

Sincronização de Metapopulações em duas Escalas Geográficas

Vanderlei Manica,

Depto de Matemática, PPGMAP, UFRGS,
 91509-900, Porto Alegre, RS
 E-mail: vanderlei.manica@ufrgs.br,

Jacques A. L. da Silva

UFRGS - Departamento de Matemática
 Campus do Vale
 91509-900, Porto Alegre, RS
 E-mail: jaqx@mat.ufrgs.br.

Resumo: *Neste trabalho, consideramos um modelo metapopulacional composto pela distribuição de sítios em duas escalas geográficas. A primeira escala é composta por uma metapopulação com um número arbitrário de sítios, enquanto a segunda escala é composta por um número arbitrário de metapopulações. Analisamos duas maneiras dos sítios sincronizarem, primeiramente consideramos sincronização na escala maior, por conseguinte sincronização nas duas escalas. Para o caso de sincronização nas duas escalas, obtemos um critério para sincronização dependendo de dois parâmetros: o número de Lyapunov e por um parâmetro que depende do processo migratório. No caso da segunda escala estar sincronizada com os respectivos sítios da primeira escala não necessariamente sincronizados, obtemos um critério cujos valores são calculados numericamente.*

Introdução

O estudo da sincronização de sistemas dinâmicos populacionais é importante para prever e avaliar o risco de extinção global de espécies. Um fenômeno importante relacionado ao processo de migração é a dinâmica sincronizada. Essa dinâmica corresponde ao caso em que as densidades populacionais em cada sítio evoluem no tempo com mesma amplitude e fase. A importância desse fator reside no fato que se a dinâmica global do sistema não está em sincronia, a população local pode ser recolonizada pelos vizinhos (migrantes) das populações vizinhas (“rescue effect”), isso favorece a persistência da população, conforme Allen [1].

Estudos analíticos das condições para sincronização caótica consistindo de um número arbitrário de sítios acoplados são feitos em diversos trabalhos da literatura. Earn et al. [3] deram sustentação a idéia de que oscilações caóticas reduzem o grau de sincronismo entre os sítios, reduzindo a probabilidade de extinção e apresentaram um critério para a estabilidade de oscilações sincronizadas considerando uma metapopulação com um número arbitrário de sítios acoplados. Esses resultados são generalizados por Giordani e Silva [4], que obtiveram um critério para sincronização considerando um mecanismo de migração dependendo da densidade de cada sítio.

Neste trabalho, consideramos um modelo metapopulacional com sítios distribuídos em duas escalas, a primeira é composta por uma metapopulação, enquanto a segunda é composta por um número arbitrário de metapopulações e apresentamos resultados sobre a estabilidade transversal assintótica de órbitas sincronizadas desse sistema.

Modelo Metapopulacional em uma Escala

O modelo metapopulacional consiste de N sítios enumerados por $1, 2, \dots, N$. Em cada sítio existem indivíduos que estão sujeitos ao processo de dinâmica local e sobrevivência, descrito por

uma função f de classe C^1 . Portanto, na falta de migração entre os sítios, a dinâmica local é dada por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

onde x_t^i representa a densidade de indivíduos no sítio i no passo de tempo t . Dependendo da função f , o modelo local dado em (1) pode ter um comportamento dinâmico apresentando ciclos estáveis e caos.

Após o processo de dinâmica local de cada sítio, uma fração de indivíduos m deixa o sítio i e migra para os sítios vizinhos, onde $0 < m < 1$. Assim, a densidade de indivíduos que partem do sítio i no passo de tempo t é $mf(x_t^i)$. Dos indivíduos que migram dos sítios vizinhos k , uma fração γ_{ik} chegará para fazer parte da população do sítio i no passo de tempo $t + 1$.

