Condições de Contorno Absorventes para Problemas Hiperbólicos

Kleiton A. Schneider,* **Manuela L. de Castro**

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, 91509-900, Porto Alegre, RS

E-mail: kleitonschneider@yahoo.com.br, manuela@mat.ufrgs.br.

Resumo:

Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ u_t(x,y,0) = v_0(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, onde o suporte de u_0 e v_0 está contido em $(\delta, \infty) \times \mathbb{R}$, para algum $\delta > 0$. Como o domínio espacial é ilimitado, é preciso truncá-lo para calcular soluções numericamente. Tal truncamento torna necessária uma condição de contorno (CC) artificial.

Como motivação, considere o problema de valor inicial e de contorno (PVIC)

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} \\ \varphi(x,y,0) = u_0(x,y) \\ \varphi_t(x,y,0) = v_0(x,y) \\ \mathcal{B}\varphi = 0 \end{cases} \tag{2}$$

para $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, t \geq 0$, onde $\mathcal{B}$ é a CC artificial exata em $x = 0$, ou seja, $\varphi(x,y,t) = u(x,y,t)$ para $x > 0$. Como a solução de (1) é dada apenas por ondas que se movem para a esquerda, $\mathcal{B}$ deve aniquilar as ondas que se movem para a direita.

A CC exata não-local que absorve as ondas incidentes [3] é dada por

$$\left(\frac{d}{dx} - i\omega\sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^2}\right)\hat{\varphi} = 0, \quad \text{para } x = 0, \tag{3}$$

onde $\hat{\varphi}(x) \equiv \hat{\varphi}(x,\eta,\omega)$ é a transformada de Fourier de $\varphi(x,y,t)$. Note que (3) não é um símbolo de uma EDP, mas de um operador pseudo-diferencial, o qual é complicado implementar numericamente. Contudo, podemos aproximar a raiz quadrada para obter uma família de EDP´s que podem ser implementadas numericamente. Tais EDP´s dão origem às *CC absorventes* para a equação da onda.

Trefethen e Halpern [3] propuseram a aproximação da raiz quadrada em (3) por uma função racional $r(\eta\backslash\omega)$ do tipo (m,n) para algum $m,n \in \mathbb{N}$. O problema então é encontrar uma função $r(\eta\backslash\omega)$ tal que o PVIC aproximado seja bem-posto, e que o erro, isto é, a diferença da solução do PVIC aproximado e do PVI (1), seja minimizado dentro de um custo computacional aceitável.

Higdon [2] propôs uma aproximação local ao PVIC (2) com CC aproximadas dadas por

$$\prod_{j=1}^{L}\left(\cos\alpha_j \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = 0, \tag{4}$$

que podem absorver ondas planas de ângulos $\pm\alpha_j$ (para $|\alpha_j| < \pi\backslash 2$). Qualquer das aproximações em [3] pode ser expressa por (4). Em [1], Diaz e Joly obtiveram uma solução analítica para o PVIC associado a esta CC.

O objetivo principal deste trabalho é, a partir da análise proposta em [1], obter um procedimento para a derivação de CC absorventes para outros problemas hiperbólicos lineares.

*bolsista de mestrado CAPES

Referências

[1] J. Diaz & P. Joly, "An analysis of high order boundary conditions for the wave equation". SIAM *J. Appl. Math.*, vol 65, pg.1547-1575.

[2] R. Higdon, "Absorving boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation". *Math. of Comp.*, vol. 47, 176, 1986,pg. 437-459.

[3] L.N. Trefethen & L. Halpern, "Well-posedness of one-way wave equations and absorving boundary conditions". *Math. of Comp.*, vol.47, 1986, pg. 421-435.