

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA
RADIATIVA PELO MÉTODO LTS_N COM ALBEDO VARIÁVEL**

por

Rodrigo Stölben Machado

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Abril de 2008

UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA PELO MÉTODO LTS_N COM ALBEDO VARIÁVEL

por

Rodrigo Stölben Machado

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof^a. Dr^a. Cynthia Feijó Segatto

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Rubem Mário F. Vargas (FENG/PUCRS)

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Jorge Rodolfo Zabadal (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 01 de abril de 2008

A Deus, aos meus pais e à minha noiva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter iluminado meu caminho durante a realização deste trabalho;

À Prof^a. Dr^a. Cynthia Feijó Segatto pela oportunidade e orientação e ao Prof. Dr. Rubem Vargas pela ajuda e sugestões decisivas para a finalização desta dissertação;

Agradeço principalmente aos meus pais Luiz e Joceli que sempre me deram coragem, ânimo e o apoio necessário para que pudesse estudar;

Agradeço especialmente a minha noiva Carina da Silva Corrêa, pelo amor, carinho, dedicação e principalmente pelo apoio e ajuda nos momentos difíceis;

Agradeço ao meu sogro José e minha sogra Dejanira, aos meus tios João, Alzira e Dora, que sempre me deram o apoio e contribuição para que pudesse estudar;

A todos que, de alguma maneira, ou outra, contribuíram para a elaboração da presente dissertação, principalmente meus amigos e familiares;

Ao CNPq pelo apoio financeiro e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS (PROMEC) representado em seu corpo de docentes e funcionários, especialmente a minha amiga Naná e meu amigo Paulo Kutter.

Em fim, aos membros da comissão examinadora por suas valiosas contribuições ao trabalho.

1 de Abril de 2008

RESUMO

UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA PELO MÉTODO LTS_N COM ALBEDO VARIÁVEL

O **método LTS_N** , quando aplicado a diversos problemas de transporte, estabelece uma solução em forma analítica, isto é, sem aproximações ao longo de sua derivação. Este procedimento consiste em aplicar a Transformada de Laplace no conjunto de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, resultante da aproximação das ordenadas discretas S_N , da equação unidimensional de transporte de radiação, em um meio homogêneo. Nesta dissertação, apresenta-se a solução LTS_N do problema de transferência radiativa em uma placa plana não homogênea, assumindo o coeficiente de albedo variando continuamente ao longo de sua espessura. Com esta finalidade, subdivide-se a placa em várias subplacas ou regiões, considerando-se em cada uma delas o valor do coeficiente de albedo constante, representado por um valor integral médio. Resultados numéricos são apresentados para o cálculo dos parâmetros superficiais de transferência radiativa, A^* e B^* , que relacionam as correntes emergentes com as incidentes nas fronteiras em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, os quais são comparados com resultados existentes na literatura.

ABSTRACT

A SOLUTION TO THE PROBLEM OF RADIATIVE TRASNFER BY THE METHOD LTS_N WITH VARIABLE ALBEDO

When applied to various problems of transport, the LTS_N method establishes a solution in an analytical form, that is, without approximations to its derivation. This procedure consists of applying the transformed of Laplace to the group of first-order linear differential equations resulting from the discrete ordinates (S_N) approximation, to the one-dimensional neutral particle transport equation, inhomogeneous environment. This dissertation presents the LTS_N solution to the radiative transfer problem inhomogeneous slab assuming albedo coefficient continuously varying along its thickness. For that purpose the slab is divided into several sub-slab or regions, each of which having a constant albedo coefficient represented by an average integral number. Numerical results to the calculus of superficial parameters of radiative transfer A^* and B^* are presented, which relate the emerging to the inciding currents on the borders for $x = 0$ and $x = L$, respectively, which are then compared to results found in existing literature.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	FORMULAÇÃO DO MÉTODO LTS_N PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE RADIAÇÃO	6
2.1	A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE RADIAÇÃO E O MÉTODO DAS ORDENADAS DISCRETAS – S_N	6
2.2	O MÉTODO LTS_N COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO	10
2.2.1	Inversão da Matriz LTS_N pelo Método da Diagonalização	14
2.3	MÉTODO LTS_N PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MULTIREGIÕES	20
3	APLICAÇÃO DO MÉTODO LTS_N PARA O PROBLEMA ISOTRÓPICO COM ALBEDO VARIÁVEL EM UMA PLACA PLANA NÃO HOMOGENEA	26
3.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	27
3.2	FORMULAÇÃO DO COEFICIENTE DE ALBEDO PARA UM MEIO NÃO HOMOGENEO	29
3.2.1	Coefficiente de Albedo com Comportamento Exponencial	30
4	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	31
4.1	Resultados Numéricos	31
5	CONCLUSÃO	36
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	38

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Arábicos

- \mathbf{A} : Matriz numérica de ordem N .
- \mathbf{A}^k : Matriz contendo os termos independentes do termo diferencial e da fonte da região k .
- a_{ij} : Elementos da matriz \mathbf{A} .
- $\mathbf{B}(x)$: Matriz da transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.
- $\mathbf{B}^+(x)$: Decomposição da matriz $\mathbf{B}(x)$ nos autovalores positivos.
- $\mathbf{B}^-(x)$: Decomposição da matriz $\mathbf{B}(x)$ nos autovalores negativos.
- $\mathbf{B}_{ij}(x)$: Submatrizes resultantes da decomposição de $\mathbf{B}(x)$ em blocos de ordem $N/2$.
- $\mathbf{B}^k(x)$: Matriz da transformada inversa de Laplace da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^k)^{-1}$.
- $\mathbf{B}(s)$: Matriz inversa de $\mathbf{M}_N(s)$.
- \mathbf{D} : Matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{A} .
- d_{ij}^+ : Elementos da matriz \mathbf{D}^+ .
- d_{ij}^- : Elementos da matriz \mathbf{D}^- .
- \mathbf{d}_k : Autovalores de \mathbf{A} .
- \mathbf{D}^+ : Decomposição da matriz \mathbf{D} nos autovalores positivos de \mathbf{A} .
- \mathbf{D}^- : Decomposição da matriz \mathbf{D} nos autovalores negativos de \mathbf{A} .
- \mathbf{D}^k : Matriz diagonal dos autovalores da matriz \mathbf{A}^k .
- $f(\mu)$: Intensidade de radiação incidente na fronteira em $x = 0$ da placa e na direção discreta μ .
- f_m : Intensidade de radiação incidente na fronteira em $x = 0$ da placa e na direção discreta μ_m .
- f : Vetor contendo a intensidade de radiação incidente na fronteira em $x = 0$ e direções discretas nas μ_m .
- $g(\mu)$: Intensidade de radiação incidente na fronteira em $x = L$ da placa e na direção discreta μ .
- g_m : Intensidade de radiação incidente na fronteira em $x = L$ da placa e na direção discreta μ_m .

g :	Vetor contendo a intensidade de radiação incidente na fronteira em $x = L$ e nas direções discretas μ_m .
$\mathbf{H}(x)$:	Vetor convolução da matriz $\mathbf{B}(x)$ com o vetor $\mathbf{Q}(x)$.
\mathbf{I} :	Matriz Identidade.
L :	Espessura da placa.
\mathbb{L} :	Grau de espalhamento ou anisotropia.
\mathcal{L} :	Operador da Transformada de Laplace.
\mathcal{L}^{-1} :	Operador da Transformada inversa de Laplace.
$\mathbf{M}_N(s)$:	Matriz simbólica associada à solução genérica quadrada de ordem N .
N :	Ordem de quadratura gaussiana.
$p(\cos \Theta)$:	Função de fase ou de espalhamento.
$P_l(\cos(\Theta))$:	Polinômios de Legendre.
$P_l(\mu)$:	Polinômios de Legendre de l -ésima ordem.
$P_l^m(\mu)$:	Funções associadas de Legendre.
$\mathbf{Q}(x, \mu, \varphi)$:	Vetor fonte na posição x e na direção (μ, φ) .
$\mathbf{Q}(x, \mu)$:	Vetor fonte na posição x e na direção μ .
$\mathbf{Q}_m(x)$:	Vetor fonte na direção x e na direção discreta μ_m .
$\mathbf{Q}(x)$:	Vetor dos termos fonte.
$\mathbf{Q}(s)$:	Transformada de Laplace do vetor $\mathbf{Q}(x)$.
s :	Parâmetro complexo proveniente da Transformada de Laplace.
x :	Espessura ótica.
\mathbf{X} :	Matriz dos autovetores de \mathbf{A} .
\mathbf{X}^{-1} :	Matriz inversa de \mathbf{X} .
\mathbf{X}^k :	Matriz dos autovetores da matriz \mathbf{A}^k .
x_0 :	Fronteira em $x = 0$.
x_K :	Fronteira em $x = L$.
x_k :	Fronteira da região k com a região $k - 1$.
\mathbf{Y} :	Vetor auxiliar para a mudança de base.
\mathbf{Y}^k :	Vetor auxiliar para a mudança de base para problemas heterogêneos.

1. Caracteres Gregos

- μ : Variável angular, direção de propagação da radiação ou partícula em relação ao eixo x , cosseno do ângulo polar.
- μ_m : Raízes do Polinômio de Legendre de grau N : direções discretas geradas pela quadratura guassiana.
- ω : Coeficiente de espalhamento do meio.
- ω^k : Coeficiente de espalhamento da região k .
- w : Pesos da Quadratura de Gauss-Legendre.
- $\Psi(x, \mu, \varphi)$: Intensidade de radiação na posição x e na direção (μ, φ) .
- $\Psi(x, \mu)$: Intensidade de radiação na posição x e na direção μ .
- Ψ_m : Intensidade de radiação na posição x e na direção discreta μ_m .
- $\Psi(x)$: Vetor intensidade de radiação na posição x .
- $\Psi(s)$: Vetor intensidade de radiação transformado.
- φ : Ângulo azimutal.
- β_l : Coeficientes da expansão em polinômios de Legendre da lei de espalhamento (tabelados).
- $*$: Operador convolução.

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Representação esquemática de uma placa com K regiões.	20
2.2	Representação gráfica de uma placa com K regiões com translação na variável espacial x	22

ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Resultados de \mathbf{A}^* , calculados pelo método \mathbf{DS}_N , \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 0.1$	32
4.2	Resultados de \mathbf{B}^* , calculados pelo método \mathbf{DS}_N , \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 0.1$	32
4.3	Resultados de \mathbf{A}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 1.0$	33
4.4	Resultados de \mathbf{B}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 1.0$	33
4.5	Resultados de \mathbf{A}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 5.0$	34
4.6	Resultados de \mathbf{B}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 5.0$	34
4.7	Convergência dos resultados em relação ao número de subplacas considerando $N = 80$, $w_0 = 1.0$, $s = 10$ e $L = 5.0$	35

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos vários métodos têm sido estudados com a tarefa de chegar a resultados precisos para os problemas da teoria de transporte. Dentro do contexto dos métodos determinísticos, cujo objetivo é estabelecer solução exata para as aproximações da equação de transporte, encontra-se o **método** LTS_N . Para mostrar a eficiência deste método, resolve-se nesta dissertação o problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa plana finita não homogênea.

A equação linear de transporte é uma equação íntegro-diferencial que descreve a distribuição de partículas, tais como fótons, nêutrons, moléculas e ondas eletromagnéticas, que fluem livremente em um meio, levando em conta o movimento das mesmas e suas interações com o meio [Chandrasekhar, 1950], [Duderstadt e Martin, 1979]. Para problemas particulares foram encontradas soluções exatas desta equação pelo método de Case, [1960], e pela técnica de "Wiener-Hopf" [Duderstadt e Hamilton, 1976].

