UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
MATEMÁTICA LICENCIATURA

JULIO CÉSAR MEISTER

ESTUDANDO DIFICULDADES NA COMPREENSÃO DE NÚMEROS INTEIROS

PORTO ALEGRE

2009

JULIO CÉSAR MEISTER

ESTUDANDO DIFICULDADES NA COMPREENSÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, curso de Matemática Licenciatura, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Francisco Egger Moellwald

PORTO ALEGRE

2009

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha esposa Lívia e meus amigos que me apoiaram e me deram força em muitos momentos difíceis durante a graduação.

Agradeço também as minhas irmãs, pois sem o apoio delas jamais teria chegado até a etapa final da faculdade, aos meus pais e meus sogros.

Não poderia esquecer também de agradecer ao meu orientador Francisco Egger Moellwald pela disponibilidade, paciência e presteza, bem como meus colegas que agora posso chamar de grandes amigos, Daniel Moura, Vinicius Cardoso, Gabriel Flores e Taís Silva.

Resumo

Este estudo, através do método da Engenharia Didática, destaca algumas dificuldades na compreensão dos números inteiros por alunos da sexta série do ensino fundamental. Através da análise de autores atuais que estudam este tema e das dificuldades de alguns alunos feita por uma pesquisa, levantam-se as principais dificuldades e colocamos em destaque os constrangimentos.

Partindo dos constrangimentos, este estudo analisa uma proposta diferenciada para sanar algumas das dificuldades na operação com números inteiros. Ao todo são propostas e testadas três práticas diferentes, de forma que estas práticas são previamente discutidas, bem como os resultados da aplicação da prática e as discussões entre os alunos.

Com os resultados das práticas podemos destacar algumas melhorias na compreensão das operações com números inteiros por parte dos alunos. Conclui-se que uma atividade diferenciada e bem discutida pode trazer grande auxílio para a compreensão da operação com números inteiros, visto que uma das grandes dificuldades apresentadas pelos alunos é a generalização da regra de sinais, usada na multiplicação/divisão, nas operações de adição e subtração.

Sumário

1. Introdução

Neste estudo, analiso algumas das dificuldades que os alunos apresentam sobre as operações com números inteiros, a partir de algumas perspectivas teóricas. Após essa análise, apresento alguns testes realizados com alunos referentes a atividades que buscam inovar o estudo dos números inteiros, visando superar algumas das dificuldades apresentadas e despertar a curiosidade e a discussão com os alunos sobre o tema.

A motivação para a escolha deste tema surgiu a partir de minha experiência e compreensão quanto à importância das operações com números inteiros: o entendimento deste assunto se faz fundamental para a compreensão de conceitos mais avançados da matemática. Outro motivo foi o grande número de alunos que apresentam dificuldades em situações que envolvem as operações com números inteiros e como isso se apresenta como um divisor de águas, no sentido em que vejo muitos alunos mostrarem desgosto pela matemática ao não compreenderem como operarem com tais números, visto que praticamente tudo que envolve matemática a partir deste conteúdo necessita da compreensão das operações com números inteiros.

Analiso aqui as principais dificuldades mostradas pelos alunos, fatores históricos e também como as operações com números inteiros são pouco estudados no ensino fundamental. E apresento três sugestões para o estudo deste tema em alunos da sexta série, onde geralmente ele é introduzido.

Minha proposta é desenvolver a monografia focalizando algumas dificuldades no ensino e na aprendizagem da operação com números inteiros. A pesquisa que deu origem a este tema foi desenvolvida na disciplina Pesquisa em Educação Matemática, em 2009/1, ministrada pela Prof. Vera Clotilde Garcia. Nessa disciplina tive a oportunidade de participar de uma primeira experiência em pesquisa na área de Educação Matemática.

A pesquisa foi desenvolvida para orientar uma prática de ensino, visando trazer alguma inovação para o ensino dos números negativos, além de desenvolver o raciocínio e despertar a curiosidade dos alunos. A prática foi desenvolvida em duas horas-aula do turno da manhã do dia 15 de maio de 2009, em uma turma da 6º série da Escola Estadual Rio Branco, e duas horas-aula no turno da tarde do dia 29 de novembro de 2009, em uma turma de 6° série da Escola Estadual Anne Frank.

Partindo desta prática, apresentei as seguintes questões que norteiam este estudo: Quais são algumas das principais dificuldades presentes no ensino e na aprendizagem das operações com números inteiros? Existem propostas alternativas atuais para enfrentar estas dificuldades?

Os objetivos deste Trabalho de Conclusão de Curso consistem em:

1) Detectar e descrever algumas dificuldades presentes no processo de ensino-aprendizagem dos números inteiros;
2) Levantar e descrever propostas dinâmicas e inovadoras que auxiliem os educadores no ensino dos números inteiros;
3) Propor três experiências didáticas que tragam uma mudança na prática didática usual, buscando contribuir para a melhoria do cenário encontrado.

Em termos de metodologia, o estudo se desenvolveu por meio da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa e teoria educacional para trabalhos em Educação Matemática. Este método concebe ao pesquisador a divisão dos componentes da pesquisa, através de uma análise a priori sobre a questão, analisando o contexto atual e suas principais dificuldades, da elaboração de uma seqüência didática a fim de propor uma mudança para o quadro atual e de uma analise a posteriori.

Este estudo foi dividido de acordo com as seguintes etapas:

1) Escolha do tema e justificativas para a escolha.
2) Análise do ensino usual dos números inteiros dos pontos de vista da didática, da aprendizagem e do conteúdo;
3) Revisão bibliográfica para buscar propostas inovadoras atuais para o ensino dos números inteiros;
4) Elaboração e aplicação de uma seqüência didática, com delineamento de hipóteses e com descrição das formas de coleta de dados;
5) Análise da seqüência didática, buscando a validação das hipóteses;
6) Reflexões sobre o trabalho (considerações finais)

No primeiro capítulo deste estudo encontra-se a Revisão Bibliográfica, onde apresentamos estudos de alguns autores voltados ao ensino dos números inteiros. O capítulo seguinte, Análise Prévia, considera algumas análises feitas por alguns dos autores citados na Revisão Bibliográfica e por mim sobre o ensino atual de números inteiros. Também considera a investigação das principais dificuldades do ensino deste tema e algumas dificuldades apontadas por alunos de sexta série.

Partindo das análises, seguimos para o terceiro capitulo, onde tratamos das principais dificuldades, ou constrangimentos, destacadas pela Análise Prévia. Essas dificuldades são apresentadas sob diversas perspectivas: da história, do ensino atual e costume dos professores, da dificuldade na abstração do conceito de números inteiros e das operações com os mesmos, e do espaço que os PCN reservam para o estudo dos números inteiros.

Apontados esses constrangimentos, no capítulo seguinte apresentamos, discutimos e analisamos os resultados da aplicação de três atividades: o Jogo das Varetas, o Uso de Cartas para representação de operações com números inteiros e o Quebra-Cabeça Numérico. A primeira atividade foi feita em grupo na cadeira de Pesquisa em Educação Matemática, ministrada pela professora Vera Clotilde Garcia.

As atividades ocorreram nas seguintes datas e locais:[1]

Data	Atividade	Local
15/05/09	Pega Varetas	Escola Estadual Rio Branco
10/09/09	Uso de cartas para representar números inteiros	Escola Estadual Anne Frank
09/11/09	Quebra-Cabeças Numérico	Escola Estadual Anne Frank

Por último temos a considerações finais do estudo, onde informamos as hipóteses discutidas e validadas, bem como o resultado final das atividades propostas.

[1] Os nomes dos alunos cujos diálogos estão descritos nos relatos das atividades são fictícios.

2. Revisão Bibliográfica

Neste capítulo apresentamos estudos de alguns autores que tratam do ensino de números inteiros. Através destes autores vamos mapear as principais dificuldades sobre o tema, o que tem sido feito atualmente sobre o ensino de números inteiros, e investigar propostas de aprendizagem dos números inteiros

.Passoni (2002) apresenta uma dissertação que trata do estudo da possibilidade e da conveniência de ensinar números inteiros e noções de (pré-) Álgebra, no nível fundamental. Os objetivos dessa dissertação consistem em mostrar que os alunos das séries iniciais podem resolver problemas envolvendo o conceito de adição de uma forma mais fácil se usarem os números inteiros e um pouco de manipulação algébrica ao invés de utilizarem a adição e a subtração dos números naturais. A questão que deu origem a esse estudo considera a quinta série como o momento mais propício da vida escolar para apresentar aos alunos os números inteiros e suas operações.

A partir disto, começou-se a pensar na viabilidade de introduzir tais itens em alguma fase anterior à série mencionada. Um desafio era descobrir quando e qual a melhor forma de fazer isso, já que não se tinha experiência em séries anteriores.

A dissertação se desenvolveu seguindo a metodologia denominada engenharia didática, um trabalho que tenta influir na transformação dos tradicionais métodos de ensino. Na Engenharia didática, a experiência em sala de aula é muito importante como forma de investigação de um tema em estudo que ocorre na visão do autor da dissertação. A produção da mesma exigiu um sólido conhecimento científico e se confrontou com problemas práticos durante a experiência didática feita.

Esse trabalho trata de uma inovação no ensino de matemática, o que se assemelha à origem da teoria mencionada. Com essa metodologia para o desenvolvimento do trabalho, o autor pretende obter respostas qualitativas e positivas em relação à questão inicial de sua dissertação e, além disso, uma posição mais de acordo com a realidade sobre a possibilidade de introduzir os inteiros na terceira série.

Em relação ao estudo matemático do tema, Passoni (2002) analisa resumidamente a construção dos números inteiros e suas estruturas. Observa que alguns estudiosos acreditam que o surgimento dos números negativos deu-se devido a uma necessidade no domínio da Matemática, enquanto outros julgam não haver “necessidade prática” para isso. Hankel, em 1867, formula o princípio de permanência das leis formais que estabelece o critério geral de algumas ampliações do conceito de número que, por fim, formaliza e inclui os números inteiros na matemática. Os números inteiros são vistos como um anel de integridade totalmente ordenado, de forma que podemos considerar N um subconjunto de Z, e ainda nesta perspectiva podemos considerar os inteiros negativos como um subconjunto de Z. Partindo desse ponto, os matemáticos se tranqüilizaram em relação aos números inteiros e os utilizam sempre que necessário.

Passoni (2002) fez uma experiência didática com alunos da terceira série de uma escola particular de classe média da cidade de São Paulo. A média das idades dos alunos no princípio das atividades desenvolvidas era de oito anos e nove meses. Foi esboçada uma seqüência de atividades para esses alunos.

O plano dessa prática foi baseado na aplicação de dois instrumentos diagnósticos, o pré-teste e o pós-teste. O pós-teste consistia basicamente em questões que se pretendia que os alunos fizessem ao final das atividades. O pré-teste continha as mesmas perguntas, porém com algumas alterações nos dados. Este foi aplicado duas semanas antes de se iniciarem as atividades.

O autor analisou os dados coletados e observou as diferenças presente neles. Ele comparou os resultados dos testes e, ainda, através do primeiro colheu sugestões para aplicar nas atividades. Os dados coletados mostraram que a grande maioria dos alunos não tinha conhecimento sobre os números negativos. Para aqueles que o possuíam, algum familiar havia comentado algo sobre o assunto. Além do exposto acima, na análise dos dados coletados, Passoni (2002) verificou que os números negativos despertaram a curiosidade de alguns alunos.

Foram feitas pequenas pesquisas em sala de aula e distribuídas folhas para o trabalho dos estudantes. Os alunos desenvolviam seus trabalhos em duplas, individualmente, no quadro e em debates. Além do mais, constantemente, os alunos eram solicitados a manifestar suas opiniões. É interessante ressaltar que em nenhum momento os alunos foram pressionados a trabalhar para conseguir nota.

Uma das atividades desenvolvidas pelos alunos consistiu no desenho de um prédio de apartamentos com um andar térreo, doze andares acima do térreo, e três andares de garagens abaixo do térreo. Essa atividade tinha por objetivo ir do concreto para o abstrato; os andares começariam a ser representados usando uma reta. O térreo foi chamado de 0 e os andares acima do mesmo de 1, 2, 3,...,12. Então, a discussão dessa tarefa girou em torno de como representar os andares do subsolo.

Passoni (2002) conclui que seus objetivos iniciais foram cumpridos, uma vez que os resultados obtidos foram satisfatórios**.** A aplicação do pré-teste mostrou que os alunos de maneira geral não conheciam os números inteiros e houve uma média de 12% de acertos. Apenas 4 dos 38 alunos conheciam os números inteiros, devido ao contato com irmãos que estudam em séries mais avançadas. Esses alunos tiveram um rendimento consideravelmente maior que os outros. Os resultados do pós-teste mostram rendimentos próximos a 100%.

Ao final do texto, encontra-se a seguinte resposta à pergunta inicial: "pelos resultados progressivos, no desenvolvimento da seqüência, e pelos resultados do pós-teste, acreditamos ter mostrado efetivamente, como essa possibilidade pode ser realizada" (Passoni, 2002, p. 203). Isto é, há a possibilidade de se introduzir números inteiros em um contexto em que se pretende modelar problemas aditivos usando somente a operação de adição.

Todesco (2006) apresenta uma dissertação que trata da possibilidade de introduzir a noção e o conceito de números inteiros nas séries iniciais do ensino fundamental. Os objetivos de seu trabalho consistem em investigar a possibilidade e o quão positivo pode ser introduzir o número negativo na 3ª série do Ensino Fundamental da escola pública. Também é meta desse estudo verificar como se dá, nas etapas iniciais, a passagem da idéia de número associado ao que é concreto para a de número associado ao que é intangível, abstrato.

