UM ESTUDO DE QUADRATURAS NUMÉRICAS

Josadaque da Silva Nenê[1]
Liliane Basso Barichello[2]

1. Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional, UFRGS
2. Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS

INTRODUÇÃO

O estudo de esquemas de integração numérica é tópico de grande interesse em pesquisas de matemática aplicada devido a sua aplicação em diversos problemas, como os de transporte de radiação [1].

Neste trabalho, são introduzidas as fórmulas de quadraturas de Newton-Cotes e as fórmulas de quadraturas de Gauss [2, 3].

As primeiras se caracterizam por utilizar nós igualmente espaçados, no intervalo de integração, e pela aproximação do integrando por um polinômio interpolador passando por estes nós.

As fórmulas de quadraturas de Gauss não utilizam nós igualmente espaçados, mas estes são escolhidos de modo que, utilizando *n* nós, a fórmula produz resultado exato para polinômios de grau *2n – 1* ou menor. As derivações destas fórmulas se baseiam em propriedades de polinômios ortogonais, como os de Legendre e os de Chebyshev [2, 3].

DESENVOLVIMENTO

Foram estudadas as deduções das fórmulas de Newton-Cotes e também o erro de truncamento e o grau de precisão associados. Em particular, foram investigadas as mais conhecidas, que são a regra do trapézio, a regra de Simpson e a regra de Simpson 3/8, que se distinguem no que diz respeito ao erro de truncamento e grau de precisão associados – que são dois tópicos relevantes [2, 3].

Também foram estudadas formas de se calcular os nós e pesos associados a quadratura de Gauss-Legendre, visto que originalmente são obtidos via solução de sistemas não-lineares.

RESULTADOS

Uma forma de se calcular os nós utilizados pela quadratura de Gauss-Legendre é através da fórmula de recorrência

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \qquad (1)$$

pela qual podem ser obtidos os polinômios de Legendre, e por meio de manipulações [1], reescrevê-la como

$$x^2\hat{P}_n(x) = \sqrt{a_{n+2}a_{n+1}}\hat{P}_{n+2} + (a_{n+1} + a_n)\hat{P}_n(x) + \sqrt{a_n a_{n-1}}\hat{P}_{n-2}, \qquad (2)$$

em que $P_n(x) = (2/h_n)^{1/2}\hat{P}_n(x)$, $a_n = n^2/(h_{n-1}h_n)$ e $h_n = 2n+1$, para *n = 0, 2, ..., N/2* (n par).

A partir da equação (2) conseguimos transformar o problema de encontrar os nós utilizados na quadratura em um problema de autovalores para uma matriz tridiagonal simétrica. Por exemplo, se quisermos obter os nós para *n = 8*, a partir da equação (2) temos [1]

$$H\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{v}$$

em que

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & \sqrt{a_1a_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{a_1a_2} & a_2+a_3 & \sqrt{a_3a_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_3a_4} & a_4+a_5 & \sqrt{a_5a_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_5a_6} & a_6+a_7 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \hat{P}_4(x) \\ \hat{P}_6(x) \end{bmatrix},$$

uma vez que $\hat{P}_8(x) = 0$.

Por fim, foi utilizada a linguagem de programação *Fortran 95* para a implementação do cálculo dos nós e pesos utilizados na quadratura de Gauss-Legendre.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Foram estudados aspectos teóricos fundamentais para entendimento e uso de esquemas de quadraturas numéricas, em particular quadraturas Gaussianas. Foi implementado código para geração de nós e pesos do esquema.

Como continuidade, esquemas de quadratura multidimensionais que utilizam a quadratura Gaussiana serão estudados para uso na solução de problemas de transporte de partículas.

REFERÊNCIAS

[1] BARICHELLO, L. B.. Explicit Formulations for Radiative Transfer Problems. In: Helcio R B Orlande;Olivier Fudyin;Denis Maillet;Renato M Cotta. (Org.). **Thermal Measurements and Inverse Techniques**. Boca Raton: CRC Press, 2011, v. , p. 541-562.
[2] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
[3] ISAACSON, Eugene; KELLER, Herbert Bishop. **Analysis of Numerical Methods**. New York: Wiley, 1966.