Ao longo do tempo, devido a enorme aplicabilidade da teoria de transporte em algumas áreas de engenharia e física, surge o interesse no desenvolvimento de técnicas computacionais eficientes de solução desta equação. Dentre a grande variedade de métodos determinísticos, destaca-se a aproximação em ordenadas discretas proposta por Chandrasekhar, [1960], conhecida como aproximação S_N do problema de transporte. Esta aproximação consiste em aproximar a equação de transporte por um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. Esse método é focado no tratamento discreto da variável angular e consiste, essencialmente, em aproximar o termo integral por uma fórmula de Quadratura Gaussiana de ordem N e aplicação do método da colocação, considerando como função teste a Delta de Dirac. Esse procedimento gera um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem na variável espacial.

No início da década de 90, foi proposto por Vilhena e Barichello [Vilhena e Barichello,

1991], [Barichello e Vilhena, 1993] e [Vilhena e Barichello, 1995], o **método** \mathbf{LTS}_N , que vem sendo muito utilizado em problemas de fenômenos de transporte de partículas neutras, mudando-se apenas a característica do meio. Este método resolve de forma analítica a aproximação \mathbf{S}_N do problema de transporte em uma placa plana finita, aplicando a Transformada de Laplace na variável espacial do conjunto de equações de ordenadas discretas, sobre um domínio finito. Deve-se observar que o método é dito analítico, pois a solução do sistema de equações diferenciais \mathbf{S}_N é obtida sem a aproximação ao longo de sua derivação.

A idéia principal do **método** \mathbf{LTS}_N , pode então, ser resumida na aplicação da Transformada de Laplace na variável espacial do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem gerado pela aproximação \mathbf{S}_N . Resolvendo este sistema de equações transformado, que é um sistema linear e algébrico dependente da variável complexa "s", seguida da inversão, feita analiticamente, da Transformada de Laplace, encontra-se assim, uma expressão fechada para o cálculo da intensidade de radiação nas direções discretas. Aqui, é importante salientar que, para proceder à inversão da Transformada de Laplace, é necessário inverter uma matriz da forma $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N , com N par, e \mathbf{A} é uma matriz cheia de ordem N , que contém os parâmetros da equação de transporte.

Com o objetivo de encontrar uma fórmula analítica para a inversão da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ e posterior inversão da Transformada de Laplace associada ao método \mathbf{S}_N , vários métodos foram desenvolvidos. Primeiramente, foi proposto um algoritmo utilizando a estrutura da matriz \mathbf{LTS}_N linearmente anisotrópica e a definição de matriz inversa [Barichello, 1992]. Para aumentar o grau de anisotropia dos problemas, empregou-se um procedimento alternativo para a inversão da matriz com o uso do algoritmo de Trzaska [1987], [Streck, 1993] e [Vilhena e Barichello, 1995]. A seguir, Oliveira [Oliveira, 1993] e [Oliveira et al., 2002], estendeu a fórmula de inversão, inicialmente proposta por Barichello, para o caso anisotrópico. Porém, Brancher, [1998], constatou que os métodos utilizados para a inversão da matriz eram computacionalmente inviáveis para inverter problemas associados com elevadas ordens de quadratura ($N > 22$), devido à aritmética finita.

Para melhorar o desempenho computacional dos métodos de inversão com posterior inversão da Transformada de Laplace da matriz simbólica $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, primeiramente Cardona e Vilhena, [1998], desenvolveram um algoritmo para a inversão da matriz \mathbf{LTS}_N associada

ao caso isotrópico. A seguir, surgiu a idéia de um método recursivo para inverter uma matriz simbólica do tipo $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ para problemas com anisotropia qualquer, o qual combina a decomposição de Schur e o método do particionamento, para a triangularização da matriz simbólica, e posterior inversão da matriz triangular. Este método foi implementado considerando a ordem de quadratura N até 400 em um computador Cray [Segatto et al., 1999a].

Ainda, com o objetivo de melhorar o desempenho computacional do **método** \mathbf{LTS}_N , e levando em conta que a matriz \mathbf{A} associada à matriz simbólica $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ apresenta autovalores todos distintos, Segatto, Vilhena e Gomes [Segatto et al., 1999b] desenvolveram um método que diagonaliza a matriz \mathbf{A} , proporcionando, assim, trabalhar com os problemas \mathbf{S}_N unidimensionais, com ordem de quadratura muito elevada. Este procedimento, como envolve apenas o cálculo de autovalores e autovetores, propicia a inversão da matriz para N grande ($N \approx 2000$), dependendo somente de algoritmos eficientes para o cálculo de autovalores e autovetores da matriz \mathbf{A} , associada ao problema. Assim, consegue-se, com este procedimento, reduzir drasticamente o tempo computacional, o que possibilita usar um microcomputador.

Para resolver o problema de "*overflow*", que pode ocorrer devido ao carácter exponencial da solução \mathbf{LTS}_N , em uma placa de espessura grande ou elevadas ordens de quadratura, Barichello [Barichello e Vilhena, 1993b], propôs uma mudança de variável na solução, trocando x por $x - L$ para os termos exponenciais positivos, em que L é a espessura da placa, na solução homogênea associada ao problema. Esse procedimento funciona para problemas sem fonte, mas no caso de problemas com fonte, pode carregar o problema de "*overflow*" para o termo de convolução. Para resolver o problema criado no termo de convolução, Gonçalves [Gonçalves et al., 2000], propôs uma nova formulação para a solução \mathbf{LTS}_N que leva em conta a propriedade de invariância das direções discretas. Fisicamente, isto significa, considerar equivalentes partículas deslocando-se da direita para a esquerda ($\mu_i < 0$) e partículas deslocando-se da esquerda para a direita ($\mu_i > 0$). Isso possibilitou ao **método** \mathbf{LTS}_N lidar com problemas de transporte com alto grau de anisotropia, grandes espessuras e fonte arbitrária.

Cabe ressaltar ainda, a grande importância que foi a prova da convergência do **método** \mathbf{LTS}_N [Pazos, 1999], [Pazos e Vilhena, 1999a], [Pazos e Vilhena, 1999b] e [Pazos e Vilhena, 1999c], o que garante que à medida que a ordem da quadratura cresce, a solução

LTS_N se aproxima da solução exata de Case, [1960], a menos do erro inerente ao problema de arredondamento, dando-nos uma maior confiança para obter resultados com uma precisão controlada.

O **método** LTS_N já foi aplicado, com eficiência, na solução de uma vasta variedade de problemas de transporte: unidimensionais, em meio homogêneo [Barichello e Vilhena, 1993], e heterogêneo [Tavares, 2000]; espalhamento anisotrópico [Oliveira e Barichello, 1993], [Vilhena e Barichello, 1995] e [Segatto et al., 1999a]; para modelos de um grupo [Barichello, 1992], e para modelo de multigrupo de energia [Vilhena e Barichello, 1991], [Vilhena e Barichello, 1995] e [Barroso, 2000]; problemas de transferência radiativa em nuvens com ou sem simetria azimutal, [Segatto e Vilhena, 1994a], [Segatto, 1995], [Vilhena e Segatto, 1996] e [Brancher et al., 1999]. Da mesma forma, já foram realizados estudos para a equação de transporte que depende do tempo [Vilhena e Segatto, 1993], [Segatto e Vilhena, 1994b], [Renz, 1999], [Oliveira et al., 2002] e [Gonzalez et al., 2007], e para modelos com variável angular contínua [Segatto e Vilhena, 1997] e [Hoffmann, 2003]. Problemas não lineares, também já foram resolvidos [Vargas e Vilhena, 1999], [Vilhena e Barichello, 1999] e [Vargas et al., 2003], além de problemas inversos [Barichello e Vilhena, 1993b] e [Velho et al., 2003], com a aplicação em ótica hidrológica [Retamoso, 2000], [Retamoso et al., 2001] e [Retamoso et al., 2002]. Outros trabalhos também comprovam a eficácia do método na resolução de problemas de engenharia nuclear [Chies, 1996], [Kruse, 1998], [Borges e Vilhena, 2002] e [Rodriguez et al., 2007], na determinação de criticabilidade [Lorenzi, 1996], [Batistela e Vilhena, 1997a], [Batistela e Vilhena, 1997b] e [Batistela et al., 1999], e no cálculo de parâmetros radiantes [Vilhena e Souza, 1992], [Souza, 1993], [Tavares, 2000] e [Segatto et al., 2001]. Esse método também foi usado, tanto na solução da equação adjunta de transporte de nêutrons [Gonçalves et al., 2002], com a determinação da função importância e o cálculo de fluxo adjunto, como na solução da equação de transferência radiativa condutiva [Lemos, 2000]. A formulação LTS_N foi estendida a problemas de transporte estacionário em duas e três dimensões para partículas neutras [Zabadal et al., 1995], [Pazos et al., 2002], [Pazos et al., 2003], [Hauser et al., 2007a] e [Hauser et al., 2007b], em domínios convexos bidimensionais [Zabadal et al., 1997] e também foi estendido para prótons [Rodriguez et al., 2007].

O **método** LTS_N também foi generalizado para resolver o problema de transporte com autovalores complexos. Essa formulação foi aplicada na resolução de um problema de

transferência radiativa com polarização [Simch et al., 2006]. O **método** LTS_N ainda foi usado para a resolução da equação de transporte de partículas neutras com dependência angular contínua, considerando qualquer grau de anisotropia e fonte arbitrária [Hoffmann, 2003]. Santos [2005], desenvolveu um método "multigrid" para a aproximação angular da solução da equação de transporte de partículas neutras em uma placa plana, baseado na formulação LTS_N , com dependência contínua na variável angular. Em seguida, desenvolveu-se uma solução analítica para o conjunto de equações S_N , considerando N ímpar [Segatto et al., 2008a]. Também usou-se o **método** LTS_N para resolver o problema de transferência radiativa com fonte interna [Vargas et al., 2007], e recentemente fez-se a generalização da formulação LTS_N para o caso de albedo unitário onde ocorre autovalores múltiplos [Marona et al., 2007] e [Segatto et al., 2008b].

Com o objetivo de aumentar a potencialidade do **método** LTS_N na solução da equação de transporte de radiação, neste trabalho, propõe-se o problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa plana finita não homogênea com coeficiente de albedo variável. A seguir, com o propósito de validar a formulação LTS_N desenvolvida nesta dissertação, particulariza-se para um coeficiente de albedo com comportamento exponencial, calcula-se os parâmetros superficiais de transferência radiativa A^* e B^* , que relacionam as correntes emergentes com as incidentes nas fronteiras em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, e comparam-se estes resultados com os resultados encontrados na literatura [Garcia e Siewert, 1982].

Para cumprir o objetivo proposto, o trabalho encontra-se estruturado em cinco capítulos e está organizado da seguinte forma: no capítulo dois apresenta-se a formulação do **método** LTS_N , com a utilização do método da diagonalização, para um problema de transporte de radiação genérico, onde apresenta-se um problema homogêneo, e um problema não homogêneo ou multi-regiões, definido como K-regiões diferenciadas quanto ao coeficiente de albedo de cada região. No capítulo três, apresenta-se o problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa não homogênea com coeficiente de albedo variável, e posteriormente a aplicação do **método** LTS_N . A seguir, particulariza-se para um coeficiente de albedo com comportamento exponencial, afim de obter os parâmetros superficiais de transferência radiativa A^* e B^* . No capítulo quatro, apresenta-se e analisa-se os resultados obtidos, com o objetivo de validar esta dissertação. E finalmente no capítulo cinco apresentam-se as conclusões.

2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO LTS_N PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE RADIAÇÃO

Neste capítulo apresentam-se inicialmente a equação linear de transporte de radiação e a descrição da formulação do **método LTS_N** para resolução do problema de transporte unidimensional, homogêneo, com simetria azimutal e monoenergético. O **método LTS_N** resolve de maneira analítica o sistema de equações S_N através da aplicação da Transformada de Laplace na variável espacial, solução do sistema algébrico resultante para o fluxo transformado e posterior inversão da Transformada de Laplace de forma analítica, encontrando, desta forma, a intensidade de radiação nas direções discretas consideradas.

Em seguida, estende-se também a mesma formulação LTS_N para a resolução de problemas em meio não homogêneo, subdividindo a placa em K -subplacas, e acoplando-as através da condição de contorno e continuidade de fluxo nas interfaces, que é necessário para a solução do problema proposto.

