

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA E TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS GOVERNADOS
PELA EQUAÇÃO DE POISSON EMPREGANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO

por

Carla Tatiana Mota Anflor

Tese para obtenção do título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, 17 de dezembro de 2007.

OTIMIZAÇÃO EVOLUCIONÁRIA E TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS GOVERNADOS
PELA EQUAÇÃO DE POISSON EMPREGANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO

por

Carla Tatiana Mota Anflor
Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge

Prof. Dr. Marco Túlio Vilhena

Prof. Dr. Walter Collischonn

Prof. Dr. Flavio Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 17 de dezembro de 2007.

AGRADECIMENTOS

O sucesso de um determinado objetivo em nossas vidas depende diretamente da opção por uma escolha correta, no meu caso o qual se refere à vida acadêmica, foi o meu orientador. Ao Prof.Dr. Rogério Marczak o meu sincero reconhecimento.

Ao Prof.Dr. Adrián P. Cisilino pela hospitalidade na UNMDP, por sua valiosa contribuição neste trabalho e pela honra de tê-lo como amigo. Ao Intema-SECyT– Argentina pelo apoio financeiro e pela oportunidade maravilhosa de ter voltado ao país de coração.

Aos professores do GMAp, Prof.Dr. Sergio J. Ono Fonseca, Prof.Dr. Ignácio Iturrioz, Prof.Dr. Alberto Tamagna e Prof.Dr. Ratvs Marczak pelo conhecimento transmitido e pela amizade.

À banca avaliadora desta tese composta pelos Prof.Dr. Ariosto Bretanha Jorge, Prof.Dr. Marco Túllio Vilhena e Prof.Dr. Walter Collischonn pela orientação e contribuição no enriquecimento deste trabalho.

Em especial ao Prof.Dr. Sérgio V. Moller pela confiança, amizade e por ser membro “*agregado*” do time do LMF.

Aos meus colegas do Grupo de Mecânica Aplicada do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS, pelos bons momentos. A alguns dos amigos gostaria de agradecer em especial, Zé Albuquerque (do Alegrete), André Casagrande (the manager), Jhon Goulart (o outro lado da linha mágica), Rubén Cuba (Maestro Guapo), Leandro Corso, Hervandil Morosini Sant’Anna (Herva), Federico Buroni (tchurrasquinho, tchurrasquinho), Vagner Schmidt, Cristian Zarichta e André Wentz (foguinho). Ao Pettit comitê por aqueles bons momentos dos quais vou ter muita saudade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq pelo apoio financeiro, ao PROMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul e em especial aos funcionários.

A todas aquelas pessoas sem laços familiares algum, mas que com certeza contribuíram diretamente de alguma forma desde o meu nascimento, o meu terno agradecimento.

Aos meus pais Maria Emilia e Tio Mirinho pelo amor, privação, dedicação e esforço para que eu chegasse aqui.

E finalmente ao meu colega, amigo e eterno esposo Jhon Goulart pelos incentivos e apoio incondicional nessa nossa longa e obstinada caminhada rumo a docência.

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e implementação computacional de técnicas de otimização de topologia para problemas governados pela equação de Poisson. O método numérico utilizado para solução numérica das equações foi o método dos elementos de contorno (MEC). Para tanto, três metodologias foram desenvolvidas.

A primeira é direcionada à aplicação de algoritmos genéticos (AG) para investigar como um domínio inicialmente preenchido com cavidades aleatórias evolui durante um processo de otimização e verificar a possibilidade de se extrair topologias ótimas a partir da interpretação da solução encontrada. Os contornos externos permanecem fixos enquanto as posições e as dimensões das cavidades são otimizadas com o objetivo extremizar uma função custo especificada. O desempenho do algoritmo proposto é ilustrada com uma série de exemplos e os resultados são discutidos.

A segunda metodologia apresenta um algoritmo numérico para otimização topológica baseado na avaliação da derivada topológica (DT), adotando a energia potencial total como função custo. Este procedimento é uma alternativa às tradicionais técnicas de otimização, evitando assim soluções de projeto com densidade de material intermediária. Sólidos com comportamento anisotrópico são estudados sob condições de contorno de Robin, Neumann e Dirichlet. Uma transformação linear de coordenadas é utilizada para mapear o problema original e suas condições de contorno para um novo domínio equivalente isotrópico, onde o procedimento de otimização é aplicado. A solução otimizada é então transformada de volta ao domínio original. A metodologia proposta mostrou-se particularmente atrativa para resolver esta classe de problemas já que o MEC dispensa o uso de malha no domínio, reduzindo significativamente o custo computacional.

Na última parte deste trabalho foi implementada uma formulação de sensibilidade topológica para problemas de otimização de transferência de calor e massa simultâneos. Como as sensibilidades para cada equação diferencial são diferentes, utiliza-se um coeficiente de ponderação para compor a sensibilidade do problema acoplado. Isto permite a imposição de distintos fatores para cada problema, de acordo com uma prioridade especificada.

Diversos exemplos são apresentados e seus resultados comparados com os da literatura, quando disponíveis, a fim de validar as formulações propostas.

Palavras chaves: algoritmos genéticos, otimização topológica, elementos de contorno, problemas potenciais, transferência de calor e massa.

ABSTRACT

This work presents the computational development and implementation of topology optimization techniques for problems governed by the Poisson equation. The boundary element method was the numerical technique chosen to solve the equations. Three different methodologies were developed aiming this objective.

The first methodology is directed to the application of genetic algorithms to investigate how a domain previously populated with randomly placed cavities evolves during the optimization process, and to verify the resemblance of the final solution with a optimal design. The external boundaries remain fixed during the process, while the location and dimension of the cavities are optimized in order to extremize a given cost function. The performance of the proposed algorithm is verified with a number of examples and the results are discussed.

The second methodology presents a numerical algorithm for topology optimization based on the evaluation of topological derivatives, using the total potential energy as the cost function. This procedure is an alternative to the traditional optimization techniques, avoiding design solutions containing intermediary material densities. Solids with anisotropic constitutive behavior are studied under Robin, Neumann and Dirichlet boundary conditions. A linear coordinate transformation approach is used to map the original problem into an isotropic one, where the optimization is carried out. The final solution is then mapped back to the original coordinate system. The proposed method was found to be an attractive way to solve this class of problems, since no interior mesh is necessary, which reduces significantly the computational cost of the analysis.

In the last part of the present work the topological derivative approach was further developed to deal with the optimization of problems under simultaneous heat and mass transfer. Since the sensitivities for each differential equation are different, a weighting factor was used to evaluate the final sensitivities of the coupled problem. This allows the imposition of different priorities for each problem

Several examples are presented and their results are compared with the literature, when available, in order to validate the proposed formulations.

Keywords: genetic algorithms, topology optimization, boundary element method, potential problems, heat and mass transfer.

INDICE

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos deste trabalho	18
2	REVISÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	21
2.1	Formulação integral para a equação de Poisson.....	21
2.2	O MEC direto aplicado à equação de Poisson	23
3	OTIMIZAÇÃO.....	26
3.1	Formulação geral do problema de otimização	27
3.2	Alguns métodos de otimização	29
4	ALGORITMOS GENÉTICOS	34
4.1	Revisão de Algoritmos genéticos	35
4.2	O algoritmo	37
4.2.1	População inicial	39
4.2.2	Seleção natural	39
4.2.3	Pareamento	40
4.2.4	Cruzamento	40
4.2.5	Mutação.....	41
4.2.6	Próxima geração.....	41
4.3	Proposta de um procedimento AG + MEC para identificação de formas e topologias ótimas	42
5	RESULTADOS NUMÉRICOS – AG + MEC.....	46
5.1	Trocador de calor com uma cavidade	46
5.2	Trocador de calor com duas cavidades	48
5.3	Trocador de calor com três cavidades	49
5.4	Trocador de calor com cavidade convexa	51
5.5	Placa condutora	52
5.6	Placa condutora (V invertido)	54
5.7	Molde de compressão.....	56
5.8	Trocador de calor – Matriz de chaveamento	63
5.9	Placa em V – Matriz de chaveamento	64
5.10	Molde de compressão.....	67
5.11	Comentários adicionais sobre algoritmos genéticos	73
6	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE TOPOLOGIA.....	75
6.1	Derivada Topológica.....	76
6.2	A derivada topológica aplicada à equação de Poisson.....	78

6.2.1	Condições de contorno de Neumann.....	80
6.2.2	Condições de contorno de Dirichlet.....	80
6.2.3	Condições de contorno de Robin	81
6.3	Algumas aplicações da derivada topológica	81
6.4	Transferência de calor em sólidos não-isotrópicos	83
6.4.1	Teoria básica do método de transformação de coordenadas	83
6.4.2	Metodologia numérica.....	85
6.4.3	Validação do mapeamento do domínio	86
7	RESULTADOS NUMÉRICOS – DT + MEC	89
7.1	Condutor de calor com condições de contorno de Neumann nas cavidades.....	89
7.2	Condutor de calor com condições de contorno de Robin nas cavidades	91
7.3	Condutor de calor assimétrico com condições de contorno de Neumann nas cavidades 92	
7.4	Condutor de calor ‘V’ com condições de contorno de Neumann nas cavidades	93
7.5	Condutor de calor cruzado com condições de contorno de Neumann nas cavidades ...	96
7.6	Trocador de calor com condições de contorno de Robin nas cavidades	99
7.7	FONTES DE CALOR.....	101
7.7.1	Domínio quadrado com uma fonte de calor	102
7.7.2	Domínio ortotrópico quadrado com uma fonte de calor	103
7.7.3	Domínio retangular com duas fontes de calor.....	105
7.7.4	Placa de circuito impresso.....	106
7.8	Comentários adicionais: Derivada topológica.....	108
8	PROCEDIMENTO PARA OTIMIZAÇÃO MULTI- CRITÉRIO	109
8.1	Dissipador I	111
8.2	Dissipador II.....	116
8.3	Comentários adicionais: Otimização de compromisso	118
9	CONCLUSÃO	119
9.1	Contribuições deste trabalho	119
9.2	Recomendações para continuidade da pesquisa.....	120
	BIBLIOGRAFIA.....	122
	APÊNDICE A - Dedução da equação integral e solução fundamental para o MEC	128
	APÊNDICE B - Elementos de contorno lineares descontínuos.....	130
	APÊNDICE C - Problemas com fontes de calor.....	134
	Este trabalho deu origem às seguintes publicações científicas:	137

LISTA DE SIMBOLOS

\emptyset	função objetivo
∇	vetor gradiente
β_τ	espaço admissível das funções para o domínio perturbado
$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}$	fluxo prescrito no contorno do furo
\cup	união de conjuntos
τ	parâmetro de perturbação associado a velocidade de troca de forma
n	normal ao contorno
$n_{\text{nós}}$	número de nós físicos
w	função peso
Ω	domínio
Ω_ε	domínio perturbado
Γ	contorno
Γ_D	contorno com condição de Dirichlet
Γ_N	contorno com condição de Neumann
Γ_R	contorno com condição de Robin
a_τ	forma bilinear continua e coerciva
A_0	área atual do domínio
A_f	área final do domínio
F	vetor de condições de contorno
F_c	função custo
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	conjunto de restrições de desigualdade
G	matriz de potenciais
H	matriz de fluxos
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	conjunto de restrições de igualdade
h_c^ε	coeficiente de convecção no interior do furo
τ	parâmetro de perturbação
k	condutividade térmica efetiva
k_{xx}	condutividade térmica na direção x
k_{yy}	condutividade térmica na direção y
k_{xy}	condutividade térmica na direção xy
l_τ	funcional linear contínuo
l_{ref}	comprimento de referência

n_{el}	número de elementos do raio interno
p	ponto de crossover
q	vetor coluna dos valores nodais da derivada normal do potencial
\bar{q}	fluxo de calor prescrito
q_a	fluxo de calor analítico
q_i	fluxo de calor interno
q_x	fluxo de calor original na direção x interno
q_y	fluxo de calor original na direção y
\hat{q}_x	fluxo de calor mapeado na direção x
\hat{q}_y	fluxo de calor mapeado na direção y
r	distância entre o ponto fonte e o ponto campo
r_e	raio externo
r_i	raio interno
T_{Di}	Temperatura no contorno interno
T_{De}	Temperatura no contorno externo
T_d	valor desejado de temperatura
u	vetor coluna dos potenciais nodais
\bar{u}	potencial prescrito
u_ε	temperatura prescrita no contorno do furo
u_e	temperatura prescrita no interior do furo
X	vetor misto de incógnitas de fluxo ou temperatura
\hat{x}	pontos do interior do domínio
x_1	coordenada original no eixo da abscissa
x_2	coordenada original no eixo da ordenada
\hat{x}_1	coordenada mapeada no eixo da abscissa
\hat{x}_2	coordenada mapeada no eixo da ordenada
Ψ	função custo do domínio não perturbado
Ψ_ε	função custo do domínio perturbado
f	função regularizadora negativa
D_T	Derivada topológica
ε	raio da bola
γ	vetor de parâmetros genéticos

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos de malhas empregadas pelo MEF (a) e pelo MEC (b).	15
Figura 1.2 - Exemplos de manipulação de malhas com o (a) MEF e com o (b) MEC.	17
Figura 2.1 – Discretização do domínio com elementos de contorno.	23
Figura 2.2 – Elemento linear descontínuo.....	24
Figura 2.3 - Tipos de otimização: (a) parâmetros, (b) forma, (c) topológica.....	26
Figura 2.4 - Representação da minimização de um funcional com uma restrição.....	28
Figura 2.5 – Representação gráfica dos pontos ótimos.....	28
Figura 2.6 – Exemplo de topologia obtida pelo método SIMP. Fonte: www.poli.usp.br/d/pmr5215/exemplos.html	30
Figura 2.7 – Detalhe esquemático de um procedimento de otimização utilizando o Método <i>Level-Set</i>	31
Figura 2.8 – Exemplo de otimização de forma utilizando ESO: (a) condição de contorno e (b) configuração ótima. Fonte: Li et al.(1999).....	31
Figura 2.9 – Tensões equivalentes para formas ótimas de diferentes configurações topológicas (minimização de peso). Fonte: Fenner, 1999.	32
Figura 2.10 - Topologia final obtida com a derivada topológica.	33
Figura 3.1 – Arquitetura do AG + MEC.	38
Figura 3.2 – Esquema da arquitetura inicial do AG.....	39
Figura 3.3 - Esquema da Seleção Natural.	40
Figura 3.4 - Esquema do pareamento.....	40
Figura 3.5 - Detalhe do processo de cruzamento.	41
Figura 3.6 - Detalhe da mutação na matriz população.	41
Figura 3.7 - Otimização topológica utilizando AG.	42
Figura 3.8 – Tipos de restrições.	44
Figura 3.9 – Passos da decodificação da matriz de chaveamento.....	45
Figura 4.1 – Exemplo 5.1: (a) Condição de contorno, (b) discretização do domínio.	47
Figura 4.2 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.1.	47
Figura 4.3 – Evolução da função custo para o exemplo 5.1.....	47
Figura 4.4 - Exemplo 5.2: (a) Condição de contorno, (b) discretização do domínio.....	48
Figura 4.5 - Soluções intermediárias para o exemplo 5.2.	49
Figura 4.6 – Evolução do custo para o exemplo 5.2.	49
Figura 4.7 - Exemplo 5.3: (a) Condição de contorno, (b) discretização do domínio.....	50
Figura 4.8 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.3.	50
Figura 4.9 - Evolução da função custo para o exemplo 5.3.	51

Figura 4.10 – Exemplo 5.4: (a) condições de contorno, (b) discretização do domínio.....	51
Figura 4.11 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.4.	52
Figura 4.12 – Evolução da função custo para o exemplo 5.4.....	52
Figura 4.13 – (a) Condições de contorno. (b) Posições possíveis de locação dos furos e discretização do domínio.....	53
Figura 4.14 – Convergência da função custo para o exemplo 5.5.	54
Figura 4.15 - Mapas de temperatura e fluxo para o exemplo 5.5.....	54
Figura 4.16 – Condições de contorno para o exemplo 5.6.....	55
Figura 4.17 – Convergência da função custo para o exemplo 5.6.	56
Figura 4.18 – Mapa de Temperatura e fluxo para o exemplo 5.6.	56
Figura 4.19 – (a) Esquema de um molde à compressão. (b) Condições de contorno.	57
Figura 4.20 – Molde de compressão com duas resistências. (a) Configuração inicial. (b) Configuração otimizada.	58
Figura 4.21 – Molde de compressão com duas resistências. Distribuição da temperatura ao longo da superfície da cavidade (AB).	59
Figura 4.22 – Convergência da função custo para molde de compressão com duas resistências.	59
Figura 4.23 - Molde de compressão com três resistências. (a) Configuração inicial. (b) Configuração otimizada.	60
Figura 4.24 : Molde de compressão com três resistências. Distribuição da temperatura ao longo da superfície da cavidade (AB).	60
Figura 4.25 - Convergência da função custo para molde de compressão com três resistências. ..	61
Figura 4.26: Molde de compressão com quatro resistências. (a) Configuração inicial. (b) Configuração otimizada.	61
Figura 4.27 - Molde de compressão com quatro resistências. Distribuição da temperatura ao longo da superfície da cavidade (AB).	62
Figura 4.28 – Convergência da função custo para molde de compressão com quatro resistências.	62
Figura 4.29 – Trocador de calor: (a) Posições possíveis para posicionar os furos. (b) Discretização do contorno.....	63
Figura 4.30 – Evolução do processo de otimização para o trocador de calor.....	64
Figura 4.31 – Trocador de calor: convergência da função custo.	64
Figura 4.32 – Placa em V – Matriz de chaveamento: (a) condições de contorno. (b) Posições admissíveis dos furos.	65
Figura 4.33 - Filtragem da criação de cavidades isoladas.....	65
Figura 4.34 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.10.	66

Figura 4.35 – Evolução da função custo pra o exemplo 5.10.	66
Figura 4.36 – Comparação entre as topologias.	67
Figura 4.37 – Molde de compressão: (a) dimensões do molde; (b) condições de contorno; (c) discretização do contorno.	67
Figura 4.38 – Número de posições possíveis para o arranjo das resistências: (a) 20 (b) 28 e (c) 49 posições.	68
Figura 4.39 - Topologia final obtida para 5 resistências.	69
Figura 4.40 – Ajuste da curvas de temperatura calculada pelo MEC à 150°C.	69
Figura 4.41 - Evolução da função custo para o caso do molde considerando 20 possíveis posições para as resistências.	70
Figura 4.42 – Topologia final para o caso (b).	70
Figura 4.43 – Ajuste de curvas: temperatura calculada pelo MEC e a polinomial.	71
Figura 4.44 – Evolução da função custo para o caso do molde considerando 28 possíveis posições para as resistências.	71
Figura 4.45 – Topologia final para o caso (c).	72
Figura 4.46 - Ajuste de curvas: temperatura calculada pelo MEC e a polinomial.	72
Figura 4.47 - Evolução da função custo para o caso do molde considerando 49 possíveis posições para as resistências.	73
Figura 5.1 – Conceito original de derivada topológica. (a) domínio original. (b) domínio perturbado (Ω_ϵ).	76
Figura 5.2 – Conceito de derivada em sua versão modificada.	78
Figura 5.3 - Topologia final para o caso I: (a) Marczak (2005) e (b) Novotny (2003).	82
Figura 5.4 - Topologia final para o caso II: (a) Marczak (2005) e (b) Novotny (2003).	82
Figura 5.5 – Esquema ilustrativo do mapeamento geométrico.	84
Figura 5.6 - Esquema do mapeamento de domínio.	86
Figura 5.7 – Condições de contorno.	87
Figura 5.8 – Caso ortotrópico 1: $k_{xx} = 1$ e $k_{yy} = 2$	87
Figura 5.9 - Caso ortotrópico 2: $k_{xx} = 1$ e $k_{yy} = 5$	88
Figura 6.1 – Domínio inicial de projeto.	89
Figura 6.2 – Histórico de otimização para o meio isotrópico.	90
Figura 6.3 - Histórico de otimização para o meio ortotrópico.	90
Figura 6.4 – Topologias Finais: (a) MEF + homogeneização (Park, 1995) – $k_x/k_y = 1$; (b) Presente resultado, MEC+ D_T – $k_x/k_y = 1$; (c) Presente resultado, MEC+ D_T – $k_y/k_x = 2$	91
Figura 6.5 – Histórico de otimização para o condutor de calor com condição de contorno de Robin nas cavidades.	91

Figura 6.6 – Histórico de otimização para o condutor de calor assimétrico.	92
Figura 6.7 – Topologias finais para o condutor assimétrico: (a) Resultado atual, $k_x/k_y = 2$;.....	93
Figura 6.8 – Histórico de otimização para o material isotrópico - Caso (a).	94
Figura 6.9 - Histórico de otimização para o material ortotrópico - Caso (b).	94
Figura 6.10 - Histórico de otimização para o material ortotrópico - Caso (c).	95
Figura 6.11 – Condutor de calor ‘V’: iterações × área removida.....	95
Figura 6.12 - Histórico de otimização para o condutor de calor cruzado: meio isotrópico.	96
Figura 6.13 - Histórico de otimização para o condutor de calor cruzado: meio isotrópico.	97
Figura 6.14 - Histórico de otimização para o condutor de calor cruzado: meio anisotrópico.	97
Figura 6.15 – Condutor de calor cruzado: iterações × área removida.....	98
Figura 6.16 – Topologias finais para exemplos: (a) isotrópico e (b) ortotrópico.....	99
Figura 6.17 – Detalhe do projeto inicial do trocador de calor.....	99
Figura 6.18 – Histórico do processo de otimização.	100
Figura 6.19 – Temperatura máxima ($u_{máx}$) por iteração.	101
Figura 6.20 – Projeto inicial com uma fonte de calor.	102
Figura 6.21 – Histórico de otimização: uma fonte de calor.	103
Figura 6.22 – Histórico de otimização: domínio ortotrópico com uma fonte de calor.	104
Figura 6.23 – Comparativo entre as topologias finais: (a) isotrópico: DT, (b) isotrópico: <i>WFS</i> (Li et al. 1999), (c) ortotrópico: DT e (d) ortotrópico: <i>WFS</i> (Li et al. 1999).	104
Figura 6.24 – Projeto inicial com duas fontes de calor.	105
Figura 6.25 – Histórico evolutivo: duas fontes de calor.	105
Figura 6.26 – Topologia ótima: (a) Derivada Topológica, (b) <i>WFS</i> (Li et al. 1999).....	106
Figura 6.27 – Modelo inicial da PCB e suas condições de contorno.	107
Figura 6.28 – Histórico de otimização da PCB.	107
Figura 6.29 – Topologia ótima: (a) Derivada Topológica, (b) <i>WFS</i> (Li et al. 1999).....	108
Figura 7.1 - Detalhe esquemático da otimização multi-critério.	110
Figura 7.2 - Condições de contorno para o dissipador I.....	112
Figura 7.3 – Mapas iniciais da DT para $w_M = 0.4$ e $w_H = 0.6$ - dissipador I.....	113
Figura 7.4 - Evolução topológica para o dissipador I.	114
Figura 7.5 – Histórico da temperatura por iteração para os pontos p_1 , p_2 e p_3 - dissipador I.....	114
Figura 7.6 – Histórico do fluxo de calor por iteração para os pontos p_1 , p_2 e p_3 - dissipador I. .	115
Figura 7.7 – Histórico da concentração mássica por iteração para os pontos p_1 , p_2 e p_3 - dissipador I.	115
Figura 7.8 – Histórico do fluxo mássico por iteração para os pontos p_1 , p_2 e p_3 - dissipador I. .	116
Figura 7.9 Condições de contorno para o dissipador II.....	116

Figura 7.10 – Evolução topológica para $\alpha_M = \alpha_H = 0.5$ para o dissipador II.....	117
Figura 7.11 - Evolução topológica para $\alpha_M = 0.4$ e $\alpha_H = 0.6$ para o dissipador II.....	118

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de um projeto tem início quando existe uma exigência ou quando é detectada uma necessidade em relação ao mercado consumidor para um determinado tipo de produto. A partir deste ponto é desencadeada uma seqüência de ações que tem como ponto de partida o estabelecimento dos chamados requisitos de projeto, que procuram definir de forma mais ampla possível o que deve ser o produto quanto à sua funcionalidade e desempenho. A busca por um desempenho máximo de um projeto sujeito a algum tipo de parâmetro de minimização ou maximização, é um dos principais temas atualmente estudado no meio científico. Diferentes métodos matemáticos são propostos, cada um com suas particularidades, vantagens e desvantagens, para solução e busca por desempenho máximo em problemas de engenharia.

Os métodos de solução numérica da equação diferencial que governa o problema em questão são uma forma alternativa à solução analítica. Entre os métodos numéricos mais conhecidos pode-se citar método das diferenças finitas, volumes finitos, método dos elementos finitos (MEF) e mais recentemente o método dos elementos de contorno (MEC), sendo que este último será empregado neste trabalho. A formulação do MEC pode ser escrita a partir do método dos resíduos ponderados, utilizando como função peso uma solução fundamental da equação diferencial. Isto faz com que a equação diferencial seja satisfeita no domínio e aproximada no contorno, caracterizando assim o MEC como um método de contorno. Outro ponto de fundamental importância está na presença do emprego do Teorema de Green na formulação, o que faz com que as integrais de domínio sejam transformadas em integrais de contorno equivalentes, reduzindo assim a dimensão do problema em uma unidade. Este ponto se torna um grande atrativo quando comparado ao MEF, por necessitar de malha apenas no contorno. A Figura 1.1 ilustra uma comparação entre discretizações típicas para o MEC e para o MEF.

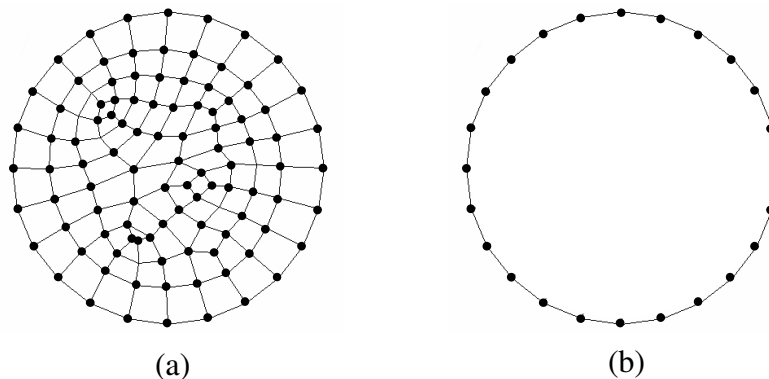


Figura 1.1 - Exemplos de malhas empregadas pelo MEF (a) e pelo MEC (b).

O objetivo principal de um processo de otimização de forma ou de topologia, está diretamente associado à correta obtenção de uma geometria otimizada. O MEC se insere neste contexto como um método particularmente atrativo para esses problemas, uma vez que não há necessidade de geração e gerenciamento de malhas internas. Como consequência o pré-processamento, pode ser facilmente conectada a sistemas CAD (desenho auxiliado por computador), uma vez que a malha pode ser gerada diretamente sobre as primitivas geométricas, especialmente para casos em 3D.

Ainda neste tópico, é importante relatar que a maioria das vantagens fornecidas pelo MEC são resultantes de sua complexa formulação matemática. Esta formulação garante um alto grau de precisão e rapidez em códigos bem escritos (Brebbia, 1992) e por todas as vantagens já mencionadas, verifica-se que por gerar malha somente no contorno o MEC torna-se uma ferramenta muito prática e fácil na mudança constante da geometria, como requisitado nos processos de otimização. Para efeito de exemplificação, a Figura 1.2 ilustra uma situação em que uma peça perfurada tem a posição do furo modificada. No caso do MEC, esta alteração é realizada apenas com a translação dos nós referentes ao contorno do furo, enquanto que no MEF faz-se necessário um novo remalhamento toda vez que houver modificação na geometria.

A otimização topológica e de forma está muito bem desenvolvida com inúmeros exemplos de aplicação para problemas em elasticidade. Porém, ainda são relativamente poucos os trabalhos voltados à otimização de problemas térmicos apesar de sua grande importância. Na literatura atual tópicos sobre materiais compostos para problemas de elasticidade estão muito bem fundamentados e as pesquisas bem avançadas. O mesmo não acontece para problemas térmicos, principalmente quando o comportamento do material é anisotrópico: poucos autores dedicam em suas obras algum tópico sobre o estudo da otimização da transferência de calor em materiais de comportamento não isotrópico.

Também são muito escassas as publicações (Li et al., 1999; Li et al., 2004) que fornecem casos de otimização em problemas térmicos o que dificulta encontrar exemplos para efeitos de comparação e validação. Soluções analíticas para problemas térmicos anisotrópicos ou ortotrópicos também são relativamente raros, devido a sua obtenção matemática ser muito complexa e limitada a problemas mais simples. O estudo de problemas de otimização relacionados à condução de calor manifesta-se como um tema ainda muito pouco explorado, o que faz com que sua escassez aumente quando este estudo é estendido a problemas de otimização de materiais de comportamento não isotrópico.

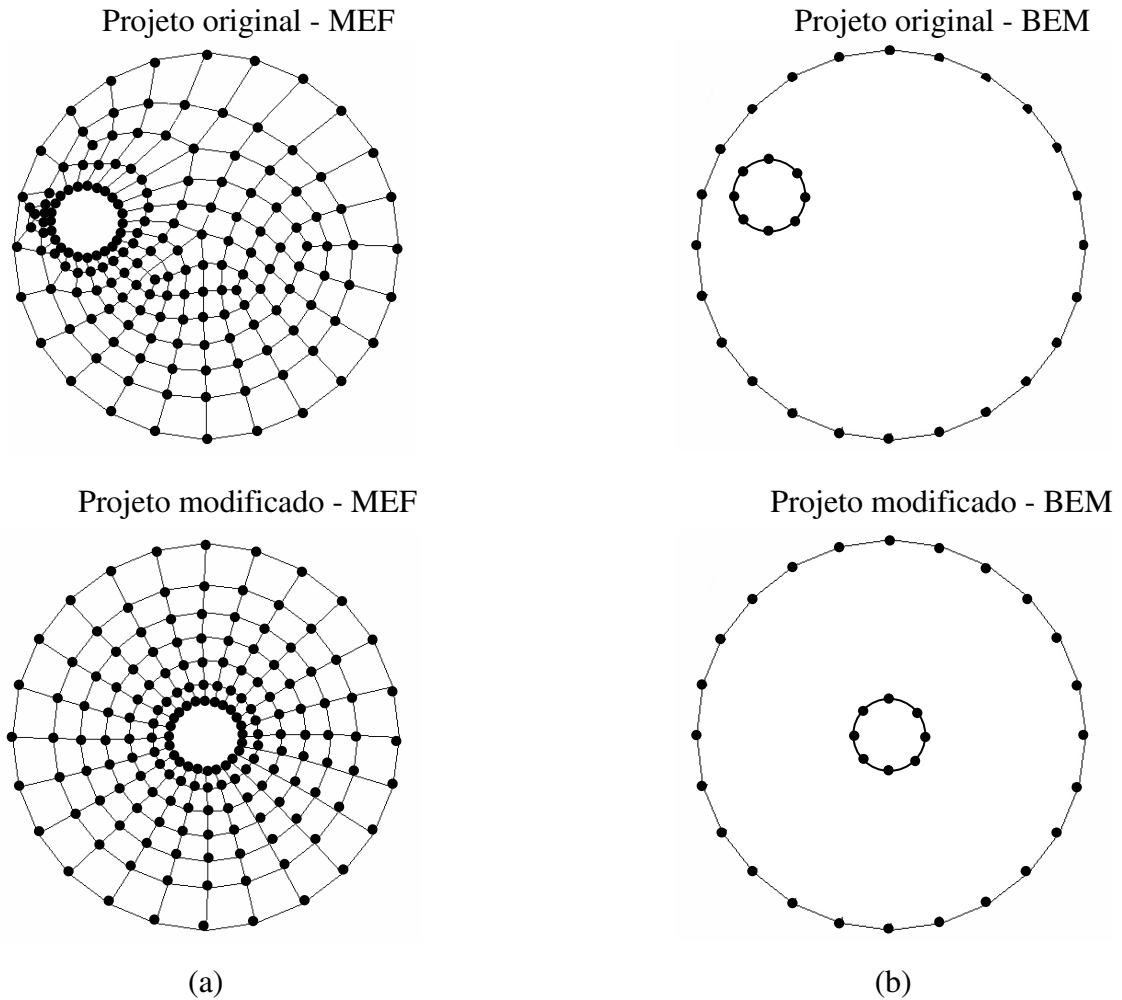


Figura 1.2 - Exemplos de manipulação de malhas com o (a) MEF e com o (b) MEC.

Considerando algoritmos de otimização, Algoritmos Genéticos (AG) (Goldberg,1989) apresentam um desempenho satisfatório quando se trata de problemas de otimização de parâmetros com poucas variáveis a serem otimizadas, além de apresentar a vantagem de não requerer continuidade e diferenciabilidade da função custo. Outro ponto a ser ressaltado está no fato de que os AG são menos propensos a convergirem para ótimos locais, devido à presença de um dos seus operadores genéticos, comumente conhecido por mutação. Algoritmos como estes, de natureza evolucionária, também são conhecidos por seu alto custo computacional, necessitando em alguns casos do emprego de algum artifício para acelerar seu desempenho. Problemas com alto grau de complexidade e grande número de variáveis de projeto, tornam o AG menos atrativo pelo custo computacional, sugerindo como alternativa outro método de otimização que não seja de natureza aleatória. Neste caso, para dar continuidade ao trabalho, um

método recente e matematicamente muito bem definido é o da Derivada Topológica (Feijóo et al., 2002).

A Derivada Topológica (D_T) é definida na literatura (Sokolowski e Zochowski, 1999 e Cea et al., 2000) como uma função escalar estabelecida em todo o domínio de definição do problema que fornece a sensibilidade da função custo quando um pequeno furo é criado em um determinado ponto. Novotny et al. (2003) estabeleceram um homeomorfismo entre os domínios antes e depois da perturbação ao apresentarem uma nova metodologia na aplicação da D_T . As informações sobre a sensibilidade do domínio foram obtidas através do método dos elementos finitos.

Por todas as suas características já mencionadas o MEC classifica-se como um método com grandes atrativos na solução de problemas a serem otimizados evitando alguns problemas clássicos presentes nos métodos de otimização mais tradicionais geralmente combinados ao MEF, o que faz com que se torne um atrativo ao ser implementado com a D_T . Cabe ressaltar que o MEC não substitui plenamente outros métodos utilizados na engenharia, mas mostra-se como uma ferramenta alternativa e tão eficiente quanto qualquer outro método numérico. Obviamente que para alguns problemas como os que envolvem fratura, componentes com alta concentração de tensões, domínio infinito entre outros casos, faz-se interessante à combinação de MEF e MEC na obtenção de uma solução com maior precisão e qualidade na solução final.

1.1 Objetivos deste trabalho

O presente trabalho tem como principal enfoque a aplicação do processo de otimização a problemas governados pela equação de Laplace aliado a elementos de contorno, através da implementação de dois tipos de algoritmos de otimização: algoritmos genéticos e análise de sensibilidade via D_T . Para isso se fez necessário o estudo dos tipos de algoritmos usualmente utilizados em problemas de otimização a fim de comparar as vantagens e desvantagens associadas a cada um. A aplicação de processos de otimização direcionados a materiais de comportamento não isotrópico em problemas de transferência de calor, ainda é um tema muito pouco abordado. Ao tratar este tema, o presente trabalho fornece uma contribuição para continuidade desta linha de pesquisa.

Neste sentido, fez-se necessário o estudo desde os fundamentos teóricos que envolvem o MEC, a transferência de calor e o tema otimização propriamente dito. No contexto acima descrito, foram estabelecidos alguns objetivos: (a) desenvolvimento e implementação de um procedimento de algoritmos genéticos aliado ao método dos elementos de contorno para otimizar uma determinada função objetivo aplicado a problemas de transferência de calor; (b)

desenvolvimento e implementação de uma plataforma numérica para otimização de sólidos empregando derivada topológica (D_T) em problemas potenciais. Tal formulação deverá compreender sólidos de comportamento não-isotrópico uma vez que a formulação atual (Novotny et al., 2003) refere-se somente a casos isotrópicos; (c) Implementação de um procedimento numérico para otimização de transferência de calor e massa simultânea, utilizando derivada topológica. Todas as propostas implementadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho serão comparadas sempre que possível com problemas apresentados em literatura, para fins de validação e verificação.

Dessa forma, os assuntos de que tratam este trabalho estão dispostos da seguinte maneira:

O capítulo 2 apresenta a formulação do MEC aplicado a problemas potenciais, detalhamento sobre a discretização do contorno, montagem das matrizes, solução do sistema de equação, cálculo de variáveis em pontos internos do domínio. Também são apresentadas técnicas empregadas no tratamento de cantos da geometria: como arredondamento de cantos, elementos descontínuos e elementos parcialmente descontínuos.

Os fundamentos de otimização estrutural são descritos no capítulo 3. Os principais métodos de otimização utilizados na literatura são revisados neste capítulo: métodos fundamentados em densidade variável (SIMP), métodos de remoção de elementos, métodos evolucionários (ESO), método das bolhas, métodos *level-set*, algoritmos genéticos e derivada topológica.

O capítulo 4 apresenta um aprofundamento teórico sobre algoritmos genéticos, com sua nomenclatura específica, descrição detalhada de sua lógica e a funcionalidade de seus operadores. Ainda neste capítulo são apresentadas algumas soluções empregadas neste trabalho para tornar um AG mais eficiente a problemas de otimização.

Em especial, no capítulo 5 apresenta-se resultados numéricos obtidos através da combinação do AG + MEC. Diversos exemplos são ilustrados para demonstrar as aplicações do AG na solução de problemas potenciais em sólidos isotrópicos governados pela equação de Laplace. Comentários são incluídos com o objetivo de ressaltar as dificuldades na implementação do AG e as soluções adotadas.

No capítulo 6 apresenta-se a análise de sensibilidade topológica para os vários tipos de condição de contorno nos furos (Dirichlet, Neumann e Robin), considerando a energia potencial total como função custo. Neste capítulo é implementada a transformada de coordenadas para permitir a aplicação da D_T a sólidos de comportamento não isotrópico, já que a reformulação teórica de derivada topológica não é uma tarefa simples por sua complexidade matemática.

No capítulo 7 são apresentados os resultados numéricos obtidos com o MEC e a análise de sensibilidade via D_T . O processo de otimização é realizado em problemas sob condições de contorno de Dirichlet, Neumann e/ou Robin. Nos exemplos em que os sólidos não apresentam comportamento isotrópico, utiliza-se a técnica de transformação de coordenadas. Após o mapeamento, calcula-se através da D_T a sensibilidade dentro do domínio. Ao final deste capítulo, são feitos comentários sobre as derivadas topológicas e os resultados obtidos.

O capítulo 8 refere-se ao procedimento para otimização multi-critério onde o sólido passa a ser submetido, além da transferência de calor, também à transferência de massa. Para cada caso será estudado o comportamento do sólido quanto a sua topologia final para relações constitutivas isotrópicas e ortotrópicas.

2 REVISÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Este capítulo tem como objetivo apresentar sucintamente o Método dos Elementos de Contorno. Esta técnica já está muito bem fundamentada para a solução de problemas potenciais, apesar de ser um método numérico relativamente novo e em menor número de publicações, quando comparado ao MEF e ao método das diferenças finitas. Maiores detalhes podem ser consultados em bibliografias específicas, apesar de, quando comparadas ao MEF, estas não serem de número significativo. Um artigo muito interessante em detalhes matemáticos e históricos relacionado ao MEC foi publicado por Cheng e Cheng 2005.

A revisão do MEC apresentada neste capítulo foi fundamentada em um apanhado realizado nos textos de Brebbia e Dominguez (1977), Brebbia et. al. (1984), Brebbia e Dominguez (1992) e Banerjee (1994).

No MEC aproximação da solução é realizada somente no contorno do domínio, isto é, resolve-se o problema de valores no contorno associado à equação governante. Como consequência, o MEC dispensa o uso de malhas no interior do domínio de solução. Estas características fazem do método uma alternativa muito atrativa para a solução numérica de problemas de otimização de geometria, contato entre corpos e outros problemas similares onde as variáveis sobre o contorno, bem como a descrição deste desempenham um papel importante. Adicionalmente, é sabido que o método apresenta uma excelente precisão tanto para variáveis primais como duais, devido ao fato de empregar soluções fundamentais como funções peso em sua formulação matemática. Por outro lado, o MEC somente pode ser aplicado quando é conhecida uma solução fundamental da equação diferencial. Para a equação de Laplace a solução fundamental é normalmente tomada como a distribuição de temperatura em um domínio infinito ou semi-infinito de material com condutividade unitária, e submetido a uma fonte de calor concentrada. Vale mencionar ainda que existem dois tipos de abordagens do MEC: o método direto¹ e o método indireto, sendo que o primeiro será a versão adotada no presente trabalho.

2.1 Formulação integral para a equação de Poisson

Seja a equação de Poisson em um domínio Ω bidimensional:

$$\nabla^2 u = b \text{ em } \Omega \quad (2.1)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

¹ Ver apêndice A.

$$u = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma_1$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(u - u_\infty) = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_3$$

que correspondem às condições de contorno essenciais, naturais e mistas (ou Dirichlet, Neuman e Robin), respectivamente.

Para a abordagem direta do MEC, um ponto de partida possível para obtenção da equação integral sobre o contorno é a ponderação dos resíduos da equação diferencial (2.1) e das condições de contorno (2.2) (alternativamente, a aplicação do teorema de *Betti* um uma das identidades de *Green* leva a resultados idênticos), o que resulta a conhecida identidade de Somigliana (ver apêndice A):

$$u^i(x^i) + \int_{\Gamma} u(x^i) q^*(x^i, \zeta) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x^i) u^*(x^i, \zeta) d\Gamma + \int_{\Omega} u^*(x^i, \zeta) b(x^i) d\Omega \quad (2.3)$$

A equação (2.3) permite calcular o potencial em qualquer ponto interior i de Ω , desde que os valores de potencial u e fluxo q sejam conhecidos sobre o contorno Γ . Note-se que uma equação similar pode ser obtida para cálculo de fluxos através da diferenciação de (2.3) sob o sinal de integração (Brebbia et. al., 1984):

$$q_x^i(x^i) + \int_{\Gamma} u(x^i) \frac{\partial q^*(x^i, \zeta)}{\partial x} d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x^i) \frac{\partial u^*(x^i, \zeta)}{\partial x} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial u^*(x^i, \zeta)}{\partial x} b(x^i) d\Omega$$

$$q_y^i(x^i) + \int_{\Gamma} u(x^i) \frac{\partial q^*(x^i, \zeta)}{\partial y} d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x^i) \frac{\partial u^*(x^i, \zeta)}{\partial y} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial u^*(x^i, \zeta)}{\partial y} b(x^i) d\Omega \quad (2.4)$$

A fim de se obter uma identidade válida para o contorno, aplica-se um procedimento de limite à equação (2.3), levando à equação integral (Brebbia et. al., 1984):

$$c^i u^i(x^i) + \int_{\Gamma} u(x^i) q^*(x^i, \zeta) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x^i) u^*(x^i, \zeta) d\Gamma + \int_{\Omega} u^*(x^i, \zeta) b(x^i) d\Omega \quad (2.5)$$

onde c^i é um fator geométrico dependente da geometria local do contorno

A utilização recursiva da equação (2.5) permite a obtenção de tantas equações quantas necessárias para resolução de um problema de valores de contorno. Isto é mandatório porque, em um problema bem posto, apenas uma das variáveis (potencial ou fluxo) é conhecida sobre cada ponto do contorno.

2.2 O MEC direto aplicado à equação de Poisson

A fim de resolver a equação integral (2.5) numericamente, o contorno Γ é dividido em N elementos de contorno, que tem os seus valores de potencial e fluxo escritos em função dos valores nodais (Figura 2.1). Dessa forma, para obter um sistema de equações lineares que permita encontrar os valores desconhecidos sobre o contorno, é preciso escrever a equação (2.5) para todos os pontos nodais e então aplicar as condições de contorno prescritas. Assim, uma solução aproximada é obtida para o problema.

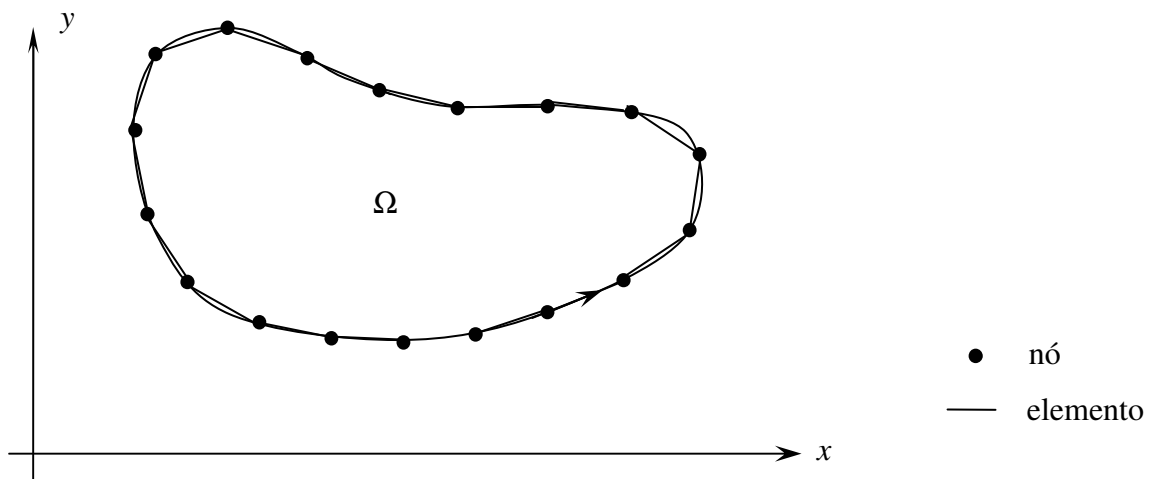


Figura 2.1 – Discretização do domínio com elementos de contorno.

Pelo fato de se utilizar um modelo discretizado, a partir deste ponto é mais conveniente trabalhar com notação matricial. Definindo que as aproximações para variáveis (u e q) e geometria (x e y) em cada elemento de contorno j :

$$\begin{aligned} u(\xi) &= [\Phi] \{u^j\} \\ q(\xi) &= [\Phi] \{q^j\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} x(\xi) &= [\bar{\Phi}] \{x^j\} \\ y(\xi) &= [\bar{\Phi}] \{y^j\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $[\Phi]$ e $[\bar{\Phi}]$ são as funções de interpolação para variáveis e geometria, respectivamente, permitindo o uso de elementos descontínuos (Apêndice B). As funções de interpolação são definidas sobre um domínio normalizado $\xi = [-1, +1]$, como ilustrado na Figura 2.2.

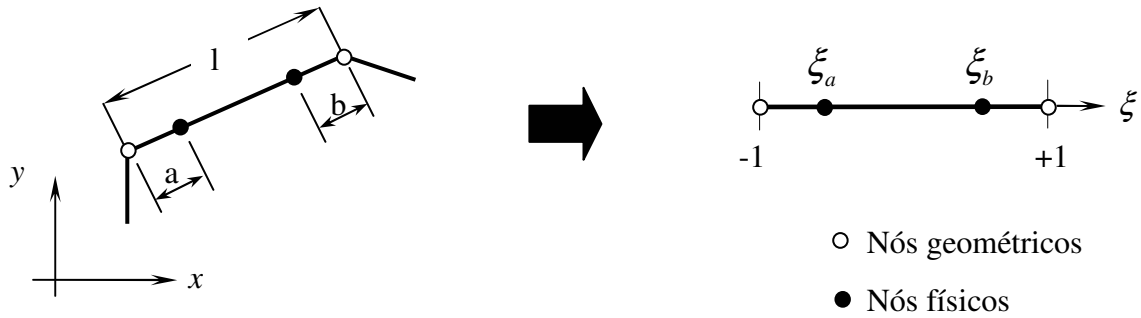


Figura 2.2 – Elemento linear descontínuo.

Portanto, a equação (2.5) é escrita agora em sua forma discretizada (os efeitos distribuídos sobre o domínio não serão considerados, por simplicidade):

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \{\phi\}^T q^* d\Gamma \{u^j\} = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* \{\phi\}^T d\Gamma \{q^j\} \quad (2.8)$$

onde o sobre-índice j indica as variáveis nodais do j -ésimo elemento de contorno.

As integrais presentes em (2.8) são geralmente avaliadas por um esquema numérico. A tradicional quadratura de Gauss (Brebbia et. al., 1984) é normalmente empregada. Porém, quando o ponto a ser calculado está muito próximo ao ponto fonte, as singularidades presentes nas soluções fundamentais (Apêndice B), que estão contidas nas integrais, devem ser analisadas à parte. Desse modo, quando o elemento a ser integrado contém o ponto fonte, em geral, uma técnica de integração diferente deve ser utilizada, pois a quadratura de Gauss não se aplica para integrais singulares.

O nível de singularidade varia conforme a solução fundamental utilizada. A solução fundamental de potencial (u^*) é regular, e foi integrada com quadratura de Gauss-Legendre padrão. Já a solução fundamental de fluxo (q^*) apresenta singularidade fraca, e foi integrada utilizando a técnica proposta por Telles [1987].

Definindo as submatrizes

$$\{h\}^T = \int_{\Gamma_j} \{\phi\}^T q^* d\Gamma \quad (2.9)$$

$$\{g\}^T = \int_{\Gamma_j} u^* \{\phi\}^T d\Gamma \quad (2.10)$$

a equação (2.8) é reescrita:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \{h\}^T \{u\}_j = \sum_{j=1}^N \{g\}^T \{q\}_j \quad (2.11)$$

e contém agora N incógnitas. Aplicando-a a todos os pontos nodais sobre o contorno, resulta um sistema de equações algébrico:

$$[H] \{u\} = [G] \{q\} \quad (2.12)$$

onde, para cada ponto nodal i , ou u ou q é prescrito. Assim as variáveis incógnitas podem ser agrupadas todas do lado esquerdo do sistema de equações, com os valores numéricos das condições de contorno prescritas sendo agrupados no lado direito. Este procedimento resulta o sistema:

$$[A] \{X\} = \{F\} \quad (2.13)$$

sendo que o vetor $\{X\}$ contém as variáveis incógnitas sobre dos nós do contorno.

Uma vez resolvida a equação (2.13), as variáveis em pontos internos podem ser obtidas através das versões discretizadas de (2.3), se desejado:

$$u_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* \{\phi\}^T d\Gamma \{q^j\} - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \{\phi\}^T q^* d\Gamma \{u^j\} \quad (2.14)$$

para o potencial e de (2.4) para os fluxos:

$$\begin{aligned} q_x^i &= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} \{\phi\}^\Gamma d\Gamma \{q^j\} - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial q^*}{\partial x} \{\phi\}^\Gamma d\Gamma \{u^j\} \\ q_y^i &= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial y} \{\phi\}^\Gamma d\Gamma \{q^j\} - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial q^*}{\partial y} \{\phi\}^\Gamma d\Gamma \{u^j\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

A formulação aqui apresentada, por simplicidade, desconsiderou os termos de domínio das equações (2.3) e (2.5). O tratamento destes é bem conhecido da literatura (Brebbia e Dominguez (1977), Brebbia et. al. (1984), Brebbia e Dominguez (1992) e Banerjee (1994)). O Apêndice C detalha o tratamento de fontes concentradas de calor para obtenção dos resultados do Capítulo 7.

3 OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização estrutural pode ser classificado em três tipos, que resultam em distintas soluções finais: Otimização de parâmetros, otimização de forma e otimização topológica. Estes três tipos de otimização estão ilustrados na Figura 3.1

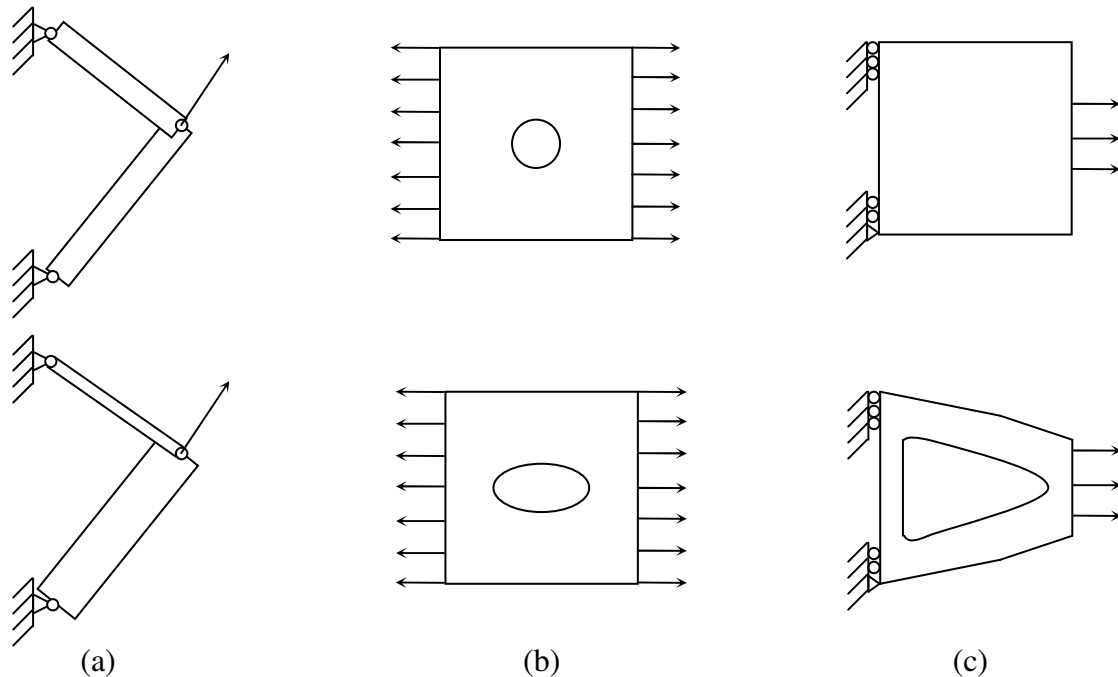


Figura 3.1 - Tipos de otimização: (a) parâmetros, (b) forma, (c) topológica.

