Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Problema exterior de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante no espaço hiperbólico

Tese de Doutorado

Adilson da Silva Nunes

Porto Alegre, 28 de novembro de 2017

Tese submetida por Adilson da Silva Nunes[1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll
Professora Co-Orientadora:
Profa. Dra. Patrícia Kruse Klaser

Banca examinadora:
Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos (UFRGS)
Prof. Dr. Ari João Aiolfi (UFSM)
Profa. Dra. Keti Tenenblat (UNB)
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS, ORIENTADOR)
Profa. Dra. Patrícia Kruse Klaser (UFSM, CO-ORIENTADORA)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me conceder forças para superar todas as dificuldades e indicar os caminhos certos a trilhar nessa caminhada.

Agradeço imensamente a minha família por toda estrutura que me proporcionaram para que este momento se tornasse realidade. Vocês foram sempre meu apoio e motivação nos momentos mais difíceis.

Aos colegas da pós, não só pelos momentos de discussões matemáticas, mas também por todos momentos de descontração e companheirismo. Estendo esse agradecimento ao colegas da pós da UFSM que me receberam gentilmente em sua universidade na parte final deste trabalho.

Aos membros da banca por suas valiosas contribuições.

Aos meus orientadores, Jaime e Patrícia, por sempre se mostrarem solícitos em me ajudar e motivar quando necessário. Obrigado por todo aprendizado proporcionado com suas orientações e desafios. Vocês foram mais que orientadores, foram amigos.

A Rosane por estar sempre de portas abertas para nos ajudar no fosse preciso, suavizando nossas burocracias e nos alegrando com suas boas conversas.

Em especial a minha esposa, Juliana Nunes, que foi essencial para que tudo isso acontecesse. Você me apoiou nos momentos mais difíceis e sempre acreditou em mim me mantendo motivado e focado. Obrigado também pela ajuda com as discussões matemáticas e incansáveis revisões na conclusão do trabalho. Foste amiga, companheira de vida e profissional. Sou muito grato a Deus por ter feito meu caminho cruzar com o seu. Essa conquista é nossa.

Agradeço ao Cnpq e Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho mostramos que dado um domínio exterior de classe C^0 contido em uma superfície umbílica de $\mathbb{H}^3$, com curvatura média constante $H \in [0, 1)$, existe uma família de gráficos de Killing com curvatura média constante H. O bordo de cada um destes gráficos está contido nesta superfície umbílica e a norma do gradiente da função no bordo pode ser prescrita por um certo valor $s \geq 0$.

Palavras-chave: Superfícies de curvatura média constante. Espaço hiperbólico. Domínios Exteriores. Gráficos de Killing.

Abstract

In this paper we show that given an exterior domain of class C^0 contained in an umbilical surface of $\mathbb{H}^3$, with constant mean curvature $H \in [0,1)$, there exists a family of Killing graphs with constant mean curvature H. The boundary of each of these graphs is contained in this umbilical surface and the norm of the gradient of the function in the boundary can be prescribed by a certain value $s \geq 0$.

Keywords: Constant mean curvature surfaces. Hyperbolic Space. Exterior domains. Killing graphs.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Uma das áreas da geometria que desperta um grande interesse de estudo é a da teoria das superfícies mínimas. O primeiro matemático, que temos conhecimento, a definir uma superfície mínima foi Lagrange, em 1760. Dizemos que uma superfície é mínima se localmente ela minimiza o funcional área. Isso é equivalente ao fato de sua curvatura média ser identicamente nula.

Superfícies mínimas permitem uma descrição física através das películas de sabão. Isso é feito mergulhando-se uma moldura formada por um arame, em um recipiente com água e sabão, e retirando-a em seguida. O que se mostra é que a película formada assume uma posição onde, em seus pontos regulares, a curvatura média é zero.

Essa conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão, motivou o problema de Plateau , que foi um físico belga que realizou experimentos com películas de sabão por volta de 1850. A formulação do problema pode ser escrita da seguinte forma: dada uma curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$, quer mostrar-se a existência de uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira.

Colocando-se o problema considerado por Plateau no contexto de superfícies do tipo gráfico sobre um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é possível mostrar, através do cálculo das variações, que dada uma função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ temos que se uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_0(u) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} = 0 \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}, \tag{1.1}$$

onde div e grad são, respectivamente, divergente e gradiente de $\mathbb{R}^2$ então o gráfico de u é uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$.

Um dos primeiros grandes avanços no estudo desse problema é devido a Radó (1930). Ele mostrou, em [Ra], que se o domínio Ω for convexo então o problema admite solução para qualquer dado de fronteira contínuo φ. Mais tarde, ele mesmo construiu um exemplo de um domínio Ω não convexo para o qual existe uma função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ que torna o problema (1.1) sem solução. Este exemplo é conhecido como tetraedro de Radó (ver [Ra1]).

