

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução  $LTS_N$  Nodal: Usando Uma Nova  
Metodologia Para a Determinação da Fuga  
Transversal em Domínio Retangular**

por

Aline da Rosa Parigi

Tese para a obtenção do grau de  
Doutora em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto  
Orientadora

Porto Alegre, 16 de Abril de 2018.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Parigi, Aline da Rosa

Solução  $LTS_N$  Nodal: Usando Uma Nova Metodologia Para a Determinação da Fuga Transversal em Domínio Retangular / Aline da Rosa Parigi.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2018.

76 p.: il.

—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2018.

Orientadora: Segatto, Cynthia Feijó

Qualificação: Matemática Aplicada  
Equação de Transporte, Equações  $S_N$ , Nodal,  $LTS_N$

**Solução  $LTS_N$  Nodal: Usando Uma Nova  
Metodologia Para a Determinação da Fuga  
Transversal em Domínio Retangular**

por

Aline da Rosa Parigi

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientadora: Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva  
COOPE/ UFRJ

Prof. Dr. Bardo Ernest Joseph Bodmann  
PROMEC/ UFRGS

Prof. Dr. Leandro Farina  
PPGMAp/ UFRGS

Prof. Dr. Carlos Hoppen  
Coordenador

## Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	v
LISTA DE TABELAS . . . . .	vi
RESUMO . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	viii
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 SOLUÇÃO $LTS_N$ DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS BIDIMENSIONAL EM ORDENADAS DISCRETAS . . . . .	7
2.1 Equações $S_N$ Integradas Transversalmente . . . . .	7
2.2 O Método $LTS_N$ . . . . .	10
3 REFORMULANDO O MÉTODO $LTS_N$ 2D- DIAGEXP . . . . .	17
3.1 Problema 1 . . . . .	17
3.2 Resultados Numéricos . . . . .	27
3.3 Problema 2 . . . . .	33
3.4 Resultados Numéricos . . . . .	37
4 NOVA PROPOSTA PARA APROXIMAÇÃO DOS FLUXOS ANGULARES DESCONHECIDOS NOS CONTORNOS . . . . .	48
4.1 Aproximação $LTS_N$ unidimensional . . . . .	48
4.2 Resultados Numéricos . . . . .	53
5 CONCLUSÃO . . . . .	66
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	68

## Lista de Figuras

Figura 2.1	Representação das direções discretas para $N=4$ . . . . .	9
Figura 3.1	Representação geométrica do domínio, problema I. . . . .	18
Figura 3.2	Representação geométrica do domínio, problema 2. . . . .	33
Figura 4.1	Representação da varredura no sentido horizontal . . . . .	49

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.5cm$ . . . . .	29
Tabela 3.2	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.7cm$ . . . . .	30
Tabela 3.3	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.98cm$ . . . . .	31
Tabela 3.4	$\hat{\Psi}_y(x)$ considerando $\sigma_s = 0.5$ obtidos via $LTS_N$ 2D- Exponencial	32
Tabela 3.5	Fluxos Escalares para $x = y = 0.5cm$ , Problema 2. . . . .	39
Tabela 3.6	Fluxos Escalares para $x = y = 0.7cm$ , Problema 2. . . . .	40
Tabela 3.7	Fluxos Escalares para $x = y = 0.98cm$ , Problema 2. . . . .	41
Tabela 3.8	$\hat{\Psi}_y(x)$ considerando $\sigma_s = 0.5$ e $N = 2$ - Problema 2. . . . .	42
Tabela 3.9	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.5cm$ , Problema 3. . . . .	46
Tabela 4.1	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.5cm$ considerando 10, 20, 30, 40 e 50 retas na varredura . . . . .	55
Tabela 4.2	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.7cm$ considerando 10, 20, 30, 40 e 50 retas . . . . .	56
Tabela 4.3	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.98cm$ considerando 10, 20, 30, 40 e 50 retas . . . . .	57
Tabela 4.4	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.5cm$ . . . . .	58
Tabela 4.5	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.7$ . . . . .	59
Tabela 4.6	Fluxos Escalares $\hat{\Phi}_y(x)$ para $x = 0.98$ . . . . .	60
Tabela 4.7	Fluxos angulares médios, $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que $N=2$ , considerando $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via $LTS_N$ 2D- $LTS_N$ 1D . . . . .	61
Tabela 4.8	Fluxos angulares médios, $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que $N=4$ , considerando $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via $LTS_N$ 2D- $LTS_N$ 1D . . . . .	62
Tabela 4.9	Fluxos angulares médios, $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que $N=6$ , considerando $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via $LTS_N$ 2D- $LTS_N$ 1D . . . . .	63
Tabela 4.10	Fluxos angulares médios, $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que $N=6$ , considerando $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via $LTS_N$ 2D- $LTS_N$ 1D . . . . .	64

## RESUMO

Na literatura, uma grande variedade de soluções são encontradas para a equação  $S_N$  nodal de nêutrons em domínio retangular, cuja principal ideia consiste na integração transversal da equação  $S_n$ . Este procedimento resulta em equações  $S_N$  unidimensionais acopladas, por funções desconhecidas adicionais, ou seja, o fluxo angular na fronteira. Com a finalidade de resolver estes problemas pelos métodos clássicos para o problema  $S_N$  em uma placa, devemos pressupor o fluxo angular de saída na fronteira. Na literatura, normalmente, o fluxo angular de saída é considerado como funções constante ou de decaimento exponencial. Neste ponto, é importante ressaltar que as soluções encontradas por esta metodologia apresentam alguns resultados físicos inconsistentes para o fluxo angular na fronteira (fluxos negativos), mas não para fluxo escalar. Para superar esta desvantagem e também facilitar a aplicação das condições de contorno, nesta tese é proposta uma nova abordagem. O problema no retângulo é varrido por um conjunto discreto finito de retas características, de modo que em cada reta da varredura será considerado o problema de transporte de nêutrons unidimensional. Assim, aplicando o método  $LTS_N$  associado a técnica DNI("Inclusão de Nós Fictícios") para interpolar as direções do problema bidimensional através das direções unidimensionais, é agora possível obter o fluxo angular na fronteira através da solução  $LTS_N$  unidimensional nos pontos desejados. Simulações numéricas e comparações com os resultados da literatura são relatados.

## ABSTRACT

In the literature, a great variety of solutions are found to the neutron nodal  $S_N$  equation in rectangular domain, whose main idea consists of the transverse integration of the  $S_N$  equation. This procedure results in coupled one-dimensional  $S_N$  equations, by additional unknown functions, that is, the angular flow at the border. In order to solve these problems using the classical methods to the  $S_N$  problem in a sheet, we must presuppose the output angular flow at the border. In the literature, usually, the output angular flow is considered as a constant or exponential decreasing function. At this point, it is important to point out that the solutions found with this method present some inconsistent physical results for the angular flow at the border (negative flows), but not for the scalar flow. To overcome this disadvantage and also to facilitate the application of the boundary conditions, a new approach is proposed in this work. The problem in the rectangle is swept by a finite discrete set of characteristic lines, so that in each line of the sweep will be considered the one-dimensional neutrons problem. So, by applying the  $LTS_N$  method, combined with the DNI technique in order to interpolate the directions of the two-dimensional problem by means of one-dimensional directions, it is possible now to obtain the angular flow in the border with the one-dimensional  $LTS_N$  solution on the desired points. Numerical simulations and comparisons with the results found in literature are presented.



# 1 INTRODUÇÃO

A equação de transporte representa as mudanças na densidade de partículas em um meio material. Descreve quantitativamente a distribuição espacial, direcional, energética e temporal de partículas Garcia [16]. Consiste, na maioria dos casos, em uma equação integro-diferencial linear dependente de sete variáveis, três espaciais  $(x, y, z)$ , duas angulares  $(\theta, \phi)$ , uma energética  $(E)$  e uma temporal  $(t)$ . É crescente o interesse em resolver problemas de transporte de partículas devido a sua aplicabilidade em diversas áreas, como engenharia e física médica, como por exemplo no cálculo de dose em radioterapia, em engenharia nuclear tanto no cálculo de blindagem como criticalidade de um reator nuclear e até mesmo em climatologia e sensoriamento remoto Segatto [42]. Existem na literatura muitos métodos de solução da equação de transporte, entre eles encontramos: Monte Carlo,  $F_N$ , SGF- $S_N$ ,  $LTP_N$ , ADO e  $LTS_N$ .

A aproximação  $S_N$  da equação de transporte é obtida através da aproximação do termo integral por quadratura Gaussiana de ordem  $N$  e da aplicação do método da colocação, usando como função teste a delta de Dirac e os pontos de colocação como o conjunto de direções discretas utilizadas na quadratura. Deste procedimento resulta um sistema de equações diferenciais ordinárias nas direções consideradas, que são as chamadas equações  $S_N$ . O método  $LTS_N$  Barichello [2], Vilhena e Barichello [57], surge na década de 90 e é tornado operacional nos anos seguintes com os trabalhos de Segatto [39] e Gonçalves et. al. [18] com o objetivo de resolver analiticamente as equações  $S_N$ . Historicamente, o método  $LTS_N$  aplica a transformada de Laplace na variável espacial do sistema  $S_N$ , fornecendo um sistema algébrico de  $N$  equações e  $N$  incógnitas que é resolvido analiticamente. O fluxo angular é determinado pela aplicação da transformada Inversa de Laplace.

Este método teve sua convergência provada por Pazos et. al. [28] e Pazos et. al. [29], demonstrando que à medida que  $N$  cresce a solução  $LTS_N$  se aproxima da solução exata de Case. O método  $LTS_N$  tem sido aplicado em diversos problemas de transporte, entre estes citamos resolução de problemas unidimensionais em meios homogêneos Gonçalves et. al. [18] e heterogêneos Segatto et. al. [45], Tavares [48], resolução de problemas meios compostos por dois materiais em um sistema de mistura aleatória Vasques [55], também foram considerados a solução de problemas envolvendo modelos com multigrupo de energia Tomaschewski [51]. Problemas que envolvem elevada ordem de quadratura e grandes espessuras Segatto et. al. [39], Gonçalves et. al [18] cuja resolução utiliza mudança de variável e aplicação da técnica de diagonalização para inversão da matriz associada elimina o problema de overflow para grandes domínios. Foram considerados casos onde  $N$  é inteiro, no qual Bonemberger [8] procura a influência da singularidade existente na direção  $\mu = 0$  no comportamento da solução, apresentando um estudo da solução para  $N$  ímpar. Foram estudados também modelos de variável angular contínua Segatto e Vilhena [38]. Já Marona et. al. [25] investigam problemas cuja razão de espalhamento é igual a um, situações nas quais a equação de transporte unidimensional apresenta dois autovalores que se encontram no infinito. Problemas com dependência temporal Tomaschewski [51], Rens[33], Oliveira et. al. [27], Segatto et. al. [40], em seu trabalho Tomaschewski [51] aplica a Transformada de Laplace na variável temporal. O método  $LTS_N$  foi utilizado para encontrar a solução de problemas de transporte com ou sem simetria azimutal Segatto e Vilhena [41], Segatto [42], em problemas de engenharia nuclear, como cálculo de cricalidade Batistela e Vilhena [6], Batistela e Vilhena [7], a equação de cinética espacial na teoria de transporte Tomaschewski [52] e em problema de transferência radiativa Segatto et. al. [43], bem como a solução de problema não linear radioativo-condutivo Segatto et. al. [44] e problemas que consideram o coeficiente de albedo com dependência espacial Vargas et. al. [54].

Recentemente Foletto [15] utilizou a formulação  $LTS_N$  para resolver problemas anisotrópicos através de um processo recursivo a partir do problema isotrópico, onde a anisotropia é introduzida como termo de fonte em meios homogêneos e heterogêneos. Já Rigolli [34] em seu trabalho apresenta uma proposta não espectral do método  $LTS_N$  para a solução de problemas de transporte unidimensionais considerando espalhamento anisotrópico, decompondo a matriz  $LTS_N$  simbólica em uma soma de sua diagonal principal e o seu complementar e utilizando a abordagem recursiva para encontrar a solução de problemas anisotrópicos desenvolvida por Foletto [15], Rigolli [34] evita dessa maneira o cálculo de autovalores da matriz  $LTS_N$ .

A formulação  $LTS_N$  também já foi estendida a problemas multidimensionais, problemas em geometria bidimensional convexa Zabadal et. al. [61], geometria catenária (2D e 3D) Zabadal et. al. [60], Hauser [19], Hauser [20], Segatto et. al. [46]. A convergência do método  $LTS_N$  em problemas multidimensionais também foi demonstrada por Hauser et. al. [21]. Em seu trabalho Hauser [19], [20] resolve o problema de transporte bidimensional e tridimensional para espalhamento isotrópico, com fonte fixa sem dependência do tempo em meios homogêneos e heterogêneos, através de uma combinação dos esquemas nodais com o método  $LTS_N$ .

Os métodos nodais, destacam-se no tratamento de problemas de transporte multidimensionais, e baseiam-se na integração transversal das equações  $S_N$  em cada uma das variáveis espaciais. Este procedimento permite a resolução analítica das equações  $S_N$  integradas transversalmente, fazendo o uso de aproximações para os termos de fuga transversal desconhecidos, que surgem através do processo de integração das equações  $S_N$ , e para o termo de fonte de espalhamento. Os métodos nodais podem ser classificados em dois grupos, os métodos nodais polinomiais, que aproximam os termos de fuga transversal desconhecidos e o termo de fonte de espalhamento por polinômios de baixa ordem e os métodos espectralnodais, estes também aproximam os termos de fuga transversal por polinômios de baixa ordem, diferenciando-se dos métodos nodais polinomiais por tratarem do termo de fonte

de espalhamento analiticamente. Dentre os representantes dos métodos nodais polinomiais temos os métodos *CCN*-(Constant-Constant-Nodal) Walters e O'Dell [58]- os termos de fuga transversal são aproximados por constantes, e *LN*-(Linear-Nodal) Walters [59] no qual os termos de fuga transversal são aproximados por polinômios de primeiro grau. Já no grupo dos métodos espectralnodais, destacam-se os métodos *SGN-CN*-(Spectro Green's Function Constant Nodal) Barros e Larsen [5], que aproxima os termos de fuga transversal por constantes, o *SGN-LN* -(Spectro Green's Function Linear Nodal) Dominguez [14] . Neste método os termos de fuga transversal são aproximados por polinômios de primeiro grau enquanto o método *SGN-ExpN*-(Spectro Green's Function Exponential Nodal) Mello e Barros [26] utiliza aproximação por funções exponenciais com constante de decaimento baseada na física de problemas de penetração profunda.

Recentemente o método ADO foi utilizado para o tratamento das equações integradas transversalmente. Para esta formulação já foram utilizados vários tipos de aproximações para os termos de fuga transversal, como constante Tres [50], fluxos desconhecidos aproximados pelos fluxos médios Picoloto [30], equações auxiliares escritas em termos das auto-funções e das constantes de separação do problema homogêneo Prolo [32].

Com o objetivo de aprimorar o método apresentado por Hauser [19] para o tratamento de problemas de transporte em geometria cartesiana bidimensional, desenvolveu-se neste trabalho uma reformulação do referido método. Integrou-se transversalmente a equação  $S_N$  de transporte bidimensional, obtendo-se duas equações unidimensional de transporte dependentes da variáveis  $x$  e  $y$ . Estas equações são resolvidas analiticamente nas variáveis espaciais através do método  $LTS_N$  , enquanto que para os termos de fuga transversal utiliza-se aproximações do tipo exponencial com constante de decaimento igual a seção macroscópica de absorção, da mesma maneira que Hauser [19] em seu trabalho. Os trabalhos se distinguem pela maneira de determinar o sistema linear obtido pela aplicação do método  $LTS_N$  , sendo que

Hauser [19] obtém um sistema de  $6M$  equações para a determinação do fluxo angular médio enquanto neste trabalho obtem-se  $4M$  equações. Resultados numéricos para esta nova formulação são apresentados. Observa-se nos fluxos angulares obtidos no interior da placa, bidimensional homogênea, valores negativos, o que não é fisicamente incorreto. Estes problemas surgem pela suposição de exponenciais, constante ou polinômios para os fluxos angulares na fronteira.

Dentro deste contexto apresentamos neste trabalho uma nova abordagem para o tratamento dos fluxos desconhecidos nos contornos. Tal abordagem consiste na varredura do domínio bidimensional através de retas características, de forma que em cada reta será considerando o problema de transporte unidimensional, desta forma os fluxos angulares desconhecidos nos contornos serão aproximados pela solução  $LTS_N$  unidimensional no contorno de cada reta desta varredura. Observamos através dos resultados numéricos a validade do método e destacamos a simplificação e a redução do sistema linear obtido pela aplicação do método  $LTS_N$  para a determinação do fluxo angular médio, uma vez que nas abordagens anteriores obtinhamos sistemas lineares com  $6M$  ou  $4M$  equações, enquanto que para esta formulação basta que se resolvam dois sistemas lineares com  $M$  equações cada.

Dessa maneira, apresenta-se no próximo capítulo, a equação de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional, considerando espalhamento isotrópico, um grupo de energia, sem dependência temporal e com fonte fixa em sua versão de ordenadas discretas, juntamente com a quadratura utilizada. Em seguida apresentamos as equações  $S_N$  unidimensionais integradas transversalmente. A solução das equações unidimensionais integradas transversalmente é apresentada após a aplicação do método  $LTS_N$ . No capítulo 3 apresentamos os cálculos para a determinação da solução  $LTS_N$  2D- DiagExp e posteriormente os resultados numéricos de dois problemas descritos por Tsay [53]. No capítulo 4, descrevemos a nova metodologia e a formulação da utilização do método  $LTS_N$  unidimensional para

aproximar os fluxos desconhecidos nos contornos juntamente com resultados obtidos e comparados com os encontrados na literatura.

## 2 SOLUÇÃO $LTS_N$ DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS BIDIMENSIONAL EM ORDENADAS DISCRETAS

No decorrer deste capítulo apresenta-se a formulação matemática utilizada para o tratamento de problemas de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional, para nêutrons mono-energéticos.

