 ISSN 1984-820X

Discretizações Miméticas

Matheus C. Santos
Instituto de Matemática - PPGMAp - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Prédio 43111 - Agronomia
91509-900 Porto Alegre - RS - BRASIL
E-mail: msantos.ufrgs@gmail.com

Dagoberto A. R. Justo
Instituto de Matemática - PPGMAp - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Prédio 43111 - Agronomia
91509-900 Porto Alegre - RS - BRASIL
E-mail: dago@mat.ufrgs.br

RESUMO

O cálculo vetorial é uma poderosa linguagem usada na descrição da mecânica do contínuo, assim como a teoria das formas diferenciais. No caso do cálculo vetorial, os operadores diferenciais (gradiente, divergente e rotacional) desempenham um papel central: as equações que descrevem as situações da mecânica do contínuo podem ser escritas em termos destes operadores (juntamente com derivadas no tempo). Tais equações podem ser discretizadas usando diferenças finitas, elementos finitos, teoria espectral, etc. Os métodos miméticos seguem uma linha diferente: eles não são usados para discretizar um sistema particular de equações, mas para discretizar uma teoria do contínuo. Assim, métodos miméticos para o cálculo vetorial nos dão um conjunto de ferramentas e propriedades (identidades) análogas as do cálculo vetorial do contínuo. Em particular, podemos obter análogos discretos das leis de conservação. A experiência tem mostrado que os melhores resultados são obtidos quando o modelo discreto preserva propriedades fundamentais do modelo contínuo, mesmo quando o problema apresenta fortes não-linearidades ou quando o grid não é suave.

A discretização mimética que vamos construir terá três propriedades principais: análogos exatos de identidades diferenciais, análogos exatos dos teoremas integrais e satisfará uma sequência exata de espaços e operadores.

Primeiro introduziremos o pano de fundo para nossa derivação, que é uma malha (grid) em todo o $\mathbb{R}^3$. Ela é um produto tensorial de malhas unidimensionais uniformes e portanto, consiste de células com faces retangulares. Os campos escalares definidos na malha serão associados ou com os nós ou com os centros das células e, os campos vetoriais, associados ou com as arestas ou com as faces. Introduziremos os operadores diferenciais discretos e veremos que eles satisfazem exatamente as identidades diferenciais do contínuo, como por exemplo $\nabla\times(\nabla)\equiv 0$, $\nabla\cdot(\nabla\times)\equiv 0$ e a existência de potenciais para campos irrotacionais.

Depois, como queremos análogos dos teoremas integrais, definiremos as integrais das funções sobre a malha. Ao invés de trabalhar com integrais sobre regiões, superfícies ou curvas, introduziremos o conceito de cadeias e as usaremos como regiões de integração. Com isso, poderemos provar os teoremas integrais fundamentais (Stokes, divergência e potencial). Com esses resultados, teríamos ferramentas suficientes para provar leis de conservação discretas para sistemas que tem essas leis no contínuo.

Por último, um passo chave na construção do nosso modelo, será a introdução da malha dual. Ela será uma cópia transladada da original com a seguinte propriedade: nós da malha

dual estarão no centro das células da malha original e vice-versa, arestas da malha dual serão perpendiculares a faces da malha original que interceptarem essa aresta e vice-versa. Depois, com a introdução de um operador $*$ (um análogo do operador $*$ de Hodge) entre os campos definidos nas duas malhas, poderemos definir os análogos escalares e vetoriais do Laplaciano (divergente do gradiente e rotacional do rotacional). Os resultados serão resumidos em termos de uma sequência exata de espaços e operadores.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] & V_{\mathcal{N}} \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & V_{\mathcal{E}} \arrow[r, "\mathcal{R}"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & V_{\mathcal{F}} \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & V_{\mathcal{C}} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & 0 \\
0 & V_{\mathcal{C}^*} \arrow[l] & V_{\mathcal{F}^*} \arrow[l, "\mathcal{D}"'] & V_{\mathcal{E}^*} \arrow[l, "\mathcal{R}"'] & V_{\mathcal{N}^*} \arrow[l, "\mathcal{G}"'] & \mathbb{R} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Daremos ênfase à construção de um cálculo discreto para problemas independentes do tempo, sem condição de contorno. Apresentaremos os resultado em termos de cálculo vetorial porque ele é mais frequentemente usado nas descrições do contínuo. Quando o cálculo vetorial demonstrar ambiguidade, faremos uso de formas diferenciais.

A teoria apresentada é formal no sentido que os objetos, como as integrais, serão definidos sobre toda a malha. Para garantir convergência, assumiremos que alguns campos tem suporte limitado.

Palavras-chave: *mimetic discretizations, cálculo vetorial discreto*

Referências

[1] N M. Bessonov, D. J. Songy. Application of Vector Calculus to Numerical Simulation of Continuum Mechanics Problems. *J. Comput. Phys.*. 167, 2238, 2001.

[2] M. Bohmer, J. Castillo. Mimetic methods on measure chains. *Comput. Math. Appl.*, 42(3-5): 705-710, 2001. Advances in difference equations, III.

[3] J. P. Zingano. *Convergence of Mimetic Methods for Sturm-Liouville Problems on General Grids*. PhD thesis, The University of New Mexico, New Mexico, 2003.

[4] D. A. R. Justo. *High Order Mimetic Methods and Absorbing Boundary Conditions*. PhD thesis, The University of New Mexico, New Mexico, 2005.

[5] D. A. R. Justo, S. L. Steinberg. A general diagram for mimetiv methods. *to be submitted*, 2008.

[6] J. M. Hyman, M. J. Shashkov. Natural discretizations for the divergence, gradient, and curl on logically rectangular grids. *Comput. Math. Appl.*, 33(4): 81-104, 1997.

[7] J. M. Hyman, M. J. Shashkov. Mimetic discretizations for Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 151(2): 881-909, 1999.

[8] R. Robidoux, S. L. Steinberg. A discrete vector calculus in tensor grids. *to be submitted*, 2007.