Um problema de otimização de parâmetros (Figura 3.1-a) ocorre quando as variáveis de projeto descrevem características geométricas da estrutura, como a área da seção transversal em barras, momentos de inércia em vigas (problemas discretos) ou espessuras de placas (problema contínuo). Para o caso de barras, por exemplo, o objetivo consiste na busca de uma distribuição ótima para a área da seção transversal de cada barra, de modo que uma grandeza física seja minimizada (ou maximizada), tal como a flexibilidade ou tensão enquanto a condição de equilíbrio e as restrições são satisfeitas.

Na otimização de forma o objeto de otimização é a descrição geométrica do contorno do problema (Figura 3.1-b). As variáveis de projeto são geralmente os pontos de controle de primitivas geométricas. A otimização de forma possui um inconveniente de permitir mudanças apenas do contorno do domínio original, apesar da formulação matemática ser muito bem posta (Sokolowski e Zolesio, 1992).

A otimização topológica tem por objetivo determinar a distribuição ótima de material de um projeto ao inserirem-se cavidades tanto no domínio quanto em seu contorno. De certa maneira a otimização topológica também é uma otimização de forma, pois na morfologia final do projeto o contorno também sofre alterações geométricas (Figura 3.1-c).

3.1 Formulação geral do problema de otimização

Os problemas de otimização são tratados de duas maneiras, sem restrição e com restrição. Na otimização sem restrição o problema que está sendo resolvido é definido da seguinte maneira:

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} S(x) \text{ ou } \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{maximizar}} S(x) \quad (3.1)$$

Sendo $S(x)$ a função objetivo. Classificam-se os métodos para solução deste tipo de problema em duas categorias:

- Métodos que não utilizam derivadas (métodos de busca e métodos diretos);
- Métodos que utilizam as derivadas (métodos analíticos, métodos da métrica variável, métodos indiretos).

De maneira geral, para a solução de problemas sem restrição, os métodos que utilizam derivadas convergem mais rapidamente do que os métodos de busca aleatórios. Porém é importante ressaltar que os métodos de busca aleatórios não requerem regularidade e continuidade da função objetivo, dispensando o cálculo de 1° e 2° derivadas da função objetivo $S(x)$.

Um problema com restrições geralmente é apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && S(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito à} && \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j=1, \dots, n_g \\ &&& \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k=1, \dots, n_h \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo \mathbf{x} um vetor que contém as variáveis de projeto e \mathbf{g} e \mathbf{h} as matrizes que armazenam as restrições de igualdade e desigualdade. Uma restrição de desigualdade $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ é chamada de *ativa* em um ponto viável (aqui definido por (\mathbf{x}^*)) se $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}^*)=0$, caso contrário ela é uma restrição *inativa*. As restrições ativas restringem a região de viabilidade, enquanto que as inativas não impõe restrição alguma na vizinhança do ponto \mathbf{x}^* , definida pela hipersféra de raio ε em torno deste ponto, denotado por $\beta_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$. Na Figura 3.2 está representada a minimização de um funcional com uma restrição.

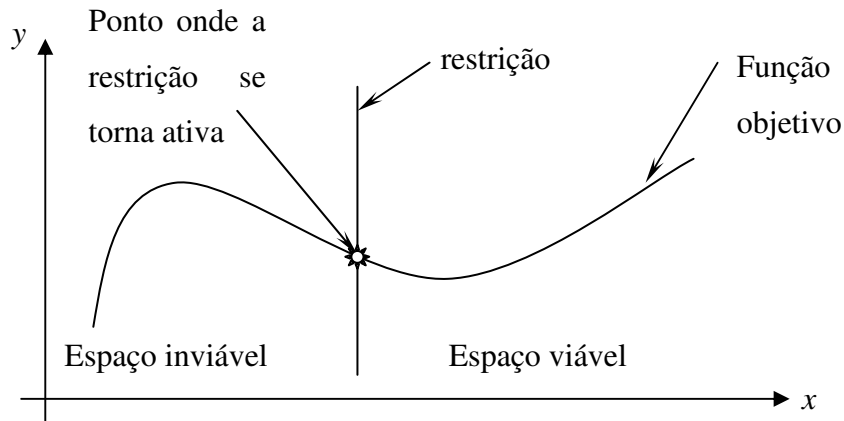


Figura 3.2 - Representação da minimização de um funcional com uma restrição.

Quando se define um problema a ser otimizado como o apresentado na eq.(3.2), pode ocorrer que este apresente muitos mínimos locais, dificultando o processo de solução.

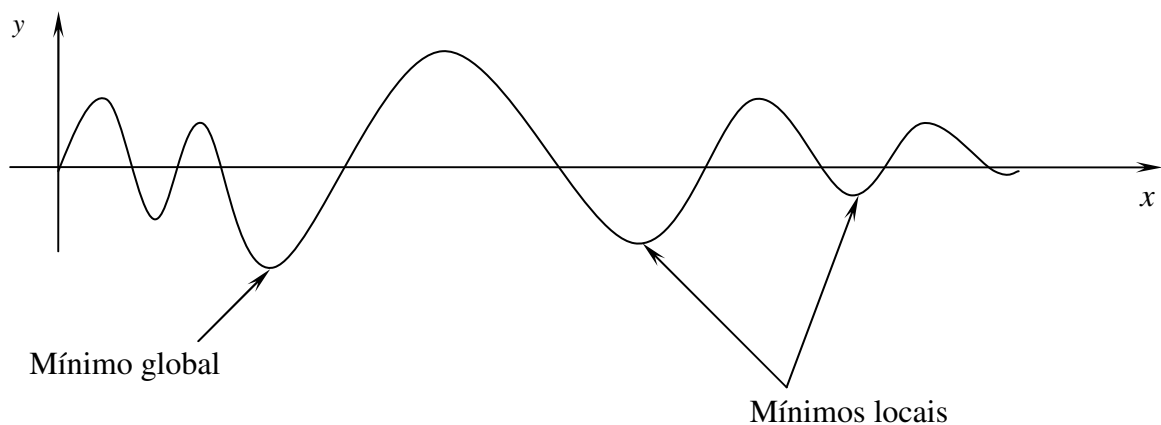


Figura 3.3 – Representação gráfica dos pontos ótimos.

De maneira em geral não há como saber ou garantir a priori a existência de um mínimo. Segundo Arora, (1989), o Teorema de Weierstrass garante a existência de um ótimo global desde que o seguinte teorema seja atendido: “Se $S(x)$ é contínua em um espaço S o qual é fechado e limitado, então $S(x)$ tem um mínimo global em S .” É importante salientar que o Teorema de Weierstrass enuncia uma condição de existência, mas não demonstra o caminho de como encontrar tal ótimo global.

3.2 Alguns métodos de otimização

Um método amplamente conhecido para análise de sensibilidade é o proposto por Bendsøe e Kikuchi (1988), que está fundamentado nos conceitos de formulações relaxadas e técnicas de homogeneização. A idéia consiste em caracterizar o domínio topologicamente através da variação da densidade do material a ser determinada. A densidade varia de 0 até 1, sendo que onde esta apresentar valor nulo significa a ausência de material (cavidade aberta). A existência do domínio será identificada onde o valor da densidade for não nulo. Nesta técnica há uma variação na escala de densidades do material, fazendo-se necessário à utilização de filtros para obter soluções próximas a da realidade da engenharia. Alguns autores como Bendsøe (1995), Rozvany (1995) e Sigmund e Peterson (1998), contribuíram para solucionar alguns problemas associados à otimização topológica, ao utilizar o método SIMP (densidade variável). Dentre as topologias comumente encontradas nos métodos de otimização pode-se mencionar:

- Instabilidade de tabuleiro (*Chekerboard patterns*): regiões da malha que alternam elementos com material e sem material. Segundo Li et al. (1999) este fenômeno é típico em quase todos os métodos de otimização topológica fundamentados em MEF.
- Dependência de malha (*Mesh dependence*): diferentes discretizações produzem diferentes topologias finais;
- Mínimos locais (*Local minima*): diferentes soluções finais para uma mesma discretização;
- Ótimos singulares (*Singular topologies*): a solução se encontra em regiões degeneradas do domínio de projeto, inatingíveis pelos métodos tradicionais de otimização.

Um exemplo ilustrativo do método de homogeneização sendo empregado para obter a topologia ótima de um problema está ilustrado na Figura 3.4.

Outra técnica utilizada para otimização topológica refere-se à remoção de elementos ou *element removal*, demonstrada nos trabalhos de Atrek (1989), Russel e Manoochehri (1989) e Rodriguez e Seireg (1992). Neste método a mudança de forma e topologia ocorre pela remoção de elementos de uma estrutura depois de uma análise de elementos finitos. Para identificar quais elementos podem ser eliminados, tomando-se como exemplo, a minimização do peso estrutural sujeito à restrição de máxima tensão são utilizados critérios com fundamentos intuitivos baseados no envolvimento de tensão e deformação. A definição do problema deste método é muito simplificada já que não há o envolvimento de técnicas de programação matemática de

otimização envolvida. Isto faz com que não haja uma necessidade de definir variáveis de projeto. No entanto, similarmente ao método de homogeneização, os contornos resultantes normalmente compõem-se de bordas denteadas porque estes são formados pelos elementos restantes. O reconhecimento do modelo e técnicas de processamento de imagem são assim normalmente necessários para deduzir, suavizar e parametrizar os contornos finais resultantes.

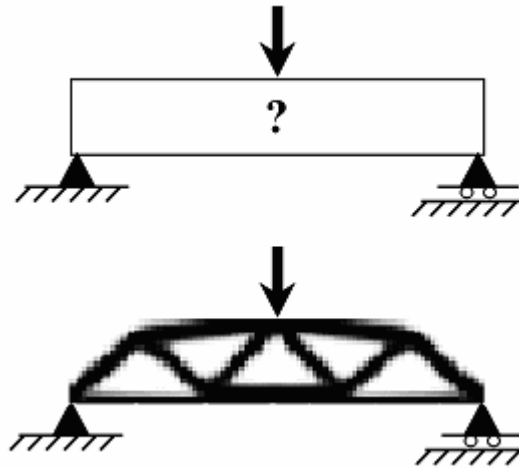


Figura 3.4 – Exemplo de topologia obtida pelo método SIMP. Fonte: www.poli.usp.br/d/pmr5215/exemplos.html

Outro método empregado na otimização topológica estrutural por Yulin e Xiaoming (2004) é o *Level-Set* que foi proposto pelos matemáticos Osher e Sethian (1988). Segundo os autores o método é simples e versátil para computar e analisar o movimento de uma interface Γ (curva de nível no espaço) em duas ou três dimensões. O objetivo consiste em acompanhar a ação do movimento subsequente desta curva de nível Γ , definida por uma função $z = \phi(x, y, t)$, sob um campo de velocidade \mathbf{v} em um plano bidimensional ou tridimensional. Esta velocidade pode depender da posição, tempo, geometria da interface e da física externa. À medida que a interface Γ sobe ou desce no tempo essa superfície vai deformando a superfície do plano e naturalmente muda a intersecção entre ambas, gerando novas topologias em Ω .

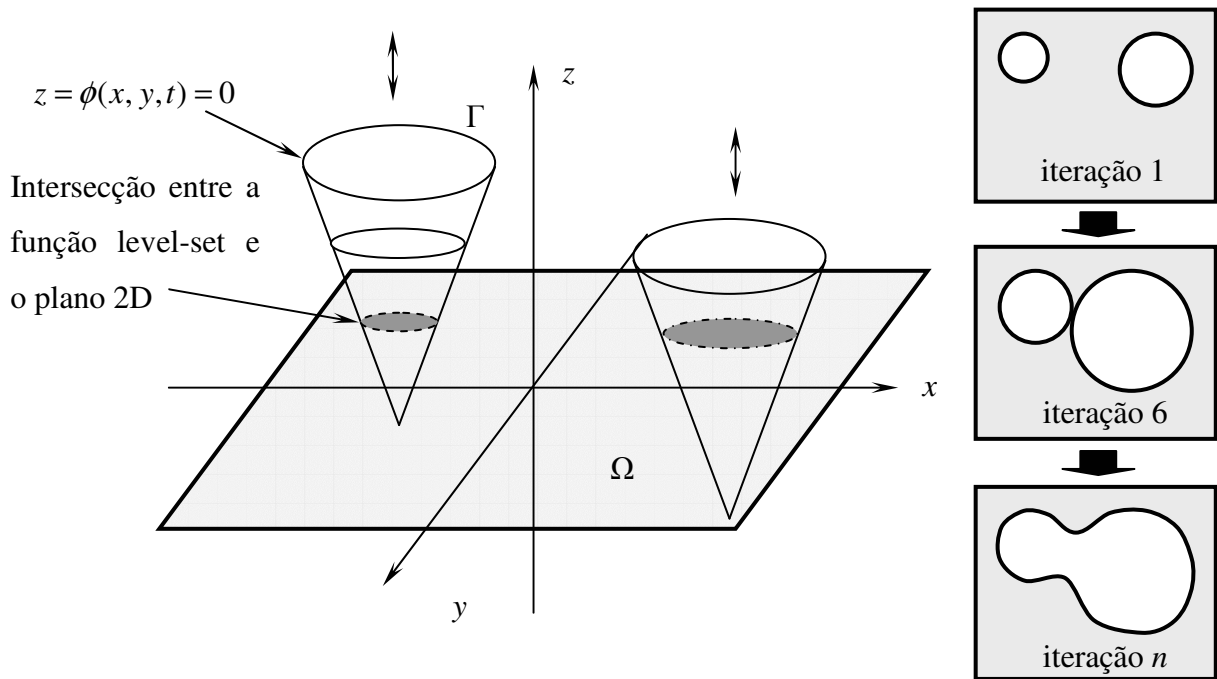


Figura 3.5 – Detalhe esquemático de um procedimento de otimização utilizando o Método *Level-Set*.

Xie e Steven (1993) desenvolveram um método fundamentado na idéia principal proposta pela remoção de elementos e apresentaram como *Evolutionary Structural Optimazion* (ESO) que também aparece implementado nos trabalhos de Chu et al. (1996 e 1997), Li et al. (1999) e Li et al. (2004). A Figura 3.6 ilustra o resultado obtido pelos autores, sendo o projeto inicial com todos os elementos da malha presente e após o projeto final com a forma obtida pela retirada de determinados elementos.

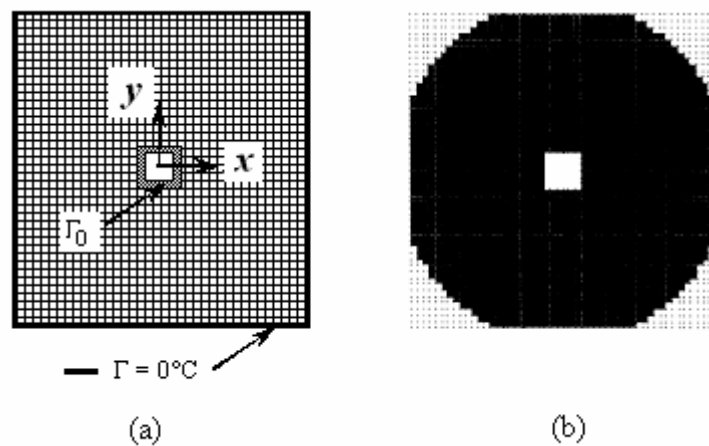


Figura 3.6 – Exemplo de otimização de forma utilizando ESO: (a) condição de contorno e (b) configuração ótima. Fonte: Li et al.(1999).

Outra técnica refere-se à abertura de furos ou *bubble-method* conforme apresentado por Eschenauer e Schumacher (1993) e Eschenauer et al. (1994). Um processo de otimização de forma inicial é executado em uma estrutura depois que alguns critérios intuitivos são usados para localizar quais as regiões no domínio são as melhores para introduzir furos no projeto. Com a modificação topológica, devido ao furo acrescentado, o novo projeto passa novamente pelo processo de otimização de forma e o procedimento inteiro é repetido até que alguns critérios de convergência sejam satisfeitos. Esta técnica trabalha executando a otimização de forma em uma seqüência de configurações topologicamente diferentes, e comparando os valores de função objetivos entre essas alternativas discretas e distintas. É uma estratégia viável e eficaz na prática e supera as desvantagens anteriormente mencionadas nos outros métodos. Tai e Fenner (1999) utilizaram uma técnica fundamentada no *bubble-method* em seu trabalho sobre otimização de forma e topologia em estruturas contínuas com comportamento elástico linear. Os resultados obtidos podem ser verificados na Figura 3.7.

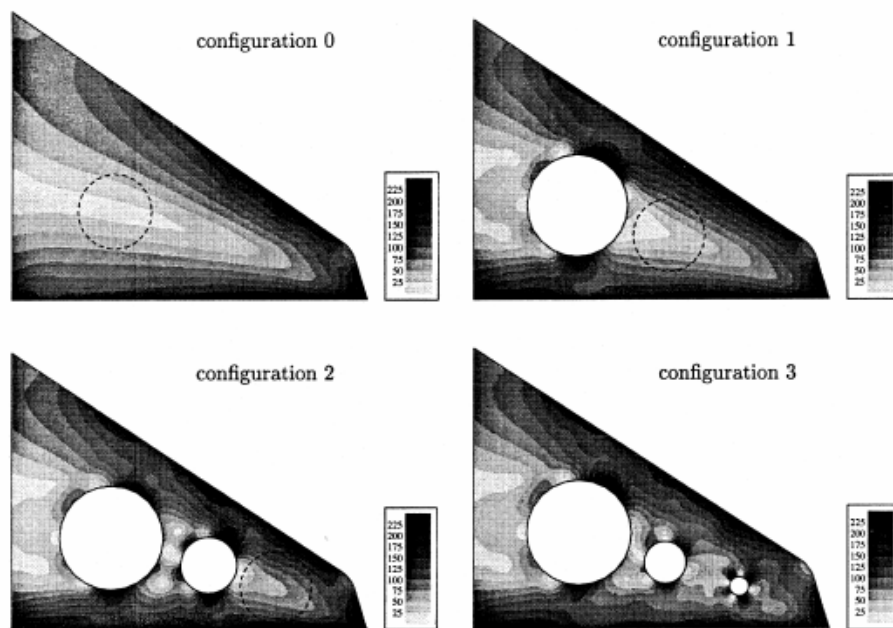


Figura 3.7 – Tensões equivalentes para formas ótimas de diferentes configurações topológicas (minimização de peso). Fonte: Fenner, 1999.

Alguns autores recentemente, Cέα et al. (2000), e Garreau et al. (1998) e Schumacher (1996) *apud* Novotny (2003) apresentaram a análise de sensibilidade topológica como uma técnica que permite obter simultaneamente a forma e a topologia ótima. Este cálculo de sensibilidade resulta em uma função escalar, denominada derivada topológica. A derivada topológica fornece para cada ponto do domínio a sensibilidade da função custo ao ser criado um pequeno furo neste ponto (Figura 3.8).

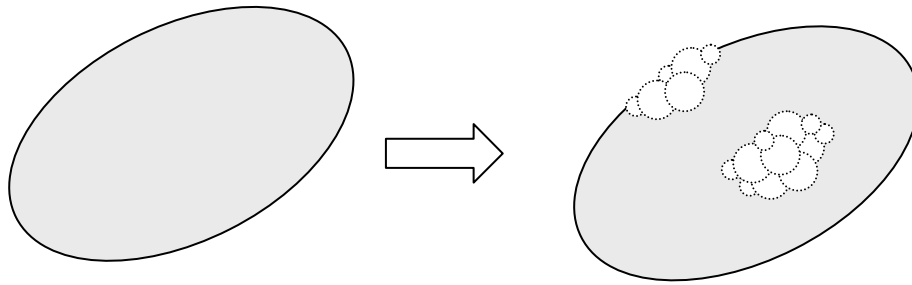


Figura 3.8 - Topologia final obtida com a derivada topológica.

Garreau et al. (1998), propuseram o método do domínio truncado para calcular a derivada topológica. O método proposto estava fundamentado em algumas hipóteses simplificativas, sendo que a mais severa consistia no fato de que a função custo não deveria depender explicitamente do domínio. Nos trabalhos de Sokolowski e Zochowski (1999) e Cea et al. (2000) apresentaram o cálculo das derivadas topológicas via análise de sensibilidade de forma, particularizada apenas para os casos onde fosse prescrita nos furos a condição de contorno de Neumann homogênea. As demais condições de contorno, tais como Neumann não homogênea, Dirichlet e Robin não validam a sua aplicabilidade nesta hipótese de cálculo. Recentemente Novotny et al. (2003) estabelecem precisamente os conceitos de derivada topológica e análise de sensibilidade à mudança de forma para materiais isotrópicos. Esta última metodologia não apresenta qualquer limitação quanto à função custo e nem ao tipo de condição de contorno prescrita nos furos.

4 ALGORITMOS GENÉTICOS

Os Algoritmos Genéticos (AG), juntamente com estratégias evolucionárias e programação evolutiva formam uma classe de algoritmos de pesquisa fundamentado na evolução natural. Montando-se uma árvore taxonômica dos algoritmos de pesquisa, os AG encontram-se no ramo chamado de Algoritmos Evolucionários. Uma visão bem resumida da classificação das técnicas foi descrita por Holland (2000), e será reproduzida aqui:

- Técnicas baseadas em cálculos: Utilizam um conjunto de condições necessárias e suficientes que devem ser satisfeitas pelas soluções de um problema de otimização. Podem estar divididas em dois grupos:
 - Métodos diretos: Utilizam informação da função como derivadas de primeira ou de segunda ordem.
 - Métodos indiretos: Procuram por um extremo local resolvendo um conjunto, normalmente não linear de equações que resultam quando se colocam o gradiente da função objetivo igual zero.
- Técnicas enumerativas: Procuram pela solução pesquisando seqüencialmente cada ponto do espaço de busca (finito e discreto).
- Técnicas dirigidas por pesquisa aleatória: Fundamentados em técnicas enumerativas, mas usam informações adicionais para dirigir a pesquisa.
 - Estratégias evolucionárias
 - Algoritmos genéticos
 - Programação Evolutiva

Algoritmos Genéticos (AG) e Estratégias Evolucionárias (EE) são métodos que simulam os processos da evolução natural (biológica), visando principalmente, resolver problemas de otimização. Estes algoritmos podem ser vistos como uma representação das Teorias de Darwin e da genética, chamada de a nova síntese da teoria da evolução, cujos principais postulados podem ser resumidos:

A evolução é um processo que opera sobre os cromossomos do organismo e não sobre o organismo que os carrega. Desta maneira o que ocorrer com o organismo, durante sua vida, não irá se refletir sobre seus cromossomos. Entretanto o inverso não é verdadeiro: os cromossomos

do organismo são o projeto e terão reflexo direto sobre todas as características desse organismo, pois, o indivíduo é a codificação de seus cromossomos.

A seleção natural é o elo entre os cromossomos e o desempenho que suas estruturas decodificam (o próprio organismo). O processo de seleção natural faz com que, aqueles cromossomos, que decodificaram organismos melhor adaptados ao seu ambiente, sobrevivam e reproduzam mais do que aqueles que decodificam organismos menos adaptados.

O processo de reprodução é o ponto através do qual a evolução se caracteriza. Mutações podem causar diferenças entre os cromossomos dos pais e o de seus filhos. Além disso, processos de recombinação (*crossover*) podem fazer com que os cromossomos dos filhos sejam bastante diferentes dos de seus pais, uma vez que eles combinam materiais cromossômicos de dois genitores.

John Holland, no início da década de 70 ficou muito intrigado com estes postulados do processo de evolução. Ele acreditava que transcrevendo estes princípios em um código numérico, pudesse resolver, por simulação, problemas complexos, justamente como a natureza o fazia: produzindo organismos muitíssimo complexos para resolver o problema de sobrevivência. A idéia inicial consistia em manipular cadeias de *bits* (0's e 1's) para representar os cromossomos e conseqüentemente cada organismo, constituindo assim, uma tentativa da solução do problema. Segundo Goldberg (1989) esta é a técnica que melhor funciona, pois a base binária apresenta maior numero de esquemas por bit de informação. Entretanto existem muitas outras técnicas empregadas, como por exemplo, a utilização direta de números reais.

O algoritmo proposto conseguia resolver de uma maneira muito simples problemas com um alto grau de complexidade. Como na natureza, o algoritmo não sabia o tipo de problema que estava sendo resolvido. Uma simples função de adequação fazia o papel da medida de adaptação dos organismos (cromossomo) ao meio ambiente. Assim, os cromossomos com uma adaptação melhor, medida por esta função, tinham maior oportunidade de reprodução do que aqueles com uma má adequação, imitando o processo evolucionário da natureza.

4.1 Revisão de Algoritmos genéticos

Algoritmos genéticos são uma ferramenta matemática eficiente em problemas de otimização, especialmente quando a função objetivo é muito complexa. Neste método não há uma necessidade de informação matemática do gradiente da função custo, indispensáveis aos métodos tradicionais de otimização, os quais necessitam de seja satisfeito um conjunto de condições necessárias e suficientes. O algoritmos genéticos tem por objetivo imitar um processo biológico fundamentado na evolução da espécie. Alguns trabalhos de relevante importância

serão apresentados, no decorrer deste capítulo, para que se possa ter uma idéia da aplicabilidade deste algoritmo.

Holland (1975) publicou o primeiro trabalho sobre AG com o seu livro “*Adaptation in natural and Artificial Systems*”. Este livro foi uma condensação de idéias que já vinham sendo desenvolvidas durante alguns anos. Convém salientar que nesta obra foram citados trabalhos desenvolvidos anteriormente por Rosemberg (1967), Cavicchio (1970), Hollstien (1971) e Frantz (1972). A partir desta data, a implementação dos algoritmos genéticos tem evoluído significativamente na solução de uma diversidade enorme de problemas de engenharia.

Goldberg (1989) é um dos autores mais recentes, e que de uma maneira em geral, simplifica a estrutura do AG quando aplicado a problemas discretos. Uma grande parte dos autores cita esta última obra em suas referencias bibliográficas. Inicialmente neste trabalho foram implementadas as idéias propostas por este autor, sofrendo algumas modificações com a variação da aplicabilidade na solução dos problemas propostos. Algumas publicações, que serão brevemente descritas a seguir, contribuíram de uma maneira em particular na flexibilização e até mesmo no aumento da eficiência do AG em relação ao seu tempo de custo computacional. Também é importante salientar a distinta aplicabilidade do AG a diversos problemas, desde os estruturais, passando pelos térmicos até problemas de solos.

Kita e Hisashi (1997) propuseram a minimização de uma viga utilizando o AG como algoritmo de busca e MEC como método numérico para solução da equação diferencial. Este é um *benchmark* muito utilizado nos problemas de otimização.

Cerrolaza et al.(2000) apresentou a otimização de forma utilizando o método dos elementos de contorno, algoritmos genéticos e β -*splines*. Um dos exemplos apresentados pelos autores consiste na otimização de uma viga com carregamento uniformemente distribuído. A função objetivo consiste na minimização da área da viga. Como restrições, foram prescritos limites da tensão de Von-Mises, o qual não poderia exceder a tensão máxima permitida pelo material e o controle de movimento limitado dos pontos em uma escala específica evitando formas finais não coerentes.

Capello e Mancuso (2003) desenvolveram um algoritmo genético para manipular como variáveis de projeto na otimização topológica, as densidades relativas 0 ou 1 (método de homogeneização) de cada elemento da estrutura. O objetivo consistia em encontrar as variáveis produzindo a rigidez máxima da estrutura, respeitando um limite superior na massa empregada. As avaliações estruturais foram realizadas com um código comercial de MEF conectado ao AG.

Annicchiarico e Cerrolaza (2004) deram continuidade à linha de pesquisa até então desenvolvida por Cerrolaza (2000). Neste novo trabalho a formulação do Método dos elementos de contorno foi implementada para análise em 3D. A função objetivo e as restrições impostas neste problema são basicamente os mesmos apresentados na publicação anterior, ou seja, minimização do peso sujeito a restrições de deslocamento máximos dos nós dos elementos e da tensão máxima de escoamento.

Burgener e Storti (2004) utilizaram os algoritmos genéticos para otimizar a geometria de um dispositivo de resfriamento de uma máquina que emprega um fluido refrigerante que circula através de aletas de dissipação. O objetivo consiste em encontrar a configuração ótima das aletas para que a dissipação de calor seja a maior possível. Para solucionar o problema de alto custo computacional, foi implementada a técnica de paralelização, a qual simplesmente consiste em distribuir em forma dinâmica a avaliação dos indivíduos (distintas configurações das aletas) de uma população, em cada processador.

Outros trabalhos envolvendo o tema algoritmos genéticos aplicado a problemas de otimização e que podem ser citados são: Bezerra (1996), Barreto (1997), Kita e Tanie (1997), Nahanishi (2001) e Kicinger et al. (2005).

4.2 O algoritmo

Os algoritmos genéticos representam atualmente, uma poderosa ferramenta de busca de soluções de problemas com alto nível de complexidade. A utilização de algoritmos evolutivos em problemas de otimização tem estimulado muitos pesquisadores, por apresentarem algumas vantagens quando comparados com outros métodos tradicionais de busca. Como mencionado anteriormente uma das principais vantagens, consiste no fato de que não há a necessidade de informações adicionais além da informação do valor da função objetivo. Isto faz com que o AG possa ser aplicado como método de busca em casos onde não há uma função matemática que descreva a sensibilidade à mudança de forma do domínio em estudo.

O método do AG está fundamentado na manipulação de uma população de cromossomos (*strings*), que são seqüências de códigos sob forma binária, que representam determinados parâmetros. A população de cromossomos deve ser avaliada por um determinado critério, o qual dependerá do método apropriado para a proposta em estudo. Para este propósito o método utilizado foi o MEC para solucionar problemas potenciais bidimensionais. O MEC por não necessitar de malha interna, torna-se particularmente atrativo para solução de problemas que utilizam como método de otimização os algoritmos evolucionários. Cada nova população é

produzida por operadores os quais imitam o processo biológico, e são aplicados a cromossomos de gerações anteriores.

Para explicar esta metodologia é necessário que se conheça um pouco dos processos biológicos observados na evolução natural. Um algoritmo genético básico, segundo Bittencourt (1998) e Goldberg (1989), é o que realiza as seguintes funções:

- a) Inicializa a população de cromossomos de maneira aleatória;
- b) Avalia cada cromossomo da população com base em um critério;
- c) Cria novos cromossomos a partir da população atual (pareamento, cruzamento, mutação e substituição dos ascendentes pelos novos descendentes);
- d) Termina o processo se o critério de fim for atingido, se não, reinicializa.

Na Figura 4.1 apresenta-se um esquema da arquitetura do código numérico implementado neste trabalho. O Método numérico empregado para solucionar as equações diferenciais, conforme mencionado anteriormente, é o método dos elementos de contorno.

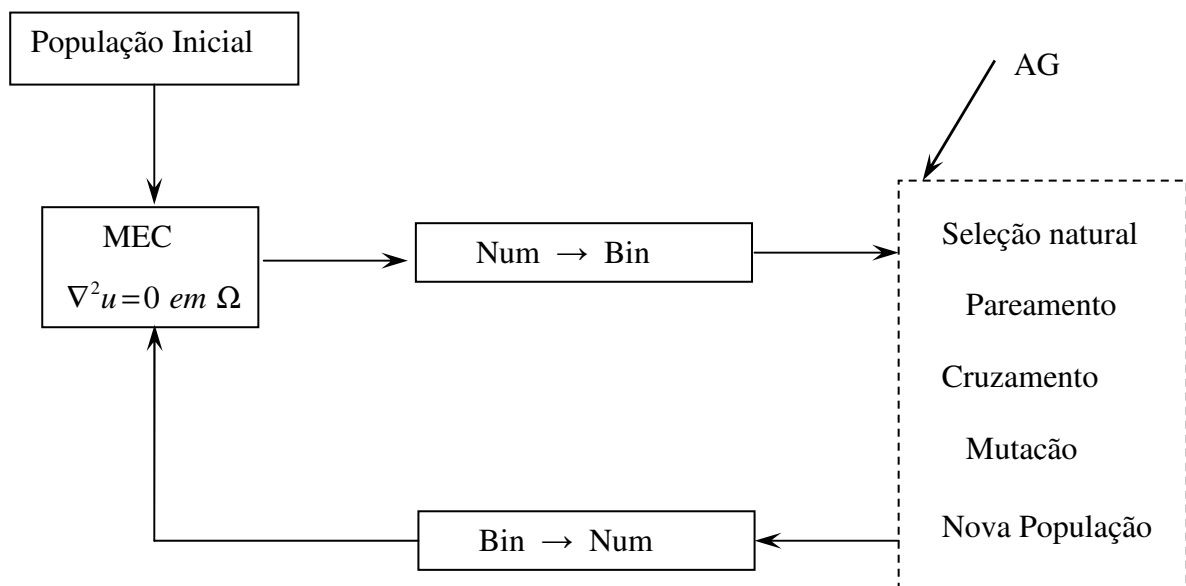


Figura 4.1 – Arquitetura do AG + MEC.

Nos próximos itens serão explicados em detalhes os principais operadores genéticos, que são responsáveis pela estrutura de um algoritmo genético. Dependendo do autor estes operadores podem sofrer algumas alterações incrementais com o objetivo de aumentar a performance.

4.2.1 População inicial

O AG inicia com uma população inicial escolhida aleatoriamente, composta por indivíduos denominados de cromossomos. No presente contexto cada cromossomo contém informações sobre a topologia da estrutura (coordenadas, tamanho dos furos), e isto está representado numericamente por um *string* de *bits*. O tamanho de cada cromossomo vai depender do número e do tipo de parâmetros que este está armazenando. Por exemplo, para representar a coordenada de um ponto sobre uma placa de dimensão 32×32 são necessários 32 *bits* (2^5) para representar cada uma destas variáveis de projeto. Isto resulta em um cromossomo de 64 *bits* de comprimento, representativo apenas a uma coordenada. Como o AG é um algoritmo de origem combinatória, quanto maior o número de *bits* a ser manipulado, maior o seu custo computacional. Com o desenvolver deste trabalho foram implementadas algumas técnicas, como meio alternativo, para a redução no número de *bits* e no número de penalizações. A Figura 4.2, esquematiza o arranjo do AG conforme explicado no texto acima.

$i = 1 : n^\circ$ de indivíduos
 $j = 1 : n^\circ$ de variáveis de projeto
 cromossomos (i) = { var 1, var 2, var 3, ..., j }

população = $\left(\begin{array}{c} \text{cromossomo 1} \\ \text{cromossomo 2} \\ \text{cromossomo 3} \\ \text{cromossomo i} \end{array} \right)$

Figura 4.2 – Esquema da arquitetura inicial do AG.

4.2.2 Seleção natural

Uma vez que a avaliação dos cromossomos na geração inicial foi realizada, aplica-se o operador genético da seleção natural. Deste ponto em diante os cromossomos são organizados de acordo com o seu melhor valor de custo (valor obtido pelo MEC) e os demais são descartados. Para este caso em estudo o descarte significa que o procedimento é descartar aquelas topologias que não satisfazem a função objetivo proposta ou que violem algumas das restrições impostas por uma função penalidade. A Figura 4.3 apresenta um breve esquema da seleção natural para efeito de ilustração.

População	custo		População	custo
0001111100	10	}	selecionada	
0001001011	55			
1101101010	4		1111100000	1
1010101110	3		1010101100	2
1010101100	2		1010101110	3
1111100000	1		1101101010	4
0010101001	15			
1010111001	10			

Figura 4.3 - Esquema da Seleção Natural.

4.2.3 Pareamento

Para realizar o pareamento é imposta uma função que irá escolher aleatoriamente os pares entre os daqueles indivíduos que foram escolhidos na seleção natural. A Figura 4.4 apresenta um esquema didático representativo ao operador pareamento com base ao exposto na Figura 4.3.

1111100000	1	e	1010101100	2
1010101100	2	e	1010101110	3
1010101110	3	e	1101101010	4
1101101010	4	e	1111100000	1

Figura 4.4 - Esquema do pareamento.

4.2.4 Cruzamento

O cruzamento é o próximo operador, e consiste em criar um ou mais *offsprings* (filhos = novas topologias) dos pais que foram previamente selecionados no processo de pareamento. Neste código de algoritmos genéticos foi adotado o processo de *crossover* simples [3]. Isto envolve dois pais que foram previamente selecionados no processo de pareamento e ambos farão parte da próxima geração. O ponto de *crossover* é determinado por uma percentagem de *bits* dos cromossomos que serão trocados posteriormente entre os pais elegidos e os *offsprings* irão receber parte da informação genética do pai e outra parte da mãe. Neste caso os pais representam as melhores topologias da estrutura em estudo e os *offsprings* são as novas possibilidades topológicas formadas pela informação recebida de seus pais. Na Figura 4.5 demonstra-se como é realizado o cruzamento. A escolha do ponto de *crossover* do cromossomo pode ser realizada de

maneira aleatória ou definida. Neste caso definimos que $p = 6$, o que equivale a dizer que o *crossover* ocorrerá no sexto dígito, da esquerda para a direita, do cromossomo. A Figura 4.5 demonstra o efeito deste operador genético.

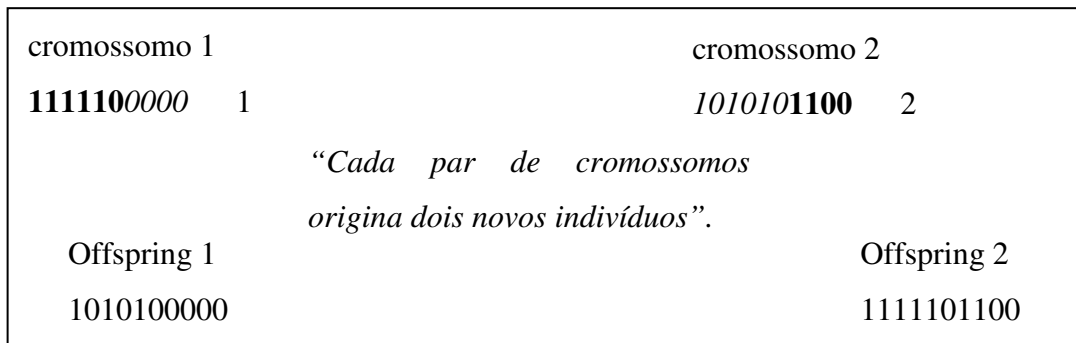


Figura 4.5 - Detalhe do processo de cruzamento.

4.2.5 Mutação

A mutação é o último dos operadores – As mutações ocorrem de maneira estocástica, ou seja, os *bits* estão todos armazenados sob forma matricial e é escolhido ao azar uma linha e uma coluna desta matriz para inverter o bit alocado nesta posição. O valor da porcentagem de *bits* a serem mutados varia de 1% a 5% do valor do tamanho da população, de acordo com a literatura.

Para efeito de exemplificação, sabe-se que a população que está representada por *bits*, está armazenada sob forma matricial. Escolhe-se aleatoriamente uma linha e uma coluna desta matriz, e nesta posição há uma troca de 0 para 1 ou vice-versa (Figura 4.6). Isto faz com que haja uma alteração em uma das variáveis de projeto contida em um dos cromossomos. Pode-se afirmar que este operador genético é responsável pela busca em outro local diferente do atual mínimo em que se encontra. Isto auxilia o algoritmo a aumentar a região de busca e conseqüentemente evita a permanência em um falso mínimo local.

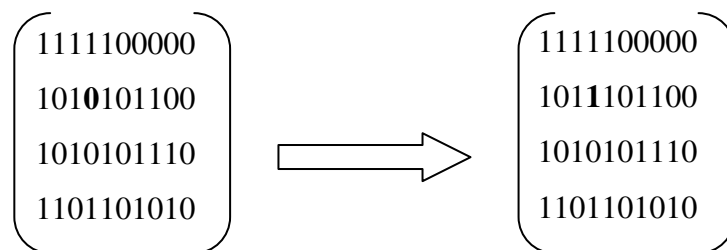


Figura 4.6 - Detalhe da mutação na matriz população.

4.2.6 Próxima geração

Após a realização de todos os passos descritos, forma-se então a próxima geração. Esta nova geração estará então composta pelos melhores pais e seus respectivos filhos. A repetição

destes passos resultará em um conjunto de cromossomos cada vez mais próximos de um indivíduo melhor. Todo o processo será repetido até obter um número máximo de iterações ou a convergência. Algumas variações do AG e outros operadores têm sido propostos na literatura.

4.3 Proposta de um procedimento AG + MEC para identificação de formas e topologias ótimas

Um dos objetivos deste trabalho consiste na aplicação dos algoritmos genéticos como método de busca na solução de problemas de otimização topológica. O código do AG foi desenvolvido em ambiente Matlab (2004) conforme literatura (Goldberg, 1989 e Cerrolaza et al., 2000). O uso de AG sugere a possibilidade de uso uma distribuição inicial aleatória de furos (bolhas), que após o processo de otimização se agrupariam em áreas de menor eficiência. Esta é essencialmente a idéia que se pretende investigar nesta proposta. O padrão de disposição final destas bolhas, portanto, deve sugerir uma topologia, ou seja, onde houver concentrações das bolhas, sugere-se a retirada de material (Figura 4.7). Este procedimento se reveste de alguma originalidade, e é uma das contribuições do presente trabalho, embora inspirado no método das bolhas.

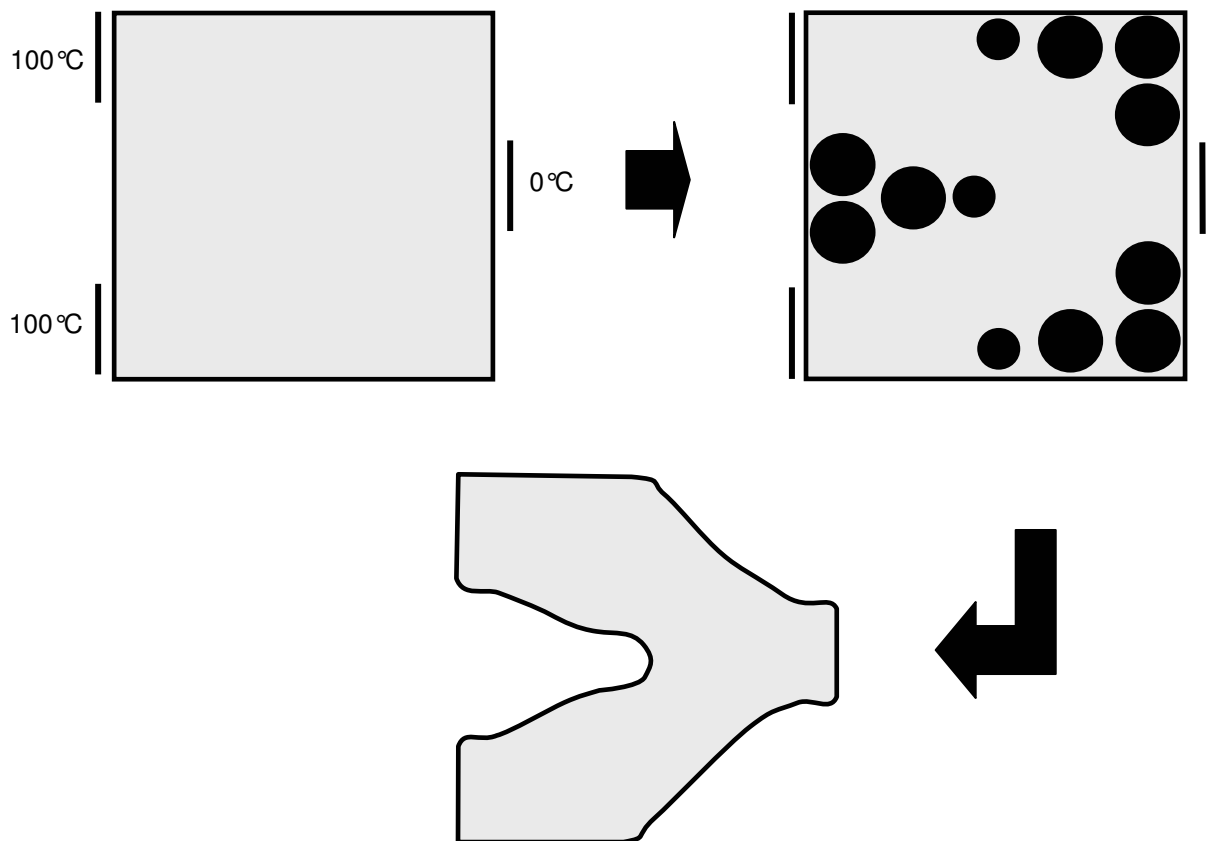


Figura 4.7 - Otimização topológica utilizando AG.

É sabido que os algoritmos genéticos devido a sua natureza combinatória apresentam um elevado custo computacional, o que faz com que Métodos de domínio como Elementos de Contorno sejam os mais indicados a serem combinados a este tipo de algoritmo na solução de problemas de otimização. Uma das grandes vantagens desta união que o MEC proporciona está no fato de que em um processo de otimização não há a necessidade de remalhamento, como ocorreria com o MEF, por exemplo. É esta vantagem que justifica o uso do MEC no contexto do presente trabalho. Mesmo assim, alguns cuidados devem ser tomados em relação ao AG para que haja um aumento em sua eficiência. Durante um processo de otimização, surgem restrições impostas ao problema, o que faz com que hajam penalizações. Para algoritmos genéticos as penalizações são um dos fatores que mais contribuem para o aumento do custo computacional, pois força o descarte de cromossomos diminuindo a probabilidade de originar novos indivíduos provenientes da combinação entre eles. Outro aspecto é o tamanho dos *strings* de *bits*: quanto maior o número de *bits*, menor a eficiência do algoritmo devido a sua natureza combinatória. A idéia consiste em diminuir o tamanho dos cromossomos, sem diminuir a quantidade de informações que estes carregam sobre cada indivíduo. Quando se implementa um código de AG, a princípio este é básico, simples e com inúmeras restrições quanto a sua aplicação, com o decorrer do tempo, implementa-se algumas idéias para permitir a expansão e o aumento da eficiência deste código.

Nas implementações iniciais da metodologia proposta, os operadores do AG (pareamento, mutação) manipulavam somente variáveis de projeto com números inteiros. As variáveis de projeto são compostas pelas coordenadas das bolhas e os seus respectivos raios. Foi aplicada uma função penalidade que era responsável pelo descarte dos cromossomos que contivessem uma ou mais das variáveis de projeto que violasse as seguintes restrições (Figura 4.8):

- Sobreposição de bolhas;
- Limite de aproximação entre contornos externos das bolhas, evitando problemas de singularidade;
- Valores de coordenadas que posicionavam as bolhas fora do domínio em estudo;
- Limite do tamanho dos raios das bolhas, evitando a violação de qualquer uma das restrições citadas nos itens acima ou o desaparecimento das mesmas.

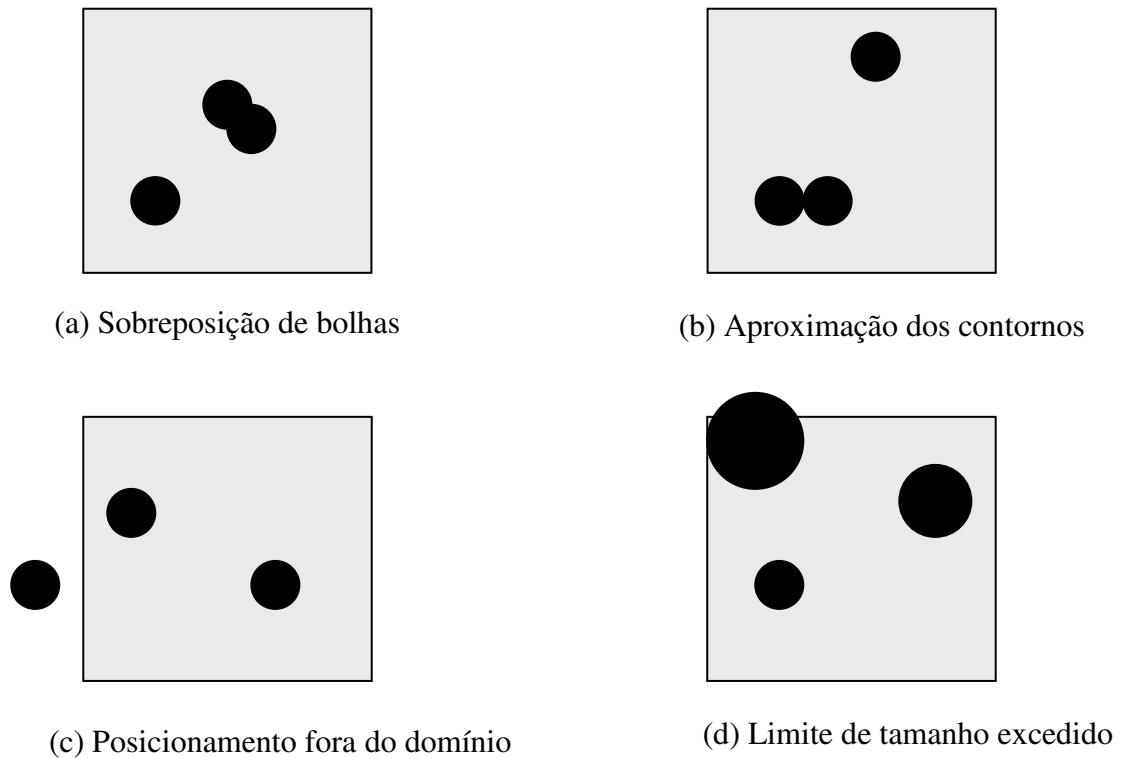


Figura 4.8 – Tipos de restrições.

Os algoritmos genéticos por sua natureza combinatória são conhecidos por seu elevado custo computacional e todo o esforço para redução de penalizações durante o processo de otimização é válido e de fundamental importância. Com a aplicação a problemas com grande quantidade de bolhas (grande número de variáveis) surgiu a necessidade de diminuir o número de *bits* a serem manipulados pelo AG, para tanto foi implementado uma matriz de chaveamento (Figura 4.9), (Wang e Tai, 2005). Neste método o AG deixa de ter como variáveis de projeto as coordenadas e simplesmente passa a manipular a existência ou não dos furos. É importante salientar que neste ponto os tamanhos das cavidades não sofrem alteração, mas o custo computacional é reduzido significativamente. Outro ponto a favor está no fato de que o AG pode ser ajustado para trabalhar com o volume de retirada de material variável ou fixo. Evidentemente, a forma e o tamanho dos furos deve se ajustar ao domínio inicial para evitar a formação de reforços intermediários muito expressivos.

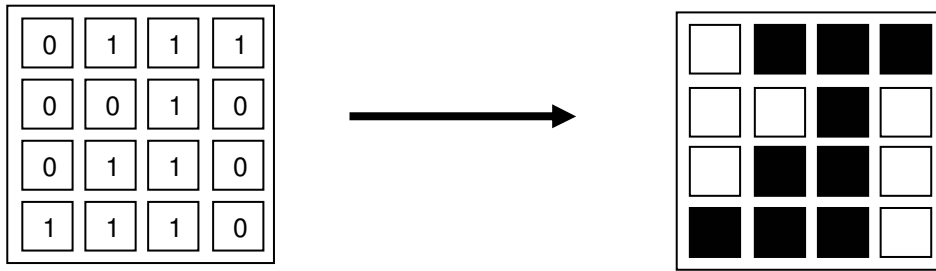


Figura 4.9 – Passos da decodificação da matriz de chaveamento.

Os resultados obtidos com esta metodologia estão apresentados e discutidos no Capítulo 5.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS – AG + MEC

Neste capítulo são apresentados resultados obtidos com o uso da metodologia apresentada na seção 4.3, aqui denominada AG+MEC. Os problemas resolvidos são casos de condução de calor em sólidos isotrópicos sem a presença de fontes de calor. A função custo é definida para cada problema apresentado e os parâmetros de entrada do AG estão listados em um vetor

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{c} \text{população inicial} \\ \text{tamanho da população} \\ \text{crossover} \\ \text{mutação} \end{array} \right\}$$

para cada caso. Através dos resultados que serão apresentados será possível verificar evolução do código até que se torne o mais genérico possível à medida que novos exemplos eram propostos. Uma especial atenção foi dispensada à diminuição do custo computacional, principal desvantagem dos AG.

5.1 Trocador de calor com uma cavidade

Este caso será utilizado para verificar se e como uma cavidade circular de raio fixo, inicialmente locada em uma posição aleatória (Figura 5.1) migra para o centro do domínio circular, uma vez que a topologia ótima corresponde a um tubo circular com solução analítica bem conhecida (Arpaci, 1990). As condições de contorno utilizadas são $\Gamma_{Di} = 100^\circ\text{C}$ para o contorno interno e $\Gamma_{De} = 0^\circ\text{C}$ para o contorno externo. A condutividade térmica foi definida como unitária. O raio da cavidade é 1 m enquanto que o raio do domínio é 32 m. Foram utilizados oito elementos lineares descontínuos para gerar a malha do contorno externo e oito elementos para o contorno interno. As variáveis de projeto são as coordenadas de centro do furo. A função custo utilizada foi definida como a média do fluxo de calor dos elementos do furo, $F = q_a - \Sigma q_i / n_{el}$, sendo q_a o fluxo de calor analítico na parede do furo, e $f = \Sigma q_i / n_{el}$ é a média do fluxo de calor calculado pelo MEC. Foi empregado $\gamma = \{32, 32, 0.3, 5\%\}$.