Seguem as perguntas que dão origem ao estudo de Todesco (2006): "Partindo de uma seqüência elaborada que utilize um contexto familiar e significativo, qual a compreensão que as crianças de 3ª série passam a ter sobre os números negativos? Até onde tal seqüência pode ajudar na introdução desse conceito? E, por último, em que consiste o avanço?"

A metodologia aplicada se deu na forma de uma pesquisa intervencionista com alunos de duas turmas de 3ª série de uma escola pública de São Paulo. Através do uso de instrumentos diagnósticos e materiais manipulativos, testes foram aplicados para verificar a eficiência das idéias da pesquisa.

Em relação à fundamentação teórica, o estudo apóia-se nas idéias de Jean Piaget e Robert Duval sobre o papel das representações na compreensão da Matemática. Com relação à exposição do conteúdo, Todesco (2006) optou por buscar inicialmente correlações com o cotidiano com os inteiros representando altitude em relação ao nível do mar, andar de um prédio que possui subsolo e relação entre saldo e dívida, entre outras idéias semelhantes.

O trabalho de Todesco (2006) é uma reaplicação do estudo feito por Passoni (2002), porém com um caráter interdisciplinar, envolvendo conceitos de Geografia e Português. O autor concluiu que os alunos submetidos ao pré-teste e ao pós-teste apresentaram um rendimento muito satisfatório e um progresso notável. Os alunos tiveram um aproveitamento de 50% após a avaliação do pós-teste.

Em relação à questão "Partindo de um contexto familiar e significativo, qual a compreensão que as crianças da 3ª série passam a ter sobre os números negativos?", o estudo revelou que os alunos obtiveram uma maior compreensão dos números negativos. As atividades contextualizadas trouxeram um progresso significativo para esses alunos.

A busca por resposta para: "Até onde tal seqüência pode ajudar na introdução desse conceito?", mostrou que é possível inserir este conteúdo na 3ª série. A resposta à última pergunta, "Em que consiste o avanço?", mostra ser um engano acreditar que os alunos apresentem incapacidades em relação ao conteúdo, já que foi possível obter um aproveitamento com alunos de 3ª série.

Soares (2002) apresenta uma dissertação em que trata da relação de ordem com alunos de 5º a 8º série do ensino fundamental. O trabalho tem como objetivo analisar a evolução do conhecimento dos alunos no mais amplo sentido das relações de ordem, testando-o com questões que envolvem afirmações do tipo "chegar antes de" e "não chegar depois de".

O procedimento adotado constituiu-se de uma análise de dados quantitativos, mas sem se restringir apenas a estes dados. A metodologia utilizada pela autora é o estudo de caso, que proporcionou condições para realizar uma investigação que enfatizasse a compreensão de eventos particulares. Foram utilizados observações, entrevistas, gravações, documentos, anotações de campo e interações com os participantes do estudo.

Soares (2002) realizou um teste contendo oito problemas, com duas questões cada um, visando medir o conhecimento dos alunos quanto às relações de ordem do tipo mencionado acima. Posteriormente, os alunos receberam as folhas respondidas e debateram sobre as respostas dos problemas. O debate serviu para identificar se os alunos superaram as dificuldades da primeira etapa. A seguir houve um pós-teste, que envolvia 4 folhas com problemas, dois problemas para cada folha. A análise das respostas utilizou elementos da Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau, mas também contou com elementos da impregnação da Língua Materna, de Machado, e do conhecimento tácito de Polanyi. Segue abaixo um exemplo de um dos problemas trabalhados com os alunos.

> Uma professora queria saber a ordem de chegada de alguns de seus alunos. Eles lhe deram informações e ela conseguiu encontrar a ordem exata de

chegada deles. Tente encontrar a ordem de chegada, conforme as afirmações que os alunos dessa professora deram a ela.

1. Pedro disse que chegou à escola antes de Luísa. Luísa disse que chegou à escola antes de Bia.
   a) De acordo com o enunciado, é possível escrever uma ordem em que eles possam ter chegado? Se der, escreva-a.
   b) De acordo com esse enunciado, você pode concluir que há apenas uma possibilidade de ordem de chegada deles? Se não, indique outra ou outras ordens de chegada possíveis.

(Soares, 2002 p.121)

Há inúmeros probleminhas deste tipo, com variações em termos de complexidade no texto de Soares (2002).

Os dados foram recolhidos, catalogados e tabelados, de maneira a classificar a aprendizagem dos alunos. Esses conseguiram alcançar determinadas etapas do pré-teste, debate e pós-teste. Com a análise dos dados, a autora conclui que os alunos não tinham familiaridade com problemas de múltiplas soluções, nem problemas envolvendo ordenações não-numéricas, mas houve uma progressão ao realizarem as atividades propostas.

Segundo Soares (2002), alunos de todas as séries tiveram avanços semelhantes de compreensão da relação de ordem na mais ampla forma, que envolvem questões não numéricas. Isto justifica uma intervenção didática do método proposto, pois resulta avanços significativos na aprendizagem do alunos.

Apesar da dissertação da autora não tratar de números inteiros, ela desenvolve com os alunos um conceito de ordenação, importante na compreensão dos números inteiros. O conceito de ordenação possibilita ao aluno abstrair operações com números inteiros.

Bini (2008) apresenta uma dissertação em que trata do ensino de números inteiros no nível fundamental. Seus objetivos consistem em buscar estratégias que possam melhorar a participação dos alunos nas aulas de matemática e o rendimento dos mesmos nesta disciplina. A autora pesquisa sobre a abordagem metodológica de ensino, priorizando situações interativas, e fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud procura responder sobre a contribuição dessa teoria para a construção do conhecimento de alunos de 6ª série no campo conceitual dos números inteiros. Essa problemática surgiu em função de preocupações relacionadas aos dados do INEP, referentes à Prova Brasil 2005, na região onde reside e trabalha a autora. A situação crítica envolvendo a aprendizagem foi interpretada como falta de sintonia no processo de ensino e de aprendizagem.

O trabalho se desenvolveu seguindo a metodologia da observação participante. Foram utilizadas as observações da professora do desempenho dos alunos em sala de aula, em atividades orais e escritas, em pequenos grupos e individualmente. Segundo Bini (2008), a investigação foi fundamentada na abordagem naturalística-construtiva, sendo o próprio investigador sujeito da pesquisa. Nessa perspectiva, suas crenças e teorias podem influenciar nos resultados observados.

A autora procurou reproduzir falas, atitudes e procedimentos-em-ação, utilizados pelos estudantes, na tentativa de identificar conjuntos e organizar os dados. Ao longo do processo, que teve duração de três meses, quatro avaliações formais sucederam-se, designadas como diagnósticos. As atividades foram planejadas tendo como referência a Teoria do Campo Conceitual. Foram privilegiados situações interativas, representadas por atividades de jogos e desafios, resolução de problemas, discussão de conceitos, enfim, pela interação dos estudantes entre si e dos estudantes com a professora. Este estudo de investigação teve como sujeitos, uma turma de sexta série, formada por 27 alunos com faixa etária entre onze e dezesseis anos, de uma escola pública do interior do Paraná, alunos da autora desta dissertação.

Bini (2008) conclui que o crescimento pessoal e profissional que ocorreu durante essa etapa é de grande importância para a continuidade da caminhada como docente e pesquisadora. Algumas indagações foram respondidas e outras surgiram. Diante da investigação feita, ela assegura que uma abordagem metodológica de ensino, priorizando situações interativas, pode contribuir para a construção do conhecimento dos alunos de 6ª série no campo conceitual dos números inteiros. Segundo a autora,

> de acordo com o que foi observado, as atividades interativas transformam o ambiente da sala de aula, ampliando a participação dos estudantes e tornando-os parceiros na tarefa de construir novos conhecimentos. Para ser parceiro do professor, é necessário que o aluno faça a sua parte. Sem ela, o estudo não é completo. Essa parceria entre professor e aluno não acontece naturalmente, precisa ser construída e pode acontecer quando o aluno passa a conhecer sua função e a importância de seu envolvimento para que o aprendizado realmente ocorra. Cabe ao professor priorizar situações que instiguem uma participação legítima. (Bini, 2008 p. 109)

Ao final do texto, encontra-se a resposta à pergunta inicial do seguinte modo: As tarefas passam a ser executadas com prazer quando são interativas, provocando maior envolvimento dos estudantes. Durante uma atividade interativa, não há passividade, não há objeto-receptor. É condição natural para participar que o sujeito se envolva cognitivamente com a tarefa a ser feita. O individuo é instigado a construir e reconstruir seus pontos de vista, suas opiniões e rever suas atitudes. Esse movimento constante de atenção a si próprio e aos outros, leva-o ao desenvolvimento da sua capacidade crítica.

As atividades interativas favorecem o aprender individualmente e também com o outro. Elas possibilitam o desenvolvimento do estudante em um sentido mais amplo, pois dependem da criação de estratégias e tomadas de decisão. Essas necessidades exigem que o estudante recorra aos seus conhecimentos anteriormente construídos.

Não basta saber o conteúdo, é preciso conquistar os estudantes, para que possa haver significativa construção dos conceitos. Essa façanha parece ser imprescindível para que cada professor possa colaborar no sentido de que a escola cumpra sua função e, ainda, melhorar os resultados que as escolas públicas têm obtido em avaliações como a Prova Brasil[2], por exemplo.

[2] A Prova Brasil é uma prova que serve como diagnóstico, em larga escala, desenvolvida pelo MEC, sobre a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos. Maiores informações em http://provabrasil.inep.gov.br

3. Análise Prévia

As análises feitas neste capítulo têm como função destacar como é realizado o atual ensino de números inteiros e suas principais dificuldades. No primeiro tópico destacamos o que os autores referidos na Revisão Bibliográfica vêm propondo para o ensino deste tema. No segundo tópico temos uma análise matemática do tema, na qual é discutido o conceito de número inteiro e sua origem histórica. A seguir, a análise didática é discutida no sentido de se levantar as maneiras mais usuais de como os números inteiros são ensinados, como o tema é discutido em sala de aula e como alguns livros didáticos tratam o ensino de números inteiros.

Por fim temos a análise da dificuldade dos alunos, tópico constituído de uma entrevista e da aplicação de uma atividade com alunos do Colégio de Aplicação da UFRGS. Através desta atividade levantamos algumas dificuldades desses alunos, referentes ao ensino-aprendizagem de números inteiros.

3.1. Análise de propostas atuais para mudar e melhorar o ensino dos números inteiros

O objetivo principal desta análise é descrever o que os educadores e pesquisadores pensam a respeito do ensino atual dos números inteiros e das dificuldades dos alunos na aprendizagem desse conteúdo.

Para Costa (2007, p.67), “aprender adição e subtração não se restringe a fazer contas de ‘mais’ ou de ‘menos’. Essas operações são da mesma natureza e podem ser usadas para resolver problemas que envolvem ganhar, perder, tirar e comparar....”

Consequentemente, o ensino dos números inteiros pode e deve ser relacionado com vivências, experiências cotidianas dos alunos, a fim de que o assunto em questão esteja presente no contexto dos estudantes.

Passoni (2002) apresenta atividades com esse foco, visando diminuir as dificuldades dos alunos no ensino-aprendizagem de Matemática. Para introduzir os números inteiros, foram realizadas atividades que, primeiramente, eram trabalhadas no campo real, como desenhos de prédios com andares no subsolo, e, depois, passadas para o campo abstrato, através da representação dos andares em uma reta. Os professores utilizaram barbantes e fichas para demarcar os inteiros horizontalmente.

Bini (2008) apresenta uma dissertação que aborda estratégias que possam melhorar a participação dos alunos nas aulas de matemática e o rendimento dos mesmos nesta disciplina baseadas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Para Bini, a dificuldade dos alunos deve-se a falta de sintonia e harmonia entre o processo de ensino e o de aprendizagem. Em sua dissertação, podemos perceber que há uma sugestão de melhoria para o ensino atual dos números inteiros, uma vez que, segundo a autora, para se ter um ensino de qualidade é preciso privilegiar as situações interativas, tanto entre alunos quanto entre alunos e professores. Isso contribui para a construção do conhecimento por parte dos estudantes no campo conceitual dos números inteiros. Essas situações mencionadas podem provir de jogos, desafios, resoluções de problemas e, principalmente, discussões sobre o tema exposto.

É por meio dessas atividades que o aluno se sente motivado a participar das discussões, ele sente ânimo para construir o conhecimento, diferentemente de quando o professor apresenta inicialmente o conceito já estruturado. Desta forma, o aluno sente-se participante do espaço-tempo da sala de aula, ele é encarado como um ser ativo, pensante, que expõe suas opiniões. O aluno aprende mais quando não é considerado apenas como um receptor das palavras do professor, mas sim quando é encarado como um questionador das mesmas.

De acordo com Vergnaud (apud BINI, 1982), o conhecimento está estruturado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. Ele define campo conceitual como um conjunto informal e diversificado de problemas, tarefas, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, relacionados uns com os outros. Assim, Vergnaud considera o campo conceitual como uma unidade de estudo para dar sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real.