### 2.1 Equações $S_N$ Integradas Transversalmente

Consideramos o problema de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional em ordenadas discretas, com espalhamento isotrópico e um grupo de energia em meio homogêneo:

$$\mu_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x}(x, y) + \eta_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial y}(x, y) + \sigma_t \Psi_m(x, y) = Q_m(x, y) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \Psi_m(x, y, ) \quad (2.1)$$

cujas condições de contorno são:

$$\begin{aligned} \Psi_m(0, y) &= f_m(y), & \mu_m &> 0 \\ \Psi_m(a, y) &= g_m(y), & \mu_m &< 0 \\ \Psi_m(x, 0) &= h_m(x), & \eta_m &> 0 \\ \Psi_m(x, b) &= l_m(x), & \eta_m &< 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $m = 1 : M$ , para  $M = \frac{N(N+2)}{2}$ ;

$(x, y) \in \mathfrak{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq a \text{ e } 0 \leq y \leq b\}$ ;

$\hat{\Omega}_m(\mu_m, \eta_m)$ ;

$N$  é a ordem da quadratura angular;

$M$  é o número total de direções discretas;

$\sigma_t(x, y)$  a seção de choque macroscópica total;

$\sigma_s(x, y)$  a seção de choque macroscópica de espalhamento;

$Q_m(x, y) \equiv Q(x, y, \hat{\Omega}_m)$  fonte de nêutrons no ponto  $(x, y)$  no domínio;

$\Psi_m(x, y) \equiv \Psi_m(x, y, \hat{\Omega}_m)$  fluxo angular de partículas na direção  $\hat{\Omega}_m$  e posição  $(x, y)$ ;

$\omega_m$  é o peso da quadratura angular.

Utiliza-se neste trabalho a Quadratura Simétrica de Nível (*Level Symmetric Quadratura- LQ<sub>N</sub>*). Esta quadratura é formada pelo conjunto de valores  $(\omega_m, \hat{\Omega}_m)$ , onde  $\hat{\Omega}_m = (\mu_m, \eta_m)$  representa a direção discreta e  $\omega_m$  é o peso associado a direção  $m$ .

Essa quadratura apresenta simetria rotacional completa, isto é, as direções são invariantes sob qualquer rotação de  $90^\circ$  Jenal et. al. [22], Lewis and Miller [24], Cacuci [9]. Assim cada conjunto de coordenadas deve ser simétrico em relação a origem, ademais o conjunto de pontos em cada eixo é o mesmo. O número de direções, formadas a partir da combinação de cossenos diretores  $\mu, \eta$ , para o caso bidimensional é igual a  $\frac{N(N+2)}{2}$ . Os valores do cossenos diretores em cada eixo são dados por

$$\mu_i^2 = \mu_1^2 + (i-1) \frac{2(1-3\mu_1^2)}{N-2}; \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{2} \quad (2.3)$$

onde  $\mu_1$  é a projeção do primeiro ponto,  $0 \leq \mu_1^2 \leq \frac{1}{3}$ , [9]. A escolha de  $\mu_1$  é arbitrária exceto para o caso  $S_2$  em que  $\mu_1^2 = \frac{1}{3}$ .

Além disso, nesta quadratura os pesos são normalizados, de forma que em cada quadrante temos:

$$\sum_{n=1}^{\frac{N(N+2)}{8}} \omega_n = 1 \quad (2.4)$$

de forma que quando  $N = 2$ , como temos apenas uma direção por quadrante, tem-se apenas um valor por quadrante e este deve ser igual a 1, de forma a satisfazer a



equação (2.4). Para  $N = 4$ , temos três direções por quadrante e consequentemente  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.3$ , seguindo analogamente para os demais valores de  $N$ .

A figura (2.1) exibe as direções discretas e o ordenamento que utilizou-se neste trabalho, em conformidade com o ordenamento utilizado por Barros [3], para  $N=4$ , com ordenação crescente em sentido anti-horário nos quadrantes ímpares e sentido horário nos quadrantes pares. O conjunto de valores das direções da quadratura angular com simetria de nível, utilizada neste trabalho, é apresentada em Lewis and Miller [24], bem como a configuração da distribuição de pesos.

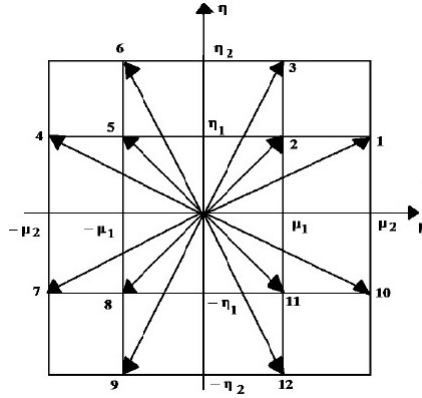


Figura 2.1: Representação das direções discretas para  $N=4$ .

É importante observar que ao aumentar a ordem da quadratura ( $N > 20$ ), pesos negativos começam a aparecer, Lewis and Miller [24]. No entanto, outras quadraturas existem e podem ser usadas no problema, como pode ser verificado em Tres [50]. Em conformidade com o disposto na figura (2.1), o ordenamento das direções discretas para as equações nodais, considerado neste trabalho para:

- ◇  $m = 1, \frac{M}{4}$  as direções são definidas como  $(\mu_m > 0, \eta_m > 0)$ ;
- ◇  $m = \frac{M}{4} + 1, \frac{M}{2}$  as direções são definidas como  $(\mu_m < 0, \eta_m > 0)$ ;
- ◇  $m = \frac{M}{2} + 1, \frac{3M}{4}$  as direções são definidas como  $(\mu_m < 0, \eta_m < 0)$ ;
- ◇  $m = \frac{3M}{4} + 1, M$  as direções são definidas como  $(\mu_m > 0, \eta_m < 0)$

As equações  $S_N$  integradas transversalmente são obtidas como se segue. Integrando a equação (2.1) em relação a  $x$  de 0 a  $a$  e multiplicando por  $\frac{1}{a}$ , obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias que dependem apenas da variável  $y$ :

$$\eta_m \frac{d\tilde{\Psi}_{x_m}}{dy}(y) + \frac{\mu_m}{a} [\Psi_m(a, y) - \Psi_m(0, y)] + \sigma_t \tilde{\Psi}_{x_m}(y) = Q_{xm}(y) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\Psi}_{x_n}(y), \quad (2.5)$$

onde:

$$\tilde{\Psi}_{x_m}(y) \equiv \frac{1}{a} \int_0^a \Psi_m(x, y) dx, \quad (2.6)$$

$$Q_{xm}(y) \equiv \frac{1}{a} \int_0^a Q_m(x, y) dx, \quad (2.7)$$

$\Psi_m(0, y)$  e  $\Psi_m(a, y)$  são as condições de contorno do problema, equações (2.2), para  $m = 1, M$ .

Procedendo de maneira análoga, integramos a equação (2.1) em relação a  $y$  de 0 a  $b$  e multiplicando por  $\frac{1}{b}$ , obtemos:

$$\mu_m \frac{d\hat{\Psi}_{y_m}}{dx}(x) + \frac{\eta_m}{b} [\Psi_m(x, b) - \Psi_m(x, 0)] + \sigma_t \hat{\Psi}_{y_m}(x) = Q_{ym}(x) + \frac{\sigma_s}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\Psi}_{y_n}(x) \quad (2.8)$$

onde:

$$\hat{\Psi}_{y_m}(x) \equiv \frac{1}{b} \int_0^b \Psi_m(x, y) dy, \quad (2.9)$$

$$Q_{ym}(x) \equiv \frac{1}{b} \int_0^b Q_m(x, y) dy \quad (2.10)$$

$\Psi_m(x, 0)$  e  $\Psi_m(x, b)$  são também condições de contorno do problema, equações (2.2), para  $m = 1, M$ .

## 2.2 O Método $LTS_N$

Desenvolvido na década de 90, o método  $LTS_N$  fornece a solução analítica da aproximação  $S_N$  da equação de transporte. Esse método baseia-se na aplicação da Transformada de Laplace na variável espacial no conjunto de equações

$S_N$ , obtendo-se um sistema algébrico para o fluxo transformado, no qual aplica-se a Transformada Inversa de Laplace, que nos fornece a expressão analítica da solução das equações  $S_N$ .

O método  $LTS_N$  já foi utilizado na resolução de problemas de transporte bidimensional, Hauser [19] em seu trabalho utiliza o método  $LTS_N$  para determinar a solução de um problema de transporte bidimensional com espalhamento isotrópico em meios homogêneos, construindo dois métodos que se diferenciam pelo tratamento dos termos de fuga transversal. São eles: o método  **$LTS_N$  2D-Diag** onde os termos de fuga transversal são expressos como combinação linear dos autovetores multiplicados por exponenciais dos respectivos autovalores associados a matriz  $LTS_N$ , e o método  **$LTS_N$  2D-DiagExp**, onde os termos de fuga transversal são aproximados por funções exponenciais com constante de decaimento determinada por características do meio material.

Para ambos os métodos é necessário resolver um sistema linear compatível de  $6M$  incógnitas, obtidas a partir da definição dos fluxos angulares médios em  $x = a$  e  $y = b$  e da aplicação das condições de contorno. O método  **$LTS_N$  2D-DiagExp** é estendido para meios heterogêneos em Hauser [20], onde também é construído um novo método para o tratamento de problemas de transporte tridimensionais em meios homogêneos e heterogêneos, denominado método  $LTS_N$  3D-DiagExp.

Neste trabalho propõem-se mudanças no método  **$LTS_N$  2D-DiagExp**, o que permitiu uma redução no número de incógnitas do sistema linear que é preciso resolver para determinar a solução  $LTS_N$  das equações  $S_N$  integradas. A saber, considerou-se que as equações que compõem o sistema linear são obtidas a partir da definição dos fluxos angulares médios nos contornos, desta maneira obteve-se um sistema linear compatível de  $4M$  equações ao invés de  $6M$  equações, o que possibilita um ganho computacional expressivo a medida que aumentamos a ordem de quadratura  $N$  e conseqüentemente o valor de  $M$ .

A fim de encontrarmos as soluções das equações (2.5) e (2.8) através do método  $\text{LTS}_N$ , vamos reescrevê-las matricialmente da seguinte maneira:

$$\frac{d\tilde{\Psi}_x}{dy}(y) - \mathbf{A}_y \tilde{\Psi}_x(y) = \mathbf{Z}(y) \quad (2.11)$$

e

$$\frac{d\hat{\Psi}_y}{dx}(x) - \mathbf{A}_x \hat{\Psi}_y(x) = \mathbf{S}(x) \quad (2.12)$$

onde:

- $\mathbf{A}_x$  e  $\mathbf{A}_y$  são matrizes quadradas de ordem  $M$  cujas componentes são, respectivamente dadas por:

$$\mathbf{A}_x(i, j) = \begin{cases} \frac{-\sigma_t}{\mu_i} + \frac{\sigma_s \omega_j}{4\mu_i}, & \text{se } i = j \\ \frac{\sigma_s \omega_j}{4\mu_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e

$$\mathbf{A}_y(i, j) = \begin{cases} \frac{-\sigma_t}{\eta_i} + \frac{\sigma_s \omega_j}{4\eta_i}, & \text{se } i = j \\ \frac{\sigma_s \omega_j}{4\eta_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- $\tilde{\Psi}_x(y)$  e  $\hat{\Psi}_y(x)$  são vetores de ordem  $M$ , de modo que  $\tilde{\Psi}_x(y)$  e  $\hat{\Psi}_y(x)$  representam o fluxo médio em  $x$  e em  $y$ , respectivamente;
- $\mathbf{Z}(y) \equiv Q_{xm}(y)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{a}\mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}[\Psi(a, y) - \Psi(0, y)]$ ,
- $\mathbf{S}(x) \equiv Q_{ym}(x)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{b}\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}[\Psi(x, b) - \Psi(x, 0)]$ ,
- $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  são matrizes diagonais de ordem  $M$  cujas componentes são as direções discretas  $\mu_m$  e  $\eta_m$ , respectivamente, com  $m = 1 : M$ ;
- $\mathbf{1}$  é um vetor de ordem  $M$  cujas componentes são todas iguais a 1.

- $\Psi(a, y), \Psi(0, y)$  são as condições de contorno do problema bidimensional em  $x = a$  e  $x = 0$ , respectivamente.
- $\Psi(x, b), \Psi(x, 0)$  são as condições de contorno do problema bidimensional em  $y = b$  e  $y = 0$ , respectivamente.

A resolução dos problemas (2.5) e (2.8) pelo método  $LTS_N$  se dá aplicando a Transformada de Laplace nas variáveis espaciais das equações diferenciais ordinárias representadas pelos sistemas matriciais (2.11) e (2.12), respectivamente, de onde obtemos dois sistemas lineares de ordem  $M$ , dependentes do parâmetro  $s$ :

$$(sI - \mathbf{A}_y)\overline{\tilde{\Psi}_x}(s) = \overline{\mathbf{Z}(s)} + \tilde{\Psi}_x(0) \quad (2.13)$$

e

$$(sI - \mathbf{A}_x)\overline{\hat{\Psi}_y}(s) = \overline{\mathbf{S}(s)} + \hat{\Psi}_y(0), \quad (2.14)$$

onde:

- $s$  é um parâmetro complexo;
- $I$  a matriz identidade de ordem  $M$ ;
- $\overline{\hat{\Psi}_y}(s) = \mathcal{L}\{\hat{\Psi}_y(x)\}$  ;
- $\overline{\tilde{\Psi}_x}(s) = \mathcal{L}\{\tilde{\Psi}_x(y)\}$ ;
- $\overline{\mathbf{S}(s)} = \mathcal{L}\{\mathbf{S}(x)\}$  ;
- $\overline{\mathbf{Z}(s)} = \mathcal{L}\{\mathbf{Z}(y)\}$ ;
- $\mathcal{L}\{.\}$  o operador Transformada de Laplace.

Resolvendo as equações (2.13) e (2.14) temos:

$$\overline{\tilde{\Psi}}_x(s) = (sI - \mathbf{A}_y)^{-1}[\overline{\mathbf{Z}}(s) + \tilde{\Psi}_x(0)] \quad (2.15)$$

e

$$\overline{\hat{\Psi}}_y(s) = (sI - \mathbf{A}_x)^{-1}[\overline{\mathbf{S}}(s) + \hat{\Psi}_y(0)]. \quad (2.16)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace em (2.15) e (2.16) obtemos a expressão da solução para o fluxo angular médio transformado em  $y$  e  $x$ , respectivamente:

$$\tilde{\Psi}_x(y) = \mathbf{Y}e^{\mathbf{E}^*(y)U} + \mathbf{Y}e^{\mathbf{E}y}\mathbf{Y}^{-1} * \left[ Q_x(y)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{a}\mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}(\Psi(a, y) - \Psi(0, y)) \right] \quad (2.17)$$

$$\hat{\Psi}_y(x) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^*(x)W} + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} * \left[ Q_y(x)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{b}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\Psi(x, b) - \Psi(x, 0)) \right] \quad (2.18)$$

onde:

- \* indica a convolução matricial;
- $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_M\}$ ,  $d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , os  $M$  autovalores da matriz  $\mathbf{A}_x$ ;
- $\mathbf{D}(x) = \text{diag}\{d_1x, d_2x, \dots, d_Mx\}$ ;
- $\mathbf{D}^*(x) = \begin{cases} d_ix & \text{se } d_i < 0 \\ d_i(x - a) & \text{se } d_i > 0 \end{cases}$
- $\mathbf{E} = \text{diag}\{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ ,  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , os  $M$  autovalores da matriz  $\mathbf{A}_y$ ;
- $\mathbf{E}(y) = \text{diag}\{e_1y, e_2y, \dots, e_My\}$ ;
- $\mathbf{E}^*(y) = \begin{cases} e_iy & \text{se } e_i < 0 \\ e_i(y - b) & \text{se } e_i > 0 \end{cases}$

- $\mathbf{X}$  é a matriz dos autovetores de  $\mathbf{A}_x$ ;
- $\mathbf{Y}$  é a matriz dos autovetores de  $\mathbf{A}_y$ ;
- $W$  e  $U$  são vetores de ordem  $M$  a determinar.

Um maior detalhamento do método  $\text{LTS}_N$  pode ser encontrado em Segatto et. al. [39], Foletto [15].

As equações (2.17) e (2.18) caracterizam dois problemas de transporte unidimensionais cujas condições de contorno associadas são  $\hat{\Psi}_y(0)$ ,  $\hat{\Psi}_y(a)$  e  $\tilde{\Psi}_x(0)$ ,  $\tilde{\Psi}_x(b)$ , respectivamente. Por sua vez, os fluxos angulares médios nos contornos serão determinados a partir de (2.6) e (2.9). Todavia os fluxos angulares  $\Psi(0, y)$ ,  $\Psi(a, y)$  e  $\Psi(x, 0)$ ,  $\Psi(x, b)$  são conhecidos apenas nas  $\frac{M}{2}$  coordenadas associadas as direções incidentes.

Nesse sentido, é característico dos métodos nodais estabelecer equações auxiliares para representar os termos de fuga transversal. De maneira que, a busca por melhores aproximações que possam representar com maior exatidão o fluxo desconhecido nos contornos tem sido um problema de constante investigação pela comunidade científica Barichello et. al. [1], Barros [3], Barros e Larsen [4], Dominguez [12], Dominguez e Barros [13], Hauser [19], Hauser [20], Mello e Barros [26], Picoloto [30], Prolo [31], Tres et. al. [49], Tres [50]. Dentre algumas das aproximações utilizadas encontramos fluxos angulares :

- aproximados por funções exponenciais Hauser [19], Hauser [20], Mello e Barros [26]
- aproximados por constante Tres et. al. [49], Tres [50]
- aproximados por expressões baseadas na solução homogênea dos problemas integrados transversalmente unidimensionais Prolo [31]

- fluxos angulares nos contornos proporcionais aos fluxos angulares médios Picoloto [30].

No próximo capítulo apresentamos os cálculos para a determinação explícita da solução bem como os resultados obtidos através da proposta de reformulação do método **LTS<sub>N</sub> 2D-DiagExp**. Através destes resultados pode-se verificar a eficiência do método.



### 3 REFORMULANDO O MÉTODO $LTS_N$ 2D-DIAGEXP

Neste capítulo apresentam-se os cálculos para a obtenção da solução explícita do método  $LTS_N$ , parte-se daqui em continuidade com o apresentado no capítulo 2. Também são exibidos os resultados numéricos obtidos pelo método.