2.1 A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE RADIAÇÃO E O MÉTODO DAS ORDENADAS DISCRETAS – S_N

Nesta seção, apresenta-se a equação de transporte para o problema de transferência radiativa linear unidimensional, em coordenadas cartesianas, monoenergética, com simetria azimutal, espalhamento anisotrópico, em regime estacionário, e desenvolve-se a aproximação S_N da mesma. Assim, primeiramente, considera-se a equação de transporte de radiação, sem simetria azimutal, descrita por [Duderstadt e Martin, 1979], como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu, \varphi) + \Psi(x, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) \Psi(x, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' + Q(x, \mu, \varphi), \quad (2.1)$$

em que:

- $\Psi(x, \mu, \varphi)$ é a intensidade de radiação na posição x , na direção definida por μ . Descreve a distribuição do fóton em um determinado meio;
- $x \in (0, L)$ é a espessura ótica;
- $\mu \in [-1, 1]$ é a direção de propagação do fóton, ou seja, é o cosseno do ângulo polar θ de espalhamento, ($\mu = \cos \theta$);
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ é o ângulo azimutal;
- $\omega \in [0, 1]$ é o termo de espalhamento simples do meio ou coeficiente de albedo;
- $p(\cos \Theta)$ é a função de fase ou função de espalhamento;
- $Q(x, \mu, \varphi)$ é o termo de fonte.

As variáveis angulares, μ e φ indicam a direção de propagação da radiação.

Em geometria plana, a intensidade de radiação depende somente do cosseno do ângulo de espalhamento, e assim por simplificação, considera-se que a função de espalhamento $p(\cos \Theta)$, possa ser representada pela expansão em uma soma truncada de Polinômios de Legendre em termos do ângulo de espalhamento Θ , isto é:

$$p(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} \beta_l P_l(\cos \Theta), \quad \text{com } \beta_0 = 1, \quad (2.2)$$

em que (Θ) é o ângulo formado entre a direção da partícula antes da colisão com um alvo e a direção resultante após a colisão e β_l são coeficientes tabelados. Aplicando o teorema da adição para Polinômios de Legendre [Chandrasekhar, 1950], na equação acima, pode-se reescrever a função de fase como:

$$p(\cos \Theta) = \sum_{m=0}^M (2 - \delta_{0,m}) \sum_{l=m}^{\mathbb{L}} \beta_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos [m(\varphi - \varphi')], \quad (2.3)$$

em que $P_l^m(\mu)$ são as funções associadas de Legendre e β_l^m são coeficientes da expansão do Polinômio de Legendre que são determinados por:

$$\beta_l^m = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \beta_l. \quad (2.4)$$

E quando considera-se o problema isotrópico, a função de espalhamento é representada por:

$$p(\cos \Theta) = 1. \quad (2.5)$$

Para o problema desenvolvido nesta dissertação, assume-se a existência de simetria azimutal na equação (2.1), o que torna possível simplificá-la, realizando a integração de 0 a 2π , pois neste caso, a intensidade de radiação Ψ , depende apenas de x e μ , ou seja:

$$\int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) \Psi(x, \mu', \varphi') d\varphi' = 2\pi \Psi(x, \mu') \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} \beta_l P_l(\mu) P_l(\mu'). \quad (2.6)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.1), obtém-se a equação de transporte para a intensidade de radiação, com simetria azimutal, que será utilizada neste trabalho, dada por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Psi(x, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} \beta_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') \Psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (2.7)$$

Consideram-se também, as condições de contorno de fluxo incidente, dadas por:

$$\Psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \text{para } \mu > 0 \quad (2.8)$$

e

$$\Psi(L, \mu) = g(\mu), \quad \text{para } \mu < 0, \quad (2.9)$$

onde L é o comprimento da placa em unidades de livre caminho médio e, $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são as radiações incidentes na fronteira do domínio em direções positivas e negativas, respectivamente.

Para encontrar a aproximação \mathbf{S}_N , da equação (2.7), usa-se primeiramente, o **Método das Ordenadas Discretas**, comumente referido como **método \mathbf{S}_N** , desenvolvido por Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1950], que é um método no qual se aproxima o termo

integral da equação de transporte, pela discretização da variável angular μ , por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N , onde N classicamente considera-se par, para evitar a singularidade existente na equação unidimensional de transporte de radiação em $\mu = 0$, dado por:

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu') \Psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{k=1}^N w_k P_l(\mu_k) \Psi(x, \mu_k) \quad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.10) na equação (2.7), tem-se então:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Psi(x, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^N w_k \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} \beta_l P_l(\mu_k) P_l(\mu) \Psi(x, \mu_k) + Q(x, \mu) \quad (2.11)$$

A seguir, na equação acima, aplica-se o método da colocação na variável angular μ , considerando-se como função teste a Delta de Dirac e utilizando-se como pontos de colocação as N raízes simétricas do Polinômio de Legendre de grau N , obtendo, deste procedimento, a aproximação \mathbf{S}_N da equação de transporte unidimensional em uma placa, dada por um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, escrita como:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_m(x) + \Psi_m(x) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} \beta_l P_l(\mu_m) \sum_{k=1}^N w_k P_l(\mu_k) \Psi_k(x) + Q_m(x), \quad (2.12)$$

com $m = 1, 2, \dots, N$, e sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\Psi_m(0) = f_m, \quad \text{para} \quad \mu_m > 0 \quad (2.13)$$

e

$$\Psi_m(L) = g_m, \quad \text{para} \quad \mu_m < 0. \quad (2.14)$$

Aqui, as direções discretas μ_k são as raízes simétricas, em relação à origem $\mu = 0$, do Polinômio de Legendre de grau N , com N par, usualmente ordenadas de forma decrescente, como mostrado abaixo:

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 1, \quad (2.15)$$

e os w_k são os pesos da Quadratura de Gauss-Legendre, respectivos a cada raiz μ_k , dados por:

$$w_k = \int_{-1}^{+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_k - \mu_j)} d\mu. \quad (2.16)$$

Observa-se que na equação (2.12), por facilidade de notação, a intensidade de radiação na direção discreta μ_m , $\Psi(x, \mu_m)$, é representada por $\Psi_m(x)$.

Na próxima seção, apresenta-se a formulação \mathbf{LTS}_N para a resolução do problema das ordenadas discretas (2.12), sujeito às condições de contorno (2.13) e (2.14).

2.2 O MÉTODO \mathbf{LTS}_N COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO

Como referido anteriormente, o **método \mathbf{LTS}_N** consiste, basicamente, na aplicação da Transformada de Laplace no sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem gerado pela aproximação \mathbf{S}_N (2.12), resultando em um sistema de N equações algébricas simbólicas (dependentes do parâmetro complexo " s "). Após a solução analítica deste sistema, aplica-se a inversa da Transformada de Laplace, obtendo-se assim a intensidade de radiação. Nos parágrafos a seguir, apresenta-se a formulação do **método \mathbf{LTS}_N** para a solução do problema da equação de transporte linear unidimensional, com simetria azimutal, monoenergética e em regime estacionário. Para mostrar o uso desse método, pode-se reescrever o conjunto de equações \mathbf{S}_N (2.12), como uma equação diferencial ordinária matricial de primeira ordem, descrita por:

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) - \mathbf{A} \Psi(x) = \mathbf{Q}(x), \quad (2.17)$$

onde $\Psi(x)$ é um vetor, cujas componentes são as intensidades de radiação, nas direções discretas, definido por:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

em que $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ são sub-vetores de ordem $\frac{N}{2}$, cujos componentes são as intensidades de radiação, nas direções discretas positivas ($\mu > 0$) e negativas ($\mu < 0$), respectivamente, isto é:

$$\Psi_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{\frac{N}{2}}(x) \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mu > 0 \quad (2.19)$$

e

$$\Psi_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\frac{N}{2}+1}(x) \\ \psi_{\frac{N}{2}+2}(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mu < 0. \quad (2.20)$$

Na equação (2.17), a matriz \mathbf{A} é a matriz \mathbf{LTS}_N de ordem $N \times N$ (N par), cujos elementos são definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_i} + \frac{\omega}{2\mu_i} \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} w_j \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) & \text{se } i = j \\ \frac{\omega}{2\mu_i} \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} w_j \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.21)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, N$, e o vetor fonte, também de ordem N , definido por $\mathbf{Q}(x)$, é representado da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}(x) = \begin{pmatrix} \frac{Q_1(x)}{\mu_1} \\ \frac{Q_2(x)}{\mu_2} \\ \vdots \\ \frac{Q_N(x)}{\mu_N} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Assim, usando esta notação, as condições de contorno são escritas da seguinte forma:

$$\Psi_1(0) = \begin{pmatrix} f(\mu_1) \\ \vdots \\ f\left(\mu_{\frac{N}{2}}\right) \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mu > 0 \quad (2.23)$$

e

$$\Psi_2(L) = \begin{pmatrix} g\left(\mu_{\frac{N}{2}+1}\right) \\ \vdots \\ g(\mu_N) \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \mu < 0. \quad (2.24)$$

Para resolver a equação matricial (2.17), vai-se usar o **método LTS_N**. Desta maneira, pode-se agora, derivar a formulação **LTS_N**, aplicando a Transformada de Laplace na variável espacial x , definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (2.25)$$

ao conjunto de equações **S_N** descritas por (2.17), obtendo-se um sistema linear de N incógnitas e N equações, representado pelo seguinte sistema transformado dependente do parâmetro complexo " s ":

$$s\bar{\Psi}(s) - \Psi(0) - \mathbf{A}\bar{\Psi}(s) = \bar{\mathbf{Q}}(s), \quad (2.26)$$

onde a barra representa a Transformada de Laplace, $\bar{\Psi}(s) = \mathcal{L}[\Psi(x)]$, $\bar{\mathbf{Q}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{Q}(x)]$ e $\Psi(0)$ é o vetor intensidade de radiação, da condição de contorno em $x = 0$, onde somente as $N/2$ primeiras componentes, referentes a $\mu > 0$, são conhecidas. Colocando $\bar{\Psi}(s)$ em evidência, a equação (2.26), pode ser reescrita como:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\bar{\Psi}(s) = \Psi(0) + \bar{\mathbf{Q}}(s), \quad (2.27)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N . Por simplicidade, toma-se:

$$\bar{\mathbf{M}}_N(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Então, substituindo na equação (2.27), tem-se:

$$\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{N}}(s)\overline{\Psi}(s) = \Psi(0) + \overline{\mathbf{Q}}(s), \quad (2.28)$$

onde $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{N}}(s)$ é uma matriz quadrada de ordem N . A seguir, isola-se $\overline{\Psi}(s)$ na equação (2.28), obtendo-se:

$$\overline{\Psi}(s) = \overline{\mathbf{B}}(s)\Psi(0) + \overline{\mathbf{B}}(s)\overline{\mathbf{Q}}(s), \quad (2.29)$$

em que

$$\overline{\mathbf{B}}(s) = [\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{N}}(s)]^{-1} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Cabe ressaltar aqui, que cada elemento da matriz quadrada $\overline{\mathbf{B}}(s)$ de ordem N é uma função racional, e desta maneira, pode-se calcular analiticamente a Transformada Inversa de Laplace. Desta forma, aplicando a inversa na equação (2.29), obtém-se a intensidade de radiação, em função de x , dada por:

$$\Psi(x) = \mathbf{B}(x)\Psi(0) + \mathbf{B}(x) * \mathbf{Q}(x), \quad (2.30)$$

onde a matriz $\mathbf{B}(x)$, por simplificação de notação chama-se de:

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\overline{\mathbf{B}}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}, \quad (2.31)$$

e o asterisco (*) representa a convolução entre as funções $\mathbf{B}(x)$ e $\mathbf{Q}(x)$, definido por:

$$\mathbf{B}(x) * \mathbf{Q}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x - \varepsilon)\mathbf{Q}(\varepsilon)d\varepsilon, \quad (2.32)$$

