Localização de Autovalores de Grafos Unicíclicos e Árvores

Rodrigo L. Schuller
Orientadora: Dra. Virgínia M. Rodrigues

Resumo

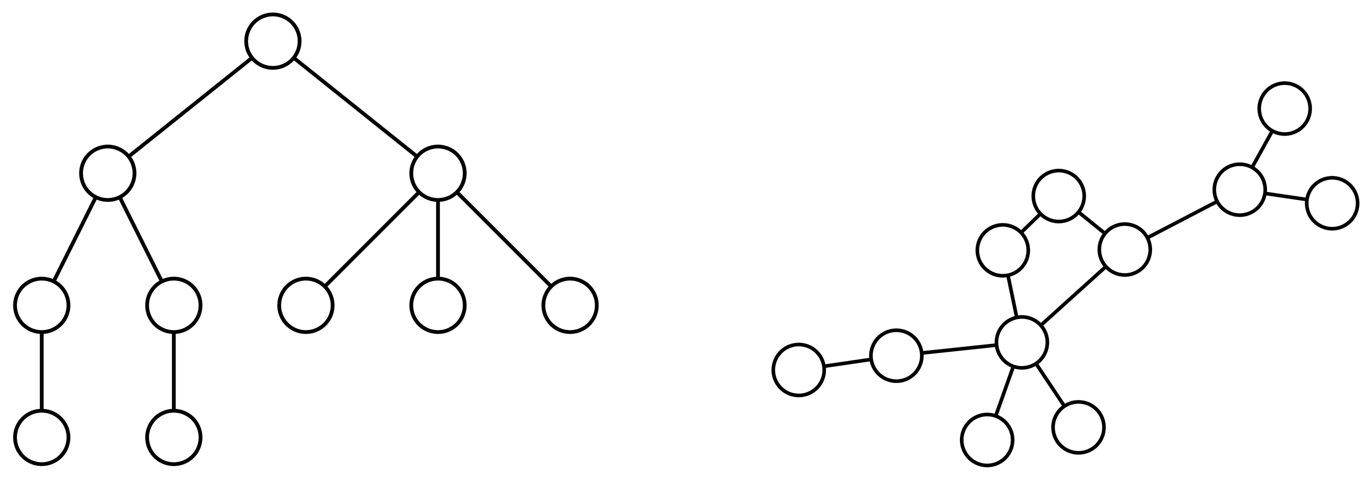
Nesse trabalho, o algoritmo $Diagonalize(T, \alpha)$ e algumas de suas variações foram ***implementados pela primeira vez****, no programa Newgraph. Além disso, desenvolvemos ferramentas que realizam* ***buscas computacionais*** *em espectros de árvores e geram relatórios em PDF ou LaTeX.*

1. Algoritmo *Diagonalize*

Em 2011, D. Jacobs e V. Trevisan publicaram o algoritmo $Diagonalize(T, \alpha)$ [1], que recebe uma árvore T e um valor real α e retorna a quantidade de autovalores menores que α, maiores que α e maiores que α. Mais tarde, o algoritmo foi adaptado para outros tipos de grafos e matrizes [2, 3].

2. Grafos

Um **grafo** (simples) é um par ordenado $G = (V, E)$ que consiste em um conjunto finito V de vértices e um conjunto E de arestas, que são subconjuntos de cardinalidade 2 de V. Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos, enquanto um **grafo unicíclico** é um grafo que possui apenas um ciclo.



(a) uma árvore

(b) um grafo unicíclico

3. Matrizes de um Grafo

Dado um grafo $G = (V, E)$, podemos associá-lo às seguintes matrizes:
Matriz de adjacência, de ordem $|V|$, cujas entradas são

$$A_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j\} \in E \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

Matriz laplaciana, dada por $L := D - A$, em que A é a matriz de adjacência e D a matriz diagonal dos graus de cada vértice.

Matriz laplaciana normalizada, de ordem $|V|$, cujas entradas são

$$\mathcal{L}_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e } deg(v_i) \neq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{deg(v_i)deg(v_j)}}, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

Matriz laplaciana sem sinal, dada por $Q := D + A$, em que A é a matriz de adjacência e D a matriz diagonal dos graus de cada vértice.

4. Implementação do Algoritmo *Diagonalize*

Com a implementação no *Newgraph*, o usuário pode ver os valores gerados pelo algoritmo enquanto desenha o grafo, como ilustrado pela Figura 1. O programa processa grafos unicíclicos e árvores, com opção de escolher o tipo de matriz (adjacência, laplaciana, laplaciana normalizada ou laplaciana sem sinal).

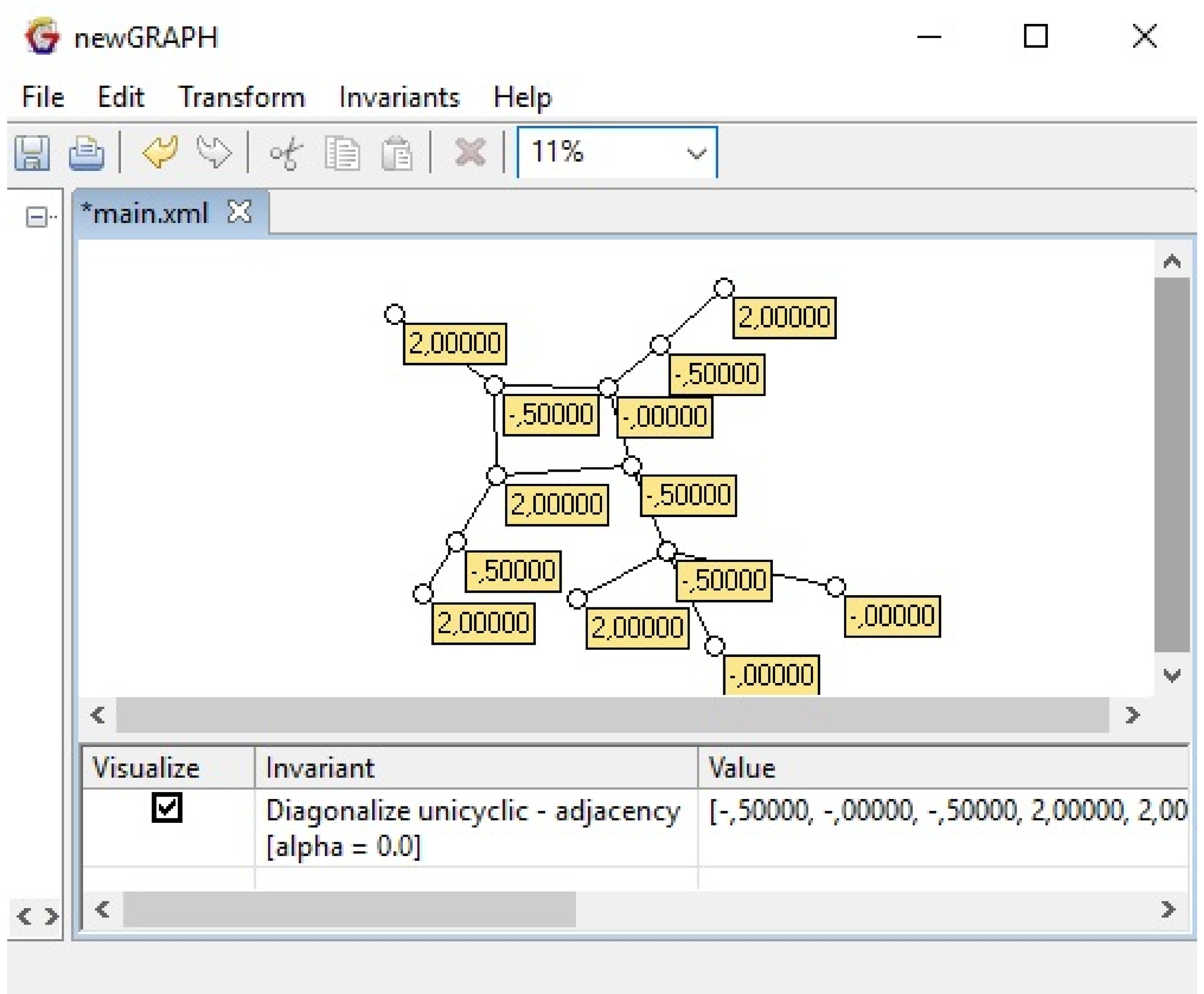


Figura 1: Plugin rodando no Newgraph.

5. Ferramentas de Buscas Computacionais

Também foram desenvolvidas ferramentas de buscas espectrais, que **percorrem todas as árvores de um determinado tamanho**.
Como exemplo, abaixo apresentamos dois histogramas gerados pelas ferramentas:

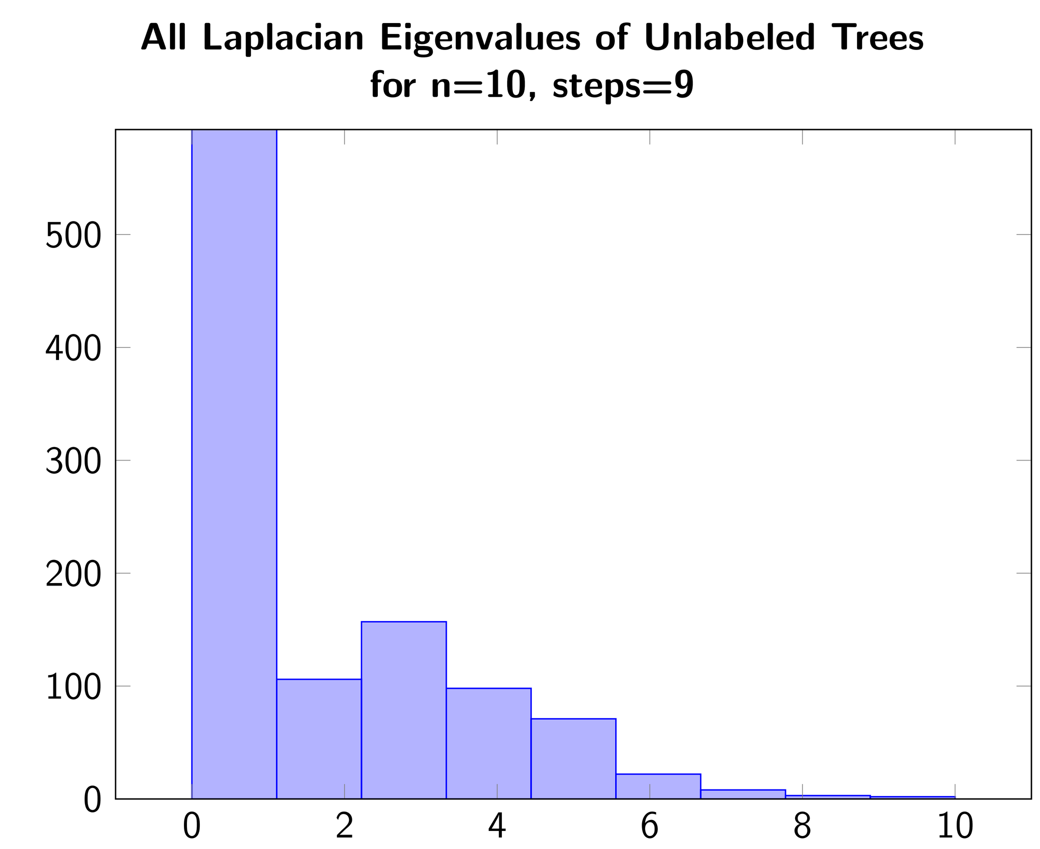


Figure: Computed in 0.40 s

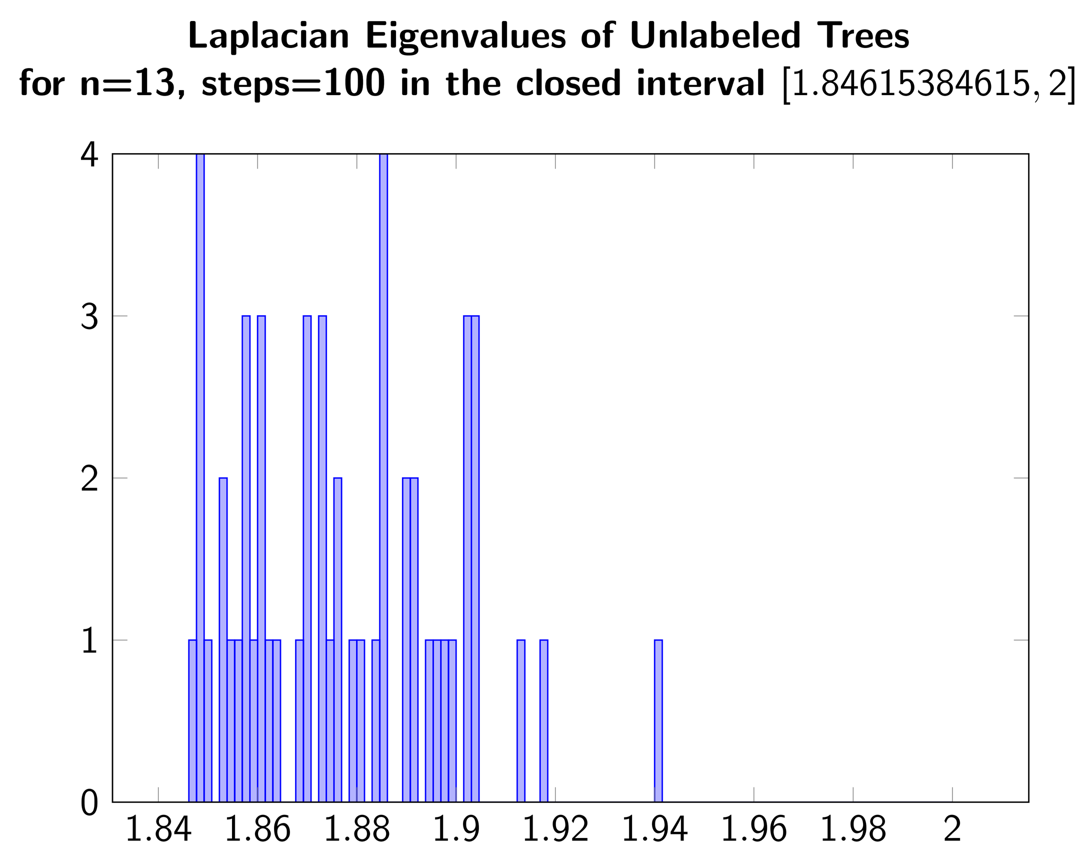


Figure: Computed in 7.15 s

Referências

[1] D. P. Jacobs and Vilmar Trevisan. Locating the eigenvalues of trees. *Linear Algebra and its Applications*, 434 (2011) 81-88.

[2] R. O. Braga. *Localização de Autovalores de àrvores e de Grafos Unicíclicos*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

[3] Rafaela O. Silva e Virgínia M. Rodrigues. Localização de Autovalores e Propriedades Espectrais de Centopeias Unicíclicas. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.