#### 3.1 Problema 1

Como mencionado, o método  $LTS_N$  2D-DiagExp utiliza uma aproximação exponencial para os termos desconhecidos nos contornos, considerando que o fluxo de nêutrons decresce a medida que se distancia da fonte, Hauser [19], Hauser [20], dessa forma os fluxos angulares no contornos são expressos por:

$$\Psi(x, 0) = e^{-sign(\mathbf{M})\lambda x} V^3 \quad (3.1)$$

$$\Psi(0, y) = e^{-sign(\mathbf{N})\lambda y} V^4 \quad (3.2)$$

$$\Psi(x, b) = e^{-sign(\mathbf{M})\lambda x} V^5 \quad (3.3)$$

$$\Psi(a, y) = e^{-sign(\mathbf{N})\lambda y} V^6 \quad (3.4)$$

onde  $\lambda = \sigma_a$ ,  $V^3$ ,  $V^4$ ,  $V^5$ ,  $V^6$  são vetores de ordem M a determinar e  $sign$  é a função sinal:

$$sign(M) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu_m > 0 \\ -1, & \text{se } \mu_m < 0. \end{cases},$$

$$sign(N) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta_m > 0 \\ -1, & \text{se } \eta_m < 0. \end{cases},$$

Uma vez determinados os fluxos angulares nos contornos pode-se definir os fluxos angulares médios nos contornos através de (2.6) e (2.9). Finalmente, para que as soluções (2.17) e (2.18) fiquem completamente determinadas é necessário que sejam determinados os vetores  $W$ ,  $U$ ,  $V^3$ ,  $V^4$ ,  $V^5$  e  $V^6$  e para isto, resolve-se um sistema linear de  $4M$  equações, obtidas através da aplicação dos fluxos angulares médios nos contornos e da avaliação das equações (2.17) e (2.18) no contornos.

O problema de interesse se encontra em Tsay et al. [53] o qual apresenta um método de resolução para a equação integral de transporte de nêutrons em geometria  $x, y$ . O problema de transporte de nêutrons é definido em um domínio retângular  $[0, a] \times [0, b]$ , com fonte de nêutrons  $Q(x, y)$  definida sobre a região  $[0, a_s] \times [0, b_s]$ , tal que  $a_s \leq a$  e  $b_s \leq b$ , e condições de contorno do tipo reflexão, em  $x = 0$  e  $y = 0$ , e vácuo em  $x = a$  e  $y = b$ , como representado na figura (3.1), aqui identificado por Problema I.

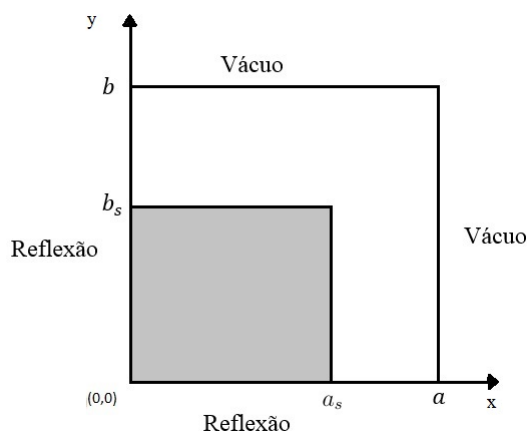


Figura 3.1: Representação geométrica do domínio, problema I.

Dessa forma de acordo com as condições de contorno do problema (3.1) temos:  
reflexão em  $x = 0$  e  $y = 0$ , logo em  $x = 0$  tem-se

$$\Psi_m(0, y) = \Psi_{m+M/4}(0, y) \quad \text{para } m = 1 : M/4, \quad (3.5)$$

e

$$\Psi_{m+M/2}(0, y) = \Psi_{m+3M/4}(0, y) \quad \text{para } m = 1 : M/4. \quad (3.6)$$

Para  $y = 0$ , segue que

$$\Psi_m(x, 0) = \Psi_{m+3M/4}(x, 0) \quad \text{para } m = 1 : M/4, \quad (3.7)$$

e

$$\Psi_{m+M/4}(x, 0) = \Psi_{m+M/2}(x, 0) \quad \text{para } m = 1 : M/4. \quad (3.8)$$

E vácuo em  $x = a$  e  $y = b$ , assim em  $x = a$  tem-se

$$\Psi_{m+M/4}(a, y) = \Psi_{m+M/2}(a, y) = 0 \quad \text{para } m = 1 : M/4, \quad (3.9)$$

em  $y = b$  segue que

$$\Psi_{m+M/2}(x, b) = \Psi_{m+3M/4}(x, b) = 0 \quad \text{para } m = 1 : M/4. \quad (3.10)$$

Por simplicidade escolheu-se apresentar os cálculos para o caso em que  $N = 2$ , os demais casos seguem de maneira analoga. Assim, para  $y = 0$  de (3.7) e (3.8) tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, 0) &= \Psi_4(x, 0) \\ \Psi_2(x, 0) &= \Psi_3(x, 0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

De (3.1) segue que

$$\Psi(x, 0) = \begin{pmatrix} e^{-sg(M_1)\lambda x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-sg(M_2)\lambda x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-sg(M_3)\lambda x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-sg(M_4)\lambda x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_3^3 \\ V_4^3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

ou então,

$$\Psi(x, 0) = \begin{pmatrix} e^{-sg(M_1)\lambda x} V_1^3 \\ e^{-sg(M_2)\lambda x} V_2^3 \\ e^{-sg(M_3)\lambda x} V_3^3 \\ e^{-sg(M_4)\lambda x} V_4^3 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Agora como as componentes da matriz  $M$ ,  $M_1 = M_4$  e  $M_2 = M_3$ . De acordo com (3.11) devemos ter que  $V_1^3 = V_4^3$  e  $V_2^3 = V_3^3$ . Ou seja :

$$\Psi(x, 0) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda x} V_1^3 \\ e^{\lambda x} V_2^3 \\ e^{\lambda x} V_2^3 \\ e^{-\lambda x} V_1^3 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Podemos escrever:

$$\Psi(x, 0) = e^{-\lambda x} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para em  $x = 0$ ,  $x = a$  e  $y = b$ , temos

para  $x = 0$  de (3.5) e (3.6)

$$\begin{aligned} \Psi_1(0, y) &= \Psi_2(0, y) \\ \Psi_3(0, y) &= \Psi_4(0, y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

logo:

$$\Psi(0, y) = e^{-\lambda y} \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Em  $y = b$ , considerando (3.10), tem-se

$$\Psi_3(x, b) = \Psi_4(x, b) = 0 \quad (3.18)$$

então

$$\Psi(x, b) = e^{-\lambda x} \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Finalmente em  $x = a$ , de (3.9) segue que:

$$\Psi_2(a, y) = \Psi_3(a, y) = 0 \quad (3.20)$$

então:

$$\Psi(a, y) = e^{-\lambda y} \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

A solução do problema integrado em  $y$  é dada por:

$$\hat{\Psi}_y(x) = X e^{\mathbf{D}^*(x)} W + \mathcal{C}_{qx}(x) - \mathcal{C}_{yb}^1(x) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathcal{C}_{yb}^2(x) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_{y0}^1(x) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_{y0}^2(x) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

no qual:

- $\mathcal{C}_{qx}(x) \equiv \mathbf{X} e^{\mathbf{D}x} \mathbf{X}^{-1} * Q_y(x) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}$
- $\mathbf{1}$  é um vetor de ordem  $M$  cujas entradas são todas iguais a 1
- $\mathcal{C}_{yb}^1(x) \equiv \frac{1}{b} \mathbf{X} e^{\mathbf{D}x} * e^{-\lambda x} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$
- $\mathcal{C}_{yb}^2(x) \equiv \frac{1}{b} \mathbf{X} e^{\mathbf{D}x} * e^{\lambda x} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$
- $\mathcal{C}_{y0}^1(x) \equiv \frac{1}{b} \mathbf{X} e^{\mathbf{D}x} * e^{-\lambda x} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$

- $\mathcal{C}_{y0}^2(x) \equiv \frac{1}{b} \mathbf{X} e^{\mathbf{D}x} * e^{\lambda x} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$

E a solução do problema integrado em  $x$ :

$$\tilde{\Psi}_x(y) = Y e^{\mathbf{E}^*(y)} U + \mathcal{C}_{qy}(y) - \mathcal{C}_{xa}^1(y) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathcal{C}_{xa}^2(y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_{x0}^1(y) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_{x0}^2(y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

onde

- $\mathcal{C}_{qy}(y) \equiv \mathbf{Y} e^{\mathbf{E}y} \mathbf{Y}^{-1} * Q_x(y) \mathbf{N}^{-1} \mathbf{1}$
- $\mathcal{C}_{xa}^1(y) \equiv \frac{1}{a} \mathbf{Y} e^{\mathbf{E}y} * e^{-\lambda y} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M}$
- $\mathcal{C}_{xa}^2(y) \equiv \frac{1}{a} \mathbf{Y} e^{\mathbf{E}y} * e^{\lambda y} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M}$
- $\mathcal{C}_{x0}^1(y) \equiv \frac{1}{a} \mathbf{Y} e^{\mathbf{E}y} * e^{-\lambda y} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M}$
- $\mathcal{C}_{x0}^2(y) \equiv \frac{1}{a} \mathbf{Y} e^{\mathbf{E}y} * e^{\lambda y} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M}$

Agora das equações (3.15), (3.17), (3.19), (3.21), (2.6) e (2.9) explicitamos os fluxos angulares médios nos contornos:

$$\tilde{\Psi}_x(0) = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-\lambda x} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} dx + \frac{1}{a} \int_0^a e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} dx \quad (3.24)$$

ou procedendo a integração:

$$\tilde{\Psi}_x(0) = \frac{(1 - e^{-\lambda a})}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Analogamente para  $\hat{\Psi}_y(0)$ ,  $\hat{\Psi}_y(a)$  e  $\tilde{\Psi}_x(b)$ , isto é:

$$\hat{\Psi}_y(0) = \frac{(1 - e^{-\lambda b})}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\tilde{\Psi}_x(b) = \frac{(1 - e^{-\lambda a})}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\hat{\Psi}_y(a) = \frac{(1 - e^{-\lambda b})}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Determinados (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.15), (3.17), (3.19) e (3.21) e aplicando as equações (2.17) e (2.18) nos contornos, obtêm-se as equações do sistema linear de  $4M$  equações para os fluxos integrados em  $x$  e  $y$ .

A saber,

Equação 1:  $x=0$ 

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \\
&= X e^{\mathbf{D}^*(0)W} + C_{qq}(0)\mathbf{1} - C_{yb}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - C_{yb}^2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{y0}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + C_{y0}^2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Equação 2:  $x=a$ 

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} \\
&= X e^{\mathbf{D}^*(a)W} + C_{qq}(a)\mathbf{1} - C_{yb}^1(a) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - C_{yb}^2(a) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{y0}^1(a) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + C_{y0}^2(a) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Equação 3:  $y=0$ 

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= Y e^{\mathbf{E}^*(0)U} + C_{qx}(0)\mathbf{1} - C_{xa}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - C_{xa}^2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} + C_{x0}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{x0}^2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Equação 4:  $y=b$ 

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= Y e^{\mathbf{E}^*(b)U} + C_{qx}(b)\mathbf{1} - C_{xa}^1(b) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - C_{xa}^2(b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} + C_{x0}^1(b) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{x0}^2(b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.32}$$



Equação 1:  $x=0$

$$C_{qy}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} - X e^{\mathbf{D}^*(0)} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} + C_{yb_{i1}}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{yb_{i2}}^2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{y_{0i1}}^1(0) + C_{y_{0i4}}^1(0)) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} - (C_{y_{0i2}}^2(0) + C_{y_{0i3}}^2(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Equação 2:  $x=a$

$$C_{qy}(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} - X e^{\mathbf{D}^*(a)} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} + C_{yb_{i1}}^1(a) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{yb_{i2}}^2(a) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{y_{0i1}}^1(a) + C_{y_{0i4}}^1(a)) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} - (C_{y_{0i2}}^2(a) + C_{y_{0i3}}^2(a)) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Equação 3:  $y=0$

$$C_{qx}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda a} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} - Y e^{\mathbf{E}^*(0)} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + C_{xa_{i1}}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{xa_{i4}}^2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} - (C_{x_{0i1}}^1(0) + C_{x_{0i2}}^1(0)) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{x_{0i3}}^2(0) + C_{x_{0i4}}^2(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Equação 4:  $y=b$

$$C_{qx}(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda a} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - Y e^{\mathbf{E}^*(b)} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + C_{xa_{i1}}^1(b) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{xa_{i4}}^2(b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} - (C_{x_{0i1}}^1(b) + C_{x_{0i2}}^1(b)) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{x_{0i3}}^2(b) + C_{x_{0i4}}^2(b)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$1 \leq i \leq M.$

A matriz do sistema linear a ser resolvido, para o caso em que  $N=2$ , será apresentada a seguir.

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W \\ U \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

onde:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \begin{pmatrix} C_{qy_1}(0) \\ C_{qy_2}(0) \\ C_{qy_3}(0) \\ C_{qy_4}(0) \end{pmatrix}, \quad b_{21} = \begin{pmatrix} C_{qy_1}(a) \\ C_{qy_2}(a) \\ C_{qy_3}(a) \\ C_{qy_4}(a) \end{pmatrix}, \quad b_{31} = \begin{pmatrix} C_{qx_1}(0) \\ C_{qx_2}(0) \\ C_{qx_3}(0) \\ C_{qx_4}(0) \end{pmatrix}, \quad b_{41} = \begin{pmatrix} C_{qx_1}(b) \\ C_{qx_2}(b) \\ C_{qx_3}(b) \\ C_{qx_4}(b) \end{pmatrix}, \\ A_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{(1-e^{-\lambda b})}{\lambda b} & 0 & C_{yb_{11}}^1(0) & C_{yb_{12}}^2(0) \\ \frac{\lambda b}{(1-e^{-\lambda b})} & 0 & C_{yb_{21}}^1(0) & C_{yb_{22}}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda b}-1)}{\lambda b} & C_{yb_{31}}^1(0) & C_{yb_{32}}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda b}-1)}{\lambda b} & C_{yb_{41}}^1(0) & C_{yb_{42}}^2(0) \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -(C_{y0_{11}}^1(0) + C_{y0_{14}}^1(0)) & -(C_{y0_{12}}^2(0) + C_{y0_{13}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{21}}^1(0) + C_{y0_{24}}^1(0)) & -(C_{y0_{22}}^2(0) + C_{y0_{23}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{31}}^1(0) + C_{y0_{34}}^1(0)) & -(C_{y0_{32}}^2(0) + C_{y0_{33}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{41}}^1(0) + C_{y0_{44}}^1(0)) & -(C_{y0_{42}}^2(0) + C_{y0_{43}}^2(0)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{13} &= \begin{pmatrix} -x_{41}e^{d_1(0)} & -x_{42}e^{d_2(0)} & -x_{43}e^{d_3(0)} & -x_{44}e^{d_4(0)} \\ -x_{21}e^{d_1(0)} & -x_{22}e^{d_2(0)} & -x_{23}e^{d_3(0)} & -x_{24}e^{d_4(0)} \\ -x_{31}e^{d_1(0)} & -x_{32}e^{d_2(0)} & -x_{33}e^{d_3(0)} & -x_{34}e^{d_4(0)} \\ -x_{41}e^{d_1(0)} & -x_{42}e^{d_2(0)} & -x_{43}e^{d_3(0)} & -x_{44}e^{d_4(0)} \end{pmatrix}, \quad A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{yb_{11}}^1(a) & C_{yb_{12}}^2(a) \\ 0 & 0 & C_{yb_{21}}^1(a) & C_{yb_{22}}^2(a) \\ 0 & 0 & C_{yb_{31}}^1(a) & C_{yb_{32}}^2(a) \\ 0 & 0 & C_{yb_{41}}^1(a) & C_{yb_{42}}^2(a) \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -(C_{y0_{11}}^1(a) + C_{y0_{14}}^1(a)) & -(C_{y0_{12}}^2(a) + C_{y0_{13}}^2(a)) & \frac{(1-e^{-\lambda b})}{\lambda b} & 0 \\ -(C_{y0_{21}}^1(a) + C_{y0_{24}}^1(a)) & -(C_{y0_{22}}^2(a) + C_{y0_{23}}^2(a)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{31}}^1(a) + C_{y0_{34}}^1(a)) & -(C_{y0_{32}}^2(a) + C_{y0_{33}}^2(a)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{41}}^1(a) + C_{y0_{44}}^1(a)) & -(C_{y0_{42}}^2(a) + C_{y0_{43}}^2(a)) & 0 & \frac{(e^{\lambda b}-1)}{\lambda b} \end{pmatrix}, \\ A_{23} &= \begin{pmatrix} -x_{11}e^{d_1(a)} & -x_{12}e^{d_2(a)} & -x_{13}e^{d_3(a)} & -x_{14}e^{d_4(a)} \\ -x_{21}e^{d_1(a)} & -x_{22}e^{d_2(a)} & -x_{23}e^{d_3(a)} & -x_{24}e^{d_4(a)} \\ -x_{31}e^{d_1(a)} & -x_{32}e^{d_2(a)} & -x_{33}e^{d_3(a)} & -x_{34}e^{d_4(a)} \\ -x_{41}e^{d_1(a)} & -x_{42}e^{d_2(a)} & -x_{43}e^{d_3(a)} & -x_{44}e^{d_4(a)} \end{pmatrix}, \quad A_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{31} &= \begin{pmatrix} -(C_{x0_{11}}^1(0) + C_{x0_{12}}^1(0)) & -(C_{x0_{13}}^2(0) + C_{x0_{14}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x0_{21}}^1(0) + C_{x0_{22}}^1(0)) & -(C_{x0_{23}}^2(0) + C_{x0_{24}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x0_{31}}^1(0) + C_{x0_{32}}^1(0)) & -(C_{x0_{33}}^2(0) + C_{x0_{34}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x0_{41}}^1(0) + C_{x0_{42}}^1(0)) & -(C_{x0_{43}}^2(0) + C_{x0_{44}}^2(0)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{32} = \begin{pmatrix} \frac{(1-e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 & C_{xa_{11}}^1(0) & C_{xa_{14}}^2(0) \\ \lambda a & \frac{(e^{\lambda a}-1)}{\lambda a} & C_{xa_{21}}^1(0) & C_{xa_{24}}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda a}-1)}{\lambda a} & C_{xa_{31}}^1(0) & C_{xa_{34}}^2(0) \\ 0 & \frac{(1-e^{-\lambda a})}{\lambda a} & C_{xa_{41}}^1(0) & C_{xa_{44}}^2(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{33} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{34} = \begin{pmatrix} -y_{11}e^{e_1(0)} & -y_{12}e^{e_2(0)} & -y_{13}e^{e_3(0)} & -y_{14}e^{e_4(0)} \\ -y_{21}e^{e_1(0)} & -y_{22}e^{e_2(0)} & -y_{23}e^{e_3(0)} & -y_{24}e^{e_4(0)} \\ -y_{31}e^{e_1(0)} & -y_{32}e^{e_2(0)} & -y_{33}e^{e_3(0)} & -y_{34}e^{e_4(0)} \\ -y_{41}e^{e_1(0)} & -y_{42}e^{e_2(0)} & -y_{43}e^{e_3(0)} & -y_{44}e^{e_4(0)} \end{pmatrix}, \\
A_{41} &= \begin{pmatrix} -(C_{x011}^1(b) + C_{x012}^1(b)) & -(C_{x013}^2(b) + C_{x014}^2(b)) & \frac{(1 - e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 \\ -(C_{x021}^1(b) + C_{x022}^1(b)) & -(C_{x023}^2(b) + C_{x024}^2(b)) & 0 & \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} \\ -(C_{x031}^1(b) + C_{x032}^1(b)) & -(C_{x033}^2(b) + C_{x034}^2(b)) & 0 & 0 \\ -(C_{x041}^1(b) + C_{x042}^1(b)) & -(C_{x043}^2(b) + C_{x044}^2(b)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{xa11}^1(b) & C_{xa14}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa21}^1(b) & C_{xa24}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa31}^1(b) & C_{xa34}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa41}^1(b) & C_{xa44}^2(b) \end{pmatrix}, \\
A_{43} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{44} = \begin{pmatrix} -y_{11}e^{e_1(b)} & -y_{12}e^{e_2(b)} & -y_{13}e^{e_3(b)} & -y_{14}e^{e_4(b)} \\ -y_{21}e^{e_1(b)} & -y_{22}e^{e_2(b)} & -y_{23}e^{e_3(b)} & -y_{24}e^{e_4(b)} \\ -y_{31}e^{e_1(b)} & -y_{32}e^{e_2(b)} & -y_{33}e^{e_3(b)} & -y_{34}e^{e_4(b)} \\ -y_{41}e^{e_1(b)} & -y_{42}e^{e_2(b)} & -y_{43}e^{e_3(b)} & -y_{44}e^{e_4(b)} \end{pmatrix}, \\
V_1 &= \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_3^4 \\ V_1^5 \\ V_2^5 \end{pmatrix}, \quad V_i = \begin{pmatrix} V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_1^6 \\ V_4^6 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ao resolver este sistema encontraremos os vetores  $W$ ,  $U$ ,  $V^3$ ,  $V^4$ ,  $V^5$  e  $V^6$  que juntamente com (2.17) e (2.18) determinam a solução dos problemas unidimensionais integrados transversalmente.