Consideramos que o processo de migração é 100% bem sucedido, ou seja, não há perda de indivíduos durante a migração. Assim temos que $\sum_{k=1}^N \gamma_{ik} = 1$, para todo $i = 1, \dots, N$. Além disso, consideramos que os indivíduos não retornam para o mesmo sítio, ou seja, $\gamma_{kk} = 0$ para todo $k = 1, \dots, N$. A matriz $\Gamma = [\gamma_{ik}]_{i,k=1}^N$ é denominada matriz acoplamento entre os sítios da primeira escala, cada termo γ_{ik} representa a fração de indivíduos que sai do sítio k no passo de tempo t e passa a fazer parte do sítio i no passo de tempo $t + 1$.

Fazendo essas considerações, segue que a dinâmica da metapopulação é dada por

$$x_{t+1}^i = (1 - m)f(x_t^i) + \sum_{k=1}^N \gamma_{ik}mf(x_t^k), \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{2}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2) representa os indivíduos que não partiram do sítio i no passo de tempo t , enquanto o segundo termo é a soma de todas as contribuições dos sítios vizinhos.

Modelo Metapopulacional em duas Escalas

Para distribuição de sítios em duas escalas, consideramos que a primeira escala é formada por uma metapopulação com N sítios, enquanto a segunda escala é formada por metapopulações enumeradas por $1, 2, \dots, n$, formando uma metapopulação com nN sítios. Uma maneira de entendermos o modelo é fazendo uma analogia à dinâmica de indivíduos entre bairros e cidades, a primeira escala seria composta por bairros, enquanto a segunda escala seria composta por cidades. Para compreendermos a construção do modelo, vamos nos referir, algumas vezes, aos sítios da primeira escala por bairros e aos sítios da segunda escala por cidades.

Modelamos a evolução no tempo de um sistema dinâmico de nN equações. Em cada passo de tempo existem três processos considerados: a dinâmica local de cada sítio, a dispersão de indivíduos entre os N sítios da primeira escala e a migração de indivíduos entre os n sítios da segunda escala. Seja x_t^{ij} o número de indivíduos no sítio $\{i, j\}$, onde i representa o bairro e j a cidade, para $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots$. Seja $X_t^j = [x_t^{1,j}, x_t^{2,j}, \dots, x_t^{N,j}]^T \in R^N$ o vetor populacional da cidade j . A dinâmica local de cada metapopulação é descrita por uma função F de classe C^1 que engloba os processos de dinâmica local e migração entre os sítios da primeira escala (bairros). Portanto, na falta de migração entre as metapopulações (cidades), a dinâmica da metapopulação j isolada é dado por

$$X_{t+1}^j = F(X_t^j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Após o processo de dinâmica local de cada cidade j , uma fração de indivíduos μ_i parte de um bairro i e deixa a cidade j , $0 < \mu_i < 1$, para $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n$. Consideramos que μ_i independente da cidade. Dos indivíduos que migram das cidades vizinhas ℓ , uma proporção $c_{j\ell}$ chegará para fazer parte da população da cidade j no passo de tempo $t + 1$. O processo de migração é 100% bem sucedido, ou seja, não há perda de indivíduos durante a migração, assim temos $\sum_{j=1}^n c_{\ell j} = 1$. Consideramos também que os indivíduos não retornam para o mesmo

sítio, ou seja, $c_{\ell\ell} = 0$, para todo $\ell = 1, \dots, N$. A matriz $C = [c_{j\ell}]_{j,\ell=1}^n$ é denominada matriz acoplamento entre os sítios da segunda escala, cada termo $c_{\ell j}$ representa a fração de indivíduos que sai da cidade j no passo de tempo t e passa a fazer parte da cidade ℓ no passo de tempo $t + 1$, ver figura 1.

A densidade de indivíduos que sai do bairro i da cidade j e passa a fazer parte da população da cidade vizinha ℓ é dada por $c_{\ell j} \mu_i x^{i,j}$. Os indivíduos que saem do sítio $\{i, j\}$ e chegam na cidade ℓ não necessariamente farão parte do bairro i , esses indivíduos se distribuem nos N bairros da cidade ℓ numa proporção μ_{ki} , para $k = 1, \dots, N$, ver figura 1. Com estas considerações, temos $\mu_i = \mu_{1i} + \mu_{2i} + \dots + \mu_{Ni}$ e a densidade de indivíduos que parte do sítio ℓ da segunda escala e chega no sítio $\{i, j\}$ da primeira escala é dada por $c_{j\ell} \mu_{i1} x^{1,\ell} + c_{j\ell} \mu_{i2} x^{2,\ell} + \dots + c_{j\ell} \mu_{iN} x^{N,\ell}$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n$, ver figura 2.