Alguns anos após os estudos de Radó, R. Finn (veja [Fi1] e [Fi2]) mostrou a necessidade da convexidade do domínio Ω para que se tenha solução para toda $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Esses dois resultados mostram que se Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$, então o problema (1.1) possui solução para qualquer função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ se e somente se Ω for convexo.

Intimamente relacionado ao problema das superfícies mínimas está o problema das superfícies de curvatura média constante (cmc). De forma análoga ao caso das mínimas, podemos obter o seguinte problema de Dirichlet associado: dados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e H um número real, para cada $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ queremos encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, satisfazendo

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_H(u) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} + 2H = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}. \tag{1.2}$$

Nesse caso, Serrin (1970) mostrou que o problema admite solução para toda $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ se e somente se a curvatura do bordo de Ω é maior ou igual a $2H$.

No caso de domínios do plano que são ilimitados e convexos, R. Sa Earp e

H. Rosenberg [ER] provaram a existência de soluções para dados de fronteira limitados e contínuos, desde que Ω não seja o semiplano. Considerando que Ω é o semiplano, P. Collin e R. Krust [CK] mostraram a existência de soluções para dados de fronteira contínuos com crescimento linear.

Para domínios não convexos e ilimitados existem trabalhos de diversos autores, como por exemplo em [Ni], [ET], [KT] e [RT], onde esse problema é investigado nos chamados *domínios exteriores*, que são domínios cujo complementar é compacto. Em 2001, J. Ripoll [R] mostrou a existência de gráficos mínimos em domínios exteriores de classe C^0 para dados de fronteira nulos através do seguinte resultado, o qual enunciamos em um caso particular

Teorema 1.1. *Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ curvas de Jordan que limitam os domínios fechados $G_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, m$ tal que $G_i \cap G_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Defina*

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_m)$$

e seja $s \geq 0$ dado. Então existe uma função não negativa $u_s \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que é solução de (1.2)*, com $H = 0$ e $\varphi = 0$, tal que*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u_s| = s.$$

Segue que

$$\limsup_{R \to \infty} \frac{\max_{C_R} u_s}{R} < +\infty,$$

onde C_R é o círculo centrado na origem de raio R.

Observe que a condição $\sup_\Omega |\nabla u_s| = s$ mostra que a solução u_s não é, para $s \neq 0$, a solução trivial.

Com desenvolvimento da geometria riemanniana, esses problemas naturalmente começaram a ser investigados em variedades mais gerais que o espaço euclidiano. Uma generalização bem conhecida de gráficos euclidianos é a de gráficos em variedades do tipo $M \times \mathbb{R}$, que são chamados de gráficos verticais. Nesse caso, dado um domínio $\Omega \subset M$ e uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, define-se o gráfico de u como $Gr(u) = \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega)\} \subset M \times \mathbb{R}$. Um resultado nesse contexto pode ser encontrado no trabalho de N. Espírito-Santo e J. Ripoll [EsR] onde os autores mostram o seguinte resultado para gráficos em variedades do tipo $M \times \mathbb{R}$:

Teorema 1.2. *Assuma que M é uma variedade simplesmente conexa e que a curvatura seccional K_M de M satisfaz $K_M \leq -k^2 < 0$ para alguma constante positiva k. Suponha que Ω é um domínio de M satisfazendo a condição da esfera exterior, a saber, dado $p \in \partial\Omega$ existe uma esfera geodésica de M passando por p, tangente a $\partial\Omega$ em p a qual é fronteira de uma bola geodésica contendo Ω^c.*

Dado um número real não negativo s, existe uma solução limitada $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{M}(u) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}, \tag{1.3}$$

onde div *e* grad *são, respectivamente, divergente e gradiente de M, tal que*

$$\lim_{x\to\partial\Omega} \sup |\operatorname{grad} u(x)| = s$$

e

$$\max_{\Omega} |u| \leq \frac{2s}{k}.$$

Outra noção de gráfico bem conhecida na literatura é a de gráfico radial sobre uma esfera $\mathbb{S}^2$. Dizemos que uma superfície suave $G \subset \mathbb{R}^3$ é gráfico radial sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, se existe uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $G = \{u(x)x \mid x \in \Omega\}$. Nesse caso o operador de curvatura média é diferente dos anteriores (ver [FR] para a forma explícita). P. Fusieger e J. Ripoll mostraram, em 2003, que para qualquer domínio Ω contido em um hemisfério de $\mathbb{S}^2$ e φ uma função suave definida em $\partial\Omega$ existe um único gráfico radial com cmc $H \leq 0$ sobre Ω, desde que a curvatura geodésica do bordo, digamos

$k(q)$, satisfaça $k(q) \geq -2H\varphi(q)$ para todo $q \in \partial\Omega$.