Com isso, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é composto pelas situações que podem ser analisadas como problemas de proporções para os quais é necessária uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação das duas. Da mesma forma, o campo das estruturas aditivas é a construção daquelas tarefas, para as quais é necessária a adição. (BINI, 1982)

A Teoria dos Campos Conceituais justifica a dificuldade dos alunos nos campos da adição e da multiplicação, pois no ensino atual dos números inteiros não são trabalhadas situações reais com os alunos, o que é indispensável para o desenvolvimento cognitivo. A conceitualização é a essência desse desenvolvimento. É através das situações (não as didáticas, mas as tarefas, os problemas, os questionamentos) que determinados conceitos começam a fazer sentido. Um conceito somente se torna significativo depois do aluno te-lo vivenciado em diversas situações. (BINI, 1982)

Para uma melhor compreensão do conteúdo tratado no estudo foi importante “trabalhar com os números inteiros de uma forma contextualizada, relacionando novos conhecimentos a conceitos que os alunos já possuíam, privilegiando o aspecto semântico para uma posterior integração ao aspecto sintático” (Vitti, 2009, página 6).

3.2. Análise da matemática relativa aos números inteiros

O objetivo principal desta análise é conhecer a definição de números inteiros, os aspectos históricos que proporcionaram o desenvolvimento dos estudos deste conteúdo e ainda os principais problemas e questões relacionadas e suas respectivas idéias de solução.

É difícil encontrar uma definição para números inteiros que se dedique exclusivamente a dizer “o que são”. O que normalmente se vê nos livros é uma introdução direta ao uso dos mesmos. Segundo Millies e Coelho (2006), os números inteiros são uma extensão dos naturais acrescidos de algumas características como a existência de um antecessor para todo elemento pertencente a este conjunto.

Millies e Coelho (2006) traz uma discussão histórica sobre o estudo dos números negativos. Ele afirma que estes passaram a receber atenção primeiramente em uma obra de origem indiana atribuída a Brahmagupta, onde os números negativos eram tratados como dívidas. Os negativos foram ganhando reconhecimento devido as suas possíveis interpretações que forem surgindo ao longo do tempo, porém este conjunto sofreu preconceitos e demorou a ser aceito como legítimo de ser estudado.

De acordo com Millies e Coelho (2006), Stiefel e Cardano ainda excluíam estes números como indignos de serem estudados. Quando houve a aparição dos números complexos, nasceu uma nova discussão sobre a natureza dos números e então os números negativos começaram a receber a importância que que lhes é atribuída nos dias de hoje.

Neto (1992) traz uma oposição de idéias acerca dos números negativos, uma problemática inicial gerada a seu respeito no desenvolvimento de seu estudo histórico. Segundo esse autor, de um lado estaria a tentativa de associar a idéia de grandeza à idéia de número positivo para então estender este conceito aos números negativos. De outro lado, encontra-se a dissociação desses conceitos, declarando número e grandeza como independentes um do outro. O texto de Neto remete ao que Glaeser (apud Neto, 1992) havia comentado sobre a dificuldade de se justificar as regras de sinais, como ponto de partida desta discussão. Ao fim de um período de discussões, Neto conclui que número e grandeza são de fato conceitos independentes e dissociáveis.

Ainda sobre as dificuldades no ensino de números negativos Cid (2000) reforça a importância de atribuir significado ao conteúdo, porém sempre colocando este significado como um modelo, respeitando assim a impossibilidade de sempre poder associar número e grandeza. Cid também acrescenta em suas conclusões sobre estas dificuldades que o manejo operacional com o signo do número negativo é reforçado por meio da álgebra.

Em relação ao auxílio de softwares no ensino de números inteiros, Vitti (2002) traz uma experiência com o *software* SLogoW, com o qual os alunos constroem a reta numérica dos números inteiros, atribuindo cores aos negativos, aos positivos e ao zero e ordenando-os. Segundo Vitti, o *software* proporciona um aprendizado diferenciado, complementando o trabalho expositivo do professor no quadro e contando com o interesse das crianças como fator motivador.

3.3. <u>Análise Didática no ensino de números inteiros</u>

Operações com números inteiros é um conteúdo importante não só para o cotidiano do aluno, mas na resolução de equações, o que permite ao aluno compreender conceitos mais avançados de matemática. A maneira mais comum de ensinar números inteiros é realizar a adição e a subtração sobre a reta numérica. Por exemplo, para realizar a adição (3) + (4) na reta numérica, primeiro localizamos o número 3 e depois nos deslocamos quatro unidades para à direita, obtendo como resposta o número 7 visualizado na reta numérica.

Inicialmente são trabalhadas as adições e subtrações mais simples com o auxílio dos parênteses para diferenciar o sinal do número inteiro do sinal da operação a ser realizada. Por exemplo, (+2) + (+5). Posteriormente é simplificado para 2 + 5. Tal separação auxilia na compreensão de futuras subtrações que geram algumas confusões em relação à regra de sinais, utilizada nas multiplicações.

Pode-se notar também que ao separar a operação do sinal do número, auxiliamos o aluno e não cometer alguns equívocos na resolução de equações de primeiro grau. Ao “passarmos” um número para o outro lado da igualdade, se este estiver sendo adicionado, no outro lado da igualdade o número reaparecerá sendo subtraído. Ou seja, com a operação contrária. Através da minha experiência posso citar exemplos em que os alunos cometem o erro de ao “passar” para o outro lado da igualdade um número que está multiplicando, inseri-lo como divisor, mas com sinal trocado.

Nos livros didáticos atuais praticamente todos os autores trabalham sobre a reta numérica, entretanto, com a vantagem de utilizar situações familiares ao cotidiado das crianças para introduzir os números inteiros. Questões sobre temperatura, distância e relações com compras e contas bancárias, que buscam instigar as crianças a pensar sobre os números negativos, são muito comuns.

No livro de Antonio Lopes, “Matemática hoje é feita assim” (2000), temos exemplos sobre as relações de ordem na reta numérica através da análise de variações de temperatura. O autor ilustra uma atividade com um recorte de jornal, informando variações de temperatura em diferentes regiões de um determinado local. Em alguns locais, as temperaturas máximas e mínimas são positivas e são utilizadas para introduzir o conteúdo. Para aprofundar a atividade, o autor discute a variação de temperatura de alguns locais do mapa onde a temperatura máxima é positiva e a mínima é negativa, de forma que tal variação pode ser medida com o uso da reta numérica.

Tanto no site da revista *Escola* como no livro de Antonio Lopes, temos problemas que envolvem dinheiro, como por exemplo:

“Imagine que uma pessoa tem R$500,00 depositados em um banco e faça sucessivos saques:

1º	saque:	R$200,00
2º	saque:	R$100,00
3º	saque:	R$300,00

Qual o saldo no banco dessa pessoa após os saques?”

(Revista Escola, Números Negativos. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/numeros-negativos-429031.shtml Acesso em: 15/04/09)

Existem, ainda, jogos para auxiliar a aprendizagem dos números inteiros. Podem-se utilizar cartas ou qualquer objeto, de forma que é possível diferenciá-los pela cor. Por Exemplo, duas cores. Ao realizarmos a adição (+5) – (+7), por exemplo, alinha-se 5 da cor azul, que simboliza os números positivos, e 7 cartas da cor vermelha, simbolizando os números negativos. Então é feita uma comparação, pareando as cartas uma a uma, de forma que uma cor “cancele” a outra. Obtemos então o resultado das cartas que não encontraram par. Neste caso, sobrariam 2 cartas de cor vermelha, o que indica que o resultado da adição é – 2.

3.4. Análise das dificuldades dos alunos

Esta análise refere-se ao seguinte questionário, que foi aplicado em uma turma de 31 alunos da 7ª série do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no dia 25/05/2009. Os entrevistados já haviam estudado números inteiros no ano de 2008, ao longo da 6ª série. Essa investigação teve como objetivo detectar quais são as dificuldades que os alunos encontram no estudo deste conteúdo.

Questionário

Responda às questões abaixo:

1) O que são números inteiros?

2) Circule os números que você identifica como sendo inteiros:

a) 3 b) -1/2 c) 3/5 d) -112 e) 0 f) 0,5

3) Onde podemos encontrar os números inteiros?

4) Calcule:

a) $6-8=$	b) $2-4+13=$
c) $0-9=$	d) $3-(-15)=$
e) $-201+290=$	f) $-127+31=$
g) $192-345=$	h) $32-17-15-13=$
i) $22\times 0=$	j) $12\times(-2)=$
k) $(-11)\times(-3)=$	l) $(-9)\times 2\times(-1)=$

5) Escreva em ordem crescente os números abaixo:

6; -17; 28; 41; 0; -9; -1; 234; -368

3.4.1. *A identificação*

Seis alunos descreveram o conjunto de inteiros como sendo os naturais, dez afirmaram que eram números “sem vírgula” ou “não-fracionários”, seis responderam que eram os números “negativos e positivos”. As duas últimas definições não estão incorretas, mas incompletas, seria necessário fazer de ambas uma resposta. Um aluno escreveu que “não são números divididos” e cinco não responderam essa questão.

Somente três alunos definiram os números inteiros como sendo “todo o número, positivo ou negativo, sem vírgula”, o que caracteriza corretamente esse conjunto. Um deles disse que “são números como -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3”. Essa também é uma forma correta de representá-los. Ou seja, apenas três dos 31 alunos descreveram os números inteiros utilizando essas duas formas de representação.

Quando proposto que os estudantes identificassem quais eram números inteiros, dentre as opções oferecidas, sete marcaram apenas os números positivos. Quatro alunos referiram-se aos números fracionários. Os demais identificaram corretamente a natureza dos números apresentados.

Observando as respostas dessas duas primeiras perguntas, podemos perceber uma dissociação entre formas de caracterização do conjunto dos inteiros, pela definição ou pela descrição explícita. Menos de 10% dos alunos definiram corretamente a noção de número inteiro, mas 65% da turma souberam identificá-los, quando descritos explicitamente.

3.4.2. *A ordenação*

90% dos alunos ordenaram corretamente os números inteiros. O enunciado pedia que os números fossem colocados em ordem crescente. Alguns deles escreveram em ordem decrescente, porém o sinal “<”, utilizado por eles, demonstra que os mesmos compreendem a comparação entre inteiros. Por isso, as respostas foram consideradas corretas sob o ponto de vista da “ordenação” – não estávamos preocupados aqui com a interpretação das questões

3.4.3. *As operações*

Foram propostos 12 exercícios que envolviam adição, subtração e multiplicação entre números inteiros. Nenhum dos estudantes respondeu corretamente a todas as questões. Dentre as dificuldades demonstradas, destacam-se subtrair um número maior de um menor, ou seja, de encontrar resultados negativos para uma subtração;, e somar um número negativo a um número positivo. Nesta situação os alunos utilizavam a regra “menos com menos é mais”, associada à multiplicação.

Segundo a maioria dos estudantes, a multiplicação de dois números negativos resulta m um número negativo. Menos de 20% dos alunos responderam corretamente as três questões que envolviam a multiplicação de inteiros. Apenas quatro acertaram essas questões. Sete escreveram que 22×0 resulta 22. A maioria dos estudantes não compreende as operações de adição e multiplicação com números inteiros.

3.4.4. *Algumas conclusões decorrentes da análise do questionário*

Conforme o exposto nas três subseções acima, percebemos que os estudantes compreendem a ordenação dos números inteiros e a maioria identifica os números inteiros, quando estes aparecem junto com números racionais. Porém, eles apresentam dificuldades para adicionar, subtrair e multiplicar com inteiros. Não compreendem o significado de adicionar dois números negativos, subtrair uma quantidade maior de uma menor, subtrair alguma quantidade de zero, multiplicar dois números negativos ou um negativo e um positivo. Os alunos também não sabem definir, por extenso, esse conjunto.

E quando perguntados sobre onde encontrar os números inteiros fica claro que os estudantes os confundem com os números naturais. Muitos afirmaram que eles podem ser encontrados em números de telefone, em valores de mercadorias, no calendário. Poucos responderam que é possível encontrá-los em extratos bancários ou em temperaturas. Alguns, ainda, afirmaram que os números inteiros se apresentam apenas nas aulas de matemática.

4. Constrangimentos que emergem das análises prévias

Constatamos que alguns professores, observados ao longo da minha experiência profissional e em meus estágios de docência, utilizam propostas tradicionais ao tratarem de números inteiros, através de exercícios repetitivos sem criatividade, sentido e contexto. Percebemos que as pesquisas sugerem métodos diferentes para a aprendizagem dos números inteiros. Jogos, problematização do conceito e atividades que contextualizam os números inteiros são propostas comuns entre os pesquisadores atuais.

Assim, decidimos delinear o objetivo deste estudo a viabilidade de uma abordagem mais satisfatória para o ensino de números inteiros. Para isto, identificamos e descrevemos alguns constrangimentos que se opõem à melhoria do ensino, neste quadro. Buscamos, nas análises prévias, as razões da manutenção do ensino usual predominante, listando os constrangimentos que dificultam a mudança de estado. Pela modificação de pelo menos um destes constrangimentos, pode-se ter o sistema estabilizado em outro ponto de equilíbrio que se julga mais satisfatório.

Neste caso, podemos resumir os principais constrangimentos responsáveis pela tradição do ensino de números inteiros em cinco níveis:

4.1. <u>Dificuldades inerentes ao conceito e à história do conceito</u>

Somente com a construção dos números complexos, os números inteiros receberam a atenção dos matemáticos. Até então, os números negativos representavam dívidas. Entretanto, os números negativos, como objeto matemático, eram tratados como aberrações e não se julgava merecido um estudo sobre este conteúdo.

Dissociar o conceito de número do de grandeza é um dos grandes desafios para a compreensão dos números negativos, e mesmo que o aluno consiga tal abstração, as regras para operar com os números inteiros não são fáceis de compreender.