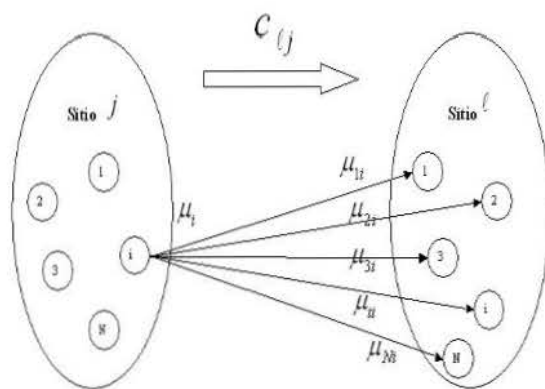


Figura 1: Indivíduos migram do sítio j para o sítio ℓ numa proporção $c_{\ell j}$. Os indivíduos que chegam em ℓ saindo do sítio $\{i, j\}$, com fração de migração μ_i , se distribuem no sítio vizinho numa proporção μ_{ki} , $k = 1, \dots, N$.

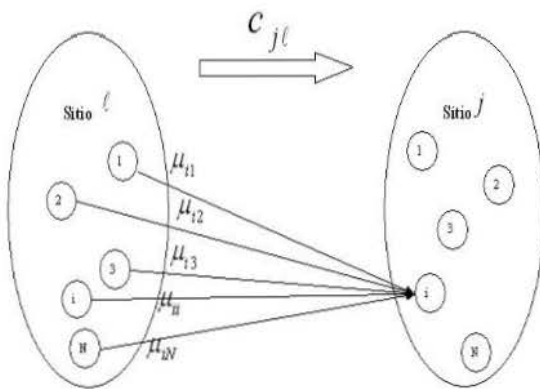


Figura 2: Dos indivíduos que saem de ℓ , uma proporção $c_{j\ell}$ chega para fazer parte do sítio j . A densidade de indivíduos que sai do sítio ℓ e chega no sítio $\{i, j\}$ é dada por $c_{j\ell} \mu_{i1} x^{1,\ell} + c_{j\ell} \mu_{i2} x^{2,\ell} + \dots + c_{j\ell} \mu_{iN} x^{N,\ell}$.

Fazendo essas considerações, segue que a dinâmica da metapopulação de sítios distribuídos em duas escalas é dada por

$$X_{t+1}^j = [I - W]F(X_t^j) + \sum_{\ell=1}^n c_{j\ell} \bar{W}F(X_t^\ell), \quad j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

onde I é a matriz identidade, $W = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ e a matriz \bar{W} é dada por

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1N} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{N-1N} \\ \mu_{N1} & \dots & \mu_{NN-1} & \mu_{NN} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Obtendo-se assim, um sistema dinâmico de nN equações. O primeiro termo do lado direito da equação (4) representa os indivíduos que não partiram do sítio da segunda escala j no passo de tempo t , enquanto o segundo termo conta as contribuições dos sítios vizinhos.

Sincronização e Estabilidade Transversal

Consideramos que ocorre sincronização nos sítios de dois modos.

Sincronização na escala maior: todas as cidades estão sincronizadas com os respectivos bairros não necessariamente sincronizados. Neste caso, ocorre sincronização se $X_t^j = \mathbf{X}_t$, onde $\mathbf{X}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N) \in R^N$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Sincronização nas duas escalas: as cidades estão sincronizadas com os respectivos bairros sincronizados. Neste caso, ocorre sincronização se $X_t^j = \mathbf{X}_t$, onde $\mathbf{X}_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in R^N$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Considerando que a densidade dos sítios da escala maior é a mesma, $X_t^j = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N)$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$, e substituindo em (4), temos que

$$\mathbf{X}_{t+1} = [I - W]F(\mathbf{X}_t) + \bigwedge_{\ell=1}^n c_{j\ell} \overline{W}F(\mathbf{X}_t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Supomos que $\bigwedge_{\ell=1}^n c_{j\ell} = 1$, para todo $j = 1, \dots, n$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{t+1} &= F(\mathbf{X}_t) - WF(\mathbf{X}_t) + \overline{W}F(\mathbf{X}_t), \\ \mathbf{X}_{t+1} &= F(\mathbf{X}_t) + (\overline{W} - W)F(\mathbf{X}_t). \end{aligned} \tag{6}$$

