

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ADMINISTRATIVAS**

Matheus Angeli Ribaski

**UMA COMPARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS NA PREVISÃO DE
MEDIDAS DE RISCO**

Porto Alegre

Dezembro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Matheus Angeli Ribaski

**UMA COMPARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS NA PREVISÃO DE
MEDIDAS DE RISCO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Administração.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Brutti Righi

Porto Alegre

Dezembro de 2017

Matheus Angeli Ribaski

**UMA COMPARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS NA
PREVISÃO DE MEDIDAS DE RISCO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Administração.

Trabalho aprovado em 11 de dezembro de 2017.

Prof. Dr. Marcelo Brutti Righi (Orientador)
UFRGS

Prof. Dr. Guilherme Kirch (Avaliador)
UFRGS

**Porto Alegre
Dezembro de 2017**

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Marcelo Brutti Righi e à Doutoranda em Administração Fernanda Müller pelas orientações e ajudas recebidas ao longo deste trabalho, as quais ajudaram a melhorar tanto a qualidade, quanto a apresentação do mesmo.

RESUMO

Devido às últimas crises e ao aumento do fluxo de negociações no mercado financeiro, ocorreu um maior interesse da comunidade mundial acerca da gestão de risco. Assim, este trabalho objetivou comparar diferentes distribuições no modelo ARMA-GARCH para prever o risco das medidas Valor em Risco (VaR) e Perda Esperada (ES) do índice S&P 500. Sete distribuições, além do método de Simulação Histórica (HS) foram utilizadas. Descobriu-se que para a estimação do VaR, a distribuição Empírica, através do método de Simulação Histórica Filtrada (FHS) obteve melhor performance. Já para a estimação da ES, a distribuição t Student foi a mais indicada. Além disso, verificou-se que dependendo do método e quantis utilizados, os resultados se alteram.

Palavras-chave: VaR; ES; ARMA-GARCH; S&P 500; Distribuições.

ABSTRACT

There has been increased interest in risk management across the world due to the latest crises and increased trading flow in the financial market. Thus, this work aimed to compare different distributions in the ARMA-GARCH model to predict the risk of the Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) measures of the S&P 500 index. Seven distributions, in addition to the Historical Simulation (HS) method were used. It was found that for the estimation of VaR, the Empirical distribution through the Filtered Historical Simulation (FHS) method obtained better performance. For the estimation of ES, the Student t distribution was the most indicated. In addition, it has been found that depending on the method and quantiles used, the results change.

Keywords: VaR; ES; ARMA-GARCH; S&P 500; Distributions.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|------------------------------|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 7 |
| 2 | ARCABOUÇO | 10 |
| 3 | METODOLOGIA | 17 |
| 4 | RESULTADOS | 20 |
| 5 | CONCLUSÃO | 27 |
| | REFERÊNCIAS | 29 |

1 INTRODUÇÃO

As últimas crises financeiras e o aumento do fluxo de negociações no mercado financeiro são fatores que contribuíram para o maior interesse por parte da comunidade acadêmica, das instituições e dos investidores acerca da gestão de risco. Nesse contexto, a previsão do risco torna-se importante, uma vez que é instrumento para tomada de decisão pelos gestores. A acurácia dessa previsão é essencial e tema constante de pesquisa. Uma superestimação do risco gera um custo de oportunidade, pois uma parcela desnecessária de capital terá que ser guardada visando à segurança do investimento. Por outro lado, uma subestimação do risco pode conduzir à perdas no investimento, visto que uma parcela insuficiente de capital será alocada para cumprir com o propósito de segurança.

O Valor em Risco (VaR) é a medida de risco mais utilizada e é definido como a máxima perda esperada em um dado horizonte de tempo, associado a um intervalo de confiança. Entretanto, o VaR é criticado por ignorar as perdas ocorridas além do quantil escolhido e por não ser uma medida coerente de risco¹, porque desrespeita o axioma da subaditividade, ou seja, o risco de um portfólio não necessariamente é menor do que a soma dos riscos dos ativos individuais que o compõe (ARTZNER et al., 1999). Para sanar esses problemas, uma alternativa apresentada foi a Perda Esperada (ES). A ES é definida como o valor esperado das perdas dado que uma perda maior que o valor do VaR tenha ocorrido, ou seja, considera a magnitude das perdas após o quantil de interesse. Suas principais vantagens são ser uma medida de risco coerente e considerar as perdas ocorridas depois do quantil escolhido (ACERBI; TASCHE, 2002). Embora a ES tenha algumas vantagens sobre o VaR, o último continua sendo a medida mais utilizada, por diversos motivos, entre eles: o *backtesting* da ES é mais difícil, a complexidade computacional da ES é maior que a do VaR e a ES necessita de uma amostra de dados maior para ser estimada com precisão.

Para estimação das medidas podem ser usados os métodos não-paramétrico, paramétrico e semi-paramétrico. O método não-paramétrico é aquele onde não há a

¹ Uma medida de risco é dita coerente se atende aos quatro axiomas a seguir: invariância de translação, homogeneidade positiva, subaditividade e monotonicidade (ARTZNER et al., 1999).

necessidade do conhecimento da distribuição teórica do conjunto de dados. O VaR obtido por meio desse método considera a distribuição empírica dos dados, sendo a Simulação Histórica (HS) a técnica mais utilizada. Pérignon e Smith (2010) mostram em sua pesquisa que aproximadamente 73% dos bancos, que revelaram de que forma calculam o risco, usam o método HS. O método paramétrico é baseado na estimação da distribuição subjacente dos retornos. A partir da estimação da distribuição, as previsões do risco são calculadas (DANIELSSON, 2011). Já o método semi-paramétrico possui características tanto do não-paramétrico quanto do paramétrico, sendo uma das técnicas mais comum a Simulação Histórica Filtrada (FHS), que utiliza tanto dados passados quanto modelos de econometria não-linear para estimar a distribuição, e consequentemente, o risco. O modelo mais utilizado tanto no método paramétrico quanto no semi-paramétrico é o autorregressivo de médias móveis (ARMA) para modelar a média condicional e o modelo autorregressivo heterocedástico condicional generalizado (GARCH) (BOLLERSLEV, 1986) para modelar o desvio padrão condicional. Para o modelo GARCH as distribuições usualmente utilizadas referem-se as distribuições Normal e *t* Student.

