Aumento máximo da conectividade algébrica

- André Luiz Giordani
- Orientador: Luiz Emilio Allem

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

- Dado um grafo, sua representação através da matriz laplaciana fornece o espectro laplaciano. O segundo menor autovalor dessa matriz é chamado de conectividade algébrica.
- A conectividade algébrica é uma invariante que nos permite determinar quão conexo é um grafo.
- Na literatura encontramos diversas aplicações deste conceito na modelagem de problemas em diferentes áreas, como por exemplo, a melhora da confiabilidade de uma determinada rede.

Objetivo

- O objetivo do trabalho é analisar grafos árvores, inicialmente de diâmetro pequeno, estudar os efeitos que as perturbações causam no grafo e encontrar a aresta que causa o maior aumento da conectividade algébrica.

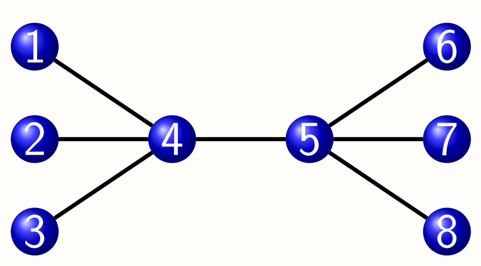
Definições

- As definições a seguir foram retiradas de [1]:
- Um grafo é um objeto formado por dois conjuntos denotados por (V, E) em que V é um conjunto arbitrário não vazio e E é um subconjunto de V e seus elementos são pares não ordenados do conjunto V.
- O diâmetro de um grafo é a maior distância entre dois vértices do grafo.
- Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos.
- A matriz laplaciana de um grafo $G = (V, E)$, denotada por $L(G)$ é a matriz de dimensão $n \times n$ definida:

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} grau(v_i), & \text{se } i = j; \\ -1, & \text{se } i \neq j \text{ e } (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & \text{se } i = j \text{ e } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

- Utilizando a notação $\lambda_2(G)$ denotamos o segundo menor autovalor da matriz laplaciana $L(G)$ associada ao grafo $G = (V, E)$, o vetor associado a λ_2 é denominado Vetor de Fiedler[2].

Método

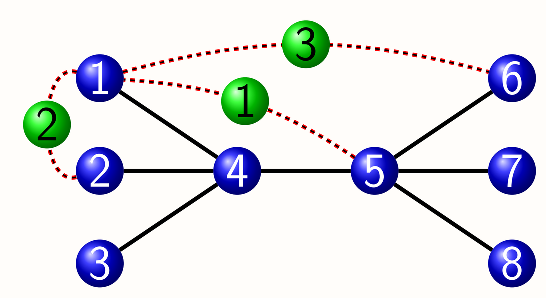


- Ao analisar a árvore de 8 vértices e 7 arestas e diâmetro 3, temos as seguintes propriedades:

Tabela 1: Propriedades do grafo

λ_2	Vetor de Fiedler
0.3542487	-0.3825277
	-0.3825277
	-0.3825277
	-0.2470177
	0.2470177
	0.3825277
	0.3825277
	0.3825277

- Note que pela simetria do grafo, o Vetor de Fiedler o particiona em 2, sendo que as arestas simétricas dos dois lados do grafo possuem os mesmos valores absolutos.
- Pela simetria do grafo, existem 3 formas distintas de adicionar uma aresta:



- Abaixo mostramos a perturbação que cada adição de aresta causa na conectividade algébrica e no Vetor de Fiedler:

Tabela 2: As perturbações das arestas (1), (2) e (3)

λ_2 (1)	λ_2 (2)	λ_2 (3)
0.5069425	0.3542487	0.5107114

- Observe que adicionar a aresta (2) não causou nenhuma perturbação no grafo e que adicionar a aresta (3) causou a maior perturbação.

Tabela 3: Perturbação ao adicionar a aresta (3)

λ_2	Vetor de Fiedler
0.5107114	0.0920862
	0.4684945
	0.4684945
	0.2292290
	-0.2292290
	-0.0920862
	-0.4684945
	-0.4684945

- Analisando agora uma árvore de diâmetro 4, com 11 vértices e 10 arestas:

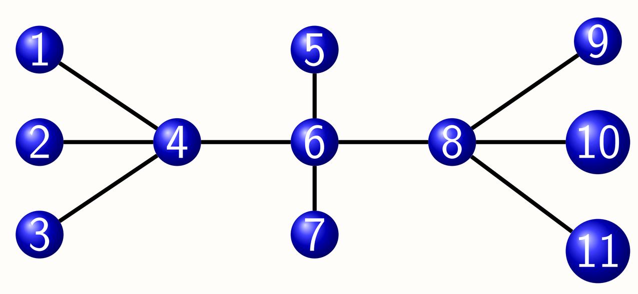


Tabela 4: As propriedades do grafo

λ_2	Vetor de Fiedler
0.2087122	-0.3713325
	-0.3713325
	-0.3713325
	-0.2938309
	0
	0
	0
	0.2938309
	0.3713325
	0.3713325
	0.3713325

- Nota-se que nesse grafo, o vetor de Fiedler particionou em 3 grupos diferentes, um contendo apenas vértices negativos, um contendo vértices nulos e outro contendo vértices positivos.
- Devido a simetria de seus lados, existem 7 arestas diferentes que podemos adicionar para testar a perturbação causada na conectividade algébrica:

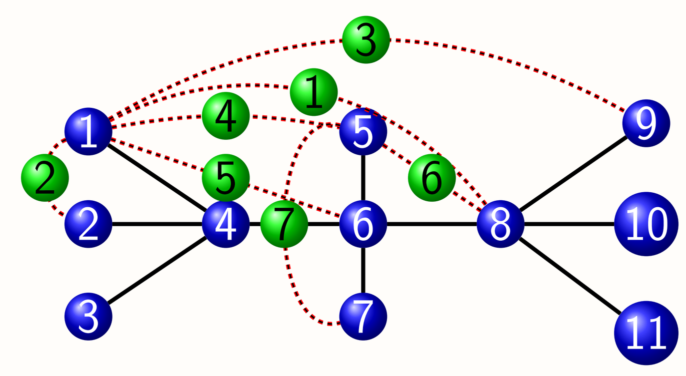


Tabela 5: As conectividades algébricas respectivas a cada aresta

λ_2 (1)	λ_2 (2)	λ_2 (3)	λ_2 (4)
0.3932596	0.2087122	0.3819660	0.2382231
λ_2 (5)	λ_2 (6)	λ_2 (7)	
0.2546994	0.2337511	0.2087122	

- Note que adicionar as arestas (2) e (7) não causaram perturbação na conectividade algébrica do grafo e adicionar a aresta (1) foi a mais eficiente.

Conclusões

- Para os grafos testados, podemos afirmar:
- Nem todas as arestas adicionadas ao grafo, aumentam a sua conectividade.
- Existem arestas que aumentam mais a conectividade do que outras, o que nos faz concluir que adicionar uma aresta aleatória pode não ser a melhor opção para buscar o aumento máximo da conectividade algébrica.
- Notamos também que, adicionar arestas entre vértices pertencendo ao mesmo particionamento do Vetor de Fiedler, causa a menor (ou nenhuma) perturbação na conectividade algébrica.

Referências

[1] DIESTEL, R.; Graph Theory. Edição Eletrônica. Nova Iorque: Springer, 2000. 313 p.

[2] FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. Czechoslovak Mathematical Journal. v. 23 (98), p. 298 - 305, 1973.