Por simplicidade, toma-se, $\mathbf{B}(x) * \mathbf{Q}(x) = \mathbf{H}(x)$, obtendo-se, assim, uma solução analítica do sistema de equações \mathbf{S}_N , da equação de transporte considerada nesta dissertação, para a intensidade de radiação, dada por:

$$\Psi(x) = \mathbf{B}(x)\Psi(0) + \mathbf{H}(x). \quad (2.33)$$

Sabe-se, que a aproximação da intensidade de radiação, depende da obtenção da inversa da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ e, conseqüentemente da obtenção de $\mathbf{B}(x)$. Ao longo do tempo,

fórmulas analíticas para o cálculo desta inversa têm sido desenvolvidas. Primeiramente Barichello, [1992], propôs um algoritmo utilizando a estrutura da matriz \mathbf{LTS}_N linearmente anisotrópica e o conceito de matriz inversa. Esta formulação foi expandida para anisotropia de qualquer grau por Oliveira [Oliveira, 1993] e [Oliveira e Barichello, 1993]. Streck, [1993], usou a formulação desenvolvida por Trzaska, [1987], para a inversão da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Como os métodos utilizados para a inversão da matriz estavam tornando-se pouco eficientes à medida que a solução de problemas envolvia elevadas ordens de quadratura, e levando em conta, que os autovalores da matriz \mathbf{A} associada ao problema unidimensional de transporte de radiação (2.7), são distintos, Segatto, [Segatto et al., 1999b], sugeriu fazer a decomposição espectral da matriz \mathbf{LTS}_N , método pela qual usualmente é chamado de diagonalização. Este método já foi utilizado com sucesso em problemas de transferência radiativa, por exemplo, na determinação de parâmetros superficiais de radiação (transmissividade e refletividade) numa placa heterogênea [Segatto et al., 2001]. Uma descrição detalhada dos métodos de inversão da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ pode-se ser encontrada em Segatto [Segatto et al., 1999b]. Nesse trabalho, aplica-se o método de diagonalização da matriz \mathbf{A} para a obtenção de $\mathbf{B}(x)$, o qual encontra-se descrito a seguir em detalhes.

2.2.1 Inversão da Matriz \mathbf{LTS}_N pelo Método da Diagonalização

Nesta subseção, apresenta-se o **Método da Diagonalização**, que permite calcular a inversa da matriz \mathbf{LTS}_N , $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, para obter o termo $\mathbf{B}(x)$ e encontrar uma solução para intensidade de radiação, com reduzido número de operações, tornando o processo de dados mais eficiente e possibilitando um maior alcance em ordens de quadraturas.

Utilizando-se do fato que os autovalores da matriz \mathbf{LTS}_N são todos distintos, ou seja, o conjunto de autovetores da matriz \mathbf{A} formam uma base para \mathbb{R}^N , pode-se obter a matriz $\mathbf{B}(x)$ decompondo a matriz \mathbf{A} em uma matriz diagonal pela seguinte relação:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.34)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal, de ordem N , formada pelos autovalores da matriz \mathbf{A} e \mathbf{X} é a matriz, cujas colunas são seus respectivos autovetores. Para isso, considera-se a matriz

$\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{N}}(s)$ como:

$$\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{N}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (2.35)$$

Utilizando a inversa de $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{N}}(s)$ e substituindo a decomposição da matriz \mathbf{A} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}(s) &= [\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{N}}(s)]^{-1} = [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]^{-1} \\ \overline{\mathbf{B}}(s) &= [(s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})]^{-1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Colocando em evidência a matriz dos autovetores \mathbf{X} à esquerda e \mathbf{X}^{-1} à direita, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}(s) &= [\mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{X}^{-1}]^{-1} \\ \overline{\mathbf{B}}(s) &= \mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituindo a expressão (2.37) em

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\overline{\mathbf{B}}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\},$$

que é a Transformada Inversa de Laplace, tem-se:

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\}, \quad (2.38)$$

e como \mathbf{X} é uma matriz constante, então, reescrevendo a equação acima, tem-se:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.39)$$

Sabe-se que \mathbf{D} representa a matriz dos N autovalores da matriz $\mathbf{B}(x)$ correspondentes aos autovalores d_k , com $k = 1, 2, \dots, N$, que pode ser escrita como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ & & d_3 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & d_N \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

e a matriz simbólica $(s\mathbf{I} - \mathbf{D})$ é uma matriz diagonal dada por:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} s - d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s - d_2 & & \\ & & s - d_3 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & s - d_N \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Conseqüentemente, sabe-se, que a inversa da matriz simbólica $(s\mathbf{I} - \mathbf{D})$ descrita acima é escrita como:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & & \\ & & \frac{1}{s-d_3} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{s-d_N} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Assim, a Transformada Inversa de Laplace, apresentada na equação (2.39), da matriz (2.42), é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{xd_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{xd_2} & & \\ & & e^{xd_3} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{xd_N} \end{bmatrix} = e^{\mathbf{D}x}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\right\} = e^{\mathbf{D}x} \quad (2.43)$$

Desta maneira, conhecendo-se a solução da Transformada Inversa de Laplace, descrita pela equação (2.43), pode-se agora substituí-la na expressão (2.39), para $\mathbf{B}(x)$, obtendo-se assim, a seguinte equação:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.44)$$

Até agora, não solucionou-se o problema, mas já se conhece a forma da solução \mathbf{LTS}_N da equação de transporte, dada pela equação (2.33), e com $\mathbf{B}(x)$ calculado através da expressão acima.

Vale notar, que o vetor $\Psi(0)$, na solução descrita pela equação (2.33), não está completamente determinado, pois sabe-se que, apenas as $N/2$ primeiras componentes deste vetor, correspondentes à intensidade de radiação incidente na fronteira em $x = 0$, ou seja, $\Psi_1(0)$ é conhecido. Para determinar a outra componente desconhecida, $\Psi_2(0)$, necessária para encontrar a solução do problema, basta aplicar as condições de contorno na equação (2.33), em $x = L$, gerando uma equação matricial em bloco da equação (2.33), dada pela seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(L) \\ \Psi_2(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(L) & \mathbf{B}_{12}(L) \\ \mathbf{B}_{21}(L) & \mathbf{B}_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(L) \\ \mathbf{H}_2(L) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

em que as $N/2$ componentes dos vetores $\Psi_1(0)$, $\Psi_2(L)$ e $\mathbf{H}_2(L)$ são conhecidas, e $\mathbf{B}_{ij}(L)$, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, são matrizes quadradas de ordem $N/2$. Nos vetores $\Psi_1(0)$ e $\Psi_2(L)$, os índices 1 e 2 fazem referência às $N/2$ direções positivas ($\mu > 0$) e $N/2$ direções negativas

($\mu < 0$), respectivamente. Então, a partir da segunda equação do sistema de blocos de matrizes acima, tem-se:

$$\Psi_2(L) = \mathbf{B}_{21}(L)\Psi_1(0) + \mathbf{B}_{22}(L)\Psi_2(0) + \mathbf{H}_2(L) \quad (2.46)$$

Para calcular $\mathbf{B}_{21}(L)$ e $\mathbf{B}_{22}(L)$, usa-se a equação (2.44), e para encontrar $\mathbf{H}_2(L)$, usa-se a equação (2.32). Para calcular $\Psi_2(0)$, isola-o na equação (2.46), obtendo-se:

$$\Psi_2(0) = \left[\mathbf{B}_{22}(L) \right]^{-1} \left[\Psi_2(L) - \mathbf{B}_{21}(L)\Psi_1(0) - \mathbf{H}_2(L) \right] \quad (2.47)$$

Portanto, uma vez que o vetor $\Psi_2(0)$ é conhecido, obtém-se o vetor $\Psi(0)$ e, em consequência, encontra-se o vetor intensidade de radiação $\Psi(x)$ dado pela equação (2.33).

Nesta equação, pode-se observar, que para resolver problemas de transporte de grandes espessuras ou grandes valores de N , a equação (2.44) não é adequada devido ao comportamento exponencial da solução e mais o fato de que os autovalores d_k aumentam em magnitude com N , o que leva a equação a tender ao infinito.

Para contornar este problema, Gonçalves [Gonçalves et al., 2000], usou na solução da equação de transporte, a propriedade de invariância de direções discretas, que consiste em estabelecer a equivalência de condições entre as coordenadas (x, μ) e $(-x, -\mu)$, ou alternativamente, o tratamento equivalente a fluxos de direções μ e $-\mu$. O par $(-x, -\mu)$ pode ser recolocado por $(L - x, -\mu)$ como resultado do deslocamento do ponto de reflexão de 0 para $L/2$. Na solução \mathbf{LTS}_N , a propriedade de invariância de direções discretas está representada pela assimetria das raízes do determinante da matriz \mathbf{A} . Esta propriedade de invariância, como as direções discretas são simétricas em torno de $\mu = 0$, fisicamente falando, corresponde tratar a radiação que se desloca da direita para a esquerda ($\mu_m < 0$) igualmente à radiação que se desloca da esquerda para a direita ($\mu_m > 0$). Com esta propriedade, Gonçalves, Vilhena e Segatto [Gonçalves et al., 2002], eliminaram o *overflow*, decompondo-se a solução \mathbf{LTS}_N em componentes que apresentam apenas direções positivas ($\mu_m > 0$) e negativas ($\mu_m < 0$). Portanto, desta forma, a solução é reescrita como:

$$\Psi(x) = \mathbf{B}^+(x - L)\Psi(L) + \mathbf{B}^-(x)\Psi(0) + \mathbf{H}(x) \quad (2.48)$$

em que o vetor $\mathbf{H}(x)$ é dado por:

$$\mathbf{H}(x) = \int_L^x \mathbf{B}^+(x - \varepsilon) \mathbf{Q}(\varepsilon) d\varepsilon + \int_0^x \mathbf{B}^-(x - \varepsilon) \mathbf{Q}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.49)$$

e a matriz $\mathbf{B}(x)$ é reescrita como $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}^+(x) + \mathbf{B}^-(x)$, com:

$$\mathbf{B}^\pm(x) = \mathbf{X} \mathbf{E}^\pm(x) \mathbf{X}^{-1}, \quad (2.50)$$

onde

$$\mathbf{E}^+(x) = \begin{cases} e^{d_i x} & \text{se } d_i > 0 \\ 0 & \text{se } d_i < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}^-(x) = \begin{cases} e^{d_i x} & \text{se } d_i < 0 \\ 0 & \text{se } d_i > 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Para encontrar as componentes desconhecidas, $\Psi_2(0)$ e $\Psi_1(L)$, que saem nas fronteiras do domínio, dos vetores $\Psi(0)$ e $\Psi(L)$ respectivamente, aplicam-se as condições de contorno (2.23) e (2.24) na equação (2.48), e reescrevem os sistemas de blocos de matrizes (2.45), obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(L) \\ \Psi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^+(-L) & \mathbf{B}_{12}^-(0) \\ \mathbf{B}_{21}^+(0) & \mathbf{B}_{22}^-(L) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{11}^-(0)) \Psi_1(0) - \mathbf{B}_{12}^+(-L) \Psi_2(L) - \mathbf{H}_1(0) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{22}^+(0)) \Psi_2(L) - \mathbf{B}_{21}^-(L) \Psi_1(0) - \mathbf{H}_2(L) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Para determinar os vetores $\Psi(0)$ e $\Psi(L)$, utiliza-se o procedimento análogo ao descrito anteriormente, e tem-se $\Psi(x)$.

Com esta solução, todos os argumentos das exponenciais que aparecem na solução \mathbf{LTS}_N , possuem expoentes negativos, e portanto, a intensidade de radiação pode ser determinada para grandes espessuras ou para elevadas ordens de quadratura.

Observa-se, que por facilidade computacional, reescreve-se a solução \mathbf{LTS}_N , dada pela equação (2.33), pela seguinte expressão:

$$\Psi(x) = \mathbf{X} \mathbf{E}(x) \mathbf{Y} + \mathbf{H}(x), \quad (2.53)$$

onde $\mathbf{E}(x)$ pode ser reescrita como uma matriz, dada por:

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ e^{d_i x} & \text{se } i = j \text{ e } d_i < 0 \\ e^{d_i(x-L)} & \text{se } i = j \text{ e } d_i > 0 \end{cases}$$

e $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1}\Psi(0)$, um vetor a ser determinado pela aplicação das condições de contorno nas fronteiras do meio.

A partir deste ponto, considera-se que a solução \mathbf{LTS}_N da equação (2.7), passa a ser dada pela seguinte expressão:

$$\Psi(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{H}(x), \quad (2.54)$$

com

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}\mathbf{E}(x), \quad (2.55)$$

e $\mathbf{H}(x)$ dado pela equação (2.49).

2.3 MÉTODO \mathbf{LTS}_N PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MULTIREGIÕES

Foi visto na seção anterior toda a derivação da formulação \mathbf{LTS}_N , para problemas de transporte em meios homogêneos. A partir de agora, devido a característica do problema que se quer resolver, apresenta-se nessa seção, a derivação da formulação \mathbf{LTS}_N para problemas envolvendo um meio não homogêneo, formado de K camadas ou regiões homogêneas. Considera-se que estes K problemas homogêneos são conectados, entre si, pela continuidade de fluxo nas interfaces e pela condição de contorno nos dois extremos, como mostra a Figura 2.1, abaixo:

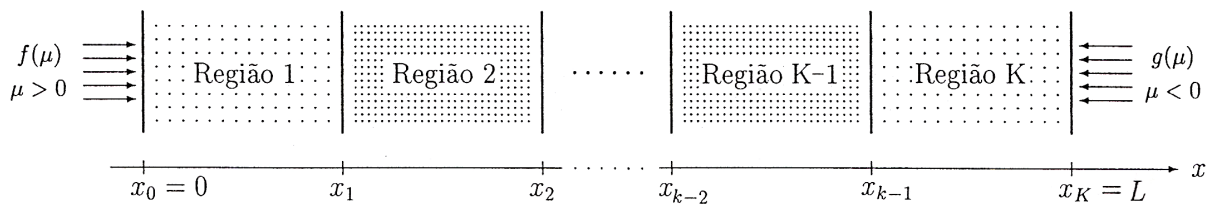


Figura 2.1 – Representação esquemática de uma placa com K regiões.

Em cada placa ou região, a equação \mathbf{S}_N que rege este problema, é descrita por:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_m^k(x) + \Psi_m^k(x) = \frac{\omega^k}{2} \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} \beta_l^k P_l(\mu_m) \sum_{n=1}^N w_n P_l(\mu_n) \Psi_n^k(x) + Q_m^k(x), \quad (2.56)$$

a qual fornece um conjunto de (NK) equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, com $0 < x < x_k$ e $\Psi_m^k(x)$, sendo a intensidade de radiação em x e na direção discreta μ_m da k -ésima placa ou região.

Dividindo a equação (2.56) por μ_m , obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \Psi_m^k(x) + \frac{\Psi_m^k(x)}{\mu_m} = \frac{\omega^k}{2\mu_m} \sum_{l=0}^{\mathbb{L}} \beta_l^k P_l(\mu_m) \sum_{n=1}^N w_n P_l(\mu_n) \Psi_n^k(x) + \frac{Q_m^k(x)}{\mu_m}, \quad (2.57)$$

com $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, K$, $x_0 = 0$, $x_K = L$, $m = 1, 2, \dots, N$, sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\Psi_m^1(x_0) = f_m, \quad \text{para} \quad m = 1, \dots, \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad \mu_m > 0 \quad (2.58)$$

e

$$\Psi_{m+\frac{N}{2}}^K(x_K) = g_m, \quad \text{para} \quad m = 1, \dots, \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad \mu_{m+\frac{N}{2}} < 0, \quad (2.59)$$

e as condições de continuidade da intensidade de radiação nas interfaces das regiões dadas por:

$$\Psi_m^k(x_k) = \Psi_m^{k+1}(x_k), \quad (2.60)$$

com $m = 1, 2, \dots, N$ e $k = 1, 2, \dots, K - 1$

Por simplicidade de aplicação do **método LTS_N**, em problemas de multirregiões, fez-se uma translação na variável espacial x para cada região de forma a obter-se um conjunto de K placas justapostas. Assim, em cada placa ou região tem-se:

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad (2.61)$$

então, faz-se a translação da seguinte forma:

$$\tau = x - x_{k-1}, \quad (2.62)$$

em que $k = 1, 2, \dots, K$. Este procedimento é mostrado na Figura 2.2 abaixo:

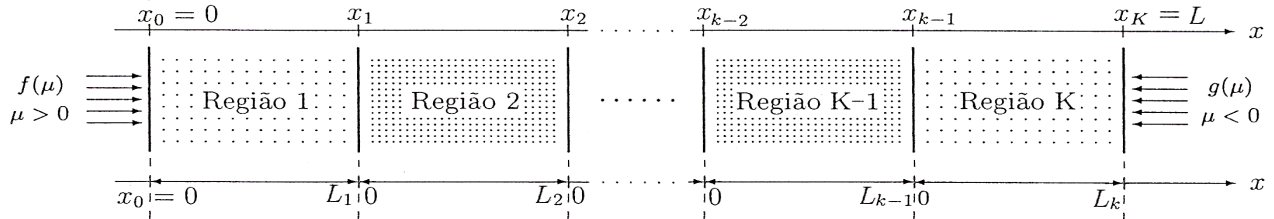


Figura 2.2 – Representação gráfica de uma placa com K regiões com translação na variável espacial x .

Assim, pode-se notar que $\tau \in [0, L_k]$, onde $L_k = x_k - x_{k-1}$ é a espessura da região k . Portanto, tem-se K problemas homogêneos acoplados pela condição de contorno (2.58) e (2.59) e pelas condições de continuidade de fluxo nas interfaces, agora definidas por:

$$\Psi_m^k(L_k) = \Psi_m^{k+1}(0), \quad (2.63)$$

com $k = 1, \dots, K - 1$ e $m = 1, 2, \dots, N$.

Para o problema de multiregião a equação (2.57) pode ser reescrita na forma matricial, em cada região, da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(x) - \mathbf{A}^k \Psi^k(x) = \mathbf{Q}^k(x), \quad (2.64)$$

a qual, a menos do índice k , mostra-se idêntica a equação (2.17), que representa a região homogênea. Aplicando o **método LTS_N** na equação (2.64), obtêm-se equações muito semelhantes às do problema da **seção 2.2**, concluindo-se facilmente que a solução da equação acima tem uma sequência perfeitamente igual a equação (2.17), só que agora, para cada região, diferenciando apenas o número de problemas acoplados pelas condições de contorno e continuidade de fluxo nas interfaces, formando um sistema K vezes maior que o problema homogêneo descrito anteriormente.

Assim, usando em cada placa ou região o mesmo raciocínio para o problema de

transporte de radiação em um meio homogêneo desenvolvido na seção anterior, pode-se agora reescrever a solução \mathbf{LTS}_N da k -ésima placa, descrita pela equação (2.54), da seguinte forma:

$$\mathbf{\Psi}^k(x) = \mathbf{B}^k(x)\mathbf{Y}^k + \mathbf{H}^k(x), \quad (2.65)$$

com $\mathbf{B}^k(x)$ e $\mathbf{H}^k(x)$ dados pelas equações (2.55) e (2.49), respectivamente, e \mathbf{Y}^k é um vetor de ordem N a ser determinado a seguir, para $k = 1, 2, \dots, K$.

Para um problema \mathbf{S}_N sem o termo de fonte ($\mathbf{Q}(x) = 0$), a solução \mathbf{LTS}_N (2.65) é simplificada para a seguinte forma:

$$\mathbf{\Psi}^k(x) = \mathbf{B}^k(x)\mathbf{Y}^k \quad (2.66)$$

Para calcular os vetores desconhecidos \mathbf{Y}^k da equação (2.65), com $k = 1, 2, \dots, K$, necessários para obter a intensidade de radiação $\mathbf{\Psi}^k(x)$, seguem-se as seguintes etapas.

Primeiramente, utiliza-se a condição de contorno no início da placa, em $x = 0$, onde conhece-se apenas as $N/2$ primeiras componentes do vetor $\mathbf{\Psi}(0)$, dado por:

$$\mathbf{\Psi}_1^1(0) = f, \quad (2.67)$$

na equação abaixo:

$$\mathbf{\Psi}^1(x) = \mathbf{B}^1(x)\mathbf{Y}^1 + \mathbf{H}^1(x) \quad (2.68)$$

Quando aplica-se esta condição de contorno, gera-se o seguinte sistema linear de blocos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_1^1(0) \\ \mathbf{\Psi}_2^1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^1(0) & \mathbf{B}_{12}^1(0) \\ \mathbf{B}_{21}^1(0) & \mathbf{B}_{22}^1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^1 \\ \mathbf{Y}_2^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^1(0) \\ \mathbf{H}_2^1(0) \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

e como se conhece apenas o vetor $\mathbf{\Psi}_1^1(0)$, o sistema linear (2.69), terá $N/2$ equações dadas por:

$$\mathbf{\Psi}_1^1(0) = \mathbf{B}_{11}^1(0)\mathbf{Y}_1^1 + \mathbf{B}_{12}^1(0)\mathbf{Y}_2^1 + \mathbf{H}_1^1(0) \quad (2.70)$$

Em seguida, usam-se as condições de interface entre as placas k e $k + 1$, dadas por:

$$\Psi_m^k(L_k) = \Psi_m^{k+1}(0), \quad (2.71)$$

com $k = 1, 2, \dots, K - 1$ e $m = 1, 2, \dots, N$. Substituindo estas condições de interfaces na equação (2.65), tem-se:

$$\mathbf{B}^k(L_k)\mathbf{Y}^k + \mathbf{H}^k(L_k) = \mathbf{B}^{k+1}(0)\mathbf{Y}^{k+1} + \mathbf{H}^{k+1}(0), \quad (2.72)$$

obtendo-se assim $(K - 1)N$ equações.

Por último, utiliza-se a condição de contorno no final da placa, em $x = L_K$, onde conhece-se apenas as $N/2$ últimas componentes do vetor $\Psi(L)$, dada por:

$$\Psi_2^K(L_K) = g, \quad (2.73)$$

na equação abaixo:

$$\Psi^K(x) = \mathbf{B}^K(x)\mathbf{Y}^K + \mathbf{H}^K(x) \quad (2.74)$$

Quando aplica-se esta condição de contorno, gera-se o seguinte sistema linear de blocos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1^K(L_K) \\ \Psi_2^K(L_K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^K(L_K) & \mathbf{B}_{12}^K(L_K) \\ \mathbf{B}_{21}^K(L_K) & \mathbf{B}_{22}^K(L_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^K \\ \mathbf{Y}_2^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^K(L_K) \\ \mathbf{H}_2^K(L_K) \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

e como se conhece apenas o vetor $\Psi_2^K(L_K)$, o sistema linear (2.75), terá $N/2$ equações dadas por:

$$\Psi_2^K(L_K) = \mathbf{B}_{21}^K(L_K)\mathbf{Y}_1^K + \mathbf{B}_{22}^K(L_K)\mathbf{Y}_2^K + \mathbf{H}_2^K(L_K), \quad (2.76)$$

gerando assim mais $N/2$ equações.

Desta maneira, após finalizar estas etapas, gera-se com as equações (2.70), (2.72) e (2.76), um sistema de (NK) equações, que possibilita obter os vetores \mathbf{Y}^k . Este sistema pode matricialmente ser escrito como:

$$\mathbf{CY} = \mathbf{F}, \quad (2.77)$$

onde \mathbf{C} é uma matriz de ordem (NK) , representada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^1(0) & \mathbf{B}_{12}^1(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}^1(L_1) & -\mathbf{B}^2(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}^{k+1}(L_{k+1}) & -\mathbf{B}^K(0) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_{21}^K(L_K) \mathbf{B}_{22}^K(L_K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

e, \mathbf{F} e \mathbf{Y} , são vetores também de ordem (NK) , descritos por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Psi_1^1(0) - \mathbf{H}_1^1(0) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^2(0) - \mathbf{H}^1(L_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{k+1}(0) - \mathbf{H}^K(L_K) \\ \vdots \\ \Psi_2^K(L_K) - \mathbf{H}_2^K(L_K) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_N^1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_1^{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_N^{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_1^K \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_N^K \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Resolvendo-se este sistema de equações acima, têm-se os vetores \mathbf{Y}^k , que possibilita encontrar a intensidade de radiação em cada placa, através da equação (2.65).

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO LTS_N PARA O PROBLEMA ISOTRÓPICO COM ALBEDO VARIÁVEL EM UMA PLACA PLANA NÃO HOMOGÊNEA

Neste capítulo, apresenta-se o problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa não homogênea, que será resolvido pelo **método LTS_N** . Para tanto, faz-se uma análise da formulação descrita no capítulo anterior, onde o coeficiente de albedo (ω) varia continuamente com a variável espacial x ao longo da espessura da placa. Este tipo de situação, representa, por exemplo, a transferência de radiação na atmosfera com propriedades radiativas não homogêneas. Problemas com estas características já foram resolvidos com diferentes abordagens matemáticas, e entre elas, cita-se o trabalho de Garcia e Siewert, [1982], mediante ao uso do método F_N com coeficiente de albedo variável. Este problema também foi resolvido por Vargas e Vilhena, [2004], usando o método da Decomposição proposto por Adomian, aplicado à aproximação S_N do problema. Neste caso os autores desenvolveram uma formulação considerando o coeficiente de albedo variável genérico, e logo após, particularizaram para o caso exponencial, com o objetivo de comparar com os resultados obtidos por Garcia e Siewert, [1982].

Tendo-se em vista, que os resultados apresentados pelos autores anteriores referem-se a uma relação entre as quantidades de radiação emergentes nas fronteiras do meio, relativas as quantidades incidentes nesta mesma fronteira, (\mathbf{A}^* e \mathbf{B}^*), os resultados apresentados nesta dissertação também avaliam tais quantidades.

Assim, primeiramente mostra-se a formulação do problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa finita não homogênea, apresentando-se as expressões para os parâmetros \mathbf{A}^* , referente a $x = 0$, e \mathbf{B}^* , referente a $x = L$, os quais relacionam as intensidades de radiação que saem nos extremos da placa. Em seguida, mostra-se a metodologia desenvolvida neste trabalho, para solucionar o problema, subdividindo a placa em várias subplacas e considerando-se em cada uma delas o coeficiente de albedo constante.

3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Nessa seção, afim de resolver a equação de transferência radiativa em uma placa com coeficiente de albedo (ω) de comportamento variável, considera-se o problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa finita não homogênea, com ausência de fonte, descrito pela seguinte equação:

$$\mu \frac{d}{dx} \Psi(x, \mu) + \Psi(x, \mu) = \frac{\omega(x)}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu') d\mu', \quad (3.1)$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\Psi(0, \mu) = F_1(\mu), \quad \text{para } \mu > 0 \quad (3.2)$$

e

$$\Psi(L, -\mu) = F_2(\mu), \quad \text{para } \mu > 0, \quad (3.3)$$

onde L é o comprimento da placa em unidades de livre caminho médio, $F_1(\mu)$ e $F_2(\mu)$ são as radiações incidentes na fronteira do domínio, $x \in [0, L]$ é a variável ótica, $\Psi(x, \mu)$ é a intensidade de radiação, $\mu \in [-1, 1]$ é a direção cosseno da propagação de radiação, e $\omega(x)$ o coeficiente de albedo.

Conhecidos $F_1(\mu)$ e $F_2(\mu)$, as intensidades de radiação que entram no contorno da placa, deseja-se determinar as intensidades de radiação que saem nos mesmos pontos e as quantidades, \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{A}^* = \frac{\int_0^1 \Psi(0, -\mu) \mu d\mu}{\int_0^1 [F_1(\mu) + F_2(\mu)] \mu d\mu} \quad (3.4)$$

e

$$\mathbf{B}^* = \frac{\int_0^1 \Psi(L, \mu) \mu d\mu}{\int_0^1 [F_1(\mu) + F_2(\mu)] \mu d\mu} \quad (3.5)$$

que relacionam as correntes emergentes com as incidentes na fronteira $x = 0$ e $x = L$,

respectivamente.

Fisicamente, \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* representam as quantidades de radiação emergentes nas fronteiras em $x = 0$ e em $x = L$, respectivamente, em relação à quantidade de radiação incidente em ambas as fronteiras.

Discretizando as integrais das equações (3.4) e (3.5), e usando a quadratura de Gauss-Legendre, afim de, calcular as quantidades, \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , pela solução \mathbf{LTS}_N , tem-se:

$$\int_0^1 \Psi(0, -\mu) \mu d\mu = \sum_{i=1}^{N/2} \Psi(0, -\mu_i) \mu_i w_i = \sum_{i=1}^{N/2} \Psi_{N+1-i}(0) \mu_i w_i \quad (3.6)$$

e

$$\int_0^1 \Psi(L, \mu) \mu d\mu = \sum_{i=1}^{N/2} \Psi_i(L) \mu_i w_i \quad (3.7)$$

Agora, substituindo as expressões (3.6) e (3.7) em (3.4) e (3.5) respectivamente, obtém-se:

$$\mathbf{A}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N/2} \Psi_{N+1-i}(0) \mu_i w_i}{\int_0^1 [F_1(\mu) + F_2(\mu)] \mu d\mu} \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{B}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N/2} \Psi_i(L) \mu_i w_i}{\int_0^1 [F_1(\mu) + F_2(\mu)] \mu d\mu} \quad (3.9)$$

Objetivando a resolução do problema descrito pela equação (3.1) para calcular \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , vai-se agora utilizar a aproximação \mathbf{S}_N encontrada do problema, aproximando o termo integral por uma Quadratura Gaussiana e aplicando o método de colocação na variável angular, usando a função Delta de Dirac como função teste e as raízes do polinômio de Legendre de grau N como os pontos de colocação, dada por:

$$\frac{d}{dx} \Psi_k(x) + \frac{\Psi_k(x)}{\mu_k} = \frac{\omega(x)}{2\mu_k} \sum_{i=1}^N \Psi_i(x) w_i, \quad (3.10)$$

onde por simplicidade, $\Psi_k(x) = \Psi(\mu_k, x)$, com $k = 1, \dots, N$, com N par e sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\Psi_k(0) = F_1(\mu_k), \quad \text{para } k = 1, \dots, N/2 \quad (3.11)$$

e

$$\Psi_k(L) = F_2(\mu_k), \quad \text{para } k = N/2 + 1, \dots, N \quad (3.12)$$

Na próxima seção, será descrita a formulação de como calcular a solução do problema mostrado acima, através do **método LTS_N**.

3.2 FORMULAÇÃO DO COEFICIENTE DE ALBEDO PARA UM MEIO NÃO HOMOGENEO

Nesta seção, desenvolve-se uma metodologia para o problema de transferência radiativa em uma placa plana não homogênea, com o coeficiente de albedo genérico, para ser resolvido pelo **método LTS_N**, descrito no capítulo anterior, com o objetivo de encontrar a intensidade de radiação $\Psi(x)$ e em seguida calcular os parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* .

Sabe-se, que estes parâmetros já foram calculados para um problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa finita não homogênea com coeficiente de albedo de comportamento exponencial, variando continuamente ao longo da espessura da placa [Garcia e Siewert, 1982]. Com uma meta semelhante, mas mais abrangente, vai-se agora desenvolver uma abordagem do problema físico, resolvendo-se pelo **método LTS_N**, que foi desenvolvido considerando albedo constante, para uma placa homogênea. Para tanto, surgiu a necessidade de dividir a placa em várias subplacas ou regiões, assumindo, em cada uma delas, um coeficiente de albedo constante, e definido como sendo um valor integral médio, dado pela seguinte expressão:

$$\omega^k = \frac{1}{L_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega(x) dx, \quad (3.13)$$

com $k = 1, 2, \dots, K$, $x_0 = 0$, $x_K = L$, $L_k = x_k - x_{k-1}$.

O critério usado para estimar o número de subplacas e o espaçamento entre elas é arbitrário, depende do comportamento da função considerada para o coeficiente de albedo.

Assim, com a expressão (3.13), pode-se calcular os parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , mediante o uso do **método LTS_N**, para qualquer comportamento do coeficiente de albedo, ou seja, para qualquer forma de função matemática que o descreva. Com tal abordagem, o **método LTS_N** é eficaz no tratamento do problema físico mencionado.

Portanto, uma vez encontrada a intensidade de radiação ($\Psi(x)$), para o problema de transferência radiativa de multiregião em uma placa, pode-se agora, avaliar os parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , pelas equações (3.8) e (3.9), descritas anteriormente.

3.2.1 Coeficiente de Albedo com Comportamento Exponencial

Neste trabalho, com a finalidade de comparar os resultados dos parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , com os resultados de Garcia e Siewert, [1982], e Vargas e Vilhena, [2004], necessitou-se particularizar o coeficiente de albedo como uma função de comportamento exponencial, dado pela seguinte expressão:

$$\omega(x) = w_0 e^{\frac{-x}{s}} \quad \text{em que} \quad 0 < w_0 \leq 1 \quad \text{e} \quad s > 0. \quad (3.14)$$

Substituindo a equação (3.14), na equação (3.13), tem-se:

$$\omega^k = \frac{sw_0}{L_k} \left(e^{\frac{-x_{k-1}}{s}} - e^{\frac{-x_k}{s}} \right) \quad (3.15)$$

Devido ao coeficiente de albedo variar exponencialmente, sabe-se que próximo a fronteira, em $x = 0$, a função tem um comportamento mais parabólico ou polinomial e à medida que se aproxima da fronteira em $x = L$, a função aproxima-se de uma reta. Pelo fato, de usar a expressão (3.15), para o albedo, necessitou-se dividir a placa em espessuras menores no início e espessuras maiores na parte final, com o propósito de obter melhores resultados com menor tempo computacional.

Desta forma, alcança-se o principal objetivo do trabalho, que é encontrar a solução da equação de transporte de radiação pelo **método LTS_N** e calcular as quantidades de interesse. Para validar esta dissertação, os resultados serão comparados com os resultados de Garcia e Siewert, [1982], e Vargas e Vilhena, [2004], os quais usaram coeficiente de albedo com comportamento exponencial para diferentes valores de s , w_0 e L_k .

No próximo capítulo, faz-se a análise e discussão destes resultados.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, apresentam-se os resultados numéricos do problema isotrópico descrito no capítulo anterior, resolvido pelo **método** \mathbf{LTS}_N , com o objetivo de validar a formulação desenvolvida nesta dissertação para o cálculo dos parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , considerando o coeficiente de albedo variando exponencialmente. A seguir, comparam-se estes resultados obtidos com os disponíveis na literatura, apresentados por Garcia e Siewert, [1982], que usaram o método \mathbf{F}_N , e por Vargas e Vilhena, [2004], que usaram o método da decomposição proposto por Adomian.

Para obter estes resultados numéricos implementou-se os algoritmos em Fortran 90, utilizando-se precisão dupla, em um microcomputador tipo Pentium 4, 2.4 GHz de velocidade e 1 GHz de memória RAM.

4.1 Resultados Numéricos

Considera-se o problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa finita não homogênea, com albedo variável, descrito no capítulo 3, o qual foi resolvido pelo método \mathbf{LTS}_N , com condições de contorno $F_1(\mu) = 1$ em $x = 0$ e $F_2(\mu) = 0$ em $x = L$, $w_0 = 0.7$, $w_0 = 0.9$ e $w_0 = 1.0$; $s = 1$, $s = 10$, $s = 100$ e $s = 1000$. As tabelas que seguem abaixo, referem-se aos resultados calculados com N variando de 30 à 80, para as espessuras $L = 0.1$, $L = 1$ e $L = 5$.