A Figura 5.2 mostra três posições intermediárias do furo durante o processo de otimização. Neste exemplo valor do fluxo interno é $q_a = 14.0817 \text{ W/m}^2$, o qual foi obtido na décima geração. A evolução do custo está apresentada na Figura 5.3.

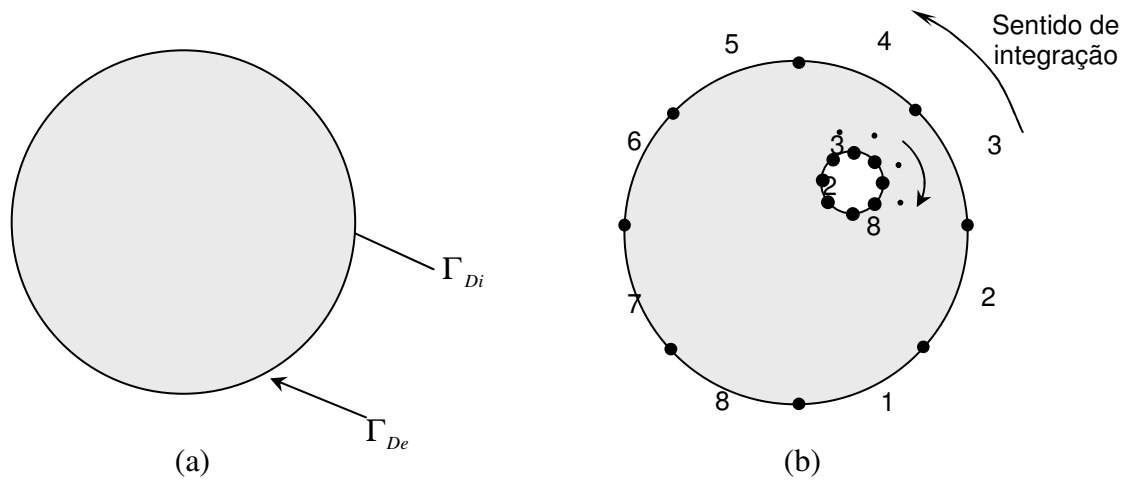


Figura 5.1 – Exemplo 5.1: (a) Condição de contorno, (b) discretização do domínio.

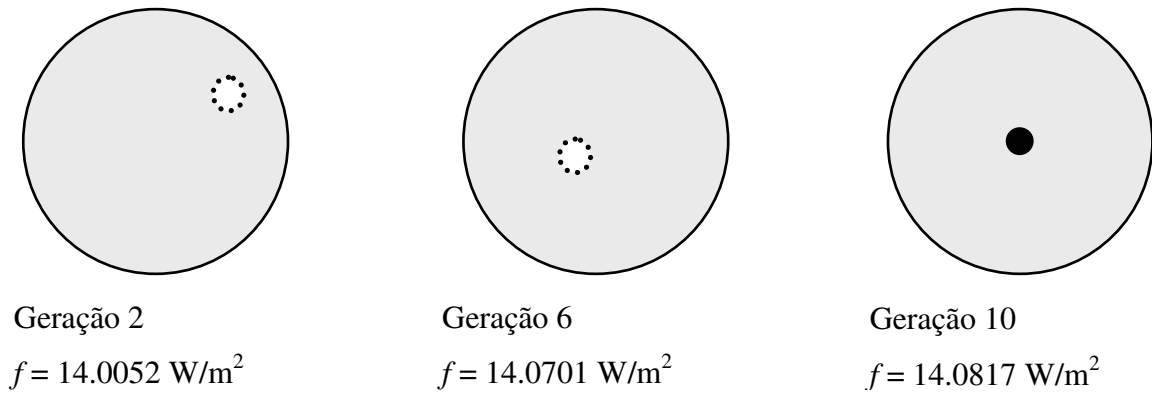


Figura 5.2 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.1.

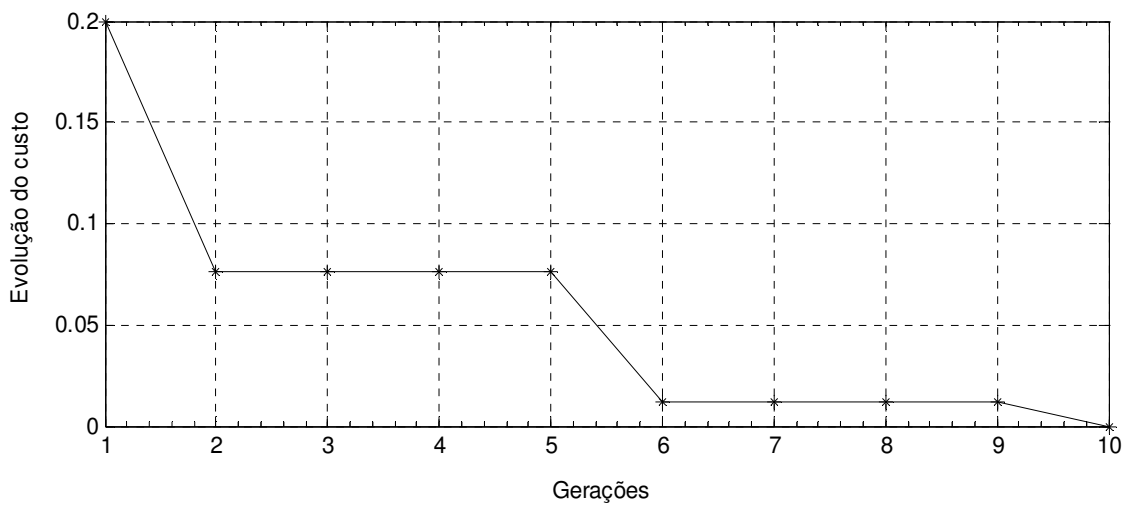


Figura 5.3 – Evolução da função custo para o exemplo 5.1.

5.2 Trocador de calor com duas cavidades

Este caso é similar ao apresentado no primeiro exemplo, e foi utilizado para verificar a capacidade do método proposto convergir para a solução analítica quando mais de um furo é inserido no domínio original. A Figura 5.4 - a representa as condições de contorno enquanto que na Figura 5.4 - b mostra a discretização empregada com dezesseis elementos lineares descontínuos para o contorno externo e oito elementos para os contornos internos. Nesta etapa as variáveis de projeto são responsáveis pela informação das coordenadas dos furos e de seus respectivos raios. Neste exemplo ocorre uma grande combinação simultânea de penalidades impostas ao problema a ser otimizado: singularidade, sobreposição, posicionamento das cavidades fora do domínio da peça e limite do tamanho do raio. Os parâmetros de otimização utilizados neste caso são $\gamma = \{128, 64, 0.4, 4\%$. Na Figura 5.5 é possível acompanhar a evolução dos furos dentro do domínio, e é interessante notar a variação do raio dos furos durante as gerações, mostrando que no processo há uma tentativa de ao final suprimir um dos furos. A evolução do custo (a mesma do caso anterior) está apresentada pela Figura 5.6 e nenhuma redução do custo foi obtida após a 13ª geração, mas o valor obtido para o fluxo foi muito próximo ao da solução analítica, conforme apresentado no exemplo anterior (14.0814 W/m^2).

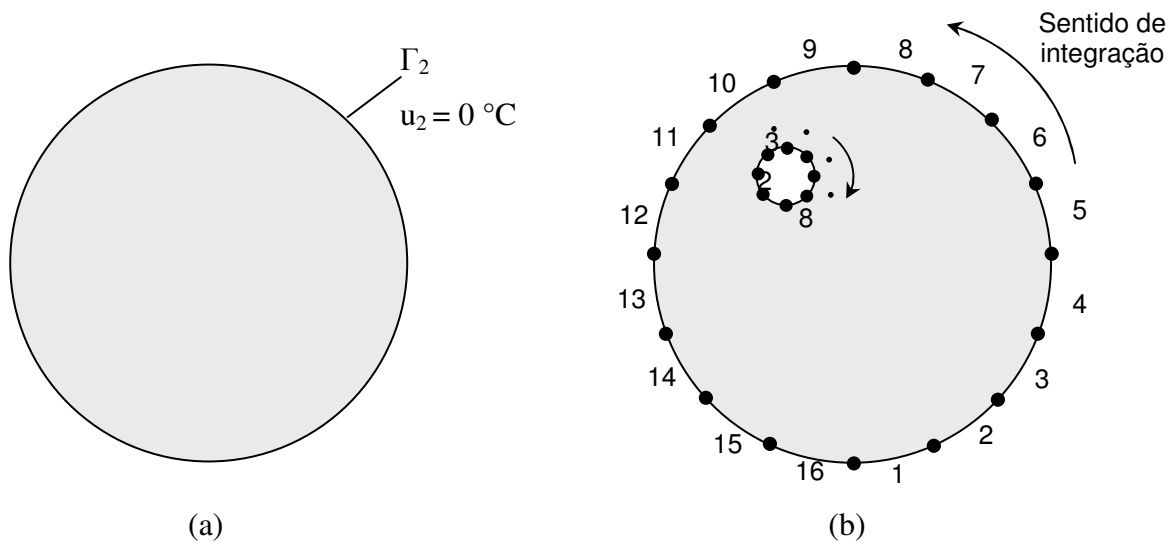


Figura 5.4 - Exemplo 5.2: (a) Condição de contorno, (b) discretização do domínio.

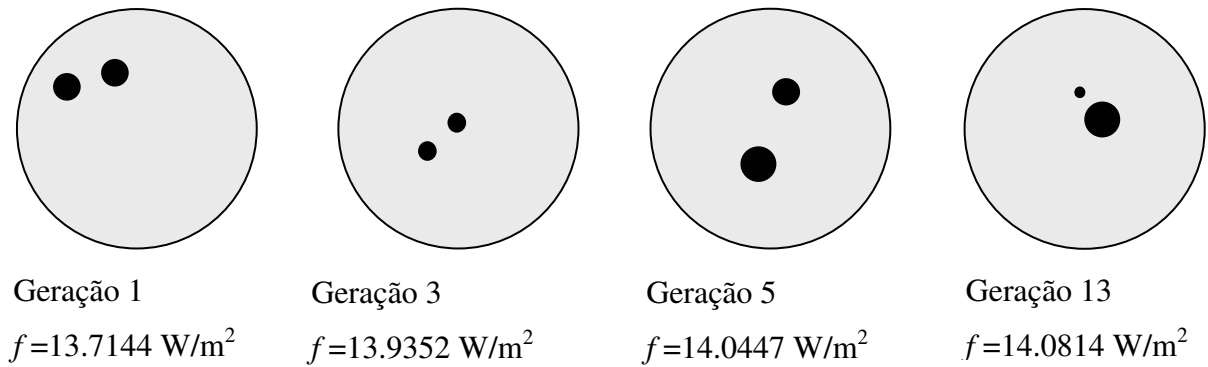


Figura 5.5 - Soluções intermediárias para o exemplo 5.2.

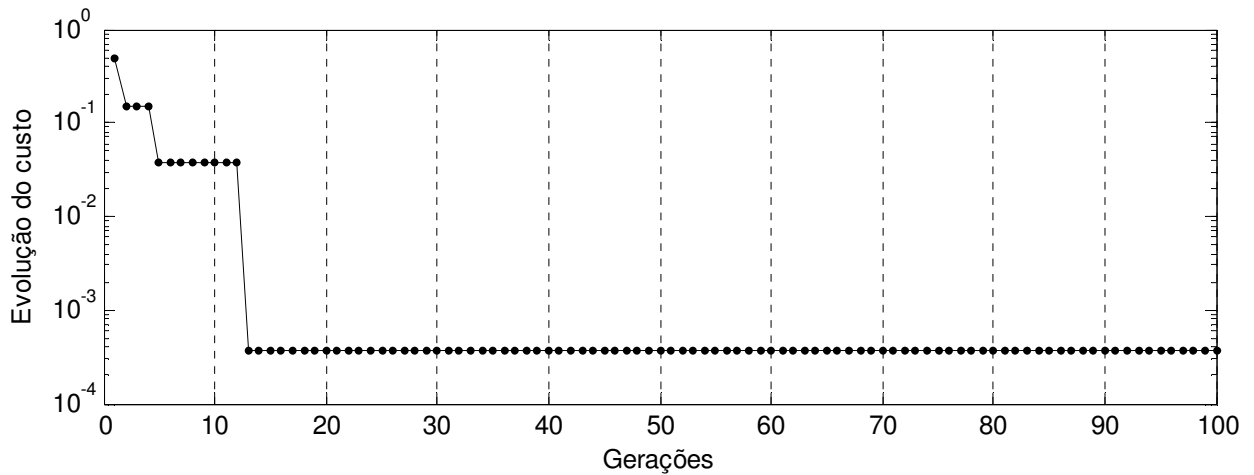


Figura 5.6 – Evolução do custo para o exemplo 5.2.

5.3 Trocador de calor com três cavidades

A abordagem deste caso é semelhante aos dois primeiros exemplos apresentados anteriormente (geometria e condições de contorno), porém desta vez com três furos circulares dentro do domínio. A condutividade térmica foi definida como unitária. O objetivo da otimização consiste em encontrar a posição dos furos de maneira a gerar um fluxo $q_a = 14.0817$ W/m², o qual corresponde à solução analítica de um tubo circular com raio interno 3 m. Os parâmetros utilizados são $\gamma = \{50, 16, 0.2, 5\%$. Uma restrição foi imposta em relação ao tamanho mínimo dos furos com o objetivo de evitar problemas numéricos. A Figura 5.8 ilustra a topologia resultante para algumas gerações. A função custo esta apresentada na Figura 5.9. A solução para a geração 50 é dada por um furo principal de raio 3 m centrado na posição (35,26). Este furo é quase coincidente com aquele utilizado para calcular a função objetivo. O segundo furo possui raio de 1m (tamanho mínimo permitido) e está posicionado na coordenada (28,20). O

terceiro furo de mesmo raio está posicionado na coordenada (25,26). O fluxo obtido para a geração 104 é de 13.37902 W/m^2 , estando muito próximo daquele calculado na solução analítica.

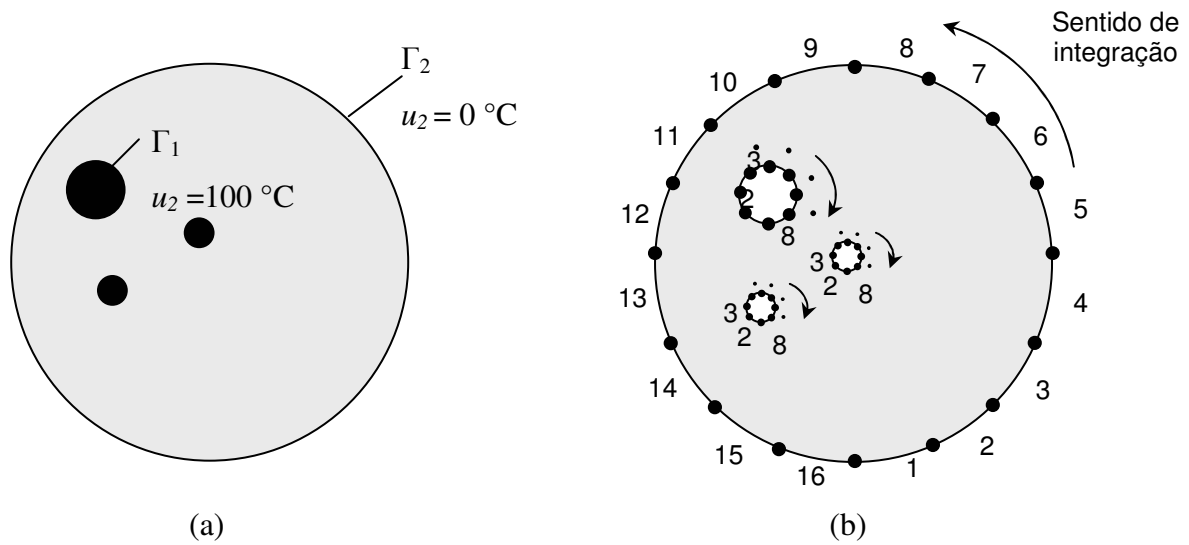


Figura 5.7 - Exemplo 5.3: (a) Condição de contorno, (b) discretização do domínio.

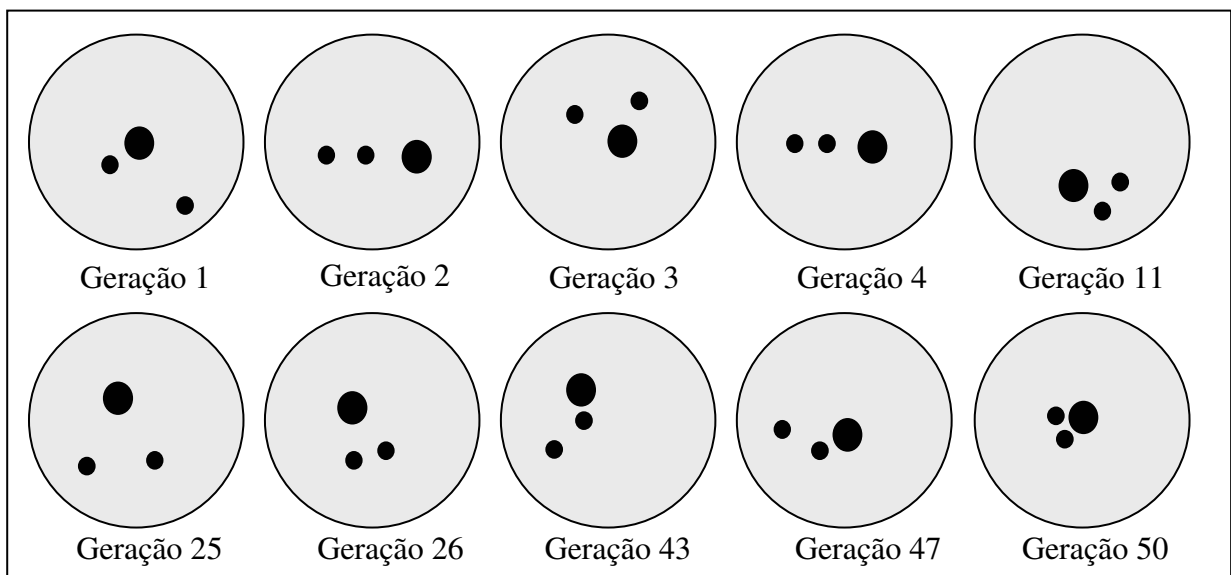


Figura 5.8 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.3.

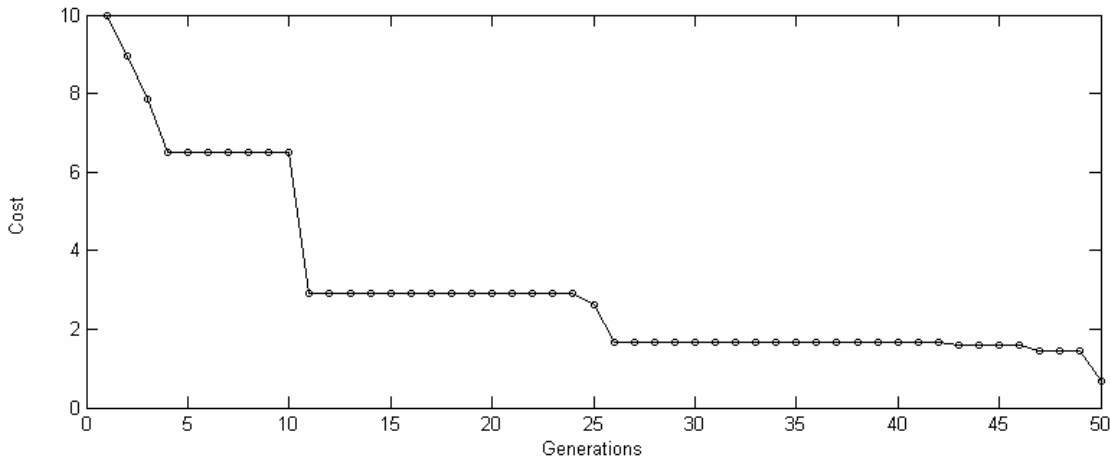


Figura 5.9 - Evolução da função custo para o exemplo 5.3.

5.4 Trocador de calor com cavidade convexa

Este exemplo tem como objetivo encontrar a forma ótima e a localização de cavidades convexas definidas por segmentos dentro do domínio, conforme Figura 5.10 - a. Novamente, foi utilizada a transferências de calor em um tubo circular, com diâmetro externo e interno de 32 m e 15 m, respectivamente. Foram utilizados dezesseis elementos lineares na malha externa, conforme Figura 5.10 (b). A malha interna foi gerada automaticamente, sendo que cada segmento foi dividido em um determinado número de elementos, quando necessário, de maneira com que cada um destes resulta-se no mesmo tamanho dos elementos da malha externa. A função objetivo foi a mesma utilizada nos exemplos anteriores. Foi empregado $\gamma = \{100, 64, 0.3, 4\%$.

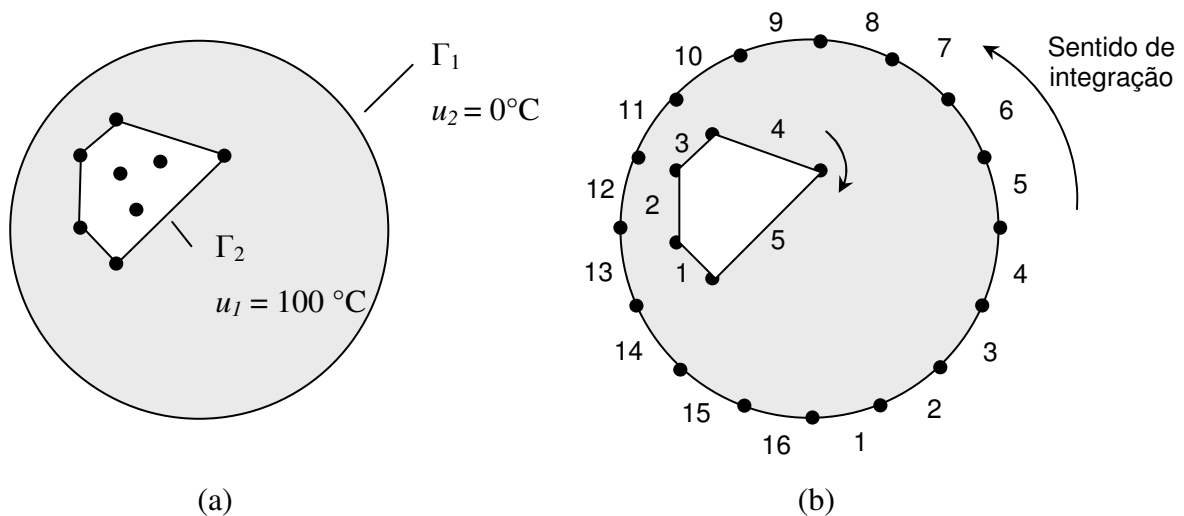


Figura 5.10 – Exemplo 5.4: (a) condições de contorno, (b) discretização do domínio.

Na Figura 5.11 apresenta-se o histórico de evolução do processo de otimização para este caso. À medida que o custo aproxima-se do valor desejado há uma tendência em posicionar a cavidade no centro do círculo. A forma gerada quando o processo foi parado não é exatamente circular, apesar da boa convergência da função custo (Figura 5.12).

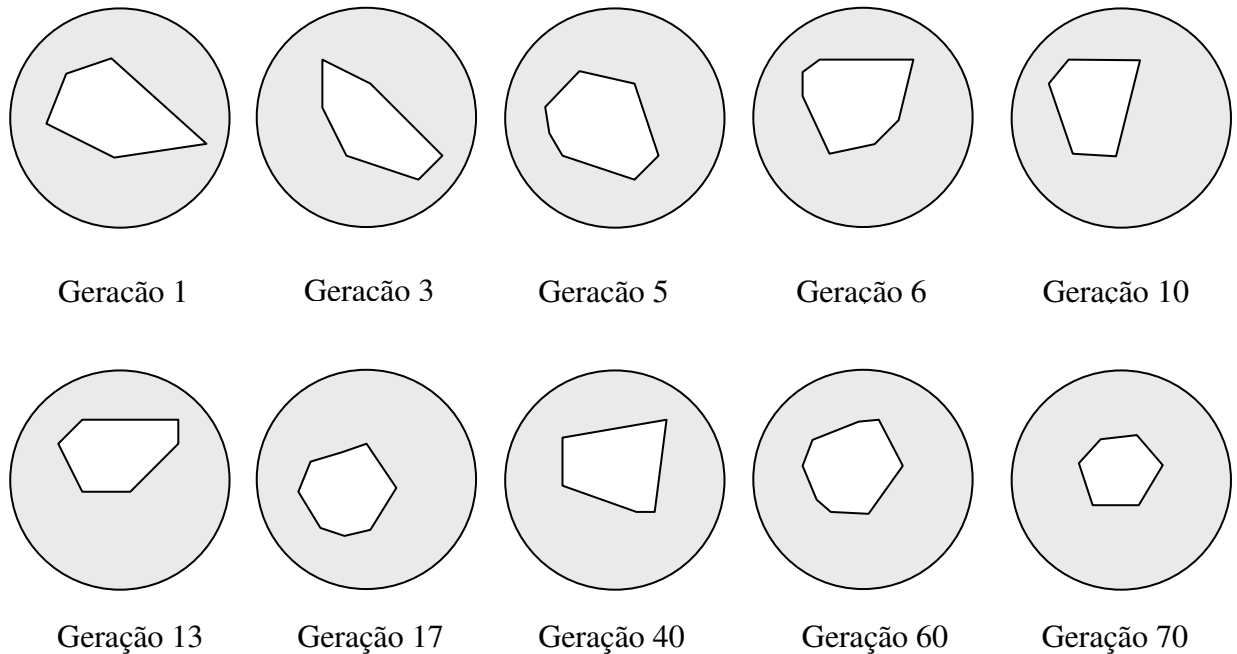


Figura 5.11 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.4.

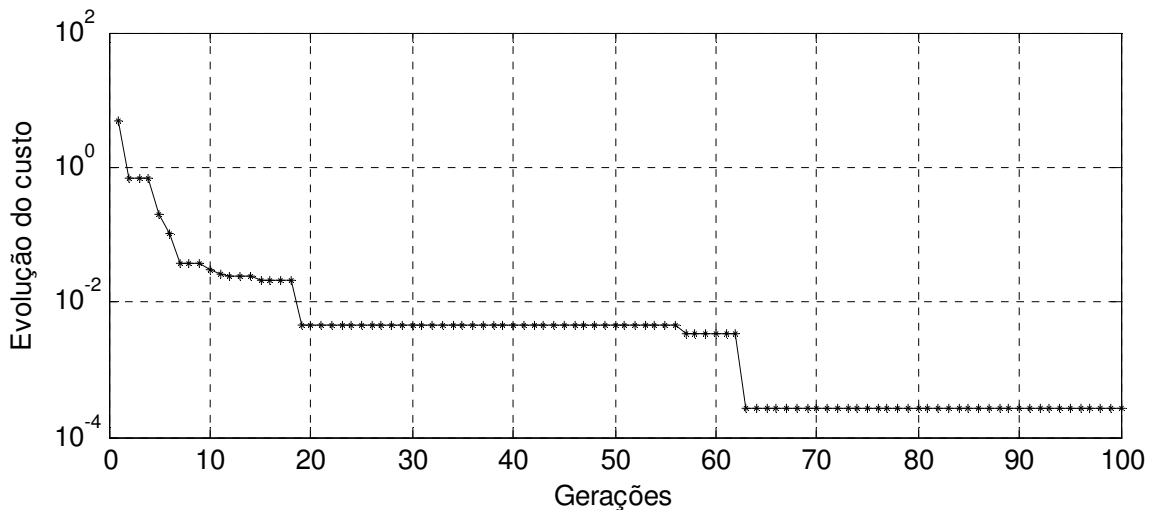


Figura 5.12 – Evolução da função custo para o exemplo 5.4.

5.5 Placa condutora

Para este exemplo considerou-se uma placa de dimensões de 6×6 unidades com duas fontes de calor com temperatura de $100 \text{ }^\circ\text{C}$ e uma terceira condição de contorno com temperatura

igual a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (Figura 5.13). Os demais elementos que não estão assinalados em negrito foram considerados com valor de fluxo prescrito nulo. A função objetivo é calculada em um ponto interno onde se obtém o valor do fluxo. A constante de condutividade usada é $k = 263\text{ W/m}^{\circ}\text{C}$.

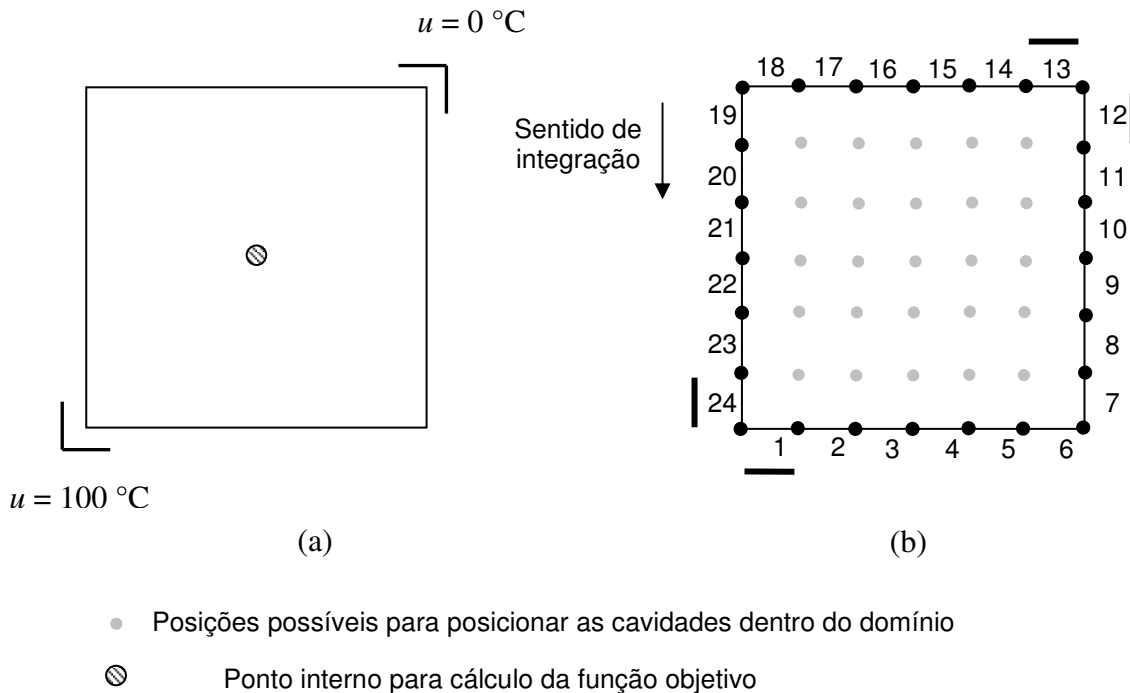


Figura 5.13 – (a) Condições de contorno. (b) Posições possíveis de locação dos furos e discretização do domínio.

Foram colocadas aleatoriamente seis bolhas dentro do domínio, que com a evolução do algoritmo genético espera-se caracterizar a melhor topologia para otimizar a transferência de calor. Os parâmetros genéticos foram ajustados em $\gamma = \{50, 16, 0.3, 3\%\}$. A Figura 5.13 - b para os exemplos mostra todas as possíveis posições para posicionar as cavidades dentro do domínio. A Figura 5.14 apresenta a evolução da função custo enquanto que a Figura 5.15 ilustra aos mapas de temperatura e fluxo para o resultado final (obtido após 49 gerações). Para calcular estes mapas foram utilizados os valores dos pontos internos dentro do domínio, o que explica a ilustração de cavidades quadradas. Analisando os mapas fica claro que a distribuição ótima das cavidades é simétrica em relação a diagonal da placa com as temperaturas prescritas. Desta maneira, o efeito das cavidades na transferência de calor o longo da diagonal está maximizado.

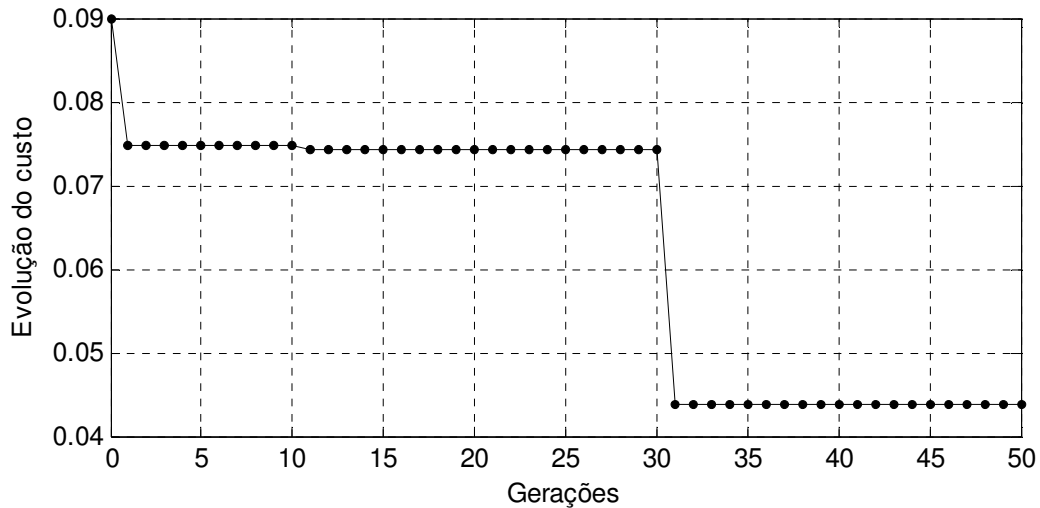


Figura 5.14 – Convergência da função custo para o exemplo 5.5.

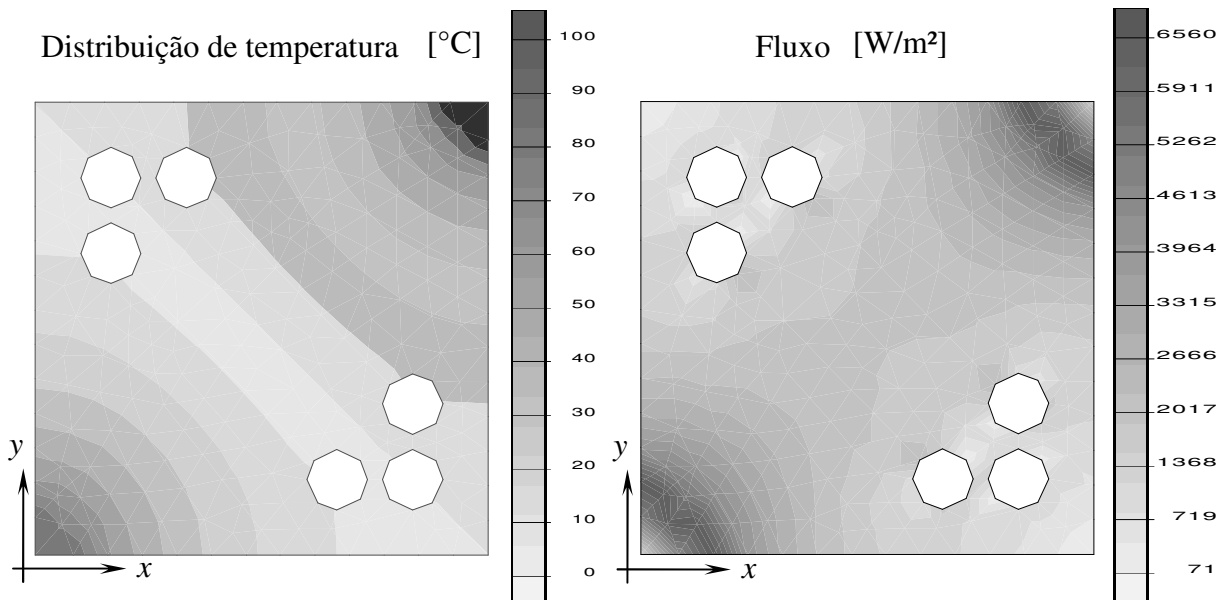
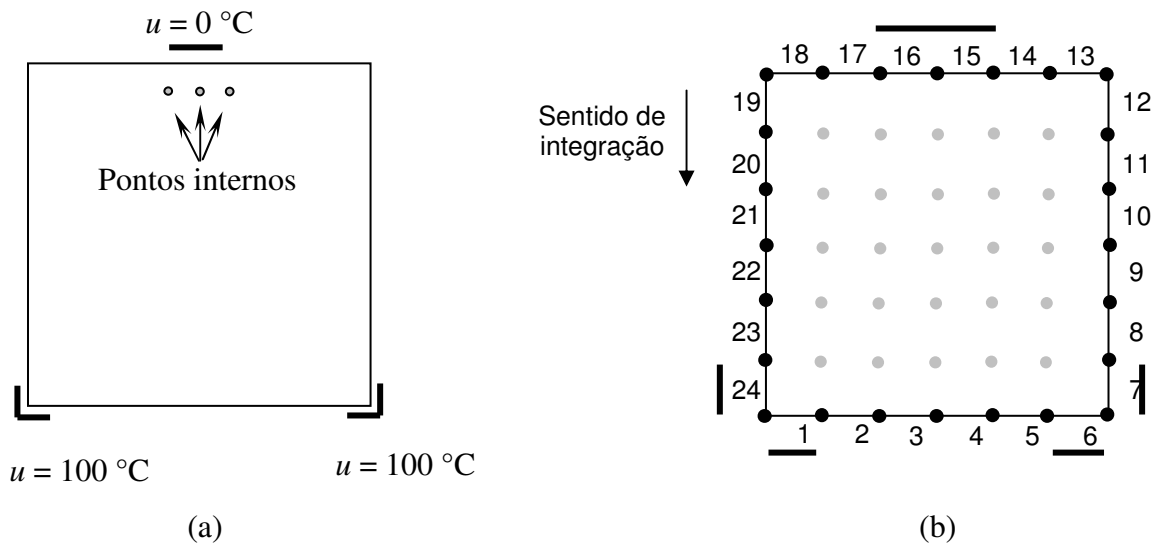


Figura 5.15 - Mapas de temperatura e fluxo para o exemplo 5.5.

5.6 Placa condutora (V invertido)

Para este exemplo foi considerado uma placa de dimensões de 6×6 unidades com duas fontes de calor com temperatura de 100°C e uma terceira condição de contorno com temperatura igual a 0°C (Figura 5.16). Os demais elementos que não estão assinalados em negrito foram considerados com valor de fluxo prescrito iguais a zero. A função objetiva foi calculada com base em três pontos internos, onde seriam calculados os seus respectivos fluxos. A constante de condutividade foi de $k = 263 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ e $\gamma = \{50, 32, 0.3, 3\%$. Foram colocadas aleatoriamente seis bolhas dentro do domínio, que com a evolução do algoritmo genético irão caracterizar a melhor topologia para a transferência de calor. O contorno foi discretizado com 24 elementos

lineares descontínuos, o qual está representado conforme Figura 5.16 - b, ainda na mesma figura, está esquematizado as possíveis posições para posicionar as cavidades dentro do domínio.



- Posições possíveis para posicionar as cavidades dentro do domínio
- Ponto interno para cálculo da função objetivo

Figura 5.16 – Condições de contorno para o exemplo 5.6.

A evolução da função custo normalizada está apresentada na Figura 5.17. Pode ser observado que aproximadamente após 60 gerações não ocorre uma convergência. A topologia resultante está ilustrada na Figura 5.18. Também na mesma figura apresenta-se a distribuição de temperatura e fluxo, obtidos em pontos internos, o que explica a ilustração de furos com forma quadrada. As cavidades resultaram em uma configuração topológica quase simétrica (a disposição simétrica não é atingível neste caso por se empregar um número ímpar de pontos internos na direção horizontal) e estão localizadas em zonas onde o fluxo é mínimo.

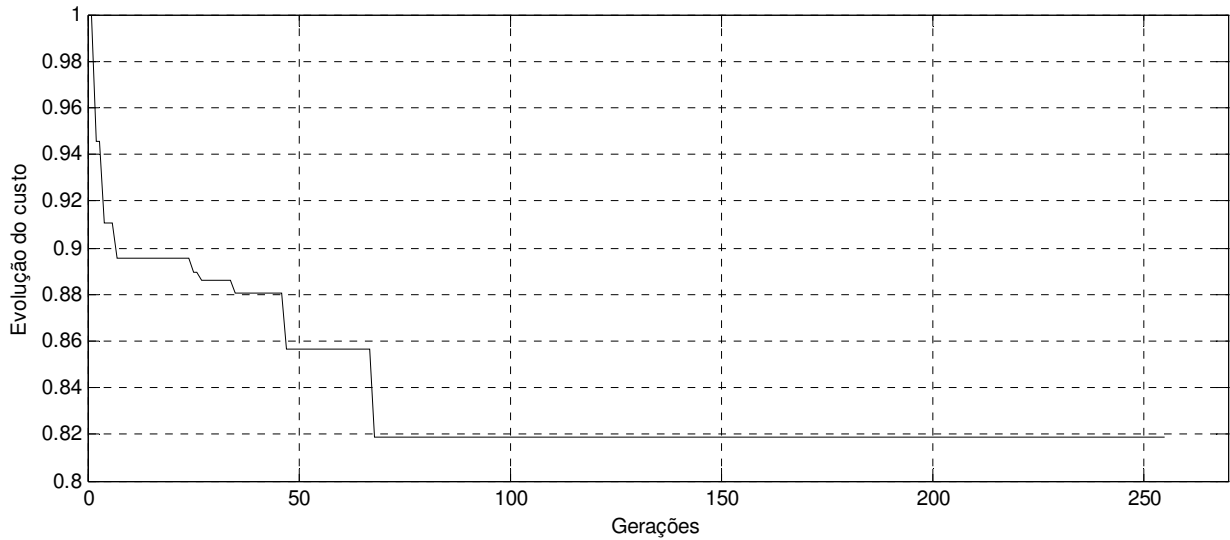


Figura 5.17 – Convergência da função custo para o exemplo 5.6.

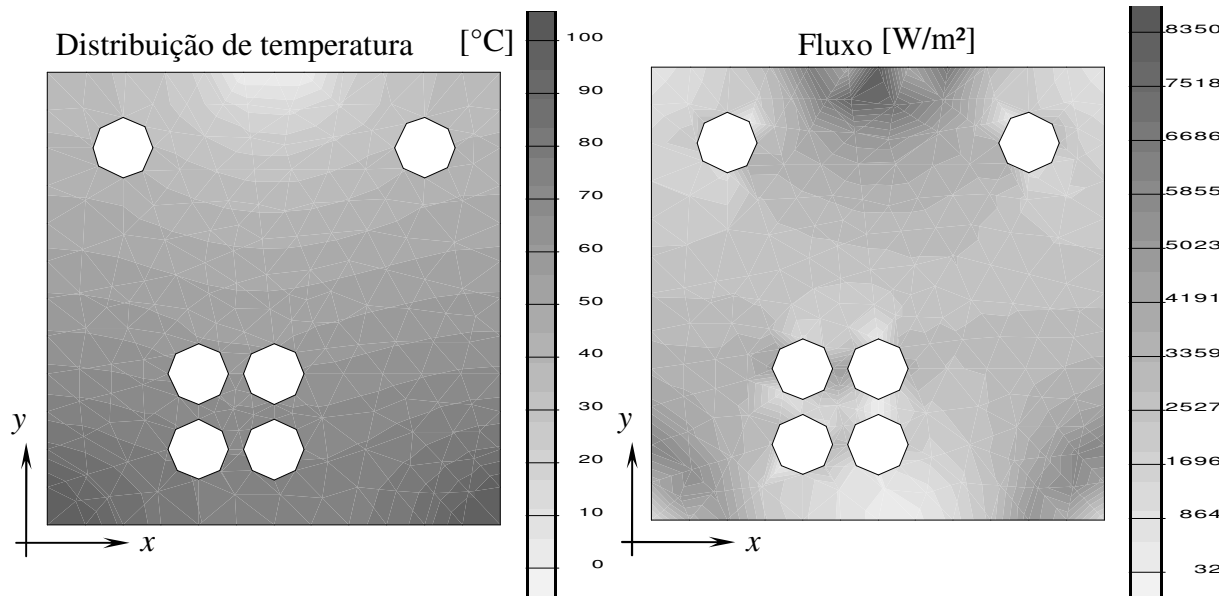


Figura 5.18 – Mapa de Temperatura e fluxo para o exemplo 5.6.

5.7 Molde de compressão

Este exemplo, já estudado anteriormente por Barone e Caulk (1982) e por Lee e Cho (1995), o objetivo consiste em determinar a posição ótima das resistências em um molde de compressão (Figura 5.19). O material a ser moldado é um polímero. O molde é aquecido por condutores de calor localizados em seu interior, denominados por resistências ou *heating lines*. Se a temperatura na superfície da cavidade do molde não for uniforme, o polímero não será curado uniformemente, aumentando assim o tempo de cura. A função objetivo consiste na maximização

da temperatura na superfície da cavidade AB, de modo que a temperatura nesta região seja a mais uniforme possível. São analisadas três situações, sendo consideradas duas, três e quatro resistências dentro do molde. As condições de contorno são mostradas conforme Figura 5.19. A condutividade térmica do material do molde é de $50 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. O diâmetro das resistências é de 0.02 m e sua temperatura está prescrita em 150°C . Foram utilizados quarenta e oito elementos descontínuos lineares para modelar o molde, levando em conta a sua simetria. A escala de possíveis coordenadas para posicionar as resistências dentro do domínio nas direções x e y são $(0.05..9.95)$ e $(0.05..3.95)$, respectivamente, com passo de 0.05 m em ambas as direções. As posições iniciais das resistências foram geradas de maneira aleatória.

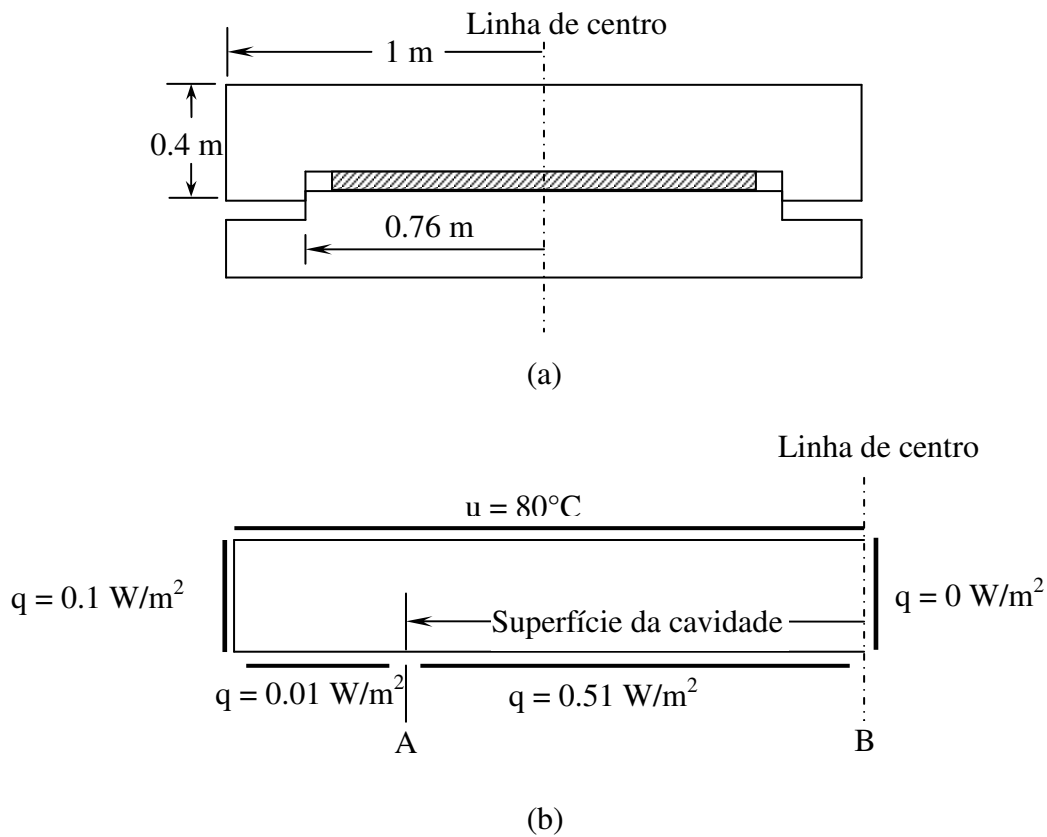


Figura 5.19 – (a) Esquema de um molde à compressão. (b) Condições de contorno.

A função objetivo está definida pela seguinte integral no contorno:

$$\phi = \frac{\int_{AB} u \, dS}{AB} - T_d \quad (5.1)$$

A qual pode ser expressa em termos de variáveis no contorno:

$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n} - T_d \quad (5.2)$$

sendo n o número de nós físicos ao longo da linha AB.

A equação (5.2) é utilizada para minimizar a diferença entre a temperatura prescrita na cavidade do molde e o valor prescrito de temperatura T_d , ao longo da linha AB.

a) *Duas resistências*: Neste caso o molde possui duas resistências, inicialmente localizadas conforme a Figura 5.20 - a sendo os parâmetros genéticos ajustados em $\gamma = \{128, 64, 0.4, 3\%\}$. A Figura 5.20 - a e a Figura 5.20 - b comparam o *design* inicial e ótimo, respectivamente. A Figura 5.21 apresenta a distribuição de temperatura ao longo da superfície AB para ambas as configurações.

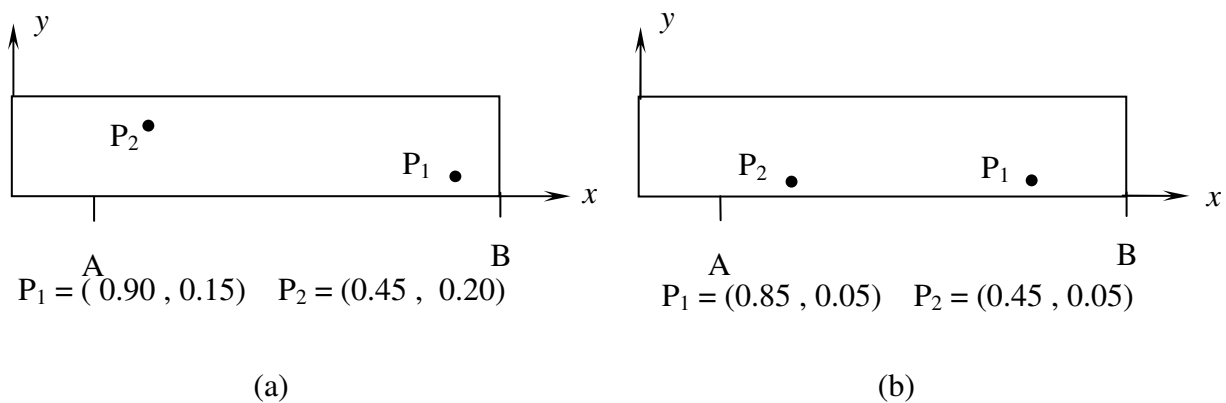


Figura 5.20 – Molde de compressão com duas resistências. (a) Configuração inicial. (b) Configuração otimizada.

A Figura 5.22 apresenta evolução da função custo normalizada conforme a equação apresentada abaixo.

$$Custo = \frac{\phi}{T_d} \quad (5.3)$$

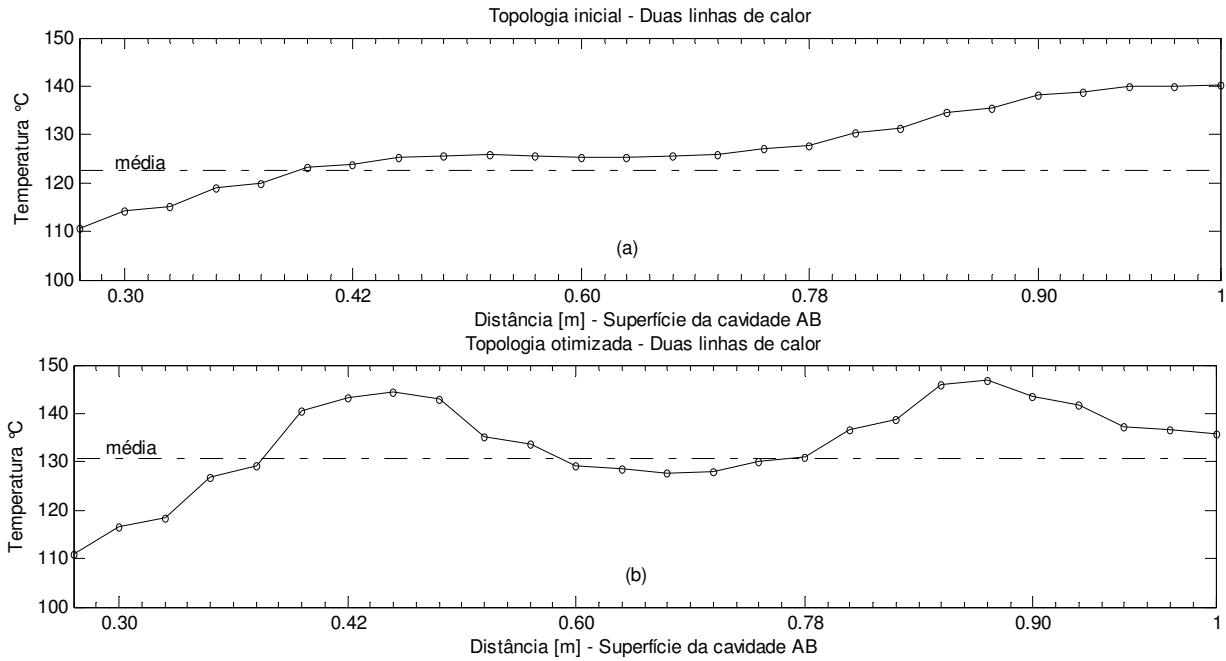


Figura 5.21 – Molde de compressão com duas resistências. Distribuição da temperatura ao longo da superfície da cavidade (AB).