## 3.2 Resultados Numéricos

Nesta seção apresenta-se os resultados obtidos pelo método  $LTS_N$  2D-DiagExp para o problema 1. Os resultados são comparados em termos de ordem de grandeza com os obtidos por Cromiansk [11] e Tres [50]. Através das tabelas abaixo pode-se observar os bons resultados apresentados pelo método  $LTS_N$ . As tabelas (3.1)- (3.4) apresentam os resultados obtidos por Cromiansk [11] e Tres [50] e os obtidos neste trabalho. Em seus trabalhos Cromiansk [11] e Tres [50] utilizam a equação de transporte na forma integro-diferencial encontrando a solução através de uma combinação dos métodos nodal e ADO, com distinção apenas no tratamento dos termos de fuga transversal, enquanto Cromiansk [11] considera que os fluxos angulares nos contornos são aproximados por exponenciais, Tres [50] em seu trabalho trata os termos de fuga transversal como constantes.

Todos os trabalhos apresentam resultados para os fluxos escalares em determinados pontos do domínio.

Para o caso bidimensional os fluxos escalares médios expressos em termos dos fluxos angulares médios são dados por  $\hat{\Phi}_y(x)$ , fluxo escalar médio em  $y$  e  $\tilde{\Phi}_x(y)$ , o fluxo escalar médio em  $x$ , respectivamente:

$$\hat{\Phi}_y(x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^M \omega_k \hat{\Psi}_{y_k}(x, \Omega_k) \quad (3.38)$$

$$\tilde{\Phi}_x(y) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^M \omega_k \tilde{\Psi}_{x_k}(y, \Omega_k) \quad (3.39)$$

De acordo com Cromiansk [11] e Tres [50] os valores dos parâmetros do problema são:

- $a = b = 1cm$ ;
- $Q(x, y) = 1$  para  $0 \leq x \leq a_s = 0.52cm$  e  $0 \leq y \leq b_s = 0.52cm$ ;
- $\sigma_t = 1.0cm^{-1}$
- e para a seção de choque de espalhamento consideramos 3 casos:  $\sigma_s = 0.5cm^{-1}$ ,  $\sigma_s = 0.1cm^{-1}$  e  $\sigma_s = 0.05cm^{-1}$ .

Enquanto que as condições de contorno são do tipo reflexão para  $x = 0$  e  $y = 0$ , e vácuo para  $x = a$  e  $y = b$ , como representado na figura (3.1). As tabelas (3.1), (3.2), (3.3) a seguir apresentam os resultados de  $\hat{\Phi}_y(x)$  para diferentes valores de  $x$ , a saber  $x = 0.5cm$ ,  $x = 0.7cm$  e  $x = 0.98cm$ , respectivamente .

Pode-se observar que os resultados deste trabalho e os de Cromiansk [11] e Tres [50] apresentam a mesma ordem de grandeza.

Tabela 3.1: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.5cm$ .

$\sigma_s$	Tres [50]	Cromiansk [11]	LTS <sub>N</sub> 2D- ExpDiag
	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
0.5	0.304	0.326	0.295
	0.320	0.337	0.312
	0.320	0.336	0.313
	0.320	0.335	0.313
	0.320	0.335	0.313
	0.321	0.335	0.314
0.1	0.219	0.236	0.211
	0.226	0.236	0.219
	0.226	0.235	0.219
	0.225	0.234	0.219
	0.226	0.234	0.220
	0.227	0.234	0.220
0.05	0.212	0.228	0.204
	0.218	0.228	0.211
	0.217	0.226	0.211
	0.217	0.226	0.211
	0.218	0.225	0.212
	0.218	0.226	0.213

Tabela 3.2: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.7cm$ .

$\sigma_s$	Tres [50]	Cromiansk [11]	LTS <sub>N</sub> 2D-ExpDiag
	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
0.5	0.210	0.225	0.201
	0.199	0.207	0.196
	0.190	0.196	0.187
	0.184	0.189	0.180
	0.178	0.182	0.174
	0.175	0.179	0.172
0.1	0.144	0.156	0.141
	0.130	0.135	0.128
	0.122	0.126	0.120
	0.117	0.120	0.115
	0.112	0.115	0.110
	0.110	0.112	0.110
0.05	0.138	0.150	0.135
	0.124	0.129	0.122
	0.116	0.120	0.114
	0.112	0.114	0.110
	0.107	0.109	0.105
	0.105	0.107	0.103

Tabela 3.3: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.98cm$ .

$\sigma_s$	Tres [50]	Cromiansk [11]	LTS <sub>N</sub> 2D-ExpDiag
	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
0.5	0.112	0.107	0.115
	0.092	0.084	0.097
	0.085	0.076	0.090
	0.082	0.072	0.087
	0.081	0.070	0.086
	0.080	0.070	0.085
0.1	0.072	0.066	0.077
	0.055	0.048	0.061
	0.050	0.043	0.057
	0.048	0.040	0.055
	0.047	0.040	0.054
	0.047	0.040	0.054
0.05	0.069	0.062	0.074
	0.052	0.045	0.059
	0.047	0.040	0.054
	0.045	0.038	0.052
	0.045	0.037	0.051
	0.045	0.037	0.051

No entanto, constatou-se a presença de valores negativos para os fluxos angulares negativos nos resultados obtidos pelo método LTS<sub>N</sub> 2D- DiagExp, para valores de  $x \geq 0.5cm$ , em um domínio subdividido em intervalos de comprimento 0.1cm.

Abaixo são apresentados os fluxos angulares médios obtidos para o caso de  $N = 2$ , tabela (3.4), todavia destaca-se que fluxos angulares negativos são encontrados para todos os valores de  $N$ .

Tabela 3.4:  $\hat{\Psi}_y(x)$  considerando  $\sigma_s = 0.5$  obtidos via  $LTS_N$  2D- Exponencial

x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3
0.569687129496	0.614877062408	0.650497164397	0.677591017408
0.310024200332	0.313021061165	0.317230044072	0.321781441371
0.310024200332	0.256110804576	0.195104433932	0.126354488012
0.569687129496	0.514347269906	0.449053881649	0.372482572288
x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7
0.696994419105	0.709360623569	0.648008169440	0.576738717673
0.325911725868	0.328938387865	0.263065398601	0.191165442668
0.049137821924	<b>-0.037345405124</b>	<b>-0.056811139696</b>	<b>-0.052907616350</b>
0.283102173626	0.179144856658	0.135736103675	0.107842098996
x=0.8	x=0.9	x=1.0	
0.513027275830	0.456101737373	0.405263777723	
0.129940220322	7.797484323086E-02	3.403760457864E-02	
<b>-0.042714125904</b>	<b>-0.057913528976</b>	0.000000000000	
0.076727625178	0.041225485705	0.000000000000	

Diante, dos resultados encontrados, consideramos um segundo problema descrito por Tsay et al. [53], identificado aqui por Problema 2, e os resultados obtidos pelo método  $LTS_N$  2D DiagExp comparamos com os obtidos por Tres [50].



### 3.3 Problema 2

O segundo problema é similar ao problema 1, com alterações apenas nas condições de contorno, considerando reflexão nos contornos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $y = b$  enquanto em  $x = a$  temos vácuo, como mostra a figura (3.2) abaixo.

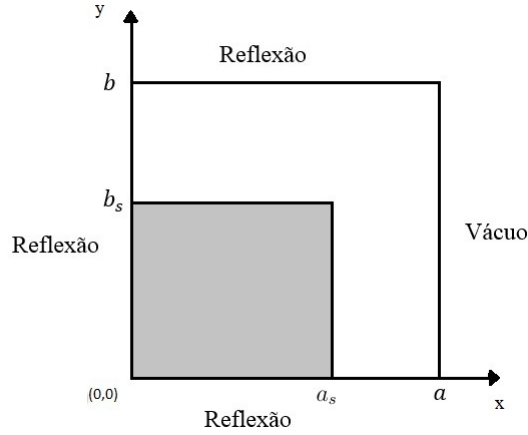


Figura 3.2: Representação geométrica do domínio, problema 2.

Este problema tem formulação análoga a anterior, se diferenciando apenas na aproximação do contorno  $y = b$ , que devido ao fato de termo reflexão, se torna:

$$\Psi(x, b) = e^{-\lambda x} \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^5 \end{pmatrix} + e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ V_2^5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

e conseqüentemente,

$$\tilde{\Psi}_x(b) = \frac{(1 - e^{-\lambda a})}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^5 \end{pmatrix} + \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^5 \\ V_2^5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Com isto, as equações que compõem o sistema linear a ser resolvido para a determinação dos fluxos angulares médios tornam-se:

$1 \leq i \leq M$

Equação 1:  $x=0$

$$C_{ay}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_3^4 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} - X e^{\mathbf{D}^*(0)} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} + (C_{yb_{i1}}^1(0) + C_{yb_{i4}}^1(0)) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^5 \end{pmatrix} + (C_{yb_{i2}}^2(0) + C_{yb_{i3}}^2(0)) \begin{pmatrix} V_2^5 \\ V_2^5 \\ V_2^5 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i1}}^1(0) + C_{y0_{i4}}^1(0)) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i2}}^2(0) + C_{y0_{i3}}^2(0)) \begin{pmatrix} V_2^3 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Equação 2:  $x=a$

$$C_{ay}(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_3^6 \\ 0 \\ 0 \\ V_3^6 \end{pmatrix} - X e^{\mathbf{D}^*(a)} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} + (C_{yb_{i1}}^1(a) + C_{yb_{i4}}^1(a)) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^5 \end{pmatrix} + (C_{yb_{i2}}^2(a) + C_{yb_{i3}}^2(a)) \begin{pmatrix} V_2^5 \\ V_2^5 \\ V_2^5 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i1}}^1(a) + C_{y0_{i4}}^1(a)) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i2}}^2(a) + C_{y0_{i3}}^2(a)) \begin{pmatrix} V_2^3 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Equação 3:  $y=0$

$$C_{ax}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_2^3 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} - Y e^{\mathbf{E}^*(0)} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + C_{xa_{i1}}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{xa_{i4}}^2(0) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i1}}^1(0) + C_{x0_{i2}}^1(0)) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i3}}^2(0) + C_{x0_{i4}}^2(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Equação 4:  $y=b$

$$C_{ax}(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^5 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_2^5 \\ V_2^5 \\ V_2^5 \\ 0 \end{pmatrix} - Y e^{\mathbf{E}^*(b)} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + C_{xa_{i1}}^1(b) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{xa_{i4}}^2(b) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i1}}^1(b) + C_{x0_{i2}}^1(b)) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i3}}^2(b) + C_{x0_{i4}}^2(b)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

O sistema linear a ser resolvido, que difere do anterior para o caso em que  $N=2$ , é apresentado a seguir.

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W \\ U \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

onde:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \begin{pmatrix} C_{qy_1}(0) \\ C_{qy_2}(0) \\ C_{qy_3}(0) \\ C_{qy_4}(0) \end{pmatrix}, \quad b_{21} = \begin{pmatrix} C_{qy_1}(a) \\ C_{qy_2}(a) \\ C_{qy_3}(a) \\ C_{qy_4}(a) \end{pmatrix}, \quad b_{31} = \begin{pmatrix} C_{qx_1}(0) \\ C_{qx_2}(0) \\ C_{qx_3}(0) \\ C_{qx_4}(0) \end{pmatrix}, \quad b_{41} = \begin{pmatrix} C_{qx_1}(b) \\ C_{qx_2}(b) \\ C_{qx_3}(b) \\ C_{qx_4}(b) \end{pmatrix}, \\ A_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{(1-e^{-\lambda b})}{\lambda b} & 0 & (C_{yb_{11}}^1(0) + C_{yb_{14}}^1(0)) & (C_{yb_{12}}^2(0) + C_{yb_{13}}^2(0)) \\ \frac{\lambda b}{(1-e^{-\lambda b})} & 0 & (C_{yb_{21}}^1(0) + C_{yb_{24}}^1(0)) & (C_{yb_{22}}^2(0) + C_{yb_{23}}^2(0)) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} & (C_{yb_{31}}^1(0) + C_{yb_{34}}^1(0)) & (C_{yb_{32}}^2(0) + C_{yb_{33}}^2(0)) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} & (C_{yb_{41}}^1(0) + C_{yb_{44}}^1(0)) & (C_{yb_{42}}^2(0) + C_{yb_{43}}^2(0)) \end{pmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{pmatrix} -(C_{y0_{11}}^1(0) + C_{y0_{14}}^1(0)) & -(C_{y0_{12}}^2(0) + C_{y0_{13}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{21}}^1(0) + C_{y0_{24}}^1(0)) & -(C_{y0_{22}}^2(0) + C_{y0_{23}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{31}}^1(0) + C_{y0_{34}}^1(0)) & -(C_{y0_{32}}^2(0) + C_{y0_{33}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{41}}^1(0) + C_{y0_{44}}^1(0)) & -(C_{y0_{42}}^2(0) + C_{y0_{43}}^2(0)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{13} &= \begin{pmatrix} -x_{41}e^{d_1(0)} & -x_{42}e^{d_2(0)} & -x_{43}e^{d_3(0)} & -x_{44}e^{d_4(0)} \\ -x_{21}e^{d_1(0)} & -x_{22}e^{d_2(0)} & -x_{23}e^{d_3(0)} & -x_{24}e^{d_4(0)} \\ -x_{31}e^{d_1(0)} & -x_{32}e^{d_2(0)} & -x_{33}e^{d_3(0)} & -x_{34}e^{d_4(0)} \\ -x_{41}e^{d_1(0)} & -x_{42}e^{d_2(0)} & -x_{43}e^{d_3(0)} & -x_{44}e^{d_4(0)} \end{pmatrix}, \quad A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (C_{yb_{11}}^1(a) + C_{yb_{14}}^1(a)) & (C_{yb_{12}}^2(a) + C_{yb_{13}}^2(a)) \\ 0 & 0 & (C_{yb_{21}}^1(a) + C_{yb_{24}}^1(a)) & (C_{yb_{22}}^2(a) + C_{yb_{23}}^2(a)) \\ 0 & 0 & (C_{yb_{31}}^1(a) + C_{yb_{34}}^1(a)) & (C_{yb_{32}}^2(a) + C_{yb_{33}}^2(a)) \\ 0 & 0 & (C_{yb_{41}}^1(a) + C_{yb_{44}}^1(a)) & (C_{yb_{42}}^2(a) + C_{yb_{43}}^2(a)) \end{pmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} -(C_{y0_{11}}^1(a) + C_{y0_{14}}^1(a)) & -(C_{y0_{12}}^2(a) + C_{y0_{13}}^2(a)) & \frac{(1-e^{-\lambda b})}{\lambda b} & 0 \\ -(C_{y0_{21}}^1(a) + C_{y0_{24}}^1(a)) & -(C_{y0_{22}}^2(a) + C_{y0_{23}}^2(a)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{31}}^1(a) + C_{y0_{34}}^1(a)) & -(C_{y0_{32}}^2(a) + C_{y0_{33}}^2(a)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{41}}^1(a) + C_{y0_{44}}^1(a)) & -(C_{y0_{42}}^2(a) + C_{y0_{43}}^2(a)) & 0 & \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} &= \begin{pmatrix} -x_{11}e^{d_1(a)} & -x_{12}e^{d_2(a)} & -x_{13}e^{d_3(a)} & -x_{14}e^{d_4(a)} \\ -x_{21}e^{d_1(a)} & -x_{22}e^{d_2(a)} & -x_{23}e^{d_3(a)} & -x_{24}e^{d_4(a)} \\ -x_{31}e^{d_1(a)} & -x_{32}e^{d_2(a)} & -x_{33}e^{d_3(a)} & -x_{34}e^{d_4(a)} \\ -x_{41}e^{d_1(a)} & -x_{42}e^{d_2(a)} & -x_{43}e^{d_3(a)} & -x_{44}e^{d_4(a)} \end{pmatrix}, \quad A_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_{31} &= \begin{pmatrix} -(C_{x_{011}}^1(0) + C_{x_{012}}^1(0)) & -(C_{x_{013}}^2(0) + C_{x_{014}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x_{021}}^1(0) + C_{x_{022}}^1(0)) & -(C_{x_{023}}^2(0) + C_{x_{024}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x_{031}}^1(0) + C_{x_{032}}^1(0)) & -(C_{x_{033}}^2(0) + C_{x_{034}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x_{041}}^1(0) + C_{x_{042}}^1(0)) & -(C_{x_{043}}^2(0) + C_{x_{044}}^2(0)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_{32} &= \begin{pmatrix} \frac{(1-e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 & C_{xa_{11}}^1(0) & C_{xa_{14}}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda a}-1)}{\lambda a} & C_{xa_{21}}^1(0) & C_{xa_{24}}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda a}-1)}{\lambda a} & C_{xa_{31}}^1(0) & C_{xa_{34}}^2(0) \\ \frac{(1-e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 & C_{xa_{41}}^1(0) & C_{xa_{44}}^2(0) \end{pmatrix}, \\
A_{33} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{34} = \begin{pmatrix} -y_{11}e^{e_1(0)} & -y_{12}e^{e_2(0)} & -y_{13}e^{e_3(0)} & -y_{14}e^{e_4(0)} \\ -y_{21}e^{e_1(0)} & -y_{22}e^{e_2(0)} & -y_{23}e^{e_3(0)} & -y_{24}e^{e_4(0)} \\ -y_{31}e^{e_1(0)} & -y_{32}e^{e_2(0)} & -y_{33}e^{e_3(0)} & -y_{34}e^{e_4(0)} \\ -y_{41}e^{e_1(0)} & -y_{42}e^{e_2(0)} & -y_{43}e^{e_3(0)} & -y_{44}e^{e_4(0)} \end{pmatrix}, \\
A_{41} &= \begin{pmatrix} -(C_{x_{011}}^1(b) + C_{x_{012}}^1(b)) & -(C_{x_{013}}^2(b) + C_{x_{014}}^2(b)) & \frac{(1-e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 \\ -(C_{x_{021}}^1(b) + C_{x_{022}}^1(b)) & -(C_{x_{023}}^2(b) + C_{x_{024}}^2(b)) & 0 & \frac{(e^{\lambda a}-1)}{\lambda a} \\ -(C_{x_{031}}^1(b) + C_{x_{032}}^1(b)) & -(C_{x_{033}}^2(b) + C_{x_{034}}^2(b)) & 0 & \frac{(e^{\lambda a}-1)}{\lambda a} \\ -(C_{x_{041}}^1(b) + C_{x_{042}}^1(b)) & -(C_{x_{043}}^2(b) + C_{x_{044}}^2(b)) & \frac{(1-e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 \end{pmatrix}, \\
A_{42} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{xa_{11}}^1(b) & C_{xa_{14}}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa_{21}}^1(b) & C_{xa_{24}}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa_{31}}^1(b) & C_{xa_{34}}^2(b) \\ 0 & 0 & 0 & C_{xa_{41}}^1(b) & C_{xa_{44}}^2(b) \end{pmatrix}, \\
A_{43} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{44} = \begin{pmatrix} -y_{11}e^{e_1(b)} & -y_{12}e^{e_2(b)} & -y_{13}e^{e_3(b)} & -y_{14}e^{e_4(b)} \\ -y_{21}e^{e_1(b)} & -y_{22}e^{e_2(b)} & -y_{23}e^{e_3(b)} & -y_{24}e^{e_4(b)} \\ -y_{31}e^{e_1(b)} & -y_{32}e^{e_2(b)} & -y_{33}e^{e_3(b)} & -y_{34}e^{e_4(b)} \\ -y_{41}e^{e_1(b)} & -y_{42}e^{e_2(b)} & -y_{43}e^{e_3(b)} & -y_{44}e^{e_4(b)} \end{pmatrix}, \\
V_1 &= \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_3^4 \\ V_1^5 \\ V_2^5 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_1^6 \\ V_4^6 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### 3.4 Resultados Numéricos