4.2. <u>Dificuldades inerentes aos professores, seus hábitos, sua didática tradicional</u>

Os livros didáticos atuais oferecem novas maneiras de trabalhar com os números inteiros, entretanto, estas não costumam chegar à sala de aula. Conforme mencionei no início deste capítulo, alguns professores insistem em apresentar o conteúdo de forma tradicional, com exercícios repetitivos e pouco criativos, enfatizando a memorização de regras, sem buscar algum significado que contribua para a aprendizagem.

Tal postura dificulta muito a aprendizagem, visto que não há discussão sobre o conteúdo e os alunos não encontram curiosidade, motivação e interesse em estudar os números inteiros.

4.3. Dificuldades inerentes aos alunos quanto à compreensão do conceito dos números inteiros

Na análise do questionário respondido pelos alunos, apenas três, de 31 responderam o que são os números inteiros com todas as suas características. Outra dificuldade apresentada é a distinção entre o sinal do número o sinal da operação a ser realizada.

Entretanto, a maior dificuldade está na operação com os números inteiros. A maioria dos alunos generalizou as regras ensinadas para realizar multiplicação, causando equívocos nas operações de adição e subtração.

4.4. Dificuldades inerentes às sugestões dos pesquisadores

As sugestões oferecidas pelos pesquisadores consultados incluem o uso de jogos, desafios, resoluções de problemas e, principalmente, discussões sobre tema. Essas atividades incentivam o aluno a interagir e participar das discussões, a fim de construir o conhecimento, diferentemente de quando o conhecimento é apresentado de forma pronta e estruturada.

Dentre os jogos oferecidos e testados pelos pesquisadores, temos o Quebra-Cabeças Numérico, testado pela autora Márcia Bini (2008) e utilizado neste estudo. Outro grupo de atividades pode ser encontrado na obra de Todesco (2006), que utiliza mapas e figuras que ilustram a diferença de altura em relação ao nível do mar para estudar o ordenamento.

Os pesquisadores indicam melhoras na aprendizagem de números inteiros. Entretanto, as pesquisas nem sempre entram em sala de aula, pois alguns professores insistem em trabalhar com esses números da maneira tradicional e nem sempre a escola tem estrutura para trabalhar com jogos, como sugerem alguns daqueles pesquisadores.

4.5. Dificuldades inerentes ao currículo

Todesco (2006) questiona a importância dada pelos PCN aos números inteiros. Mesmo sendo de grande importância, os números inteiros não são vistos em séries anteriores a 6º série, apesar de estudos apresentados por pesquisadores citados neste trabalho indicarem que é possível iniciar um trabalho com alunos de 3º visando a compreensão futura dos números inteiros.

O autor faz uma análise sobre os PCN e alguns livros didáticos do ensino fundamental. Livros de séries anteriores à sexta série não apresentam exemplos de números inteiros. Em alguns livros aparecem termômetros e exemplos que envolvem dinheiro, entretanto em momento algum aparece um número negativo.

Abaixo vamos analisar trechos dos PCN (1998) retirados do trabalho de Todesco (2006), que tratam do ensino de matemática do terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental.

> Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise d diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, "falta", orientação e posições relativas. As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas idéias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações. (p. 93)

Os números inteiros não são discutidos até então, mas para sua compreensão existe um pressuposto de que os alunos já tenham alguma noção do que são os números inteiros.

Todesco (2006) e Passoni (2002), ao trabalharem com números inteiros na terceira e quarta série do Ensino Fundamental, citam o interesse e a curiosidade dos alunos ao serem apresentados a esses números. Se tivéssemos atividades que instigassem a curiosidade dos alunos sobre os números inteiros a partir da terceira série, possivelmente na sexta série o conteúdo seria aprendido com mais facilidade.

Nos currículos anteriores, os números inteiros eram pouco discutidos e algumas características desses currículos permaneceram. Uma característica que temos na escola quanto à ordem dos conteúdos a serem trabalhados é o fato de que na quarta série aprendemos sobre os números racionais, enquanto que somente na sexta série aprendemos e utilizamos os números inteiros. Fica a questão: Por que não utilizar os sinais positivo e negativo antes de aprender frações?

5. As Práticas e seus Relatos

5.1. Prática 1: Jogo das Varetas[3]

A primeira prática foi realizada dia 15 de maio de 2009, em uma turma da 6ª série da Escola Estadual Rio Branco, em duas horas-aula do período da manhã. Trataremos de um problema existente no ensino de números inteiros: a confusão que os alunos fazem entre as regras para a multiplicação e para a adição entre os mesmos.

Nos constrangimentos, que emergiram das análises prévias, constatamos que a maioria dos alunos generaliza regras para operar com inteiros, usando-as tanto para a adição e subtração quanto para a multiplicação. Essa confusão foi confirmada pela professora da turma com a qual desenvolvemos a prática: Os alunos apresentam dificuldade em adicionar e multiplicar números inteiros, em especial porque aplicam as regras ensinadas para a multiplicação também na adição.

Por isso, decidimos desenvolver uma aula que auxiliasse os estudantes na compreensão da adição de números inteiros e da multiplicação de inteiros positivos ou de sinais opostos, através da interpretação de informações. Com isso, será necessário que os alunos dêem significado para as operações envolvidas, distinguindo-as umas das outras.

Partimos da hipótese de que a confusão que os alunos fazem acerca das regras para operar com inteiros se dá porque não há significado em adicionar ou multiplicar inteiros e, portanto, não há para eles uma diferença entre essas operações.

Sabemos que os alunos já possuem uma noção, embora confusa, sobre o que é um número inteiro e de como fazer as operações acima referidas. Por isso, esperávamos também que essa atividade auxiliasse na organização e significação do conteúdo abordado. Esperava-se que fossem necessárias algumas intervenções ao longo da prática, a fim de auxiliar na formalização da maneira aritmética de escrever as operações.

Esperava-se também que os alunos estivessem receptivos à proposta: um jogo, cujo objetivo principal não é calcular, e sim testar uma habilidade. Nesse jogo, o cálculo se torna necessário para descobrir quem vencerá.

[3] Esta atividade foi elaborada pelo grupo formado na cadeira de Pesquisa em Educação Matemática e ministrada pelo colega Diego Matos. A análise inicial dos dados retirados da atividade foi feita pelo mesmo grupo, cujos membros foram: Diego Matos, Virginia Sanchonete, Danielle Santos e Julio Meister.

O jogo se chama “pega-varetas” e é formado por varetas azuis, verdes, vermelhas, amarelas e uma vareta preta. A turma deverá ser dividida em grupos de 4 ou 5 alunos. O objetivo de cada jogador é pegar o maior número de varetas possível.

Inicialmente, jogam-se todas as varetas na mesa. O primeiro jogador deve pegar o maior número de peças possível, uma de cada vez, sem que as outras se movam. Caso contrário, ele passa a vez. E assim sucessivamente até que não restem varetas na mesa.

No final do jogo será divulgado o valor determinado para cada cor de vareta – que pode ser positivo ou negativo.

Assim, de acordo com o número de varetas de cada cor, os estudantes deverão calcular quantos pontos fizeram e analisar quem obteve mais pontos no grupo.

Para Brown, (apud Bini (ano 2002, p. 16) “uma situação será definida como competitiva quando a realização dos objetivos de um de seus membros impede a realização dos objetivos dos demais” É importante levar esse entendimento para a atividade, pois num jogo educativo, mesmo partindo de uma idéia de disputa, a atividade deve ser condicionada pelo professor de maneira que os alunos compreendam que o objetivo do jogo é aprofundar um determinado conhecimento, de forma que independentemente do resultado final, todos saiam ganhando.

Segue uma tabela abaixo informando a distribuição do tempo para a efetivação da atividade.

Tempo Estimado (min)	Objetivo	Ação	Recursos Didáticos
1° momento: 15	Organizar os grupos de alunos. Apresentar a proposta.	Os alunos serão divididos em grupos de 4 ou 5 para que as regras sejam explicadas.	Exposição oral.
2° momento: 30	Jogar com o pega-varetas.	Possibilitar que os estudantes joguem por trinta minutos.	Jogo de pega-varetas.
3° momento: 50	Formalizar as operações de adição entre números inteiros e de multiplicação entre dois positivos ou dois inteiros de sinais opostos.	Inicialmente, os estudantes terão 10 minutos para calcular quantos pontos fizeram no jogo e quem ganhou a partida. Depois, será formalizada a maneira aritmética de trabalhar com as operações citadas ao lado.	Exposição no quadro.

5.2. Relato da Prática do Jogo Pega Varetas

Os alunos foram divididos em grupos de**,** no máximo, cinco componentes cada. Foi entregue a eles um jogo de varetas com uma quantidade padrão delas.

A dinâmica do jogo era que, após a primeira vez que os alunos o jogassem, seria informado a eles a pontuação correspondente a cada vareta. Assim, após atribuídos rem esses valores, eles partiriam para o calculo das pontuações obtidas.

Neste ponto, não houve dificuldades. Pediu-se aos alunos que registrassem, individualmente, a sua pontuação e entregassem ao término da aula esse registro, juntamente com os cálculos realizados na contagem dos pontos.

O ensino do conteúdo de números inteiros tem sido**,** na maioria das vezes, muito “engessado”, contando somente com a realização de exercícios repetitivos e mecânicos. Portanto, a atividade desenvolvida teve por objetivo dissolver as dificuldades descritas, associando essas idéias a dívidas e ganhos, a positivos e negativos e a operações aritméticas subjacentes**.** Enfim, o trabalho buscou fazer esta ligação de forma diferenciada.

É importante observar que esta ponte é historicamente problemática, como relatado nas análises prévias. Porém, a atividade visou unir a idéia de grandeza e número negativo, procurando através de um jogo utilizar a motivação dos alunos para que pudessem melhorar sua compreensão desse conteúdo.

Tínhamos por hipótese que os alunos possuiam problemas com as operações aritméticas, como confundir o uso dos sinais em operações de adição e multiplicação. Um exemplo disto pode ser observado na seguinte adição realizada por um aluno:

$$\begin{array}{cr} & 13 \\ + & 12 \\ & -7 \\ & -5 \\ \hline & 37 \end{array}$$

Aqui o aluno se equivocou ao efetuar a adição $(-7)+(-5)$. Pelo fato de termos dois sinais negativos repetidos, o aluno utilizou a regra de sinais e tornou a soma positiva.

Ou então:

$$-5-5-7+13+13+12+12+12=$$
$$-17+62=-45$$

Aqui o aluno novamente generaliza a regra de sinais utilizada na multiplicação. Na expressão $-17+62$, ele interpreta como “menos com mais é igual a menos” e concluir com o resultado - 45.

Também com base na realização da prática, testamos a seguinte hipótese: Enquanto trabalham apenas com soma de inteiros os alunos não apresentam grandes dificuldades, mas quando é introduzida a divisão e a multiplicação de inteiros, e, por conseguinte, as regras de sinais, os alunos passam a achar que esta regra é válida também para as operações que antes realizavam bem. Por exemplo:

A: $3-2=-1$?

P: Não, Alberto, fica o sinal do maior!

A: Ah tá!

A: $3\cdot(-2)=6$.

P: Não, Alberto! + com – dá - !

A: Mas não ficava o sinal do maior?

A hipótese foi, portanto, verificada.

Outra hipótese que trazíamos era a de que os alunos pudessem confundir a idéia de grandeza com o número como entidade matemática, ou, em outras palavras, que não conseguissem fazer a ponte entre o conceito de perder e ganhar pontos com as operações aritméticas envolvendo os números representantes destes conceitos. Um exemplo que pode ser relacionado com esta hipótese é transcrito a seguir:

2ª rodada

Cor da vareta	Pontuação	Quantas peguei
Verde	8	2
Vermelha	- 41	0
Amarela	- 16	2
Azul	- 50	3
Preta	30	1

Cálculo:

-150

-32

+16

+30

+136

Neste momento, ao conversar com este aluno perguntei:

"Tu ganhou 136 pontos? Tem certeza? Por que ta parecendo que tu perdeu mais pontos do que ganhou, o que tu acha?"

"É tá certo "sôr", a conta não tá certa, eu perdi muito dessa vez..." E o aluno revisou os cálculos e mudou apenas o sinal da resposta, o que realmente corrigiu o cálculo.

Neste momento foi possível verificar que o aluno sabia que tinha perdido mais pontos do que tinha ganhado e, portanto, havia compreendido a idéia de grandeza naquele momento do jogo. Mas não conseguiu sozinho passar essa compreensão para o cálculo corretamente, de modo que essa hipótese também se fez presente.

No fim da aula foi realizada uma discussão sobre alguns cálculos executados durante a contagem dos pontos, transferindo a informação para a operação matemática correspondente. Neste momento, os alunos apresentaram uma boa noção sobre como proceder nas adições, subtrações e multiplicações com inteiros.

Mais um fato relevante que deve ser salientado foram as estratégias adotadas, um ponto ao qual também estávamos atentos. Enquanto alguns alunos adicionaram várias vezes um mesmo valor outros perceberam que poderiam multiplicar ao invés de adicionar um determinado número de parcelas. Pelas observações feitas, mais da metade dos alunos realizaram multiplicações, notando-se uma facilidade maior desta escolha em detrimento da outra.

Uma estratégia interessante que alguns alunos adotaram, sem a interferência dos professores, foi a de agrupar valores positivos e negativos, separadamente, para obter o total positivo e o total negativo e então realizar a adição dos dois totais parciais. Aqui temos a idéia de cancelamento, de forma que os positivos cancelam os negativos. Essa estratégia, porém, não foi tão utilizada como a anterior, sendo adotado por um número pequeno de alunos.