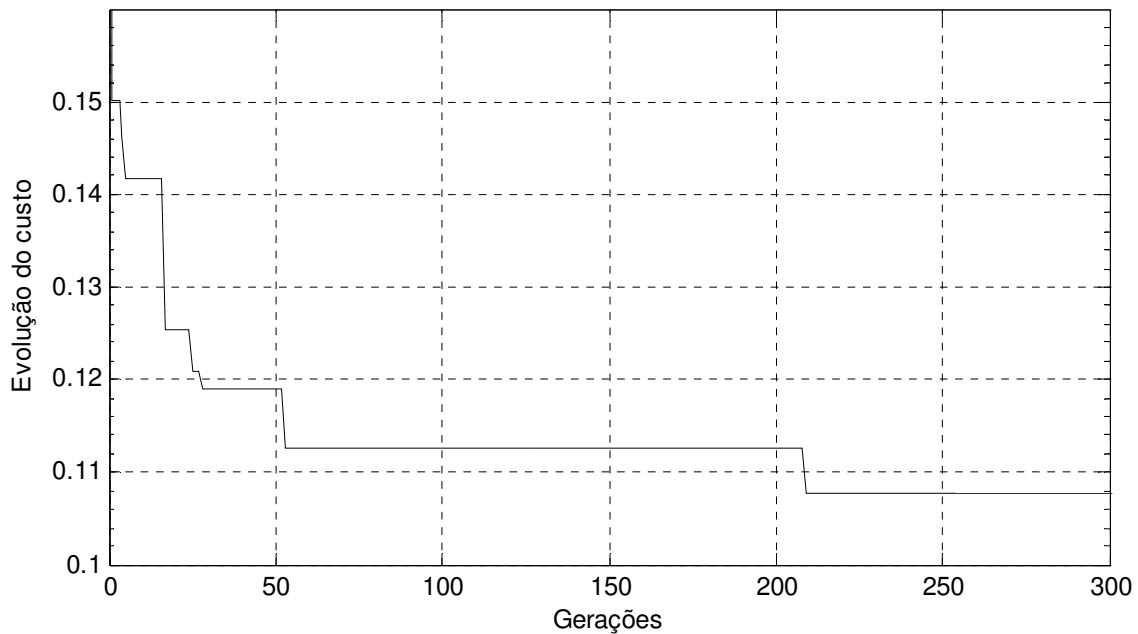


Figura 5.22 – Convergência da função custo para molde de compressão com duas resistências.

b) Três resistências: Com o objetivo de obter uma distribuição mais uniforme de temperatura ao longo da superfície da cavidade, foram consideradas três resistências neste exemplo, com $\gamma = \{128, 64, 0.4, 3\%$ representa os parâmetros genéticos utilizados neste exemplo. A Figura 5.23 - a e Figura 5.23 - b compara os designs inicial e ótimo. Como esperado, o algoritmo locou com sucesso as resistências bem próximas à superfície do molde,

conforme mostrado na Figura 5.24 - b. A Figura 5.24 mostra a distribuição de temperatura ao longo da superfície da cavidade AB para ambas configurações. Claramente, a distribuição de temperatura resultante é mais uniforme do que aquela obtida com duas resistências. Ao mesmo tempo a média de temperatura resulta maior do que aquela obtida com duas resistências.

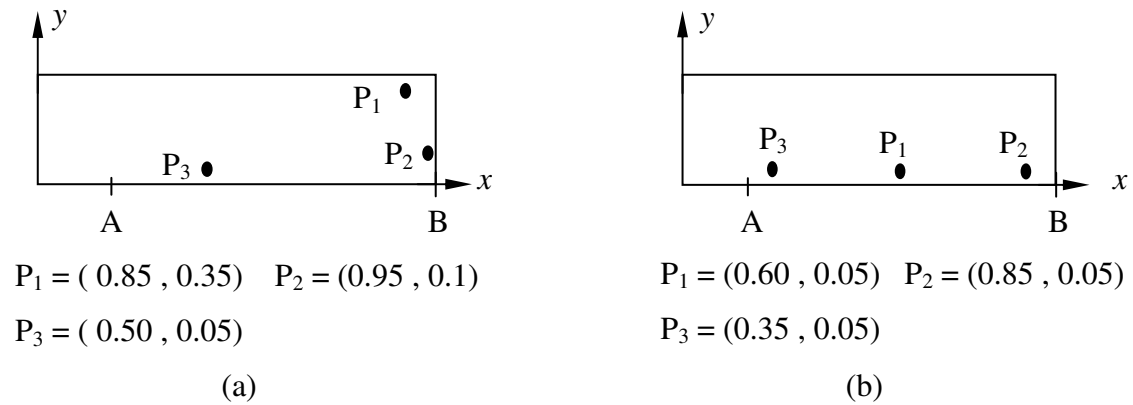


Figura 5.23 - Molde de compressão com três resistências. (a) Configuração inicial. (b) Configuração otimizada.

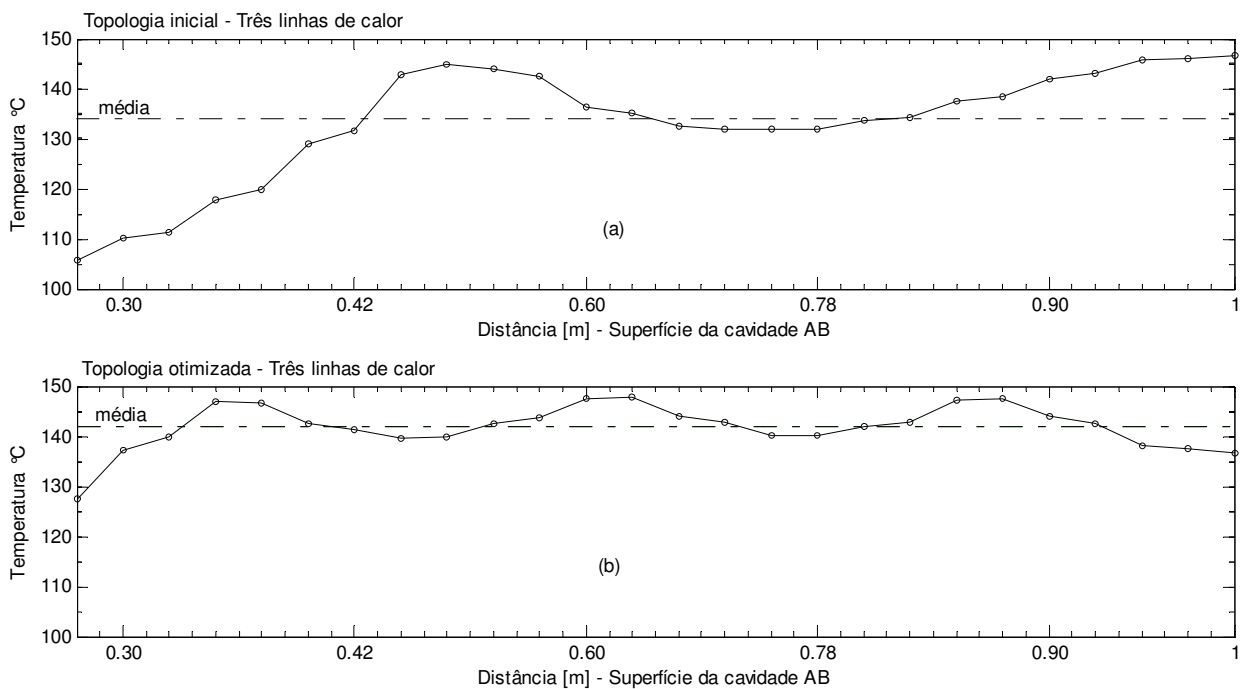


Figura 5.24 : Molde de compressão com três resistências. Distribuição da temperatura ao longo da superfície da cavidade (AB).

A evolução da função custo normalizada pela equação (5.3) é apresentada segunda a Figura 5.25. É importante notar o incremento no número de gerações, devido ao baixo número de indivíduos utilizados na população.

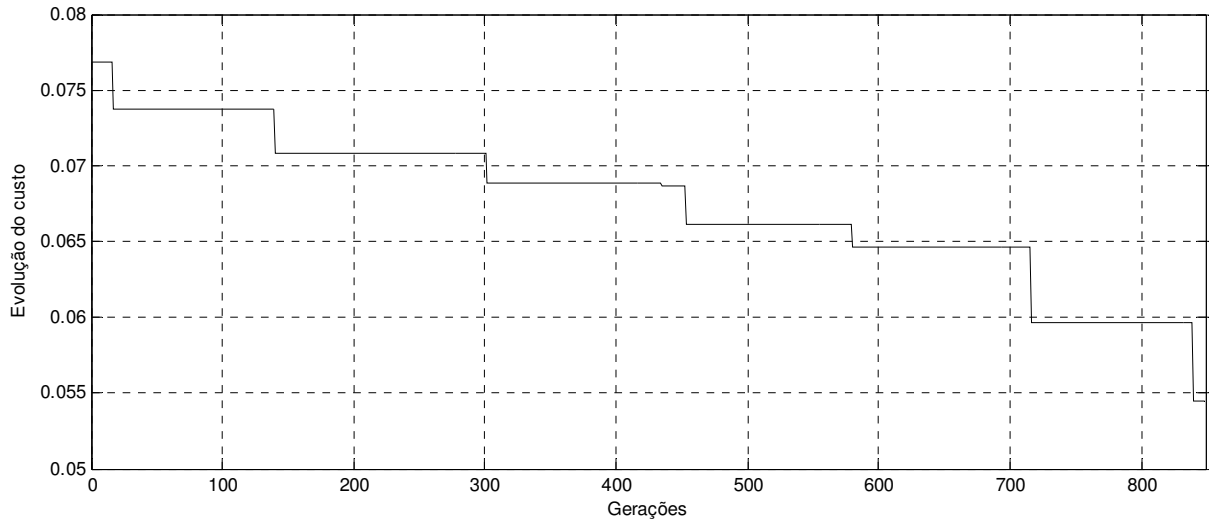


Figura 5.25 - Convergência da função custo para molde de compressão com três resistências.

(c) *Quatro resistências*: Para efeito de comparação, foi proposto outro *design*, porém desta vez com quatro resistências dentro do molde. Os parâmetros genéticos usados foram $\gamma = \{600, 500, 0.4, 5\%$. A Figura 5.25 - a e Figura 5.26 - b mostram a configuração inicial e a final obtida. A Figura 5.26 - b mostra uma das resistências muito próximas ao ponto A, com o objetivo de eliminar os fluxos de temperatura em torno do ponto, conforme apresentado na Figura 5.20 - b e Figura 5.23 - b.

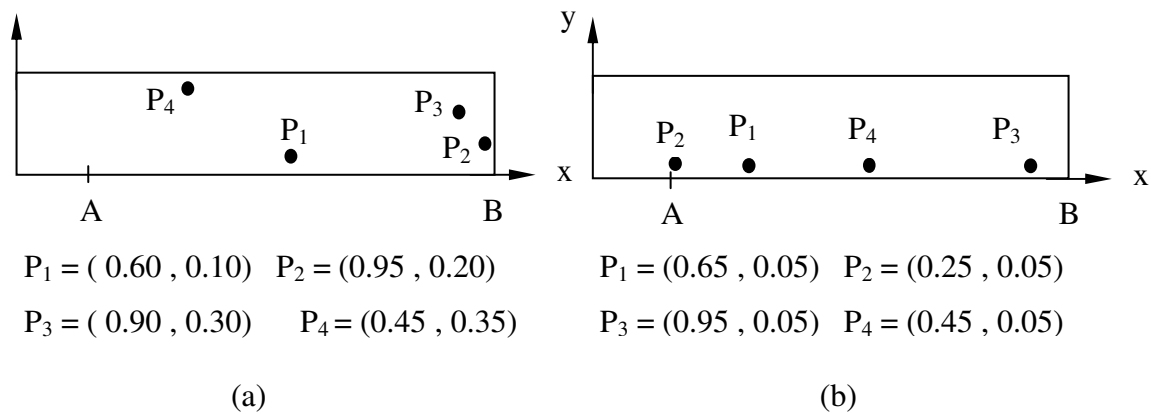


Figura 5.26: Molde de compressão com quatro resistências. (a) Configuração inicial. (b) Configuração otimizada.

A distribuição de temperatura na superfície da cavidade é apresentada na Figure 13 para a distribuição de temperatura inicial e otimizada. A Figura 5.28 apresenta a evolução da função custo normalizada. Dos três casos analisados (2,3 e 4 resistências) fica claro que quanto maior o número de fontes dentro do domínio melhor a distribuição de calor. Com este caso foi demonstrado que é possível determinar a posição exata para posicionar as resistências, obtendo

assim um processo de cura bem mais uniforme do material que está sendo moldado. Este é um exemplo simples e muito funcional, do ponto de vista de engenharia, para uma aplicação prática.

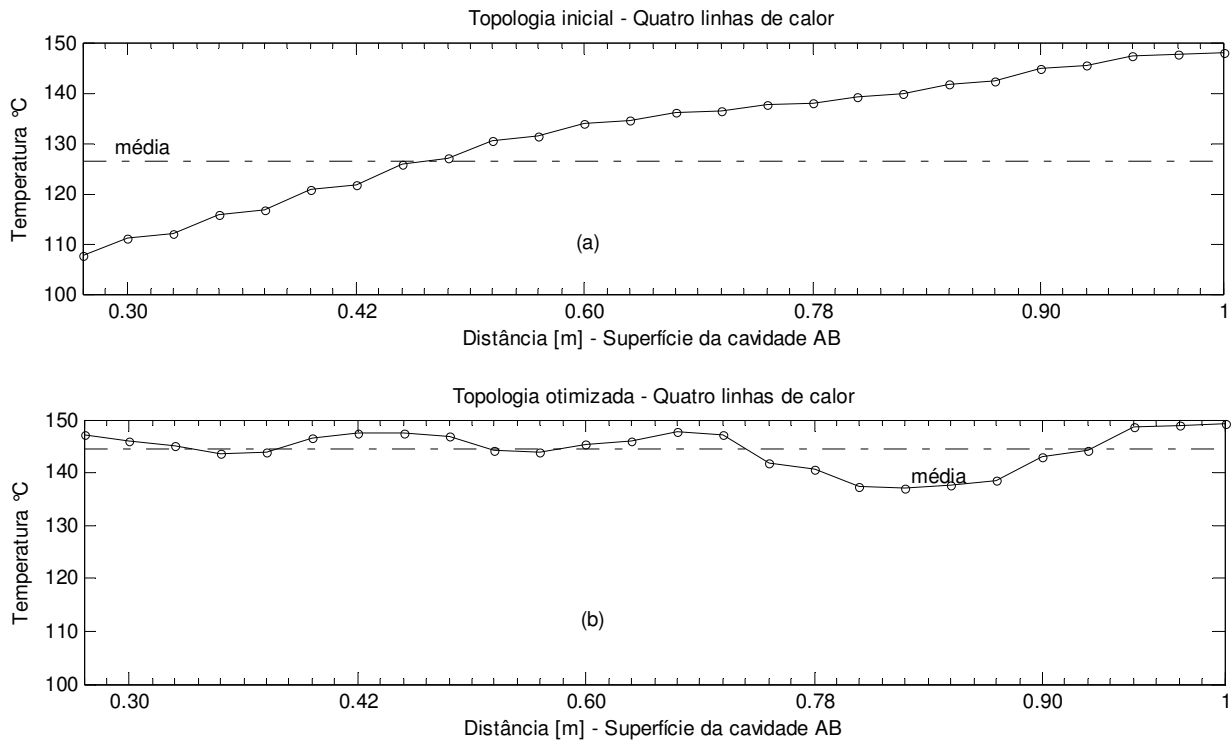


Figura 5.27 - Molde de compressão com quatro resistências. Distribuição da temperatura ao longo da superfície da cavidade (AB).

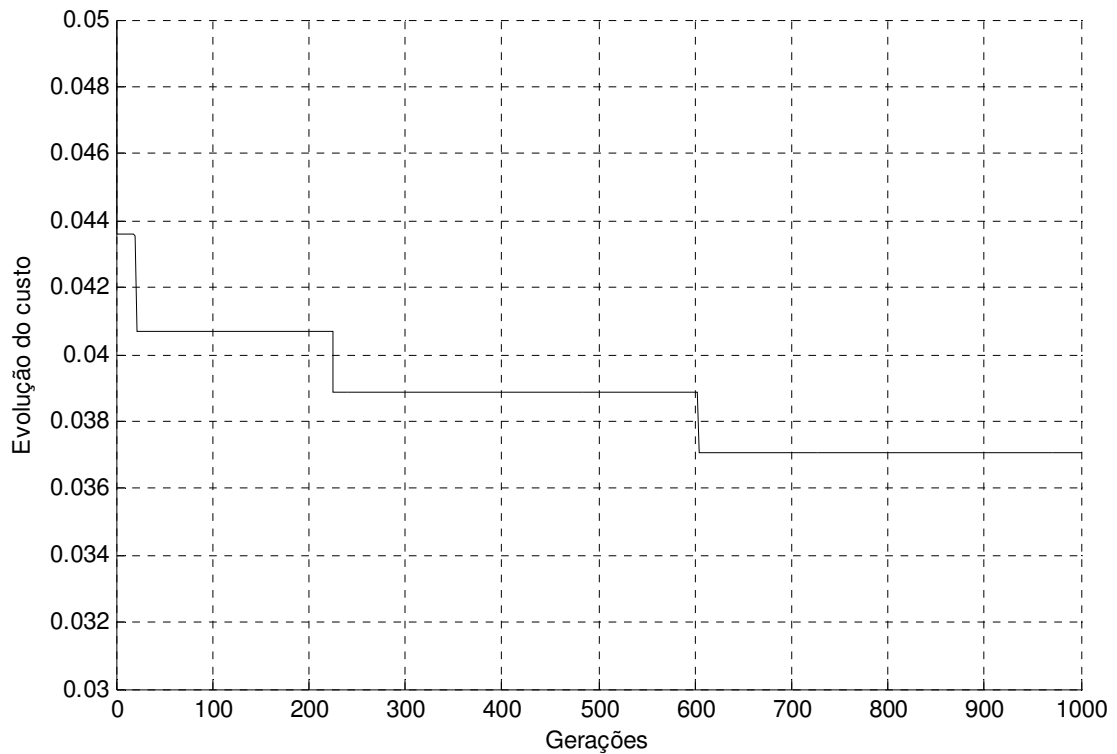


Figura 5.28 – Convergência da função custo para molde de compressão com quatro resistências.

5.8 Trocador de calor – Matriz de chaveamento

Este exemplo consiste de um domínio circular com 32 m de diâmetro externo (Figura 5.29). A temperatura externa do domínio circular está prescrita em $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, enquanto que a temperatura nos furos é de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. A condutividade térmica foi prescrita em $k = 1\text{ W/m}^{\circ}\text{C}$. Foram definidas vinte e cinco posições possíveis para abrir ou fechar as cavidades dentro do domínio circular. Um número inicial de furos foi definido aleatoriamente, conforme haja uma evolução da função custo o AG é responsável por abrir ou fechar as cavidades. O objetivo desta otimização consiste em resultar em um único furo no centro, obtendo um fluxo $q_a = 14.08\text{ W/m}^2$, o qual corresponde à solução analítica de um tubo circular de raio interno 3 m. Os parâmetros de entrada para o AG são $\gamma = \{32, 32, 0.4, 2\%\}$. A Figura 5.30 ilustra a topologia resultante para algumas gerações. A evolução da função custo esta apresentada na Figura 5.31. O fluxo obtido na geração 23 é de 14.05 W/m^2 , estando muito próximo ao calculado pela solução analítica.

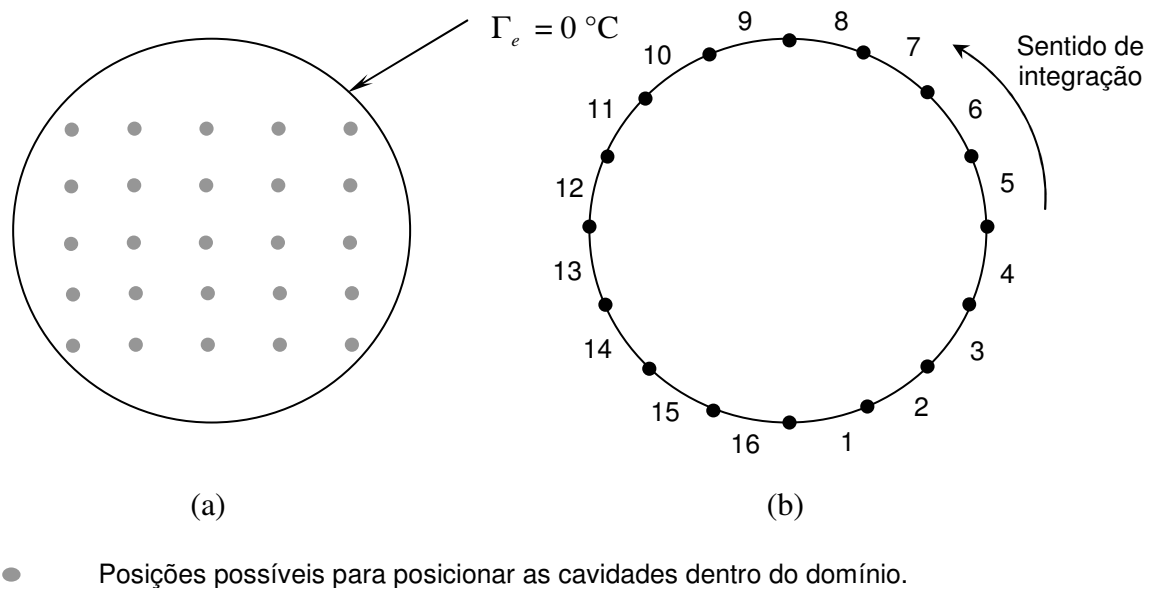


Figura 5.29 – Trocador de calor: (a) Posições possíveis para posicionar os furos. (b) Discretização do contorno.

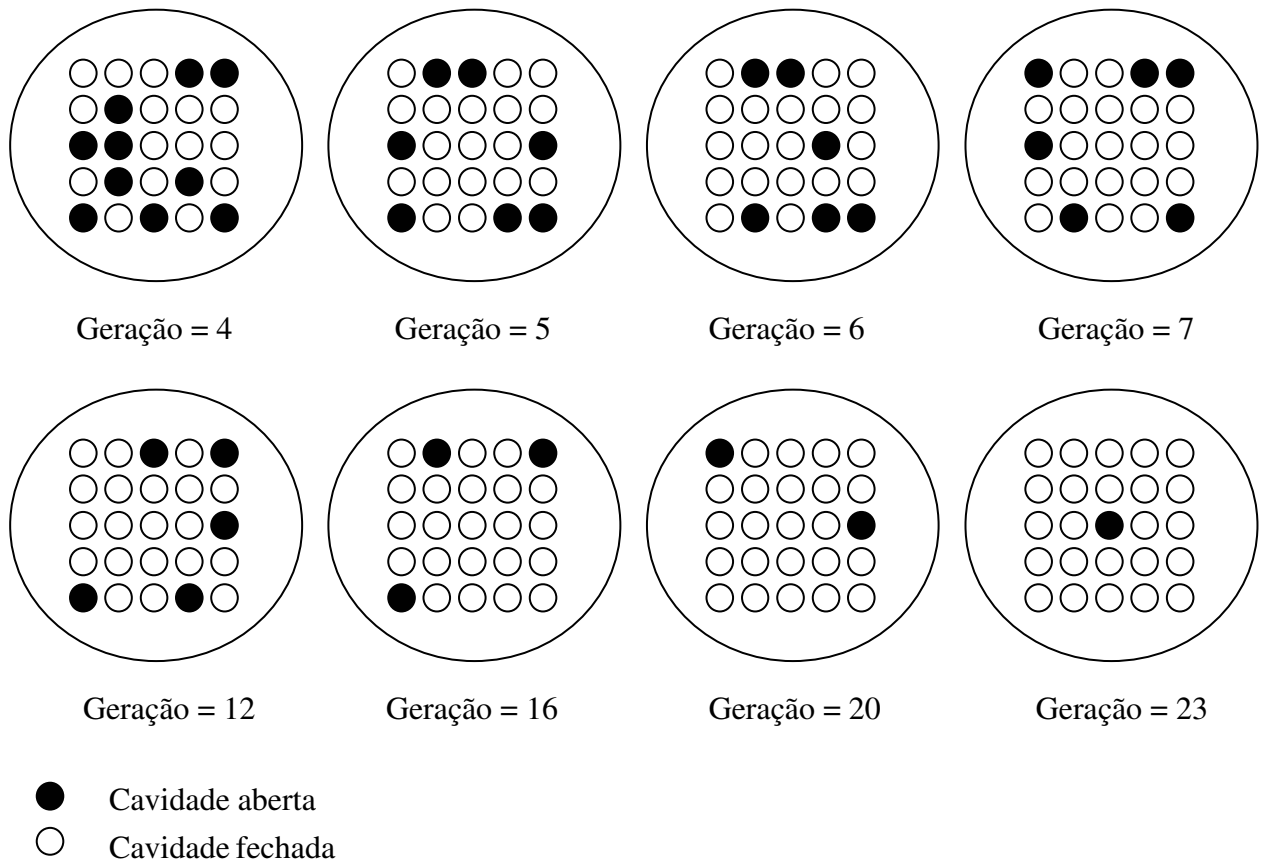


Figura 5.30 – Evolução do processo de otimização para o trocador de calor.

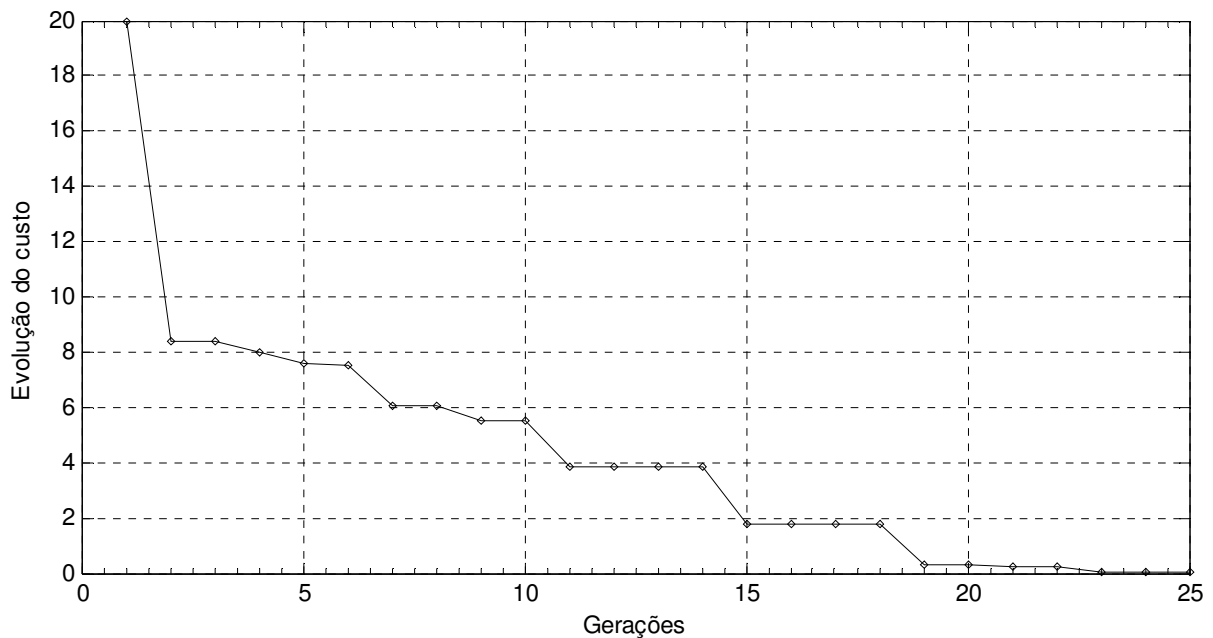


Figura 5.31 – Trocador de calor: convergência da função custo.

5.9 Placa em V – Matriz de chaveamento

Este exemplo refere-se a uma placa quadrada condutora de calor de dimensões 9×9 m, submetida às condições de contorno apresentadas na Figura 5.32 - a. A condutividade térmica

esta ajustada como $k = 1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ e os parâmetros genéticos foram ajustados com $\gamma = \{128, 64, 0.4, 3\%$. Foram utilizados trinta e dois elementos lineares descontínuos na discretização do contorno externo. As posições indicadas na Figura 5.32 -b são as possíveis posições para as cavidades. As cavidades possuem forma quadrada, e estão discretizadas por oito elementos lineares descontínuos. O contorno das cavidades é considerado isolado. O número de cavidades foi definido em oito e permanecem constantes durante o processo de otimização com o objetivo de remover uma fração de volume constante (32%). A função custo está definida como a diferença entre o trabalho externo do domínio original e o trabalho externo da solução atual. Isto permite a remoção de material onde a densidade da energia interna é menos significante.

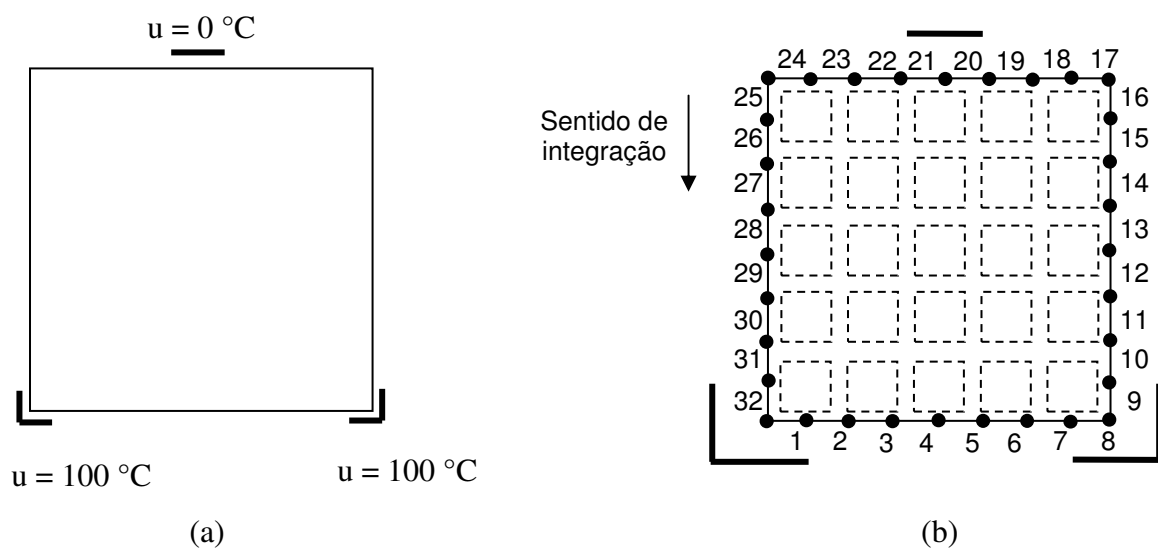


Figura 5.32 – Placa em V – Matriz de chaveamento: (a) condições de contorno. (b) Posições admissíveis dos furos.

Foi desenvolvido um filtro especialmente para eliminar cavidades dispersas, as quais poderiam gerar configurações de microestrutura. Este filtro permite a criação de uma nova cavidade na vizinhança de uma já existente. A Figura 5.33 apresenta um exemplo de uma topologia indesejável e sua nova disposição depois da ação do filtro.

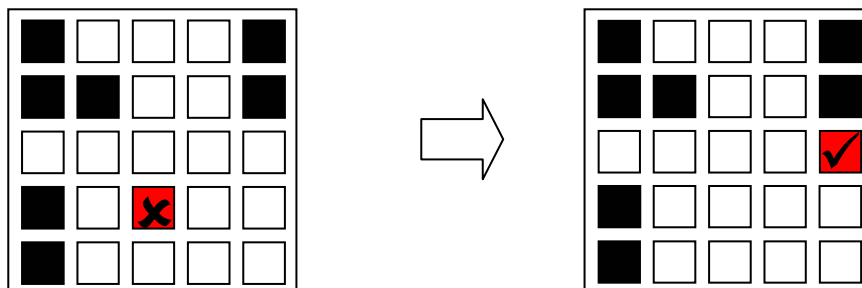


Figura 5.33 - Filtragem da criação de cavidades isoladas.

A Figura 5.34 demonstra a evolução da topologia ao longo do processo de iteração enquanto que a Figura 5.35 apresenta o histórico da evolução do custo.

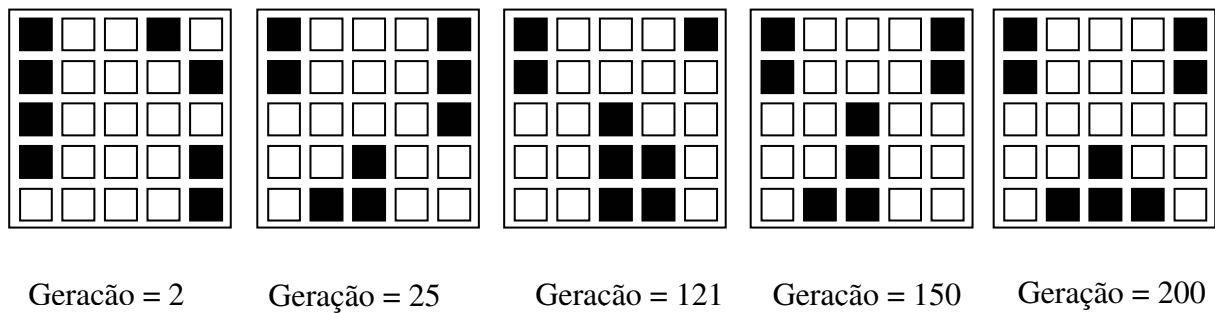


Figura 5.34 – Soluções intermediárias para o exemplo 5.10.

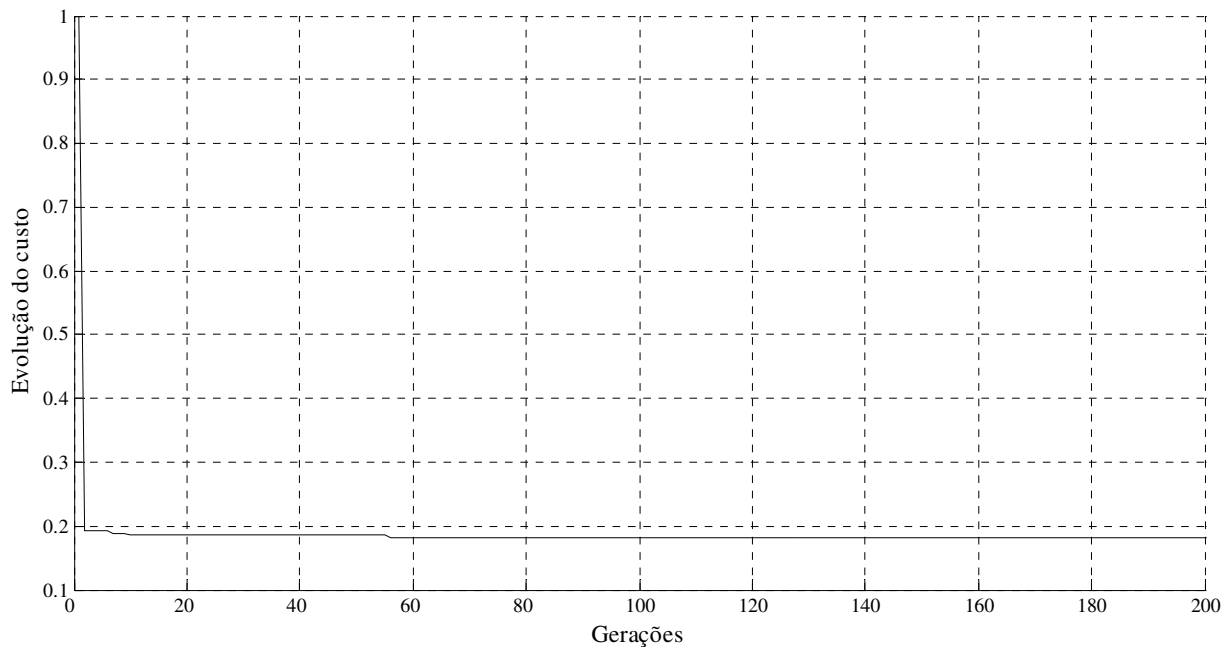


Figura 5.35 – Evolução da função custo para o exemplo 5.10.

A Figura 5.36 apresenta uma comparação dos resultados obtidos com outra solução obtida pelo MEC (Marczak, 2005). Está claro que o algoritmo proposto está apto a remover material onde é menos necessário. Em um procedimento de otimização estrutural totalmente automatizado, a topologia final apresentada na Figura 5.36-a pode ser interpretada para gerar projetos de engenharia.

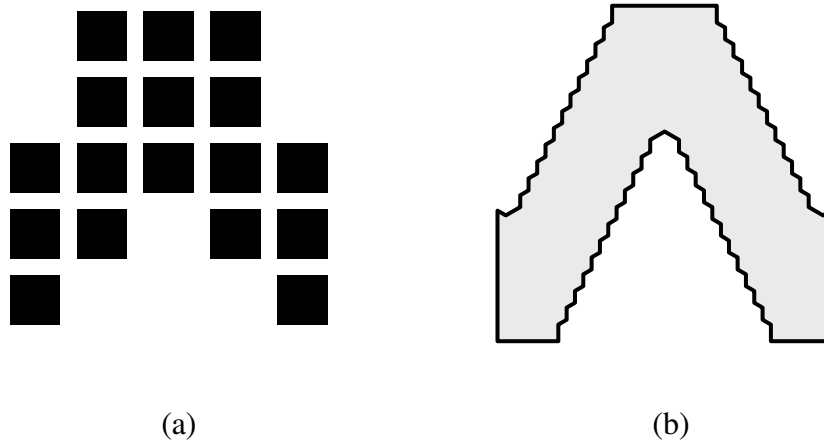


Figura 5.36 – Comparação entre as topologias.

5.10 Molde de compressão

Este exemplo é similar ao apresentado no item 5.7 e suas características como dimensões, condições de contorno e discretização são reapresentadas conforme Figura 5.37. O objetivo do exemplo anterior consistia em manter a distribuição de temperatura na aresta AB o mais próximo possível a $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ e foram testados resultados considerando 2, 3 e 4 resistências dentro do molde, o que caracteriza um processo de otimização com restrição de volume. No caso anterior as variáveis de projeto eram as coordenadas x e y das resistências. No exemplo atual o mesmo caso será considerado, porém, as variáveis de projeto passam a ser os valores da própria matriz de chaveamento.

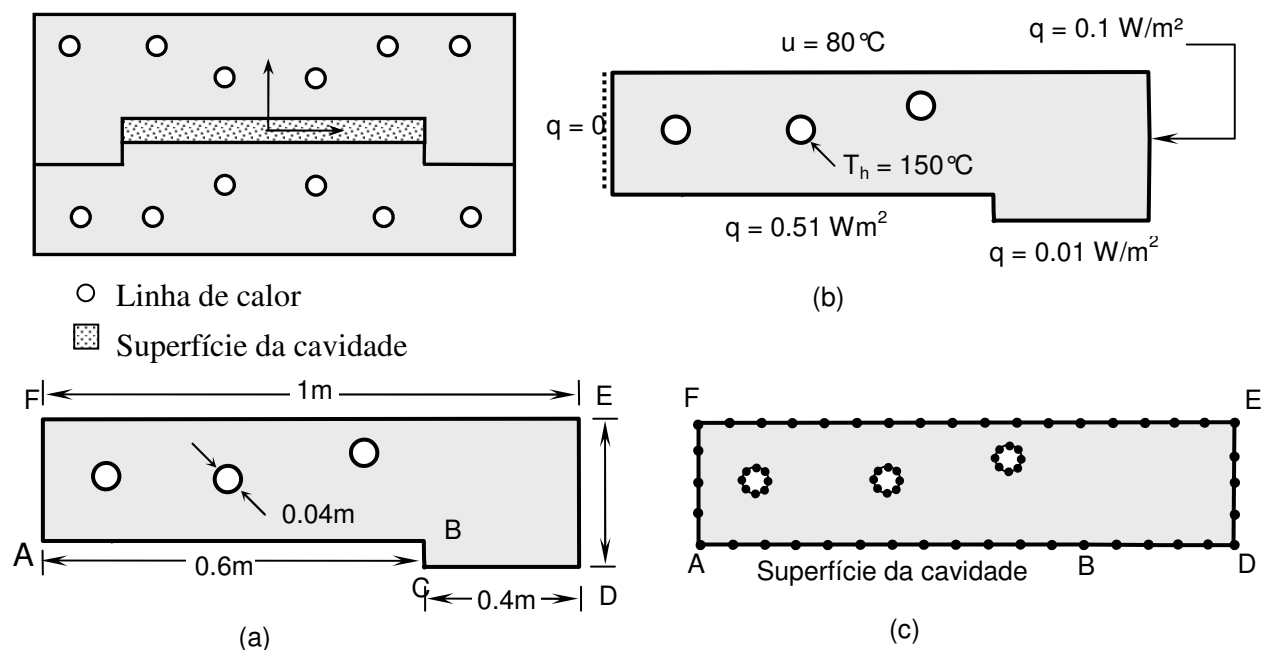


Figura 5.37 – Molde de compressão: (a) dimensões do molde; (b) condições de contorno; (c) discretização do contorno.

Neste t3pico tr3s casos ser3o estudados, sendo que no primeiro a fun33o objetivo consiste na obten33o de um perfil de temperatura constante e para o segundo e terceiro caso o objetivo est3 em obter um perfil el3ptico de distribui33o de temperatura ($T = -18.74 x^3 - 39.76 x^2 + 97.73 x + 106.1$) atrav3s do arranjo das resist3ncias dentro do molde. Para o primeiro caso, o qual considera temperatura constante na cavidade do molde foram determinadas 28 poss3veis posi33es das resist3ncias dentro do dom3nio enquanto que para o segundo caso, onde a distribui33o de temperatura apresenta comportamento el3ptico foram consideradas 49 posi33es dentro do dom3nio, Figura 5.38 - a e Figura 5.38 - b, respectivamente. 3 importante salientar que neste caso n3o h3 restri33o de volume, ou seja, o n3mero de resist3ncias pode aumentar ou diminuir 3 medida que o processo evolui.

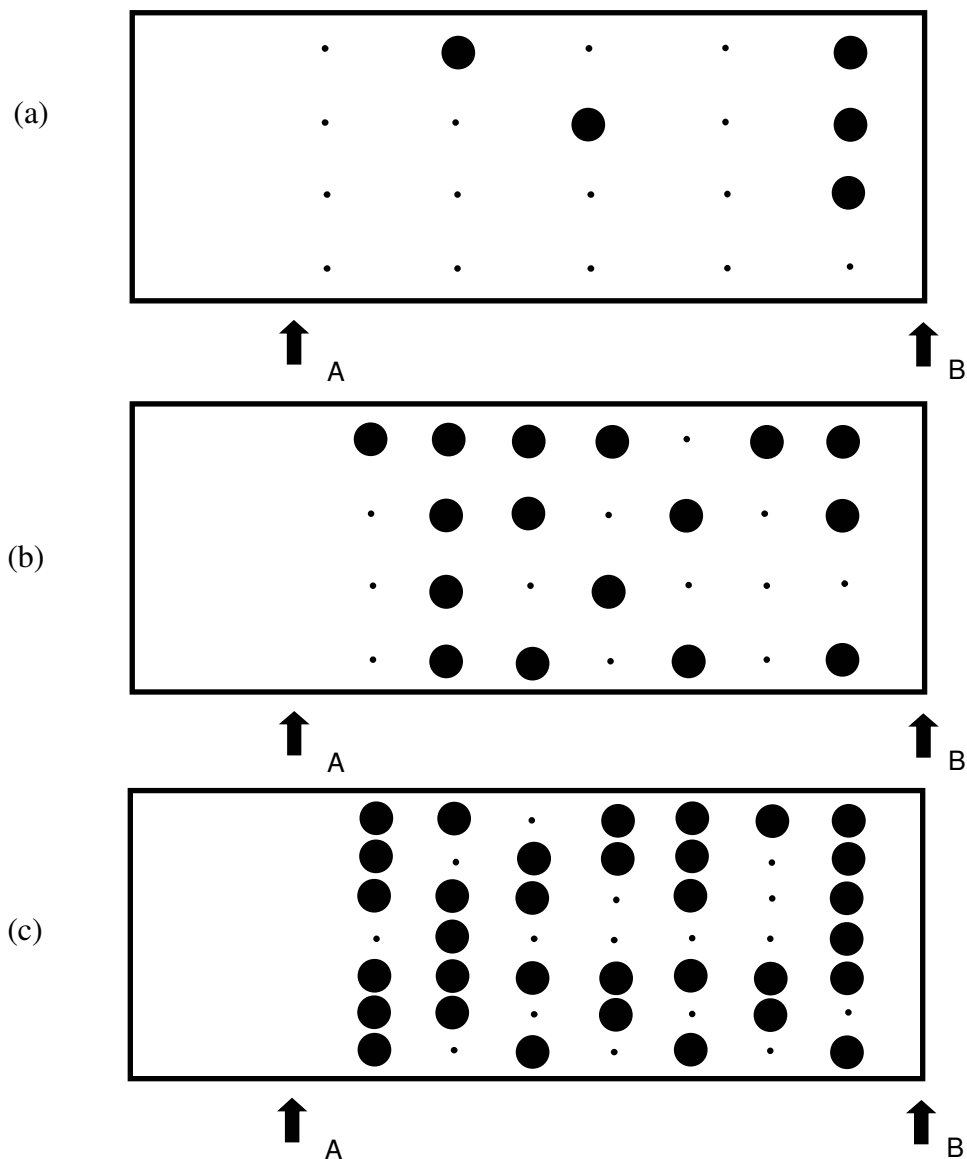


Figura 5.38 – N3mero de posi33es poss3veis para o arranjo das resist3ncias: (a) 20 (b) 28 e (c) 49 posi33es.

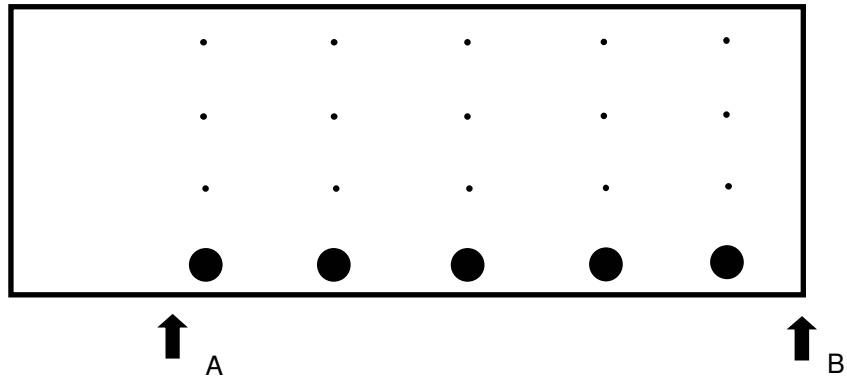


Figura 5.39 - Topologia final obtida para 5 resistências.

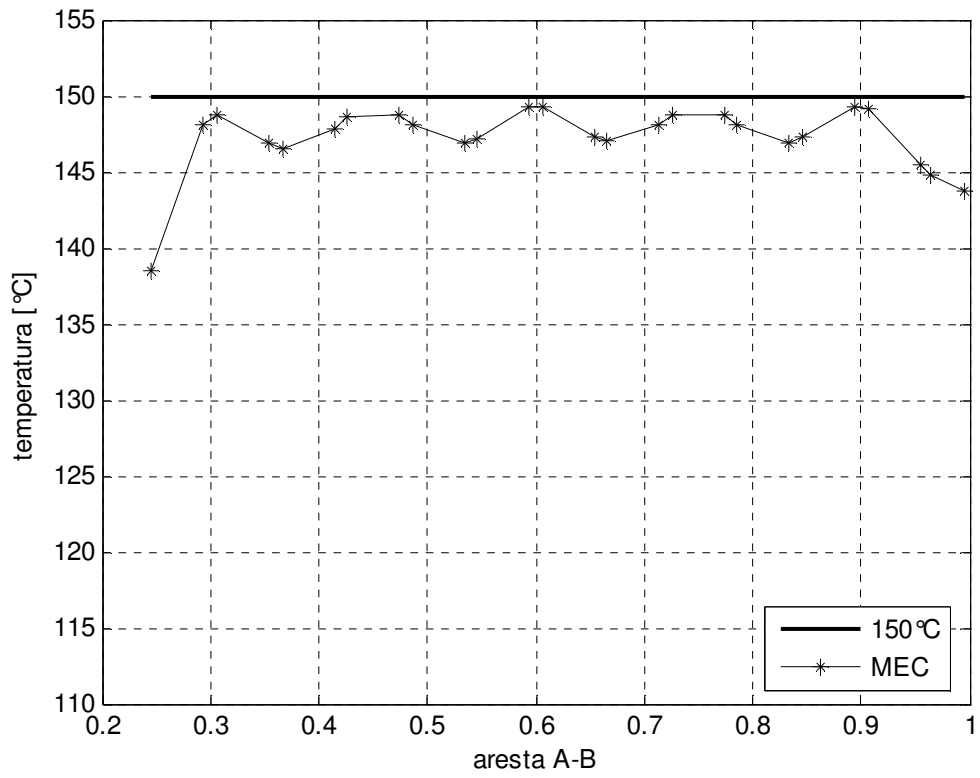


Figura 5.40 – Ajuste da curvas de temperatura calculada pelo MEC à 150°C.

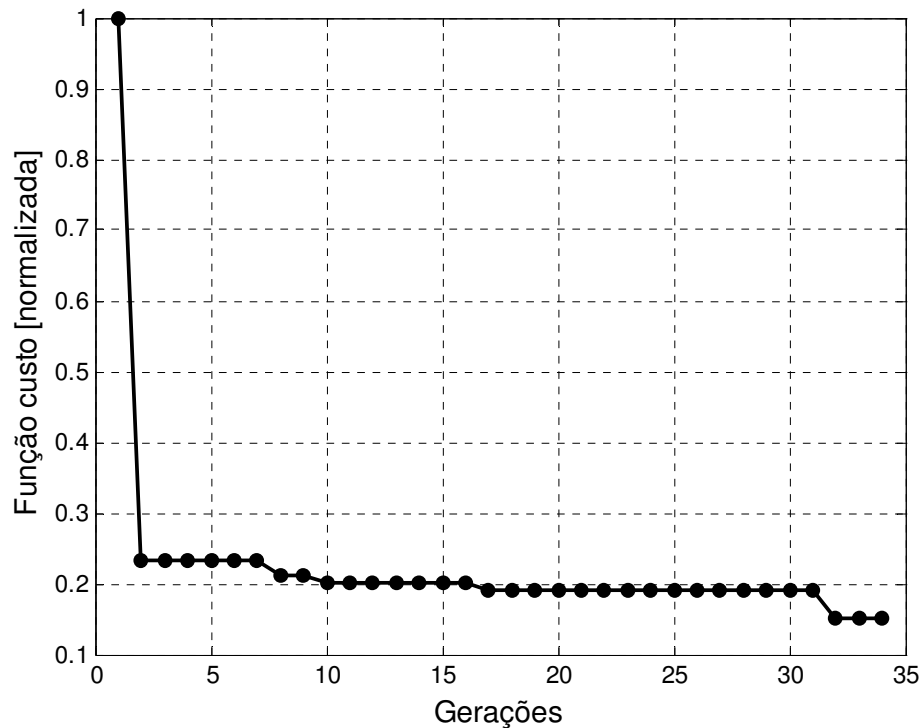


Figura 5.41 - Evolução da função custo para o caso do molde considerando 20 possíveis posições para as resistências.

(b) 28 possíveis posições para as resistências: A Figura 5.42 apresenta a topologia final obtida e é importante lembrar que neste exemplo trabalha-se sem restrição de volume. Neste caso é importante salientar que a disposição final das resistências, próximas do ponto A encontram-se afastadas. Próximo ao meio da aresta AB as resistências se aproximam para obter um aumento de temperatura e logo em seguida se afastam para reduzir a mesma. Este movimento das resistências satisfazem a função objetivo, a qual está apresentada na Figura 5.43. Na Figura 5.44 apresenta-se a evolução da função custo para este caso e convém ressaltar que na 12^o geração, encontrou-se uma disposição das resistências que satisfaz a função objetivo de maneira satisfatória.

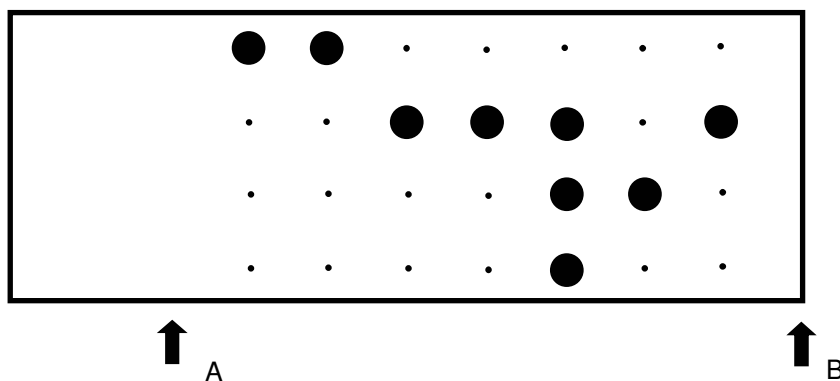


Figura 5.42 – Topologia final para o caso (b).