Dado o grande número de técnicas de estimação utilizadas na literatura de gestão de risco, uma classe de estudos compara métodos de estimação do risco para determinar o melhor modelo, como em Harmantzis et al. (2006). Apesar dos estudos, percebe-se uma preferência dos autores em ter como foco principal a estimação do VaR. Ademais, a maioria dos trabalhos não investiga qual é a melhor distribuição do modelo GARCH para prever medidas de risco, como VaR e ES.

Dessa forma, o objetivo geral deste trabalho é comparar distribuições no modelo ARMA-GARCH para prever o VaR e a ES do índice S&P 500. Para atingir o objetivo, é analisado como se comportam os diferentes métodos de estimação para prever o VaR e a ES, além de descobrir qual modelo e distribuição combinados proporcionam a melhor previsão do risco. Além disso, é verificado se a escolha do nível de confiança, seja de 1%, 2,5% ou 5%, altera o resultado obtido. Os resultados obtidos são avaliados através do procedimento de *backtesting* e de estatísticas descritivas.

Esses objetivos são importantes porque este trabalho tem o intuito de auxiliar os agentes do mercado financeiro, que lidam com o índice S&P 500, a identificar a distribuição mais adequada para modelar o risco incorrido em suas operações. Além

disso, existem regulamentos, chamados de Acordos de Basileia, criados pelo Comitê da Basileia (BIS), que exigem que instituições financeiras possuam capital mínimo para suportar riscos, o qual é calculado com base nas previsões do VaR e ES. Esses regulamentos cobram que as instituições realizem, também, procedimento de *backtesting* para averiguar a qualidade dessas previsões. O *backtesting* é o procedimento através do qual as previsões são comparadas com o que realmente aconteceu no período estipulado para se verificar a qualidade do cálculo. Dessa forma, esse trabalho pode ajudar as instituições em seus deveres regulamentares.

Na literatura, existem inúmeras pesquisas que visam comparar o melhor método e modelo na estimação do risco. Em grande parte desses estudos e mesmo naqueles onde se estimam tanto o VaR quanto a ES, o foco principal é no VaR, sendo esse a medida mais estudada. Exemplos de estudos com esse enfoque são Harmantzis et al. (2006), Kuester et al. (2006), Angelidis et al. (2004) e Christoffersen e Gonçalves (2005). Diferentemente dos trabalhos apresentados, esse estudo proporciona a mesma importância para o VaR e ES, dando enfoque na distribuição e não no modelo. Díaz et al. (2017) são um dos poucos autores que focam na distribuição e não no modelo, porém, o fazem somente para a estimação do VaR e com distribuições diferentes das propostas nesse trabalho. Até o melhor de meu conhecimento, esse trabalho é o único a comparar ambas medidas de risco com foco na distribuição e não no modelo para o índice S&P 500. A escolha do índice S&P 500 é relevante pois o mercado financeiro americano é o mais líquido do mundo e com o maior fluxo de negociações.

2 ARCABOUÇO

Seja X o retorno de um ativo qualquer, sendo que, se $X \geq 0$ tem-se um ganho e se $X < 0$ tem-se uma perda. Dado um nível de significância $\alpha \in (0, 1)$, o VaR é definido matematicamente como:

$$\text{VaR}^\alpha(X) = -\inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} = -F_X^{-1}(\alpha), \quad (2.1)$$

em que, F_X é definida como a função de distribuição acumulada e F_X^{-1} é a sua função inversa. O sinal de negativo na frente da fórmula deve-se ao fato de o VaR simbolizar uma perda e, desse modo, quanto maior o valor da medida, maior é a perda. Por o VaR não ser uma medida coerente e nem contabilizar as perdas ocorridas além do quantil de interesse, o uso da ES é recomendado para a mensuração do risco, visto que é uma medida coerente e consegue captar as perdas esperadas que acontecem além do quantil do VaR. A ES é matematicamente definida como:

$$\text{ES}^\alpha(X) = -E[X|X \leq F_X^{-1}(\alpha)]. \quad (2.2)$$

Para se estimar o VaR e a ES, o modelo ARMA-GARCH é utilizado. Ele é matematicamente definido como:

$$X_t = c + \sum \varphi_m X_{t-m} + \sum \theta_n \varepsilon_{t-n} + \varepsilon_t, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, z_t \sim i.i.d F_{z_t}(0, 1), \quad (2.4)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum a_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum b_q \sigma_{t-q}^2, \quad t = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

em que, X_t é o retorno do ativo no período t ; z_t representa um ruído branco independente e identicamente distribuído (i.i.d), com média 0, variância unitária e que pode seguir diferentes distribuições de probabilidade F_{z_t} ; c , φ , θ , ω , a e b são parâmetros, onde φ é o termo autoregressivo, θ o termo de médias móveis, a o componente ARCH e b o componente GARCH do modelo; ε_t são os resíduos da média condicional no tempo t . Existem restrições dos parâmetros ω , a e b aplicadas ao modelo para garantir previsões de volatilidade positivas e estacionariedade de covariância. São elas: $\omega, a, b > 0$ e $\sum a_p + \sum b_q < 1$, respectivamente.

O método paramétrico é baseado na suposição de que os retornos pertencem a uma família de distribuições de probabilidade na forma de:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t, \quad (2.6)$$

em que, μ_t é o valor da média condicional X_t e σ_t^2 é a variância condicional de X_t .

Após modelar os dados com o modelo ARMA-GARCH, pode-se calcular o VaR e a ES. O VaR é matematicamente definido como:

$$\text{VaR}_t^\alpha(X) = -(\mu_t + \sigma_t F_{z_t}^{-1}(\alpha)), \quad (2.7)$$

em que $F_{z_t}^{-1}$ é a função inversa da função F_{z_t} .