Nas **tabelas 4.1** e **4.2** abaixo, apresentam-se os resultados numéricos para os parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , respectivamente, considerando-se uma placa com espessura $L = 0.1$, a qual foi usado um $N = 30$ e 25 subplacas.

Tabela 4.1 – Resultados de \mathbf{A}^* , calculados pelo método \mathbf{DS}_N , \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 0.1$.

w_0	s	$\mathbf{A}^*(\mathbf{DS}_N)$	$\mathbf{A}^*(\mathbf{F}_N)$	$\mathbf{A}^*(\mathbf{LTS}_N)$
0.7	1	0.531624(-1)	0.530284(-1)	0.530284(-1)
	10	0.556210(-1)	0.554877(-1)	0.554878(-1)
	100	0.558736(-1)	0.557431(-1)	0.557433(-1)
	1000	0.559019(-1)	0.557687(-1)	0.557689(-1)
0.9	1	0.707865(-1)	0.706233(-1)	0.706233(-1)
	10	0.741949(-1)	0.740329(-1)	0.740330(-1)
	100	0.745496(-1)	0.743877(-1)	0.743879(-1)
	1000	0.745852(-1)	0.744233(-1)	0.744235(-1)
1.0	1	0.800804(-1)	0.799031(-1)	0.799031(-1)
	10	0.840173(-1)	0.838411(-1)	0.838413(-1)
	100	0.844274(-1)	0.842514(-1)	0.842517(-1)
	1000	0.844686(-1)	0.842925(-1)	0.842928(-1)

Tabela 4.2 – Resultados de \mathbf{B}^* , calculados pelo método \mathbf{DS}_N , \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 0.1$.

w_0	s	$\mathbf{B}^*(\mathbf{DS}_N)$	$\mathbf{B}^*(\mathbf{F}_N)$	$\mathbf{B}^*(\mathbf{LTS}_N)$
0.7	1	0.884630	0.884557	0.884558
	10	0.887307	0.887231	0.887232
	100	0.887585	0.887509	0.887511
	1000	0.887613	0.887537	0.887539
0.9	1	0.901922	0.901829	0.901829
	10	0.905624	0.905526	0.905527
	100	0.906010	0.905912	0.905913
	1000	0.906048	0.905950	0.905952
1.0	1	0.911046	0.910943	0.910943
	10	0.915317	0.915208	0.915209
	100	0.915763	0.915653	0.915655
	1000	0.915808	0.915698	0.915699

Observa-se que em ambas as tabelas os resultados obtidos com a solução \mathbf{LTS}_N concordam com os resultados da literatura [Garcia e Siewert, 1982], em até cinco algarismos significativos, enquanto que os resultados calculados com o método \mathbf{DS}_N [Vargas e Vilhena, 2004], concordam em apenas dois algarismos significativos.

Nas tabelas 4.3 e 4.4 abaixo, apresentam-se os resultados numéricos para os parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , respectivamente, considerando-se uma placa com espessura $L = 1.0$, a qual foi usado um $N = 60$ e 48 subplacas.

Tabela 4.3 – Resultados de \mathbf{A}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 1.0$.

w_0	s	$\mathbf{A}^*(\mathbf{F}_N)$	$\mathbf{A}^*(\mathbf{LTS}_N)$
0.7	1	0.152071	0.152072
	10	0.211600	0.211602
	100	0.220966	0.220968
	1000	0.221959	0.221960
0.9	1	0.218920	0.218921
	10	0.330211	0.330213
	100	0.350287	0.350289
	1000	0.352468	0.352469
1.0	1	0.258891	0.258892
	10	0.412506	0.412509
	100	0.442863	0.442865
	1000	0.446217	0.446219

Tabela 4.4 – Resultados de \mathbf{B}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 1.0$.

w_0	s	$\mathbf{B}^*(\mathbf{F}_N)$	$\mathbf{B}^*(\mathbf{LTS}_N)$
0.7	1	0.293658	0.293659
	10	0.358263	0.358264
	100	0.369812	0.369814
	1000	0.371056	0.371058
0.9	1	0.328284	0.328285
	10	0.447381	0.447382
	100	0.471755	0.471757
	1000	0.474444	0.474446
1.0	1	0.349433	0.349434
	10	0.512428	0.512429
	100	0.548858	0.548860
	1000	0.552946	0.552948

Observa-se que em ambas as tabelas os resultados obtidos com a solução \mathbf{LTS}_N concordam com os resultados da literatura [Garcia e Siewert, 1982], em até cinco algarismos significativos.

Nas tabelas 4.5 e 4.6 abaixo, apresentam-se os resultados numéricos para os parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , respectivamente, considerando-se uma placa com espessura $L = 5.0$, a qual foi usado um $N = 80$ e 56 subplacas.

Tabela 4.5 – Resultados de \mathbf{A}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 5.0$.

ω_0	s	$\mathbf{A}^*(\mathbf{F}_N)$	$\mathbf{A}^*(\mathbf{LTS}_N)$
0.7	1	0.155240	0.155241
	10	0.235414	0.235416
	100	0.254017	0.254019
	1000	0.256264	0.256266
0.9	1	0.224315	0.224316
	10	0.395420	0.395422
	100	0.463707	0.463709
	1000	0.474979	0.474981
1.0	1	0.265892	0.265894
	10	0.531182	0.531188
	100	0.725972	0.725974
	1000	0.784073	0.784075

Tabela 4.6 – Resultados de \mathbf{B}^* , calculados pelo método \mathbf{F}_N e \mathbf{LTS}_N para $L = 5.0$.

w_0	s	$\mathbf{B}^*(\mathbf{F}_N)$	$\mathbf{B}^*(\mathbf{LTS}_N)$
0.7	1	0.233529(-2)	0.233530(-2)
	10	0.647245(-2)	0.647247(-2)
	100	0.113268(-1)	0.113269(-1)
	1000	0.122743(-1)	0.122745(-1)
0.9	1	0.261169(-2)	0.261170(-2)
	10	0.136607(-1)	0.136609(-1)
	100	0.431419(-1)	0.431421(-1)
	1000	0.522190(-1)	0.522192(-1)
1.0	1	0.278246(-2)	0.278247(-2)
	10	0.228739(-1)	0.228739(-1)
	100	0.136939	0.136941
	1000	0.198147	0.198149

Observa-se que em ambas as tabelas os resultados obtidos com a solução \mathbf{LTS}_N concordam com os resultados da literatura [Garcia e Siewert, 1982], em até cinco algarismos significativos.

Para manter a precisão dos resultados em cinco algarismos significativos variou-se apenas o número de subplacas em cada problema, mantendo-se o valor de N fixo. Desta forma, por exemplo, mostra-se na **tabela 4.7** a convergência dos resultados em relação ao número de subplacas, considerando $N = 80$, $w_0 = 1.0$, $s = 10$ e $L = 5.0$.

Tabela 4.7 – Convergência dos resultados em relação ao número de sub-placas considerando $N = 80$, $w_0 = 1.0$, $s = 10$ e $L = 5.0$.

número de regiões	$\mathbf{A}^*(\mathbf{LTS}_N)$	$\mathbf{B}^*(\mathbf{LTS}_N)$
8	0.527552	0.227920(-1)
16	0.530358	0.228595(-1)
24	0.530925	0.228599(-1)
32	0.531084	0.228671(-1)
40	0.531151	0.228719(-1)
48	0.531175	0.228734(-1)
54	0.531177	0.228739(-1)
56	0.531188	0.228739(-1)

Portanto, variando-se apenas o número de regiões, os resultados convergem para os dados da literatura, e assim com a análise dos resultados, fica claro que a solução desenvolvida nesta dissertação, mediante ao uso do método \mathbf{LTS}_N para calcular os parâmetros \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* é viável e gera uma boa aproximação independente da espessura ótica.

5. CONCLUSÃO

No presente trabalho foi apresentado a formulação do **método** \mathbf{LTS}_N para o problema isotrópico de transferência radiativa em uma placa finita homogênea e posteriormente para uma placa não homogênea, com coeficiente albedo variando continuamente ao longo de sua espessura. Como o **método** \mathbf{LTS}_N foi desenvolvido considerando o coeficiente de albedo constante, em uma placa homogênea, para o problema não homogêneo dividiu-se a placa em várias subplacas, assumindo em cada uma delas albedo constante e representado pelo seu valor integral médio.

Para validar a formulação desenvolvida, aplicou-se o **método** \mathbf{LTS}_N no problema de transferência radiativa com albedo de comportamento exponencial variando com a espessura da placa e em seguida utilizou-se a solução para calcular os parâmetros superficiais de transferência radiativa \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* , os quais foram comparados com os dados da literatura [Garcia e Siewert, 1982] e [Vargas e Vilhena, 2004]. Estas comparações são mostradas através das tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6. Nas tabelas 4.1 e 4.2 os resultados foram comparadas com os resultados de Vargas e Vilhena, [2004] e Garcia e Siewert, [1982], que usaram o método \mathbf{F}_N e o método \mathbf{DS}_N , respectivamente. Observa-se, que os resultados obtidos neste trabalho são bons, pois aproximam em até cinco algarismos significativos, enquanto que, os resultados de Vargas e Vilhena concordam em apenas dois algarismos significativos.

Sabe-se, que tanto a formulação aqui apresentada, como a desenvolvida por Vargas e Vilhena, [2004], aplica-se para um coeficiente de albedo de comportamento genérico. A inconveniência da formulação desenvolvida por Vargas e Vilhena, [2004], deve-se ao fato da solução estar em forma de série, e portanto, só funciona dentro do seu raio de convergência, limitando de alguma forma o uso da formulação. O confronto entre os resultados vindo das duas formulações é apresentado nas tabelas 4.1 e 4.2.

Desta forma, conclui-se que o **método** \mathbf{LTS}_N aplicado a problemas de transporte

de radiação em uma placa plana não homogênea, resolvido nesta dissertação, é um método genérico com relação ao comportamento da função do coeficiente de albedo. Também, observa-se que não é preciso ter limitação quanto à espessura da placa, pois a única mudança necessária é o número de regiões em que a placa original é dividida, aumentando assim, o sistema linear a ser resolvido.

Para finalizar, salienta-se que o objetivo deste trabalho foi atingido, porque mostra-se a viabilidade do método em resolver problemas de transporte de radiação com coeficiente albedo variável. E assim, como futuro trabalho, pretende-se aplicar esta formulação a problemas vinculados a astrofísica com albedo de diferentes comportamentos funcionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barichello, L. B., 1992. **"Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenadas Discretas Unidimensionais"**, *PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)*, Porto Alegre.

Barichello, L. B. e Vilhena, M. T., 1993a. "A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation", *Kerntechnik*, vol. 58, pp. 182–184.

Barichello, L. B. e Vilhena, M. T., 1993b. "Um Problema Inverso em Transporte de Nêutrons e Radiação", **Anais do IX ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Caxambu, MG, Brasil, pp. 22–24.

Barroso, P., 2000. **"Cálculo do Problema de Multigrupo pelo Método LTS_N "**, *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Batistela, C. H. F. e Vilhena, M. T., 1997a. "Cálculo de Criticalidade pelo Método LTS_N ", **XI ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Poços de Caldas, M.G., vol. 1, pp. 226–231.

Batistela, C. H. F. e Vilhena, M. T., 1997b. "Criticality by the LTS_N Method", **Journal of Nuclear Science and Technology**, vol. 34, pp. 603–606.

Batistela, C. H. F., Vilhena, M. T. e Borges, V., 1999. "Determination of the Effective Multiplication Factor in Aslab by the LTS_N Method", **Annals of Nuclear Science**, vol. 26, pp. 761–767.