A estratégia do cancelamento pode ser vista quando um aluno argumenta que ao fazer a conta (+5)+(-8), o resultado obtido é (-3) porque oito é maior que cinco e portanto o resultado leva o sinal do oito.

Quando perguntamos para os alunos sobre o que acharam desta atividade comparando com outras aulas e indagando-os, também, sobre críticas, eles responderam que gostaram da atividade e que assim "foi mais fácil resolver os cálculos".

A partir do material coletado, das hipóteses analisadas e validadas e dos relatos, foi possível concluir que a atividade teve grande importância para um melhor entendimento deste conteúdo dos números inteiros por parte dos alunos. Foi fator motivador, auxiliando no comportamento, e também lúdico, ajudando na compreensão de associações entre grandeza e número e nos cálculos, como mostraram os exemplos acima.

5.3. Prática 2: Uso de cartas para representar números inteiros

Esta atividade visa promover uma discussão sobre as operações com números inteiros. Todas as operações são representáveis pelas cartas deste jogo, de modo que o educando possa enxergar tais operações de forma concreta, dando significado as operações com números inteiros.

O público alvo desta experiência se constitui de alunos de 6º série da turma 64 do Ensino Fundamental da Escola Estadual Anne Frank. Estes alunos possuem dificuldades com números inteiros, segundo relato de seus professores, e faremos esta experiência na tentativa de auxiliar os alunos a superarem tal dificuldade.

As dificuldades citadas pelos professores são dificuldades de aprendizagem e comportamento, estes alunos são repetentes e são considerados “fracos”, segundo relato de duas professoras dessa turma, uma de matemática e outra de português.

Nesta atividade utilizaremos cartas com duas cores diferentes. A cor azul representa um número positivo, enquanto a cor vermelha representa um número negativo. Para representar, por exemplo, o número 5, utilizaremos 5 cartas azuis. De forma análoga representaremos o número -3 por três cartas vermelhas.

Dentre as regras, combina-se que uma carta vermelha anula uma carta azul. Desta forma pode-se representar zeros também.

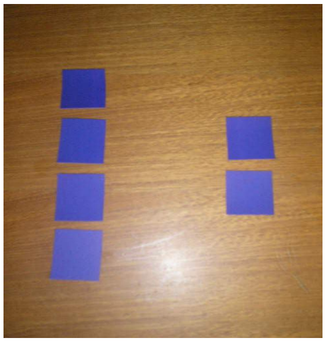
A versão original desta atividade encontra-se em anexo. Aqui vamos descrever as operações propostas, como serão discutidas com os alunos com as possíveis respostas por parte deles e também vamos levantar algumas questões sobre a atividade.

Vamos discutir aqui a operação de adição com inteiros.

Adição

Inicialmente vamos discutir com os alunos a idéia de adição. Quanto nos referimos a adicionar algo, estamos acrescentando algo.

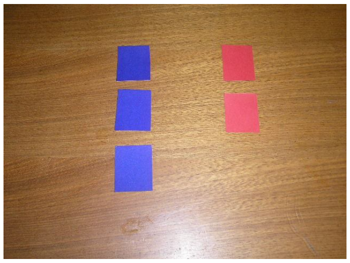
Vamos ilustrar a adição (+4) + (+2) = (+6)



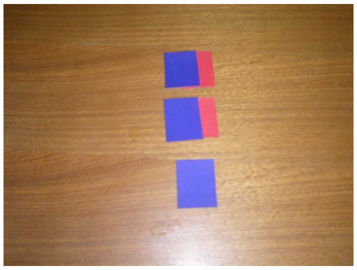
Aqui temos (+4), representado por quatro cartas azuis e, logo ao lado, (+2) representado por duas cartas azuis. Ao realizarmos a adição, acrescentamos (+2) ao (+4), de forma que teremos o resultado +6, ou seja, seis cartas azuis.

Portanto, para realizarmos a operação de adição, basta incluir cartas novas às cartas que utilizamos para representar o primeiro número inteiro.

Vamos ilustrar abaixo a adição (+3) + (-2) = +1.



Note que aqui nós temos três cartas azuis e queremos adicionar duas cartas vermelhas às cartas azuis.



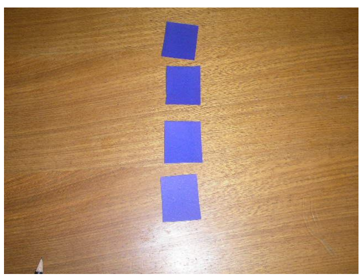
Como citado anteriormente, quando temos uma carta vermelha e uma azul, uma anula a outra, ou seja, obtemos o zero, este processo de cancelamento foi utilizado por alguns alunos na atividade das varetas. Acima temos uma ilustração de dois zeros criados a partir desta operação e o resultado final da adição é (+1)

Subtração

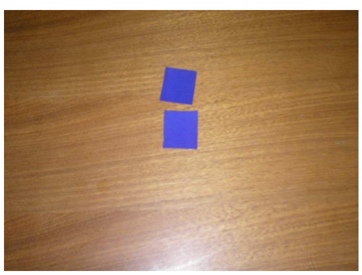
A idéia de subtrair parte do princípio de "retirar". Tal idéia já deve estar bem associada pelos alunos com os números naturais, e através do jogo das cartas podemos mostrar que a idéia é a mesma.

Vamos ilustrar a subtração (+4) – (+2) = (+2).

Inicialmente vamos representar o número (+4) através de quatro cartas azuis.

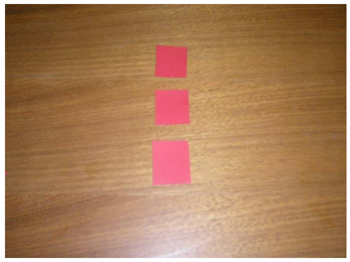


Como estamos "retirando" (+2) do número (+4), basta retirar duas cartas azuis, de forma que restarão apenas as outras duas cartas azuis.



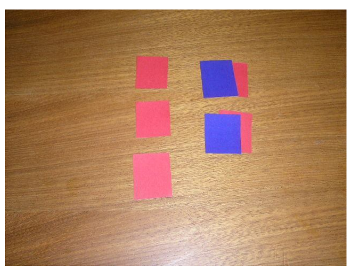
A operação de subtração feita acima funciona perfeitamente nos naturais, entretanto para realizarmos a subtração nos inteiros é necessário um artifício a mais.

Vamos ilustrar o emprego dessa operação na seguinte situação: (-3) – (+2) = (-5)

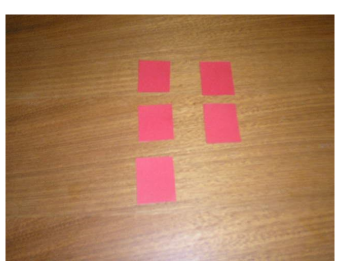


Inicialmente, acima temos representado o número (–3) por três cartas vermelhas. Entretanto, quando falamos em retirar (+2), temos um problema. Visto que nesta representação não temos duas cartas azuis, que representam (+2), para retirar. Neste caso, a inclusão de duas cartas azuis terá como efeito a criação do zero. Isto pode ser realizado sem problemas, já que ao adicionarmos zero a uma parcela da operação, não estaremos alterando em nada o seu resultado.

Como já vimos, para adicionar zeros no Jogo das Cartas, basta colocarmos, para cada zero, uma carta azul junto com uma carta vermelha. Neste caso vamos inserir dois zeros, como ilustra a foto abaixo.



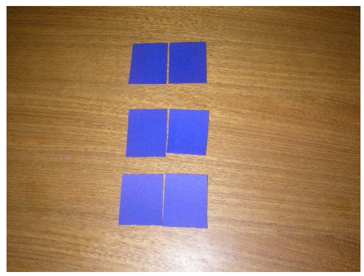
Com este artifício, agora é possível retirarmos as duas cartas azuis, que representam o número inteiro (+2) para realizar a operação de subtração. Retirando duas cartas azuis, obtemos o resultado (-5) ilustrado na figura abaixo.



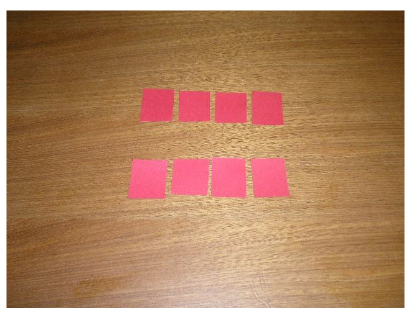
Multiplicação

Trataremos da multiplicação simplesmente como grupos de um determinado número. Por exemplo, a expressão (+3) x (+4) representa três grupos de quatro, ou ainda, três grupos de quatro cartas azuis.

Representar através das cartas a seguinte situação: (+2) x (+3) = (+6) pode ser feito da seguinte forma:

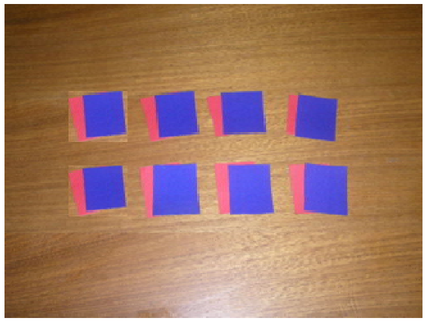


Entretanto, o interessante é analisar as representações das cartas com a multiplicação envolvendo números inteiros negativos. Vamos analisar a representação feita com as cartas para a situação: (2) x (-4) = (-8)

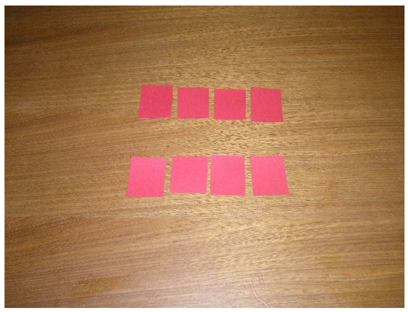


Aqui temos dois grupos de (-4), ou seja, dois grupos de cartas vermelhas, de forma que fica explícito que este resultado desta multiplicação é negativo.

Outra multiplicação que devemos analisar é (-2) x (+4) = (-8). Pois aqui, pela atividade proposta, temos "menos" dois grupos de quatro cartas azuis. Mas como é possível representar menos dois grupos? Representar menos dois grupos de quatro cartas azuis seria o mesmo que retirar dois grupos de quatro cartas. Para retirarmos dois grupos de cartas azuis, criamos oito zeros.

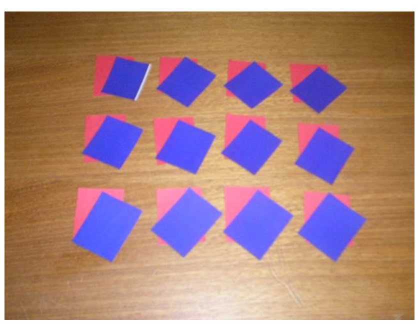


Agora, temos a possibilidade de retirar dois grupos de quatro caras azuis, de forma que teremos oito cartas vermelhas representando o resultado (-8).

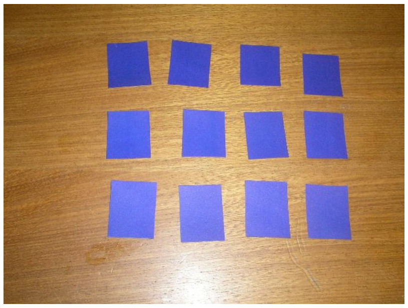


Uma questão a ser analisada com os alunos diz respeito às diversas regras que temos na hora de utilizarmos as cartas para efetuarmos uma multiplicação. É fundamental observar que o sinal do primeiro número inteiro, o símbolo de multiplicação e o sinal do segundo inteiro alteram o sentido da operação.

Vamos por fim, representar a multiplicação (-3) x (-4) = (+12). Aqui teremos um raciocínio semelhante ao utilizado na multiplicação anterior. Queremos retirar três grupos de (-4), para isto vamos criar de três grupos de quatro zeros, como ilustra a foto abaixo.



Ao retirarmos três grupos de (-4), estamos retirando três grupos de cartas vermelhas, de forma que nos restarão apenas as cartas azuis, representando o resultado final (+12).



A versão original desta atividade afirma que a multiplicação entre dois números negativos não é uma operação natural para o aluno, mas é representável através das cartas.

Aqui foram exemplificados alguns dos possíveis casos da regra dos sinais:

- (+) x (+)
- (+) x (-)
- (-) x (-)
- (-) x (+)

Mostramos que é possível representá-los através das cartas, de maneira que o aluno possa enxergar as operações feitas com números inteiros.

Segue uma tabela de como será feita a atividade com os alunos, ilustrando a divisão de tempo.

Tempo Estimado (minutos)	Objetivo	Ação	Recursos Didáticos
1° momento: 10	Apresentar a proposta e organizar os alunos.	Como os alunos são apenas cinco, organizaremos a sala de forma que possamos sentar em roda.	Exposição oral.
2° momento: 10	Explicar o funcionamento das cartas e como criar zeros.	Possibilitar que os alunos manejem as cartas e representem alguns números, conforme eu solicito, para ver se compreendem seu funcionamento.	Uso das cartas.
3° momento: 70	Trabalhar com as operações de adição, subtração e multiplicação, promovendo discussão sobre como os alunos entendem. cada uma delas. Após esta discussão efetuar algumas operações com o uso das cartas.	Os alunos vão discutir como entendem cada operação e realizar alguns exemplos com as operações correspondentes. De maneira que todos nós possamos discutir e enxergar como cada um pensa em reproduzir com as cartas essas operações.	Uso das cartas.

