicações.** Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1991 (Caderno Técnico). 74p.
 30. SARAIVA, K.S. et al. **Análise viscoelástica de materiais incompressíveis.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 11, 1991, São Paulo. **Anais...** Rio de Janeiro: ABCM, 1991. p.129-132.
 31. SHAPERLY, R.A. A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media. I. Theoretical development. *International Journal of Fracture*, V.11, n.1, p.141-159, Feb. 1975.
 32. _____. _____. II. Approximate methods of analysis. *International Journal of Fracture*, V.11, n.3, p.369-388, June 1975.
 33. _____. _____. III. Analysis of continuous growth. *International Journal of Fracture*, V.11, n.4, p.549-562, Aug. 1975.
 34. _____. Correspondence principles and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of

- viscoelastic media. *International Journal of Fracture*, V.25, p.195-223, 1984.
35. _____. Time-dependent fracture: continuum aspects of crack growth. *Enciclopedia of Materials Science and Engineering*, Pergamon Press, p.5043-5053, 1984.
36. SIMO, J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V.60, p.153-173, 1987.
37. SIMO, J.C., JU, J.W. Strain- and stress-based continuum damage models - formulation. *International Journal of Solids and Structures*, V.23, p.841-869, 1987.
38. WALSH, P.F. The computation of stress intensity factors by a special finite element technique. *International Journal of Solids and Structures*, V.7, p.1333-1342, 1971.
39. WILLIAMS, J.G. Fracture mechanics of polymers. *Polymer Engineering and Science*, V.17, n.3, p.144-149, Mar. 1977.
40. _____. _____. New York: Ellis Horwood, 1987. 300p.
41. WNUK, M.P., KNAUSS, W.G. Delayed fracture in viscoelastic-plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, V.6, p.371-387, 1970.
42. YADAGIRI, S., REDDY, C.P. Viscoelastic analysis of nearly incompressible solids. *Computers and Structures*, V.20, p.817-825, 1985.
43. ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. 3.ed. London: McGraw-Hill, 1977. 787p.