# Métodos de Perturbação em escoamentos potenciais

**Juliana Sartori Ziebell** [*], **Leandro Farina,**
Instituto de Matemática da UFRGS
91509-900, Porto Alegre-RS-Brasil
E-mail:ju_sziebell@yahoo.com.br, E-mail:farina@mat.ufrgs.br

RESUMO

Um potencial de fluido que passa por um disco de raio $a$ é normalmente resolvido pelo método de separação de variáveis, o qual não é aplicável quando a esfera é perturbada.

O trabalho de Martin (1997) mostra um método alternativo, que vamos expor de forma resumida. Primeiro se reduz o problema de valor da fronteira sobre $S$. Depois, reescrevemos esta equação projetando sobre a superfície não perturbada. A seguir introduzimos a perturbação da expansão, chegando a uma seqüência de equações integrais da fronteira.

Suponhamos que $F(x,y) = \epsilon f(x,y)$, onde $\epsilon$ é um parâmetro de pequena dimensão, e definimos

$$\lambda = f(x,y) - f(x_0,y_0)/R.$$

A partir da equação integral para a função harmônica $\Phi$ e projetando num disco unitário $D$ temos,

$$\frac{1}{4\pi}\,⨎_D K(x_0,y_0;x,y)w(x,y)dA = b(x_0,y_0)$$

com $b(x,y) = U(\cos(\beta) + (\partial F/\partial x)\sin(\beta)$.

Assim,

$$K = R^{-3}[1+\epsilon^2 K_2 + O(\epsilon^4)] \text{ quando } \epsilon \to 0,$$

onde

$$K_2 = f_1 f_1{}^0 + f_2 f_2{}^0 - \frac{3}{2}\lambda^2 - 3(F_1+F_2-\lambda)$$
$$\times(F_1{}^0 + F_2{}^0 - \lambda)$$

Expandimos $b$ e $w$ da seguinte maneira:

$$b(x,y) = b_0(x,y) + \epsilon b_1(x,y)$$

$$w(x,y) = w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + ...$$

Aplicando ao operador hipersingular que passa por um disco circular rígido:

$$(Hw)(x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\,⨎_D w(x,y)\frac{dA}{R^3},$$

onde

$$Hw_0 = b_0 \;\; Hw_1 = b1 \;\; Hw_2 = -\mathcal{K}_2 w_0$$

e

$$(\mathcal{K}_2 w)(x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\,⨎_D K_2(x,y;x_0,y_0)w(x,y)\frac{dA}{R^3}$$

$$Hw_0 = b_0, Hw_1 = b_1 \text{ e } Hw_2 = -\mathcal{K}_2 w_2.$$

Agora queremos resolver as equações acima numericamente. Tomando

$$f(x,y) = B_k{}^m(r,\theta) = P^m{}_{m+2k+1}(\sqrt{1-r^2})\cos(mt)$$

$$\text{com } k,m = 0,1,..\infty,$$

onde

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y/x),$$

$P^m{}_k$ é o polinômio de Legendre, e, como

$$\frac{1}{4\pi}\,⨎_D B_k{}^m(s,\alpha)\frac{1}{R^3}\, s\, ds d\alpha = C_k{}^m \frac{B_k{}^m(r,\theta)}{\sqrt{1-r^2}},$$

onde $C_k{}^m$ é uma constante, teremos

$$Hw_0(x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\,⨎ \sum x_k B_k{}^m(r,\theta)\frac{dA}{R^3}$$

$$= \sum x_k \frac{1}{4\pi}\,⨎ B_k{}^m(r,\theta)\frac{dA}{R^3} = \sum x_k P_k{}^m(r,\theta) = b_0.$$

Dessa maneira obteremos $w_0$. De maneira análoga, poderemos obter $w_1$ e $w_2$. Tendo esses resultados, faremos uma comparação com os resultados analíticos.

## Referências

[1] Martin, P. A. Proceedings of the Royal Society of London, Series A - Mathematical, Physical and Engineering Sciences 454, 2209-2221 (1998).

[*]bolsista do CNPq