Será pedido aos alunos que façam as seguintes operações:

(+3) + (+2) =

(+4) + (+5) =

(+4) + (-2) =

(+5) + (-9) =

(-3) + (+1) =

(+4) – (+2) =

(+4) – (+8) =

(-5) – (-2) =

(-9) – (-6) =

(+2) x (+4) =

(+3) x (-6) =

(+2) x (-1) =

(-3) x (+5) =

(-3) x (-2) =

(-5) x (-4) =

Antes da cada nova operação, adição, subtração e multiplicação, será feita uma discussão sobre os modos como os alunos entendem e interpretam estas operações.

5.4. Relato da Prática do uso das cartas para representar números inteiros

Nosso encontro começou com a minha apresentação e pedi que os cinco alunos se apresentassem, para que eu os pudesse chamar pelo nome. Feito isto, distribuí as cartas e iniciei a explanação de como funciona a representação dos inteiros com o uso das cartas.

Os alunos compreenderam imediatamente que a quantidade de cartas azuis representa determinado número positivo e a quantidade de cartas vermelhas representa determinado número negativo. Perguntei como poderíamos representar o zero e os alunos imediatamente responderam que isso é possível ser representado com uma carta azul e uma carta vermelha. Portanto, a criação do zero, conceito abstrato que imaginei que não fosse descoberto pelos alunos tão rápido, foi logo compreendido.

Antes de iniciarmos a atividade, realizando algumas operações de adição, discuti com os alunos o que é a adição. Seguem algumas caracterizações: Joana, Marina. Alberto, Claudio e Roberto.

Roberto - Adição é assim, quando a gente junta uma coisa na outra.

Claudio - É, quando a gente tem uma coisa, daí coloca mais coisa, daí mais e mais coisas.

Perguntei aos alunos, como poderíamos representar a adição (+3) + (+2), utilizando o jogo das cartas. Todos os alunos colocaram na mesa três cartas azuis e posteriormente mais duas cartas azuis, chegando a um total de cinco cartas azuis. Esta soma resulta de uma adição com números naturais, ainda não há problema com inteiros.

Posteriormente perguntei sobre a adição (+4) + (-2). Esta adição causou bastante discussão. Apesar dos alunos enxergarem que o zero pode ser representado por uma carta azul e outra vermelha, ao colocarem na mesa quatro cartas azuis e duas vermelhas, a maioria não concluiu que uma azul cancelaria uma vermelha, de forma que restassem apenas duas cartas azuis representando o resultado (+2). A conclusão foi feita, na verdade, por apenas por Roberto, que obteve a soma sem as cartas, utilizando seu conhecimento de que o resultado é (+2) para concluir que duas cartas azuis se cancelariam com duas cartas vermelhas.

Quanto à adição (-4) + (-2), alguns alunos tentaram utilizar o conhecimento de seu resultado para ver como ficariam as cartas, a partir do que fez o aluno mencionado acima. Mas aqui pude presenciar uma generalização da regra de sinais para a operação de multiplicação de inteiros, visto que os alunos começaram a criar estratégias para conseguir seis cartas azuis ao considerarem que (-4) + (-2) representaria o caso em que “menos com menos é mais”.

Sugeri que esquecessem o resultado que eles obteriam realizando a adição sem o uso das cartas e me dissessem o resultado obtido com jogo das cartas. Os alunos colocaram quatro cartas vermelhas e logo após mais duas cartas vermelhas, representando o número (-6) por seis cartas vermelhas.

Ao chegarem a esta conclusão, notou-se um espanto por parte de alguns deles.

Joana - É mesmo, dá (-6)! Mas menos com menos não dá mais?

Roberto - E aquele sinal que tem antes do (-2), não é mais com menos? Quando é que a gente tira dos parênteses?

A discussão ficou em torno da regra de sinais, até o momento em que pedi para que pensassem sobre as caracterizações de adição que haviam apresentado antes do início da atividade. Quatro dos cinco alunos concluíram que na adição basta agrupar as cartas e da mesma forma seria com os números.

Ao realizarmos outras adições, análogas às anteriores, os alunos começaram a comparar os resultados obtidos por meio das cartas com o que eles esperavam dos resultados sem o uso das cartas, percebendo que esses resultados conferiam.

Nas últimas adições deste tipo, alguns alunos não utilizaram as cartas manualmente. Na adição (-3) + (+1) um aluno afirmou:

Roberto - Se tenho três cartas vermelhas e adiciono uma azul, a vermelha corta com a azul e sobram só duas vermelhas.

Aqui temos um processo muito interessante, o aluno para de usar a carta e começa a utilizar as regras das cartas para conferir o resultado final dele. As cartas ajudam a conferir o resultado da conta e vice versa.

Existem muitas analogias que o aluno pode fazer para compreender a operação de adição com números inteiros. Alguns alunos utilizam a idéia de divida, saldo de gols, temperatura etc. Cada aluno se sente à vontade para utilizar uma analogia diferente, até que em um dado momento o aluno não necessita de analogia nenhuma para operar com os inteiros. Entretanto, não é o escopo de nosso estudo tratar desse momento ou desses aspectos. Nesse processo que acabo de relatar, o aluno acaba de adquirir uma nova analogia, uma forma de analisar e conferir uma operação com números inteiros.

A próxima discussão ocorreu em relação a operação de subtração. Antes de começarmos a subtração, discutimos o que é subtrair. Apenas um aluno comentou o que seria a subtração:

Marina – Quando a gente subtrai é o de menos, daí quando a gente tem menos a gente tira aquilo, né. A gente tira um negócio lá de alguma coisa.

Nesse momento outro aluno se manifesta:

Roberto - É, quando a gente faz cinco menos dois, a gente fica com três porque a gente tá tirando dois.

Perguntei se os outros alunos concordavam com isso, todos afirmaram que sim. Não nos alongamos na discussão do que seria a subtração, e perguntei como poderíamos realizar a operação (+4) - (+2).

Um aluno comentou:

Claudio - A gente faz assim ó, bota quatro azul na mesa e daí tira duas azul. Daí fica duas azul.

Os outros alunos concordaram. A operação de subtração consiste no processo de retirar cartas das cartas que estão representadas na mesa pelo primeiro número.

Ao realizarmos a subtração (-4) - (-1), os alunos compreenderam o processo: colocaram quatro cartas vermelhas e retiraram uma vermelha.

Uma passagem interessante de um aluno foi a confirmação da resposta através do resultado esperado da subtração:

Claudio - Menos quatro menos um, mas peraí, é menos menos um, eu tenho que tirar menos um do menos quatro.

Até aqui, os alunos conversaram entre si e realizaram todas as operações análogas a esta.

Outro ponto de discussão ocorreu na subtração (+4) - (+8). Como discutido na descrição da atividade, aqui se faz necessário a criação de zeros, visto que não podemos tirar oito cartas azuis de quatro cartas azuis.

Dois alunos tiveram a idéia de inverter a operação, fazendo a subtração (+8) - (+4), e concluíram que o resultado é (+4). Questionei se quando realizamos a conta (+3) - (+1) teríamos o mesmo resultado que (+1) - (+3). Os alunos concordaram que não era o mesmo resultado. Note-se o entendimento de que a subtração não é comutativa.

Voltando à discussão sobre a subtração (+4) - (+8), alguns alunos tentaram outras estratégias, incluindo algumas que burlam as regras. Mesmo assim, não concluíram pelas cartas como poderiam retirar oito de quatro.

Sugeri aos alunos que criassem zeros. Dois dos alunos compreenderam a estratégia e repassaram aos outros três. Os alunos montaram um esquema parecido com o discutido no momento da descrição da atividade. Colocaram quatro cartas azuis, depois criaram oito zeros, compostos de oito cartas azuis e oito cartas vermelhas. Destes oito zeros eles retiraram oito cartas azuis, de forma que restaram na mesa quatro cartas azuis, que representam (+4), e oito cartas vermelhas, que representam (-8). Ao realizarem o cancelamento, ou o "corte", como sugeriu um dos alunos, sobraram quatro cartas vermelhas. Assim, (+4) - (+8) = (-4).

A próxima discussão interessante deu-se sobre a multiplicação. Pedi aos alunos que realizarem a multiplicação (+2)x(+4) com as cartas. Alguns hesitaram, pois sabiam quanto era (+2)x(+4), mas não imaginavam como isso seria representado com as cartas. Perguntei aos alunos o que era a multiplicação para eles. Seguem algumas das respostas que eu ouvi:

Alberto - Quando a gente multiplica esse número ai que o senhor pediu, tu pega dois, quatro vezes. Daí faz assim, quatro mais quatro.

Claudio - Até dá pra fazer dois, mais dois, mais dois, mais dois.

Os alunos mostraram uma boa noção quanto a relacionar o algoritmo da multiplicação com a soma por grupos. Note que na afirmação de Claudio, temos que (+2) x (+4) é o mesmo que (+4) x (+2). Porem isto é relativo, inclusive nas cartas teremos representações diferentes para estas operações. Se pegarmos, por exemplo, quatro caixas com dois botões, isto não é o mesmo que duas caixas com quatro botões.

Depois de debatermos um instante sobre a multiplicação, pedi novamente que eles representassem (+2) x (+4). Os alunos realizaram a representação sem dificuldades, colocando duas fileiras de 4 cartas azuis.

A representação seguinte foi para a multiplicação (+3) x (-2). Os alunos então a representaram com três fileiras de duas cartas vermelhas, resultando seis cartas vermelhas, ou (-6). Dois alunos questionaram a regra de sinais, mas ao verem as cartas e consultarem os colegas, ele se auto corrigiram. Aqui, novamente os alunos começaram a comparar seu conhecimento prévio quanto à regra de sinais para a multiplicação com o resultado obtido pela representação com as cartas.

Por último, pedi que representassem as multiplicações (-3) x (+5) e (-3) x (-2).Houve bastante confusão para realizar as representações.

A descrição da atividade em sua versão original, observa o seguinte em relação a este tipo de operação: (-3) x (+5) é o mesmo que retirar três grupos de cinco cartas azuis. O (-3), nesta operação representa a quantidade de grupos, e o sinal indica que devemos retirar esta quantidade, enquanto o símbolo de multiplicação representa a idéia de pegarmos grupos de cinco cartas azuis. Para realizarmos essa operação precisamos criar três grupos de cinco zeros para fazer esta retirada. Os alunos pensaram e debateram muito sobre o assunto, mas não chegaram a uma conclusão.

Representar a multiplicação com as cartas é bastante artificial, pois aqui o sentido da operação não se localiza apenas no sinal da multiplicação, mas também nos sinais do primeiro e do segundo número entre parênteses, este representando a cor das cartas que vamos pegar.

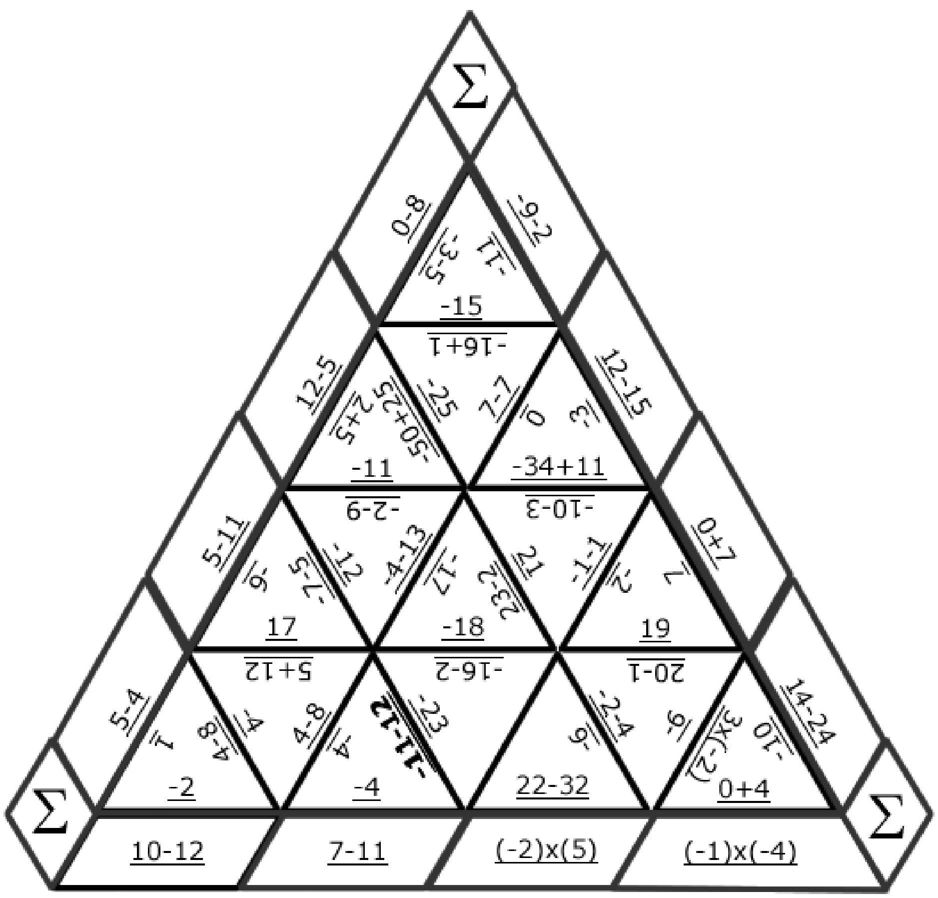
A representação funciona, representa bem a regra de sinais, mas não teve aceitação pelos educandos. Expliquei como poderíamos fazer para representar a multiplicação, cujo primeiro fator é um número negativo, o que soou como uma regra pronta a ser decorada. Isto vai contra a proposta inicial da atividade, visto que as cartas auxiliam os alunos a verificar se estão cometendo um erro com a regra de sinais. Entretanto, para verificar esta última operação é necessário decorar mais uma regra, o que tende a causar mais confusão, pois a regra não é de fácil assimilação; é tão artificial quanto a própria regra de sinais.