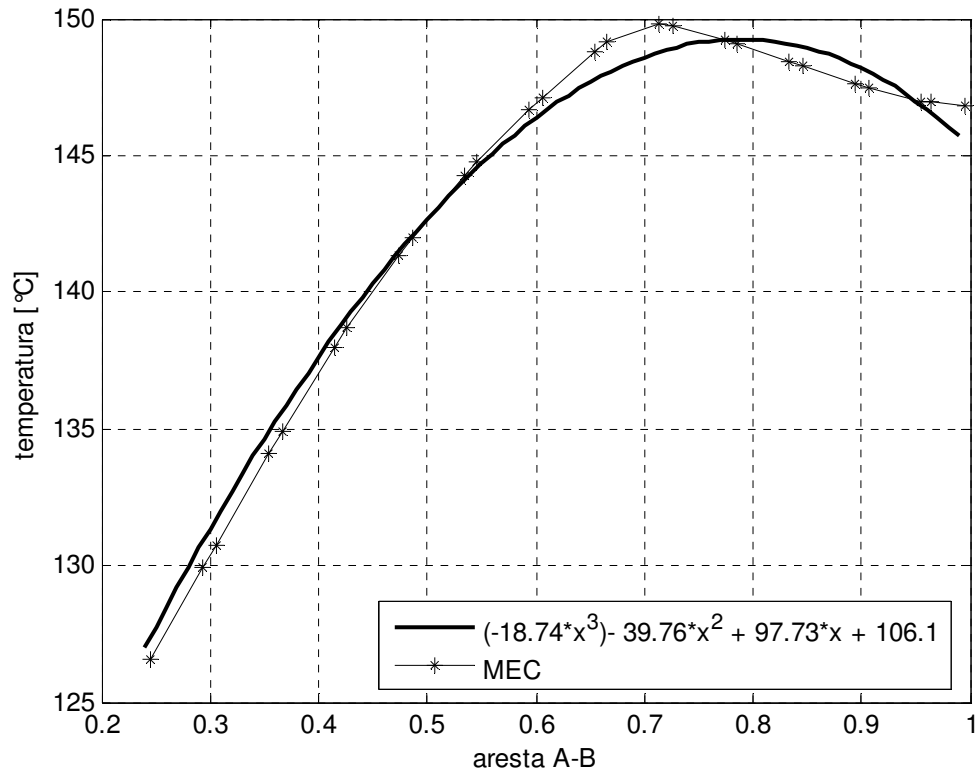


Figura 5.43 – Ajuste de curvas: temperatura calculada pelo MEC e a polinomial.

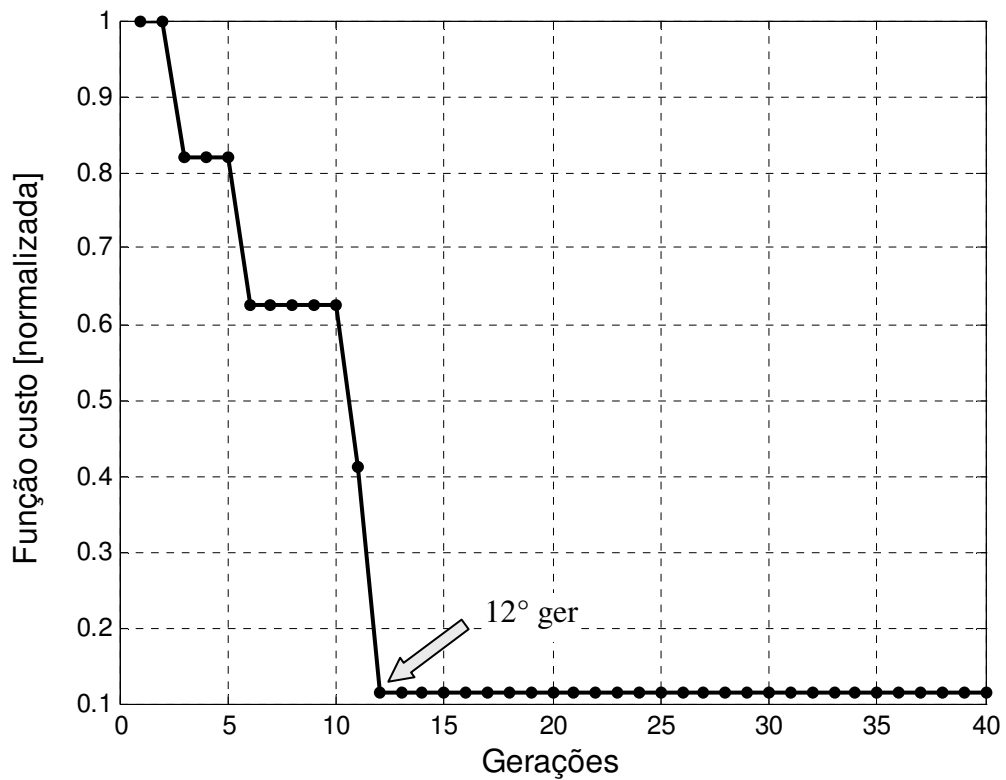


Figura 5.44 – Evolução da função custo para o caso do molde considerando 28 possíveis posições para as resistências.

(c) 49 possíveis posições para as resistências: Este caso é semelhante ao caso apresentado em (b), porém o número de posições possíveis para posicionar as resistências foi aumentado para 49, para permitir uma maior flexibilidade para o algoritmo genético ajustar e satisfazer a função objetivo.

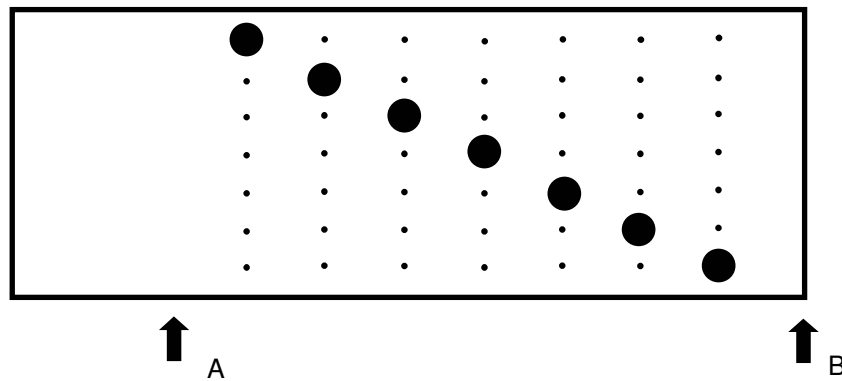


Figura 5.45 – Topologia final para o caso (c).

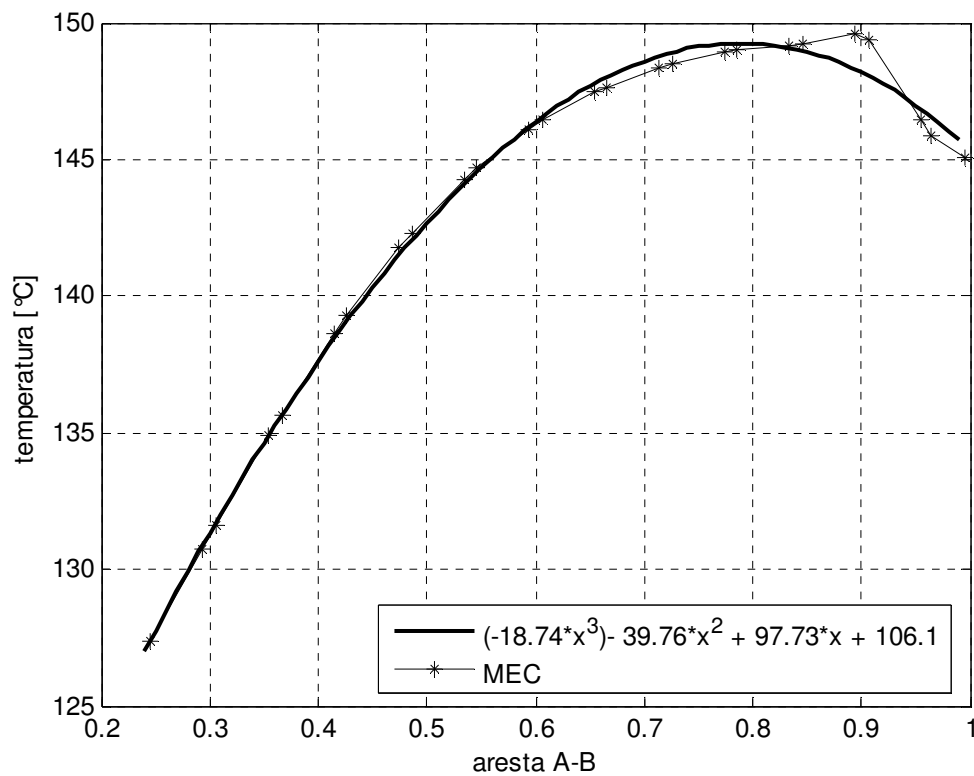


Figura 5.46 - Ajuste de curvas: temperatura calculada pelo MEC e a polinomial.

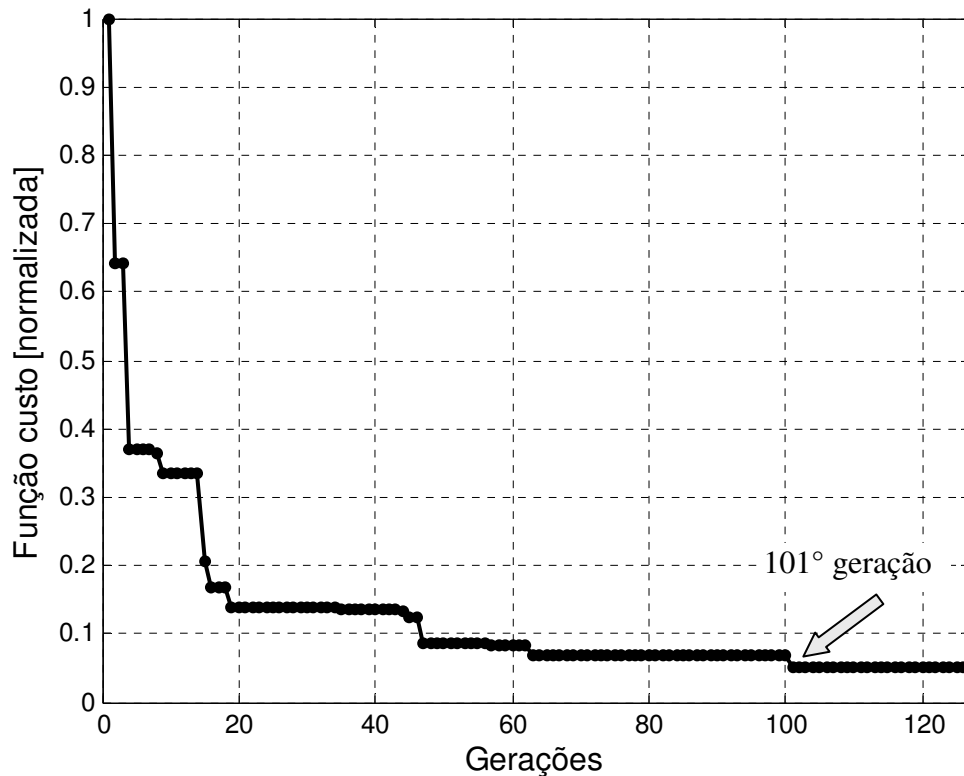


Figura 5.47 - Evolução da função custo para o caso do molde considerando 49 possíveis posições para as resistências.

Em especial aos casos (b) e (c), onde ajustou-se o AG para trabalhar sem restrição de volume, obteve-se uma diferença no número final de resistências na topologia ótima dos respectivos exemplos. Para o caso (b), a topologia ótima foi determinada com 9 resistências enquanto que para o caso (c) a topologia ideal apresentou 7 resistências. Então, quanto maior a natureza combinatória das resistências dentro do molde, melhor será o perfil de temperatura buscado e mais econômico o processo de cura, devido a maior eficiência na distribuição de temperatura com um número menor de resistências.

5.11 Comentários adicionais sobre algoritmos genéticos

Neste capítulo foram apresentados exemplos numéricos resultantes do emprego do AG como método de otimização e do MEC como método numérico para solucionar problemas de condução de calor em sólidos isotrópicos. Também foi possível verificar, através dos exemplos apresentados, a aplicabilidade das diversas ferramentas implementadas como número de furos variável e matriz de chaveamento.

Em particular, o uso de uma matriz de chaveamento como a proposta, elimina a necessidade do AG lidar com penalizações como os que ocorrem no gerenciamento de distância entre cavidades, sobreposição de cavidades e cavidades fora do domínio. O uso de penalidades

faz com que haja um aumento no descarte de muitos indivíduos até que a população seja reduzida drasticamente e por conseqüência um elevado custo computacional. O sistema representativo através da matriz de chaveamento, além de diminuir o número de variáveis de projeto e o comprimento dos cromossomos, também possibilitou a retirada de material e posteriormente a reposição deste em um mesmo local do domínio. Desta forma, o emprego de AG como otimizador passa a ser viável. Mais importante ainda, a matriz de chaveamento não se caracteriza, portanto, como um método *hard-kill* (Sigmund e Peterson, 1998) de remoção de material e contribui significativamente na redução do custo computacional. A proposta aqui implementada desempenhou satisfatoriamente tanto em caso simples (como o trocador de calor) como em problemas mais elaborados (como o caso de condutor de calor em forma de V invertido).

Também é importante salientar que o AG exige um grande esforço computacional por sua natureza combinatória, porém, com a evolução tecnológica, computadores mais robustos e técnicas de paralelização são muito empregadas nos dias atuais, o que faz com que não haja empecilho na implementação de AG + MEC para problemas com maior número de variáveis de projeto. Os AG apresentam um atrativo a problemas de alto nível de complexidade, pelo simples fato de não necessitar de qualquer outra informação além da função objetivo, o que dificultaria muito aos métodos de otimização tradicionais que necessitam da informação do gradiente da função objetivo (condição necessária e suficiente). A presença do operador genético mutação que realiza uma varredura completa em busca do mínimo global evita a estagnação do programa em um falso mínimo.

6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE TOPOLOGIA

Existem duas grandes áreas que tratam de determinar a geometria ótima de um domínio em estudo: Otimização de Forma e Otimização de Topologia. Nestes tipos de otimização o objetivo consiste em determinar a geometria ótima que satisfaça as restrições, minimizando uma função custo. Uma maneira de se obter tanto a forma quanto a topologia ótima consiste no emprego da análise de sensibilidade topológica.

A análise de sensibilidade topológica resulta em um escalar, definido como derivada topológica, a qual fornece a sensibilidade da função custo para cada ponto do domínio em estudo, quando um pequeno furo é criado ali. Uma forte característica da derivada topológica está em sua elevada complexidade matemática o que resulta em uma contribuição gradual por parte de alguns pesquisadores. Garreau et al. (1998), propuseram o método do domínio truncado para o cálculo da derivada topológica. Este método emprega várias hipóteses simplificadoras, entre elas a utilização somente de funções custo, que não dependiam explicitamente do domínio. Neste caso, ao adotar-se a energia potencial total como função custo, o método do domínio truncado resultava em valores incorretos, pois a derivada topológica se anulava em todo o domínio.

Posteriormente surgem os trabalhos de Sokolowski e Zockowski (1999) e Céia et al. (2000), onde a derivada topológica foi calculada via análise de sensibilidade de forma a mudança de forma. Nestes trabalhos os valores da derivada topológica resultavam corretos, mas apresentavam uma severa limitação, somente poderiam ser empregados em problemas em que a condição de contorno nos furos era Neumann homogênea. Condições de contorno Neumann não-homogênea, Dirichlet e Robin não poderiam ser empregados.

Ainda neste contexto Garreau et al. (1998) e Garreau et al. (2001) afirmam que a análise de sensibilidade à mudança de forma conduz a resultados incorretos quando utilizada no cálculo da D_T . Até este momento havia uma ausência de prova matemática que estabelecesse a relação entre a Análise de sensibilidade à mudança de forma e a derivada topológica. Devido à ausência de tal prova matemática é que Garreau et al. (1998) afirma que após um furo ser criado, não é mais possível estabelecer um homeomorfismo entre o domínio perturbado e o não perturbado, o que resultava em soluções incorretas. Isto significa que, como os domínios não possuíam a mesma topologia, não era possível construir um mapeamento contínuo e inversível entre eles.

Com uma nova contribuição, Feijóo et al. (2002) propõem uma definição alternativa a D_T , onde um domínio inicialmente não perturbado apresenta um furo cujo raio tende a zero. Em seus

argumentos, justificam que ao causar uma pequena perturbação (δ_ϵ) ao raio, o furo sofre uma expansão. Segundo Feijóo et al.(2002) esta expansão nada mais seria do que criar o furo e a partir daí poderia ser estabelecido um homeomorfismo entre os domínios. Surge então a tese de Novotny (2003) em que o objetivo principal consistia em estabelecer uma prova matemática completa que fornecesse a relação entre a D_T atual proposta por Feijóo e a convencional definida por Garreau et al. (1998). Esta prova foi demonstrada e garantiu o homeomorfismo entre os domínios.

Este trabalho tem por objetivo dar continuidade à linha de pesquisa no intuito de contribuir para a aplicação da derivada topológica em problemas de otimização. Até o presente momento a derivada topológica foi empregada utilizando-se o FEM para solução de problemas isotrópicos com ausência de forças de corpo. No contexto do presente trabalho, a análise de sensibilidade via derivada topológica será aplicada a problemas de transferência de calor que serão solucionados através do MEC, considerando materiais não isotrópicos e fontes de calor, tópico ainda não explorado na literatura. Uma outra aplicação será na solução de problemas de otimização multi-critério, onde um domínio estará submetido à transferência de calor e massa simultaneamente, assunto tratado no Capítulo 8.

6.1 Derivada Topológica

Seja um domínio não perturbado Ω e seu contorno Γ , ou seja, ausência de cavidades no interior deste e ou em sua fronteira (Figura 6.1). Ao sofrer uma perturbação a derivada topológica é definida pela relação entre o domínio não perturbado Ω e a sua perturbação Ω_ϵ após a abertura de um furo, Figura 6.1.

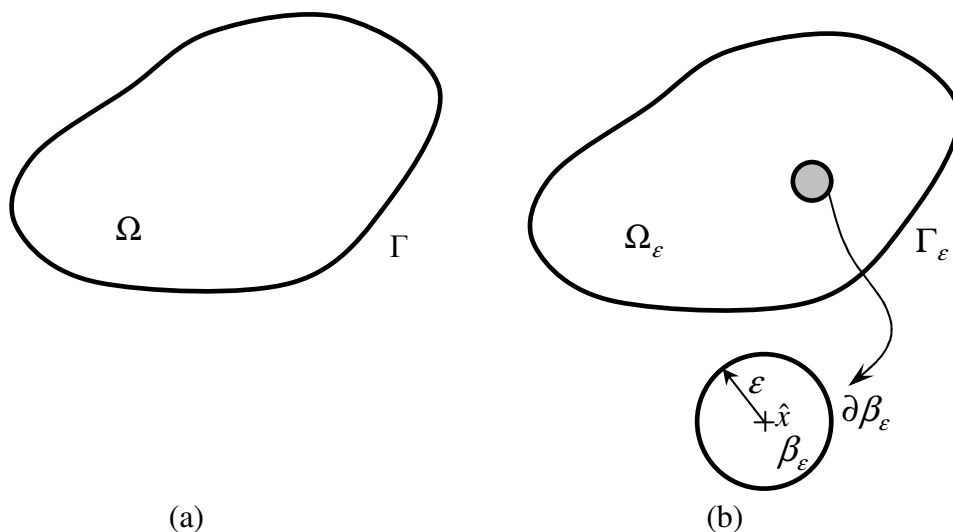


Figura 6.1 – Conceito original de derivada topológica. (a) domínio original. (b) domínio perturbado (Ω_ϵ).

Se define uma equação de estado para Ω e Ω_ε e uma função custo $\Psi(\cdot)$ para ambos. Seja Ψ e Ψ_ε a função custo para o domínio Ω e Ω_ε , pode-se definir a derivada topológica como:

$$D_T^*(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(\Omega_\varepsilon) - \Psi(\Omega)}{f(\varepsilon)} \quad (6.1)$$

sendo que $f(\varepsilon)$ representa uma função regularizadora negativa, dependente do problema, tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O problema em se trabalhar com a definição de D_T descrita na equação (6.1), ocorre quando um furo é criado, pois não há como estabelecer-se um homeomorfismo entre os Ω e Ω_ε . Isto ocorre porque os domínios encontram-se em espaços topologicamente distintos, impedindo a aplicação da D_T obtida sob forma convencional.

Feijóo et al. (2002) contornaram este problema modificando a definição original fundamentando-se na idéia matemática de que já exista um furo β_ε no domínio inicial. Sendo assim, o domínio final seria obtido a partir de uma perturbação $\beta_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$ do furo β_ε . Esta elegante maneira de propor o problema permitiu que fosse preservado o homeomorfismo entre o domínio inicial Ω e o final Ω_ε . A partir desta idéia proposta por Feijóo et al. (2002), Novotny et al. (2003), pressupõe-se que um problema inicial já contenha o furo β_ε , ou seja, partindo-se do domínio Ω_ε , pode-se causar uma pequena perturbação $\delta\varepsilon$ em β_ε , originando o furo $\beta_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$. Para o furo $\beta_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$, tem-se o seu contorno definido por $T_{\varepsilon+\delta\varepsilon} = T \cup \partial B_{\varepsilon+\delta\varepsilon}$, conforme a Figura 6.2.

É importante ressaltar que a derivada topológica definida na equação (6.1), fornece apenas a informação da sensibilidade da função custo a um aumento do furo, mas não a sensibilidade do problema à criação do furo. Assim sendo, não se possui mais um indicativo se um furo deve ser efetivamente criado, conforme a definição da equação (6.2). Por outro lado entende-se que expandir um furo nada mais é do que criá-lo. Conforme mencionado anteriormente, com esta nova definição da D_T houve a preservação do homeomorfismo entre os domínios original e modificado. Até então não havia uma prova matemática da equivalência das equações (6.1) e (6.2). Fundamentando-se neste fato, Novotny (2003) demonstra uma prova matemática completa que estabelece a relação e a equivalência entre ambas as equações.

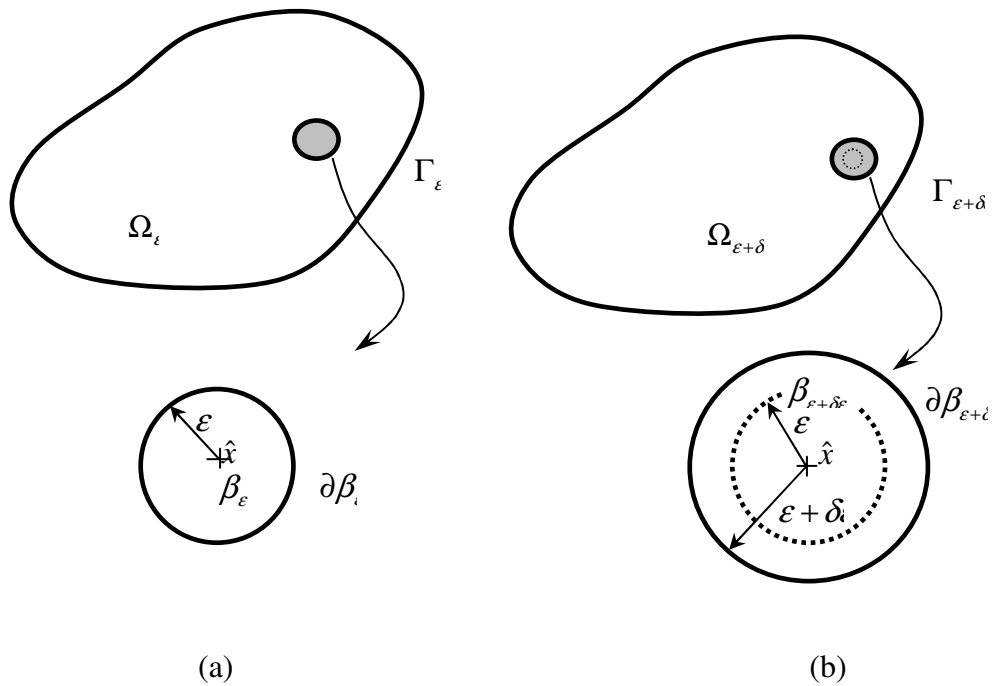


Figura 6.2 – Conceito de derivada em sua versão modificada.

A nova definição da D_T foi postulada da seguinte maneira:

$$D_T^*(\hat{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_\epsilon)}{f(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - f(\Omega_\epsilon)} \quad (6.2)$$

6.2 A derivada topológica aplicada à equação de Poisson

Neste presente trabalho apresenta-se um enfoque na aplicação da D_T para problemas governados pela equação de Poisson. A equação da D_T para a equação de condução estacionária de calor em sólidos rígidos será descrita aqui. Estabelece-se o problema direto como:

Encontre $\{u_\epsilon \mid -k\Delta u_\epsilon = b\}$ sobre Ω_ϵ

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} u_\epsilon = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_D \\ k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N \\ k \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = h_c(u_\epsilon - u_\infty) & \text{sobre } \Gamma_R \end{cases}$$

Onde:

$$h(\alpha, \beta, \gamma) = \underbrace{\alpha(u_\epsilon - \bar{u}^\epsilon)}_{\text{Dirichlet}} + \underbrace{\beta\left(k \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} + \bar{q}^\epsilon\right)}_{\text{Neumann}} + \underbrace{\gamma\left(k \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} + h_c(u_\epsilon - u_\infty^\epsilon)\right)}_{\text{Robin}} = 0 \quad (6.3)$$

A função h leva em consideração o tipo de condição de contorno a ser prescrita nos furos a serem criados, sendo que os termos u_ε e $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}$ referem-se a temperatura e o fluxo prescrito no contorno do furo, respectivamente. Enquanto que u_∞ e h_c^ε correspondem à temperatura e o coeficiente de convecção no interior dos furos, respectivamente.

Admitindo como forma geral para a função custo a seguinte equação:

$$\psi(\Omega_\tau) = \int_{\Omega_\tau} \phi_{\Omega_\tau}(u_\tau) d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_\tau} \phi_{\Gamma_\tau}(u_\tau) d\Gamma_\tau \quad (6.4)$$

sendo τ um parâmetro de perturbação associado a velocidade de troca de forma, ou seja, $x_\tau(x) = x + \tau v(x)$. A sensibilidade da função custo em relação à perturbação τ pode ser derivada da dedução de Gâteaux (Feijó et al. 2002, Novotny et al. 2003).

$$\frac{d}{d\tau} \Psi(\Omega_\tau)_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Psi(\Omega_\tau) - \Psi(\Omega_{\tau| \tau=0})}{\tau} h(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \text{sobre } \partial\beta_\varepsilon$$

Desta maneira o problema pode ser reposto como:

$$\text{Avalie } \frac{d}{d\tau} \Psi(\Omega_\tau) = 0$$

$$\text{Sujeito à } a_\tau(u_\tau, n_\tau) = l_\tau(n_\tau) \quad \forall n_\tau \in \beta_{\tau 1} \quad \forall \tau \geq 0$$

sendo:

a_τ uma forma bilinear contínua e coerciva;

l_τ é um funcional linear contínuo;

β_τ é o espaço admissível das funções para o domínio perturbado Ω_τ .

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, n_\varepsilon) := \int_{\Omega_\varepsilon} k \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon d\Omega + \int_{\Gamma_c} h_c u_\varepsilon \eta_\varepsilon d\Gamma + \int_{\partial\Lambda_\varepsilon} h_c^\varepsilon u_\varepsilon \eta_\varepsilon d\partial\Lambda$$

$$l_\varepsilon(\eta_\varepsilon) := \int_{\Omega_\varepsilon} b \eta_\varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{q} \eta_\varepsilon d\Gamma - \int_{\Gamma_c} h_c u_\infty \eta_\varepsilon d\Gamma - \int_{\partial\Lambda_\varepsilon \bar{q}_\varepsilon} \eta_\varepsilon d\partial\Lambda + \gamma \int_{\partial\Lambda_\varepsilon} h_c^\varepsilon u_\infty \eta_\varepsilon d\partial\Lambda$$

Neste trabalho em particular a função custo escolhida foi a energia potencial total ($\Phi_\tau(u_\tau) := \frac{1}{2} a_\tau(u_\tau, u_\tau) - l_\tau(u_\tau)$) e como restrição a própria equação de estado. A partir de agora a equação (6.3) pode ser utilizada para obter-se os três tipos clássicos de condição de contorno nos furos.

6.2.1 Condições de contorno de Neumann

Neste caso a equação é particularizada com $(\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0)$ e a D_T é obtida fazendo-se o limite:

$$D_T(\hat{x}) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2f'(\varepsilon)} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) - k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right) - 2bu_\varepsilon - \frac{2}{\varepsilon} \bar{q}_\varepsilon u_\varepsilon \right] d\Omega_\varepsilon \quad (6.5)$$

Ambos casos de Neumann devem ser considerados:

$$\bar{q}_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0 \quad \text{com} \quad f'(\varepsilon) = -\pi\varepsilon^2$$

$$\bar{q}_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_\varepsilon} \neq 0 \quad \text{com} \quad f'(\varepsilon) = -2\pi\varepsilon$$

Para os casos homogêneos e não homogêneos, respectivamente. As expressões correspondentes para a D_T são (Feijó et al. 2002 e Novotny et al. 2003):

$$D_T(\hat{x}) = k\nabla u \nabla u - bu \quad \text{para} \quad \hat{x} \in \Omega \quad (6.6)$$

$$D_T(\hat{x}) = -q_\varepsilon u \quad \text{para} \quad \hat{x} \in \Gamma \quad (6.7)$$

respectivamente. É importante salientar que as equações apresentadas acima são válidas para pontos do interior e contorno do domínio ($\hat{x} \in \Omega \cup \Gamma$).

6.2.2 Condições de contorno de Dirichlet

Neste caso a equação é particularizada com $(\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0)$ e a D_T é obtida fazendo-se o limite:

$$D_T(\hat{x}) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2f'(\varepsilon)} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 - 2bu_\varepsilon \right] d\Omega_\varepsilon \quad (6.8)$$

sendo as condições:

$$u_\varepsilon = \bar{u}_\varepsilon \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \Big|_{\partial\Omega_\varepsilon} \neq 0$$

e a função regularizadora para este caso apresenta a seguinte forma $f'(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\ln \varepsilon}$, resultando

(Feijó et al. 2002 e Novotny et al. 2003):

$$D_T(\hat{x}) = -\frac{1}{2} k(u - \bar{u}_\varepsilon) \quad \text{para} \quad \hat{x} \in \Omega \quad (6.9)$$

$$D_T(\hat{x}) = k\nabla u \nabla u - \bar{b}u_\varepsilon \quad \text{para} \quad \hat{x} \in \Gamma \quad (6.10)$$

Neste caso as expressões da D_T são distintas em relação ao contorno e ao domínio.

6.2.3 Condições de contorno de Robin

Neste caso a equação é particularizada com ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$) e a D_T é obtida fazendo-se o limite:

$$D_T(\hat{x}) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2f'(\varepsilon)} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 - 2bu_\varepsilon - \frac{2}{\varepsilon} h_c^\varepsilon (u_\varepsilon - 2u_{\infty}) \right] d\Omega_\varepsilon \quad (6.11)$$

A função regularizadora para este caso é $f'(\varepsilon) = -2\pi\varepsilon$, que resulta em (Feijó et al. 2002 e Novotny et al. 2003):

$$D_T(\hat{x}) = h_c^\varepsilon (u_\varepsilon - 2u_{\infty}) \quad \text{para} \quad \hat{x} \in \Omega \cup \Gamma \quad (6.12)$$

Esta derivada topológica é válida para qualquer ponto (domínio e contorno).

6.3 Algumas aplicações da derivada topológica

A análise de sensibilidade topológica e de forma (Sokolowski e Zochowski (1997), Feijó et al. (2003)) e a derivada topológica (Garreau et al.(1998), Céia et al.(2000), Sokolowski e Zochowski (1997), Feijó et al.(2002), Novotny et al. (2003)) tem despertado especial atenção da comunidade científica nas últimas décadas, o que faz com que esteja em contínuo desenvolvimento matemático para sua aplicabilidade em diversos problemas. Uma característica da D_T é que não há a necessidade de tratamento final da topologia obtida, dispensando a utilização de filtros. Novotny (2003) apresenta alguns resultados obtidos para problemas de condução estacionária de calor em sólidos rígidos isotrópicos utilizando a derivada topológica. Nesse trabalho a solução da equação de estado u associadas ao domínio original Ω (sem furo), foi obtida de maneira aproximada pelo método dos elementos finitos.

Posteriormente, Marczak (2005) publicou os mesmos exemplos apresentados por Novotny (2003), porém ao invés do MEF empregou o MEC, para obter a solução da equação de estado. Uma considerável vantagem consiste de que com a derivada topológica obtêm-se diretamente soluções sub-ótimas sem a densidade intermediária de material que ocorre quando se utiliza métodos SIMP (Bendsøe e Sigmund, 2003). Outro fator relevante é que quando o autor utilizou o MEC, não houve a necessidade de gerar malha no domínio preservando assim uma das vantagens oferecidas por este método. Um ponto a ser salientado é que os resultados apresentaram uma concordância satisfatória quando confrontado com os resultados obtidos por Novotny (2003). Na Figura 6.3 e Figura 6.4 são ilustrados dois exemplos utilizados por Marczak

(2005) para comparar as topologias finais obtidas com MEC e as obtidas com MEF por Novotny (2003).

Caso I: O primeiro caso está representado por um domínio quadrado com temperatura prescrita de 373 K nos cantos inferiores e de 273 K no topo centralmente, Figura 6.3. Os demais contornos foram prescritos como isolados. Obviamente é esperado que as áreas com baixo fluxo sejam removidas, resultando na configuração de um V invertido, o que concorda com a topologia final apresentada na Figura 6.3 - b.

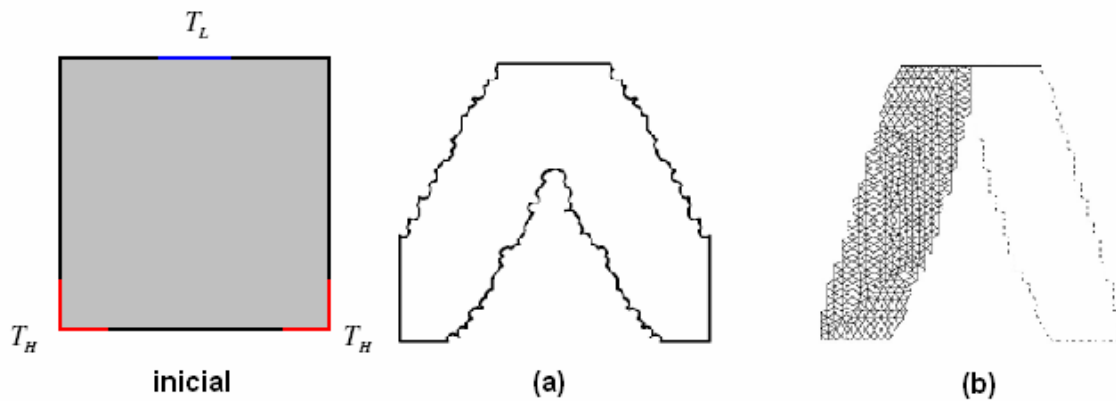


Figura 6.3 - Topologia final para o caso I: (a) Marczak (2005) e (b) Novotny (2003).

Caso II: O segundo caso refere-se a um condutor assimétrico. A temperatura mais elevada, denominada por T_H (Figura 6.4 - a) é de 373 K e a temperatura de menor potencial (T_L) é prescrita em 273 K, os demais contornos são isolados. A Figura 6.4 (a) e (b) demonstram concordância em sua topologia final.

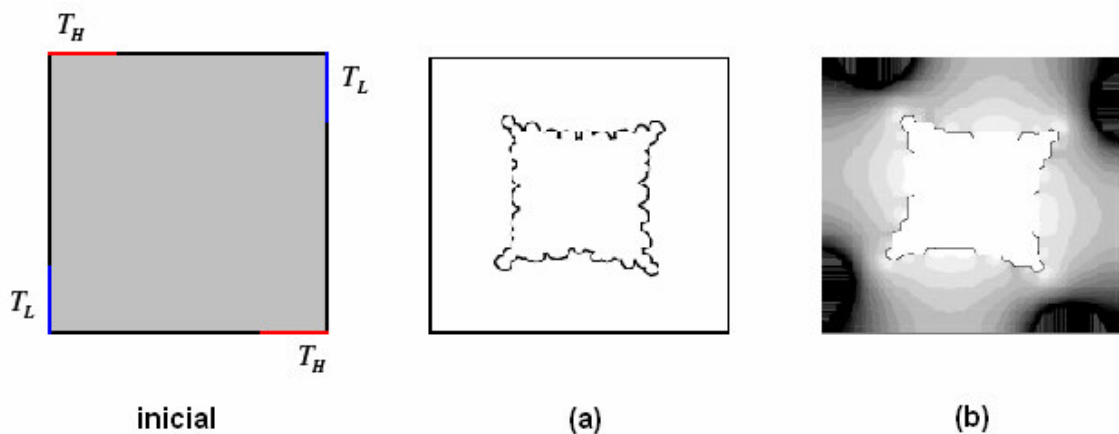


Figura 6.4 - Topologia final para o caso II: (a) Marczak (2005) e (b) Novotny (2003).

6.4 Transferência de calor em sólidos não-isotrópicos

Materiais em que a condutividade térmica é dependente das direções coordenadas são chamados de materiais ortotrópicos ou anisotrópicos. Em consequência da grande aplicação de materiais anisotrópicos em engenharia, o estudo do comportamento da condução do calor em meios anisotrópicos cresceu consideravelmente nos últimos anos. Porém, ainda são muito poucos os resultados relativos à transferência de calor em meios anisotrópicos na literatura. Também são relativamente pouco numerosos livros-texto (Carslaw e Jaeger, 1959 e Özisik, 1980) que dedicam conteúdo significativo a problemas de condução de calor em corpos anisotrópicos. A maioria dos trabalhos avançados neste campo são limitados a problemas unidimensionais na física de cristais (*apud* Ma e Chang, 2004). Portanto há uma lacuna a ser preenchida, justificando o presente interesse deste trabalho na aplicação da D_T associada ao MEC para solucionar problemas de potencial em materiais de comportamento não isotrópico. A reformulação das equações da seção 6.2 para materiais não isotrópicos não é uma tarefa fácil devido à complexidade matemática envolvida. Para contornar este problema utilizou-se de o conhecido método de mapeamento de domínio (ou transformação linear de coordenadas).

6.4.1 Teoria básica do método de transformação de coordenadas

O método da transformação de coordenadas lineares consiste em mapear inicialmente um domínio anisotrópico para um novo domínio de comportamento isotrópico, porém matematicamente equivalente ao domínio original (Shiah e Tan, 1997; Ma e Chang, 2003 e Shiah e Tan, 2004). Este procedimento apresenta duas grandes vantagens:

- evitar que o código de MEC sofra alterações em sua formulação isotrópica para somente então poder vir a ser aplicado a materiais de comportamento não isotrópicos;
- permitir que a formulação da derivada topológica possa ser generalizada para domínios de comportamento não isotrópicos durante o processo de otimização.

Com a técnica de mapeamento direto a D_T será aplicada a problemas não isotrópicos sob sua formulação originalmente isotrópica evitando maiores esforços de reformulação. É importante salientar que além do mapeamento geométrico, também se faz necessário o mapeamento das condições de contorno de Neumann. Para obter a solução final no domínio original e dos fluxos, bastar aplicar a inversa do mapeamento geométrico e do mapeamento do fluxo. Todo o processo de mapeamento conforme será explicado em detalhes a partir da Figura 6.5. Como o interesse especial deste trabalho consiste no estudo de materiais de comportamento

ortotrópico, o termo da derivada cruzada da equação diferencial governante é considerado zero ($k_{12} = 0$).

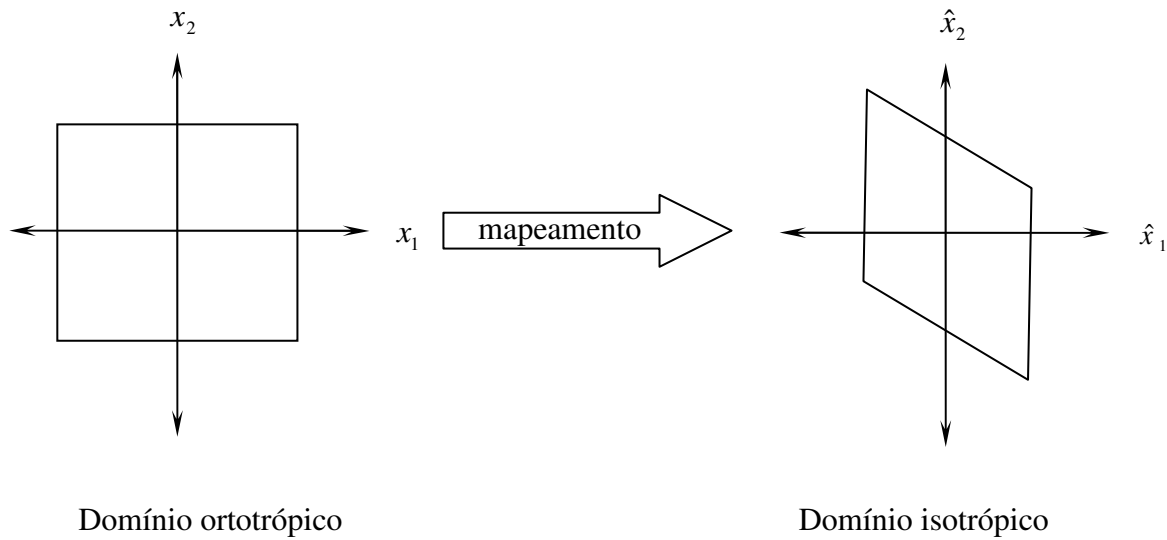


Figura 6.5 – Esquema ilustrativo do mapeamento conforme geométrico.

Para transformar o domínio ortotrópico em um equivalente isotrópico são utilizadas as coordenadas efetivas que estão apresentadas sob forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

sendo que

$$\alpha = \frac{-k_{12}}{k_{22}}, \quad \beta = \frac{k}{k_{22}}, \quad k = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} \quad (6.14)$$

A Figura 6.5 ilustra a transformação de domínios realizada pelo mapeamento segundo equação (6.13). O domínio do problema originalmente ortotrópico (x_1, x_2) é convertido a um domínio isotrópico definido em (\hat{x}_1, \hat{x}_2). Agora a equação governante no domínio transformado fica:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (6.15)$$

onde k é a condutividade térmica equivalente fornecida pela equação (6.14).

É importante notar que o termo da derivada cruzada foi eliminado de (6.15) e que a matriz de transformação (6.13) admite inversa. No entanto, a transformação (6.13) assemelha-se

à rotação da equação constitutiva aos seus eixos principais. As condições de contorno de Neumann também devem ser transformadas de acordo com:

$$\begin{aligned} q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} = q_{\hat{y}} \\ q_x &= \beta q_{\hat{x}} - \alpha q_{\hat{y}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Invertendo a (6.16), as condições de contorno de Neumann são novamente obtidas como uma função das condições de contorno do domínio original.

$$\begin{aligned} q_{\hat{y}} &= q_y \\ q_{\hat{x}} &= \frac{q_x + \alpha q_y}{\beta} \end{aligned} \quad (6.17)$$

O mapeamento da geometria do domínio é realizada através da equação (6.13).

6.4.2 Metodologia numérica

O código de transferência de calor em MEC foi desenvolvido para materiais isotrópicos e sofreu uma modificação de maneira a acomodar a transformação coordenada linear (6.13). A implementação desta simples técnica permite a solução de problemas anisotrópicos de transferência de calor sem a necessidade de mudanças com muito poucas mudanças no código original de MEC ou manipulações essenciais na formulação de D_T . No MEC somente os nós do contorno têm que ser transformados, enquanto que nos métodos de domínio (MEF) requereriam a transformação dos pontos pertencentes ao domínio também. Uma outra vantagem do MEC é sua boa exatidão característica para variáveis do contorno (temperatura e fluxo do calor) comparado a outros métodos (Marczak, 2005). O algoritmo executado abrange seis etapas básicas:

Etapa 1: Transforma o domínio ortotrópico em um domínio isotrópico equivalente através da transformação das coordenadas lineares (18). As condições de limite do fluxo do calor são transformadas pela Eq.(21).

Etapa 2: Resolver o problema através do código de MEC desenvolvido para materiais isotrópicos.

Etapa 3: Aplicar a inversa do mapeamento à geometria e ao fluxo de calor.

Etapa 4: As variáveis são avaliadas em uma grade apropriada de pontos internos. Os pontos com os valores mais baixos de D_T são selecionados.

Etapa 5: Os furos são criados centrados nos pontos internos previamente selecionados.

Etapa 6: Verifica o critério de parada, reconstrói a malha e retorna a etapa 1.

Na Figura 6.6 é apresentada esquematicamente cada etapa. Quando o processo é parado, uma topologia final é desejada.

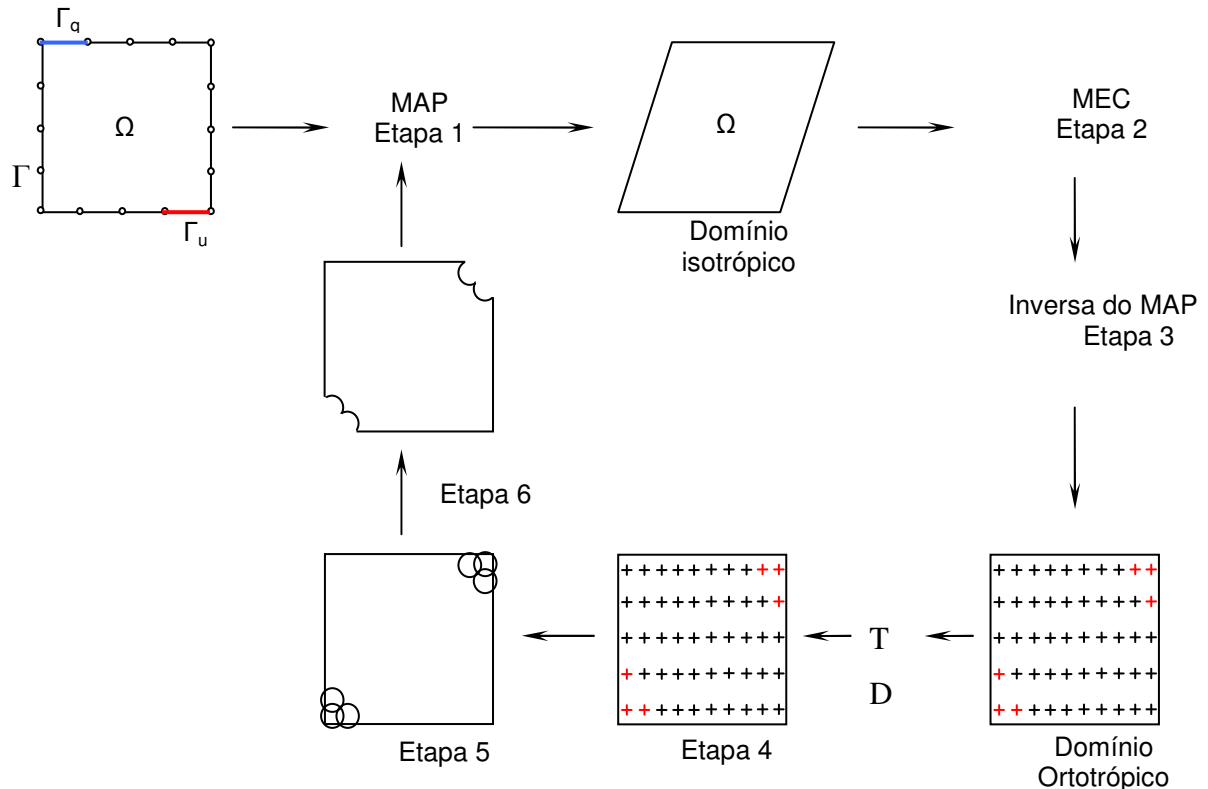


Figura 6.6 - Esquema do mapeamento de domínio.

6.4.3 Validação do mapeamento do domínio

Para efeito de validação destes resultados, ao implementar a técnica de mapeamento de domínio, será realizada uma comparação dos valores obtidos pelo presente método (MEC + MAP) para um meio ortotrópico e posteriormente comparado com os resultados obtidos por um software comercial que utiliza o método do MEF. O caso utilizado para efeito comparativo, consiste de um quadrado sob condições de contorno conforme descrito na Figura 6.8. Os gráficos de fluxo são apresentados nas Figura 6.8 e Figura 6.9 e referem-se ao fluxo calculado na face inferior do quadrado analisado. O primeiro gráfico refere-se aos valores de condutividades de $k_{xx} = 1$ e $k_{yy} = 2$, enquanto que o segundo refere-se ao caso de $k_{xx} = 1$ e $k_{yy} = 5$. Para a análise de MEC foram utilizados 192 elementos para discretização do domínio e 4 pontos de Gauss para a integração numérica. Os elementos utilizados foram descontínuos. Para a análise de MEF foi utilizada uma malha de 109×109 . Analisando os gráficos e seus resultados, verifica-se que a implementação da técnica de mapeamento foi bem sucedida, generalizando o código do MEC para casos não isotrópicos.

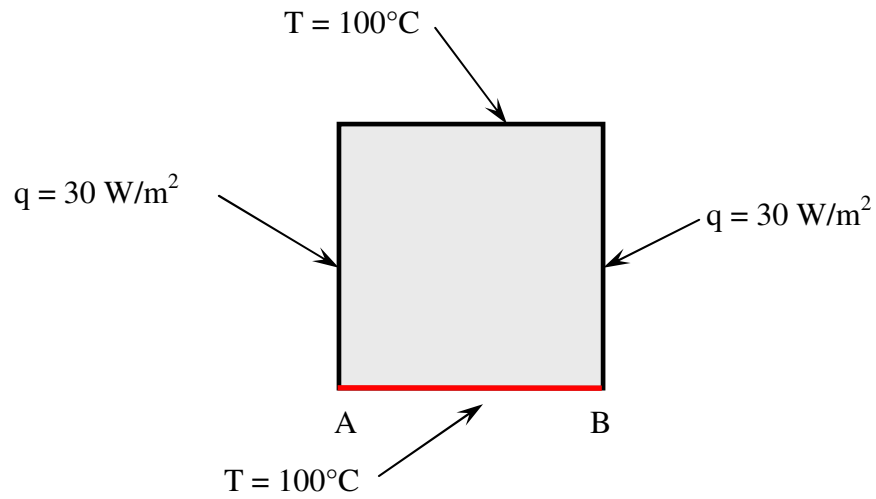


Figura 6.7 – Condições de contorno.

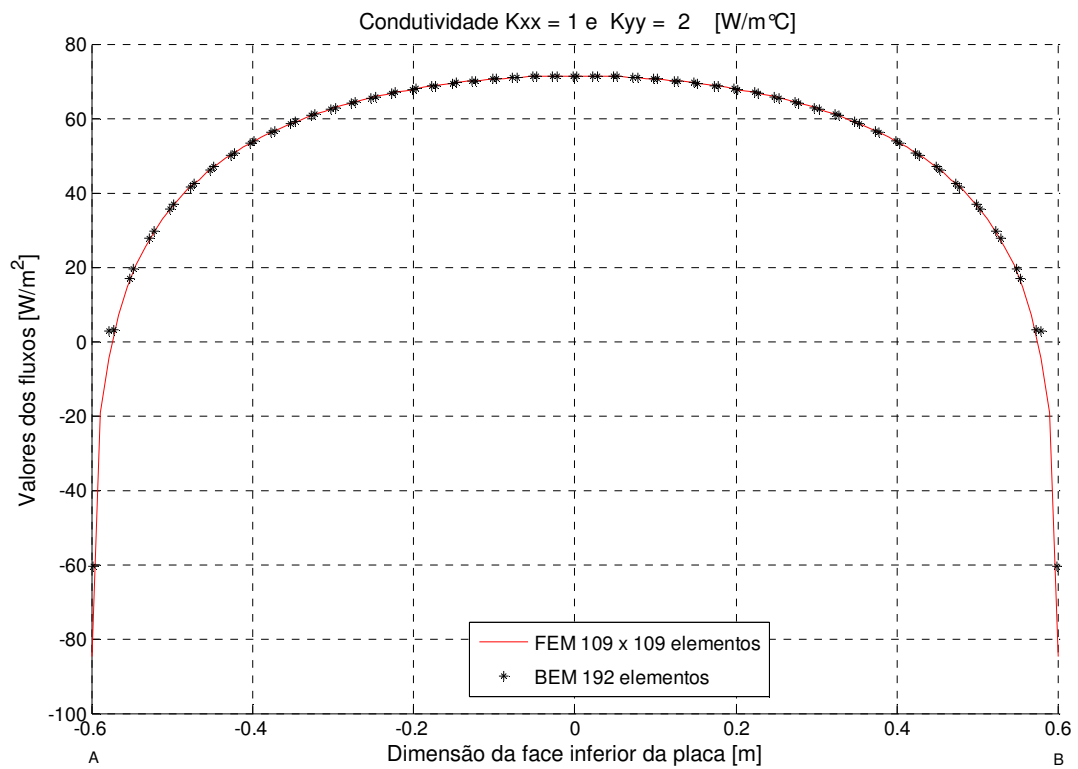


Figura 6.8 – Caso ortotrópico 1: $k_{xx} = 1$ e $k_{yy} = 2$.