Por consequência, a ES é definida como:

$$\text{ES}_t^\alpha(X) = -(\mu_t + \sigma_t E[z_t | z_t \leq F_{z_t}^{-1}(\alpha)]) = -\left(\mu_t + \sigma_t \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_{z_t}^{-1}(s) ds\right)\right). \quad (2.8)$$

O método semi-paramétrico é uma combinação entre os métodos não-paramétrico e paramétrico. A técnica utilizada nesse trabalho é a de FHS, proposta por Barone-Adesi et al. (1998). Nela, primeiramente se modelam os dados com o modelo ARMA-GARCH, assim como feito no método paramétrico. A diferença acontece na medida que não se faz suposição acerca da distribuição de z_t . Ao invés disso, utiliza-se da distribuição empírica de z_t , assim como feito no método não-paramétrico. Então, o VaR computado via FHS é definido como:

$$\text{VaR}_t^\alpha(X) = -(\mu_t + \sigma_t \epsilon_{z_t}^{-1}(\alpha)), \quad (2.9)$$

em que $\epsilon_{z_t}^{-1}(\alpha)$ é o quantil empírico de z_t .

Giannopoulos e Tunaru (2005) ampliaram a ideia de Barone-Adesi et al. (1998), desenvolvendo a técnica FHS para o cálculo da ES. Dessa forma, a ES é definida como:

$$\text{ES}_t^\alpha(X) = -(\mu_t + \sigma_t E[z_t | z_t \leq \epsilon_{z_t}^{-1}(\alpha)]). \quad (2.10)$$

Existem vários estudos referentes ao tema de pesquisa desse trabalho e, os principais, estão sintetizados na Tabela 2.1 a seguir.

Tabela 2.1 – Principais estudos na área

| Autor | Modelagem | Metodologia | Resultados |
|-----------------------------------|--|---|--|
| Angelidis et al. (2004) | Família ARCH, Normal, t Student e Generalizado do Erro (GED). | VaR, quantis 1% e 5% para os ativos S&P 500, Nikkei225, FTSE100, CAC40, DAX 30. | Os resultados sugerem que as distribuições leptocúrticas produzem melhores estimações do VaR e o melhor modelo depende do ativo analisado. |
| Embrechts et al. (2005) | AR(p), GARCH(1,1), Hill, EVT, Passeio Aleatório. | VaR e ES, quantis 1%, 2,5% e 5% para os ativos S&P 500, SMI, DAX, FTSE, NIKKEI, DEM/CHF, CBP/CH, USD/CHF, JPY/CHF, títulos do governo (CH, DE, UK, US, JP). | Os resultados sugerem que o modelo Passeio Aleatório é o mais recomendado. |
| Christoffersen e Gonçalves (2005) | GARCH, HS, Normal, Teoria de Valor Extremo (EVT), FHS, Expansões Gram-Charlier e Cornish-Fisher, Hill. | VaR e ES, quantil 1% com Simulação de Monte Carlo. | Os resultados sugerem que o FHS é melhor para estimar o VaR e o Hill é melhor para estimar a ES. |

Continua na próxima página

Tabela 2.1 – *Continuada da página anterior*

| Autor | Modelagem | Metodologia | Resultados |
|-----------------------------|--|---|---|
| Harmantzis et al. (2006) | Empírica, Normal, Generalizada de Pareto (GPD), POT, EVT, Stable. | VaR e ES, quantis 1%, 2,5% e 5% para os ativos S&P 500, DAX, CAC, NIKKEI, TSE, FTSE, moedas (US dollar, Euro, Yen, Pound, Canadian dollar). | Os resultados sugerem que os modelos que capturam os eventos raros preveem o VaR melhor do que os modelos que não tem caudas grossas. Para a ES, HS e POT se mostram melhores. |
| Kuester et al. (2006) | GARCH, MN-GARCH, CAViaR, EVT, FHS, HS, Normal, t Student, t Student Assimétrica. | VaR, quantis 1%, 2,5% e 5% para o ativo NASDAQ Composite Index. | Os resultados sugerem que os modelos que utilizam a distribuição t Student Assimétrica performam melhor que os outros, em conjunto com os EVT e FHS. |
| Marinelli et al. (2007) | Empírica, Stable, Gaussian, GPD, Pickand, Hill, EVT, POT. | VaR e ES, quantis 1% e 5% para os ativos S&P 500, NASDAQ, USD/GBP, USD/YEN, ações da Microsoft e Amazon. | Os resultados sugerem que α -stable é melhor para estimar o VaR e POT é melhor para estimar a ES. Além disso, modelos semiparamétricos como EVT se saem bem na estimação do VaR. |

Continua na próxima página

Tabela 2.1 – *Continuada da página anterior*

| Autor | Modelagem | Metodologia | Resultados |
|---------------------------|---|---|---|
| Mabrouk e Saadi (2012) | GARCH, HYGARCH(1, <i>d</i> ,1), AR(1)-FIAPARCH(1, <i>d</i> ,1), Normal, <i>t</i> Student, <i>t</i> Student Assimétrica. | VaR, quantis 1% e 5% para os ativos DAX, DJIA, NASDAQ, Nikkei, CAC40, FTSE100, S&P 500. | Os resultados sugerem que o modelo AR(1)-FIAPARCH(1, <i>d</i> ,1) com distribuição <i>t</i> Student Assimétrica tem a melhor performance entre todos os analisados. |
| Zhou (2012) | FHS, GARCH(1,1), EGARCH, GARCH-EVT, Normal, <i>t</i> Student, <i>t</i> Student Assimétrica. | VaR e ES, quantis - 0,5%, 1%, 5%, 95%, 99% e 99,5% para o ativo REITs. | Os resultados mostram que EGARCH com <i>t</i> Student Assimétrica, GARCH <i>t</i> e GARCH-EVT promovem as melhores estimação do risco. |
| Degiannakis et al. (2013) | GARCH, FIGARCH, Empírica, Normal, <i>t</i> Student Assimétrica. | VaR e ES, quantis 1% e 5% para 20 índices de ações, entre eles o S&P 500, além de Simulação de Monte Carlo. | Os resultados sugerem que o FIGARCH (longo horizonte de tempo) não melhora a previsão do risco em comparação ao GARCH (curto horizonte de tempo). |

Continua na próxima página

Tabela 2.1 – *Continuada da página anterior*

| Autor | Modelagem | Metodologia | Resultados |
|------------------------------|---|---|--|
| Righi e Ceretta (2015) | CAViaR, CARES, Normal, t Student, t Student Assimétrica, GPD, EVT, Empírica. | VaR e ES, quantis 1% e 5% para os ativos S&P 500, DAX, FTSE100, Nikkei225, Ibovespa, Hang Seng, além de títulos do Tesouro americano e taxas de câmbio de moedas. | Os resultados mostram que os modelos condicionais, especialmente os que representam melhor os retornos financeiros, tem predominância sobre os outros. |
| Degiannakis e Potamia (2017) | AR(1)-GARCH(1,1), AR(1)-HAR-RV, t Student Assimétrica. | VaR e ES, quantis 1%, 2,5% e 5% para os ativos S&P 500, EuroStoxx 50 Index, FTSE100, HG, SV, GC, EUR/USD, GBP/USD, CAD/USD. | Os resultados sugerem que o modelo GARCH com distribuição t Student Assimétrica é melhor que o modelo HAR-RV com distribuição t Student Assimétrica. |
| Díaz et al. (2017) | ARMA-GARCH(1,1), Normal, t Student, Generalizada de Pareto (GPD), α -stable e g-e-h. | VaR, quantis 1% e 5% para os ativos DJIA, the DJ EuroStoxx 50 Index, CBOE VIX, CHF/USD, the Bloomberg Commodity Index. | O backtesting mostra que a GPD e a α -stable performam melhor que as outras. |

Fonte – Elaborada pelo autor

A partir dos estudos mostrados, percebem-se certos padrões. Há uma predominância de pesquisas com modelos da família GARCH, principalmente o GARCH(1,1).

Além disso, as metodologias apresentadas possuem certas semelhanças, como escolha de quantis 1% e 5% e o uso de índices de ações como base de dados. Dito isso, a principal diferença desse trabalho para os que foram apresentados na tabela é o foco de pesquisa. Primeiramente, como relatado na introdução, a maioria das pesquisas tem como foco principal o VaR. Já esse trabalho se propõe a analisar tanto o VaR quanto a ES de forma que ambos tenham a mesma importância. Há também a questão de que a maioria dos estudos mostrados tem como objetivo comparar modelos para verificar qual o melhor na estimação do risco. Por outro lado, esse trabalho não compara modelos, e sim distribuições. Díaz et al. (2017) são uns dos poucos autores que comparam distribuições, porém, o fazem apenas na estimação do VaR e utilizam distribuições e base de dados diferentes das propostas nesse estudo.

3 METODOLOGIA

Nesta seção, são apresentados os procedimentos metodológicos para alcançar o objetivo proposto. As análises são realizadas em linguagem de programação R (R Core Team, 2017). O conjunto de dados utilizados como base para os cálculos dessa pesquisa é o índice S&P 500, uma vez que reflete o mercado mais líquido e com o maior fluxo de negociações do mundo. O período amostral é de 01/01/2009 até 31/12/2016, perfazendo um total de 1990 observações diárias. Esse período foi escolhido pois é recente e contém dados de crise e calmaria para o mercado analisado. Autores como Angelidis et al. (2004), Embrechts et al. (2005), Harmantzis et al. (2006), Marinelli et al. (2007), Mabrouk e Saadi (2012), Degiannakis et al. (2013), Righi e Ceretta (2015) e Degiannakis e Potamia (2017) utilizam o índice S&P 500 em seus trabalhos, evidenciando a importância do mesmo. Uma análise da série, englobando estatísticas descritivas e testes de diagnóstico, é realizada.

O modelo utilizado para estimar o risco é o modelo ARMA-GARCH, apresentado no capítulo 2 dessa pesquisa, considerando para z_t as distribuições Empírica, Normal, Normal Assimétrica, t Student, t Student Assimétrica, Generalizado do Erro e Generalizado do Erro Assimétrica. Além disso, o método de HS também é utilizado. Existe uma grande variedade de distribuições utilizadas na literatura apresentada, porém, nenhum estudo utiliza o mesmo conjunto de distribuições que às utilizadas nesse estudo. Angelidis et al. (2004), Christoffersen e Gonçalves (2005), Harmantzis et al. (2006), Kuester et al. (2006), Marinelli et al. (2007), Mabrouk e Saadi (2012), Zhou (2012), Degiannakis et al. (2013), Righi e Ceretta (2015), Degiannakis e Potamia (2017) e Díaz et al. (2017) utilizam algumas das distribuições selecionadas nesse estudo, mas em nenhum foram estudadas todas juntas.

As medidas de risco escolhidas para análise são o VaR e a ES, as quais já foram introduzidas no capítulo 2. Vale ressaltar que ambas as medidas são sugeridas como medidas complementares de risco pelas agências regulatórias, e na literatura o foco central dos estudos tem sido o VaR. Os quantis escolhidos são os 1%, 2,5% e 5%. Justifica-se tal escolha pelo fato de que o BIS recomenda que se utilizem os quantis

1% e 2,5% para o cálculo do VaR e da ES, respectivamente. Além disso, os quantis 1% e 5% são os mais utilizados na literatura. Embrechts et al. (2005), Harmantzis et al. (2006), Kuester et al. (2006) e Degiannakis e Potamia (2017) utilizam os mesmos quantis desse trabalho. A janela de estimação escolhida é de 1000 observações diárias, ou seja, correspondente a quatro anos de dados, metade da amostra. Essa janela foi escolhida devido ao fato de ser geralmente utilizada nos estudos que comparam modelos para prever medidas de risco.

Após a previsão das medidas de risco a qualidade das previsões foi analisada por meio *backtesting*. O procedimento de *backtesting* do VaR feito nesse trabalho é o proposto por Christoffersen (1998). Sejam uma amostra x_t de uma série financeira X_t e uma sequência de intervalos de previsões $(L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha))_t$, onde $L_{t|t-1}(\alpha)$ e $U_{t|t-1}(\alpha)$ são o limite inferior e superior, respectivamente, do intervalo de previsões *ex ante* no tempo t realizado no tempo $t - 1$ para a probabilidade α . Dadas as informações das previsões e da série financeira realizada, a análise é realizada da seguinte forma:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{se } X_t \in [L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha)], \\ 0, & \text{se } X_t \notin [L_{t|t-1}(\alpha), U_{t|t-1}(\alpha)], \end{cases} \quad (3.1)$$

em que, I_t retorna o valor 0 se o retorno em um dia exceder o valor da previsão do VaR ou 1 se não exceder. Toda vez que o valor 0 é obtido, tem-se uma violação. Quanto mais violações, pior é a qualidade das previsões. Para testar a validade das informações obtidas, realizam-se dois testes, convergência incondicional (TCI) e independência (TI). O TCI serve para verificar se o número de violações está próximo da quantidade esperada e o TI serve para verificar a independência delas. Para realizar o TCI, testamos a hipótese nula $E[I_t] = \alpha$ contra a hipótese alternativa $E[I_t] \neq \alpha$, ou seja, testamos se o número de violações do VaR é igual ao número de violações esperadas. Já para realizar o TI, testamos a hipótese nula $\hat{\pi}_{01} = \hat{\pi}_{11}$ contra a hipótese alternativa $\hat{\pi}_{01} \neq \hat{\pi}_{11}$, em que $\hat{\pi}_{01}$ é o número de violações observadas que foram precedidas por dias sem violações e $\hat{\pi}_{11}$ é o número de violações observadas que foram precedidas por dias com violações. Assim, a estrutura do *backtesting* do VaR é:

$$BackVaR = -2\ln \left(\frac{\alpha^{n_{00}+n_{10}}(1-\alpha)^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_{01})^{n_{00}}\pi_{01}^{n_{01}}(1-\pi_{11})^{n_{10}}\pi_{11}^{n_{11}}} \right), \quad (3.2)$$

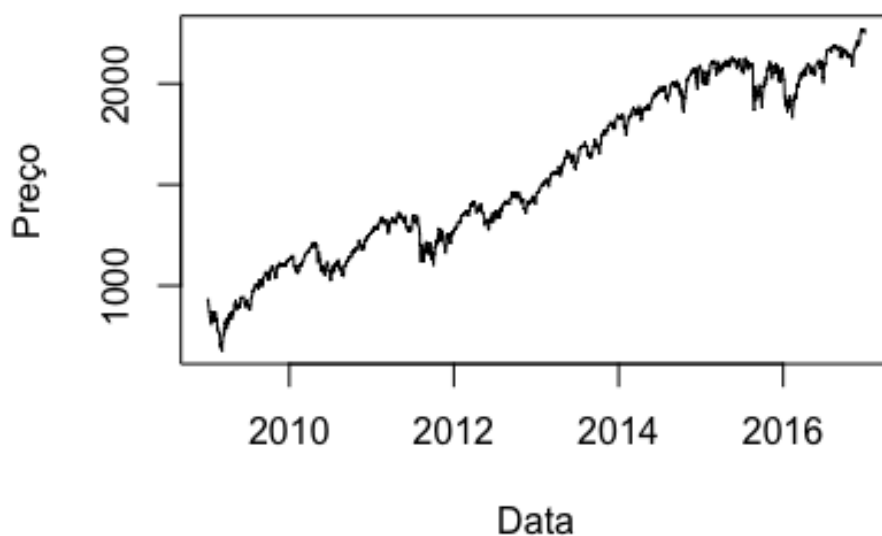
Em que n_{ij} é o número de observações com o valor i seguido de j e $\pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$.

O procedimento de *backtesting* da ES feito nesse trabalho é o mesmo proposto por McNeil e Frey (2000) em seu estudo. Dessa forma, a ES pode ser reescrita como $ES^\alpha(X_t) = VaR^\alpha(X_t) + (ES^\alpha(X_t) - VaR^\alpha(X_t)) = VaR^\alpha(X_t) + K(X_t)$, onde $K(X_t) = ES^\alpha(X_t) - VaR^\alpha(X_t)$. O VaR pode ser testado da forma explicada anteriormente. Assim, dado que o VaR passe no teste de *backtesting*, o componente $K(X_t)$ passa por um *backtesting* usando um teste de média zero, onde a hipótese nula é $K(X_t) \sim i.i.d$, com média 0, e a hipótese alternativa é que $K(X_t)$ não tem média 0.

4 RESULTADOS

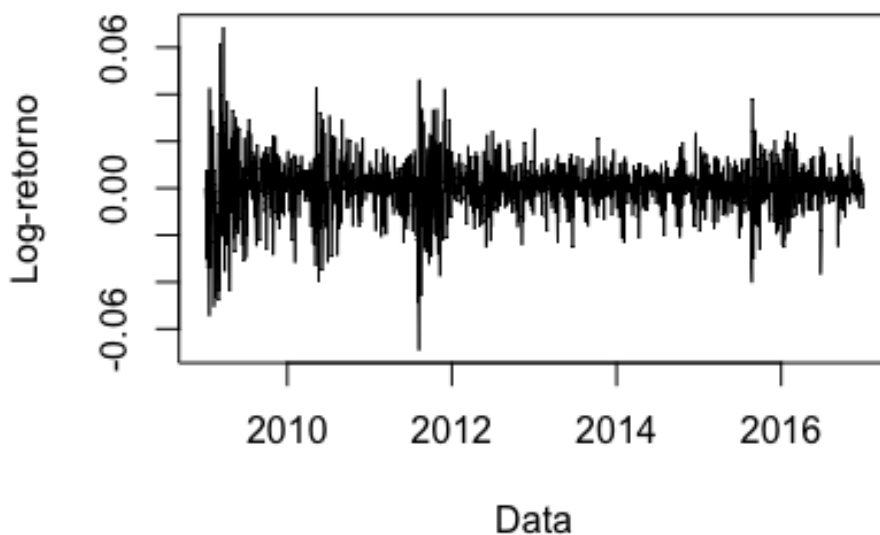
Neste trabalho, foi examinado o índice S&P 500, o qual representa as 500 ações mais importantes do mercado americano. O período analisado foi de 1 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2016, compreendendo 1990 observações diárias. As Figuras 4.1 e 4.2 apresentam a ilustração gráfica da série em nível e dos log-retornos, respectivamente.

Figura 4.1 – Demonstração gráfica dos preços do S&P 500, para o período de 1 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2016



Fonte – Elaborada pelo autor

Figura 4.2 – Demonstração gráfica dos log-retornos do S&P 500, para o período de 1 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2016



Fonte – Elaborada pelo autor

Ao analisar a Figura 4.1, nota-se que os preços do índice apresentam uma tendência crescente, indicando que a série em nível apresenta indícios de não estacionariedade. Já na Figura 4.2, percebem-se períodos de alta volatilidade, como no início de 2009, por exemplo, que coincide com o período do final da crise de 2007-2008. Além disso, há períodos de certa estabilidade, quase sempre seguidos ou precedidos de períodos de instabilidade, fato característico de séries financeiras e que sugerem violação da hipótese de variância constante dos dados.

Para corroborar com a análise descritiva da série, na Tabela 4.1 são descritas estatísticas descritivas dos log-retornos do índice. A assimetria e curtose são de grande importância para modelar eventos extremos na gestão de risco. A assimetria corresponde ao grau de assimetria da distribuição dos dados. Uma distribuição normal possui assimetria zero, ou seja, é simétrica. Já a curtose corresponde ao achatamento da curva da função de distribuição de probabilidade. Uma distribuição normal possui curtose 3, independente de sua média e desvio padrão. Se o grau de curtose for maior do que 3, a distribuição possui caudas grossas, ou seja, é mais provável de eventos

extremos ocorrerem.

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas e testes de diagnóstico dos log-retornos do S&P 500, para o período de 1 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2016

| Estatísticas descritivas | Valores |
|--------------------------|--------------------------|
| Média | 0,000 |
| Desvio Padrão | 0,011 |
| Assimetria | -0,254 |
| Curtose | 4,505 |
| Teste LB ² | 33,781 (0,028) |
| Teste LB ao quadrado | 1257 ($< 2, 2e^{-16}$) |

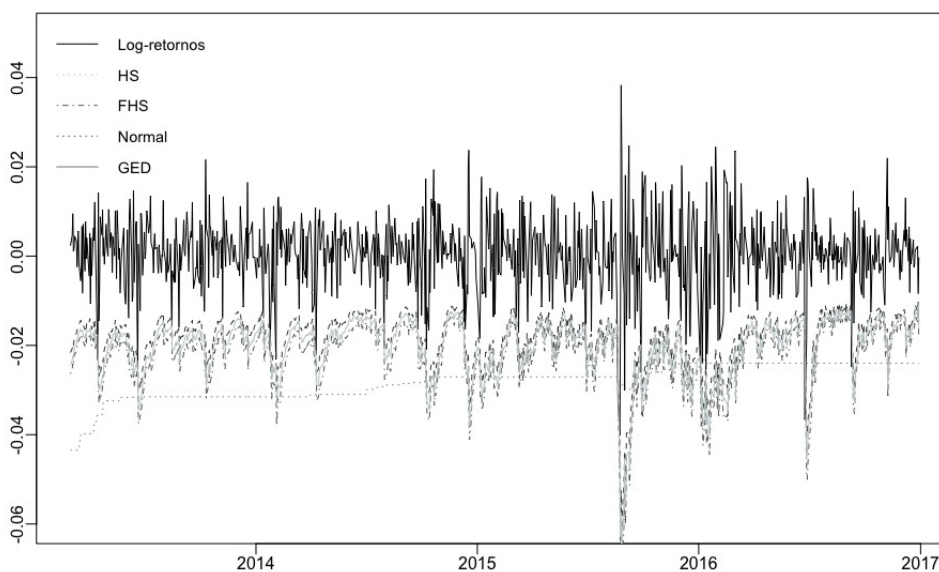
Fonte – Elaborada pelo autor

A média dos retornos do índice S&P 500 é próxima a zero. A assimetria levemente negativa e a curtose de 4,505 indicam que a distribuição dos dados se assemelha, provavelmente, a uma distribuição com caudas mais grossas, comparado a distribuição normal. O teste Ljung-Box aplicado aos log-retornos indica uma dependência entre as observações, enquanto o mesmo teste efetuado nos retornos ao quadrado indica que há presença de heterocedasticidade condicional, ou seja, a variância dos retornos não é constante. Esses resultados retratam a necessidade da utilização de um modelo que capte essas características, como o modelo ARMA-GARCH.

Depois de calcular o VaR e a ES, uma análise gráfica das medidas de risco com várias das distribuições utilizadas é uma boa forma de visualizar os resultados obtidos. Dessa forma, nas Figuras 4.3 e 4.4 abaixo, estão representadas ambas medidas para o quantil 1%. Por questão de brevidade, optamos por apresentar somente uma ilustração gráfica de algumas distribuições utilizadas e, caso seja requisitado, os demais gráficos estão disponíveis para consulta.

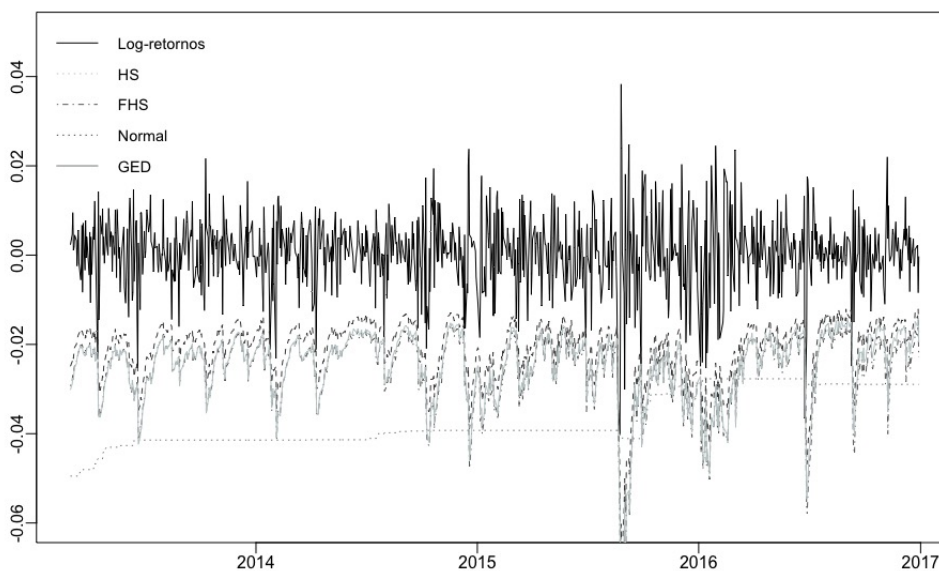
² O teste Ljung-Box (LB) é um teste estatístico que serve para verificar se os dados não possuem autocorrelação, ou seja, se os dados são *i.i.d.* Dessa forma, tem-se que a hipótese nula do teste é: H_0 = dados são *i.i.d.* e a hipótese alternativa é H_1 = dados não são *i.i.d.*