Portanto, se ocorrer sincronização entre as metapopulações, a dinâmica metapopulacional satisfaz $\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t) + (\overline{W} - W)F(\mathbf{X}_t)$.

Nosso interesse é estudar a estabilidade assintótica do sistema (4), isto é, quando órbitas populacionais que iniciam próximas ao estado sincronizado serão atraídas para este estado. Para fazer esta análise, usaremos o Teorema a seguir que é fundamental no processo de linearização.

Teorema: Seja $F : R^N \rightarrow R^N$ uma função de classe C^1 . Seja C matriz acoplamento entre os sítios e diagonalizável, $S_t = (\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t, \dots, \mathbf{X}_t) \in R^{n \times N}$ o estado sincronizado da metapopulação a cada passo de tempo, onde $\mathbf{X}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N) \in R^N$. Então o sistema linear associado ao sistema não linear (4) é dado por

$$Y_{t+1} = \bigwedge_{j=1}^n [I - W + \lambda_j \overline{W}] DF(\mathbf{X}_t) Y_t \tag{7}$$

onde λ_j são os autovalores da matriz C , Y_t é uma mudança de variáveis, $DF(\mathbf{X}_t)$ é a matriz jacobiana do modelo metapopulacional dado em (2) e \bigwedge representa o desacoplamento por blocos de matrizes, isto é,

$$\bigwedge_{j=1}^n A_j = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}$$

Demonstração: Linearizando o sistema (4) em torno do estado sincronizado S_t , obtemos a seguinte equação para a evolução da perturbação Δ_t ,

$$\Delta_{t+1} = J(S_t)\Delta_t,$$

onde Δ_t é a perturbação transversal e $J(S_t)$ é a matriz jacobiana $nN \times nN$ do sistema (4) aplicada no estado sincronizado.

Pela definição de produto de Kronecker¹, a matriz jacobiana pode ser escrita na forma

$$J(S_t) = I \oslash DF(\mathbf{X}_t) - I \oslash WDF(\mathbf{X}_t) + C \oslash \overline{W}DF(\mathbf{X}_t). \tag{8}$$

A matriz C é diagonalizável, então existe Q matriz não singular que diagonaliza C , isto é, $QCQ^{-1} = \Lambda^*$, onde $\Lambda^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$.

Considerando a mudança de variáveis, $Y_t = (Q \oslash I)\Delta_t$, temos que

¹Seja $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^m \in R^{m \times m}$ e $B = [b_{i,j}]_{i,j=1}^n \in R^{n \times n}$, o produto de Kronecker é definido por $A \oslash B = [a_{i,j} b_{i,j}]_{i,j=1}^{m \times n} \in R^{m \times n}$.

$$\begin{aligned}
 Y_{t+1} &= (Q \oslash I) \Delta_{t+1}, \\
 Y_{t+1} &= (Q \oslash I) (I \oslash DF(\mathbf{X}_t) - I \oslash WDF(\mathbf{X}_t) + C \oslash \overline{WDF}(\mathbf{X}_t)) \Delta_t, \\
 Y_{t+1} &= (Q \oslash DF(\mathbf{X}_t) - Q \oslash WDF(\mathbf{X}_t) + QC \oslash \overline{WDF}(\mathbf{X}_t)) \Delta_t,
 \end{aligned}$$

utilizando propriedades do produto de Kronecker.