A atividade mostra algumas limitações. Eu não utilizaria esta atividade com um grupo grande de alunos, visto que o interessante é analisar o movimento que os alunos fazem com as cartas para representar as operações, o que é inviável em um grupo grande. Outra limitação que tive foi quanto à aplicação das regras, pois os alunos conheciam as regras e utilizavam o raciocínio de cancelamento. Talvez seja mais proveitoso aplicar esta atividade em alunos que desconhecem os números inteiros.

5.5. Prática 3: Quebra-cabeça numérico

Esta atividade foi adaptada de um jogo contido na dissertação de Bini (2006) e serve para fixar as operações com números inteiros utilizando um quebra cabeças. Neste quebra cabeças, as peças se encaixam se tiverem o mesmo resultado, que é expresso por uma operação com números inteiros.

Segue abaixo a figura do quebra-cabeças montado.



A atividade foi desenvolvida no dia 09/11/09, na Escola Estadual Anne Frank, no turno da tarde com alunos da sexta série, escolhidos pela professora titular. Para esta atividade utilizamos um grupo de seis alunos, onde se reuniram dois grupos de três.

A idéia desta atividade é propor a discussão entre os alunos de forma que os integrantes do grupo possam trocar idéias sobre as respostas e a montagem do quebra cabeça, incluindo a estratégia empregada e os resultados dos cálculos a que eles chegaram para encaixar cada peça no lugar certo.

Primeiramente me apresentei aos alunos e solicitei que os mesmos se apresentassem. Expliquei as regras do jogo e os alunos tiveram o tempo de um período e meio para montar o quebra cabeça.

5.6. Relato da Prática do Quebra Cabeças Numérico

Observando a atividade pude registrar o funcionamento do grupo e os diálogos entre seus integrantes. A discussão dos resultados e da forma como encaixar as peças movimenta o grupo todo de maneira muito interessante. Semelhante ao que Bini (2006) descreve quando aplica esta atividade, inicialmente dois alunos se responsabilizaram por fazer os cálculos para depois encaixar as peças.

No quebra cabeças temos peças com cálculos iguais, de forma que ao montar o quebra cabeça é importante testarmos qual das peças é mais conveniente. Se colocarmos uma peça que pelo menos dois lados dela estão com os cálculos equivalentes, é mais provável que esta seja a peça correta para aquela posição do quebra cabeças.

Portanto, os cálculos são necessários, mas é importante também montar uma estratégia. Em um dos grupos, Paulo percebeu tal necessidade e comentou:

> Paulo – Se a gente começar pelas pontas é melhor, porque daí é mais certo que a peça serve ali, porque se a gente começa do meio, a peça pode dá ou pode não dá. Daí vai dar mais trabalho pra ver depois.

Dentre as discussões que apareceram entre os integrantes do grupo, o mais interessante é a confirmação de resposta dos cálculos. Cada integrante possuía uma analogia diferente para chegar à resposta, e no momento de confirmar os cálculos os integrantes trocaram essas analogias entre si, dando mais subsídios uns aos outros para efetuarem a operação com números inteiros. Podemos acompanhar este processo na transcrição do seguinte diálogo.

Claudio – Esta ponta aqui (4) encaixa com a ponta (4-8), porque 4 – 8 = 4.

Roberto – Só um pouquinho, 4 – 8 não dá 4. Se eu tenho 4 e empresto 8, eu fico devendo 4.

Claudio – Isso tá errado, 4 – 8 é 4.

Paulo – Lembra do exemplo do elevador que a “sora” deu? Se eu to no 4º andar e daí eu desço 8, eu vou parar lá na garagem, no andar -4.

Claudio – Ah ta! Tá, tá! Tá certo!

Claudio discordou do argumento de Roberto, apoiado em uma analogia, e concordou com o argumento de Paulo, apoiado em outra analogia, utilizada pela professora titular da turma em uma de suas atividades.

Ambos os grupos conseguiram montar o quebra cabeça em pouco mais de um período. Os alunos se mostraram bastante satisfeitos com esta atividade e comentaram que seria interessante ter atividades parecidas com esta durante os períodos regulares.

6. Considerações Finais

Neste estudo tratamos do ensino de números inteiros, que consideramos como problemático. A maioria dos alunos não compreende o significado e a ordenação desses números, como também as famosas “regras de sinais” que lhes são ensinadas. Eles conseguem aplicar normalmente e sem muitas dificuldades essas regras na multiplicação de números inteiros, mas confundem-se ao operar com esses números na adição e na subtração. Nesses casos, utilizam a mesma regra, ao invés de tentar entender os problemas que envolvem essas duas últimas operações, associando-os a dívidas ou temperaturas, por exemplo.

Uma das limitações do trabalho foi o número de experiências realizadas. Devido a falta de tempo para realizar experiências com uma mesma turma periodicamente, as experiências aqui discutidas foram feitas todas com turmas diferentes em locais diferentes. Em função disto, minha intervenção certamente obteve menos efeito em relação a um trabalho constante feito pelos autores referidos na Revisão Bibliográfica.

O objetivo deste estudo foi propor alguma mudança positiva no ensino usual, mesmo que pequena, mas que de alguma forma contribua para a eliminação dessas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem. Estudamos e apresentamos algumas propostas e sugestões de atividades dinâmicas e inovadoras, visando auxiliar os professores no ensino desse tema de uma forma mais significativa. Além disso, um outro propósito presente em nossa pesquisa foi mostrar aos alunos que decorar regras e conceitos não é fundamental, porque facilmente eles serão esquecidos.

Das nossas análises, concluímos que existem constrangimentos para esta mudança. Uma nova abordagem se faz necessária para que os alunos não generalizem as regras de multiplicação dos números inteiros, entretanto, abordagens novas, com sucesso comprovado em pesquisa, sugeridas por livros didáticos e artigos não são usadas por um grande número de professores, que insistem em utilizar os métodos tradicionais com o uso de exercícios descontextualizados e repetitivos para a fixação do conteúdo.

Optamos por alterar o item que envolve a confusão que os alunos fazem acerca das regras de multiplicação e adição de números inteiros, generalizando-as e não compreendendo seu significado. As atividades tiveram os seguintes propósito: elaborar uma aula interessante e diferente, com foco no seguinte conteúdo: adição e multiplicação de números inteiros, auxiliando-os na compreensão dos conceitos envolvidos. Para isso, utilizamos três jogos diferentes: O jogo das varetas, onde cada cor equivale a uma pontuação diferente, podendo ser positiva ou negativa, de forma que após recolher as varetas os estudantes deveriam calcular, a partir da quantidade de varetas e duas respectivas cores, a pontuação final.

O jogo das varetas, em que cada cor equivale a uma pontuação diferente, podendo ser positiva ou negativa, de forma que após recolher as varetas os alunos deveriam calcular, a partir da quantidade de varetas e duas respectivas cores, a pontuação final.

O jogo das cartas, em que uma carta azul representa um número inteiro positivo, enquanto uma carta vermelha representa um número inteiro negativo. Foi passada uma lista de operações para os alunos realizarem com o uso das cartas e analisarem as operações de adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

E, por fim, trabalhamos com o Quebra-Cabeças Numérico, em que os alunos montam um quebra-cabeças, cujas peças são conectadas por resultados de operações equivalentes. Isto estimula a discussão sobre como fazer as operações com os inteiros e o trabalho em grupo.

Partimos das hipóteses:

1. Encontraríamos dificuldades da parte dos alunos em relação à ordenação dos números negativos;
2. Os alunos confundir-se-iam com as regras de sinais para a multiplicação/divisão com as da adição/subtração;
3. As atividades propostas poderiam desenvolver mais as habilidades dos alunos em relação a esse conteúdo;
4. O ensino atual não tem obtido grande sucesso com os alunos, uma vez que as aulas são baseadas em exercícios repetitivos e mecânicos;
5. Os alunos, com aulas dinâmicas e interativas, ficam mais atentos e participativos, isto é, envolvem-se mais nas atividades aplicadas.
6. Os alunos se sentiriam mais desinibidos para manifestar suas dúvidas durante a aula;

Após a experiência de ensino, conseguimos validar as seguintes hipóteses:

1. Os alunos não apresentaram dificuldades em relação à ordenação dos números inteiros.
2. De fato, houve confusões entre as regras de sinais como exposto anteriormente, no relato da prática.

3. Realmente, como comprovado com os exemplos e relatos, os alunos melhoram suas habilidades de operar adições e subtrações com a atividade proposta, ao longo de sua interação com o jogo.
4. Embora a hipótese não tenha sido completamente validada, pode-se perceber que o jogo, como uma alternativa para mudar o modo como se ensina este conteúdo, trouxe um retorno satisfatório com relação ao entendimento que os alunos apresentaram ao fim da atividade sobre as operações que desenvolveram.
5. Esta hipótese foi validada com base nos relatos e mesmo nas falas dos alunos que, como transcrito anteriormente, admitem ter sido esta uma aula agradável e que assim foi melhor trabalhar este conteúdo. As discussões e a atenção dos alunos ocuparam o tempo todo reservado à atividade, não ocorrendo casos em que os alunos tenham ficado dispersos ou ocupados com outras atividades. Desta forma, uma atividade diferenciada pode ter um rendimento melhor de tempo em relação a uma aula de exercícios repetitivos, já realizada anteriormente, sobre um conteúdo já exposto.
6. A questão das dúvidas também foi uma hipótese validada. O relato do professor junto às falas transcritas dos alunos na atividade das varetas, mostra alunos perguntando sobre como proceder em variadas situações, motivados pelo jogo. Assim, eles precisam compreender como operar corretamente em cada momento para que pudessem seguir jogando, e desta forma, naturalmente foram se sentindo mais à vontade para questionar sempre que necessário. O mesmo ocorreu na atividade das cartas e do quebra cabeças numérico.

Percebemos, também, que a maioria dos alunos esboçou uma passagem do campo concreto para o abstrato no jogo das varetas e na atividade das cartas.

A experiência foi bastante válida para minha formação profissional. Analisar o debate entre os alunos através das gravações e principalmente me ouvir nas gravações foi muito interessante. As reflexões feitas durante a escrita foram de grande valia também, visto que cada parágrafo precisa ser revisto e há necessidade do constante cuidado para manter o foco na questão, visto que Números Inteiros é um assunto bastante amplo.

Entretanto, mesmo mantendo o foco as leituras nos mostram outras questões referentes ao tema e instiga a curiosidade de quem o estuda. Portanto, pretendo dar continuidade a este estudo concluído aqui até o momento e iniciar outros estudos a fim de investigar outras questões que me foram apontadas durante a construção desta monografia.

7. Referências Bibliográficas

BINI, Márcia Bárbara. Atividades interativas como geradoras de situações no campo conceitual da matemática. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUCRS, 2008. Disponível em tede.pucrs.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1209. Acesso em Março de 2009.

COSTA, Carolina. Como se aprendem adição e subtração. *Revista Nova Escola*. São Paulo: Fundação Victor Civita, 2007, p. 67 – 78.

DOLCE, Oswaldo. *Matemática e Realidade*: Ensino Fundamental - 6 série. São Paulo: Editora Atual, 2005.

TODESCO, Humberto. Um estudo com os números inteiros nas séries iniciais: Re-aplicação da Pesquisa de Passoni 2006. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática PUC-SP. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/humberto_todesco.pdf

LOPES, Antonio José. *Matemática Hoje é Feita Assim*. 6° série do Ensino Fundamental. São Paulo: Editora FTP, 2000.

MILLIES, Cesar Polcino; COELHO, Sonia Pitta. *Números*: uma introdução à Matemática. Edusp. 3ª Ed., 2006. SP.
Disponível em http://books.google.com/books?id=vPwjPQwQx24C&hl=pt-BR. Acesso em Abril de 2009.

PASSONI, João Carlos. (Pré-)Álgebra: introduzindo os números inteiros negativos. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2002. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/principal_acad.html. Acesso em Março de 2009.

SOARES, Elizabeth. Uma intervenção didática para a aprendizagem do significado amplo da relação de ordem ‘chegar antes ou junto de’ com alunos da 5ª a 8ª séries. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2002.

VITTI, Márcio S.; FÜRKOTTER, M. A possibilidade do uso de projetos na aprendizagem da adição de números inteiros. In: 7º Encontro Paulista de Educação Matemática– EPEM, *Resumos.* São Paulo, 2004. p. 114-115.

Anexo

CDCC - USP
EXPERIMENTOTECA

MATEMATICA

1 NÚMEROS INTEIROS

Operações com números Inteiros

ORIENTAÇÃO PARA O PROFESSOR

INTRODUÇÃO TEÓRICA

As regras de sinais nas operações com números inteiros, em geral, causam dificuldades de aprendizagem aos alunos, ocasionando seqüelas no desenvolvimento futuro de conceitos, principalmente no que se refere à multiplicação de dois inteiros negativos. Com o auxílio deste kit, estas dificuldades podem ser trabalhadas, usando-se de materiais concretos, afim de que os alunos compreendam e dêem significado às regras de sinais.