Figura 4.3 – Ilustração gráfica VaR do S&P 500, para o período de 28 de fevereiro de 2013 até 31 de dezembro de 2016



Fonte – Elaborada pelo autor

Figura 4.4 – Ilustração gráfica ES do S&P 500, para o período de 28 de fevereiro de 2013 até 31 de dezembro de 2016



Fonte – Elaborada pelo autor

Assim, pela análise gráfica, percebem-se alguns fatos importantes. Primeiro, as distribuições Empírica, Normal e GED acompanham razoavelmente as turbulências do mercado. Segundo, nota-se que em períodos de alta volatilidade, como nas crises, os níveis de risco são mais elevados. Entretanto, a HS reage mal às altas volatilidades,

uma vez que demora a se recuperar, mantendo um nível conservador de risco. Dessa forma, a técnica de HS superestima o risco em períodos de calma e nos períodos de turbulência subestima o risco, como pode ser observado na ilustração.

Dessa forma, a comparação dos resultados do *backtesting* de forma que se verifique a distribuição mais adequada para se prever o VaR e a ES do S&P 500 é necessária. A hipótese nula do *backtesting* afirma que o número de violações observadas são menores ou iguais do que as violações esperadas. Já a hipótese alternativa afirma que o número de violações observadas é maior que o de observações esperadas. Neste estudo, o *p*-valor do *backtesting* foi usado como critério de comparação das distribuições, sendo que quanto mais longe de zero o valor estiver, mais adequada a distribuição para prever a medida de risco. As Tabelas 4.2 e 4.3 descrevem os resultados obtidos.

Tabela 4.2 – P-valor do *Backtesting* do VaR para o S&P 500, para o período de 28 de fevereiro de 2013 até 31 de dezembro de 2016

| Distribuição | 1% | 2.5% | 5% |
|------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| HS | 0,141 | 0,012 | 0,011 |
| FHS | 0,250 | 0,703 | 0,965 |
| Normal | 0,007 | 0,087 | 0,114 |
| Normal Assimétrica | 0,014 | 0,121 | 0,207 |
| <i>t</i> Student | 0,000 | 0,049 | 0,226 |
| <i>t</i> Student Assimétrica | 0,250 | 0,254 | 0,207 |
| Generalizado do Erro (GED) | 0,236 | 0,121 | 0,082 |
| GED Assimétrica | 0,250 | 0,254 | 0,000 |

Fonte – Elaborada pelo autor

Quanto ao VaR com α de 1%, percebe-se que as distribuições Empírica, Student's *t* Assimétrica e Erro Generalizado Assimétrica, com *p*-valores de 0,250 mostraram-se mais adequadas. Esse resultado vai ao encontro dos resultados discutidos por Harmantzis et al. (2006), Kuester et al. (2006) e Righi e Ceretta (2015), nos quais as distribuições que possuem caudas grossas obtiveram performance superior

nos testes. Já para os VaR com α de 2,5% e 5%, a distribuição FHS, com p -valores de 0,703 e 0,965, respectivamente, obteve a melhor performance com grande disparidade das demais analisadas. Christoffersen e Gonçalves (2005) também verificaram que a distribuição Empírica, através do método FHS, obteve excelentes resultados na previsão do VaR.

Tabela 4.3 – P -valor do *Backtesting* da ES para o S&P 500, para o período de 28 de fevereiro de 2013 até 31 de dezembro de 2016

| Distribuição | 1% | 2.5% | 5% |
|----------------------------|--------------|--------------|--------------|
| HS | 0,923 | 0,646 | 0,903 |
| FHS | 0,203 | 0,204 | 0,461 |
| Normal | 0,014 | 0,002 | 0,003 |
| Normal Assimétrica | 0,069 | 0,026 | 0,015 |
| t Student | 0,738 | 0,748 | 0,954 |
| t Student Assimétrica | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| Generalizado do Erro (GED) | 0,118 | 0,397 | 0,330 |
| GED Assimétrica | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Fonte – Elaborada pelo autor

Diferentemente do VaR, a distribuição que melhor se adequou aos dados para a ES com um α de 1% foi a HS, com um p -valor de 0,923. A distribuição t Student, com p -valor de 0,738, foi a segunda colocada no quesito performance. Esse resultado vai ao encontro com o trabalho de Harmantzis et al. (2006), o qual foi o único dos trabalhos estudados aqui citados onde a HS também teve uma ótima adequação aos dados no que se refere ao *backtesting* da ES. Há uma diferença perceptível desse resultado com os estudos de autores como Kuester et al. (2006), Mabrouk e Saadi (2012), Zhou (2012) e Degiannakis e Potamia (2017), nos quais a distribuição t Student Assimétrica teve melhor colocação. Uma possível explicação a esse fato é que o período analisado e a base de dados são diferentes nos estudos de forma geral. Outra explicação plausível é que a HS teve menor número de violações em comparação com as outras distribuições em análise, em virtude de gerar previsões mais conservadoras, pois o *backtesting*

utilizado é um teste unilateral, que só penaliza a subestimação do risco.

Os *backtesting* da ES com α de 2,5% e 5% tiveram como melhor distribuição a *t* Student, com *p*-valores de 0,748 e 0,954, respectivamente. A HS também obteve bom resultado, com *p*-valores de 0,646 e 0,903. O fato de a *t* Student ser uma distribuição de caudas grossas pode ter sido a razão dela ser a vencedora quanto à performance.