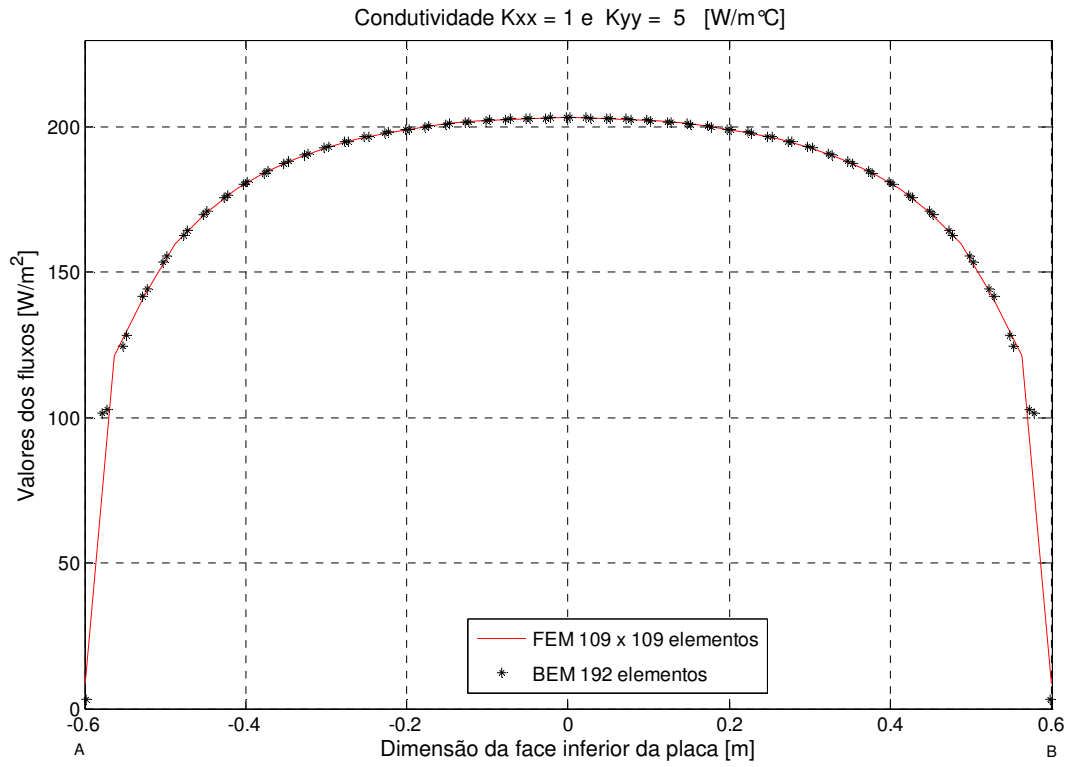


Figura 6.9 - Caso ortotrópico 2: $k_{xx} = 1$ e $k_{yy} = 5$.

7 RESULTADOS NUMÉRICOS – DT + MEC

Esta seção apresenta exemplos para demonstrar a aplicação do método proposto no Capítulo 6. Alguns dos resultados obtidos são comparados àqueles de casos isotrópicos estudados por Novotny et al.(2003) e Marczak (2005). O processo iterativo é parado quando uma quantidade específica de material é removida do domínio original. Através do mapeamento de domínio, é possível comparar as topologias geradas para meios isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos sob as mesmas circunstâncias iniciais de geometria e de contorno. Em todos os casos a energia potencial total foi usada como a função de custo. Uma grade regularmente espaçada de pontos internos foi gerada automaticamente, levando em consideração o tamanho do raio dos furos criados durante cada iteração. O raio foi tomado como uma fração da referência da dimensão do domínio ($r = \alpha l_{ref}$). Frequentemente adota-se $l_{ref} = \min(\text{altura}, \text{largura})$. O objetivo em todos os casos é minimizar o volume material. A área atual do domínio (A_f) foi verificada ao final de cada iteração até que um valor de referência seja atingido ($A_f = \beta A_0$, sendo que A_0 representa a área inicial). Os elementos lineares descontínuos foram integrados com 4 pontos de Gauss em todos os casos.

7.1 Condutor de calor com condições de contorno de Neumann nas cavidades.

O domínio de projeto é um retângulo de 20×30 unidades sujeito à temperatura prescrita ($T_1 = 393$ K) ao longo de sua face esquerda. Os demais contornos são expostos ao ar com baixa temperatura ($T_0 = 298$ K) e possuem um valor uniforme de coeficiente de convecção ($h_0 = 5.677$ W/m²K). Uma versão isotrópica deste problema foi estudada primeiramente por Park (2005). Aqui, o problema é revisto usando propriedades de materiais isotrópicos e ortotrópicos. O material isotrópico utilizado é o alumínio ($k = 236$ W/mK). Para este caso, as condições de contorno de Neumann foram prescritas nas cavidades abertas durante o processo de otimização. Na Figura 7.1 apresenta-se o histórico evolutivo até que o volume final alcançasse 30% do valor original.

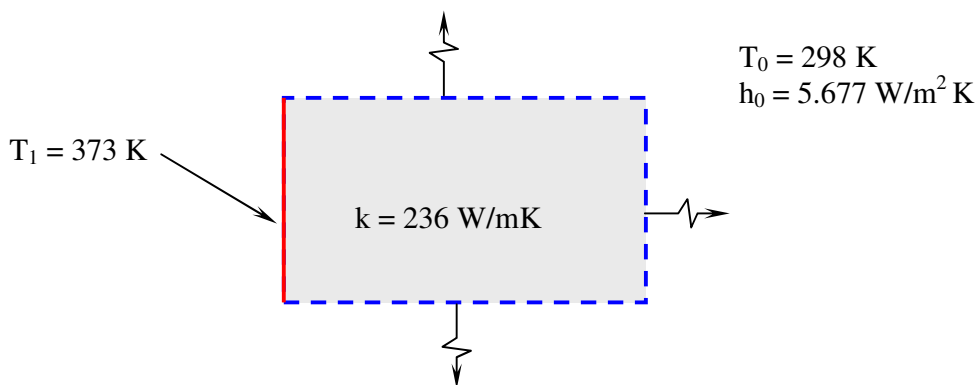


Figura 7.1 – Domínio inicial de projeto.

No caso de ortotropia, a condutividade térmica foi imposta como $k_y/k_x = 2$. A Figura 7.3 apresenta o histórico da evolução obtida até que a mesma fração de volume do caso isotrópico fosse alcançada. Claramente, a geometria resultante da cavidade interna tem uma curvatura mais pronunciada, a fim de facilitar o fluxo de transferência de calor na direção y . Park (1995) resolveu este problema usando as técnicas de homogeneização e o MEF.

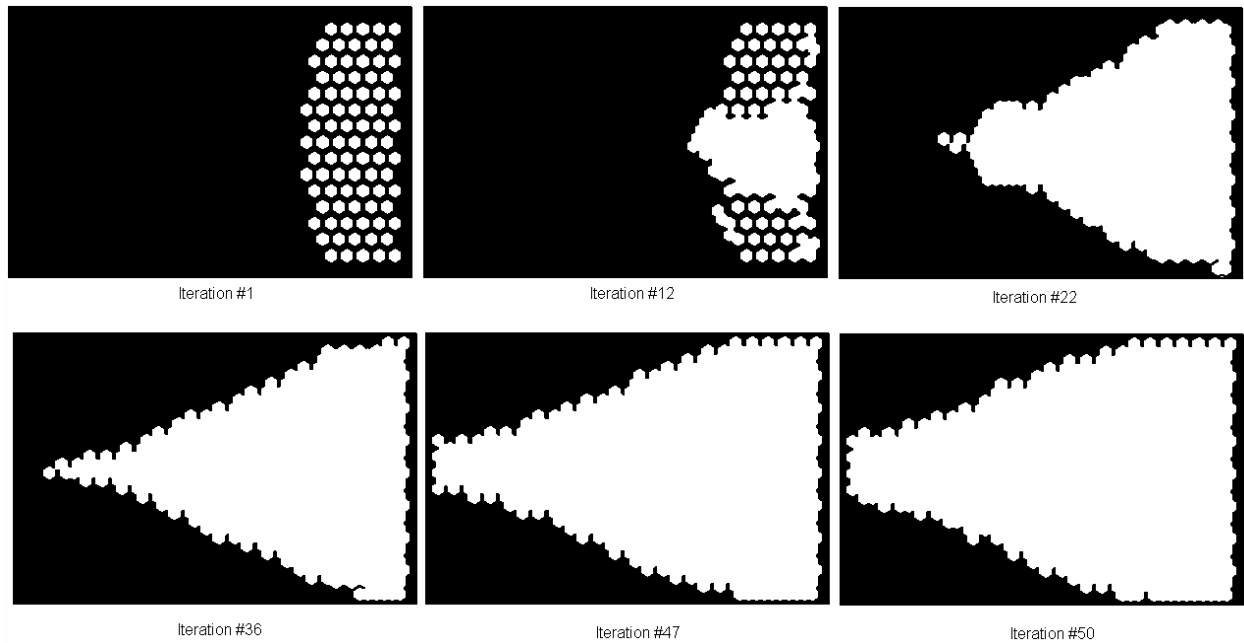


Figura 7.2 – Histórico de otimização para o meio isotrópico.

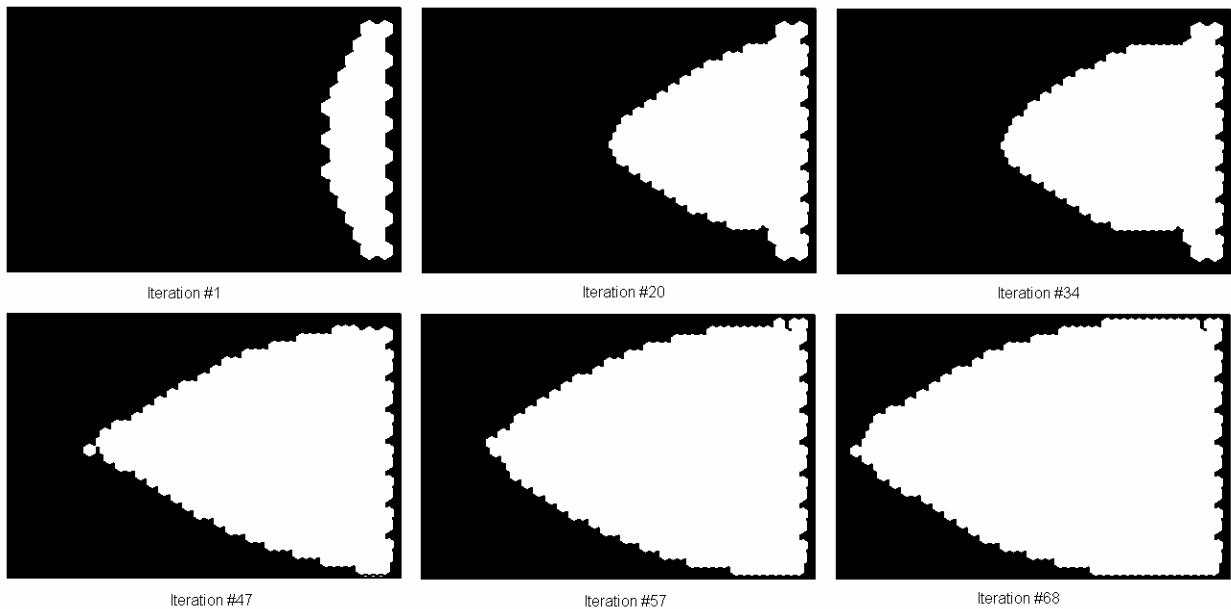


Figura 7.3 - Histórico de otimização para o meio ortotrópico.

A Figura 7.4 compara os resultados obtidos por Park (1995) com os que foram obtidos com o método atual. Para o caso isotrópico, a geometria final resulta em um *lay-out* com elevada

condutividade, e ambos os casos isotrópicos concordam. Entretanto, para o caso ortotrópico está demonstrado que a geometria final é significativamente distinta do que aquela para o meio isotrópico.

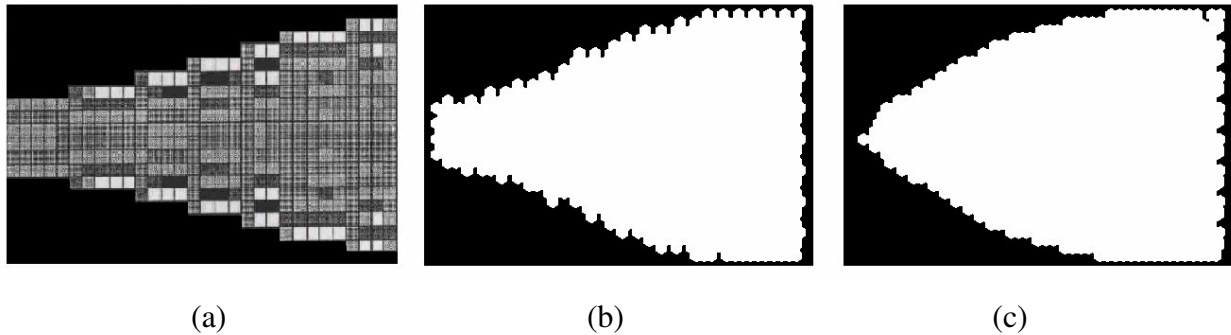


Figura 7.4 – Topologias Finais: (a) MEF + homogeneização (Park, 1995) – $k_x/k_y = 1$; (b) Presente resultado, MEC+ D_T – $k_x/k_y = 1$; (c) Presente resultado, MEC+ D_T – $k_y/k_x = 2$.

7.2 Condutor de calor com condições de contorno de Robin nas cavidades

Este caso é muito similar ao anterior, exceto que nas cavidades as condições de contorno prescritas foram de convecção. O comportamento do material é considerado como isotrópico e o processo de otimização é realizado com restrição de volume de 65% do domínio original. A Figura 7.5 mostra a convergência da geometria para a forma ótima de uma aleta.

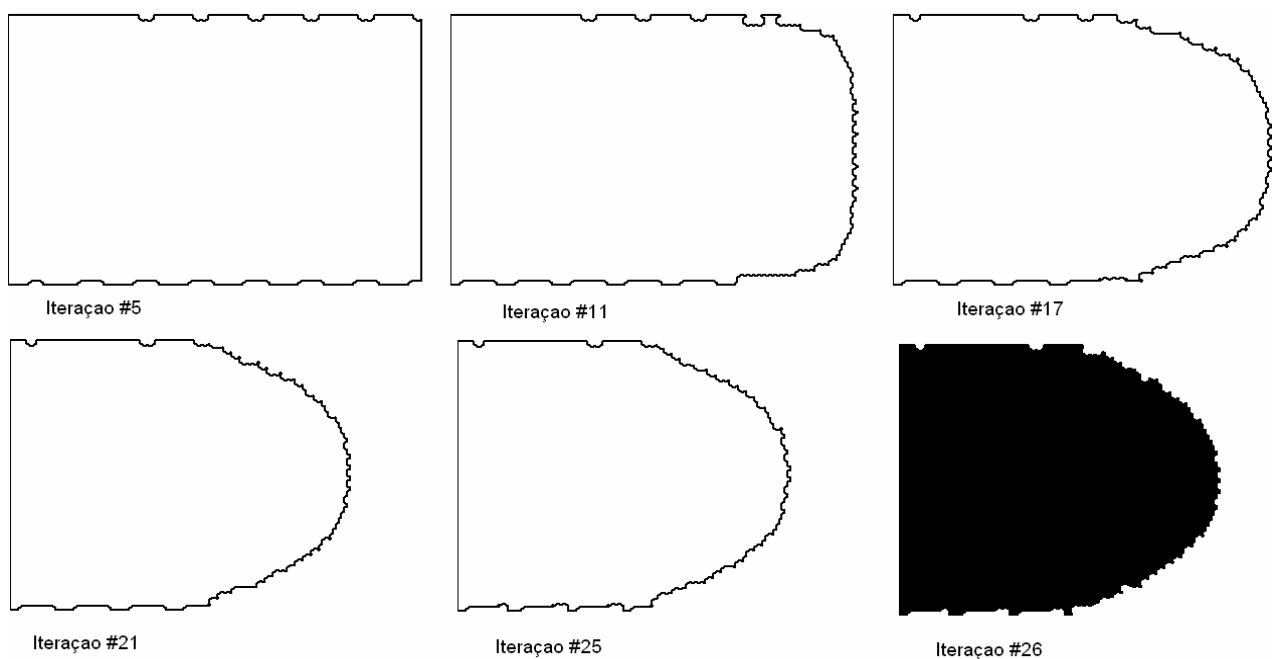


Figura 7.5 – Histórico de otimização para o condutor de calor com condição de contorno de Robin nas cavidades.

7.3 Condutor de calor assimétrico com condições de contorno de Neumann nas cavidades

Neste exemplo são impostas quatro temperaturas nos cantos de um domínio quadrado de 10×10 unidades de dimensão. As temperaturas prescritas nos cantos são de 373 K e de 273 K e estão ilustradas na Figura 7.6. Os demais contornos (incluindo as cavidades que serão abertas) são isolados. O material a ser removido é ajustado com $r = 0.04l_{ref}$ e a condutividade térmica foi definida por $k_x/k_y = 2$. A evolução do processo é mostrada na Figura 7.6. O processo foi parado quando $A_f = 0.8A_0$ foram alcançados. A Figura 7.7 apresenta uma a topologia ortotrópica obtida com a aproximação atual e compara com a solução isotrópica de MEC obtida por Marczak (2005) e a solução de MEF de Novotny et al. (2003). Na Figura 7.7-a verifica-se que a solução ortotrópica difere da isotrópica, como esperado. Conforme demonstrado na Figura 7.6, o algoritmo tenta remover maior quantidade de material na direção horizontal, de tal maneira que o fluxo de calor ocorre mais facilmente entre os dois cantos adjacentes.

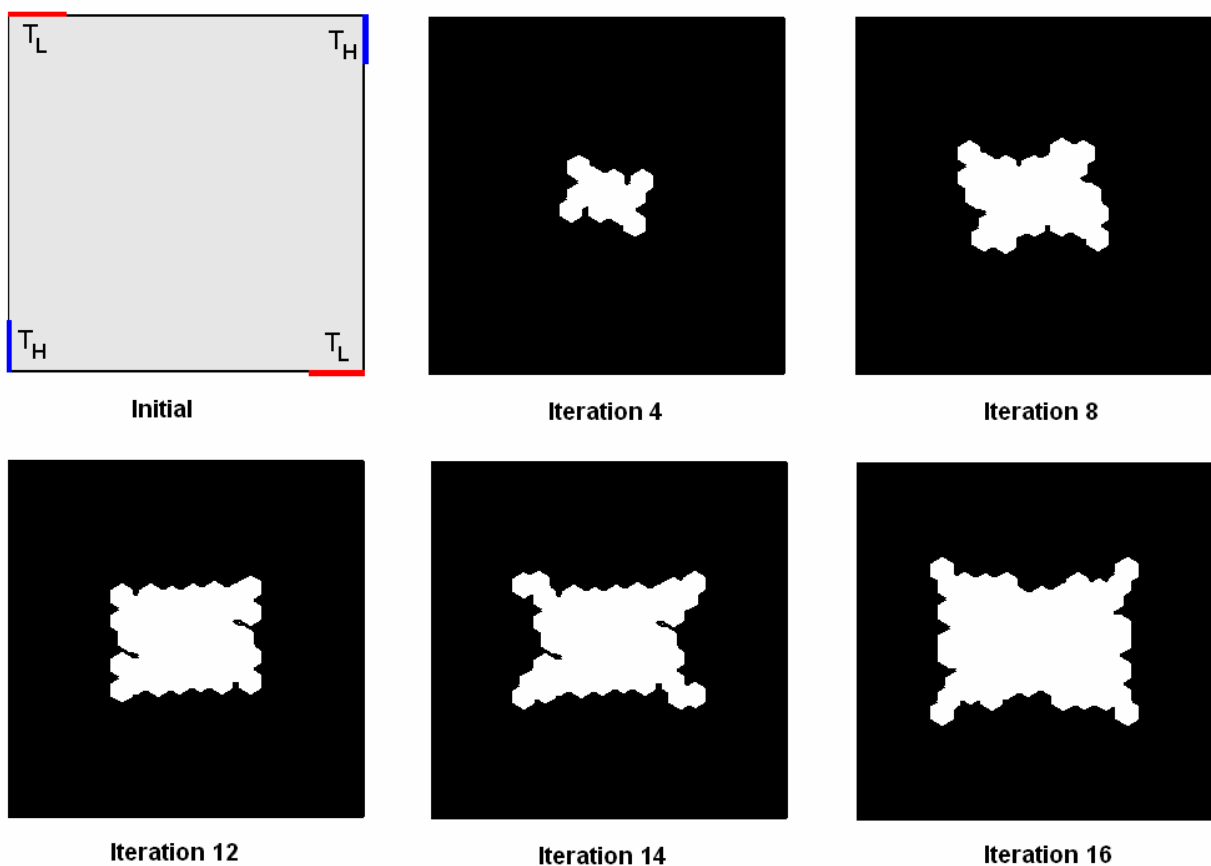
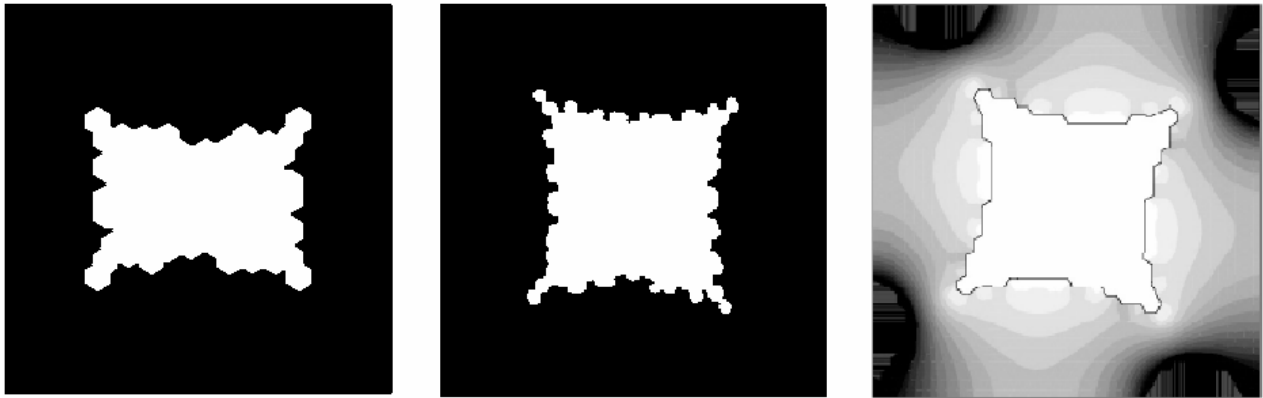


Figura 7.6 – Histórico de otimização para o condutor de calor assimétrico.



(a)

(b)

(c)

Figura 7.7 – Topologias finais para o condutor assimétrico: (a) Resultado atual, $k_x/k_y = 2$;

(b) MEC solução para $k_x/k_y = 1$ (Marczak, 2005); (c) MEF solução para $k_x/k_y = 1$ (Novotny et al., 2003).

7.4 Condutor de calor ‘V’ com condições de contorno de Neumann nas cavidades

Este exemplo consiste e um domínio quadrado com alta temperatura (373 K) prescrita em seu cantos inferiores, enquanto que uma baixa temperatura (273 K) é prescrita no centro da aresta superior. Os contornos restantes são isolados. As cavidades foram criadas com $r = 0.04l_{ref}$, e o processo foi interrompido quando $A_f = 0.6A_0$ foi atingido. Com o objetivo de ilustrar e comparar a topologia final obtida, três variações do presente exemplo são estudadas: (caso a) $k_{xx} = 1$ e $k_{yy} = 1$; (caso b) $k_{xx} = 2$ e $k_{yy} = 1$; (caso c) $k_{xx} = 3$ e $k_{yy} = 1$. A Figura 7.8 refere-se a um caso isotrópico e será utilizado para comparar o projeto final com aqueles casos com comportamento ortotrópico. Nas Figura 7.9 e Figura 7.10 apresenta-se a evolução para o caso de ortotropia e sua topologia final quando o processo de otimização atingir a quantidade de material removida conforme inicialmente imposta. Através destes históricos é possível comparar os três casos otimizados. Como houve um aumento prescrito na condutividade térmica na direção y (caso b e c), era de se esperar que uma maior quantidade de material fosse removida na direção x . Esta afirmação pode ser verificada nas topologias finais de cada caso estudado. O procedimento para remover material também apresenta um comportamento diferente para cada caso.

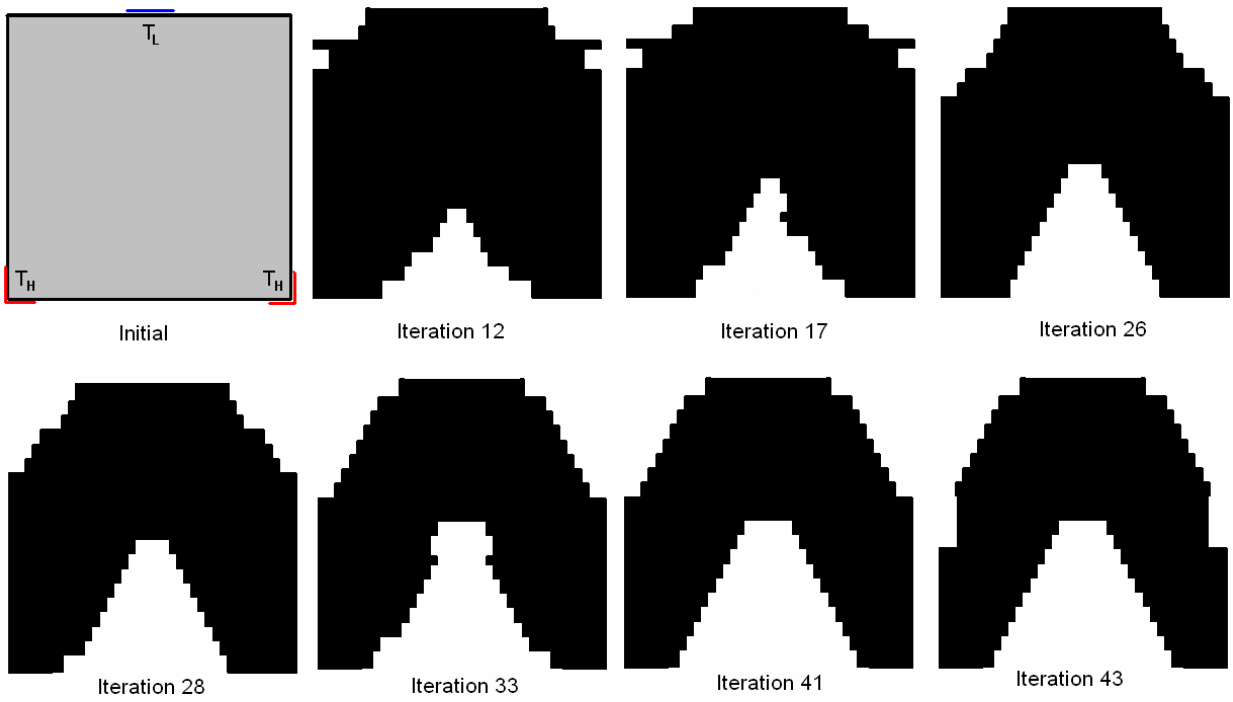


Figura 7.8 – Histórico de otimização para o material isotrópico - Caso (a).

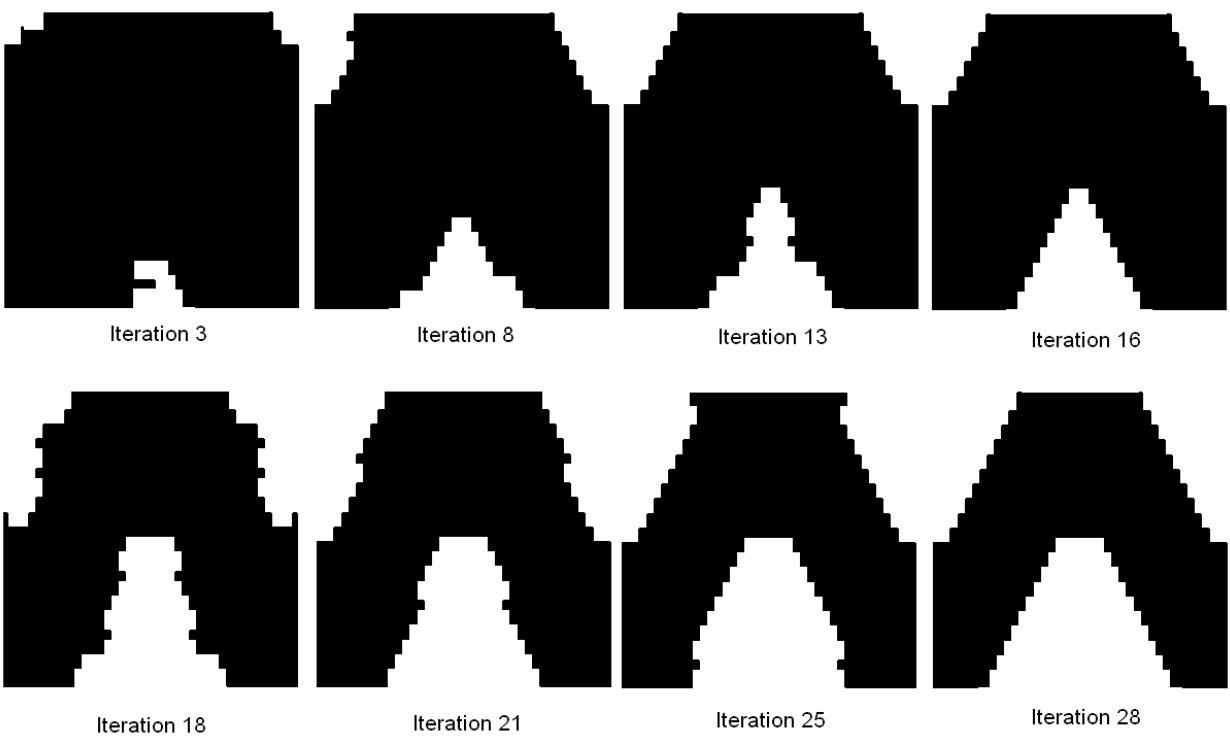


Figura 7.9 - Histórico de otimização para o material ortotrópico - Caso (b).

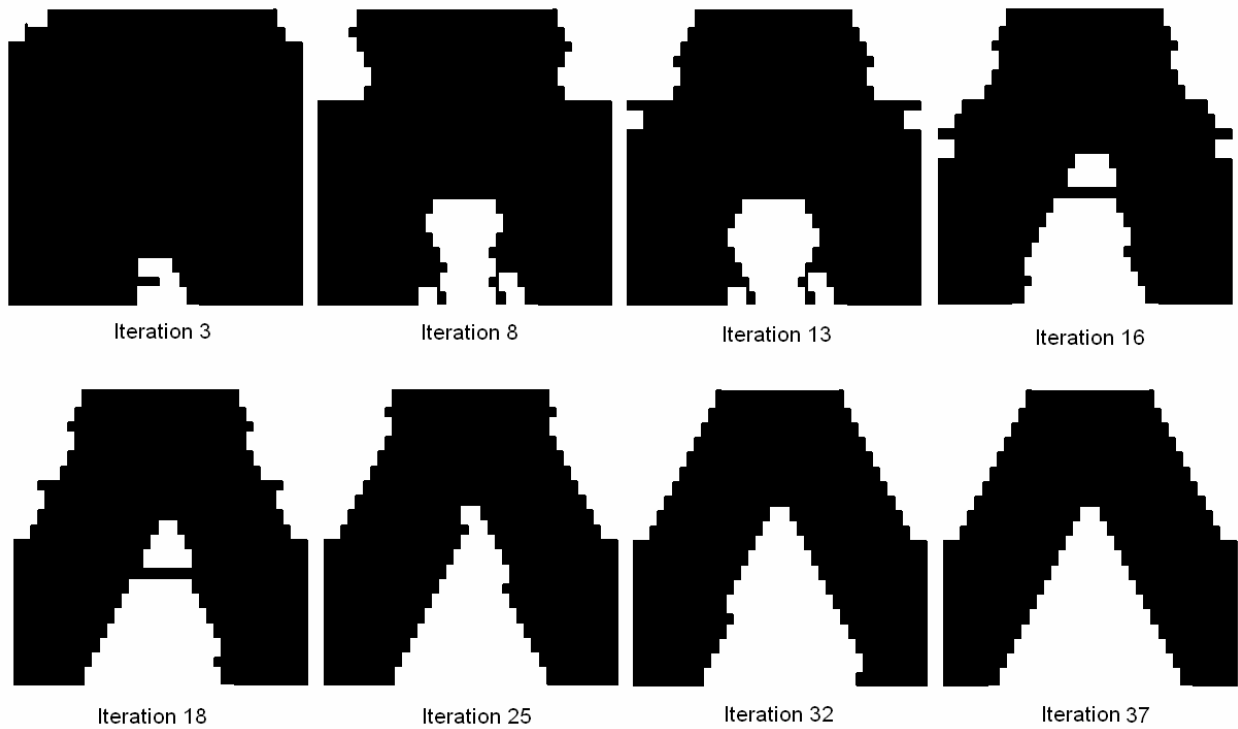


Figura 7.10 - Histórico de otimização para o material ortotrópico - Caso (c).

Com o objetivo de ilustrar o comportamento dos três casos estudados durante o processo de otimização, apresenta-se na Figura 7.11 um gráfico onde está representado a relação entre iterações e a quantidade de material removida. Para o meio não-isotrópico a sensibilidade topológica é maior do que no isotrópico, o que explica um aumento na quantidade de material removida por iteração.

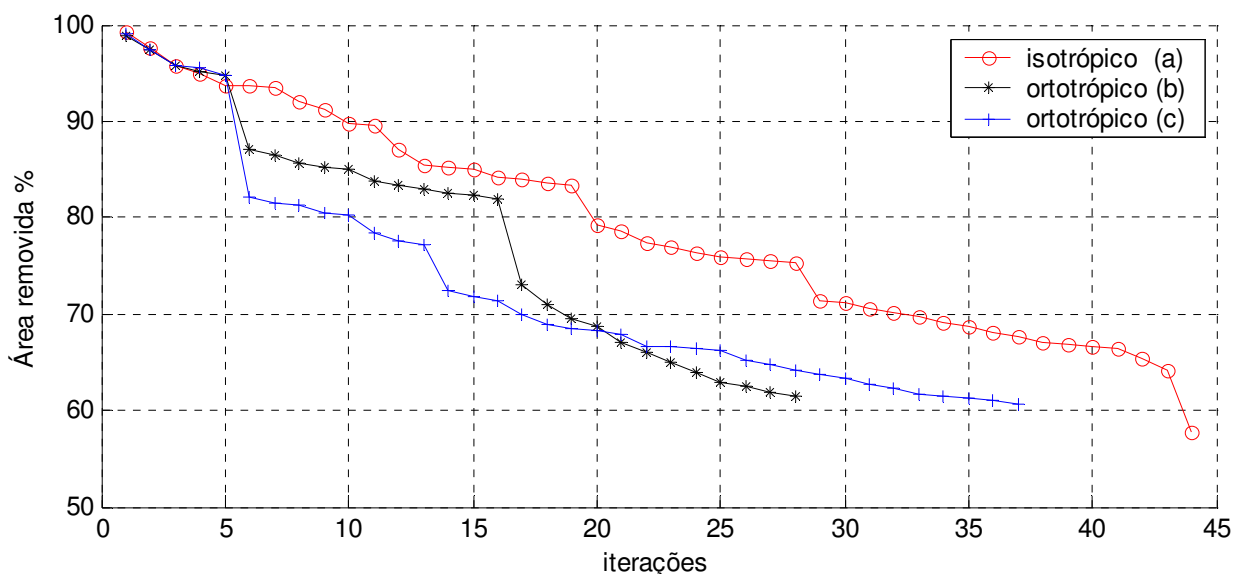


Figura 7.11 – Condutor de calor ‘V’: iterações \times área removida.

7.5 Condutor de calor cruzado com condições de contorno de Neumann nas cavidades

O principal objetivo deste exemplo é similar ao anterior. As condições de contorno prescritas estão representadas pela primeira ilustração desenhada na Figura 7.12, onde T_H representa alta temperatura (373 K) e T_L é a baixa temperatura (273 K). Os contornos restantes são isolados. Outro detalhe importante neste exemplo é a presença de ambos os tipos de otimização: topológica e de forma. Três casos particulares serão estudados: materiais isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos. O primeiro caso a ser apresentado é o de isotropia $k_{xx} = k_{yy} = 1$.

Na Figura 7.12 é possível acompanhar a evolução da remoção de material que para este processo de otimização foi ajustado como $r = 0.02l_{ref}$. Ao longo do processo de iteração há uma tendência de atingir a simetria. O limite percentual de material removido foi atingido na 34ª iteração.

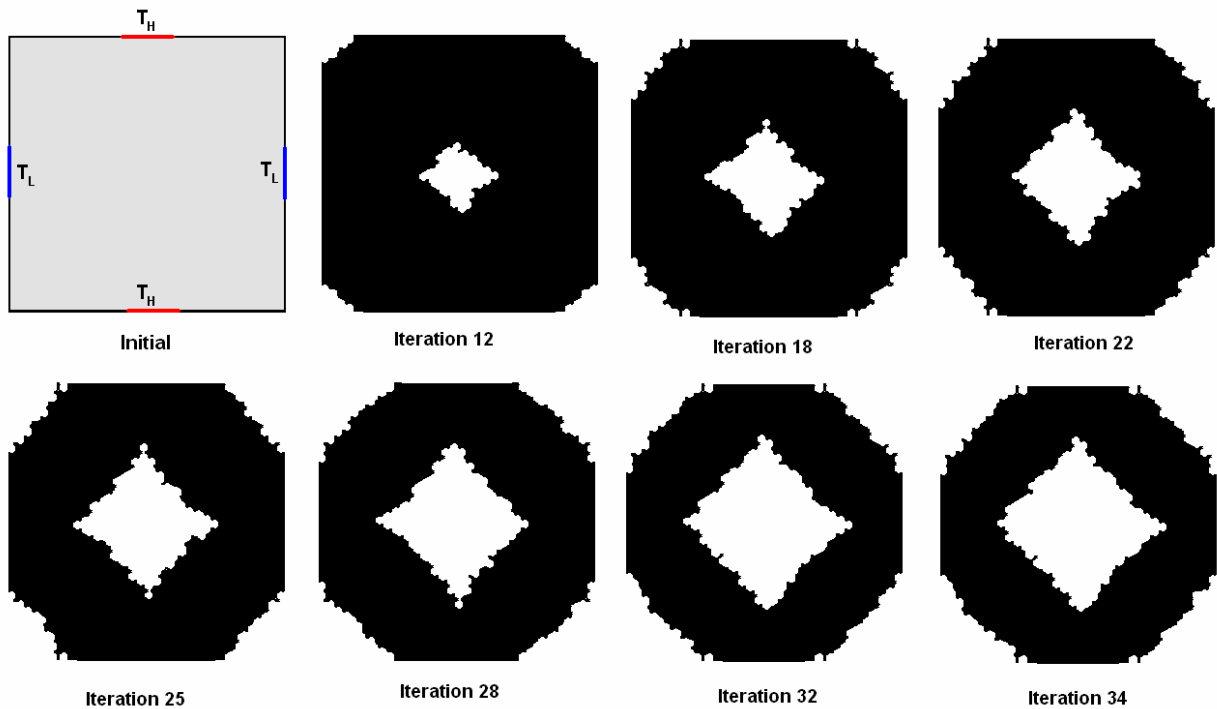


Figura 7.12 - Histórico de otimização para o condutor de calor cruzado: meio isotrópico.

O segundo caso refere-se às condutividades de $k_{xx} = 5$ and $k_{yy} = 1$. É possível acompanhar o processo evolutivo e notar que o material é removido na direção y , demonstrando que este é mantido onde o gradiente é maior. O projeto final se assemelha a um losango (Figura 7.13).

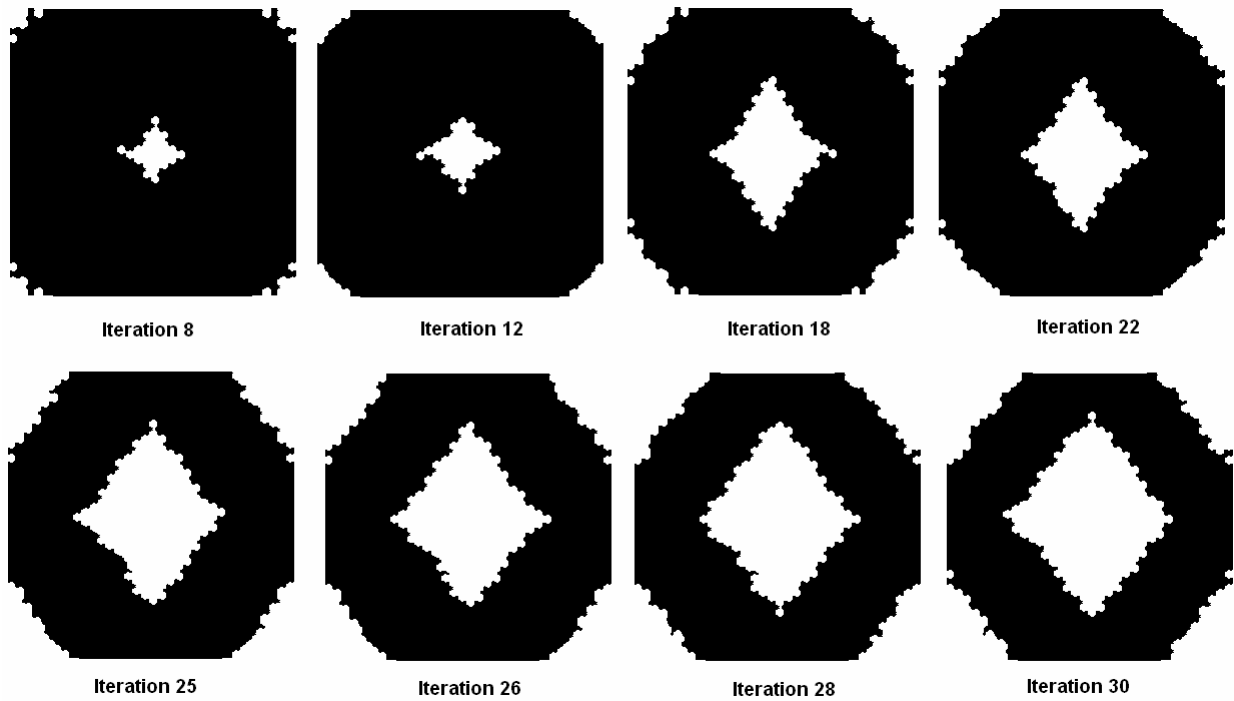


Figura 7.13 - Histórico de otimização para o condutor de calor cruzado: meio isotrópico.

Neste terceiro caso a condutividade foi definida com $k_{xx} = 1$, $k_{yy} = 1$ e $k_{xy} = 0.5$, caracterizando um problema de transferência de calor anisotrópico. O histórico é apresentado na Figura 7.14, onde é possível visualizar que topologia final resultou em uma cavidade sem eixos de simetria.

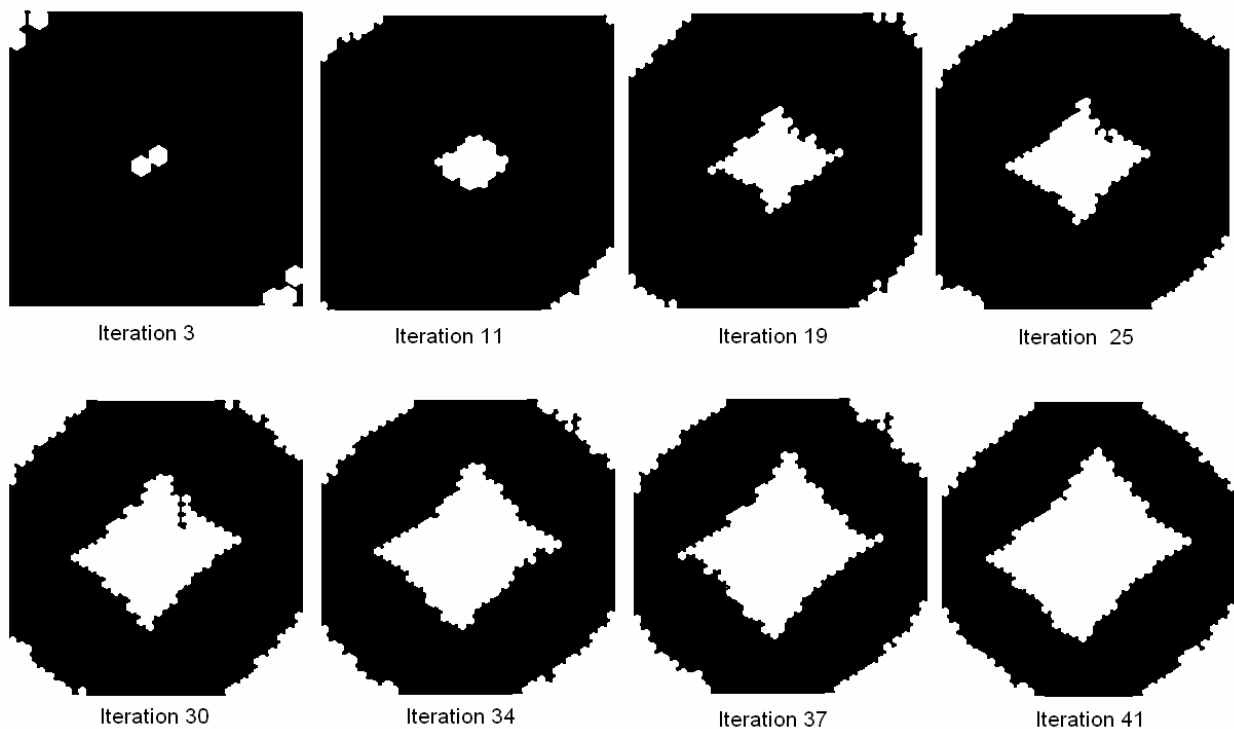


Figura 7.14 - Histórico de otimização para o condutor de calor cruzado: meio anisotrópico.

A Figura 7.15 demonstra o percentual de material removido por número de interações para cada caso estudado. Para todos estes casos o critério de parada foi atingido quando o percentual de material removido atingiu o valor de 40%. Para ambos os casos de isotropia e ortotropia a simetria não foi atingida para a topologia final, porem é conveniente salientar que o principal objetivo é demonstrar o comportamento de remoção de material ao longo do processo.

A variável de *cut-off* é um percentual fixo e definido dos valores calculados nos pontos internos das D_T e não há como estabelecer um equilíbrio exato ou uma compensação na quantidade de material a ser removida de maneira a obter a simetria. Isto significa que quanto mais complexa a geometria obtida durante o processo de otimização, mais difícil obter como resultado final uma topologia simétrica. Na Figura 7.16 apresenta-se um resultado, somente para os casos isotrópicos e ortotrópicos, utilizando a parte simétrica do projeto inicial. A utilização de simetria como forma de simplificação deste problema perde seu valor quando o meio em questão apresenta comportamento anisotrópico. Para as primeiras iterações o material removido iniciou com $r = 0.04 l_{ref}$ e para as iterações seguintes foi reduzida para $r = 0.02 l_{ref}$.

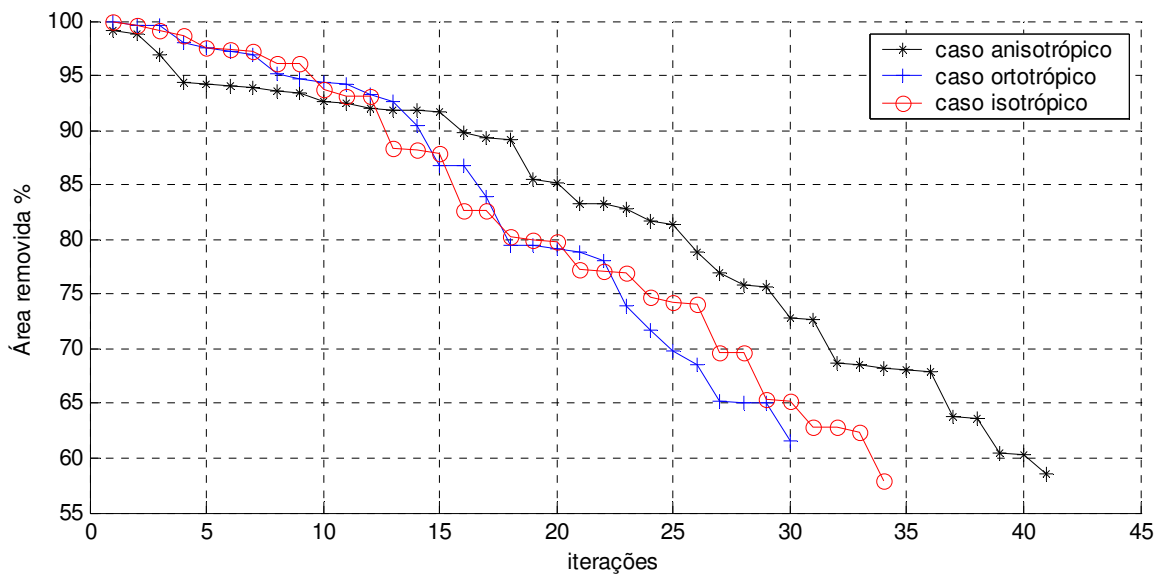


Figura 7.15 – Conductor de calor cruzado: iterações × área removida.

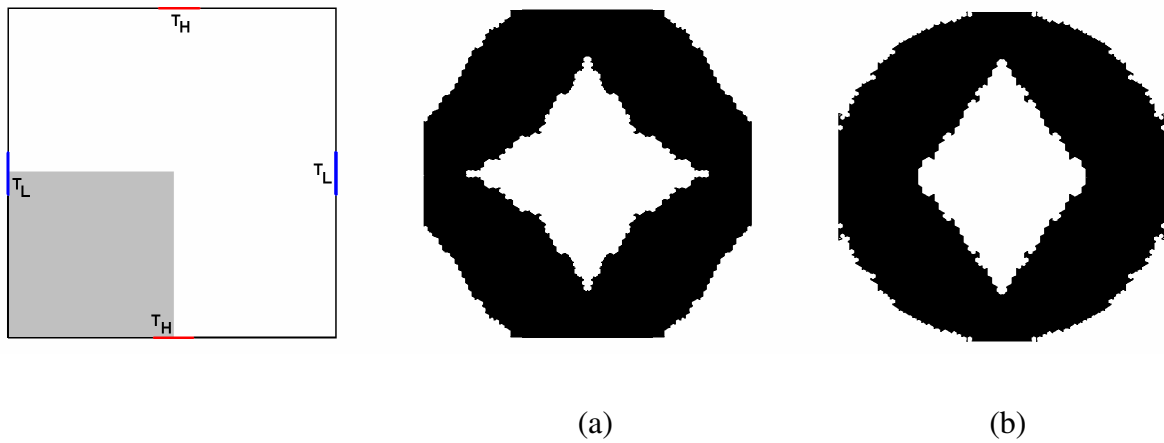


Figura 7.16 – Topologias finais para exemplos: (a) isotrópico e (b) ortotrópico.

7.6 Trocador de calor com condições de contorno de Robin nas cavidades

Neste exemplo pretende-se projetar um trocador de calor mudando sua topologia. O objetivo é criar furos onde a função custo seja mais sensível, ou seja, onde a D_T assumir os maiores valores absolutos. Na prática, as condições de Neumann ou Dirichlet sobre $\partial\beta\epsilon$ são hipóteses muito severas, razão pela qual é imposta apenas condição de contorno mista sobre $\partial\beta\epsilon$. O problema a ser tratado está apresentado na Figura 7.17. Defini-se um domínio de projeto denotado por Ω , cujo coeficiente de condutividade térmica é dado por $k = 204 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Na parte superior define-se uma superfície de resfriamento Γ_R exposta ao ar ambiente, que se encontra a uma temperatura $u_\infty = 25^\circ\text{C}$ sendo o coeficiente de convecção $h_c = 20 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$. Quando um canal de resfriamento é introduzido, tem-se água a uma temperatura $u_\infty^e = 30^\circ\text{C}$, que circula no interior deste modo a induzir um coeficiente de convecção de $h_c^e = 200 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

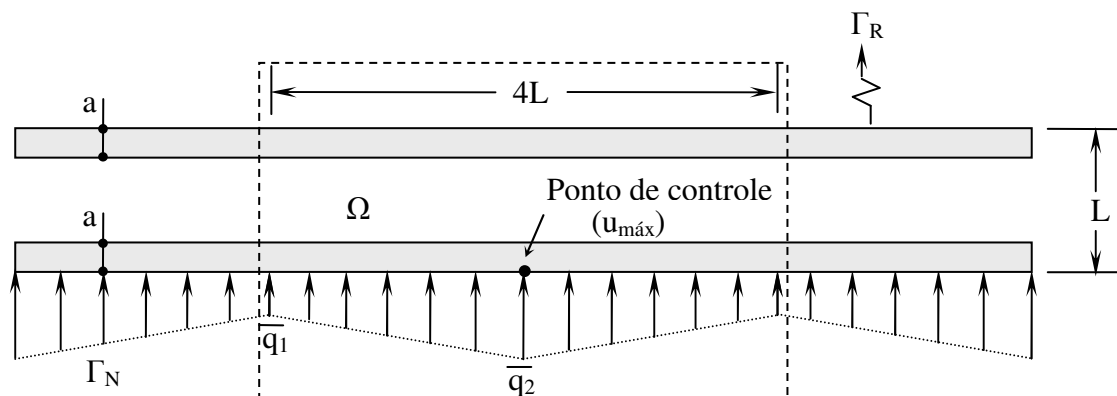


Figura 7.17 – Detalhe do projeto inicial do trocador de calor.

