Grafos coespectrais pela laplaciana normalizada

Guilherme Simon Torres

Orientador: Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

A **teoria espectral dos grafos** é a área da **teoria dos grafos** interessada em determinar propriedades estruturais de um grafo por meio do estudo das propriedades de suas representações matriciais, como a matriz de adjacência e a matriz laplaciana.

Espectro de um Grafo	É o conjunto dos autovalores de determinada representação matricial do grafo. Aqui, damos atenção à matriz laplaciana normalizada.

Dizemos que dois grafos são coespectrais com relação a uma matriz quando ambos têm o mesmo espectro nessa representação matricial.

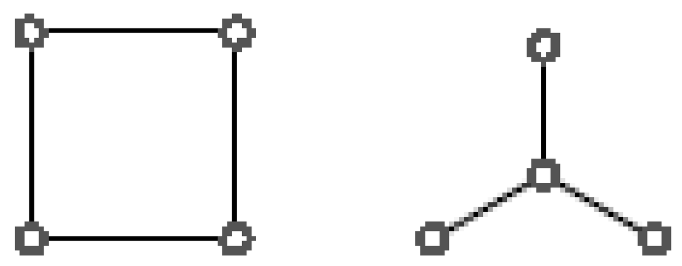

Fig. 1: Grafos diferentes, mas com o mesmo espectro pela laplaciana normalizada

Entretanto, o espectro da matriz nem sempre consegue distinguir um grafo de outro.

Matriz Laplaciana Normalizada

A matriz laplaciana normalizada de G é definida por

$$\mathcal{L} = D^{-1/2}(D-A)D^{-1/2} = I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$$

sendo D a matriz diagonal dos graus dos vértices de G, A a matriz de adjacência de G e I a identidade. Em outras palavras, $\mathcal{L} = \{e_{ij}\}$ tem a forma:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & se\, i = j; \\ \frac{-1}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}} & se\, v_i\, está\, ligado\, a\, v_j; \\ 0 & se\, v_i\, não\, está\, ligado\, a\, v_j \end{cases}$$

sendo v_i e v_j vértices de G e d(v) o grau do vértice v.

Espectro de $\mathcal{L}$

A laplaciana normalizada tem sempre autovalores não negativos. Mais especificamente, 0 é sempre autovalor de $\mathcal{L}$, e a multiplicidade de 0 é o número de componentes conexas do grafo. De maneira similar, 2 é autovalor se o grafo for bipartido, e a multiplicidade de 2 indica o número de componentes bipartidas que o grafo possui.

Grafos Coespectrais

As propriedades do espectro citadas anteriormente sugerem que grafos bipartidos são bons candidatos a serem coespectrais. De fato, boa parte dos grafos coespectrais conhecidos são bipartidos.

Um método de construção de grafos coespectrais que não são bipartidos é o das *fuzzy balls*, em que para cada partição de um inteiro n em k partes gera-se um grafo com n+k vértices partindo de grafos bipartidos.

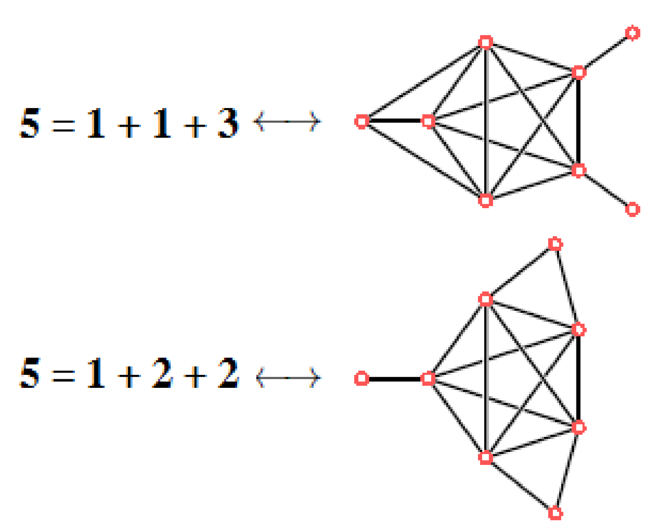

Fig. 2: Grafos *fuzzy ball*

Grafos fortemente conexos com os mesmos parâmetros têm o mesmo espectro. O menor exemplo desses grafos que não são isomorfos tem 16 vértices.

Existe um algoritmo que "desdobra" um grafo bipartido e, se os grafos resultantes tiverem o mesmo número de vértices, eles serão coespectrais pela laplaciana normalizada, como no exemplo abaixo.

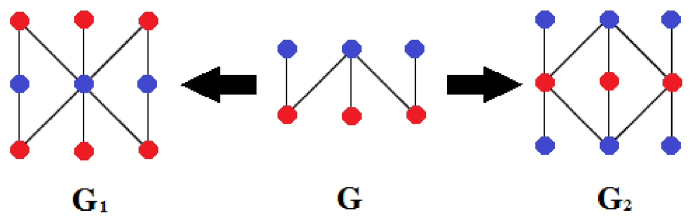

Fig. 3: Grafos bipartidos coespectrais

Grafos bipartidos completos $K_{p,q}$ e $K_{r,s}$ são coespectrais se $r + s = n = p + q$. Os grafos da figura 1 satisfazem essa propriedade. Seus espectros são compostos de 0 e 2, com multiplicidade 1, e 1 com multiplicidade $n-2$.

Referências

1. **CVETOVIC, Dragos, DOOB, Michael e SACHS, Horst.** *Spectra of Graphs*, Academic Press, Berlin, 1980.
2. **BUTLER, Steve.** *Cospectral Graphs*, `http://www.math.ucsd.edu/~fan/teach/264/kenter/cospectral_talk.pdf`, (Abril 2011).
3. **CHUNG, Fan R.K.** *Spectral Graph Theory*, CBMS Lecture Notes, American Mathematical Society, Providence, 1997.
4. **BUTLER, Steve**. *Cospectral graphs for both the adjacency and normalized Laplacian matrices*, Linear and Multilinear Algebra **58** (2010), 387−390.
5. **GODSIL, Chris e ROYLE, Gordon**. *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.
6. **BUTLER, Steve e GROUT, Jason**. *A construction of cospectral graphs for the normalized Laplacian*, Electronic Journal of Combinatorics 18 (2011), 231-251.