Borges, V. e Vilhena, M. T., 2002. "Uso do Método LTS_N Aplicado a Problemas de Engenharia Nuclear", **INAC - International Nuclear Atlantic Conference - XIII ENFIR**.

Brancher, J. D., 1998. "**Formulação Analítica para a Solução do Problema de Ordenadas Discretas pelo Método LTS_N , para Valores de N Grandes**", *PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Minas, Metalurgia e Materiais (PPGEM)*, Porto Alegre.

Brancher, J. D., Segatto, C. F. e Vilhena, M. T., 1999. "The LTS_N Solution for Radiative Transfer Problem without Azimutal Symmetry with Severe Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Great Britan, vol.62, pp. 743–753.

Cardona, A. e Vilhena, M. T., 1998. "A Comparative Study of Analytical Solutions for Some One-Dimensional Transport Equation Approximations", **Progress in Nuclear Energy**, pp. 289–300.

Case, K. M., 1960. "Elementary Solution of Transport Equation and their Applications", **Annals of Physic**, vol. 9, pp. 1–23.

Chandrasekhar, S., 1950 "**Radiative Transfer**", Oxford University Press, Landon.

Chandrasekhar, S., 1960 "Radiative Transfer", New York: **Dover Publications, Inc.**

Chies, R. P., 1996. "**Cálculo da Espessura de Blindagem pela Combinação do Método LTS_N , e Decomposição**", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Duderstadt, J. e Hamilton, L., 1976. "**Nuclear Reator Analysis**", *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.

Duderstadt, J. e Martin, W. R., 1979. "**Transport Theory**", *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.

Garcia, R. D. M. e Siewert, C. E., 1982. "Radiative Transfer in Finite Inhomogeneous Plane-Parallel Atmospheres", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, North Carolina, USA, vol. 27, pp. 141–148.

Gonçalves, G. A., Segatto, C. F. e Vilhena, M. T., 2000. "The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Quadrature", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 66, pp. 271–276.

Gonçalves, G. A., Oliveira, G. O. e Vilhena, M. T., 2002. "The LTS_N Solution of the Adjoint Neutron Transport Equation with Arbitrary Source for High Order of Quadrature in a Homogeneous Slab", **Annals of nuclear energy**, USA, vol. 29, pp. 561–569.

Gonzalez, T., Segatto, C. F. e Vilhena, M. T., 2007. "A Closed Form Solution for the One-Group Time-Dependent Transport Equation in a Slab by the LTS_N Method", **INAC - International Nuclear Atlantic Conference**, Santos, SP.

Hauser, E. B., Vilhena, M. T. e Barros, R. C., 2007a. "Análise Espectral da matriz LTS_N para o Problema de Ordenadas Discretas em Geometria Cartesiana Tridimensional", **XXVII CILAMCE - Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia**, Porto, Portugal.

Hauser, E. B., Vilhena, M. T. e Barros, R. C., 2007b. "The LTS_N Exponential Nodal Method for One-speed X,Y - Geometry Discrete Ordinates Problems in Heterogeneous Media", **MCSNA - Joint International Topical Meeting on Mathematics and Computation and Supercomputing in Nuclear Applications**, Monterey, Canadá.

Hoffmann, R. K., 2003. "**Solução LTS_N em uma Placa Plana com Dependência Angular Contínua, Fonte Arbitrária e Elevadas Ordens de Quadratura**", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Kruse, F., 1998. "**Cálculo do Fator de Utilização Térmica de um Reator Nuclear Através do Método LTS_N** ", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Lemos, R. M., 2000. "**Solução da Equação de Transferência Radiativa Conduativa em Placa Plana pelo Método da Decomposição e LTS_2** ", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Lorenzi, R. M. P., 1996. "**Estudo da Criticalidade em uma Placa Plana pelo Método LTS_N** ", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Marona, D. V., Segatto, C. F. e Vilhena, T. M., 2007. "On The LTS_N Solution of The Transport Equation in a Slab for $c = 1$ ", **INAC - International Nuclear Atlantic Conference**, Santos, SP.

Oliveira, J. V. P., 1993. "**Formulação LTS_N para Problema de Ordenada Discreta com Anisotropia.**", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Oliveira, J. V. P. e Barichello, L. B., 1993. "Formulação Analítica para a Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional de Transporte de Neutrons com Espalhamento Anisotrópico", **Anais do IX Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Caxambú, MG., pp. 72–77.

Oliveira, J. V. P., Cardona, A. V., Vilhena, M. T. e Barros, R. C., 2002. "A Semi-Analytical Numerical Method for Time-Dependent Radiative Transfer Problems in a Slab Geometry with Coherent Isotropic Scattering", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 73, pp. 55–62.

Pazos, R., 1999. "**Estudo da Convergência em Teoria de Transporte de Partículas Neutras**", *PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)*, Porto Alegre.

Pazos, R. P. e Vilhena, M. T., 1999a. "Convergence of the Spectral Approximations for Steady-State Two-Dimensional Transport Problem", **Mathematics and Computation Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications-International Conference**, Madrid, Spain, vol. 2, pp. 1965–1976.

Pazos, R. P. e Vilhena, M. T., 1999b. "Convergence of the LTSN Method: Approach of Semi-Groups", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 30, pp 77–86.

Pazos, R. P. e Vilhena, M. T., 1999c. "Convergence in Transport Theory", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30, pp. 79–92.

Pazos, R. P., Vilhena, M. T. e Hauser, E. B., 2002. "Solution and Study of Two-Dimensional Nodal Neutron Transport Equation", **10th International Conference on Nuclear Engineering-Proceedings of ICONE 10**, Arlington, EUA, vol.1.

Pazos, R. P., Hauser, E. B. e Vilhena, M. T., 2003. "Advances in the Solution of Three-Dimensional Nodal Neutron Transport Equation", **11th International Conference on Nuclear Engineering**, Tokyo, Japan.

Renz, S. P., 1999. "**Solução da Equação de Transferência Radiativa Dependente do Tempo pelos Métodos Espectral e LTS_N** ", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Retamoso, M. R., 2000. "**Reconstrução de Condições de Fronteira e Termo de Fonte em Ótica Hidrológica**", *PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)*, Porto Alegre.

Retamoso, M. R., Velho, H. F. C. e Vilhena, M. T., 2001. "Determining Source Term and Boundary Conditions in Hydrological Optics", **2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer**, Rio de Janeiro - RJ.

Retamoso, M. R., Vilhena, M. T., Velho, H. F. C. e Ramos, F. M., 2002. "Estimation of Boundary Condition in Hydrologic Optics", **Applied Numerical Mathematics**, USA, vol. 40, pp. 87–100.

Rodriguez, B. A., Vilhena, M. T., Borges, V. e Malamut, C., 2007. "The Exposure Buildup Factor Formulation in a slab and Rectangle Geometry by the LTS_N Method", **International Journal of Low Radiation**, vol. 4, pp. 102–116.

Santos, M. A., 2005. "**MGLTS_N^M Aproximação Angular Multigrid em uma Placa Plana**", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMA_p)*, Porto Alegre.

Segatto, C. F. e Vilhena, M. T., 1994a. "Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem without Azimutal Symmetry", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21, pp. 701–710.

Segatto, C. F. e Vilhena, M. T., 1994b. "Solução da Equação de Ordenadas Discretas Dependentes do Tempo pelo Método LTS_N", **Anais VI CGEN-Congresso Geral de Energia Nuclear**.

Segatto, C. F., 1995. "**Extensão da Formulação LTS_N para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo**", *PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)*, Porto Alegre.

Segatto, C. F. e Vilhena, M. T., 1997. "Solução Genérica da Equação de Transporte Unidimensional para Elevadas Ordens de Quadratura", **Anais do XI Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Minas Gerais, vol. 1, pp. 238–242.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. e Brancher, J., 1999a. "The One-Dimensional LTSN Formulation for High Degree of Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 61, pp. 39.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. e Gomes, M., 1999b. "The One-Dimensional LTSN Solution in a Slab with High Degree of Quadrature", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 26, pp. 925–934.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. e Tavares, L. S., 2001. "The Determination of Radiant Parameters by the LTS_N Method", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 70, pp. 227–236.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. e Barros, R. C., 2008a. "Generalized Discrete Ordinates Methods for Neutral Particle Transport Problems in Slab Geometry". **Progress in Nuclear Energy**.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. e Marona, D. V., 2008b. "The LTS_N Solution of the Transport Equation for one-dimensional Cartesian Geometry with $c=1$ ", **Kerntechnik**.

Simch, M. R., Segatto, C. e Vilhena, M. T., 2006. "An Analytical Solution for the S_N Radiative Transfer Equations with Polarization in a Slab by the LTS_N Method", **Journal of Quantitative Spectroscopy and TRadiative Transfer**, vol. 97, pp. 424–435.

Souza, S. I. S., 1993. "**Determinação de Parâmetros Radiantes pelos Métodos LTS_N e LTP_N para Geometria Planar**", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grandedo Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)*, Porto Alegre.

Streck, E., 1993. "**Solução Analítica para a Aproximação P_N da Equação de Transporte Linear Unidimensional**", *PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)*, Porto Alegre.

Tavares, L. S. S., 2000. "**Cálculo dos Parâmetros Superficiais de Radiação pelo Método LTS_N** ", *Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)*, Porto Alegre. 465–477.

Trzaska, Z., 1987. "An Efficient Algorithm for Partial Fraction Expansion of the Linear Matrix Pencil Inverse", **Journal of the Franklin Institute**, vol. 324, pp. 465–477.

Vargas, R. M. F. e Vilhena, M. T., 1999. "A closed-form Solution for the One-dimensional Radiative Conduitive Problem by the Decomposition and LTS_N Methods", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 61, pp. 303–308.

Vargas, R. M. F., Cardona, A., Vilhena, M. T. e Barros, R. C., 2003. "On the Decomposition Method Applied to Linear and non-linear Discrete Ordinates Problems in Slab Geometry", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 42, pp. 439–456.

Vargas, R. M. F. e Vilhena, M. T., 2004. "Solution of The S_N Radiative Transfer Equation in an Inhomogeneous Plane Parallel Atmosphere by the Decomposition Method", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 92, pp. 121–127.

Vargas, R. M. F., Segatto, C. F. e Vilhena, M. T., 2007. "Solution of The Radiative Heat Transfer Equation with Internal Energy Sources in Slab by the LTS_N Method", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 105, pp. 1–7.

Velho, H. F. C., Retamoso, M. R. e Vilhena, M. T., 2003. "Inverse Problems for Estimating Bottom Boundary Conditions of Natural Waters in Engineering", **Internacional for numerical methods in engineering**, vol. 55, pp. 1357–1368.

Vilhena, M. T. e Barichello, L. B., 1991. "The LTS_N Method: A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation", **Kerntechnik**, Germany, vol. 56, pp. 334–336.

Vilhena, M. T. e Souza, S. I., 1992. "Determinação de Parâmetros Radiantes em Meios Compostos – Geometria Planar – pelo Método LTS_N ", **XV CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, SP.

Vilhena, M. T. e Segatto, C. F., 1993. "Solução da Equação de Transporte de Neutrons e Radiação Dependente do Tempo pelo Método LTS_N ", **XVI CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Uberlândia, MG.

Vilhena, M. T. e Barichello, L. B., 1995. "An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinates Problem", **Transport Theory and Statistical Physics**, USA, vol. 24, pp. 1337–1352.

Vilhena, M. T. e Segatto, C. F., 1996. "A New Iterative Method to Solve the Radiative Transfer Equation", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Great Britain, vol. 55, pp. 493–498.

Vilhena, M. T. e Barichello, L. B., 1999. "A Closed-form Solution to the One-dimensional Linear and Nonlinear Radiative Transfer Problem", **Hybrid Methods In Engineering**, vol. 1, pp. 1–17.

Zabadal, J. R., Vilhena, M. T. e Barichello, L. B., 1995. "Solution For Three Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the LTS_N Method", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 22, pp. 131–134.

Zabada, J. R., Vilhena, M. T. e Barichello, L. B., 1997. "An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 21, pp. 225–228.