Finalmente o fluxo q prescrito sobre T_N apresenta uma distribuição linear por partes, onde o menor valor é de $\bar{q}_1 = 2 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ e o maior valor é de $\bar{q}_2 = 2 \times 10^4 \text{ W/m}^2$. A dimensão é de $4L \times L$, onde $L = 4 \text{ m}$ do domínio discretizado, sendo que a região em cinza da largura $a = 1 \text{ m}$ não pode ser perturbada por ser considerada como a parte estrutural do componente.

Ao introduzir-se furos dentro do Ω , espera-se uma diminuição da temperatura (a ser verificada em um ponto de controle) até que o valor máximo requerido em projeto ($u^*_{m\acute{a}x}$) seja atingido. Então o objetivo principal está em mudar a topologia do componente descrito na Figura 7.17 até que $u_{m\acute{a}x} \leq u^*_{m\acute{a}x}$ seja atingido. Os furos a serem criados deverão representar a retirada de 1% da área do projeto inicial por iteração. Como condição de *critério de parada* foi escolhido $u^*_{m\acute{a}x} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$. Na Figura 7.18 apresenta-se o histórico evolutivo onde é possível perceber que os furos são inicialmente criados próximos ao centro da peça onde a função custo é mais sensível. Na mesma figura também é possível verificar que a distância entre os canais aumenta à medida que estes se afastam do ponto de temperatura máxima, conforme esperado.

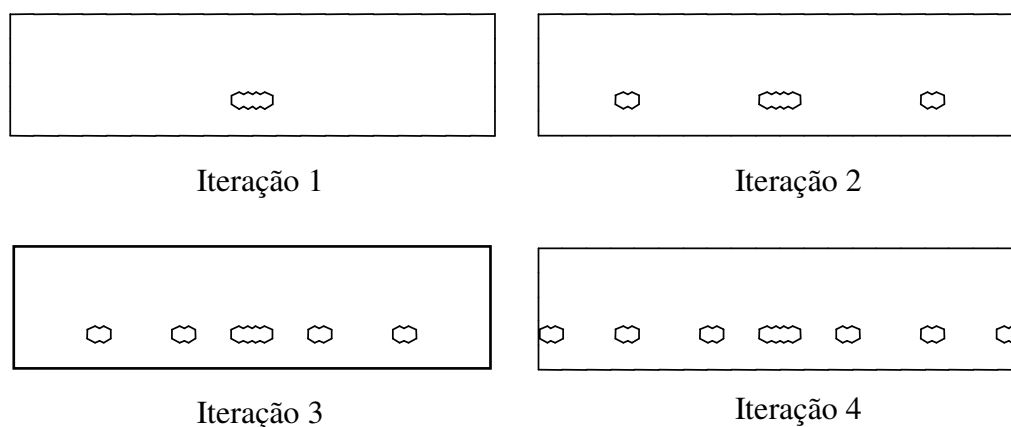


Figura 7.18 – Histórico do processo de otimização.

Na Figura 7.19 é possível acompanhar a redução da temperatura no ponto de controle escolhido durante o processo iterativo. Para um valor definido de $u_{m\acute{a}x} = 200^\circ\text{C}$ a condição de $u_{m\acute{a}x} \leq u^*_{m\acute{a}x}$ foi atingida na quarta iteração. A curva apresenta um comportamento assintótico ao atingir a temperatura de 200°C , ou seja, as condições impostas nos canais de resfriamento (h_c^e e u_∞^e) são insuficientes para obter uma temperatura muito menor do que a atingida. No mesmo gráfico é possível acompanhar a evolução deste mesmo exemplo, porém resolvido por Novotny et al. (2003). Os autores chegam a uma topologia final muito semelhante à apresentada na Figura 7.18, e segundo o histórico iterativo de temperatura verifica-se que os resultados são muito condizentes.

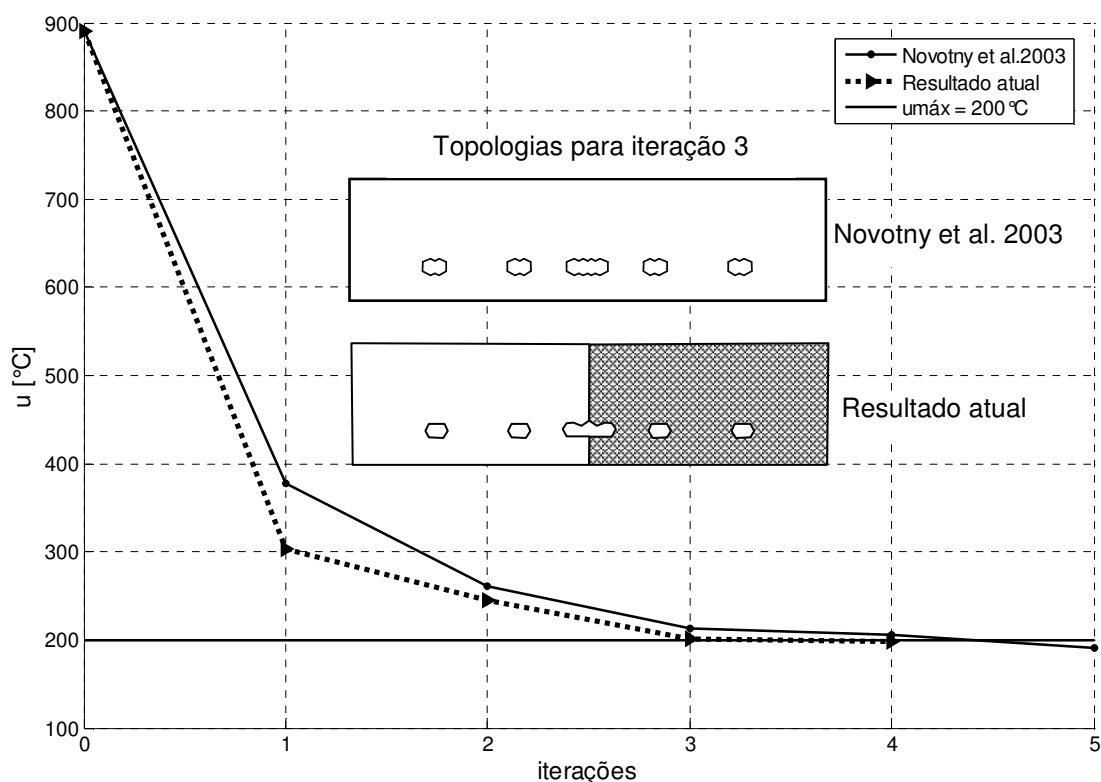


Figura 7.19 – Temperatura máxima ($u_{m\acute{a}x}$) por iteraç\~{a}o.

7.7 FONTES DE CALOR

Geralmente em casos que envolvem problemas t\~{e}rmicos faz-se necess\~{a}rio a considera\~{c}o de fontes de calor, as quais podem ser provenientes de um transistor, bobina ou outro componente montado sobre uma placa, por exemplo. A placa, por sua vez considerada como dom\~{i}nio, pode apresentar um comportamento n\~{a}o isotr\~{o}pico, devido a sua natureza construtiva e ainda possuir in\~{u}meras fontes de calor montados sobre esta. Deste ponto de vista, faz-se necess\~{a}rio estudar o comportamento de s\~{o}lidos submetidos a m\~{u}ltiplas fontes de calor. Tais fontes de calor t\~{e}m seu significado pr\~{a}tico na manufatura industrial como, por exemplo, moldes t\~{e}rmicos (*thermal molding-die*), placas com circuitos impressos (*printed circuit boards - PCB*), difusores, entre outros. A distribui\~{c}o de temperatura ou fluxo de calor atrav\~{e}s de uma estrutura espec\~{i}fica pode ser encontrada atrav\~{e}s de uma an\~{a}lise de MEC. Freq\~{u}entemente pode acontecer de que nem todas as regi\~{o}es do material sejam efetivamente utilizadas. Isto significa que uma parte deste material n\~{a}o est\~{a} contribuindo significativamente para a performance t\~{e}rmica da regi\~{a}o. O objetivo deste t\~{o}pico sob o aspecto de otimiza\~{c}o topol\~{o}gica consiste em obter uma forma final que apresente um contorno com uma distribui\~{c}o de fluxo o mais uniforme poss\~{i}vel (iso-fluxo). \r{A} medida que o material com baixo n\~{i}vel de fluxo \r{e} gradualmente removido, h\~{a} um aumento nos n\~{i}veis de fluxo no material remanescente. Isto significa que quanto mais a forma do

projeto em processo de otimização apresentar um fluxo uniforme, mais eficiente é a utilização do material tanto no sentido térmico como estrutural.

Neste tópico alguns exemplos serão apresentados e comparados com aqueles publicados por Li et. al. (1999), onde será possível verificar os resultados das topologias finais obtidas através de duas técnicas numéricas distintas MEF e MEC que empregam as análises de sensibilidade via *Weighting Factor Scheme* (WFS) e D_T , respectivamente.

7.7.1 Domínio quadrado com uma fonte de calor

Uma placa quadrada condutora de calor de dimensão 20×20 unidades é discretizada com 80 elementos de contorno. A temperatura ao longo do contorno (arestas AB, BC, CD e DA) é mantida a $T_r = 0$ °C. A fonte de calor é de 100 W/m^2 posicionada no centro da placa está ilustrada na Figura 7.20.

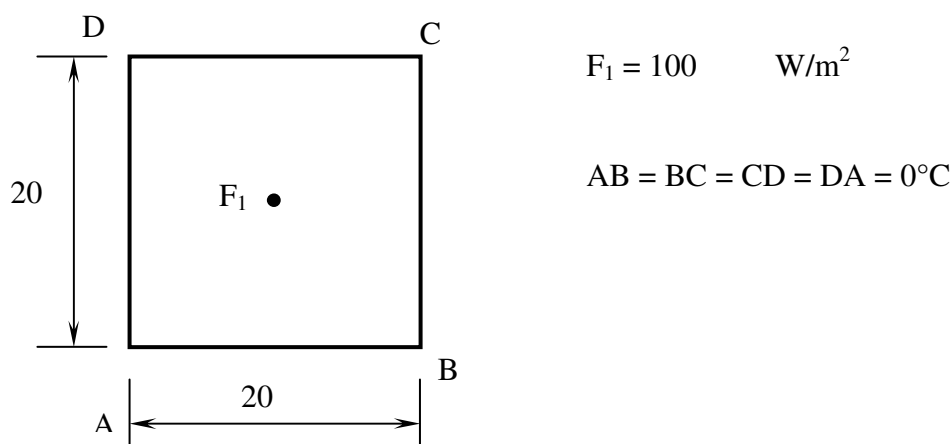


Figura 7.20 – Projeto inicial com uma fonte de calor.

Durante o processo de otimização as cavidades abertas no domínio recebem condição de contorno prescrita de $T = 0^\circ\text{C}$, enquanto o material é removido a variável de *cut-off* foi ajustada $cut-off = 0.03$. O processo é interrompido quando um volume mínimo é atingido. A Figura 7.21 mostra o comportamento da topologia à medida que o processo se desenvolve ao longo das iterações. Fica claro demonstrar que o projeto final representa um círculo o qual descreve a transferência de calor radial (iso-fluxo) devido à presença da fonte de calor localizada no centro do domínio.

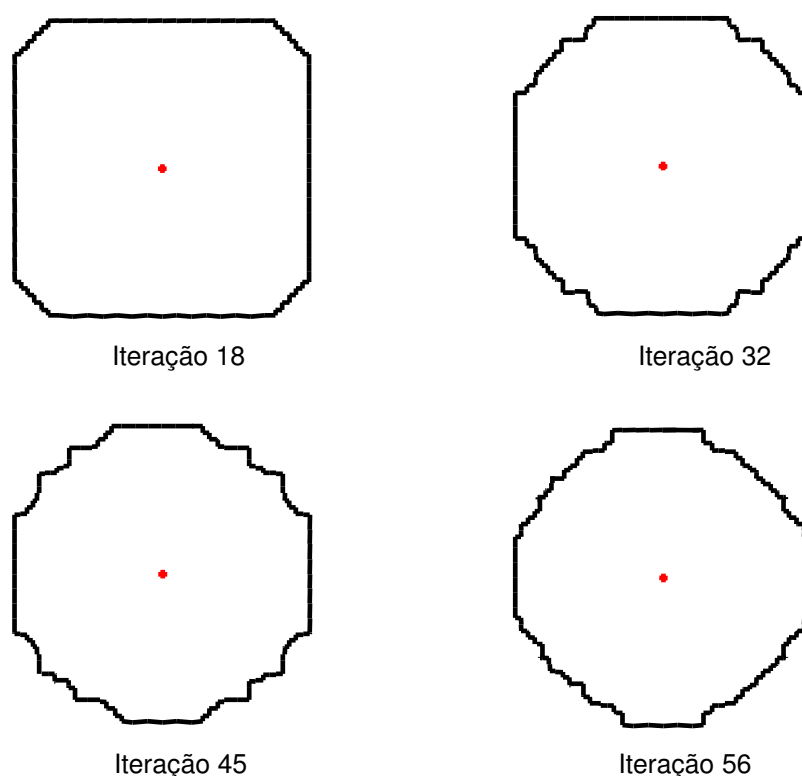


Figura 7.21 – Histórico de otimização: uma fonte de calor.

7.7.2 Domínio ortotrópico quadrado com uma fonte de calor

Este caso é similar ao exemplo apresentado no item 7.7.1 exceto que neste caso o material apresenta condutividade ortotrópica, onde as condutividades térmicas nas direções x e y são $k_x/k_y = 2$. Na Figura 7.22 verifica-se que à medida que o processo iterativo evolui um perfil elíptico é obtido como forma final. A forma final não circular é proveniente de um material de comportamento não isotrópico e é interpretada como a transferência de calor acontecendo mais rápida na direção x , apresentando assim, maior eficiência condutiva nesta direção.

Na Figura 7.23(a) e (b) é possível comparar as topologias obtidas para um meio isotrópico empregando o método atual (BEM + D_T) e o WFS. No exemplo da Figura 7.23(b) ao invés de uma fonte de calor havia uma cavidade ao centro do domínio onde era prescrita a temperatura como condição de contorno. Esta mesma topologia foi otimizada considerando o meio como ortotrópico e são mostrados na Figura 7.23(c) e (d). Neste ponto, o objetivo consiste em confrontar as topologias finais obtidas neste trabalho com aquelas obtidas por Li et al.(1999) demonstrando que os resultados atuais estão conformes.

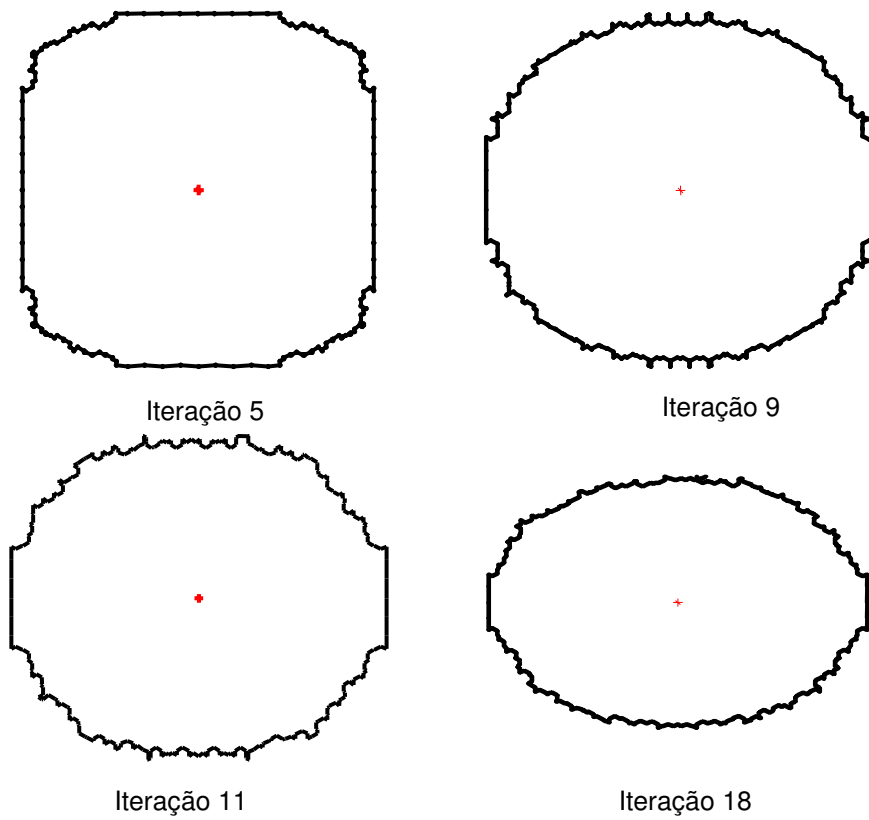


Figura 7.22 – Histórico de otimização: domínio ortotrópico com uma fonte de calor.

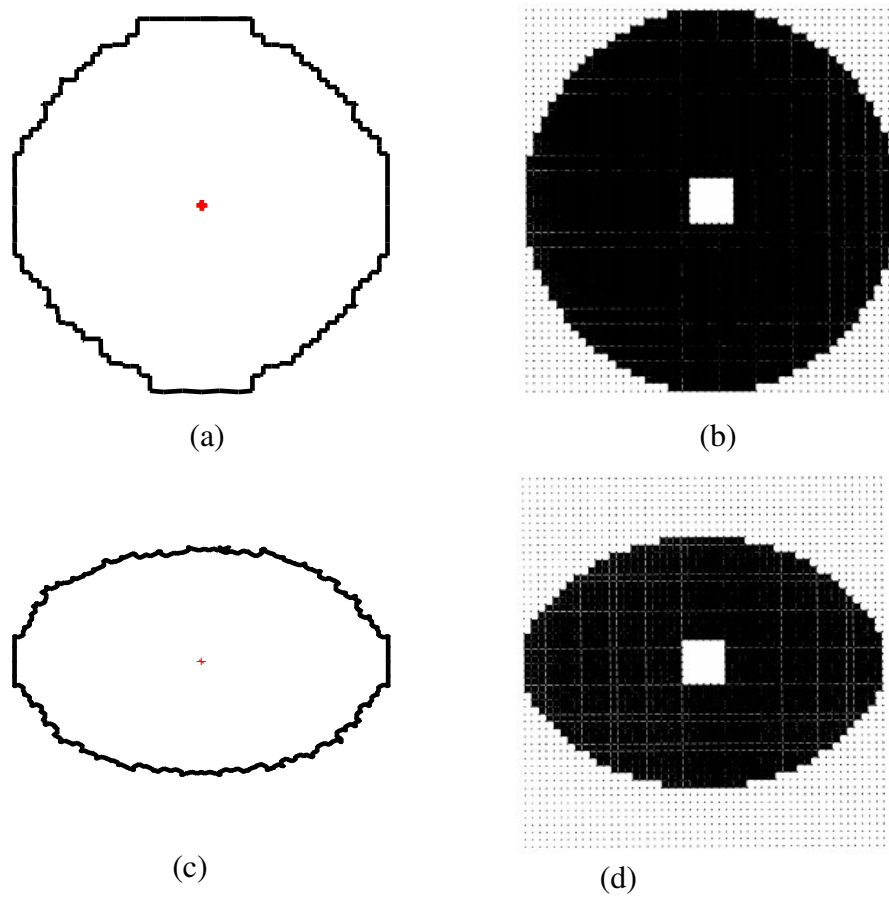


Figura 7.23 – Comparativo entre as topologias finais: (a) isotrópico: DT, (b) isotrópico: *WFS* (Li et al. 1999), (c) ortotrópico: DT e (d) ortotrópico: *WFS* (Li et al. 1999).

7.7.3 Domínio retangular com duas fontes de calor

Para este caso, foram consideradas duas fontes de calor aplicadas em uma placa retangular com dimensão 40×30 unidades (Figura 7.24). As condições de contorno são prescritas como $T_r = 0^\circ\text{C}$ para as cavidades abertas e para o contorno externo também, enquanto que as fontes de calor foram definidas em $F_1 = F_2 = 100\text{W/m}^2$, cada. Conforme a Figura 7.25, é possível acompanhar a evolução da topologia à medida que o processo avança.

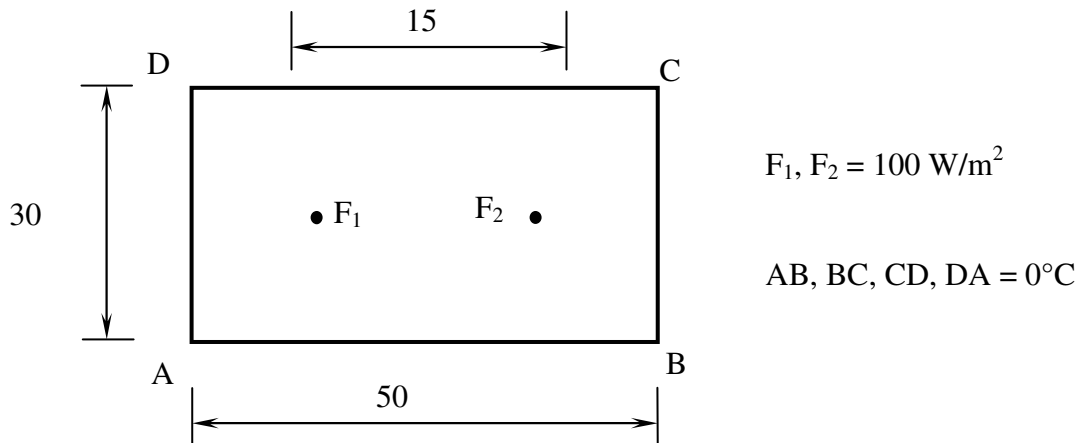


Figura 7.24 – Projeto inicial com duas fontes de calor.

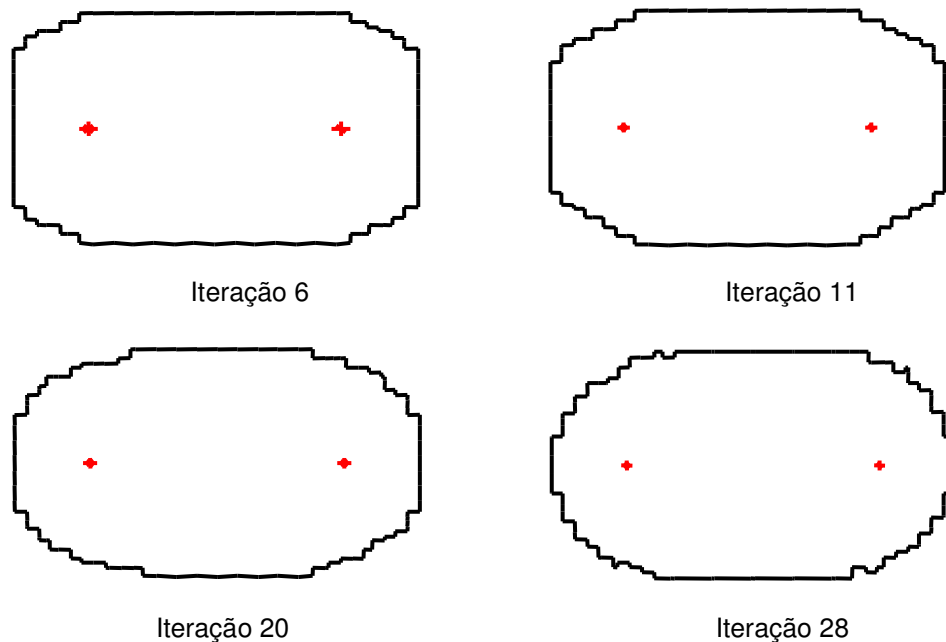


Figura 7.25 – Histórico evolutivo: duas fontes de calor.

A Figura 7.26 demonstra um comparativo entre as topologias finais empregando diferentes técnicas de otimização. A primeira é resultante da derivada topológica e MEC enquanto que a segunda foi obtida por Li et al. (1999) com MEF e WFS. É possível constatar que não há divergência entre os projetos finais e que o material com baixo nível de fluxo foi eliminado.

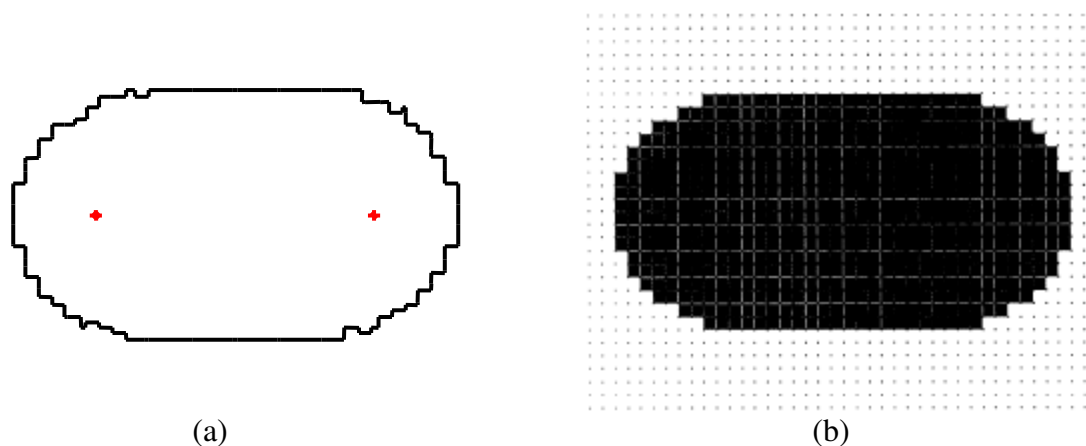


Figura 7.26 – Topologia ótima: (a) Derivada Topológica, (b) WFS (Li et al. 1999).

7.7.4 Placa de circuito impresso

Este exemplo foi proposto por Li et al.(1999) e refere-se a uma placa de circuito impresso (PCB). Uma das funcionalidades de uma PCB consiste em dissipar a maior quantidade possível de energia térmica com uma quantidade limitada de material. Este conceito justifica o emprego da otimização topológica com o objetivo de eliminar material com baixo fluxo do domínio de projeto. Logo o objetivo está em obter uma distribuição de fluxo de calor o mais uniforme possível através da redução da variação deste no sólido. Neste caso o modelo numérico foi discretizado com uma malha de 32 elementos. Foram consideradas quatro fontes de calor F_1 , F_2 , F_3 e F_4 definidas em 1 kW/m^2 , que na prática, são geradas através de uma série de componentes eletrônicos montados sobre a PCB. A estrutura consiste de uma área de projeto e de uma de não projeto, de acordo com a Figura 7.27. A temperatura no contorno (arestas AB, BC, CD e DA) é mantida a 0°C durante todo o processo de otimização. Nas cavidades a serem abertas prescreve-se como condição de contorno Neumann Homogênea. O processo é interrompido quando o volume retirado atingir o valor de 68%.

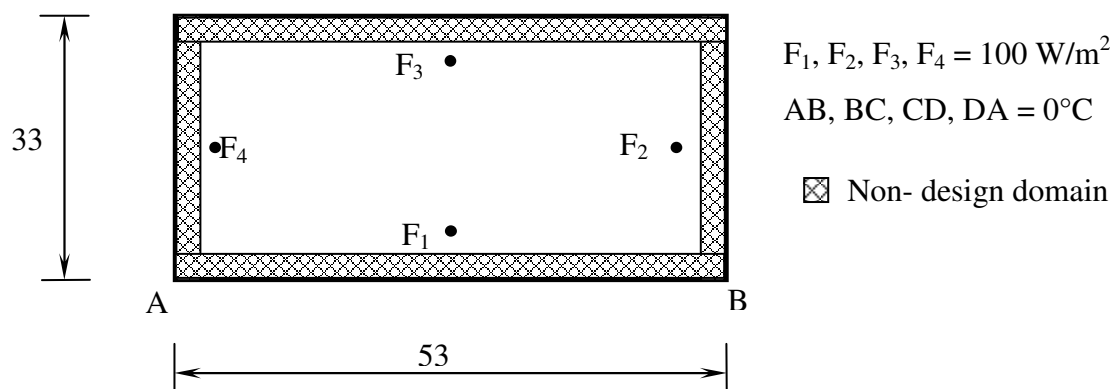


Figura 7.27 – Modelo inicial da PCB e suas condições de contorno.

Na Figure 4.7, é possível acompanhar o processo iterativo para este caso da PCB. Claramente, o material que apresenta menor eficiência na transferência de calor é gradualmente removido. Após uma quantidade de material ter sido removida no centro, as próximas áreas com baixa eficiência são os cantos do retângulo, veja iteração 24.

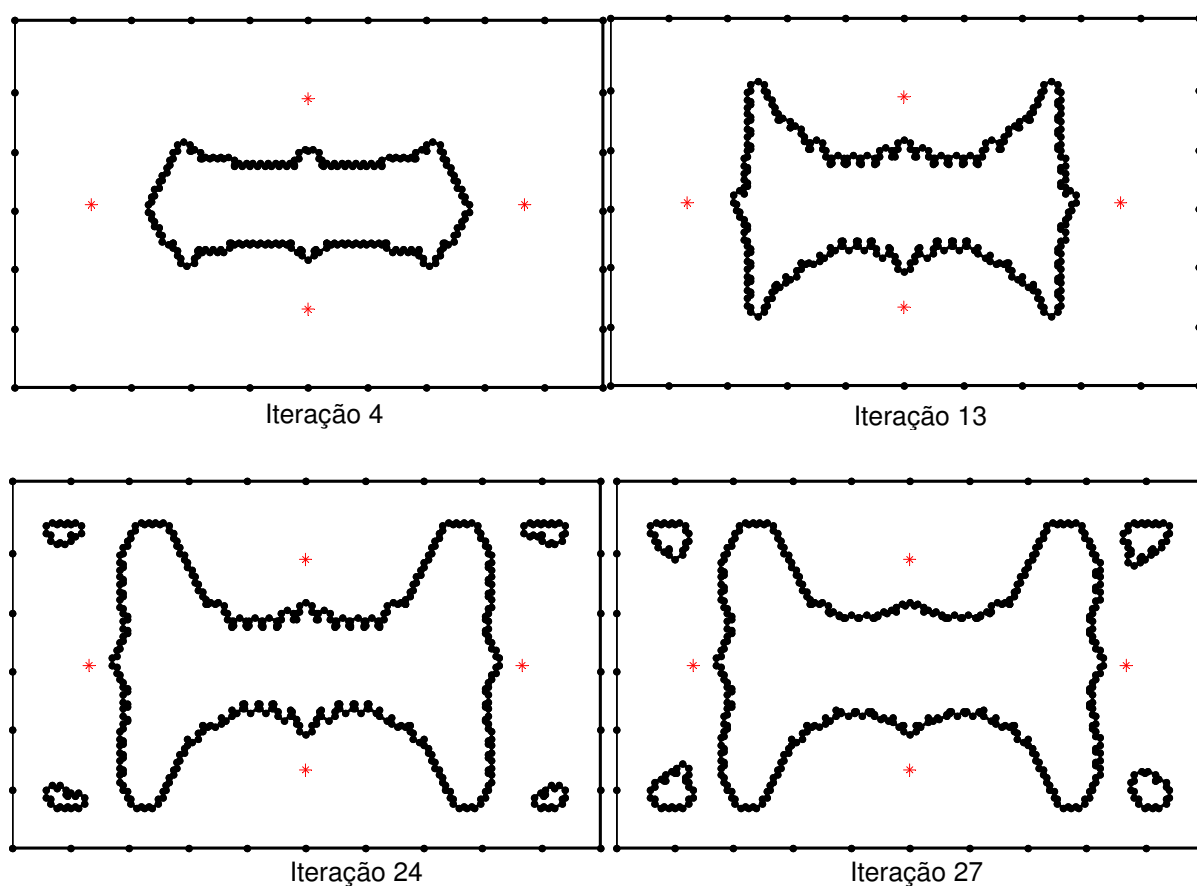


Figura 7.28 – Histórico de otimização da PCB.

A Figura 7.29 apresenta um comparativo entre a topologia final obtida utilizando a metodologia numérica proposta e aquela obtida por Li et al. 1999, empregando o WFS. Ambas as topologias resultantes mostraram um resultado final satisfatório.

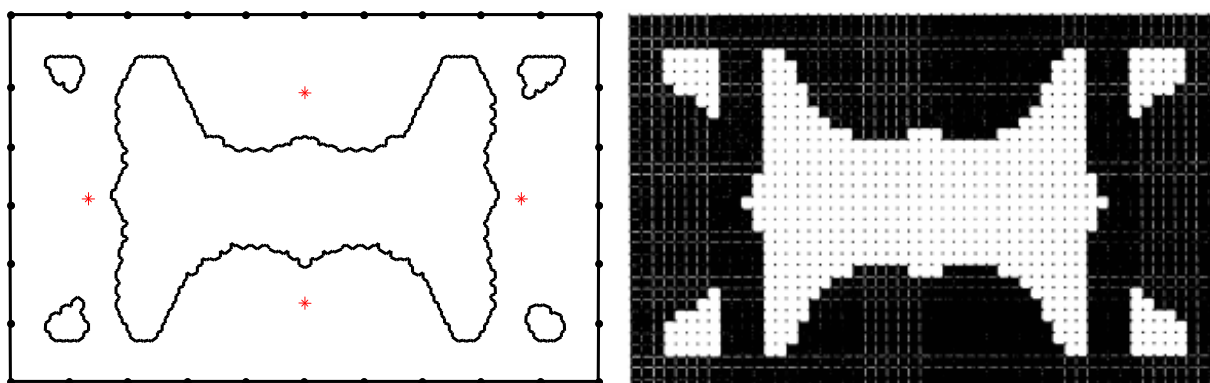


Figura 7.29 – Topologia ótima: (a) Derivada Topológica, (b) WFS (Li et al. 1999).

7.8 Comentários adicionais: Derivada topológica

Neste capítulo foram apresentados resultados numéricos referentes à otimização de sólidos submetidos à transferência de calor via D_T e MEC. As equações relacionadas à D_T apresentadas na literatura até o presente momento referem-se a sólidos com comportamento isotrópicos. A implementação da transformação de coordenadas lineares permitiu aplicar a D_T a solução de problemas em meios não isotrópicos. Foram estudados problemas sujeitos as condições de contorno prescritas de Neumann, Dirichlet e Robin. Ainda neste capítulo, foram considerados problemas com fontes de calor no domínio.

Os resultados apresentados foram satisfatórios e condizentes com os previstos, o que ressalta ainda mais as potencialidades da D_T e do MEC quando empregados no contexto de otimização topológica. Esta implementação evitou a necessidade de se empregar o uso de filtros durante o processo iterativo, contribuindo na redução do custo computacional e no resultado de topologias livres de densidades intermediárias. É importante ressaltar que neste tipo de análise de sensibilidade há uma grande desvantagem proveniente da complexidade matemática envolvida na obtenção da D_T , o que dificulta muito a imposição de outros tipos de função custo, necessitando sempre de uma nova dedução.

8 PROCEDIMENTO PARA OTIMIZAÇÃO MULTI- CRITÉRIO

Problemas de otimização submetidos a mais de uma função custo vem se tornando razoavelmente comuns nas práticas de engenharia. Na indústria eletrônica, por exemplo, há um processo rigoroso de manufatura de componentes buscando máximo desempenho, o que irremediavelmente gera calor. Atualmente a miniaturização de tais componentes é um fato irreversível no mundo tecnológico, o que faz com que haja uma demanda no desenvolvimento de tecnologias de resfriamento. Muitos destes projetos estão fundamentados em dissipadores de calor porosos (Jeng et al., 2006). A utilização deste tipo de geometria em refrigeradores eletrônicos apresenta duas vantagens: (a) O dissipador de calor poroso fornece mais de 10 vezes a área de contato de uma superfície lisa; (b) A estrutura irregular dos poros, a uma velocidade suficientemente alta, causa irregularidade no escoamento do fluido, aumentando a dispersão da condutividade térmica (Jeng et al., 2006). Este é um caso típico onde a condução de calor pode levar a um tipo de ótimo, enquanto que a convecção pode levar a outro. Entretanto, faz-se necessário combinar ambos os problemas de otimização em um só. Claramente a adoção de um critério de projeto pode resultar em uma menor eficiência na performance de um produto sob o ponto de vista do outro critério.

Em projetos práticos de engenharia, é usual para um problema térmico-sólido satisfazer um dos seguintes critérios de otimalidade:

- A – Transferência de massa o mais uniforme possível;
- B – Transferência de calor o mais uniforme possível;
- C – A máxima eficiência possível em ambos os critérios A e B, simultaneamente;

Do ponto de vista de otimização, os primeiros dois critérios significam extremização de uma única função objetivo. A satisfação do critério C necessita da satisfação de múltiplos critérios de projeto simultaneamente, o qual é o objetivo deste capítulo. Depois de separadas as análises numéricas de transferência de calor e massa com o MEC, os fluxos de calor e massa são determinados nos pontos internos e os valores são utilizados para obter a sensibilidade no domínio via D_T , para cada problema. A fim de estimar um fator normalizado de contribuição de cada problema no projeto final, dois fatores adimensionais são introduzidos como:

$$\alpha_M^i = \frac{D_T^M \Big|_i}{D_T^M \Big|_{\max}} \quad 0 \leq \alpha_M^i \leq 1 \quad (8.1)$$

$$\alpha_H^i = \frac{D_T^H|_i}{D_T^H|_{\max}} \quad 0 \leq \alpha_H^i \leq 1 \quad (8.2)$$

sendo α_M^i o fator de eficiência de fluxo mássico, $D_T^M|_i$ a derivada topológica do fluxo mássico no ponto interno i , e $D_T^M|_{\max}$ o valor máximo de $D_T^M|_i$. Um fator de eficiência de fluxo de calor α_H^i é obtido da mesma maneira que para o fluxo mássico. Durante o processo de otimização o objetivo básico está em remover material onde houver menor eficiência. No entanto, como ocorre comumente em otimização multi-critério, pontos internos com baixos fluxos de calor não necessariamente terão baixos fluxos de massa. Nestes casos é necessário aplicar uma estratégia para gerar um compromisso entre ambos os fenômenos. Rosvany et al. (1995) propuseram uma estratégia de compromisso em termos da soma de pesos de α_H^i e α_M^i :

$$\alpha^i = w_M \alpha_M^i + w_H \alpha_H^i \quad (8.3)$$

onde w_H e w_M são os fatores de participação (pesos) para o problema de calor e de massa, respectivamente. É importante notar que:

$$w_M + w_H = 1 \quad (8.4)$$

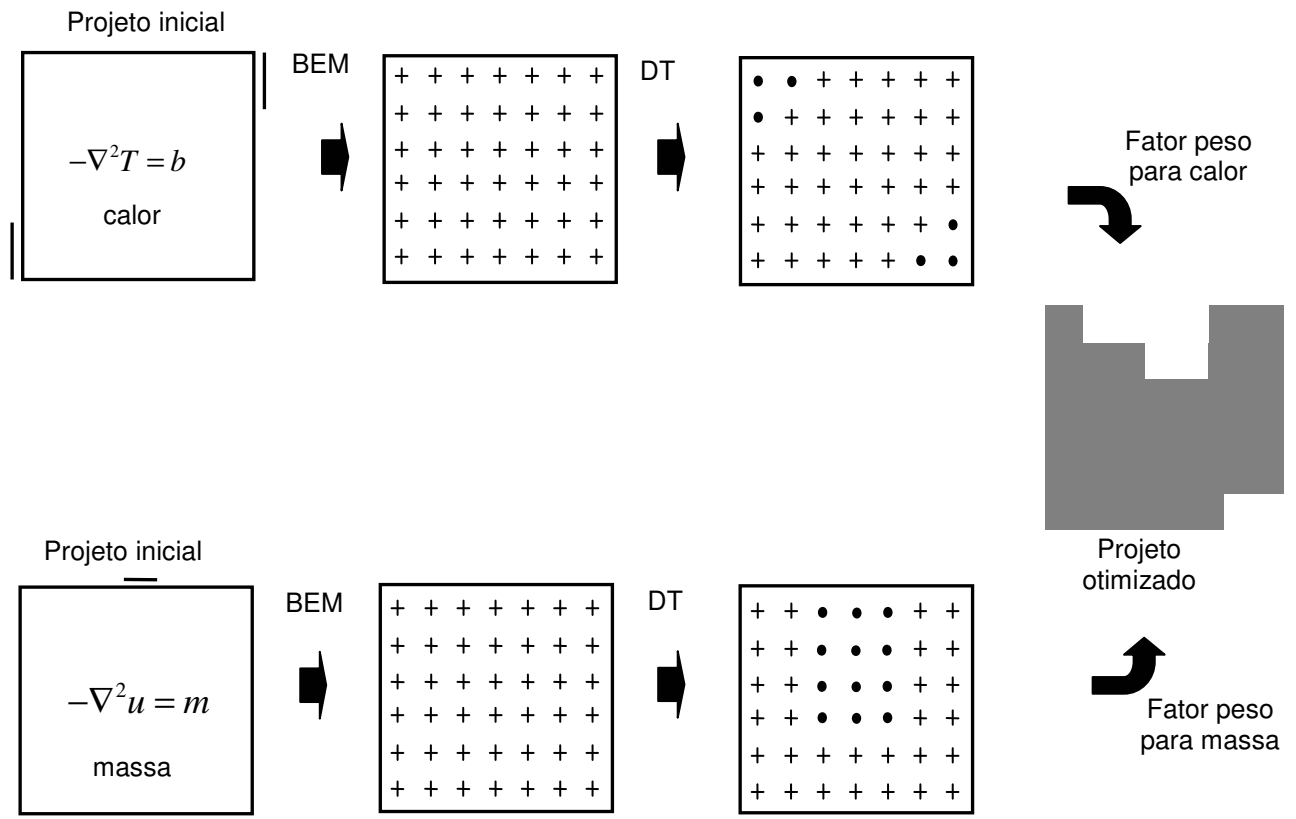


Figura 8.1 - Detalhe esquemático da otimização multi-critério.

Os fatores peso fornecem uma maneira de definir diferentes níveis de importância para cada problema. No entanto, quando $w_M = 1$ e $w_H = 0$ o critério A é obtido como um caso especial, enquanto que $w_M = 0$ e $w_H = 1$ reduz o problema para otimização em transferência de massa (critério B).

Para demonstração da técnica proposta neste capítulo (MEC + D_T + multi-critério) dois exemplos são discutidos. O primeiro refere-se a um Y-assimétrico e o segundo a um dissipador de calor poroso. No primeiro caso apresenta-se um gráfico com as sensibilidades do domínio quando submetido à transferência de calor e a transferência de massa independentemente e após um gráfico da sensibilidade proveniente da combinação de ambos. São escolhidos três pontos internos de controle para verificar e discutir o comportamento da temperatura e fluxo à medida que o processo de otimização evolui. O segundo caso refere-se a um dissipador de calor poroso onde é imposto um peso igual para ambas transferências (calor e massa) com o objetivo de verificar se a topologia final converge para uma geometria simétrica. O mesmo caso é discutido e avaliado para $\alpha_H > \alpha_M$.

8.1 Dissipador I

Um domínio quadrado poroso de dimensão 20×20 é submetido à transferência de calor e massa simultaneamente. A geometria é discretizada com 40 elementos de contorno descontínuos lineares integrados com quatro pontos de Gauss. As condições de contorno estão ilustradas conforme a Figura 8.2 e foram sempre aplicadas sobre dois elementos. O problema de transferência de calor possui um potencial elevado de 25°C no canto superior à direita e um baixo potencial de 23°C no meio da aresta inferior da placa. O problema de transferência de massa tem um alto potencial de 2 kg mol/m^3 no canto superior a esquerda e um baixo potencial de 1 kg mol/m^3 no meio da aresta inferior da placa. Os demais contornos estão isolados, bem como, todos os furos abertos durante o processo de otimização. Os coeficientes de condutividade e de difusividade são ajustados em $1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ e $1 \text{ m}^2/\text{h}$, respectivamente. Foi gerada automaticamente uma grade regularmente espaçada de pontos internos, levando-se em conta o raio dos furos criado durante cada iteração.

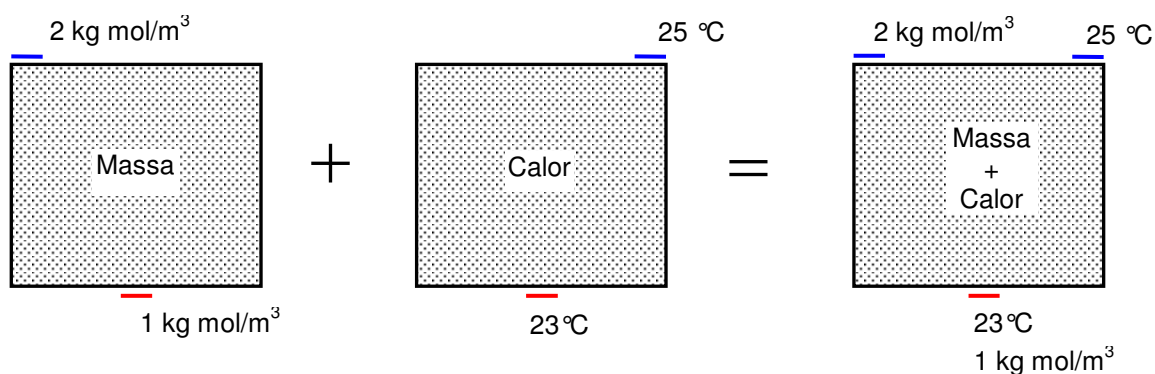


Figura 8.2 - Condições de contorno para o dissipador I.

Este caso será estudado com $\alpha_M = 0.4$ e $\alpha_H = 0.6$, para ilustrar um caso onde uma prioridade maior é imposta a um dos problemas, neste caso o de transferência de calor. Três pontos internos de controle foram escolhidos com o objetivo de acompanhar a temperatura, concentração de massa, fluxo de calor e fluxo de massa à medida que o processo evolui.

A Figura 8.3 ilustra o comportamento dos valores da D_T calculados para a transferência de massa (Figura 8.3-a) e de calor (Figura 8.3-b) dentro do domínio antes do processo de otimização ser inicializado. A Figura 8.3-c representa os valores da D_T para ambos os problemas obtidos pela equação (8.3).

A Figura 8.4 demonstra a evolução da topologia durante o processo iterativo. Está claro que o material é removido onde é menos necessário, de acordo com o fator de peso empregado. O processo iterativo é parado quando uma área de 50 % em relação ao domínio inicial é removida. Os três pontos internos de controle escolhidos foram $p_1 = (10,6)$, $p_2 = (4.4,14)$ e $p_3 = (15.6,14)$, para acompanhar os parâmetros físicos. As médias de temperatura e de massa nos elementos de contorno também foram consideradas.

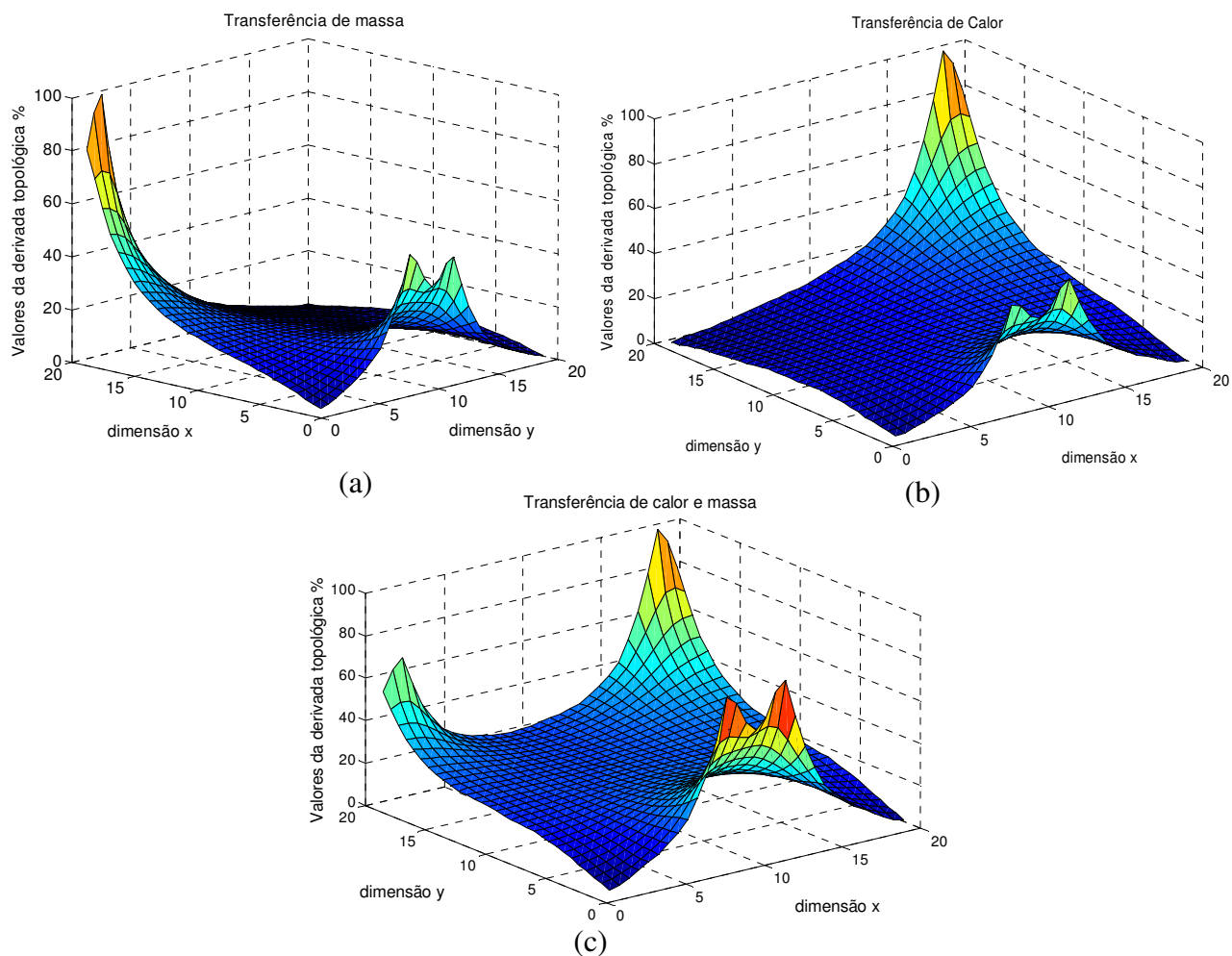


Figura 8.3 – Mapas iniciais da D_T para $w_M = 0.4$ e $w_H = 0.6$ - dissipador I.

Analisando o gráfico de fluxo de calor, é possível verificar que o gradiente nos pontos p_1 e p_2 estão aumentando à medida que o processo se desenvolve, enquanto que no ponto p_3 ocorre um decréscimo visível do valor do gradiente. Na Figura 8.5, o ponto p_3 demonstra um aumento da temperatura devido ao decréscimo do gradiente naquela posição de controle. É evidente que a região na qual apresenta menor eficiência está sendo removida. Conseqüentemente, o fluxo é maximizado ao longo do caminho conectando os pontos p_1 e p_2 . Nas Figura 8.7 e Figura 8.8 apresenta-se o histórico de concentração de massa e de fluxo nos três pontos internos. Os fluxos de massa nos pontos p_1 e p_2 sofrem uma redução após a 56ª iteração, enquanto que no ponto p_3 aumenta simultaneamente. Isto ocorre porque após a iteração 56 os valores da D_T nos pontos internos são gradualmente homogeneizados, tornando difícil selecionar locais onde os valores da D_T sejam baixos e óbvios. A geometria final resulta em forma de Y assimétrico, com material concentrado no lado direito, devido ao fator peso inicialmente imposto. No entanto, o fluxo mássico é maximizado do ponto p_1 ao p_3 .

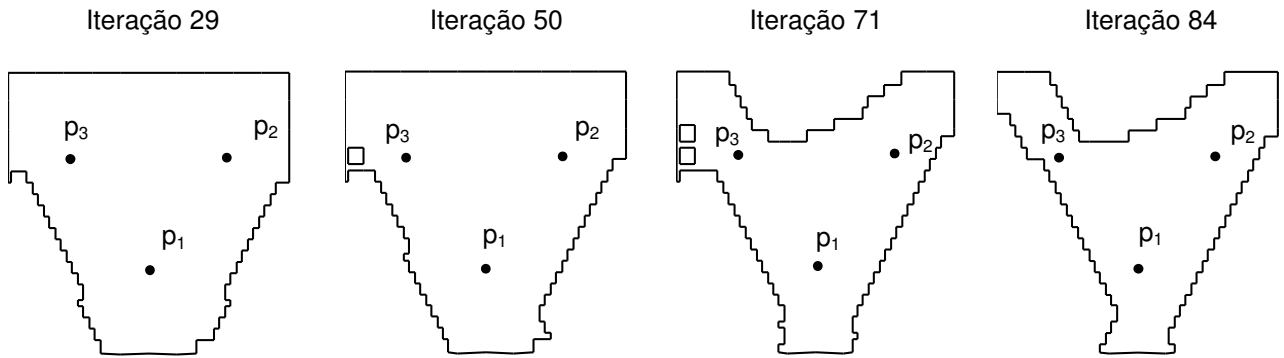


Figura 8.4 - Evolução topológica para o dissipador I.