Temos ainda o conceito de gráfico geodésico. Para defini-lo de forma mais geral, considere $N \subset M$ uma hipersuperfície totalmente geodésica de M, orientada com campo normal unitário η. Seja $\Omega \subset N$ um domínio de classe C^2. Dada $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ o gráfico geodésico de u é o conjunto $\{\gamma_p(u(p)) \quad | \quad p \in \Omega\}$ onde $\gamma_p : [0, +\infty) \to M$ é a geodésica que satisfaz $\gamma_p(0) = p$ e $\gamma_p'(0) = \eta(p)$.

Foge ao escopo dessa introdução detalhar as diferenças entre o estudo do problema de Dirichlet para gráficos verticais e gráficos geodésicos. Porém, cabe salientar que uma das diferenças fundamentais consiste no fato de que do ponto de vista geométrico é natural que ao transladarmos verticalmente uma solução, ou seja, somarmos uma constante, isso não altere a geometria da solução. Embora esse fato seja verdadeiro para qualquer gráfico vertical, o mesmo não ocorre quando consideramos gráficos geodésicos no espaço hiperbólico por exemplo.

Em 2005, M. Dajczer e J. Ripoll, introduziram o conceito de gráficos de Killing (ver Capítulo 2). Além de generalizar a definição de gráfico euclidiano e gráfico em $M \times \mathbb{R}$, um dos pontos que torna esse trabalho de grande valia é justamente o fato de que ao considerar campos de Killing, a equação associada dependerá apenas das derivadas de u. Em particular, diferentemente do que ocorre em gráficos geodésicos, podemos transladar soluções que elas continuarão sendo soluções. Em [DR] os autores mostram uma generalização do Teorema de Serrin para uma ampla classe de variedades.

No caso do espaço hiperbólico, variedade riemanniana em que esta tese se concentra, existem diferentes noções de gráfico, tanto de Killing como mais gerais. Uma delas é a de gráfico geodésico sobre as horoesferas desse espaço. Aqui, a EDP associada depende de u, e não somente de suas derivadas como no caso dos gráficos de Killing. Nesse contexto, R. López e S. Montiel mostraram, em [LM], que para todo domínio compacto Ω contido em uma horoesfera com bordo convexo em média, isto é, curvatura média do bordo $H_{\partial\Omega}$ não negativa, existe um gráfico sobre Ω com cmc $H \in \mathbb{R}$, desde que $-H_{\partial\Omega} < H \leq 1$.

Um outro tipo de gráfico que existe nesse espaço é aquele associado a campos de Killing hiperbólicos. Um campo de Killing X é chamado hiperbólico se suas trajetórias são hiperciclos ortogonais a uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Considerando certos domínios limitados, em [ALR] os autores mostraram que se $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ é um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ e satisfaz a condição da $H-$hiperesfera exterior, então existe uma única $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e o $X-$gráfico de Killing de u orientado com vetor normal η tal que $\langle \eta, X \rangle \leq 0$ possui curvatura média constante H.

Neste trabalho exibimos uma família de superfícies ilimitadas, do tipo gráfico, de curvatura média constante com bordo contido em superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$. Para isso, consideramos gráficos de Killing hiperbólicos e estudamos o problema exterior de Dirichlet para a equação da curvatura média. Um dos teoremas que provamos é:

Teorema 1.3. *Considere $\mathbb{H}^2$ uma hipersuperfície totalmente geodésica em $\mathbb{H}^3$. Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ um domínio exterior de classe C^0 e γ uma geodésica orientada passando ortogonalmente por $\mathbb{H}^2$, com X sendo o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na orientação de γ. Então, dado um número real $s \geq 0$, existe uma função limitada, não negativa, $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e o $X-$gráfico de Killing de u é uma hipersuperfície mínima de $\mathbb{H}^3$ satisfazendo:*

i) $\limsup_{x \to \partial\Omega} |\operatorname{grad} u(x)| = s$

ii) $\sup_{\Omega} |u| \leq \dfrac{\pi}{4}$.