Pelo fato de $Y_t = (Q \oslash I) \Delta_t$, temos que $\Delta_t = (Q \oslash I)^{-1} Y_t$, logo

$$\begin{aligned}
 Y_{t+1} &= (Q \oslash DF(\mathbf{X}_t) - Q \oslash WDF(\mathbf{X}_t) + QC \oslash \overline{WDF}(\mathbf{X}_t)) (Q \oslash I)^{-1} Y_t, \\
 Y_{t+1} &= (Q \oslash DF(\mathbf{X}_t) - Q \oslash WDF(\mathbf{X}_t) + QC \oslash \overline{WDF}(\mathbf{X}_t)) (Q^{-1} \oslash I) Y_t, \\
 Y_{t+1} &= (I \oslash DF(\mathbf{X}_t) - I \oslash WDF(\mathbf{X}_t) + \Lambda^* \oslash \overline{WDF}(\mathbf{X}_t)) Y_t,
 \end{aligned}$$

obtendo-se o desacoplamento por blocos de matrizes.

A importância deste teorema reside no fato que a estabilidade do sistema não linear pode ser avaliada através do sistema linearizado. Mais precisamente, denotando por r o raio espectral da matriz $\bigoplus_{j=1}^n [I - W + \lambda_j \overline{W}] DF(\mathbf{X}_t)$, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se $r < 1$, e instável se $r > 1$. O desacoplamento nos permite determinar os autovalores de $J(S_t)$ a partir das n matrizes $[I - W + \lambda_j \overline{W}] DF(\mathbf{X}_t)$ de ordem $N \times N$. É importante observar que 1 é um autovalor da matriz de configuração C que corresponde ao autoespaço que é precisamente o estado sincronizado. Assim, a estabilidade assintótica transversal pode ser avaliada através dos $(n - 1)$ sistemas restantes.

Considerando a linearização do sistema (4) e o teorema acima, queremos que a perturbação Δ_t tenda a zero ao $t \rightarrow \infty$. Isto ocorrerá se e somente se

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\|^{1/\tau} < 1, \quad (9)$$

onde $P_t = (I - W + \lambda_j \overline{W}) DF(\mathbf{X}_t)$. Assim, analisaremos a evolução da perturbação transversal para os dois modos de sincronização.

Sincronização na escala maior: a matriz Jacobiana do sistema metapopulacional (2) é calculada em $\mathbf{X}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N)$. Portanto, ela possui suas entradas dadas por

$$\alpha_{ki} = \begin{cases} (1 - m) f''(x_t^i), & \text{se } k = i; \\ \gamma_{ki} m f''(x_t^i), & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

Pelo fato de $P_t = (I - W + \lambda_j \overline{W}) DF(\mathbf{X}_t)$, para cada $\lambda_j, j = 2, \dots, n$, temos que

$$\|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_0\| = \|(I - W + \lambda_j \overline{W}) DF(\mathbf{X}_{\tau-1}) \cdot \dots \cdot (I - W + \lambda_j \overline{W}) DF(\mathbf{X}_0)\|.$$

Seja $K(\mathbf{X}_0) = \max_{j=2, \dots, n} (\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\|(I - W + \lambda_j \overline{W}) DF(\mathbf{X}_{\tau-1}) \cdot \dots \cdot (I - W + \lambda_j \overline{W}) DF(\mathbf{X}_0)\|)^{1/\tau})$.

A menos de um conjunto de medida nula, podemos tirar a dependência da condição inicial e estabelecer um critério para a estabilidade assintótica que é dado por

$$K < 1. \quad (10)$$

Para o caso $K < 1$ ocorre sincronização na escala maior, enquanto para $K > 1$ não ocorre esse tipo de sincronização. Os valores de K são calculados numericamente utilizando-se um algoritmo descrito no livro de Aligood [2].

Sincronização nas duas escalas: neste caso, a matriz Jacobiana é calculada em $\mathbf{X}_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in R^N$ e suas entradas são dadas por

$$\alpha_{ki} = \begin{cases} (1 - m) f''(x_t), & \text{se } k = i; \\ \gamma_{ki} m f''(x_t), & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

que pode ser escrita como

$$DF(\mathbf{X}_t) = (I - mB) f''(x_t),$$

onde $B = I - \Gamma$, Γ é a matriz de acoplamento entre os sítios da primeira escala.

