

Modelos Matemáticos em Macroeconomia



Vilmar Mário Oro Boff

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Av. Bento Gonçalves, 9500 - Prédio 43-111 - Agronomia Porto Alegre - RS - BRASIL CEP:
91509-90
Vilmarboff1@gmail.com



Resumo

A análise macroeconômica de um determinado país sempre foi algo pertinente no estudo da economia, a qual claramente se dá ao envolver questões que afetam no dia-a-dia da população e em seu modo de vida, ao passo em que analisa variáveis globais da economia. Ao procurarmos por um modelo para melhor detalhar esse tema, vem o Modelo Macroeconômico de Solow-Swan. O presente trabalho tem a finalidade de estudar a teoria de crescimento econômico de Solow-Swan. Nosso objetivo é entender as características matemáticas do modelo em termos de diferentes funções de produção e também aplicá-lo aos dados da economia brasileira.

1. Introdução

O Modelo de Solow-Swan [1] foi introduzido em 1956 por Robert Solow e Trevor Swan, que ganharam o Prêmio Nobel de Economia em 1987. Pertencendo a teoria neoclássica, explica os fatores que incidem no crescimento econômico no longo prazo. Desse modo, o presente trabalho explica como se dá o modelo e também suas aplicações em funções de produção já existentes. Por conseguinte, faz-se uma análise de dados reais brasileiros do período datado entre 1996 e 2014, com base nas funções de produção de Leontief, Cobb-Douglas a dois parâmetros e Cobb-Douglas a três parâmetros.

2. Modelo de Solow-Swan

Para a construção do modelo, são feitas algumas hipóteses:

- O gasto público é nulo;
- A balança comercial encontra-se equilibrada;
- A poupança das famílias é igual ao investimento das empresas;
- A taxa de poupança é constante;
- Existem dois fatores de produção: capital (K) e trabalho (L);
- O investimento líquido é igual ao investimento bruto menos a depreciação;
- A população da economia é equivalente a sua força laboral (L);
- Supõe-se que a população da economia cresce exponencialmente;
- Existe uma função F de produção $Y = F(K, L)$, onde Y é o Produto Interno Bruto;
- Essa função de produção F é neoclássica.

Dessa forma, usando que a função F é homogênea de grau 1, podemos escrever:

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \quad (1)$$

Consideramos $y = \frac{Y}{L}$ a produção per capita e $k = \frac{K}{L}$ o capital per capita. A partir disso reescrevemos (1) como $y = f(k)$. Por conseguinte, temos o teorema abaixo:

Teorema 2.1 (Equação Fundamental de Solow). *Se a economia cumpre os pressupostos definidos pelo Modelo de Solow-Swan, a equação fundamental de Solow ($k'(t)$) é:*

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n + \delta)k(t), \quad (2)$$

onde s é a taxa de poupança, n é a taxa de crescimento da população e δ é a depreciação do capital.

3. Funções de Produção

O conceito de **função de produção** está relacionado a procura por uma função que seja do modo

$$Y = F(K, L). \quad (3)$$

e que levará os fatores capital (K) e força laboral (L) no Produto Interno Bruto (Y).

Função de Produção de Cobb-Douglas

A função de Produção de Cobb-Douglas [4] foi publicada em 1928 por Charles Cobb e Paul Douglas. É a função dada por

$$F(K, L) = AK^\alpha L^\beta, \quad (4)$$

onde α e β são parâmetros que representam o peso de K e L na distribuição da renda e A representa o progresso tecnológico. Quando consideramos $\alpha + \beta = 1$, ou seja, $\beta = 1 - \alpha$, temos a **função de Cobb-Douglas a três parâmetros**.

Uma importante propriedade dessa função de produção é a de que

$$\frac{\partial Y}{\partial K} \frac{1}{Y} = \alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial L} \frac{1}{Y} = \beta. \quad (5)$$

Nota-se então que α e β fitam exatamente o conceito de elasticidade[5].