Após a análise do *backtesting*, percebeu-se que o método semi-paramétrico mostrou-se mais adequado, no geral, para se prever o VaR e o método paramétrico obteve melhor performance, no geral, na previsão da ES. Além disso, notou-se que de acordo com o quantil escolhido, o resultado mudou. Para o VaR 1% e a ES 1%, as distribuições que obtiveram melhores resultados não são exatamente as mesmas dos VaR e ES 2,5% e 5%. Righi e Ceretta (2015), em seu estudo, descobriram que há maiores variações nos resultados quando o quantil de interesse é 1% do que quanto é 5%, fato que vai de acordo com os resultados obtidos nesse trabalho.

5 CONCLUSÃO

O objetivo geral deste trabalho foi comparar distribuições no modelo GARCH para prever o VaR e a ES do índice S&P 500. A técnica de HS e o modelo ARMA-GARCH em que z_t segue distribuição Empírica (FHS), Normal, Normal Assimétrica, t Student, t Student Assimétrica, GED e GED Assimétrica foram utilizados. O índice S&P 500, uma janela de estimação de 1000 observações diárias e três intervalos de confiança (1%, 2,5% e 5%) foram considerados para tornar os resultados confiáveis. Para comparar os diferentes modelos o procedimento de *backtesting* foi utilizado.

Na estimação do VaR e ES, o resultado empírico, no geral, mostra que distribuições com caudas grossas, em conjunto com a FHS, se adequam melhor aos retornos financeiros. Para o VaR 1%, as distribuições FHS, t Student Assimétrica e GED Assimétrica tiveram melhor performance. No caso do VaR 2,5% e 5%, a FHS foi a mais adequada. Para a ES 1%, a HS obteve melhor resultado. Já para a ES 2,5% e 5%, a distribuição t Student teve performance superior.

Percebeu-se que dependendo do método e quantil analisados, os resultados se alteram. No geral, o método semi-paramétrico mostrou-se mais adequado para prever o VaR e o método paramétrico mostrou-se melhor na previsão da ES. Além disso, houveram diferenças entre os resultados do quantil 1% do VaR em comparação com os quantis 2,5% e 5%. O mesmo ocorreu com a ES.

Esses resultados são de grande importância para as instituições financeiras, uma vez que elas precisam calcular seu capital mínimo para suportar perdas com base nos valores do risco estimado. Dessa forma, saber a distribuição correta para cada medida de risco e quantil é uma grande vantagem, pois a estimação tem maior acurácia e o volume de capital alocado como segurança do investimento é o mais otimizado possível. Além disso, os demais usuários do mercado financeiro podem usufruir dessas informações em benefício próprio ao negociar o índice S&P 500 para que suas decisões sejam mais assertivas.

Neste trabalho, o índice S&P 500 foi utilizado como base de dados nos cálculos realizados. No entanto, em trabalhos futuros, seria enriquecedor que as distribuições

analisadas nesse estudo fossem testadas com diferentes bases de dados, janelas de observação e intervalos de confiança. Além disso, recomenda-se que trabalhos futuros empreguem Funções de Perda em conjunto com o p -valor para obter resultados mais confiáveis.

REFERÊNCIAS

- ACERBI, C.; TASCHE, D. On the coherence of expected shortfall. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 1487–1503, 2002.
- ANGELIDIS, T.; BENOS, A.; DEGIANNAKIS, S. The use of garch models in var estimation. **Statistical methodology**, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 105–128, 2004.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical finance**, Wiley Online Library, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.
- BARONE-ADESI, G.; BOURGOIN, F.; GIANNOPOULOS, K. Don't look back. 1998.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, 1986.
- CHRISTOFFERSEN, P.; GONÇALVES, S. Estimation risk in financial risk management. **The Journal of Risk**, Incisive Media Limited, v. 7, n. 3, p. 1, 2005.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. Evaluating interval forecasts. **International economic review**, JSTOR, p. 841–862, 1998.
- DANIELSSON, J. **Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk, with Implementation in R and Matlab**. [S.l.]: A John Wiley and Sons, Ltd, Publication, 2011.
- DEGIANNAKIS, S.; FLOROS, C.; DENT, P. Forecasting value-at-risk and expected shortfall using fractionally integrated models of conditional volatility: International evidence. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 27, p. 21–33, 2013.
- DEGIANNAKIS, S.; POTAMIA, A. Multiple-days-ahead value-at-risk and expected shortfall forecasting for stock indices, commodities and exchange rates: Inter-day versus intra-day data. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 49, p. 176–190, 2017.
- DÍAZ, A.; GARCÍA-DONATO, G.; MORA-VALENCIA, A. Risk quantification in turmoil markets. **Risk Management**, Springer, p. 1–23, 2017.
- EMBRECHTS, P.; KAUFMANN, R.; PATIE, P. Strategic long-term financial risks: Single risk factors. **Computational optimization and applications**, Springer, v. 32, n. 1-2, p. 61–90, 2005.
- GIANNOPOULOS, K.; TUNARU, R. Coherent risk measures under filtered historical simulation. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 979–996, 2005.
- HARMANTZIS, F.; MIAO, L.; CHIEN, Y. Empirical study of value-at-risk and expected shortfall models with heavy tails. **The Journal of Risk Finance**, 2006.
- KUESTER, K.; MITTNIK, S.; PAOLELLA, M. Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. **Journal of Financial Econometrics**, 2006.

MABROUK, S.; SAADI, S. Parametric value-at-risk analysis: Evidence from stock indices. **The Quarterly Review of Economics and Finance**, v. 52, p. 305–321, 2012.

MARINELLI, C.; D'ADDONA, S.; RACHEV, S. T. A comparison of some univariate models for value-at-risk and expected shortfall. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, World Scientific, v. 10, n. 06, p. 1043–1075, 2007.

MCNEIL, A. J.; FREY, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. **Journal of empirical finance**, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 271–300, 2000.

PÉRIGNON, C.; SMITH, D. R. The level and quality of value-at-risk disclosure by commercial banks. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 34, n. 2, p. 362–377, 2010.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

RIGHI, M. B.; CERETTA, P. S. A comparison of expected shortfall estimation models. **Journal of Economics and Business**, Elsevier, v. 78, p. 14–47, 2015.

ZHOU, J. Extreme risk measures for reits: A comparison among alternative methods. **Applied Financial Economics**, Taylor & Francis, v. 22, n. 2, p. 113–126, 2012.