Portanto, $P_t = (I - W + \lambda_j \overline{W}) (I - mB) f''(x_t)$, para cada $\lambda_j, j = 2, \dots, n$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0\| &= \|(I - W + \lambda_j \bar{W})(I - mB) f^{\bar{\tau}}(x_{\tau-1}) \cdots (I - W + \lambda_j \bar{W})(I - mB) f^{\bar{\tau}}(x_0)\|, \\ \|P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0\| &= \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f^{\bar{\tau}}(x_t)| \right) \|(I - W + \lambda_j \bar{W})(I - mB) \cdots (I - W + \lambda_j \bar{W})(I - mB)\|, \\ \|P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0\| &= \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f^{\bar{\tau}}(x_t)| \right) \|(I - W + \lambda_j \bar{W})(I - mB)\|^\tau. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdots P_1 P_0\|^{1/\tau} = L(x_0) \Lambda_2^j,$$

onde $L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f^{\bar{\tau}}(x_t)| \right)^{1/\tau}$ é o número de Lyapunov começando em x_0 e Λ_2^j é o raio espectral de $(I - W + \lambda_j \bar{W})(I - mB)$, para cada $\lambda_j, j = 2, \dots, n$.

A menos de um conjunto de medida nula, podemos eliminar a dependência do número de Lyapunov de x_0 e estabelecer um critério para a estabilidade assintótica,

$$L \Lambda_2 < 1, \quad (11)$$

$$\text{onde } \Lambda_2 = \max_{j=2, \dots, n} (\Lambda_2^j).$$

Na região onde o parâmetro $L \Lambda_2 < 1$ ocorre sincronização nas duas escalas, enquanto para $L \Lambda_2 > 1$ não ocorre esse tipo de sincronização. O valor $L \Lambda_2$ é denominado número transversal de Lyapunov, L depende apenas da dinâmica local do sítio, enquanto Λ_2 depende do processo migratório entre os sítios da primeira escala e da segunda escala.

Simulações Numéricas do Modelo Metapopulacional

Considera-se que a dinâmica local de cada sítio é governada pela função exponencial logística que é dada por

$$f(x) = x \exp(r(1 - x)), \quad (12)$$

onde r representa a taxa de crescimento populacional e x a densidade populacional de cada sítio. Dependendo do valor de r , o modelo local apresenta ciclos estáveis e caos.

As densidades populacionais iniciais de cada sítio são escolhidas aleatoriamente próximas ao estado sincronizado. Consideramos que o acoplamento entre os sítios da primeira escala e da segunda escala ocorre entre os dois vizinhos mais próximos em forma de anel.

Nos gráficos sítios-tempo, os sítios estão ao longo do eixo vertical e são numerados de 1 a nN , onde os N primeiros sítios correspondem à primeira metapopulação, os N seguintes sítios à segunda metapopulação e assim por diante. No eixo horizontal representamos os passos de tempo, após o descarte de transientes. As células são pintadas em seis cores de acordo com a densidade de cada sítio, para densidades altas a célula é pintada de branca e para densidades baixas a célula é pintada de preta, enquanto para densidades intermediárias as células são pintadas de tons cinzas.

Considera-se 3 metapopulações ($n = 3$), onde cada metapopulação possui 5 sítios ($N = 5$). A taxa de crescimento considerada é de $r = 3,1$, cujo número de Lyapunov é 1,3352. Em (a) $m = 0,3$ e $\mu = 0,5$, cujo número transversal de Lyapunov possui valor de $K = 0,4043$; em (b) $m = 0,03$ e $\mu = 0,3$, $K = 0,7034$; (c) $m = 0,1$ e $\mu = 0,2$, $K = 0,6822$; e em (d) $m = 0,02$ e $\mu = 0,05$, $K = 1,3584$.

