# XXI CNMAC

## XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

---

## Resumo das Comunicações

---

de setembro de 1998
ória - Caxambu, MG

# CNMAC

## XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

### Resumo das Comunicações

---

Realização:

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

---

14 A 18 de setembro de 1998
Hotel Glória - Caxambu, MG

# Extração em Populações com Recrutamento Não Linear

Karine F. Magnago
magnago@mat.ufrgs.br

Jacques A. L. Silva
jaqx@mat.ufrgs.br

O objetivo deste trabalho é estudar os efeitos causados pela remoção contínua de indivíduos de uma população, seja pela pesca, caça, movimentos migratórios ou qualquer outro fator externo.

A estrutura etária da população no instante $t$ é descrita pela densidade populacional $u(x,t)$, onde $x$ representa a idade. O modelo de crescimento populacional basea-se na Equação Integral de Lotka-Volterra mas apresenta uma relação de dependência da densidade. Esta dependência é introduzida através do recrutamento $B(t)\, g(B(t))$ onde $B(t)$ é a natalidade e $g(B(t))$ é a probabilidade de sobrevivência ao recrutamento [1].

Também são consideradas três estratégias de extração dependentes somente da idade, onde uma fração $\delta$ de indivíduos é removida $(0 < \delta < 1)$. Na primeira estratégia a extração ocorre independente da idade; na segunda, a extração ocorre a partir da idade $c$; e na última estratégia, ocorre no intervalo etário $[c, c+n]$ [2, 3].

Observe que $u(x,t) = B(t-x)\, g[B(t-x)]\, l(x)\, \epsilon(x)$, onde $l(x)$ é a probabilidade de sobrevivência até a idade $x$ e $\epsilon(x)$ é a probabilidade de um indivíduo não ser extraído até a idade $x$.

Se $f(x)$ é a taxa de fertilidade, então $B(t) = \int_0^\infty u(x,t)\, f(x,t)\, dx$ e

$$B(t) = \int_0^\infty B(t-x)\, g[B(t-x)]\, f(x)\, l(x)\, \epsilon(x)\, dx. \tag{1}$$

Sob algumas hipóteses, podemos afirmar que a equação 1 possui um único equilíbrio positivo $B^* = g^{-1}(\frac{1}{R_0})$, para $R_0 > 1$ e $R_0 = \int_0^\infty f(x)\, l(x)\, \epsilon(x)\, dx$.

Fazendo a linearização de 1 em torno de $B^*$, obtemos a equação característica:

$$\frac{1}{1-H} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, m(x)\, dx. \tag{2}$$

onde $m(x) = \frac{f(x)\, l(x)\, \epsilon(x)}{R_0}$ e $H = \frac{B^*\, g'(B^*)}{(B^*)}$.

A estabilidade assintótica de $B^*$ ocorre quando $\mathrm{Re}[\lambda] < 0$ para todo $\lambda$ solução de 2. Então, definimos a fronteira da estabilidade de $B^*$, $G$, tal que $B^*$ é estável se e somente se $H \in (0, G)$. Observe que a estabilidade de $B^*$ é perdida quando $\mathrm{Re}[\lambda] = 0$ $(\lambda = i\,\omega)$. Neste ponto, $H$ alcança seu valor de fronteira $G$. Da equação 2, originam-se uma equação para $\omega$ e outra para $G$.

**Conclusões:** A fração de indivíduos removidos, $\delta$ é essencialmente um parâmetro que induz tendências à instabilidade pois reduz consideravelmente o comprimento do intervalo $(0, G)$ para a grande maioria dos valores de $\delta$. A excessão se dá quando o modo reprodutivo é distribuído de maneira uniforme num intervalo $[T, k]$. Neste caso $\delta$ é inicialmente estabilizador. Ainda com o modo reprodutivo uniforme em $[T, k]$ podemos observar que quando indivíduos muito jovens são removidos existe um tendência a instabilidades, desde que $\delta$ seja suficientemente grande. À medida em que indivíduos mais velhos são removidos e os jovens são mantidos, ou seja, aumentando o parâmetro $c$, o intervalo $(0, G)$ cresce permitindo que a população se mantenha estável mesmo com uma taxa reprodutiva maior. Entretanto, quando $\delta$ é muito pequeno, estas tendências não são mais observadas e podem ser até invertidas.

## References

[1] J. A. L. Silva, Reproductive schedules in a density-dependent recruitment model. Math. Biosc.144,1-22(1997).

[2] D. A. Sanchéz, Linear age-dependent population growth with harvesting. Bull. Math. Biol. 40, 337-385 (1978).

[3] D. A. Sanchéz, Linear age-dependent population growth with seasonal harvesting. J. Math. Biol. 9, 361-368 (1980).