Neste espaço apresentam-se os resultados obtidos para o Problema 2 pelo método  $LTS_N$  2D-DiagExp, comparando-os com os obtidos por Tres [50]. As tabelas (3.5),( 3.6) e (3.7) apresentam os fluxos escalares médios obtidos por obtidos

por [50] e os aqui obtidos considerando  $\sigma_s = 0.5$ ,  $\sigma_s = 0.1$  e  $\sigma_s = 0.05$ . Aqui também observa-se que os fluxos escalares médios apresentam a mesma ordem de grandeza, no entanto também há a presença de valores negativos para os fluxos angulares médios.

Tabela 3.5: Fluxos Escalares para  $x = y = 0.5cm$ , Problema 2.

$\sigma_s$	Tres [50]	Tres [50]	LTS <sub>N</sub> 2D-DiagExp	LTS <sub>N</sub> 2D-DiagExp
	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
	$\hat{\Phi}_y(x)$	$\tilde{\Phi}_x(y)$	$\hat{\Phi}_y(x)$	$\tilde{\Phi}_x(y)$
0.5	0.358	0.347	0.359	0.348
	0.389	0.376	0.389	0.373
	0.392	0.380	0.392	0.378
	0.393	0.382	0.394	0.379
	0.394	0.383	0.394	0.380
	0.395	0.384	0.395	0.380
0.1	0.242	0.235	0.243	0.232
	0.255	0.249	0.256	0.246
	0.257	0.251	0.257	0.248
	0.257	0.252	0.258	0.249
	0.258	0.253	0.258	0.250
	0.259	0.253	0.259	0.250
0.05	0.233	0.226	0.233	0.223
	0.245	0.239	0.245	0.236
	0.246	0.240	0.246	0.237
	0.246	0.241	0.247	0.238
	0.247	0.242	0.248	0.239
	0.248	0.243	0.248	0.240

Tabela 3.6: Fluxos Escalares para  $x = y = 0.7cm$ , Problema 2.

$\sigma_s$	Tres [50]	Tres [50]	LTS <sub>N</sub> 2D-DiagExp	LTS <sub>N</sub> 2D-DiagExp
	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
	$\hat{\Phi}_y(x)$	$\tilde{\Phi}_x(y)$	$\hat{\Phi}_y(x)$	$\tilde{\Phi}_x(y)$
0.5	0.271	0.282	0.272	0.282
	0.270	0.276	0.270	0.277
	0.263	0.269	0.263	0.269
	0.258	0.264	0.258	0.264
	0.253	0.260	0.253	0.260
	0.251	0.258	0.251	0.258
0.1	0.174	0.178	0.174	0.178
	0.163	0.164	0.164	0.165
	0.156	0.156	0.156	0.158
	0.151	0.152	0.152	0.153
	0.147	0.149	0.148	0.150
	0.145	0.147	0.145	0.148
0.05	0.166	0.169	0.166	0.169
	0.155	0.155	0.155	0.156
	0.148	0.148	0.148	0.149
	0.143	0.144	0.144	0.145
	0.139	0.141	0.139	0.141
	0.137	0.139	0.137	0.139



Tabela 3.7: Fluxos Escalares para  $x = y = 0.98cm$ , Problema 2.

$\sigma_s$	Tres [50]	Tres [50]	LTS <sub>N</sub> 2D-DiagExp	LTS <sub>N</sub> 2D-DiagExp
	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
	$\hat{\Phi}_y(x)$	$\tilde{\Phi}_x(y)$	$\hat{\Phi}_y(x)$	$\tilde{\Phi}_x(y)$
0.5	0.175	0.240	0.176	0.248
	0.156	0.213	0.157	0.225
	0.149	0.202	0.149	0.214
	0.145	0.197	0.146	0.210
	0.144	0.196	0.144	0.210
	0.143	0.196	0.144	0.210
0.1	0.108	0.141	0.110	0.150
	0.089	0.112	0.090	0.125
	0.083	0.103	0.084	0.117
	0.081	0.100	0.081	0.113
	0.080	0.099	0.080	0.112
	0.080	0.100	0.080	0.113
0.05	0.102	0.133	0.103	0.142
	0.084	0.104	0.084	0.117
	0.078	0.096	0.079	0.109
	0.076	0.093	0.077	0.106
	0.075	0.092	0.076	0.105
	0.075	0.093	0.076	0.106

Como podemos observar nas tabelas (3.5), (3.6) e (3.7), os resultados estão em acordo com os encontrados na literatura, apresentando de uma à três casas de concordância para todos os valores de  $x$  apresentados, no entanto como se pode verificar através da tabela (3.8) há presença de fluxos angulares médios negativos, considerando o caso em que  $N = 2$ .

Tabela 3.8:  $\hat{\Psi}_y(x)$  considerando  $\sigma_s = 0.5$  e  $N = 2$ - Problema 2.

x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3
0.583353595524	0.627691490813	0.663445012458	0.691326493333
0.583353595524	0.528886229007	0.463780627122	0.386791134657
0.355096375283	0.301882944669	0.240545854240	0.170431747042
0.355096375283	0.401294613751	0.440292302752	0.472499779737
x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7
0.711912150378	0.725653095690	0.665711461591	0.595768620264
0.296457947689	0.191079212411	0.145843042519	0.115777075700
0.090791113663	0.000773012280	<b>-0.023415999111</b>	<b>-0.025530284952</b>
0.498243289270	0.517767525785	0.464064646591	0.400676519550
x=0.8	x=0.9	x=0.98	x=1.0
0.533207506962	0.477185668675	0.436568184330	0.426950824604
0.082208722172	0.044037201476	0.009343605563	0.000000000000
<b>-0.022786789395</b>	<b>-0.014547683054</b>	<b>-0.003459832538</b>	0.000000000000
0.344872032671	0.295715934688	0.260618633477	0.252380864452

Vários teste foram realizados a fim de investigar a presença de fluxos angulares negativos. Mudou-se as condições de contorno, passando a considerar que ao invés de vácuo ter-se-ia  $\Psi(a, y) = \Psi(x, b) = 1$  nas direções incidentes e considerando  $Q(x, y) = 1$  para  $0 \leq x \leq a_s$  e  $0 \leq y \leq b_s$ .

$$\Psi(x, b) = 1 \quad (3.47)$$

$$\Psi(a, y) = 1 \quad (3.48)$$

Neste caso aplicando as equações (2.17) e (2.18) nos contornos, obtêm-se as equações do sistema linear.

O sistema linear a ser resolvido, que se difere dos anteriores, para o caso em que  $N=2$ , é apresentado a seguir, a primeira parte contém as 6 primeiras colunas e a segunda parte as outras 10 colunas.

Equação 1:  $x=0$

$$C_{ay}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_3^4 \\ V_3^4 \\ V_4^4 \\ V_4^4 \end{pmatrix} - X e^{\mathbf{D}^*(0)} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} + C_{yb_{i1}}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{yb_{i2}}^2(0) \begin{pmatrix} V_2^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (C_{yb_{i3}}^3(0) + C_{yb_{i4}}^3(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i1}}^1(0) + C_{y0_{i4}}^1(0)) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i2}}^2(0) + C_{y0_{i3}}^2(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Equação 2:  $x=a$

$$C_{ay}(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda b} \begin{pmatrix} V_3^6 \\ V_3^6 \\ V_4^6 \\ V_4^6 \end{pmatrix} - X e^{\mathbf{D}^*(a)} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} + C_{ya_{i1}}^1(a) \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{ya_{i2}}^2(a) \begin{pmatrix} V_2^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (C_{ya_{i3}}^3(a) + C_{ya_{i4}}^3(a)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i1}}^1(a) + C_{y0_{i4}}^1(a)) \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} - (C_{y0_{i2}}^2(a) + C_{y0_{i3}}^2(a)) \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^3 \\ V_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Equação 3:  $y=0$

$$C_{ax}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_1^3 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_2^3 \\ V_2^3 \\ V_3^3 \\ 0 \end{pmatrix} - Y e^{\mathbf{E}^*(0)} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + C_{xa_{i1}}^1(0) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{xa_{i4}}^2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} + (C_{xa_{i2}}^1(0) + C_{xa_{i3}}^1(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i1}}^1(0) + C_{x0_{i2}}^1(0)) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i3}}^2(0) + C_{x0_{i4}}^2(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Equação 4:  $y=b$

$$C_{ax}(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_1^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda a} \begin{pmatrix} V_2^5 \\ V_2^5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - Y e^{\mathbf{E}^*(b)} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + C_{xb_{i1}}^1(b) \begin{pmatrix} V_1^6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{xb_{i4}}^2(b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_4^6 \end{pmatrix} + (C_{xb_{i2}}^1(b) + C_{xb_{i3}}^1(b)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i1}}^1(b) + C_{x0_{i2}}^1(b)) \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_1^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (C_{x0_{i3}}^2(b) + C_{x0_{i4}}^2(b)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^4 \\ V_3^4 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$1 \leq i \leq M$ .

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W \\ U \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

onde:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{qy_1}(0) - C_{yb_{13}}^3(0) - C_{yb_{14}}^3(0) \\ \mathcal{C}_{qy_2}(0) - C_{yb_{23}}^3(0) - C_{yb_{24}}^3(0) \\ \mathcal{C}_{qy_3}(0) - C_{yb_{33}}^3(0) - C_{yb_{34}}^3(0) \\ \mathcal{C}_{qy_4}(0) - C_{yb_{43}}^3(0) - C_{yb_{44}}^3(0) \end{pmatrix}, \quad b_{21} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{qy_1}(a) - C_{yb_{13}}^3(a) - C_{yb_{14}}^3(a) \\ \mathcal{C}_{qy_2}(a) - C_{yb_{23}}^3(a) - C_{yb_{24}}^3(a) - 1 \\ \mathcal{C}_{qy_3}(a) - C_{yb_{33}}^3(a) - C_{yb_{34}}^3(a) - 1 \\ \mathcal{C}_{qy_4}(a) - C_{yb_{43}}^3(a) - C_{yb_{44}}^3(a) \end{pmatrix}, \quad b_{31} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{qx_1}(0) - C_{xa_{12}}^3(0) - C_{xa_{13}}^3(0) \\ \mathcal{C}_{qx_2}(0) - C_{xa_{22}}^3(0) - C_{xa_{23}}^3(0) \\ \mathcal{C}_{qx_3}(0) - C_{xa_{32}}^3(0) - C_{xa_{33}}^3(0) \\ \mathcal{C}_{qx_4}(0) - C_{xa_{42}}^3(0) - C_{xa_{43}}^3(0) \end{pmatrix} \\ , \quad b_{41} &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{qx_1}(b) - C_{xa_{12}}^3(b) - C_{xa_{13}}^3(b) \\ \mathcal{C}_{qx_2}(b) - C_{xa_{22}}^3(b) - C_{xa_{23}}^3(b) \\ \mathcal{C}_{qx_3}(b) - C_{xa_{32}}^3(b) - C_{xa_{33}}^3(b) - 1 \\ \mathcal{C}_{qx_4}(b) - C_{xa_{42}}^3(b) - C_{xa_{43}}^3(b) - 1 \end{pmatrix}, \\ A_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{(1 - e^{-\lambda b})}{\lambda b} & 0 & C_{yb_{11}}^1(0) & C_{yb_{12}}^2(0) \\ \frac{(1 - e^{-\lambda b})}{\lambda b} & 0 & C_{yb_{21}}^1(0) & C_{yb_{22}}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} & C_{yb_{31}}^1(0) & C_{yb_{32}}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} & C_{yb_{41}}^1(0) & C_{yb_{42}}^2(0) \end{pmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{pmatrix} -(C_{y0_{11}}^1(0) + C_{y0_{14}}^1(0)) & -(C_{y0_{21}}^2(0) + C_{y0_{13}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{21}}^1(0) + C_{y0_{24}}^1(0)) & -(C_{y0_{22}}^2(0) + C_{y0_{23}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{31}}^1(0) + C_{y0_{34}}^1(0)) & -(C_{y0_{32}}^2(0) + C_{y0_{33}}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{41}}^1(0) + C_{y0_{44}}^1(0)) & -(C_{y0_{42}}^2(0) + C_{y0_{43}}^2(0)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{13} &= \begin{pmatrix} -x_{41}e^{d_1(0)} & -x_{42}e^{d_2(0)} & -x_{43}e^{d_3(0)} & -x_{44}e^{d_4(0)} \\ -x_{21}e^{d_1(0)} & -x_{22}e^{d_2(0)} & -x_{23}e^{d_3(0)} & -x_{24}e^{d_4(0)} \\ -x_{31}e^{d_1(0)} & -x_{32}e^{d_2(0)} & -x_{33}e^{d_3(0)} & -x_{34}e^{d_4(0)} \\ -x_{41}e^{d_1(0)} & -x_{42}e^{d_2(0)} & -x_{43}e^{d_3(0)} & -x_{44}e^{d_4(0)} \end{pmatrix}, \quad A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{yb_{11}}^1(a) & C_{yb_{12}}^2(a) \\ 0 & 0 & C_{yb_{21}}^1(a) & C_{yb_{22}}^2(a) \\ 0 & 0 & C_{yb_{31}}^1(a) & C_{yb_{32}}^2(a) \\ 0 & 0 & C_{yb_{41}}^1(a) & C_{yb_{42}}^2(a) \end{pmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} -(C_{y0_{11}}^1(a) + C_{y0_{14}}^1(a)) & -(C_{y0_{12}}^2(a) + C_{y0_{13}}^2(a)) & \frac{(1 - e^{-\lambda b})}{\lambda b} & 0 \\ -(C_{y0_{21}}^1(a) + C_{y0_{24}}^1(a)) & -(C_{y0_{22}}^2(a) + C_{y0_{23}}^2(a)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{31}}^1(a) + C_{y0_{34}}^1(a)) & -(C_{y0_{32}}^2(a) + C_{y0_{33}}^2(a)) & 0 & 0 \\ -(C_{y0_{41}}^1(a) + C_{y0_{44}}^1(a)) & -(C_{y0_{42}}^2(a) + C_{y0_{43}}^2(a)) & 0 & \frac{(e^{\lambda b} - 1)}{\lambda b} \end{pmatrix}, \\ A_{23} &= \begin{pmatrix} -x_{11}e^{d_1(a)} & -x_{12}e^{d_2(a)} & -x_{13}e^{d_3(a)} & -x_{14}e^{d_4(a)} \\ -x_{21}e^{d_1(a)} & -x_{22}e^{d_2(a)} & -x_{23}e^{d_3(a)} & -x_{24}e^{d_4(a)} \\ -x_{31}e^{d_1(a)} & -x_{32}e^{d_2(a)} & -x_{33}e^{d_3(a)} & -x_{34}e^{d_4(a)} \\ -x_{41}e^{d_1(a)} & -x_{42}e^{d_2(a)} & -x_{43}e^{d_3(a)} & -x_{44}e^{d_4(a)} \end{pmatrix}, \quad A_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} &= \begin{pmatrix} -(C_{x011}^1(0) + C_{x012}^1(0)) & -(C_{x013}^2(0) + C_{x014}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x021}^1(0) + C_{x022}^1(0)) & -(C_{x023}^2(0) + C_{x024}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x031}^1(0) + C_{x032}^1(0)) & -(C_{x033}^2(0) + C_{x034}^2(0)) & 0 & 0 \\ -(C_{x041}^1(0) + C_{x042}^1(0)) & -(C_{x043}^2(0) + C_{x044}^2(0)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_{32} &= \begin{pmatrix} \frac{(1 - e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 & C_{xa11}^1(0) & C_{xa14}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} & C_{xa21}^1(0) & C_{xa24}^2(0) \\ 0 & \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} & C_{xa31}^1(0) & C_{xa34}^2(0) \\ \frac{(1 - e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 & C_{xa41}^1(0) & C_{xa44}^2(0) \end{pmatrix}, \\
A_{33} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{34} = \begin{pmatrix} -y_{11}e^{e_1(0)} & -y_{12}e^{e_2(0)} & -y_{13}e^{e_3(0)} & -y_{14}e^{e_4(0)} \\ -y_{21}e^{e_1(0)} & -y_{22}e^{e_2(0)} & -y_{23}e^{e_3(0)} & -y_{24}e^{e_4(0)} \\ -y_{31}e^{e_1(0)} & -y_{32}e^{e_2(0)} & -y_{33}e^{e_3(0)} & -y_{34}e^{e_4(0)} \\ -y_{41}e^{e_1(0)} & -y_{42}e^{e_2(0)} & -y_{43}e^{e_3(0)} & -y_{44}e^{e_4(0)} \end{pmatrix}, \\
A_{41} &= \begin{pmatrix} -(C_{x011}^1(b) + C_{x012}^1(b)) & -(C_{x013}^2(b) + C_{x014}^2(b)) & \frac{(1 - e^{-\lambda a})}{\lambda a} & 0 \\ -(C_{x021}^1(b) + C_{x022}^1(b)) & -(C_{x023}^2(b) + C_{x024}^2(b)) & 0 & \frac{(e^{\lambda a} - 1)}{\lambda a} \\ -(C_{x031}^1(b) + C_{x032}^1(b)) & -(C_{x033}^2(b) + C_{x034}^2(b)) & 0 & 0 \\ -(C_{x041}^1(b) + C_{x042}^1(b)) & -(C_{x043}^2(b) + C_{x044}^2(b)) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_{42} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{xa11}^1(b) & C_{xa14}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa21}^1(b) & C_{xa24}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa31}^1(b) & C_{xa34}^2(b) \\ 0 & 0 & C_{xa41}^1(b) & C_{xa44}^2(b) \end{pmatrix}, \\
A_{43} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{44} = \begin{pmatrix} -y_{11}e^{e_1(b)} & -y_{12}e^{e_2(b)} & -y_{13}e^{e_3(b)} & -y_{14}e^{e_4(b)} \\ -y_{21}e^{e_1(b)} & -y_{22}e^{e_2(b)} & -y_{23}e^{e_3(b)} & -y_{24}e^{e_4(b)} \\ -y_{31}e^{e_1(b)} & -y_{32}e^{e_2(b)} & -y_{33}e^{e_3(b)} & -y_{34}e^{e_4(b)} \\ -y_{41}e^{e_1(b)} & -y_{42}e^{e_2(b)} & -y_{43}e^{e_3(b)} & -y_{44}e^{e_4(b)} \end{pmatrix}, \\
V_1 &= \begin{pmatrix} V_1^4 \\ V_3^4 \\ V_1^5 \\ V_2^5 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_1^6 \\ V_4^6 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Este caso, aqui identificado como problema 3, foi implementado no software *Matlab*, para o caso de  $N = 2$  e não se encontrou fluxos angulares médios negativos, os resultados para o fluxo escalar médio para  $x = 0.5$  considerando  $\sigma_s = 0.5, 0.1$  e  $0.05$  são apresentados na tabela (3.9).