Além disso, para o caso em que a curvatura média é não nula obtemos:

Teorema 1.4. *Seja E_H uma superfície umbílica de curvatura $H \in (0,1)$ contida em $\mathbb{H}^3$. Considere $\Omega \subset E_H$ um domínio exterior de classe C^0 e γ uma geodésica orientada passando ortogonalmente por E_H, com $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$ o* *campo de Killing hiperbólico tangente a* γ *na orientação de* γ *tal que* $\langle X, \eta \rangle > 0$, *onde* η *é o vetor normal a* E_H. *Então, dado um número real* $s \geq 0$ *existe uma função, não negativa, limitada* $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *tal que o* $Gr_X u$ *possui curvatura média constante* H, $u|_{\partial\Omega} = 0$ *e* $\limsup_{x \to \partial\Omega} |\operatorname{grad} u(x)| = s$.

Até onde os autores sabem, não se tem conhecimento de nenhum resultado para domínios exteriores em variedades, que não considere a noção de gráfico vertical.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 são introduzidos gráficos de Killing em variedades e o operador curvatura média associado. Além disso, apresentamos alguns resultados que usamos nas demonstrações dos teoremas principais.

Depois, no capítulo 3, revisamos o espaço hiperbólico apresentando as superfícies umbílicas e comentando um modelo para tal espaço. Concluímos introduzindo o contexto de que nossos resultados tratam: gráficos de Killing hiperbólicos no espaço hiperbólico.

No capítulo 4 encontramos soluções do tipo radial para domínios exteriores cujo bordo seja um círculo. Após, fazemos uma análise de suas propriedades para que possamos utilizá-las nos teoremas seguintes. Por fim, mostramos resultados de existência em domínios mais gerais.

Referências Bibliográficas

[ALR] Alías, L., López, R., Ripoll, J.: "*CMC Hypersurfaces with Boundary in Hyperbolic Space*" J Geom Anal, 23:2177–2187 (2013).

[CK] Collin, P., Krust, R.:" *Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur de domaines non bornés*", Bull. Soc. Math. de France, 119, p.443-462 (1991).

[dC] do Carmo, M.: "*Geometria Riemanniana*" 3ed. IMPA, (2005).

[DL] Dajczer, M., Lira, J.: "*Killing graphs with prescribed mean curvature and Riemannian submersions* " Ann. I. H. Poincaré – AN 26 763–775, (2009).

[DR] Dajczer, M., Ripoll, J., "*An Extension of a Theorem of Serrin to Graphs in Warped Products* " The Journal of Geometric Analysis Volume 15, Number 2, (2005).

[ER] Earp, R., Rosenberg, H.: "*The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains*", Journal des Math. Pures et Apliquées,68, 163-183,(1989).

[EsR] Espírito-Santo, N., Ripoll, J.:"*Some existence results on the exterior Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation*" Ann. I. H. Poincaré- AN 28 385-393, (2011).

[ET] Earp, R., Toubiana, E.: "*Some applications of maximum principle to hypersurface in euclidean and hyperbolic space*". In: Rassias, T.M. (ed.)

New Approaches in Nonlinear Analysis, pp. 183–202. Hardonic Press (1999).

[Fi1] Finn, R.: "*On Equations of Minimal Surface Type*", Annals of Mathematics, v.60, p.397-416, (1954).

[Fi2] Finn, R.: "*Remarks relevants to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature* J. d'Analyse Mathématique, v.14, p. 139-160, (1965).

[FR] Fusieger, P., Ripoll, J.: " *Radial Graphs of Constant Mean Curvature and Doubly Connected Minimal Surfaces with Prescribed Boundary* Annals of Global Analysis and Geometry 23: 373–400, (2003).

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.: "*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*", Springer-Verlag (1998).

[KT] Kutev, N., Tomi, F.: "*Existence and Nonexistence in the Exterior Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in the Plane*", the Journal of Differential and Integral Equations. 11 , no. 6, 917-928 (1998).

[LM] López, R., Montiel, S.:"*Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*", Calc. Var. 8, 177–190 (1999).

[Ni] Nitsche, J.C.C.: " *Lectures on Minimal Surfaces*", Vol. I, Cambridge University Press, (1989).

[N] Nunes, A.: "*Teoremas de comparação e uma aplicação a estimativa do primeiro autovalor*", Dissertação de Mestrado, UFRGS (2014).

[Ra] Radó, T.: "*The problem of the least area and the problem of Plateau*", Math. Z,v.82, p. 763-796 (1930).

[Ra1] Radó, T.: "*Contributions to the theory of minimal surface*", Acta Litt. Sci. Univ. Szeged, v.6, p. 1-20, (1932).

[R] Ripoll, J.:“*Some existence and gradient estimates of solutions of the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in convex domains*”, Journal of Differential Equations 181, 230–241 (2002).

[RT] Ripoll, J., Tomi.F.: “*On solutions to the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation with catenoidal ends*” Adv. Calc. Var., v. 7, p. 205, (2014).