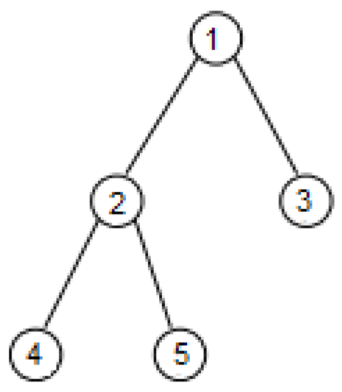
Localização de Autovalores em Grafos Árvore

Rafael Jacobs Kehl (Bolsista PROPESQ - CNPq)
Carlos Hoppen (Professor Orientador)
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
rafael.j.kehl@hotmail.com, choppen@ufrgs.br

1. Grafo

Um grafo é a representação matemática de uma rede qualquer. Ele é composto por vértices e arestas, que são pares não ordenados de vértices. O estudo dessas redes é chamado de Teoria dos Grafos. Neste trabalho, estamos interessados nos grafos árvore, que não possuem ciclos e são conexos, ou seja, para qualquer par de vértices há um caminho entre eles.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Um grafo árvore e sua matriz de adjacências.

2. Objetivo

A Teoria Espectral de Grafos estuda a relação existente entre o espectro – conjunto de autovalores e suas respectivas multiplicidades algébricas – de matrizes associadas a grafos e propriedades estruturais dos grafos. A matriz mais comumente utilizada para representar um grafo é a matriz de adjacências, cujo espectro é dito espectro do grafo.
Neste contexto, D. P. Jacobs e V. Trevisan desenvolveram o algoritmo $Diagonalize(A, x)$[1], onde A é a matriz de adjacências de um grafo árvore e x um número real qualquer, que dá como output uma matriz diagonal D congruente a $B_x = A + xI$. Em posse desta ferramenta e da Lei da Inércia de Sylvester, enunciada no Teorema 1, podemos demonstrar uma forma eficiente de localizar os autovalores da matriz de adjacências de um grafo árvore qualquer.

Definição 1 *Dizemos que duas matrizes R e S são congruentes se existe uma matriz não singular P que satisfaz $R = P^TSP$.*

Teorema 1 ***(Lei da Inércia de Sylvester)*** *Duas matrizes reais simétricas de ordem $n \times n$ são congruentes se e somente se elas têm o mesmo número de autovalores negativos e o mesmo número de autovalores positivos.*

Teorema 2 *Seja $D = Diagonalize(A, -x)$. Temos então:*

1. *O número de entradas positivas de D é o número de autovalores de A maiores que x.*
2. *O número de entradas negativas de D é o número de autovalores de A menores que x.*
3. *O número de entradas nulas na diagonal de D é a multiplicidade de x como autovalor de A.*

Neste trabalho foi implementado o Algoritmo de Jacobs e Trevisan para grafos árvore e será apresentada a demonstração do Teorema 2 fazendo uso da Lei da Inércia de Sylvester. Além disso, executaremos o algoritmo e apresentaremos algumas aplicações interessantes do Teorema 2.

3. Algoritmo

Seja T uma árvore com n vértices e A sua matriz de adjacência. Escolha um vértice arbitrário para ser a raiz da árvore, então enumere os vértices $v_1, ..., v_n$ tal que se v_i é filho de v_j então $i < j$. Dessa forma a raiz será sempre v_1. Considere agora a matriz $B_\alpha = A + \alpha I$ para um escalar α. Note que o valor diagonal $d(v)$ de todos os vértices é $d(v) = \alpha$. O objetivo do algoritmo é obter a matriz diagonal D congruente a B para fazer uso do Teorema 2 e localizar os autovalores de T.
Devido à ordenação dos vértices, é impossível que a matriz receba entrada não nulas onde antes eram nulas[3]. Assim, a principal característica do algoritmo é que pode ser executado diretamente na árvore, procedendo das folhas para a raiz.
Aplicando o algoritmo (das folhas para a raiz), temos então dois casos, se todos os filhos v_i do vértice v_j possuem $d(v_i) \neq 0$ e se algum dos filhos de v_j possui $d(v_i) = 0$. No primeiro caso a entrada de $d(v_j)$ recebe $d(v_j) - \sum_{c \in C} d(c)$, onde C é o conjunto dos vértices filhos de v_j. O segundo caso é mais complexo. Quando um ou mais filhos de v_j possui $d(v) = 0$, então escolhe-se um v_i filho de v_j com $d(v_i) = 0$ e atribuímos então $d(v_j) = -\frac{1}{2}$ e $d(v_i) = 2$. Após isso, desconectamos v_j de seu pai, caso não seja a raiz, e continuamos a execuçao do algoritmo.

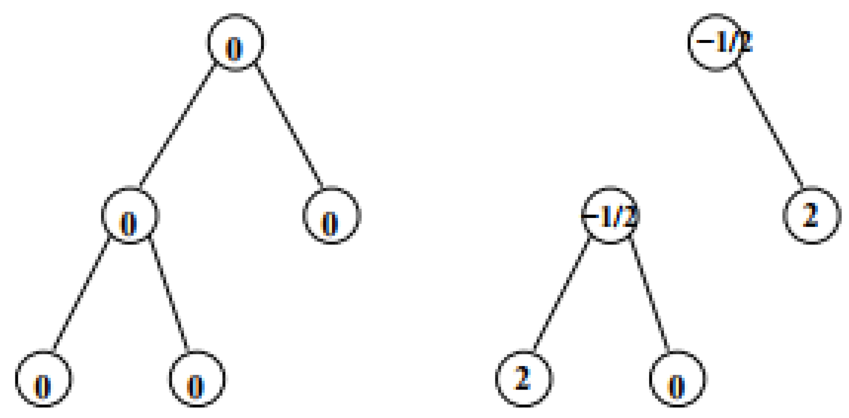


Figura 2: Execução do algoritmo para $\alpha = 0$ em uma árvore simples. Na direita temos a árvore antes da execução do algoritmo e na esquerda a floresta resultante. Podemos então concluir que a árvore original possui dois autovalores positivos e um nulo.

Referências

[1] D. P. Jacobs and V. Trevisan Locating the Eigenvalues of Trees *Elsevier*, 2001.

[2] Reinhardt Diestel Graph Theory (2nd edition) *Springer-Verlag*, 1:2–26, 12:251–277, 2000.

[3] N. Abreu, R. Del-Vecchio, V. Trevisan, C. Vinagre. Teoria Espectral de Grafos – Uma Introdução. *IIIº Colóquio de Matemática da Região Sul.*, 6:145–172, 2014.

pro pesq
Pró-Reitoria de Pesquisa - UFRGS
CNPq