Função de Produção de Leontief

Também conhecida como função de coeficientes fixos, foi publicada em 1941 pelo economista Wassaly Leontief como:

$$F(K, L) = \min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\}, \quad (6)$$

aonde a (unidade de capital para produzir um bem) e b (unidade de trabalho para produzir um bem) são coeficientes fixos.

4. Resultados e Discussão

Tendo o Modelo e as funções de produção citadas satisfazendo a Equação de Solow, passamos agora a testar as funções de produção na economia brasileira, mesmo que essa não satisfaça as hipóteses do Modelo de Solow-Swan.

Para isso, coletamos dados brasileiros [2] [3] e usamos os Softwares Maple e Scilab.

A aplicação dos dados na função de Cobb-Douglas a três parâmetros nos dá o seguinte gráfico:

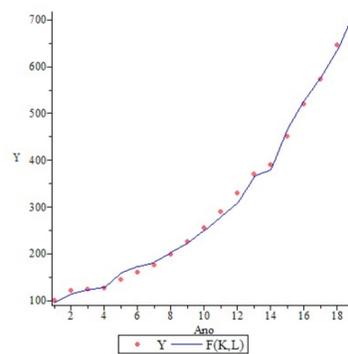


Figura 1: Implementação dos dados brasileiros na função de Cobb-Douglas a três parâmetros.

A aplicação dos dados na função de Cobb-Douglas a dois parâmetros nos dá o seguinte gráfico:

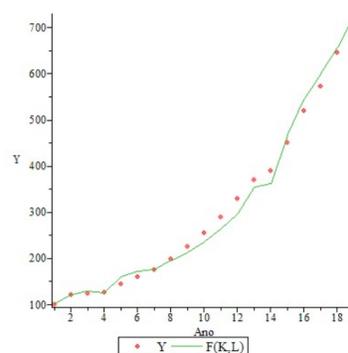


Figura 2: Implementação dos dados brasileiros na função de Cobb-Douglas a dois parâmetros.

Uma implementação das duas funções junto nos dá o gráfico abaixo com a função a três parâmetros dada pela linha azul e a função a dois parâmetros na linha verde:

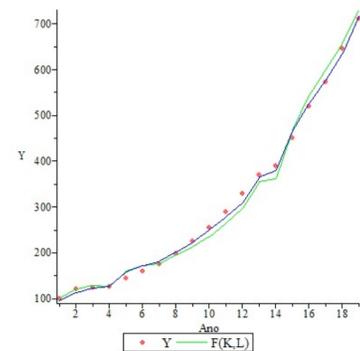


Figura 3: Implementação dos dados brasileiros na função de Cobb-Douglas a três parâmetros (azul) e a dois parâmetros (verde).

A aplicação dos dados na função de Leontief nos dá o seguinte gráfico:

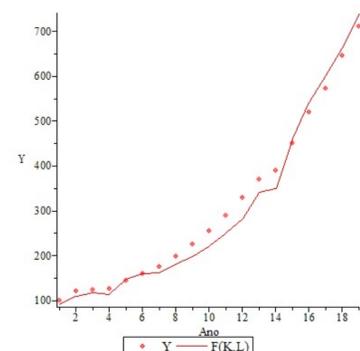


Figura 4: Implementação dos dados brasileiros na função de Leontief.

5. Conclusão

Após a identificação dos parâmetros das funções de produção que melhor fitam os dados brasileiros, conclui-se, empiricamente, que a economia brasileira está de acordo com o Modelo de Solow-Swan, ao passo em que as funções cumprem a Equação de Solow e não cumprem as hipóteses

Referências

- [1] Gutiérrez, L. M. . *Modelos Matemáticos em Macroeconomia*, 2015.
- [2] IPEA, URL: <http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx>, Acesso em 06/04/2017
- [3] IBGE, URL: <http://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx>, Acesso em 06/04/2017.
- [4] Piketty, T. . *O Capital no Século XXI*. Editora Intrínseca LTDA, Rio de Janeiro, 2014.
- [5] Vasconcellos, M.A.S. e Garcia, E.M.. *Fundamentos de Economia*, Editora Saraiva, 2ª edição, São Paulo, 2004.