Uma comparação de distribuições condicionais na previsão de medidas de risco

Matheus Angeli Ribaski[1], Marcelo Brutti Righi[2]

Objetivo Geral

Comparar distribuições no modelo ARMA-GARCH para prever o Valor em Risco (VaR) e a Perda Esperada (ES) do índice S&P 500.

Objetivos específicos

- Analisar como se comportam os diferentes métodos de estimação do risco;
- Descobrir qual modelo e distribuição combinados proporcionam a melhor previsão do risco;
- Verificar se a escolha do nível de confiança, seja de 1%, 2,5% ou 5%, altera o resultado obtido;
- Avaliar os resultados obtidos através do procedimento de *backtesting* e de estatísticas descritivas.

Medidas de Risco

Seja X o retorno de um ativo qualquer, sendo que, se $X \geq 0$ tem-se um ganho e se $X < 0$ tem-se uma perda. Dado um nível de significância $\alpha \, \epsilon \, (0, 1)$, o VaR é definido matematicamente como:

$$VaR^{\alpha}(X) = -\inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha), \tag{1}$$

em que F_X é definida como a função de distribuição acumulada e F_X^{-1} sua função inversa. Dessa forma, a ES é matematicamente definida como:

$$ES^{\alpha}(X) = -E[X|X \leq F_X^{-1}(\alpha)]. \tag{2}$$

Estimando VaR e ES com o modelo ARMA-GARCH

O modelo ARMA-GARCH é matematicamente definido como:

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum \varphi_m X_{t-m} + \sum \theta_n \varepsilon_{t-n}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, z_t \sim i.i.d \, F_{z_t}(0, 1), \tag{4}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum a_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum b_q \sigma_{t-q}^2, \tag{5}$$

em que X_t é o retorno do ativo no período t; z_t representa um ruído branco independente e identicamente distribuído $(i.i.d)$, com média 0, variância unitária e que pode assumir muitas distribuições de probabilidade F_{z_t}; $c, \varphi, \theta, \omega, a$ e b são parâmetros; ε_t são os resíduos da média condicional no tempo t; $\sum a_p \varepsilon_{t-p}^2$ é o componente ARCH do modelo e $\sum b_q \sigma_{t-q}^2$ é o componente GARCH do modelo. Existem restrições dos parâmetros ω, a e b aplicadas ao modelo para garantir previsões de volatilidade positivas e estacionariedade de covariância. São elas: $\omega, a, b > 0$ e $a + b < 1$, respectivamente.

O método paramétrico é baseado na suposição que os retornos pertencem a uma família de distribuições de probabilidade na forma de:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t, \tag{6}$$

em que, μ_t é o valor esperado de X_t e σ_t^2 é a variância condicional de X_t.

Após modelar os dados com o modelo ARMA-GARCH, pode-se calcular o VaR e a ES. O VaR é matematicamente definido como:

$$VaR_t^{\alpha}(X) = -(\mu_t + \sigma_t F_{z_t}^{-1}(\alpha)), \tag{7}$$

em que $F_{z_t}^{-1}(\alpha)$ é a função inversa da função F_{z_t}.

Por consequência, a ES é definida como:

$$ES_t^{\alpha}(X) = -(\mu_t + \sigma_t E[z_t | z_t \leq F_{z_t}^{-1}(\alpha)]) = -(\mu_t + \sigma_t (\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F_{z_t}^{-1}(s) ds)). \tag{8}$$

O método semi-paramétrico é uma combinação entre os métodos não-paramétrico e paramétrico. A técnica utilizada nesse trabalho é a de FHS. Nela, primeiramente se modelam os dados com o modelo ARMA-GARCH, assim como feito no método paramétrico. A diferença acontece na medida que não se faz suposição acerca da distribuição de z_t. Ao invés disso, utiliza-se da distribuição empírica de z_t para se prever o risco, assim como feito no método não-paramétrico. Após a modelagem dos retornos com o ARMA-GARCH, os ruídos brancos z_t são usados como base para a técnica de HS. Então, o VaR é definido como:

$$VaR_t^{\alpha}(X) = -(\mu_t + \sigma_t \epsilon_{z_t}^{-1}(\alpha)), \tag{9}$$

em que $\epsilon_{z_t}^{-1}(\alpha)$ é o quantil empírico dos ruídos brancos z_t.

Dessa forma, a ES é definida como:

$$ES_t^{\alpha}(X) = -(\mu_t + \sigma_t E[z_t | z_t \leq \epsilon_{z_t}^{-1}(\alpha)]). \tag{10}$$

Metodologia

- As análises foram realizadas em linguagem R;
- O conjunto de dados utilizados como base para os cálculos dessa pesquisa foi o índice S&P 500;
- O período amostral foi de 01/01/2009 até 31/12/2016, com um total de 1990 observações diárias;
- O modelo utilizado para estimar o VaR e a ES foi o modelo ARMA-GARCH, em conjunto com as distribuições Empírica, Normal, Normal Assimétrica, Student's t, Student's t Assimétrica, Erro Generalizado (GED) e Erro Generalizado Assimétrica. Além disso, o método de HS também foi utilizado;
- Os quantis escolhidos foram os 1%, 2,5% e 5%.
- A janela de observação escolhida foi de 1000 observações diárias;
- Após a previsão das medidas de risco, necessitou-se de uma análise de *backtesting* para verificar a qualidade das previsões realizadas.

O *backtesting* foi realizado da seguinte forma:

- H0 = taxa de violações observadas ser igual ou menor que a esperada;
- H1 = taxa de violações observadas é maior que a esperada;
- Quanto maior o p-valor do teste, melhor foi a previsão.

Resultados

- VaR α 1% = FHS (0.250), Student's t Assimétrica (0.250) e GED Assimétrica (0.250);
- VaR α 2.5% = FHS (0.703);
- VaR α 5% = FHS (0.965);
- ES α 1% = HS (0.923);
- ES α 2.5% = Student's t (0.748);
- ES α 5% = Student's t (0.954).

Conclusões

Dados os resultados obtidos, aconselha-se os investidores a utilizarem a distribuição FHS ou Student's t Assimétrica ou GED Assimétrica para estimarem o VaR 1%. Já para o VaR 2.5% e 5%, sugere-se o uso da distribuição FHS. No caso da ES 1%, orienta-se a utilização da HS na medição. Entretanto, para os quantis 2.5% e 5%, a distribuição Student's t é a mais indicada.

Neste trabalho, o índice S&P500 foi utilizado como base de dados nos cálculos realizados. No entanto, em trabalhos futuros, seria enriquecedor que as distribuições analisadas nesse estudo fossem testadas com diferentes bases de dados.

Agradecimentos

O autor agradece ao Prof. Dr. Marcelo Brutti Righi e à Doutoranda Fernanda Müller pelo conhecimento e orientação durante todo o projeto.

Contatos:

[1] Graduando em Administração - UFRGS - ribaski94@gmail.com

[2] Professor do Departamento de Ciências Administrativas - UFRGS - marcelo.righi@ufrgs.br