Podemos observar que para os casos (a), (b) e (c), onde o número transversal de Lyapunov é inferior a 1, ocorre sincronização entre os sítios da segunda escala; enquanto para o caso (d), onde o número transversal de Lyapunov é superior a 1, não ocorre sincronização. Para observar que ocorre sincronização entre as cidades, temos que olhar o padrão das células de 5 em 5, a cada passo de tempo. Na figura 3 (a), podemos observar que ocorre sincronização nas duas escalas e a densidade dos sítios oscila com bastante frequência próxima de zero, podendo levar à extinção da metapopulação.

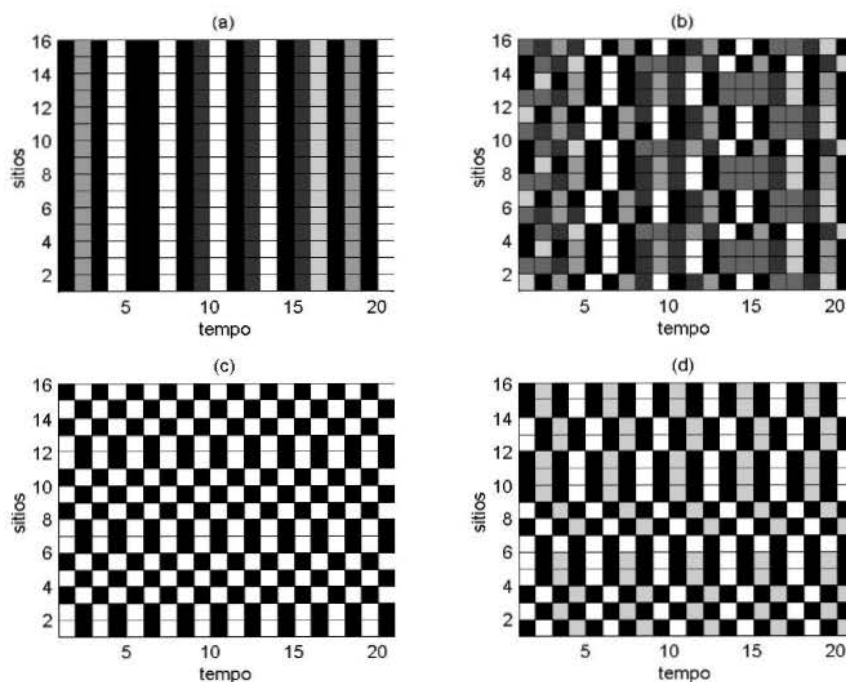


Figura 3: Gráficos sítios-tempo após o descarte de transientes. Os sítios estão acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos com $r = 3, 1$ e diferentes frações de migração. (a) $m = 0,3$ e $\mu = 0,5$; (b) $m = 0,03$ e $\mu = 0,3$; (c) $m = 0,1$, $\mu = 0,2$; (d) $m = 0,02$ e $\mu = 0,05$.

Conclusões

Sincronização de sistemas metapopulacionais está fortemente correlacionada com a extinção de metapopulações, dessa forma, resultados de vários estudos podem levantar informações úteis para evitá-la. Neste trabalho, consideramos um modelo metapopulacional com sítios distribuídos em duas escalas, a primeira escala é composta por uma metapopulação, enquanto a segunda escala é composta por um número arbitrário de metapopulações. Analisamos dois modos de sincronização entre as metapopulações e apresentamos critérios para ocorrer esses modos de sincronização. São feitas simulações numéricas do modelo metapopulacional e ocorre concordância entre as simulações e os critérios apresentados.

Referências

- [1] Allen, J. C., Schauffer, W. M., Rosko, D., “Chaos reduces species extinction by amplifying local population noise”, *Nature* (364), 229-232, 1993.
- [2] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A., “CHAOS An introduction to Dynamical Systems”, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [3] Earn, D. J., Levin, S. A., Rohani, P., “Coherence and Conservation”, *SCIENCE*, Vol. 290. no. 5495, 1360-1364, 2000.
- [4] Giordani, F. T., Silva, J. A. L., “Migração Dependente da Densidade em Modelos Metapopulacionais”, Tese de Doutorado, Editora da UFRGS, 2008.