Este caso demonstra claramente que a otimização multi-critério leva a um resultado assimétrico, embora o problema original apresente tanto simetria geométrica quanto das condições de contorno.

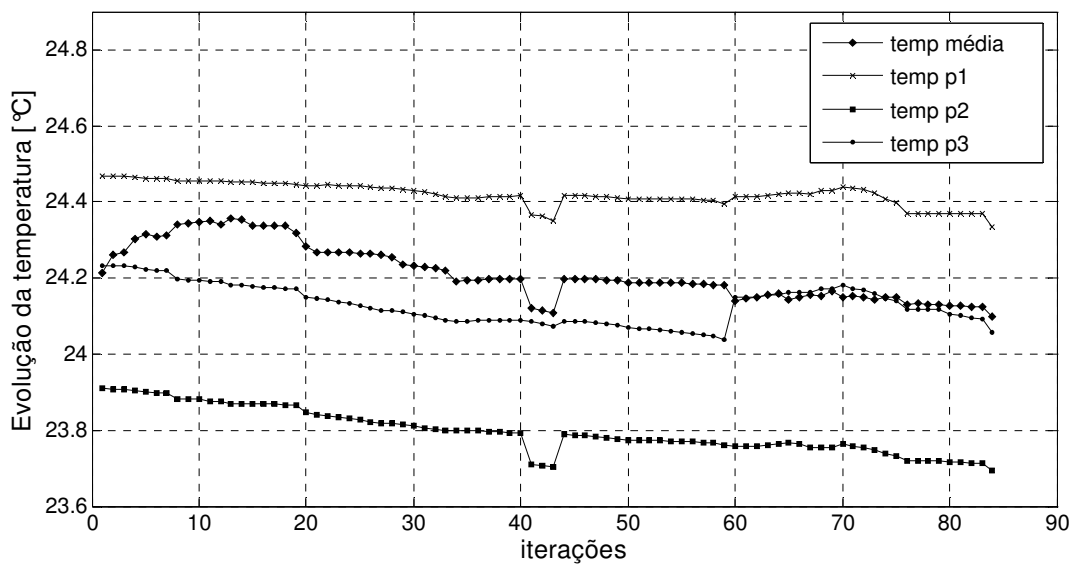


Figura 8.5 – Histórico da temperatura por iteração para os pontos p_1 , p_2 e p_3 - dissipador I.

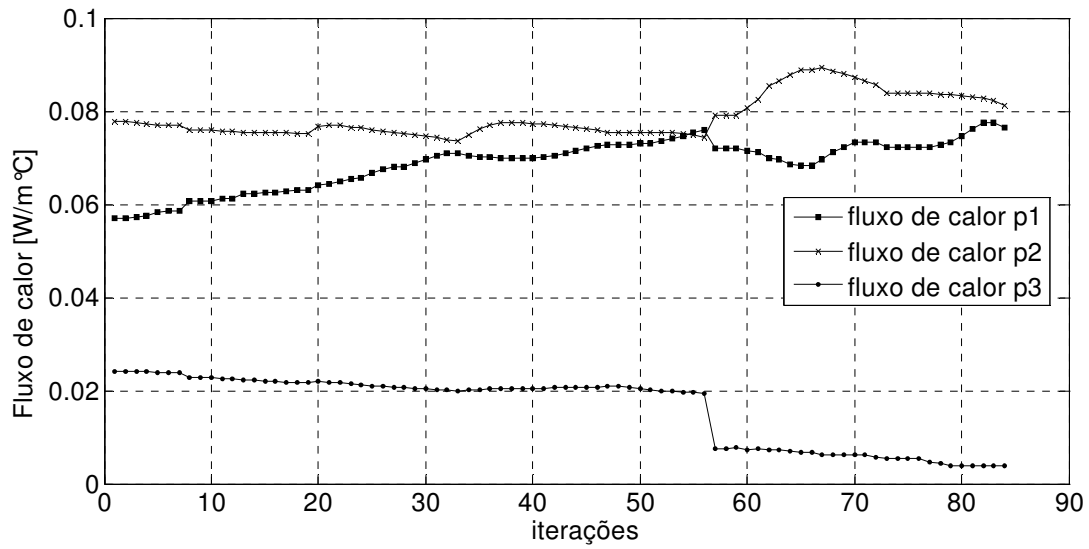


Figura 8.6 – Histórico do fluxo de calor por iteração para os pontos p₁, p₂ e p₃ - dissipador I.

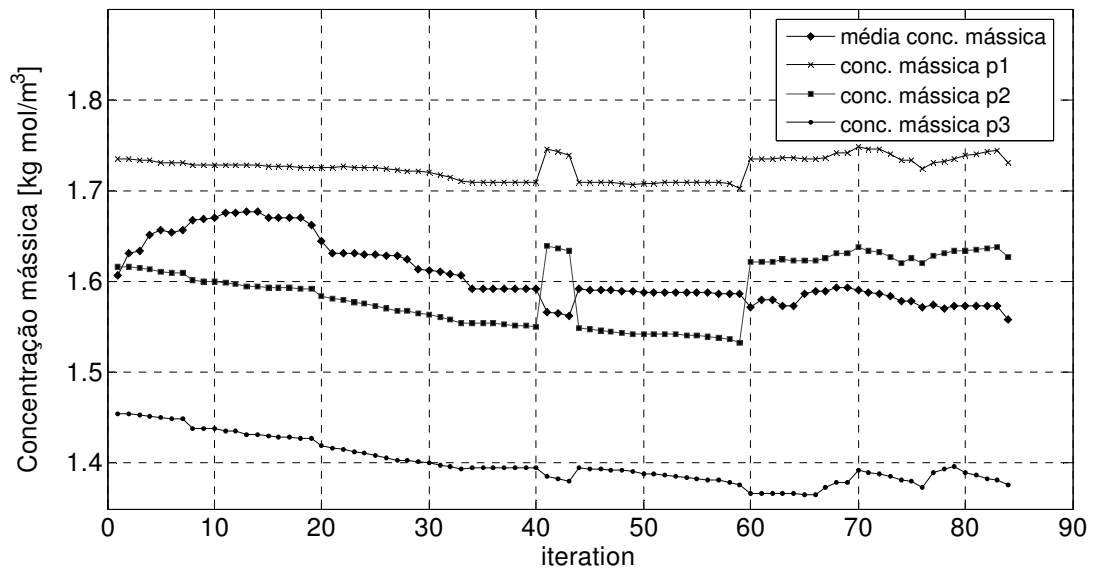


Figura 8.7 – Histórico da concentração mássica por iteração para os pontos p₁, p₂ e p₃ - dissipador I.

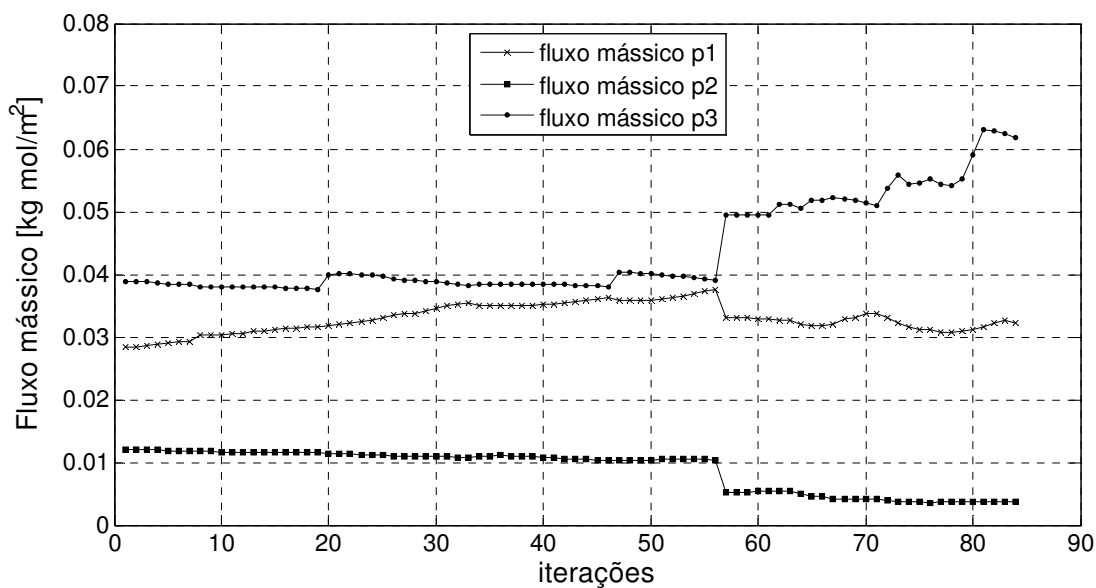


Figura 8.8 – Histórico do fluxo mássico por iteração para os pontos p_1 , p_2 e p_3 - dissipador I.

8.2 Dissipador II

Em dissipadores porosos a transferência de calor e massa ocorre de maneira simultânea em uma geometria estabelecida em projeto. Para este caso a geometria foi definida como retangular e discretizada com 100 elementos de contorno descontínuos lineares integrados com quatro pontos de Gauss. A Figura 8.9, ilustra as condições de contorno prescritas as quais foram sempre aplicadas sobre dois elementos. Os demais contornos estão isolados, bem como, todos os furos abertos durante o processo de otimização. Os coeficientes de condutividade e de difusividade são ajustados em $1\text{W/m}^\circ\text{C}$ e $1\text{m}^2/\text{h}$, respectivamente. Este caso será estudado com fatores peso de $\alpha_M = \alpha_H$ e $\alpha_M = 0.4$ e $\alpha_H = 0.6$, sendo assim, a prioridade maior é imposta para o caso de transferência de calor.

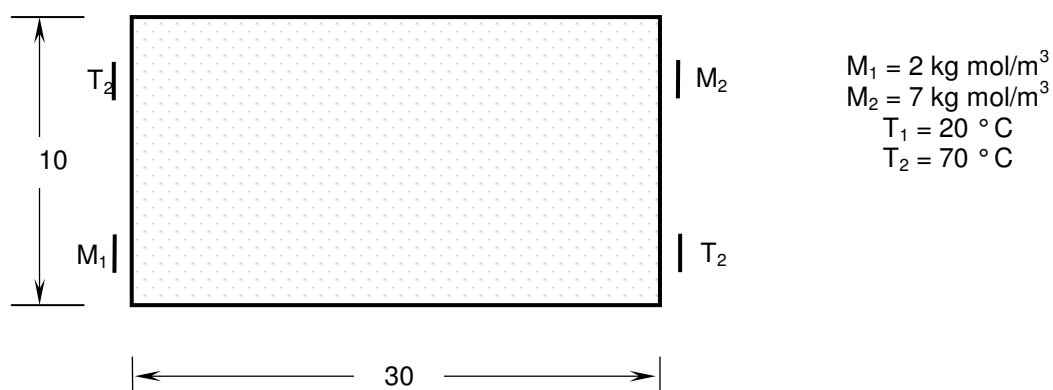


Figura 8.9 Condições de contorno para o dissipador II.

Na Figura 8.10 é possível acompanhar o comportamento da topologia à medida em que o processo iterativo evolui. Neste caso os fatores peso impostos para a transferência de calor e para a transferência de massa são iguais, o que justifica uma topologia final quase-simétrica. A quase-simetria deve-se ao fato de que as sensibilidades no domínio de ambos os casos são distintas e uma combinação linear das mesmas não representa plenamente a perfeita união destas a ponto de resultar em uma topologia final simétrica.

Na Figura 8.11 demonstra-se satisfatoriamente o que acontece quando impõe-se um fator peso α_H maior, ou seja, houve uma remoção de material maior nos cantos inferior esquerdo e superior direito do dissipador, favorecendo o fluxo de calor, em detrimento do fluxo de massa.

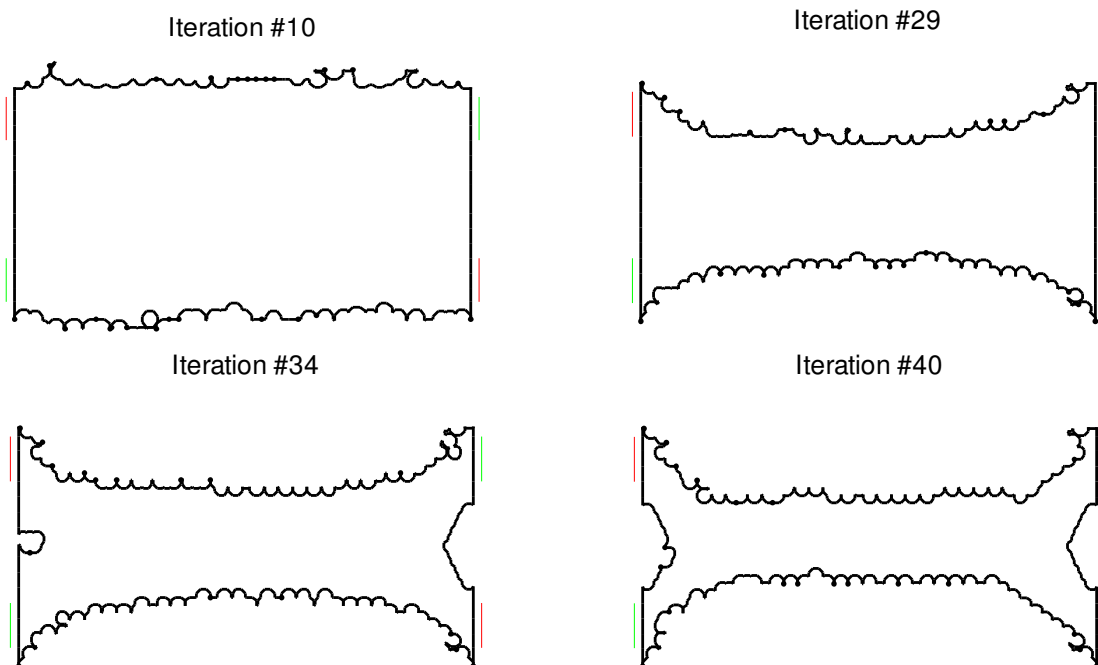


Figura 8.10 – Evolução topológica para $\alpha_M = \alpha_H = 0.5$ para o dissipador II.

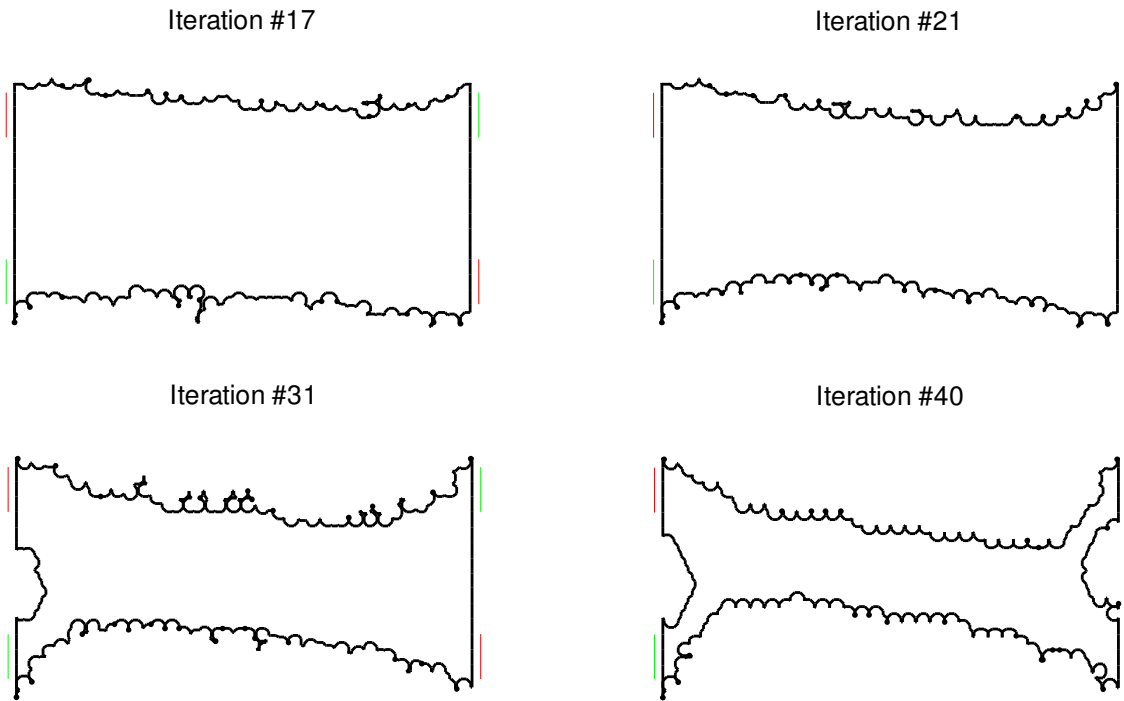


Figura 8.11 - Evolução topológica para $\alpha_M = 0.4$ e $\alpha_H = 0.6$ para o dissipador II.

8.3 Comentários adicionais: Otimização de compromisso

Neste último capítulo direcionou-se o processo de otimização utilizando $D_T + MEC$ para solucionar problemas de otimização de compromisso. O foco principal concentrou-se na otimização de sólidos submetidos à transferência de calor e massa simultaneamente, ambos fenômenos governados pela equação de Laplace. A fórmula empregada para relacionar as sensibilidades entre ambos os domínios foi àquela proposta por Rosvany et al. (1995),

$$\alpha^i = w_M \alpha_M^i + w_H \alpha_H^i \quad (8.5)$$

Esta equação, no entanto, não é sensível o suficiente para resultar em um valor exato da sensibilidade do domínio. Esta afirmação deve-se ao fato de que este tipo de formulação não utiliza a equação de calor e de massa acopladas, pois a solução para cada um dos problemas é obtida de maneira independente. Devido a este fator, é importante considerar que este tipo de otimização de compromisso não é sensível à variação da viscosidade do fluido com o aumento de temperatura.

9 CONCLUSÃO

Este trabalho objetivou essencialmente desenvolver procedimentos numéricos de otimização de sólidos governados pela equação Poisson. O MEC foi adotado como método de solução numérica das equações por apresentar características atrativas aos processos de otimização aqui discutidos. Para a obtenção das topologias foram utilizados dois métodos de otimização: algoritmos genéticos e a derivada topológica. Sendo assim, este capítulo resume as contribuições deste trabalho para a área de otimização bem como algumas sugestões para a continuidade da pesquisa em áreas correlatas.

9.1 Contribuições deste trabalho

Este trabalho divide-se em duas etapas: A primeira refere-se à otimização de sólidos empregando os algoritmos genéticos. A questão a ser respondida era se seria possível gerar topologias ótimas em transferência de calor, apenas controlando a movimentação de cavidades dentro do domínio. Para alcançar este objetivo foi desenvolvido um código numérico para AG. Alguns exemplos numéricos foram resolvidos com o código AG + MEC e comprovaram a capacidade do presente método na obtenção de topologias ótimas. No entanto, foram encontrados problemas como o aumento do custo computacional devido a penalizações durante o processo de otimização. Para solucionar estes problemas, implementou-se um método alternativo denominado matriz de chaveamento, o qual teve como objetivo diminuir o número de variáveis, comprimento dos cromossomos e as penalizações. Este método também se torna atrativo por ser uma alternativa aos métodos *hard-kill*, onde uma vez retirado o material não é mais possível repô-lo no mesmo local do domínio em estudo. Também é importante salientar que o MEC, por não necessitar de malha no domínio, torna-se muito atrativo para métodos de natureza combinatória como AG, o qual depende de muito tempo computacional. Neste contexto conclui-se que os resultados obtidos, provenientes da implementação do MEC + GA (matriz de chaveamento), apresentaram-se de maneira satisfatória com uma razoável redução no custo computacional. Mesmo com a implementação da matriz de chaveamento, a solução de problemas com malhas muito refinadas tornava o uso do código de AG inviável pelo tempo de processamento. Como alternativa ao AG, foi também investigada a análise de sensibilidade topológica via D_T , mantendo-se o MEC como método de solução numérica. Os resultados obtidos foram comparados com os da literatura, e apresentando boa concordância. A formulação da D_T até então estava explorada para materiais de comportamento isotrópico. Então surgiu o objetivo de realizar a análise de sensibilidade em materiais ortotrópicos. Para evitar novas deduções da D_T foi implementada a transformação de coordenadas lineares, o que permitiu

otimizar sólidos de comportamento não isotrópico. Os resultados apresentados demonstraram que esta transformação de coordenadas obteve êxito ao gerar topologias ótimas as quais puderam ser comparadas e validadas com outros exemplos disponíveis na literatura. Fontes de calor também foram consideradas e os resultados apresentaram-se bastante satisfatórios.

Finalmente, foi abordada a otimização de compromisso, ilustrada para problemas de transferência de calor e massa simultâneos. Apesar da simplicidade da formulação empregada para relacionar as sensibilidades entre ambos os domínios (Rosvany et al., 1995), os resultados obtidos foram coerentes com o fenômeno físico. Neste tipo de procedimento de otimização as equações governantes não estão acopladas, desconsiderando assim o efeito da temperatura sobre a viscosidade do fluido e sobre a condutividade térmica.

De um modo em geral, este trabalho contribuiu para o enriquecimento de exemplos referentes a casos de otimização em problemas térmicos, já que estes são muitos escassos (Li et al., 1999; Li et al., 2004), apesar de sua importância. Este tema é potencializado quando se refere a problemas térmicos anisotrópicos ou ortotrópicos, devido a sua dedução matemática ser mais complexa e, portanto, normalmente limitada a problemas mais simples. Neste contexto, este trabalho contribuiu com propostas e alternativas para resolver distintos tipos de problemas de otimização de sólidos empregando tanto AG quanto D_T .

9.2 Recomendações para continuidade da pesquisa

Os resultados obtidos com o emprego de métodos de otimização de sólidos submetidos a equação de Poisson realizadas ao longo deste trabalho não esgotam as potencialidades deste tema. De fato é possível mencionar algumas questões que podem vir a ser alvo de futuras pesquisas.

É imperativo o emprego do AG + MEC + matriz de chaveamento na solução de problemas com malhas mais refinadas para obtenção de topologias ótimas utilizando-se a otimização em paralelo. Com a otimização em paralelo espera-se uma redução significativa no custo computacional, conferindo assim, uma alternativa aos métodos *hard-kill*. Um estudo comparativo mais aprofundado pode ser realizado entre os resultados futuros e as soluções obtidas no presente trabalho via DT + MEC. No entanto, esta permanece sendo uma abordagem *hard-kill*, com todas as suas deficiências. Assim, a investigação e implementação de alternativas para inserção de material é indispensável para solução de problemas não-convexos².

² Recentemente, Giusti et.al. (2006) estenderam o conceito de derivada topológica também para inserção de material, denominando a formulação de derivada configuracional.

Outro aspecto relevante consiste em aplicar AG + MEC + matriz de chaveamento em plantas industriais para solução de problemas em tempo real, como por exemplo, na determinação do perfil de temperatura para a cura de um material a compressão (Felipe et.al., 2007).

Neste trabalho foi implementada uma maneira elegante, ao empregar-se a técnica de transformação de coordenadas, para obter a análise de sensibilidade via DT em sólidos de comportamento não isotrópico. Deduzir a formulação da DT para meios não isotrópicos preencheria esta lacuna e contribuiria com esta linha de pesquisa. Ainda neste contexto seria de significativa contribuição calcular a DT para problemas transientes considerando um conjunto de funções custo mais geral.

Para a otimização multi-critério encoraja-se a consideração do acoplamento das equações governantes, considerando assim o efeito da temperatura sobre a viscosidade do fluido. Uma vez que haja tal acoplamento o código numérico torna-se mais genérico para solucionar uma classe mais vasta de problemas.

Ainda, a implementação de sub-regiões permitiria otimizar domínios compostos por mais de um material, bem como o uso de elementos quadráticos para maior precisão da solução. Um método de remoção de material mais elaborado também deve ser implementado, visando a geração de geometrias mais suaves ou, alternativamente, um procedimento de suavização de contornos entre cada iteração do processo.

Finalmente convém enfatizar que quaisquer das possibilidades sugeridas acima são passíveis de implementação imediata no código desenvolvido neste trabalho. Por outro lado, deve-se ponderar a implementação do mesmo em linguagens compiladas como C ou C++, a fim que aumentar sua eficiência para solução de problemas maiores.

BIBLIOGRAFIA

Atrek, E., 1989. "SHAPE: a program for shape optimization of continuum structures", In: Brebbia, C.A., Hernandez, S. (Eds.), **Computer Aided Optimum Design of Structures: Applications**. Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 135-144.

Arpaci, Vedat S., Kao, Shu-Hsin, Selamet, Ahmet., 1990. **"Introduction to heat transfer"**, Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Arora, J.S., **"Introduction to Optimum Design"**, McGraw-Hill, 1989.

Banerjee, P. K., 1994. **"The Boundary Element Methods in Engineering"**, Ed. McGraw-Hill, New York, United States.

Barreto, J. M., 1997. **"Inteligência Artificial no Limiar do Século XXI"**, 1° ed. Florianópolis.

Bendsøe, M. P. & Kikuchi N., 1988. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, vol. 71, pp. 197-224.

Bendsøe, M.P., 1995. **"Optimization of Structural Topology, Shape, and Material"**, Springer, New York.

Bendsøe, M. P., Sigmund, O., 2003. **"Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications"**, 2° ed., Ed. Springer, Berlin.

Bezerra, C. D. Evolução interativa e a aplicação de algoritmos genéticos no design de produtos. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

Bittencourt, G., 1998. **"Inteligência artificial – Ferramentas e teorias"**, Florianópolis : Editora da UFSC.

Brebbia, C.A., Dominguez, J., 1977. "Boundary Elements for Potential Problems", **Appl. Math. Modelling**, vol.1, pp.372-378.

Brebbia, C.A., Telles J.C.F., Wrobel, L.C., 1984. **"Boundary elements techniques: theory and applications in engineering"**. Berlin : Springer – Verlag, 1984.

Brebbia, C. A. and Dominguez, J., 1992. **"Boundary Elements an Introductory Course"**, Ed. McGraw-Hill, New York, United States.

Burgener G., Storti, M., 2004. "Implementación paralela de un algoritmos genéticos para la optimización de um dispositivo de refrigeración", XXIII Mecânica Computacional, Bariloche, Argentina.

Capello, F., Mancuso, A., 2003. “A genetic algorithm for combined topology and shape optimizations”, **Computer-aided design**, vol.35, pp.761-769.

Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., 1959. “**Conduction of heat in solids**”, 2nd ed. Oxford: Clarendon.

Céa J., Garreau, S., Guillaume P., Masmoudi, M., 2000. “The shape and topological optimizations connection”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol.188, pp. 713-726.

Cheng, A. H.-D., Cheng, D.T., 2005. “Heritage and early history of the boundary element method”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 29, pp. 268-302.

Chu, D.N., Xie, Y. M., Hira, A., Steven, G. P., 1996. “Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints”, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 21, pp. 239-251.

Chu, D.N., Xie, Y. M., Hira, A., Steven, G. P., 1997. “On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints”, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 24, pp.197-212.

Cerrolaza, W., Annicchiarico, W., Martinez, M., 2000, “Optimization of 2D boundary element models using b-splines and genetic algorithms”, **EABM - Engineering Analyses with boundary Elements**, vol. 24, pp.427-440.

Donoso, A., Sigmund, O., 2004. “Topology optimization of multiple physics problems modeled by Poisson’s equation”, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 1, pp. 169-184.

Eschenauer, H.A., Schumacher, A., 1993. “Bubble-method : a special strategy for finding best possible initial designs. In: Gilmore. B.J., Hoeltzel, D.A., Azarm, S., Eschenauer, H.A. (Eds.), **Advances in Design Automation**, vol.2, pp.437-443.

Eschenauer, H.A., Kobelev, V.V., Schumacher, A., 1994. “Bubble method for topology and shape optimization and structures”, **Struct. Opt.** , vol.8, pp.42-51.

Feijóo, R., Novotny, A., Padra, C & Taroco, E., 2002. “The topological-shape sensitivity analysis and its applications in optimal design”. In Idelsohn, S., Sonzogni, V., & Cardona, A., eds. **Mecánica Computacional**, vol. XXI, pp. 2687-2711, Santa-Fé-Paraná, Argentina.

Feijóo, R., Novotny, A., Taroco, E., & Padra, C., 2003. “The topological derivative for the poisson’s problem”, **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, vol.13, pp. 1825-1844.

Garreau, S., Guillaume, P. & Masmoudi, M., 1998. "The topological gradient", **Research report**, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, France.

Giusti, S.M., Novotny, A.A., Feijóo, R.A., Taroco, E. e Padra C., 2006. "**Análise de sensibilidade configuracional no problema de elasticidade linear bidimensional e suas aplicações em otimização topológica**". Relatório interno. Laboratório Nacional de Computação Científica. Rio de Janeiro, Brasil.

Goldberg, D.E., 1989. "**Genetic Algorithms in search optimization and machine learning Reading**", Addison-Wesley.

Haftka, R. T., Gurdal, Z., 1999. "**Elements of Structural Optimazation**", Kluwer Academic Publishers.

Holland, J. H., 1975. "**Adaptation in natural and artificial systems**", Michigan: University of Michigan Press.

Holland, B.J.C., 2000. "**Algoritmos genéticos adaptativos: Um estudo comparativo**". Dissertação de mestrado, USP.

Hsieh, M., Ma, C., 2002. "Analytical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources". **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 45, pp. 4117–4132.

Jeng T., Tzeng S., Hung, Y., 2006. „An analytical study of local thermal equilibrium in porous heat sinks using fin theory". **International journal of heat and mass transfer**, vol. 49, pp. 1907-1914.

Katsifarakis, K.L., Karpouzou, D.K, Theodossiou, N., 1999. "Combined use of BEM and genetic algorithms in groundwater flow and mass transport problems". **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 23, pp. 555–565.

Kicinger, R., Arciszewski T., Jong, K.D., 2005. "Evolutionary computation and structural design: A survey of the state-of-the-art", **Computers & Structures**, vol 83, Issues 23-24 pp. 1943-1978.

Kita, E., Hisashi, T., 1997. "Shape optimization of continuum structures by genetic algorithm and boundary element method", **Engineering Analysis with boundary elements**, vol.19, pp.129-36.

Lee, C., J.R., Cho, 1995. "Optimal positioning of heating lines in a compression molding die using the boundary element method", **Engineering Analysis with boundary elements**, vol.15, pp.261-266.

Li, Q., Steven, G., Querin, O., & Xie, Y., 1999. “Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization”, **Int. J. Heat and Mass Transfer**, vol. 42, pp. 3361-3371.

Li, Q., Steven, G., Querin, O., 2000. “Structural topology design with multiple thermal criteria”, **Eng. Comput.**, vol 17, pp. 715–734.

Li, Q., Steven, G., Xie, Y., & Querin, O., 2004. “Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conduction fields”, **Int. J. Heat and Mass Transfer**, vol. 47, pp. 5071-5083.

Ma, C., Chang, S., 2004. “Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media”. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 47, pp. 1643–1655.

Marczak, R.J., 2005. “Topology Optimization and Boundary Elements – A Preliminary Implementation for Linear Heat Transfer”, **XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2005**, Brazilian Assoc. for Comp. Mechanics & Latin American Assoc. of Comp. Methods in Engineering, Guarapari - ES, Brazil

Mera, N.S., Elliott, L., Ingham, D.B, 2004. “Numerical solution of a boundary detection problem using genetic algorithms”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 28, pp.405–411.

MATLAB, 2004. “User's Guide version 7”, The MathWorks, Inc.

Nakanishi, Y., 2001. “Application of homology theory to topology optimization of three-dimensional structures using genetic algorithm”, **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, vol.190, pp.3849–3863.

Novotny, A., Feijóo, R., Taroco, E., & Padra, C., 2003. “Topological-shape sensitivity analysis”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 192, pp. 803–829.

Novotny,A., 2003. “**Análise de sensibilidade topológica**”, Tese de doutorado, LNCC.

Osher, S., Sethian, J.A., 1988. “Front propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations”, **J. Comput. Phys.**, vol. 79, pp. 12–49.

Özisik, M.N.,1980. “**Heat Conduction**”, New York: John Wiley.

Park, Y. K., 1995. “**Extensions of optimal layout design using the homogenization method**”, Tese de doutorado, University of Michigan.

Poon, K.C., 1979. “Transformation of heat conduction problems in layered composites from anisotropic to orthotropic”, **Lett. Heat Mass Transfer**, vol. 6, pp. 503–511.

Poon, K.C., Tsou R.C.H., Chang Y.P., 1979. “Solution of anisotropic problems of first class by coordinate-transformation”, **J. Heat Transfer**, vol. 101, pp. 340–345.

Rodriguez, J., Seireg, A.A., 1992. “Algorithmic rule-based methodology for shape synthesis: 2-D cases”, **Comput. Aid. Des.**, vol.24, pp.411-424.

Rozvany, G.I.N., Sigmund, O., Birker, T., 1995. “Optimal Design of Composite and Fibre Reinforced Plates”, **Optimal Design with advanced materials**, pp.293-309.

Russell, D.M., Manoochehri, S.P., 1989. “A two-dimensional rule-based shape synthesis method”. In: Ravani, B. (Ed.), **Advances in Design Automation**, vol. 2, pp. 217-223.

Sigmund, O., Peterson, J., 1998. “Numerical Instabilities in Topology Optimization: A survey on procedures dealing with checkboards, mesh-dependencies and Local minima”, **Structural optimization**, vol.16, pp. 68-75, 1998.

C. A. Santos, J. A. Spim and A. Garcia, 2003. “Mathematical modeling and optimization strategies(genetic algorithm and knowledge base) applied to the continuous casting of steel”, **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, vol. 16, pp. 511-527.

Shiah Y.C., and Tan C.L., 1997. “BEM treatment of two-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping”, **Engineering Analysis with boundary elements**, vol. 20, pp. 347-351.

Shiah Y.C., Tan C.L., 2004. “BEM treatment of three-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping”, **Engineering Analysis with boundary elements**, vol. 28, pp. 43-52.

Schumacher, A., 1996. “**Topologieoptimierung von bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien**”, Tese de doutorado, FOMMAS-Report Nr T09-01.96. Universtität der Siegen, Siegen, Alemanha.

Sokolowski, J., Zolesio, J.P., 1992. “**Introduction to shape optimization – Shape sensitivity Analysis**”, Springer-Verlag.

Sokolowski, J. & Zochowski, A., 1997. “On topological derivative in shape optimization”, **Research Report 3170**, INRIA-Lorraine, France.

Sokolowski, J., Zochowski, A., 1999. “On the topological derivative in shape optimization”, **Journal and control optimization**, vol.37, pp.1251-1272.

Tai, K., Fenner, R.T., 1999. "Optimum shape and topology design using the boundary element method", **International Journal of Solids and Structures**, vol. 36, pp. 2021-2040.

Telles, J.C.F., 1987. "A Self-Adaptative Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Elements Integrals", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, pp. 959-973.

Xie, Y.M., Steven, G.P., 1993. "A simple evolutionary procedure for structural optimization", **Comput. Struct.**, vol.49, pp. 885-896.

Xie, Y.M., Steven, G.P., 1996. "Evolutionary structural optimization for dynamic problems", **Comput. Struct.**, vol.58, pp. 1067-1073.

Yulin, M., Xiaoming, W., 2004. "A level set method for structural topology optimization and its applications", **Advances in Engineering Software**, vol.35, pp. 415-441.

Wang, S.Y., Tai, K., 2005. "Structural topology design using genetic algorithms with a *bit-array* representation", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 194, pp. 3749-3770.

Wang, M.Y., Wei, P., 2005. "Topology Optimization with Level Set Method Incorporating Topological Derivative" *cilamce*.

APÊNDICE A - Dedução da equação integral e solução fundamental para o MEC

A ponderação do resíduo da equação de Poisson pode ser escrita:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) w d\Omega$$

onde w é uma função peso. Integrando por partes os termos em x e y resulta em:

$$\int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - b w \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\Gamma = 0$$

Da integração por partes, resultou um termo na equação anterior que é a derivada de u com respeito a normal, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial n}$ que mais tarde será denominada q . Integrando novamente por partes, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} u - b w \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma$$

Como a equação (A.3) é igual à equação (A.1) pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\Gamma = 0$$

A equação acima pode ser expressa na forma conhecida como *Teorema de Green*, da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w - (\nabla^2 w) u d\Omega = + \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{A.1})$$

Considerando que o contorno do domínio está dividido em duas partes Γ_1 e Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$) sob as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} & \text{em } \Gamma_1 \\ q &= \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} & \text{em } \Gamma_2 \end{aligned}$$

Substituindo-se as condições de contorno descritas acima é possível reescrever a equação (A.1) como:

$$\int_{\Omega} \left\{ (\nabla^2 w) u - b w \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{A.2})$$

Após impor as condições de contorno na equação (A.2), integramos novamente por partes para obter a equação original de Laplace.

$$\int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - b w \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma + \dots$$

$$\dots + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0$$

Dividindo-se a primeira integral sob Γ em dois termos (Γ_1 e Γ_2), o segundo destes novos termos pode ser cancelado com a última integral em (A.2), o que resulta em:

$$\int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - b w \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w q d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0$$

Integrando-se novamente,

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u - b)w\} d\Omega - \int_{\Gamma_2} w q d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0$$

Rearranjando os termos da equação acima em relação à parte do contorno as quais as integrais se referem, tem-se:

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u - b)w\} d\Omega - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q})w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{A.3})$$

É visível que o objetivo está em satisfazer a equação diferencial no domínio mais as integrais no contorno. A equação (A.3) relaciona o potencial u e o fluxo q sobre o contorno, na ausência de fontes ($b = 0$):

$$\frac{1}{2} u_i(x) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(x, \zeta) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x) u^*(x, \zeta) d\Gamma$$

As funções u^* e q^* são as soluções fundamentais em x devido a uma carga unitária aplicada em ζ .

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{r} d\Gamma$$

$$r = \|x - \zeta\|$$

APÊNDICE B - Elementos de contorno lineares descontínuos

A utilização de elementos de contorno descontínuos tem, por diversos fatos, se tornado uma prática mais comum nos últimos tempos. Um desses fatos é a fácil resolução do problema de cantos vivos, onde há duas normais em um mesmo ponto, podendo ter assim duas temperaturas ou fluxos em problemas potenciais. Neste trabalho optou-se por se trabalhar com os elementos descontínuos linear onde a descontinuidade implica que os nós físicos e os nós geométricos dos extremos do elemento não estão necessariamente no mesmo lugar. Ou seja, o elemento descontínuo é formado por nós físicos e nós geométricos diferentes. É importante lembrar que a utilização de elementos descontínuos faz com que as funções de interpolação utilizadas para os nós geométricos necessitem de uma correção para que sejam válidas para os nós físicos.

Nos elemento lineares, as temperaturas u_i e os fluxos q_i são representados por funções lineares em função dos seus valores nodais. Os valores de u_i e q_i em qualquer ponto no elemento podem ser definidos pelas seguintes equações:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{u}^j \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{p}^j \quad (\text{B.2})$$

onde as funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi); \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (\text{B.3})$$

Se os dois nós deste elemento são deslocados (recuo) das suas posições iniciais pelas distâncias a e b respectivamente, como mostra a Figura 2.2, a equação (B.1) pode ser particularizada para os nós deslocados.

Para os nós deslocados escreve-se,

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_a) & \phi_2(\xi_a) \\ \phi_1(\xi_b) & \phi_2(\xi_b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

sendo que $\xi_a = \left(\frac{2a}{l}\right) - 1$ e $\xi_b = 1 - \left(\frac{2b}{l}\right)$ são as coordenadas locais para os pontos nodais.

Substituindo-se (B.4) em (B.1) pode-se obter o valor de u em qualquer ponto sobre o elemento em termos dos valores nodais.

$$u(\xi) = [\phi_1 \ \phi_2] Q \begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Também é necessário que se faça uma correção em relação aos nós deslocados através de uma matriz denominada Q .

$$Q = \frac{1}{l-a-b} \begin{bmatrix} l-b & -a \\ -b & l-a \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

As mesmas relações escritas para \mathbf{u} podem ser, a partir da expressão (B.3), reescritas para o fluxo \mathbf{q} .

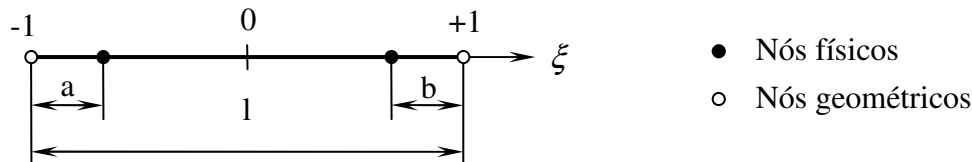


Figura B.1 –Elemento descontinuo linear.

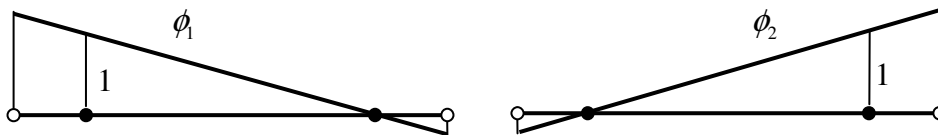


Figura B.2 – Funções de interpolação modificadas para elemento descontinuo linear.

A aplicação de técnicas de tratamento de cantos são muito úteis em problemas nos quais as variáveis assumem um valor infinito no final do elemento, muito comum de acontecer em

problemas relacionados à mecânica da fratura. Historicamente três técnicas de tratamento de canto são freqüentemente empregadas como alternativa aos elementos contínuos:

1) Arredondamento de canto: propõe a substituição do nó por outros dois novos nós, próximos a ele (Figura B.3). O inconveniente desta abordagem é que a proximidade entre P_1 e P_2 que piora o condicionamento das matrizes, com conseqüente degradação da precisão.



Figura B.3 – Técnicas de modelagem de canto.

2) Uso de elementos descontínuos: a idéia parte do princípio de que o problema acima existe, porque nos elementos de contorno os valores nodais utilizados na interpolação das variáveis, são definidos nos mesmos pontos em que os nós geométricos foram estabelecidos. Resulta daí que o fluxo é indeterminado, já que a direção normal em um canto da geometria não tem direção única. A Figura B.4 sugere a idéia dos elementos descontínuos aplicada a um elemento linear. Supondo que o elemento esteja num canto da geometria, os nós da função podem ser arbitrariamente deslocados de seus extremos.

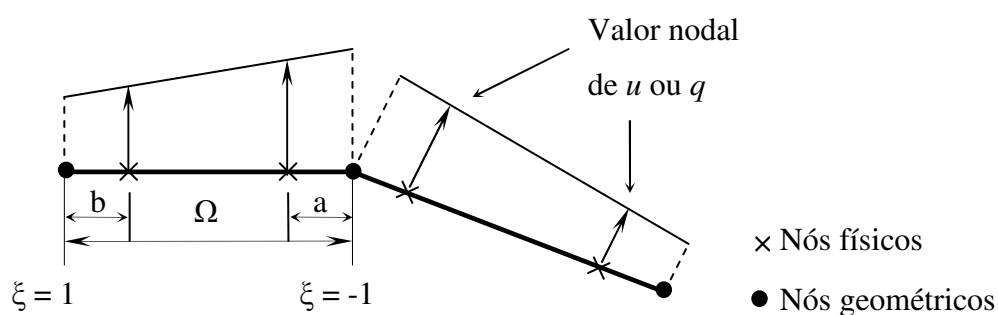


Figura B.4 – Elementos descontínuos.

3) Uso de elementos parcialmente descontínuos: Os elementos descontínuos podem introduzir discontinuidades desnecessárias em porções regulares da geometria. Para estes casos é recomendado a utilização dos elementos parcialmente descontínuos. Eles permitem a discontinuidade da função apenas em pontos selecionados como, por exemplo, os cantos da geometria. Um dos nós da função é mantido em $\xi = +1$ ou $\xi = -1$, conforme a necessidade de garantir a continuidade (Figura B.5).

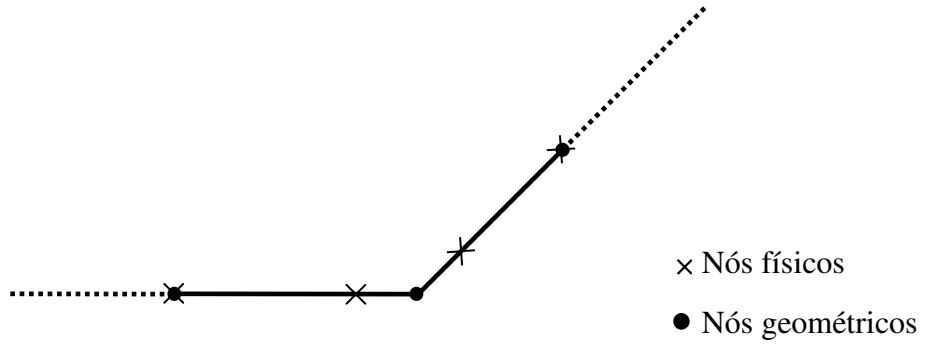


Figura B.5 – Elementos parcialmente descontínuos.

APÊNDICE C - Problemas com fontes de calor

Em muitas aplicações práticas é necessário considerar fontes de calor distribuídas no domínio, então a equação diferencial antes homogênea (Laplace) agora leva em consideração a função b . A equação governante estabelece-se como:

$$\nabla^2 u = b \quad \text{em} \quad \Omega$$

sendo b uma função conhecida e de posição.

Usualmente aplicam-se duas técnicas para considerar aos efeitos de fonte distribuída no domínio:

- Cálculo de integrais de domínio por integração de células;
- Cálculo de integrais de domínio através da transformação em integrais de contorno.

No cálculo de integrais de domínio por integração de células a idéia consiste em dividir o domínio em células internas, conforme Figura C.1. Neste caso há uma inconveniência que consiste exatamente na discretização do domínio, porém, com esta técnica é possível aplicar cargas térmicas somente em uma parcela do domínio em estudo.

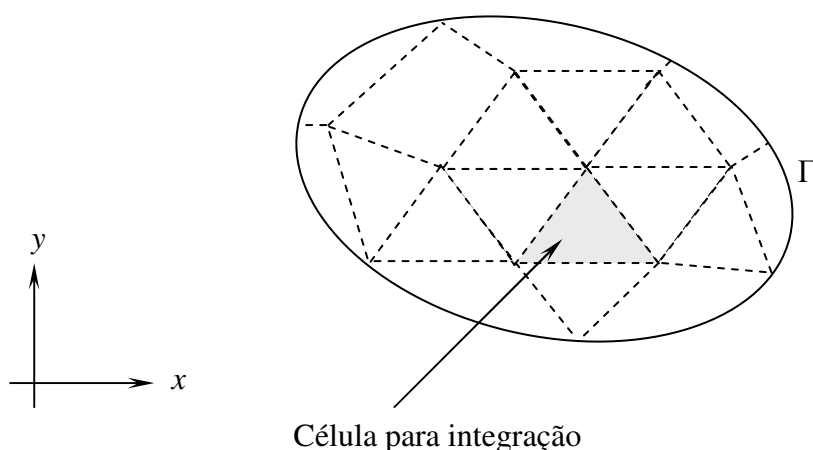


Figura C.1 – Discretização com células internas.

A segunda técnica para calcular a equação de Poisson, e a qual será utilizada neste trabalho, consiste em aplicar o Teorema de Green e transformar a integral de domínio em uma integral de contorno equivalente. Isto é possível quando a função b é harmônica, ou seja, satisfaz $\nabla^2 b = 0$. Introduzindo uma função v^* definida por,

$$u^* = -\nabla^2 v^* \quad (\text{C.1})$$

e aplicando o Teorema de Green,

$$\int_{\Omega} (b \nabla^2 v^* - v^* \nabla^2 b) d\Omega = \int_{\Gamma} (b \frac{\partial v^*}{\partial n} - v^* \frac{\partial b}{\partial n}) d\Gamma$$

sabendo que $\nabla^2 b = 0$, obtém-se,

$$\int_{\Omega} (b u^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (b \frac{\partial v^*}{\partial n} - v^* \frac{\partial b}{\partial n}) d\Gamma \quad (\text{C.2})$$

A solução fundamental de alta ordem v^* pode ser calculada através da eq.(C.1), com exceção da derivada direcional $\frac{\partial v^*}{\partial n}$ todos os demais termos da eq.(C.2) são conhecidos. A solução da eq.(C.1) é dado por,

$$\nabla^2 v^* = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

em coordenadas polares (r, θ) a eq. (C.1) é expressa por,

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v^* = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

integrando uma vez,

$$r \frac{dv^*}{dr} = \int \frac{r \ln r}{2\pi} dr = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + C_1$$

$$\frac{dv^*}{dr} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right) + \frac{C_1}{r}$$

integrando novamente,

$$v^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{4} \ln r - \frac{r^2}{8} - \frac{r^2}{8} \right) + C_1 \ln r + C_2$$

A escolha de $C_1 = C_2 = 0$ resultam em:

$$v^* = \frac{r^2}{8\pi} (\ln r - 1)$$

Para determinar-se $\frac{\partial v^*}{\partial n}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial n} &= \nabla v^* n = \frac{\partial v^*}{\partial x} n_x + \frac{\partial v^*}{\partial y} n_y \\ \frac{\partial v^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial v^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} n_y \\ &= \left(\frac{r}{4\pi} \ln r - \frac{r}{8\pi} \right) \left(\frac{x-\zeta}{r} \right) n_x + \left(\frac{r}{4\pi} \ln r - \frac{r}{8\pi} \right) \left(\frac{y-n}{r} \right) n_y \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} (2 \ln |x-\zeta| - 1) (x-\zeta) n \end{aligned}$$

com a eq.(C.2), obtém-se B_j

$$B = - \int_{\Omega} b(\vec{x}) u^*(\vec{x}, \vec{\zeta}) d\Omega = \sum_{j=1}^E \int_{\Gamma} (b(\vec{x}) \frac{\partial v^*(\vec{x}, \vec{\zeta}_j)}{\partial n} - v^*(\vec{x}, \vec{\zeta}_j) \frac{\partial b(\vec{x})}{\partial n}) d\Gamma$$

A integral de contorno de B_1 até B_n pode ser divididas em sub-integrais correspondentes a cada elemento de contorno, ou seja,

$$B_1 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \dots + I_n$$

Para o elemento que contém o ponto fonte e o ponto campo, a ortogonalidade $(\vec{x} - \vec{\zeta}) n = 0$, ou seja, neste caso $I_1 = 0$. Agora basta resolver a seguinte equação matricial,

$$Hu - B = Gq$$

Este trabalho deu origem às seguintes publicações científicas:

Trabalhos submetidos a congressos:

- [1] Anflor, C., Santanna, H., Marczak, R. e Cisilino, A.: *Topology optimization of 2D potential problems using boundary elements and genetic algorithms*, em: Selvadurai, A.P.S., Tan C.L. e Aliabadi, M.H. (editores) - International Conference on Boundary Element Techniques VI, pp.305-310, 2005.
- [2] Anflor, C., Cisilino, A. e Marczak, R.: *Searching topological optimization of 2D potential problems with genetic algorithms and BEM*, em: Proc. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005.
- [3] Anflor, C., Cisilino, A. e Marczak, R.: *Looking for optimal topologies in 2D potential problems with genetic algorithms and BEM*, 18th International Congress of Mechanical Engineering COBEM 2005. Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Nov. 2005.
- [4] Anflor, C., Marczak, R. e Cisilino, A.: *Using Genetic Algorithms and Boundary Elements to optimize the topology of 2D potential problems*, em: proc. XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2005, Brazilian Assoc. for Comp. Mechanics & Latin American Assoc. of Comp. Methods in Engineering, Guarapari - ES, Brazil.
- [5] Anflor, C., Marczak, R. e Cisilino, A.: *Genetic algorithms and boundary elements: some applications in optimization of 2d potential problems*, em: proc. VIII Congresso Argentino de Mecânica Computacional – MECOM 2005, Associação Argentina de Mecânica Computacional, Buenos Aires – Bs.As., Argentina.
- [6] Anflor, C., Marczak R. 2006. Topology optimization and boundary elements: application of topological derivatives to solve potential problems in orthotropic materials. Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering -- ENCIT 2006 Braz. Soc. of Mechanical Sciences and Engineering - ABCM, Curitiba, Brazil, Dec. 5-8, 2006.
- [7] Anflor, C. Marczak R. 2006. *Topology optimization of heat transfer problems in orthotropic media using boundary elements*. XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2006, Brazilian Assoc. for Comp. Mechanics & Latin American Assoc. of Comp. Methods in Engineering, Belém - PA, Brazil.

Artigos submetidos para revista:

[8] Felipe, A., Amorim, H., Anflor, C., et al., 2007. Predictive process dynamics in manufacturing, Submitted to ASME Journal of Manufacturing Engineering, September 2007.

Artigos para revista em elaboração:

[9] Anflor, C. Marczak R., 2006. *Topology optimization and boundary elements: application of topological derivatives to solve potential problems in orthotropic materials*, International Journal of Heat and Mass Transfer.

[10] Anflor, C. Marczak R., 2006. A boundary element approach for shape and topology design in heat transfer problems. Engineering Analysis with Boundary Elements.

[11] Anflor, C., Cisilino, A. e Marczak, R., *Some examples of topology optimization using BEM and Genetic algorithm*. Engineering Analysis with Boundary Elements.