Tabela 3.9: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.5cm$ , Problema 3.

$\sigma_s$	0.5	0.1	0.05
$\Phi_y(0.5)$	0.963	0.693	0.671

Também considerou-se aproximação para os fluxos angulares através de constantes, como sugerem as equações (3.54 - 3.57), porém fluxos angulares médios negativos ainda são observados;

$$\Psi(x, 0) = V^3 \quad (3.54)$$

$$\Psi(0, y) = V^4 \quad (3.55)$$

$$\Psi(x, b) = V^5 \quad (3.56)$$

$$\Psi(a, y) = V^6 \quad (3.57)$$

Em seguida considerou-se fonte presente em todo o domínio, isto é,  $Q(x, y) = 1$  para  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ , desta forma não se encontrou fluxos angulares negativos.

Diante deste resultados e aqueles obtidos para o Problema 1, pode-se verificar que o método  $LTS_N$  2D- DiagExp aponta ótimo desempenho na resolução de problemas  $S_N$  de transporte de nêutrons bidimensional, todavia uma desvantagem apontada em relação a este método é o tamanho da matriz do sistema linear a ser resolvido, obtido a partir da aplicação do método  $LTS_N$ , e o fato de que uma vez mudadas as condições de contorno a matriz dos coeficientes possuem uma nova formação, como pode ser observado em (3.37), (3.46) e (3.53).

## 4 NOVA PROPOSTA PARA APROXIMAÇÃO DOS FLUXOS ANGULARES DESCONHECIDOS NOS CONTORNOS

Diante dos resultados obtidos pelo método  $LTS_N$  2D Diag- Exp, neste capítulo apresenta-se nova proposta para a aproximação dos termos desconhecidos nos contornos, principalmente com o objetivo de superar a presença de fluxos angulares negativos e facilitar a aplicação das condições de contorno. Esta proposta consiste de uma varredura unidimensional através de retas características sobre o domínio bidimensional, problema 1, de forma que em cada reta se considerou o problemas de transporte de nêutrons unidimensional. Dessa maneira, através de um conjunto de problemas unidimensionais pode-se aproximar os fluxos angulares desconhecidos nos contornos. Este método permitiu a redução do números de equações do sistema linear procedente da aplicação do método  $LTS_N$ , e a simplificação da formação da matriz dos coeficientes do sistema.

### 4.1 Aproximação $LTS_N$ unidimensional

Com o objetivo de aprimorar o método estudado, desenvolveu-se uma nova metodologia que melhor representasse os fluxos desconhecidos nos contornos, para tal o problema no retângulo foi varrido por um conjunto discreto finito de retas características,  $r_k = y_k$ , onde  $y_k \in [0, b]$ , no sentido horizontal e  $r_k = x_k$ , com  $x_k \in [0, a]$ , no sentido vertical,  $k = 1, \dots, n$ . De maneira que os fluxos angulares desconhecidos nos contornos do domínio bidimensional, figura (3.1), serão aproximados pelos fluxos angulares nos contornos dos problemas de transporte de nêutrons nas retas  $r_k$ .



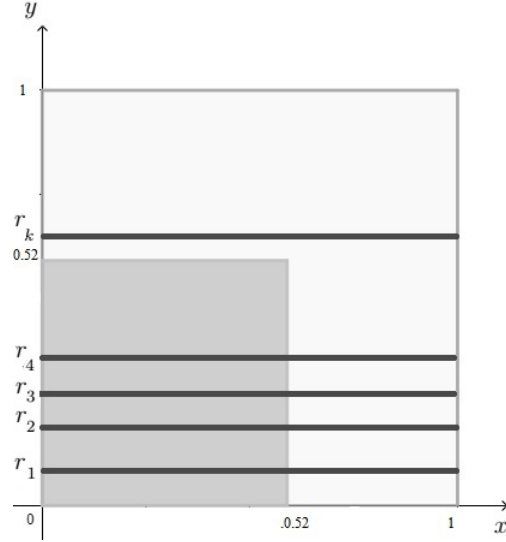


Figura 4.1: Representação da varredura no sentido horizontal

Em cada reta,  $r_k$ , se considerou o problema unidimensional heterogêneo, de forma que o domínio é dividido em duas regiões que se distinguem pela presença (ausência) de fonte. Assim cada problema unidimensional é representado pela seguinte equação  $S_N$  :

$$\gamma_n \frac{d\phi_{kn}^i}{dx}(x) + \sigma_t \phi_{kn}^i = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \phi_{kn}^i(x) \omega_n + q_k^i(x) \quad (4.1)$$

onde:

- $\phi_{kn}^i$  representa o fluxo angular de partículas unidimensional na região  $i$  correspondente a reta  $r_k$  para  $i = 1, 2$
- $\gamma_n$  e  $\omega_n$  para  $n = 1, \mathcal{N}$ , representam as direções e os pesos e  $\mathcal{N}$  representa a ordem da quadratura utilizada
- $q_k^1(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [0, 0.52] \text{ se } y_k \leq 0.52 \\ e^{-\beta(y_k - 0.52)} & \forall x \in [0, 0.52] \text{ se } y_k > 0.52 \end{cases}$   
representa a fonte de nêutrons na região 1, correspondente a reta  $r_k$
- $q_k^2(x) = 0$  se  $x \in (0.52, 1]$  representa a fonte de nêutrons na região 2, correspondente a reta  $r_k$ .

Os parâmetros  $\sigma_s$  e  $\sigma_t$  dos problemas unidimensionais são os mesmos do problema original.

Para os problemas unidimensionais de transporte de nêutrons, cujas retas  $r_k = y_k$  são traçadas no intervalo em que  $y_k \in (b_s, b]$ , considera-se uma fonte do tipo  $q(x)_k^1 = e^{-\beta(y_k - b_s)}$ , onde  $\beta$  é uma constante a ser determinada a priori de tal forma que este termo de fonte,  $q(x)_k^1$  seja muito próximo de zero. Este termo  $\beta$  foi considerado principalmente para que possa-se preservar a condição de contorno reflexiva para os problemas unidimensionais, uma vez sem este termo a única solução seria a trivial. Para todos os resultados obtidos considerou-se  $\beta = 25$ .

Para aplicarmos o método  $LTS_N$  é necessário uma mudança de variável, de forma, que  $L_1 = a_s$  e  $L_2 = a - a_s$ . Desta forma temos como condição de contorno:

- $\phi_{ki}^1(0) = \phi^1(0)_{k(i + \frac{N}{2})}$  reflexão,  $i = \{1, \dots, \frac{N}{2}\}$ ,
- $x = L_1$ , temos a justaposição das placas, aqui considera-se continuidade de fluxo, assim  $\phi_{ki}^1(L_1) = \phi_{ki}^2(0)$ ,  $i = \{1, \dots, N\}$ ,
- $\phi_{k(i + \frac{N}{2})}^2(L_2) = 0$   $i = \{1, \dots, \frac{N}{2}\}$ .

Aplicando o método  $LTS_N$  encontramos como solução:

$$\phi^1(x) = B^1(x)\xi^1 + H^1(x) \text{ para } x \in [0, L_1]$$

$$\phi^2(x) = B^2(x)\xi^2 \text{ para } x \in [0, L_2]$$

$$\text{onde } B^i(x) = \begin{cases} X e^{Dx} & \text{se } D < 0 \\ X e^{D(x-L_i)} & \text{se } D > 0 \end{cases}$$

$$H^1(x) = X \begin{cases} \int_0^x e^{D(x-\zeta)} q^1(\zeta) d\zeta X^{-1} & \text{se } D < 0 \\ \int_x^{L_1} e^{D(x-\zeta)} q^1(\zeta) d\zeta X^{-1} & \text{se } D > 0 \end{cases}$$

onde  $X$ ,  $X^{-1}$  e  $D$  correspondem, respectivamente, a matriz cujas colunas contêm os autovetores, a matriz inversa de  $X$  e matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz  $LTS_N$ , do problema unidimensional.

Para estimarmos os fluxos angulares de partículas bidimensionais nos contornos através dos fluxos angulares unidimensionais utilizou-se o método  $LTS_N$  associado a técnica DNI ("Inclusão de Nós Fictícios") [10] , [36], com esta técnica é possível interpolar as direções do problema bidimensional através das direções unidimensionais. Para tal consideramos o cosseno das direções  $\widehat{\Omega}_m$ ,  $m : 1, \frac{M}{2}$ , incluindo-os no esquema de quadratura e associando-os a pesos cujo valor é nulo. Dessa forma, o esquema de quadratura do problema 1D, torna-se:

- $\lambda_i = \cos(\widehat{\Omega}_i)$ ,  $\longrightarrow w_i = 0$  para  $i = 1, \frac{M}{4}$
- $\lambda_{i+\frac{M}{4}} = \gamma_i \longrightarrow w_{i+\frac{M}{4}} = \omega_i$  para  $i = 1, \mathcal{N}$  (direções do problema unidimensional)
- $\lambda_{i+\frac{M}{2}+\mathcal{N}} = \cos(\widehat{\Omega}_i)$ ,  $\longrightarrow w_{i+\frac{M}{2}+\mathcal{N}} = 0$  para  $i = \frac{M}{4} + 1, \frac{M}{2}$

Isto nos permite aproximar os fluxos angulares desconhecidos nos contornos através das soluções dos problemas unidimensionais calculados nos contornos dos problemas unidimensionais, isto é, de acordo com as condições de contorno e as equações (3.5) e (3.6), estima-se  $\Psi_m(0, y_k)$ :

$$\Psi_m(0, y_k) = \Psi_{m+\frac{M}{4}}(0, y_k) \equiv \phi_{km}^1(0) \quad (4.2)$$

$$\Psi_{m+\frac{M}{2}}(0, y_k) = \Psi_{m+\frac{3M}{4}}(0, y_k) \equiv \phi_{k(m+\frac{M}{4}+\mathcal{N})}^1(0) \quad (4.3)$$

para  $m = 1, \frac{M}{4}$ .

Em conformidade com as condições de contorno e as equações (3.9), estima-se  $\Psi_m(a, y_k)$ :

$$\Psi_m(a, y_k) = \Psi_{m+\frac{3M}{4}}(a, y_k) \equiv \phi_{km}^2(L_2)$$

para  $m = 1, \frac{M}{4}$ .

onde  $\phi_k^1(0)$  e  $\phi_k^2(L_2)$  representam o fluxo angular de partículas na origem e final do domínio 1-D de cada problema de transporte de nêutrons no retângulo  $r_k$ , respectivamente.

Analogamente aproximamos os fluxos em  $\Psi(x, 0)$  e  $\Psi(x, b)$ . Desta forma, para que as soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente dadas por:

$$\tilde{\Psi}_x(y) = \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}^*(y)}\mathbf{Y}^{-1}\tilde{\Psi}_x(0) + \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}y}\mathbf{Y}^{-1} * \left[ Q_x(y)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{a}\mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}(\Psi(a, y) - \Psi(0, y)) \right] \quad (4.4)$$

$$\hat{\Psi}_y(x) = \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}^*(x)}\mathbf{X}^{-1}\hat{\Psi}_y(0) + \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} * \left[ Q_y(x)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{b}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\Psi(x, b) - \Psi(x, 0)) \right] \quad (4.5)$$

fiquem completamente determinadas é necessário que sejam determinados os vetores  $\tilde{\Psi}_x(0)$  e  $\hat{\Psi}_y(0)$ . Para isto se resolvem-se dois sistemas lineares com  $M$  equações cada, que estão associados as equações (2.17) e (2.18), respectivamente, e obtidos através da avaliação das mesmas equações nos contornos  $x = a$  e  $y = b$ . Observamos que as equações (4.4) e (4.5) diferencem-se das equações (2.17) e (2.18) pois nestas equações não consideramos a mudança de variável utilizada com o objetivo de evitar problemas computacionais de overflow. Assim, considerando  $y = b$  em (4.4), determinamos o vetor  $\tilde{\Psi}_x(0)$ :

$$\tilde{\Psi}_x(b) = \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}^*(b)}\mathbf{Y}^{-1}\tilde{\Psi}_x(0) + \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}b}\mathbf{Y}^{-1} * \left[ Q_x(b)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{1} - \frac{1}{a}\mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}(\Psi(a, b) - \Psi(0, b)) \right] \quad (4.6)$$

De acordo com as condições de contorno (3.10), (3.7), (3.8) e considerando o caso em que  $N=2$  temos que  $\tilde{\Psi}_{x3}(b) = \tilde{\Psi}_{x4}(b) = 0$  e  $\tilde{\Psi}_{x1}(0) = \tilde{\Psi}_{x4}(0)$  e  $\tilde{\Psi}_{x2}(0) = \tilde{\Psi}_{x3}(0)$ , logo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{x1}(b) \\ \tilde{\Psi}_{x2}(b) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{b}) \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{x1}(0) \\ \tilde{\Psi}_{x2}(0) \\ \tilde{\Psi}_{x2}(0) \\ \tilde{\Psi}_{x1}(0) \end{pmatrix} + \mathbf{H}(\mathbf{b}) - \mathbf{C}_{\mathbf{x}a}(\mathbf{b}) + \mathbf{C}_{\mathbf{x}0}(\mathbf{b}) \quad (4.7)$$

onde:

- $\mathbf{B}(\mathbf{b}) = \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}\mathbf{b}}\mathbf{Y}^{-1}$
- $\mathbf{H}(\mathbf{b}) = \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}\mathbf{b}}\mathbf{Y}^{-1} * \mathbf{Q}_x(\mathbf{b})\mathbf{N}^{-1}$
- $\mathbf{C}_{xa}(\mathbf{b}) = \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}\mathbf{b}}\mathbf{Y}^{-1} * \mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}\Psi(a, b)$
- $\mathbf{C}_{x0}(\mathbf{b}) = \mathbf{Y}\mathbf{e}^{\mathbf{E}\mathbf{b}}\mathbf{Y}^{-1} * \mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}\Psi(a, 0)$

Com isto o sistema determinado é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -(\mathbf{B}_{11}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{14}(\mathbf{b})) & -(\mathbf{B}_{12}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{13}(\mathbf{b})) & 0 \\ 0 & -(\mathbf{B}_{21}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{24}(\mathbf{b})) & -(\mathbf{B}_{22}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{23}(\mathbf{b})) & 0 \\ 0 & -(\mathbf{B}_{31}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{34}(\mathbf{b})) & -(\mathbf{B}_{32}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{33}(\mathbf{b})) & 0 \\ 0 & -(\mathbf{B}_{41}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{44}(\mathbf{b})) & -(\mathbf{B}_{42}(\mathbf{b}) + \mathbf{B}_{43}(\mathbf{b})) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{x1}(b) \\ \tilde{\Psi}_{x1}(0) \\ \tilde{\Psi}_{x2}(0) \\ \tilde{\Psi}_{x2}(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{b}) - \mathbf{C}_{1xa}(\mathbf{b}) + \mathbf{C}_{1x0}(\mathbf{b}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{b}) - \mathbf{C}_{2xa}(\mathbf{b}) + \mathbf{C}_{2x0}(\mathbf{b}) \\ \mathbf{H}_3(\mathbf{b}) - \mathbf{C}_{3xa}(\mathbf{b}) + \mathbf{C}_{3x0}(\mathbf{b}) \\ \mathbf{H}_4(\mathbf{b}) - \mathbf{C}_{4xa}(\mathbf{b}) + \mathbf{C}_{4x0}(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

De forma analoga, é determinando o vetor  $\hat{\Psi}_y(0)$ , a partir da equação (4.5) avaliada em  $x = a$  e das condições de contorno para  $x = 0$  e  $x = a$ . Destaca-se para a redução do número de equações no sistema linear (4.8), e para a simplificação da formação da matriz dos coeficientes deste sistema linear quando comparada com matriz dos coeficientes (3.37), uma vez que através desta nova abordagem para a aproximação dos fluxos desconhecidos nos contornos, resolver o sistema linear cuja solução permite calcular os fluxos angulares através (4.5) ou (4.4) equivale-se a resolver o sistema linear associado a solução  $LTS_N$  unidimensional.

## 4.2 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos obtidos pelo método  $LTS_N$  2D considerando a nova proposta de aproximação. Por simplicidade, denotaremos por  $LTS_N$  2D-  $LTS_N$  1D, para o problema I, descrito no capítulo anterior. Os parâmetros do problema são:

- $a = b = 1cm$ ;

- $Q(x, y) = 1$  para  $0 \leq x \leq a_s = 0.52cm$  e  $0 \leq y \leq b_s = 0.52cm$ ;
- $\sigma_t = 1.0cm^{-1}$
- e para a seção de choque de espalhamento consideramos 3 casos:  $\sigma_s = 0.5cm^{-1}$ ,  $\sigma_s = 0.1cm^{-1}$  e  $\sigma_s = 0.05cm^{-1}$ .

Para todos os valores de  $\sigma_s$  e  $N$ , utilizou-se vinte direções para o problema unidimensional associadas as  $\frac{M}{2}$  direções correspondentes ao problema bidimensional.

Considerou-se sobre o domínio uma varredura com 10, 20, 30, 40 e 50 retas. Os resultados apresentados nas tabelas (4.1), (4.2) e (4.3), exibem fluxos escalares médios para  $x = 0.5, 0.7$  e  $0.98$ , respectivamente para as 10, 20, 30, 40 e 50 retas sobre o domínio do problema 1, através destes resultados pode-se observar a convergência numérica do método. Para os resultados apresentados e comparados com a literatura foram utilizados cinquenta retas para a varredura do domínio.

Tabela 4.1: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.5cm$  considerando 10, 20, 30, 40 e 50

retas na varredura						
Número de Retas:		10	20	30	40	50
$\sigma_s$	N					
0.5	2	0.283	0.281	0.280	0.280	0.280
	4	0.322	0.320	0.319	0.319	0.319
	6	0.329	0.326	0.325	0.325	0.325
	8	0.331	0.329	0.328	0.328	0.328
	12	0.333	0.331	0.330	0.330	0.330
	16	0.334	0.331	0.330	0.330	0.330
0.1	2	0.213	0.211	0.211	0.211	0.211
	4	0.230	0.229	0.229	0.229	0.229
	6	0.233	0.231	0.231	0.231	0.231
	8	0.234	0.233	0.232	0.232	0.232
	12	0.235	0.234	0.233	0.233	0.233
	16	0.235	0.234	0.234	0.234	0.234
0.05	2	0.206	0.205	0.204	0.204	0.204
	4	0.222	0.221	0.221	0.221	0.220
	6	0.224	0.223	0.223	0.223	0.223
	8	0.225	0.224	0.224	0.224	0.224
	12	0.226	0.225	0.225	0.225	0.225
	16	0.227	0.226	0.225	0.225	0.225

Tabela 4.2: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.7cm$  considerando 10, 20, 30, 40 e 50

retas						
Número de Retas:		10	20	30	40	50
$\sigma_s$	N					
0.5	2	0.216	0.212	0.211	0.211	0.211
	4	0.226	0.222	0.221	0.221	0.221
	6	0.223	0.219	0.217	0.217	0.218
	8	0.221	0.216	0.214	0.214	0.214
	12	0.219	0.212	0.211	0.211	0.211
	16	0.218	0.211	0.209	0.209	0.209
0.1	2	0.153	0.151	0.151	0.151	0.151
	4	0.149	0.146	0.146	0.146	0.146
	6	0.144	0.141	0.140	0.140	0.140
	8	0.140	0.137	0.137	0.137	0.137
	12	0.137	0.134	0.133	0.133	0.133
	16	0.136	0.132	0.131	0.131	0.131
0.05	2	0.147	0.146	0.145	0.145	0.145
	4	0.142	0.140	0.139	0.139	0.139
	6	0.137	0.134	0.134	0.134	0.134
	8	0.133	0.131	0.130	0.130	0.130
	12	0.130	0.127	0.126	0.126	0.126
	16	0.129	0.125	0.124	0.124	0.124



Tabela 4.3: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.98cm$  considerando 10, 20, 30, 40 e 50 retas

Número de Retas:		10	20	30	40	50
0.5	2	0.139	0.138	0.137	0.136	0.137
	4	0.130	0.131	0.129	0.128	0.128
	6	0.125	0.127	0.125	0.123	0.123
	8	0.123	0.126	0.123	0.120	0.121
	12	0.122	0.127	0.122	0.117	0.119
	16	0.120	0.131	0.123	0.115	0.118
0.1	2	0.095	0.095	0.094	0.094	0.094
	4	0.081	0.082	0.081	0.080	0.080
	6	0.076	0.078	0.076	0.075	0.075
	8	0.074	0.076	0.074	0.073	0.073
	12	0.073	0.077	0.074	0.071	0.072
	16	0.072	0.081	0.075	0.070	0.070
0.05	2	0.091	0.091	0.090	0.090	0.090
	4	0.077	0.078	0.077	0.076	0.076
	6	0.072	0.074	0.072	0.071	0.071
	8	0.070	0.072	0.070	0.069	0.069
	12	0.069	0.073	0.070	0.067	0.068
	16	0.068	0.076	0.071	0.065	0.067

As tabelas (4.4), (4.5), (4.6) exibem os resultados apresentados por Tres [50], Cromiansk [11], e os obtidos pelos métodos  $LTS_N$  2D-DiagExp e  $LTS_N$  2D-  $LTS_N$

1D. Destacamos novamente que os resultados deste trabalho são comparados com os trabalhos de [11] e [50] e a comparação se dá por ordem de grandeza.

Tabela 4.4: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.5cm$ .

$\sigma_s$	Tsay and Loyalka	TWOTRAN-II	[50]	[11]	LTS <sub>N</sub> 2D- ExpDiag	LTS <sub>N</sub> 2D	LTS <sub>N</sub> 1D
	N=5,7,9,11,15	N=4,8,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
0.5	0.359604	0.337412	0.304	0.326	0.295	0.280	
	0.358422	0.337707	0.320	0.337	0.312	0.319	
	0.357414	0.339794	0.320	0.336	0.313	0.325	
	0.356678		0.320	0.335	0.313	0.328	
	0.355885		0.320	0.335	0.313	0.330	
			0.321	0.335	0.314	0.330	
0.1	0.258802	0.239483	0.219	0.236	0.211	0.211	
	0.259150	0.241679	0.226	0.236	0.219	0.229	
	0.259131	0.244032	0.226	0.235	0.219	0.231	
	0.259030		0.225	0.234	0.219	0.232	
	0.258906		0.226	0.234	0.220	0.233	
			0.227	0.234	0.220	0.234	
0.05	0.250097	0.231102	0.212	0.228	0.204	0.204	
	0.250569	0.233421	0.218	0.228	0.211	0.220	
	0.250636	0.235787	0.217	0.226	0.211	0.223	
	0.250591		0.217	0.226	0.211	0.224	
	0.250529		0.218	0.226	0.212	0.225	
			0.218	0.226	0.213	0.225	

Tabela 4.5: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.7$ .

$\sigma_s$	Tsay and Loyalka	TWOTRAN-II	[50]	[11]	LTS <sub>N</sub> 2D ExpDiag	LTS <sub>N</sub> 2D
	N=5,7,9,11,15	N=4,8,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	LTS <sub>N</sub> 1D N=2,4,6,8,12,16
0.5	0.149801	0.157320	0.210	0.225	0.201	0.211
	0.139050	0.139581	0.199	0.207	0.196	0.221
	0.138539	0.133426	0.190	0.196	0.187	0.218
	0.138460		0.184	0.189	0.180	0.214
	0.137048		0.178	0.182	0.174	0.211
			0.175	0.179	0.172	0.209
0.1	0.093601	0.100591	0.144	0.156	0.141	0.151
	0.083932	0.085131	0.130	0.135	0.128	0.146
	0.083759	0.078914	0.122	0.126	0.120	0.140
	0.083911		0.117	0.120	0.115	0.137
	0.082774		0.112	0.115	0.110	0.133
			0.110	0.112	0.110	0.131
0.05	0.088990	0.095914	0.138	0.150	0.135	0.145
	0.079448	0.080662	0.124	0.129	0.122	0.139
	0.079301	0.074448	0.116	0.120	0.114	0.134
	0.079469		0.112	0.114	0.110	0.130
	0.078362		0.107	0.109	0.105	0.126
			0.105	0.107	0.103	0.124

Tabela 4.6: Fluxos Escalares  $\hat{\Phi}_y(x)$  para  $x = 0.98$ .

$\sigma_s$	Tsay and Loyalka	TWOTRAN-II	[50]	[11]	LTS <sub>N</sub> 2D ExpDiag	LTS <sub>N</sub> 2D LTS <sub>N</sub> 1D
	N=5,7,9,11,15	N=4,8,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16	N=2,4,6,8,12,16
0.5	0.054250	0.045536	0.112	0.107	0.115	0.137
	0.053812	0.048085	0.092	0.084	0.097	0.128
	0.053558	0.052366	0.085	0.076	0.090	0.123
	0.053442		0.082	0.072	0.087	0.121
	0.053413		0.081	0.070	0.086	0.119
			0.080	0.070	0.085	0.118
0.1	0.032577	0.025670	0.072	0.066	0.077	0.094
	0.032669	0.028969	0.055	0.048	0.061	0.080
	0.032655	0.032432	0.050	0.043	0.057	0.075
	0.032637		0.048	0.040	0.055	0.073
	0.032622		0.047	0.040	0.054	0.072
			0.047	0.040	0.054	0.071
0.05	0.030823	0.023777	0.069	0.062	0.074	0.09
	0.030952	0.027299	0.052	0.045	0.059	0.076
	0.030956	0.030978	0.047	0.040	0.054	0.071
	0.030945		0.045	0.038	0.052	0.069
	0.030931		0.045	0.037	0.051	0.068
			0.045	0.037	0.051	0.067

Através das tabelas (4.4),(4.5) e (4.6) podem-se observar que os resultados obtidos são comparáveis com os apresentados na literatura e apresentam em todos os casos a mesma ordem de grandeza. Os resultados obtidos para os fluxos angulares médios, considerando  $\sigma_s = 0.5$ , não apresentam valores negativos, todavia,

nos demais casos, isto é, considerando que  $\sigma_s = 0.1$  ou  $\sigma_s = 0.05$ , foram observados resultados negativos para os fluxos angulares médios para valores de  $x \geq 0.5$  e para os valores mais altos de  $N$ . As tabelas (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) apresentam os fluxos angulares médios, considerando o domínio subdividido em intervalos de comprimento 0.1cm e  $\sigma = 0.5$ , para os casos em que  $N = 2, 4$  e  $6$ .

Tabela 4.7: Fluxos angulares médios,  $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que  $N=2$ , considerando  $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via  $LTS_N$  2D-  $LTS_N$  1D

x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3
0.149896183201	0.165049980315	0.177235384763	0.186365596207
0.588051865155	0.645823493082	0.693849007552	0.733119502107
0.588051865155	0.519345631960	0.438291404659	0.343218196198
0.149896183201	0.131867235935	0.111073872692	8.765745623218E-02
x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7
0.192350838296	0.195090186284	0.161580039899	0.150540269463
0.764451671578	0.788506901878	0.720126426291	0.625456295802
0.232158681506	0.102803426912	5.018588574049E-02	3.587565006354E-02
6.180574465178E-02	3.377193507783E-02	4.294442643624E-02	3.373967984196E-02
x=0.8	x=0.9	x=1.0	
0.141999980870	0.132019916756	0.122727165227	
0.541694841578	0.469431542035	0.406028716183	
2.394697228987E-02	1.078294649073E-02	0.000000000000	
2.164542500514E-02	1.270634262228E-02	0.000000000000	

Tabela 4.8: Fluxos angulares médios,  $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que  $N=4$ , considerando  $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via  $LTS_N$  2D-  $LTS_N$  1D

x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3
0.193002574360	0.216571469561	0.237062740812	0.254279320125
0.360722269437	0.386369935166	0.404449050821	0.415624143545
0.148296138403	0.160522496730	0.168515630092	0.172111204980
0.193002574360	0.166553444589	0.137445322866	0.227254899869
0.360722269437	0.326556559086	0.282607822453	0.105949695466
0.148296138403	0.131990016455	0.111806840682	8.807849254334E-02
0.439277493685	0.379621599733	0.313256363405	0.239959234926
0.702041889150	0.639179954413	0.557045462781	0.450879169588
0.830883821563	0.757189585401	0.660640667582	0.535293253576
0.439277493685	0.492443130314	0.539313578362	0.580041562475
0.702041889150	0.749254489083	0.783539443559	0.806893066920
0.830883821563	0.886236790917	0.926639154031	0.954589950630
x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7
0.268002378233	0.277969373525	0.255046672445	0.238810768674
0.420295136896	0.418607427895	0.337707805026	0.280683356815
0.171086264218	0.165118115995	0.112782347552	0.108641184124
7.241912195100E-02	3.732434504092E-02	3.328469839594E-02	2.445940697669E-02
0.158469566913	7.375559942891E-02	6.373411480017E-02	4.899863778895E-02
6.137563829342E-02	3.266036945296E-02	5.931082522942E-02	4.743930717895E-02
0.159528478427	7.181293175675E-02	3.685808422186E-02	2.542358104147E-02
0.314477034693	0.139786121188	7.084131722780E-02	5.150412112202E-02
0.373367008954	0.164711439073	7.352415654303E-02	5.244989539228E-02
0.614720018849	0.643364278225	0.610874835249	0.558586995810
0.820716107884	0.825906073867	0.699110948958	0.557115303637
0.971867722679	0.979653885552	0.835534045537	0.661463322773
x=0.8	x=0.9	x=1.0	
0.223714011829	0.208005551063	0.193010472745	
0.235718336178	0.197346871181	0.165425359729	
0.106238415191	9.951628536341E-02	9.207133069868E-02	
1.518332552546E-02	7.941146229538E-03	0.0000000000	
3.177369233205E-02	1.896619841866E-02	0.0000000000	
2.981085544313E-02	2.077760466099E-02	0.0000000000	
1.613838587507E-02	7.183612394042E-03	0.0000000000	
3.492751685082E-02	1.605568789543E-02	0.0000000000	
3.611802809606E-02	1.495702324663E-02	0.0000000000	
0.508874309730	0.462940780722	0.419942276282	
0.443762596914	0.354537976556	0.283288304234	
0.522295511615	0.413874752425	0.327779416530	

Tabela 4.9: Fluxos angulares médios,  $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que  $N=6$ , considerando  $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via  $LTS_N$  2D-  $LTS_N$  1D

x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
0.225142585443	0.253399775308	0.278264092969	0.299553376077	0.317035212932	0.330389262754
0.273854349337	0.304308415058	0.329936153997	0.350690073918	0.366437130574	0.376913262422
0.460765408105	0.485027614787	0.500137163962	0.507335348918	0.507262120696	0.500012697004
0.112434177186	0.125582397060	0.136266121557	0.144115525302	0.148719221628	0.149572793608
0.274168496242	0.290222011504	0.299690062365	0.303011075965	0.300273226240	0.291192517030
0.165871741037	0.177161111832	0.183354960801	0.184425749180	0.180141411575	0.169997864414
0.225142585443	0.193658747375	0.159133115735	0.121807654197	8.202788766777E-02	4.030223762473E-02
0.273854349337	0.238577903769	0.198483043835	0.153624142301	0.104169286741	5.048409003048E-02
0.460765408105	0.425394563975	0.376064578240	0.308768307022	0.217974558454	9.612339171412E-02
0.112434177186	9.719868524734E-02	8.031215768322E-02	6.232955661755E-02	4.399867478026E-02	2.635644988784E-02
0.274168496242	0.250741751188	0.218791088842	0.176782692372	0.122784197275	5.447215517677E-02
0.165871741037	0.149377089130	0.127513004915	0.100181136335	6.753779936024E-02	3.029869098470E-02
0.406690781160	0.350277103716	0.287979266138	0.219715160712	0.145469292072	6.534789983159E-02
0.495624127449	0.432814085675	0.360834073771	0.279050721521	0.186835678961	8.363224821600E-02
0.746661014766	0.692989945740	0.617032122739	0.510990878629	0.363821056050	0.159939590059
0.579248219152	0.506055915225	0.422052773321	0.326346091756	0.218007202974	9.613162772348E-02
0.859880685474	0.798962406670	0.712459493444	0.591074561043	0.421578825135	0.185211923016
0.926029032609	0.860876587204	0.768212727879	0.637863278860	0.455323676496	0.199977228752
0.406690781160	0.457326347905	0.502278711232	0.541600114401	0.575268560909	0.603152590078
0.495624127449	0.549854116230	0.596012937021	0.634495940307	0.665552487191	0.689248732350
0.746661014766	0.783500218514	0.807253424045	0.820392040949	0.824401428958	0.819957820641
0.579248219152	0.642443541205	0.696344143073	0.741512360665	0.778341751015	0.807022985461
0.859880685474	0.901700600479	0.928876845412	0.944367977477	0.949994153063	0.946661696808
0.926029032609	0.970758917367	0.999935065648	1.01680064960	1.02337142982	1.02068816175

Tabela 4.10: Fluxos angulares médios,  $\hat{\Psi}_y(0.5)$ , para o caso em que  $N=6$ , considerando  $\sigma_s = 0.5$ , obtidos via  $LTS_N$  2D-  $LTS_N$  1D

x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1.0
0.308144971552	0.287709094513	0.268296046233	0.248816222950	0.230233297358
0.340482651647	0.308790120548	0.280013569106	0.252478604074	0.227169674060
0.383256949186	0.297821942709	0.235209570158	0.186596960264	0.148894348190
0.123234553240	0.119363341024	0.116333282993	0.110647793172	0.104871556055
0.205646311769	0.172770872132	0.149067814051	0.126995527685	0.108045866499
0.102564993165	0.100193973387	9.907302806553E-02	9.240416339326E-02	8.433830361419E-02
3.146451750336E-02	2.267516395780E-02	1.402769364541E-02	7.098308919077E-03	0.000000000000
4.007436988474E-02	2.928071284626E-02	1.832359639595E-02	9.555922745907E-03	0.000000000000
7.356536631583E-02	5.673016848963E-02	3.736270833237E-02	2.334814377758E-02	0.000000000000
3.755777639756E-02	2.856812979007E-02	1.758440082107E-02	1.015920404294E-02	0.000000000000
6.898155370936E-02	5.486022320909E-02	3.471630471568E-02	2.598712279957E-02	0.000000000000
6.632120940466E-02	5.377494797988E-02	3.318039009742E-02	2.751872834589E-02	0.000000000000
3.405569168708E-02	2.336683823910E-02	1.470567417841E-02	6.564007183195E-03	0.000000000000
4.353183354503E-02	3.025970688494E-02	1.933915248439E-02	8.727094740088E-03	0.000000000000
8.058848300546E-02	5.959521665715E-02	4.141741191726E-02	1.930481583115E-02	0.000000000000
4.483556059319E-02	3.062886217726E-02	1.972209445328E-02	8.414563475661E-03	0.000000000000
8.336976029838E-02	6.072982594297E-02	4.302314559770E-02	1.770358710291E-02	0.000000000000
8.499471552656E-02	6.139271895821E-02	4.396129201903E-02	1.676807269013E-02	0.000000000000
0.574929885304	0.529103650251	0.485091891114	0.444000626594	0.405225381794
0.638952551270	0.569037240245	0.504888442231	0.447335213653	0.395190969862
0.655384180159	0.489419709944	0.367192191817	0.277915661924	0.211480600757
0.751498428663	0.667170219357	0.589683391174	0.520810991675	0.458547791373
0.763151332798	0.565295783622	0.419459623059	0.314079468189	0.236265853630
0.826114058072	0.609626215157	0.449996756438	0.335208093591	0.250746583883

Entende-se que o método apresentado é extremamente promissor uma vez que os resultados obtidos evidenciam para sua validade e simplicidade, todavia



atestamos para a necessidade de estudos complementares, dentre estes pretende-se ainda melhorar a suposição para os fluxos angulares nos contornos.

## 5 CONCLUSÃO

Esta pesquisa buscou a partir do estudo da solução  $LTS_N$  de problema de transporte de nêutrons com espalhamento isotrópico, com fonte fixa e em geometria cartesiana bidimensional aprimorar o método apresentado em trabalhos anteriores, desta forma desenvolveu-se uma reformulação do referido método,  $LTS_N$ -2D-DiagExp, ao qual destacou-se a redução do número de equações do sistema linear obtido pela aplicação do método  $LTS_N$  para a determinação do fluxo angular médio de nêutrons de  $6M$  para  $4M$  equações, possibilitando um ganho computacional expressivo a medida que aumenta-se a ordem de quadratura  $N$  e conseqüentemente o valor de  $M$ . Os resultados numéricos atestam para a validade do método, todavia observou-se a presença de valores negativos para o fluxo angular médio, tabelas (3.4) e (3.8).

Dentro deste contexto, apresentou-se uma nova abordagem para o tratamento dos fluxos angulares desconhecidos nos contornos, isto é, o domínio bidimensional foi varrido por um conjunto de retas características, de modo que tais fluxos desconhecidos são aproximados pelos fluxos angulares nos contornos de problemas de transporte unidimensionais cujo domínio corresponde a cada reta da varredura. Outrossim, os termos desconhecidos na fronteira do domínio bidimensional foram estimados pela solução  $LTS_N$  unidimensional calculada nos contornos de cada reta característica.

Esta formulação permitiu o desacoplamento das soluções dos fluxos angulares médios em  $x$  e  $y$ , possibilitando a redução do sistema linear oriundo da aplicação do método  $LTS_N$ , de  $4M$  equações para dois sistemas lineares com  $M$  equações, isto é, através desta abordagem, a resolução dos problemas  $S_N$  integrados equivalem-se a resolução do problema  $S_N$  unidimensional, ademais a matriz dos coeficientes do sistema linear obtido pelo método  $LTS_N$  2D-1D apresenta formação

simplificada quando comparada com a matriz de coeficientes do sistema linear obtido pelo método  $LTS_N$  2D- DiagExp para as condições de contorno.

Os resultados obtidos são comparáveis com os disponíveis na literatura e constata-se para a validade do método, ainda sim, atesta-se que existe a necessidade de estudos complementares a nova metodologia proposta.

## Referências Bibliográficas

- [1] Barichello, L.B. ; Cabrera, L.C.; Prolo Filho, J.F. *An analytical approach for a nodal scheme of two-dimensional neutron transport problems*. Annals of Nuclear Energy, vol. 38, p. 1310-1317, 2011.
- [2] Barichello, L.B.; Vilhena, M.T. *A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation*. Kerntechnik- v.58, p.182-184, 1993.
- [3] Barros, R.C. *A Spectral-Nodal Method for the Solution of Discrete Ordinates Problems in One and Two-dimensional Cartesian Geometry*, PhD Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1990.
- [4] Barros, R.C.; Larsen, E.W. *Método Espectro Nodal Para Problemas de Ordenadas Discretas em Geometria X,Y*. Instituto de Engenharia Nuclear, 1991.
- [5] Barros, R. and Larsen, E.W. *A spectral nodal method for one-group X,Y-geometry discrete ordinates problems*. Nuclear Science and Engineering, v. 111, p. 34-45, 1992.
- [6] Batistela, C.; Vilhena, M.; *Cálculo de Criticalidade pelo Método  $LTS_N$*  . In XI ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica. Poços de Caldas, MG, Brasil. v.1, p. 226-231, 1997a.
- [7] Batistela, C.; Vilhena, M.; *Criticality by the  $LTS_N$  Method*. Journal of Nuclear Science and Tecnology, v.34, p. 603-606, 1997b.
- [8] Bonemberger, N.B. *Método  $LTS_N$  para  $N$  Inteiro*. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2005.
- [9] Cacuci, D.G. *Handbook of Nuclear Engineering*. Springer, New York.

- [10] Chalhoub, E. S. and Garcia, R. D. M.; *The equivalence between two techniques of angular interpolation for the discrete-ordinates method* Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, vol.64, p. 517-535.
- [11] Cromiansk, S. R. ; *Um Estudo Sobre Equações Auxiliares em Formulações Nodais Explícitas para Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Bidimensional* Tese de Doutorado do Programa de Pós- Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2016.
- [12] Dominguez, D.S.; Barros, R.C. *A Spectral Green's Function Linear-Nodal Method for Monoenergetic  $x,y$  Geometry External Source Discrete Ordinates Problems*. In: Joint International Topical Meeting on Mathematics & Computation and Supercomputing in Nuclear Applications, Monterey, California, April 15-19, 2007.
- [13] Dominguez, D.S.; Barros, R.C. *The Spectral Green's Function Linear-Nodal Method for One-Speed  $x,y$  Geometry Discrete Ordinates Deep Penetration Problems*. Annals of Nuclear Energy, v.34, p. 958-966, 2007
- [14] Dominguez, D.S. *Método espectro-nodal linear para problemas de transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas em geometria bidimensional cartesiana*. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, UERJ, Rio de Janeiro, 2006.
- [15] Foletto, T. *Construção da Solução  $LTS_N$  Anisotrópica a Partir de um Sistema Recursivo de Soluções  $LTS_N$  Isotrópicas*, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2015.
- [16] Garcia, R.D.M. *Métodos para solução da equação de transporte de partículas integro-diferencial*. Escola de verão em teoria de transporte de partículas nêutras, PUC, Porto Alegre, 2002.

- [17] Gonçalves, G.A.; Orengo, G.; Vilhena, M.T.; Graça, C.O. *LTSN Solution of the Adjoint Neutron Transport Equation with Arbitrary Source for High Order of Quadrature in a Homogeneous Slab*. Journal Quantative Spectroscopy e Radiative Transfer. v.66, p. 271-276, 2000.
- [18] Gonçalves, G.A.; Segatto, C.F.; Vilhena, M.T. *The LTSN Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. v.66, p. 271-276, 2000.
- [19] Hauser, E.B. *Estudo e Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Bi-dimensional pelo Método  $LTS_N$  para Elevadas Ordens de Quadraturas Angulares:  $LTS_N$  2D-Diag e  $LTS_N$  2D-DiagExp*, Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mécânica, UFRGS, Porto Alegre, 2002.
- [20] Hauser, E.B. *Desenvolvimento de Um Método Nodal Analítico Para Problemas de Ordenadas Discretas em Geometria Cartesiana Bidimensional e Tridimensional em Domínios Homogêneo e Heterogêneo*, Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- [21] Hauser, E.B.; Pazos, R.; Vilhena, M. *Solution and Study of Nodal Neutron Transport Equation Applying the  $LTS_N$  DiagExp Method*. In Annals of 18th International Conference on Transport Theory, Rio de Janeiro,RJ, Brasil, p. 303-307, 2003.
- [22] Jenal, J.P.; Erickson, P.J.; Rhoades, W.A.; Simpson, D.B. and Willians, M.L. *The Generation of a Computer Library for Discrete Ordinates Quadratures Sets*, Tennessee, 1977.

- [23] Lawrence, R.D. *Progress in Nodal Methods for the Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equation*. Progress in Nuclear Energy, v. 17, p. 271-301, 1986.
- [24] Lewis, E. and Miller, W. 1993. *Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley and Sons, New York.
- [25] Marona, D.; Segatto, C.; Vilhena, M. *On the LTSN Solution of the Transport Equation in a Slab for  $c = 1$* . In Anais do XV ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica, Santos, SP, Brasil, 2007.
- [26] Mello, J.A.M. ; Barros, R.C. *An Exponential Spectral Nodal Method for One-Speed  $x$ - $y$  Geometry Deep Penetration Discrete Ordinates Problems*, Annals of Nuclear Energy, v. 29, p. 1855-1869, 2002.
- [27] Oliveira, J.; Cardona, A.; Vilhena, M. *Solution of the One-Dimension Time-Dependent Discrete Ordinates Problem in a Slab by the Spectral and  $LTS_N$  Methods*. Annals of Nuclear Energy, v.29, p. 13-20, 2002.
- [28] Pazos, R.P.; Vilhena, M.T. *Convergence in Transport Theory*. Applied Numerical Mathematics. v.30, p. 79-92, 1999a.
- [29] Pazos, R.P.; Vilhena, M.T. *Convergence of the  $LTS_N$  Method: Approach of  $c_0$  Semigroups*. Progress in Nuclear Energy. v.30, p. 77-86, 1999b.
- [30] Picoloto, C.B. *Formulações Espectronodais em Cálculos Neutrônicos Multidimensionais*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre , 2015.
- [31] Prolo Filho, J.F. ; Barichello, L. B. *General Expressions for Auxiliary Equations of a Nodal Formulation for Two-dimensional Transport Calculation*. Journal of Computational and Theoretical Transport, v.43, p.352-373, 2014.

- [32] Prolo Filho, J.F. *Abordagens espectralis para modelos multidimensionais em transporte de partículas*. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2011.
- [33] Rens, S.P. *Solução da equação de transferência radiativa dependente do tempo pelos métodos espectral e  $LTS_N$* . Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 1999.
- [34] Rigolli, B. *Método  $LTS_N$  não Espectral*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2015.
- [35] Rost, B., *Solução da Equação de Transferência Radiativa Unidimensional em Geometria Cartesiana em Nuvens pela Transformada de Laplace*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica- UFRGS- Porto Alegre, 2008.
- [36] Salazar, S. B., *Solução da Equação de Transporte Dependente do Tempo em Multi-Regiões pelo Método  $LTS_N$* . Dissertação de Mestrado do Programa de Pós- Graduação em Matemática Aplicada- UFRGS- Porto Alegre, 2008.
- [37] Santos, M. A.  *$MGLTS_N^M$  Aproximação Angular Multigrid em uma placa plana*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2005.
- [38] Segatto, C.F. e Vilhena, M.T. *Solução Genérica Da Equação de Transporte Unidimensional Para Elevadas Ordens de Quadratura*. In Anais do XI Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica, v.1, p. 238-242, Minas Gerais, Brasil.



- [39] Segatto, C.F.; Vilhena, M.T.; Gomes, M. *The One-Dimensional LTSN Solution in a Slab with High Degree of Quadrature*. Annals of Nuclear Energy, v.26, p.925-934, 1999b.
- [40] Segatto, C.F.; Vilhena, M.T.; Gonçalves, T.T. *An Analytical Integral Formulation for the Time-Dependent SN Transport Equation in a Slab by The Double Laplace Transform Techique*. Kerntechnik, v.73, p. 176-178, 2008.
- [41] Segatto, C.; Vilhena, M. *Extension of the LTSN Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimutal Symmetry*. Annals of Nuclear Energy, v.21, p. 701-710, 1994.
- [42] Segatto, C. F. *Formulação LTSN para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo*. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 1995.
- [43] Segatto, C.F.; Vilhena, M.T.; Tavares, L.S. *The Determination of Radiant Parameters by the  $LTS_N$  Method*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, v.70, p. 227-236, 2001.
- [44] Segatto, C.F.; Vargas, R.F.; Vilhena, M.T.; Bodmann, B.E.J. *A Solution for the non-linear SN radiative-conductive problem in a grey plane-parallel participating medium*. Journal of Thermal Sciences, v.49, p. 1493-1499, 2010.
- [45] Segatto, C.F.; Vilhena, M.T.; Bogado Leite, S.Q. *The  $LTS_N$  Angular Multigrad Approach in a Slab*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. v.95, p. 415-422, 2005.
- [46] Segatto, C.F.; Vilhena, M.T.; Gonçalves, T.T. *On the Analytical Solution of the Neutron  $S_N$  Equation in a Rectangle Assuming an Exponential Exiting*

- Angular Flux at Boundary*. Nuclear Science and Technology, v.7, n. 1, p.45-56, 2012.
- [47] Simch, M.; Segatto, C.F.; Vilhena, M.T. *An Analytical Solution for the  $S_N$  Radiative Transfer Equations with Polarization in a Slab by the  $LTS_N$  Method*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. v.97, p. 424-435, 2006.
- [48] Tavares, L. *Cálculo dos Parâmetros Superficiais de Radiação pelo Método  $LTS_N$* . Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2000.
- [49] Tres, A.; Picoloto, C.B.; Prolo Filho, J.F.; Cunha, R.d.; Barichello, L.B. *Explicit Formulation of a Nodal Transport Method for Discrete Ordinates Calculation in Two-dimensional Fixed-Source Problems*. Kerntechnik, v.79, p. 155-162, 2014.
- [50] Tres, A. *Análise de Esquemas de Aproximações Angulares Para a Equação de Transporte Bidimensional em Ordenadas Discretas via Formulações Nodais*. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2015.
- [51] Tomaschewski, F. *Solução da equação  $S_N$  Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2012.
- [52] Tomaschewski, F. *Solução analítica das equações da Cinética na Formulação  $S_N$  de Transporte de Nêutrons em Geometria Unidimensional*. Exame de Qualificação de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2014.

- [53] Tsay, R.W. and Loyalka, S.K. *A Numerical Method for Solving the Integral Equation of Neutron Transport: III*. Nuclear Science and Engineering, v. 59, p.536-540, 1976.
- [54] Vargas, R.F.; Segatto, C.F.; Vilhena, M.T. *On the Analytical Solution of the SN Radiative Transport Equation in a Slab for a Space-dependent Albedo coefficient*. Journal of Physics Conference Series v.369, p. 012-018, 2012.
- [55] Vasques, R. *A Review of Particle Transport Theory in a Binary Stochastic Medium*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2005.
- [56] Vilhena, M.T.; Barichello, L.B. *A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation*. Kerntechnik. v.56, n.5, p. 334-336, 1991.
- [57] Vilhena, M.T.; Barichello, L.B. *An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinates Problems*. Transport Theory and Statistical Physics. v.24, p. 1337-1352, 1995.
- [58] Walters, W.F.; O'Dell, D.R. *Nodal Methods for Discrete Transport Problems in (x,y) Geometry*, In: Proceedings of the Topical Meeting of Advances in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems, Munique, Alemanha, 1981.
- [59] Walters, W. F. *The relation between finite element methods and nodal methods in transport theory*. Progress in Nuclear Energy, v.53, p. 21-26, 1986.
- [60] Zabadal, J.; Vilhena, M.T.; Barichello, L.B. *Solution of the Three-Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the  $LTS_N$  Method*. Annals of Nuclear Energy, v.22, p. 131-134, 1995.

- [61] Zabadal, J.; Vilhena, M.T.; Barichello, L.B. *An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem in a Convex Domain*. Progress in Nuclear Energy. v31, p. 225-228, 1997.