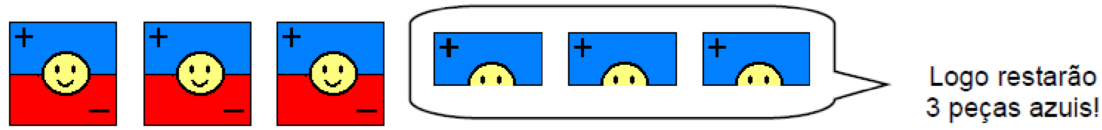
DISCUSSÃO SOBRE O EXPERIMENTO

O público alvo são os alunos da 6ª série do Ensino Fundamental.
Utilizaremos, nesta atividade, um jogo de dominó que possui peças positivas (azuis) e peças negativas (vermelhas). Combina-se com o aluno que uma peça de dominó vermelha anula uma
peça azul e vice-versa.
Como representar (escrever) os números inteiros:
• *Como representar o número zero?*
Basta colocar duas peças de cores diferentes juntas. Isto pode ser feito repetidas vezes. Assim, colocando-se números iguais de peças azuis e vermelhas, elas se anulam duas a duas, formando os “zeros”.
• *Como representar o número (+5)?*
Podemos representar o número (+5) utilizando cinco peças azuis, ou dez peças azuis e cinco vermelhas, ou vinte peças azuis e quinze vermelhas e assim por diante.
• *Como representar o número (–5)?*
Podemos representar o número (-5) utilizando cinco peças vermelhas, ou dez peças vermelhas e cinco azuis e assim por diante.

(ETAPA 1-) Operação de adição com inteiros:

Inicialmente o professor deve lembrar os vários significados para a palavra adição ou adicionar,
inclusive a idéia de juntar, que será a idéia utilizada nesta etapa. Veja um exemplo:

Queremos adicionar **(–3)** com **(+6)**, ou seja, devemos juntar 3 peças vermelhas com 6 peças azuis. E agora? Lembre–se que ao juntarmos uma peça azul com uma vermelha, elas se anulam
e podem ser separadas. Então ficaremos com 3 peças da cor azul, ou seja, (+3).
Teremos a seguinte situação:

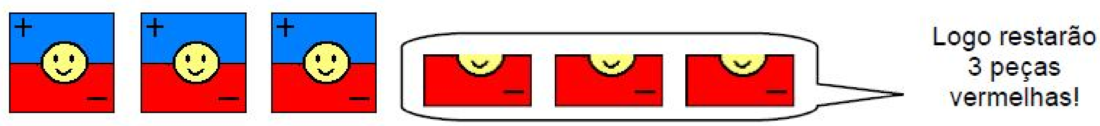


QUESTÕES

1) Queremos adicionar (+ 3) com (+ 6), ou seja, devemos juntar 3 peças azuis com 6 peças azuis. No total, quantas peças azuis teremos?
Resposta: Teremos 9 peças azuis (+9).

2) Queremos adicionar (-3) com (-6), ou seja, devemos juntar 3 peças vermelhas com 6 peças vermelhas. Ao todo, quantas peças vermelhas teremos?
Resposta: Teremos 9 peças vermelhas (-9).

3) Qual o resultado da seguinte operação: (+3) + (-6)? Faça um desenho mostrando a operação que você realizou.
Resposta: Devemos juntar 3 peças azuis com 6 peças vermelhas:



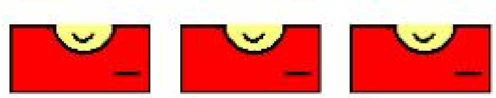
E como uma peça azul anula uma vermelha e vice-versa, temos como resultado da adição 3 peças vermelhas ,ou seja, (-3).

(ETAPA 2-) Operação de subtração com inteiros:

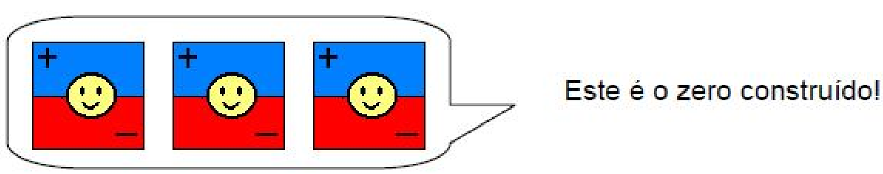
Nesta etapa, devemos resgatar o significado da subtração, que é "retirar". Esta será a palavra chave aqui!

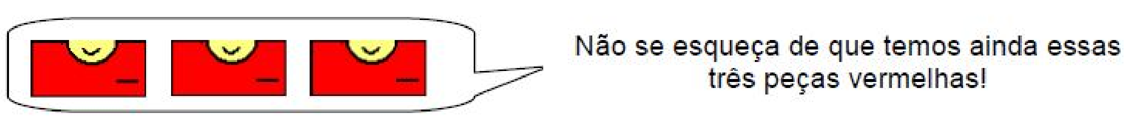
Vamos realizar a seguinte operação: **(–3) – (+2).**

• E agora? De que forma iremos retirar 2 peças azuis das 3 peças vermelhas que temos?
• Usaremos o recurso de "colocar zeros". Mas o que é colocar zeros?
• É acrescentar peças azuis e vermelhas em quantidade igual! Veja a situação:



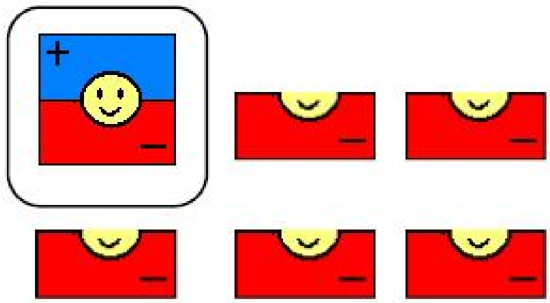
Observe que temos que retirar duas peças azuis, mas só temos 3 peças vermelhas.
Precisamos, portanto criar peças azuis. Para isso, devemos criar "zeros", acrescentando, por exemplo, 3 peças vermelhas e 3 peças azuis.
Logo, como resultado, obtemos a seguinte situação:





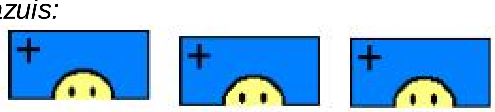
Temos agora, no total, 6 peças vermelhas e 3 peças azuis. Devemos retirar 2 peças azuis.

Fazendo esta retirada, obtemos:

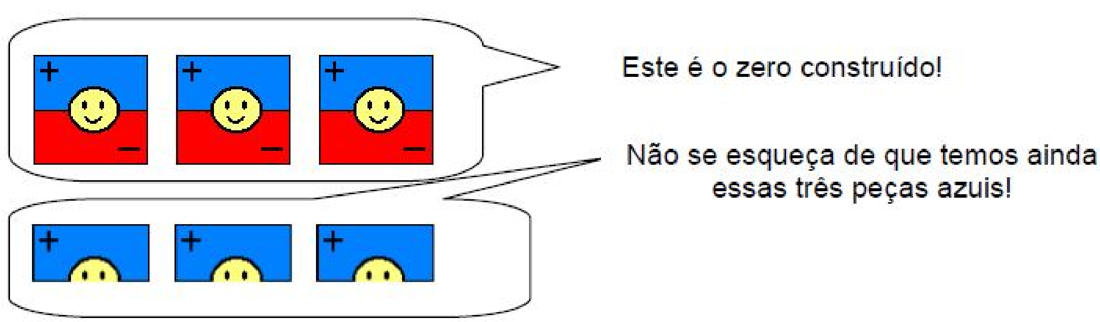


Veja que restam ainda um par (uma peça vermelha e uma azul) e mais 5 peças vermelhas. Essas
2 peças do par se anulam, podendo ser retiradas, sobrando assim as outras 5 peças vermelhas.
Logo a resposta será (–5).
Observação: *Uma dúvida muito comum se dá quanto às quantidades de peças usadas no momento de se determinar os zeros. O número de peças pode variar de acordo com sua vontade,*
não se esquecendo de que para cada nova peça azul devemos ter uma vermelha e vice-versa.

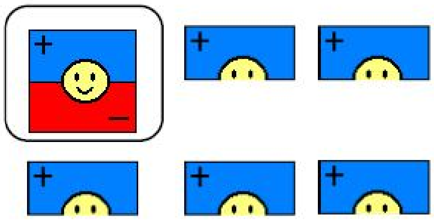
QUESTÕES
4) Queremos fazer: (+3) – (+2), ou seja, de 3 peças azuis queremos tirar 2 peças azuis. Com
quantas peças azuis ficaremos?
Resposta: Ficaremos com 1 peça azul (+1).
5) Queremos fazer agora: (–3) – (-2), ou seja, de 3 peças vermelhas queremos retirar 2 peças
vermelhas. Com quantas peças vermelhas ficaremos?
Resposta: Ficaremos com 1 peça vermelha (-1).
6) Qual o resultado de : (+3) – (-2)?
Resposta: Observe que temos que retirar duas peças vermelhas, mas só temos 3 peças azuis:



Precisamos criar peças vermelhas, sem alterar a situação inicial. Para isso, devemos criar “zeros”:



Agora podemos retirar 2 peças vermelhas. Retirando-as obtemos:



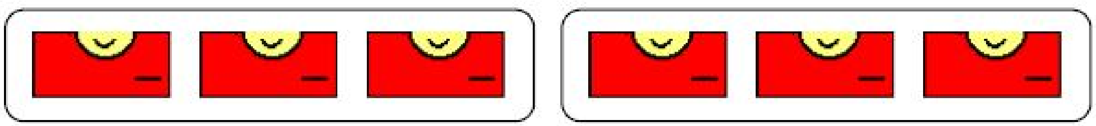
Nos resta, após a retirada das duas peças vermelhas, um par formado por uma peça azul e uma vermelha, que somam zero, e mais cinco peças azuis. Temos, portanto, como resultado final 5 peças azuis. Logo, (+3) – (–2) = (+5).

(ETAPA 3-) Operação de multiplicação com inteiros:

Palavras chaves: fazer e retirar grupos. Lembre-se que multiplicar números inteiros positivos nada mais é do que adicionar parcelas iguais. Então 2 x 3 é o mesmo que ter 2 grupos de 3 unidades cada um.

Qual o resultado da seguinte operação: **(+2) x (–3)**?

Queremos 2 grupos com 3 peças vermelhas cada um, ou seja:

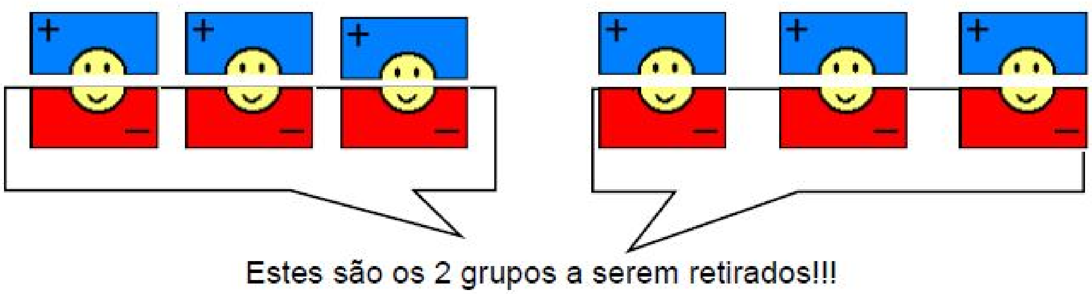


Ficamos ao todo com 6 peças vermelhas. Logo (+2) x (–3) = –6

Resolva a operação seguinte: **(-2) x (-3)**.

Queremos retirar 2 grupos, sendo que cada grupo tem 3 peças vermelhas.

Vamos criar “zeros”:

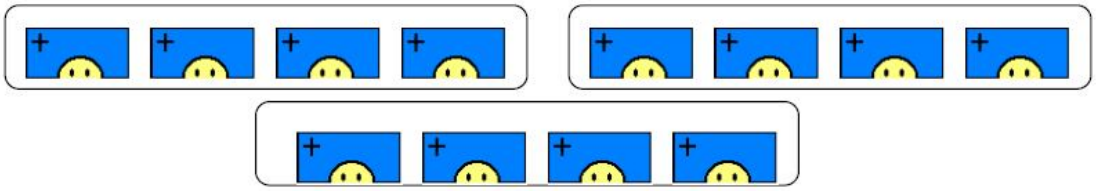


Observe que temos somente zeros! Só que agora conseguimos tirar 2 grupos, sendo que cada grupo tem 3 peças vermelhas. Retirando-os, ficaremos com 6 fichas azuis, ou seja, como resposta temos (+6). Então (–2) x (–3) = + 6.

QUESTÕES

7) Dê o resultado de: (+3) x (+4). Faça um desenho mostrando a operação realizada.

Resposta: Queremos fazer 3 grupos com 4 peças azuis cada um:



Ficamos ao todo com 12 peças azuis, então (+3) x (+4) = +12

8) Qual o resultado da operação: (-4) x (+3)?

Resposta: Queremos retirar 4 grupos, sendo que cada grupo tem 3 peças azuis.

Vamos criar “zeros”:

Observe que temos somente zeros! Só que agora conseguimos tirar os quatro grupos, sendo que cada grupo tem 3 peças azuis. Retirando-os, ficaremos com 12 peças vermelhas, ou seja, como resposta temos (–12).

Então *(–4) x (+3) = –12.*

OBSERVAÇÕES:

1) A divisão de inteiros, em geral, não resulta em um número inteiro e deve ser trabalhada no estudo dos números racionais.

2) A principal atividade deste kit é a multiplicação de dois inteiros negativos resultando em um inteiro positivo. Isto não é natural para o aluno e aqui é exemplificado por: