

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ADMINISTRATIVAS

Marcos Henrique Reichert

**COMPARAÇÃO NUMÉRICA DE DIFERENTES DISTRIBUIÇÕES PARA PREVER  
MEDIDAS DE RISCO**

Porto Alegre

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Marcos Henrique Reichert

**COMPARAÇÃO NUMÉRICA DE DIFERENTES DISTRIBUIÇÕES PARA PREVER  
MEDIDAS DE RISCO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Administração.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Brutti Righi

Porto Alegre

2017

Marcos Henrique Reichert

## **COMPARAÇÃO NUMÉRICA DE DIFERENTES DISTRIBUIÇÕES PARA PREVER MEDIDAS DE RISCO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Administração.

Trabalho aprovado em 11 de Dezembro de 2017.

---

Prof. Dr. Marcelo Brutti Righi  
UFRGS

---

Prof. Dr. Marcelo Perlin  
UFRGS

Porto Alegre  
2017

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof Dr. Marcelo Brutti Righi por aceitar ser meu orientador, uma imensa honra para mim.

À Ms. Fernanda Maria Müller pela sua ajuda inestimável com este trabalho.

À minha irmã Marina Viviane Reichert pelo seu companheirismo e sua sensatez ocasional.

Aos meus pais por serem um exemplo de dedicação, persistência e pelo seu amor incondicional.

## RESUMO

Na Gestão de Risco as principais medidas de risco utilizadas são o VaR (*Value at Risk*) e a ES (*Expected Shortfall*), sendo recomendadas pelo Acordo de Basileia para o uso de bancos e instituições financeiras. Ambas as medidas podem ser estimadas usando diferentes abordagens, como a Simulação Histórica (HS, *Historic Simulation*), a Simulação Histórica Filtrada (FHS, *Filtered Historic Simulation*) e o GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedacity*). Esse estudo teve o intuito de identificar, de comparar distribuições do modelo GARCH, via simulações de Monte Carlo, para prever o VaR e a ES. Adicionalmente, foi considerado a HS. A análise da performance dos modelos, para prever uma das medidas, foi realizada via funções de perda. Os resultados indicam que o melhor modelo de estimação para prever o VaR é a FHS e que para a ES os melhores resultados foram obtidos pelos modelos paramétricos. Dentre as distribuições do GARCH, a que obteve os melhores resultados foi a t-Student, tanto para o VaR quanto para a ES.

**Palavras-chave:** VaR; ES; GARCH; Funções de Perda; Simulações de Monte Carlo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1	VAR E ES . . . . .	9
2.2	ESTIMANDO O VAR E ES COM O MODELO ARMA-GARCH . . . . .	11
2.3	REVISÃO DA LITERATURA . . . . .	12
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>34</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>35</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No mercado financeiro uma das principais preocupações dos investidores são as perdas que podem ocorrer com seus investimentos. Na última década, a crise de 2008, contribuiu ainda mais com essa preocupação, levando a um maior interesse por parte de reguladores, das organizações financeiras e da comunidade acadêmica no desenvolvimento de confiáveis ferramentas para mensurar o risco. Uma das medidas de risco mais utilizada é o VaR (*Value at Risk*). Ela basicamente define a perda máxima esperada para certo ativo financeiro ou portfólio, durante um período de tempo, para um determinado nível de confiança (JORION, 2006). Apesar de ser a medida de risco mais popular no sistema financeiro, há muitas críticas em relação ao VaR devido a suas deficiências teóricas. O VaR não é uma medida de risco coerente<sup>1</sup>, pois não respeita o axioma de Subaditividade. Esse axioma supõe que o risco de um portfólio é menor ou igual à soma dos riscos individuais de cada ativo individual que compõe o portfólio. Assim, o VaR viola o princípio da diversificação. Outra deficiência do VaR é o fato de que a medida não leva em consideração as perdas além do quantil de interesse.

Para superar essas deficiências, foram apresentadas diversas alternativas para o VaR, sendo uma dessas medidas a ES (*Expected Shortfall*). A ES mede o valor esperado das perdas que ultrapassam as perdas do VaR. Ela é uma medida de risco coerente, ao contrário do VaR, visto que respeita o axioma da subaditividade. Apesar disso, na prática, a maior parte das instituições financeiras continua usando o VaR como sua principal medida de risco. Isso se deve a diversos fatores, um deles é o fato de que a ES é medido com maior incerteza, já que o primeiro passo para calculá-la é o VaR e o segundo é conseguir o valor esperado das observações da cauda, além disso, o processo de backtesting para a validação da medida é muito difícil de realizar, principalmente se comparado com o VaR (DANIELSSON, 2011).

Para a estimação da ES e do VaR, os métodos de estimação utilizados são o método não paramétrico, o paramétrico e o semi-paramétrico. O método não paramétrico usa a distribuição empírica da série histórica de dados para a computação das previsões de risco. Não é necessário supor nenhum modelo estatístico e nem estimar

<sup>1</sup> Os quatro axiomas das medidas de risco coerentes são: Monotonicidade, Subaditividade, Invariância de Translação e Homogeneidade Positiva (ARTZNER et al., 1999).

nenhum parâmetro, a abordagem usual desse método é a Simulação Histórica (HS, *Historical Simulation*) (DANIELSSON, 2011). O método paramétrico, por sua vez, envolve o cálculo da distribuição dos retornos e, na sequência, são obtidas as medidas com base nas estimativas dos parâmetros dessa distribuição. No método semi-paramétrico, utiliza-se métodos paramétricos em conjunto com o não paramétrico. Para a apreciação dos métodos paramétricos e semiparamétricos, o modelo comumente utilizado é o GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedacity*) (BOLLERSLEV, 1986) e suas generalizações.

Embora se utilize o mesmo modelo, o GARCH, a utilização de distintas distribuições para modelar a série de retornos, resultará em distintos valores para as medidas de risco. Essa questão é preocupante, uma vez que a utilização de uma distribuição inadequada poderá resultar em perdas financeiras. Para avaliar se as previsões estão corretas, tradicionalmente, utiliza-se backtestings. Entretanto, para comparar as previsões de diferentes previsões o mais adequado é considerar funções de perda. Para mais detalhes veja Gneiting e Ranjan (2011).

Dado o grande número de modelos disponíveis para estimar as medidas de risco, uma classe de estudos realiza comparações para verificar qual é o modelo mais apropriado para computar medidas de risco. No entanto, a maioria dos autores usa poucas distribuições, limitando-se a distribuição *t*-Student e a distribuição Normal (HARMANTZIS et al., 2006), e consideram dados empíricos (KUESTER et al., 2006). Uma das opções para analisar o desempenho das medidas ao invés do uso de dados empíricos, é via simulação de Monte Carlo. A técnica tem como ideia principal a criação de diversas simulações com base em certos modelos de evolução do mercado, tomando como base os dados empíricos, para entender seu comportamento. Com um grande número de repetições, temos uma vasta amostra dos resultados do mercado, permitindo que se calcule várias estatísticas de qualidade de ajuste das medidas de risco computadas.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é comparar distribuições do modelo GARCH, via simulações de Monte Carlo, para prever o VaR e a ES. As distribuições consideradas foram: a distribuição Empírica, a distribuição Normal, a distribuição *t*-Student, a distribuição Normal Assimétrica, a distribuição *t*-Student Assimétrica, a distribuição Generalizada do Erro e a distribuição Generalizada do Erro Assimétrica.



Angelidis et al. (2004), Berkowitz et al. (2011) Christoffersen e Gonçalves (2005), Harmantzis et al. (2006), Kuester et al. (2006), Marinelli et al. (2007), Mabrouk e Saadi (2012), Zhou (2012), Degiannakis et al. (2013), Righi e Ceretta (2015), utilizam algumas das distribuições selecionadas neste estudo, mas em nenhum foram estudadas todas juntas. Para analisar o desempenho das medidas de risco, foram consideradas funções de perda. O número de réplicas de Monte Carlo utilizadas é igual a 5000. Salienta-se que a escolha pelo VaR e pela ES decorreu pelo fato de o Comitê da Basileia sugerir as duas medidas, como ferramentas para mensurar o risco.

Apesar de as medidas de risco VaR e ES serem temas muito estudados na literatura de finanças, o presente trabalho se destaca no uso de simulações de Monte Carlo, visto que a grande maioria utiliza séries históricas para estimar as medidas de risco (KUESTER et al., 2006). Optou-se pela utilização de um modelo univariado devido a maior simplicidade do cálculo e em virtude de ser o modelo mais utilizado para computar medidas de risco. Outro fator que torna este trabalho importante para a literatura é o grande número de distribuições consideradas para a estimação das medidas de risco, uma vez que boa parte dos trabalhos considera, principalmente, a distribuição Normal e *t*-Student (HARMANTZIS et al., 2006). Além do mais, a maioria dos trabalhos realizados se concentra no VaR, não considerando, desse modo, a ES.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

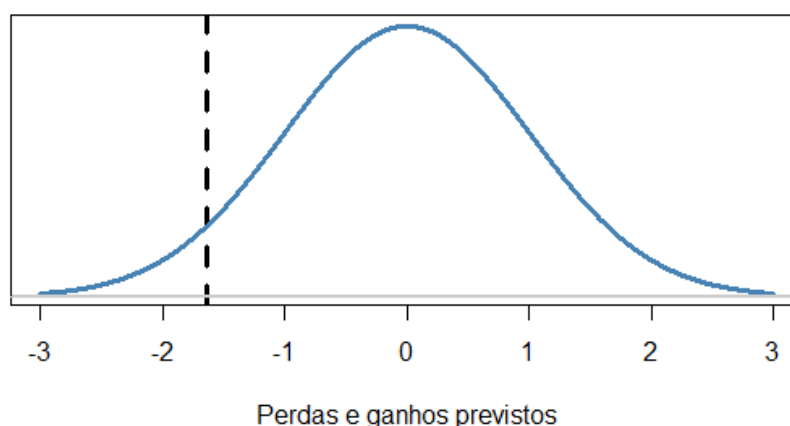
### 2.1 VAR E ES

O VaR é definido como a máxima perda possível durante um período de tempo, para um dado nível de confiança fixo (YAMAI et al., 2002). Ou seja, o VaR é  $\alpha$  quantil da distribuição de perdas e lucros. A medida pode ser matematicamente definida como:

$$VaR^\alpha(X) = -\inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} = -F_X^{-1}(\alpha), \quad (2.1)$$

onde  $X$  é o retorno de um ativo ou portfólio, sendo que  $X \geq 0$  representa o lucro e  $X < 0$  representa o prejuízo. O nível de confiança é  $\alpha \in (0, 1)$ .  $F_X$  é definida como a função de distribuição acumulada e  $F_X^{-1}$  sua função inversa. A figura a seguir demonstra qual seria o valor do VaR com uma linha pontilhada, ou seja, o quantil da distribuição, que representa a perda máxima possível da distribuição de lucros e perdas.

Figura 2.1 – Demonstração gráfica do VaR



Fonte: Elaborada pelo autor

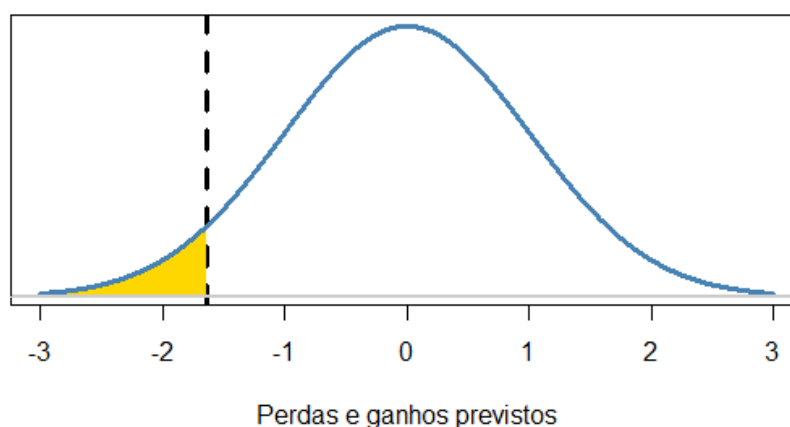
Para contornar as deficiências do VaR, foram propostas diversas medidas de risco alternativas. Dentre essas medidas, têm-se a ES. Ela busca responder qual é a perda esperada quando as perdas ultrapassam o VaR (DANIELSSON, 2011). Sendo assim, a ES modela as perdas esperadas além do  $\alpha$ -quantil de interesse. Como

Artzner et al. (1999) provou, ela é uma medida coerente, pois respeita o axioma da subaditividade. Yamai et al. (2002) definem a ES da seguinte maneira: supondo que  $X$  seja uma variável aleatória denotando o retorno do ativo e  $F_X^{-1}(\alpha)$  função inversa da função distribuição acumulada no nível  $100(1 - \alpha)$  de confiança. A ES é definida matematicamente como:

$$ES^\alpha(X) = -E[X|X \leq F_X^{-1}(\alpha)]. \quad (2.2)$$

A figura a seguir demonstra o que é buscado pelo cálculo da ES:

Figura 2.2 – Demonstração Gráfica da ES



Fonte: Elaborada pelo autor

A ES representa todas as perdas maiores que o VaR, portanto ela é representada por toda a parte pintada de amarelo. Ou seja, para o cálculo da ES, é preciso calcular o VaR antes.

Algumas das desvantagens da ES são o fato de que o processo de cálculo da medida, primeiro com a estimação do VaR e, na sequência, na obtenção da média das observações da cauda, geram, pelo menos, duas fontes de erro. Outra desvantagem da ES em comparação com o VaR, por exemplo, é que nela é muito mais difícil de se fazer o *backtesting*, já que é necessário estimar a média das observações da cauda. Entretanto, muitas das vantagens do VaR são compartilhadas com a ES. Ela também é universal e pode ser aplicada em qualquer fonte de risco, podendo ser facilmente implementado por qualquer banco que já tem a gestão de risco baseada no VaR. Sem

contar que, como já mencionado anteriormente, a ES é subaditiva, ao contrário do VaR (DANIELSSON, 2011).

## 2.2 ESTIMANDO O VAR E ES COM O MODELO ARMA-GARCH

Para computar medidas de risco por meio do método paramétrico é o conhecimento prévio da distribuição dos dados para que se possa calcular o VaR e a ES. Um dos modelos mais populares é o modelo GARCH, que possui várias generalizações. O modelo GARCH está na categoria de modelos de volatilidade condicionais que se baseiam em definir os pesos corretamente para cada um dos retornos históricos para assim se obter a variância condicional da distribuição de dados (DANIELSSON, 2011). Ou seja, se no modelo não paramétrico todas as observações de uma série têm um peso igual na hora de prever uma medida de risco, no modelo paramétrico, os retornos mais antigos têm um peso menor do que os retornos mais recentes; dessa maneira, um modelo paramétrico, na teoria, seria mais capaz de detectar mudanças estruturais no retorno de um ativo do que um modelo não-paramétrico.

Para computar a média condicional geralmente é utilizado o modelo ARMA (*Autoregressive Moving Average* - Autorregressivo de Médias Móveis). O modelo ARMA ( $m, n$ ), em que  $m$  se refere a ordem do componente autorregressivo e  $n$  é a ordem do componente de médias móveis, pode ser representado por:

$$X_t = \mu + \sum \phi_m X_{t-m} + \sum \theta_n \varepsilon_{t-n} + \varepsilon_t. \quad (2.3)$$

Sendo  $\mu$  a esperança de  $X_t$ ,  $\varepsilon$  os resíduos do modelo,  $\phi$  o parâmetro autorregressivo e  $\theta$  o parâmetro de médias móveis.

Por sua vez, o GARCH( $p, q$ ) univariado, em que  $p$  e  $q$  são o número de lags, pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\varepsilon_t = h_t z_t \sim F(0, 1), \quad (2.4)$$

$$h_t^2 = \varphi + \sum \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum \beta_q h_{t-q}^2. \quad (2.5)$$

Na qual  $h_t^2$  é a variância condicional do ativo  $i$  no período  $t$ ;  $\varphi$  é a esperança de  $h_t^2$ ;  $\alpha$  e  $\beta$  são os parâmetros ARCH e GARCH, respectivamente, e  $z_t$  se refere a um ruído branco com distribuição  $F$ . Entretanto, existem restrições dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que são aplicadas ao modelo, de maneira que se garanta a volatilidade positiva, estacionaridade de covariâncias dos retornos. Elas são:  $\varphi, \alpha, \beta > 0$  e  $\alpha + \beta < 1$ , respectivamente.

Depois de modelar os dados com o modelo ARMA-GARCH, calcula-se o VaR e a ES. O VaR computado parametricamente via modelo ARMA-GARCH é representado por:

$$VaR_t^\alpha = -(\mu_t + \sigma_t F_{z_t}^{-1}(\alpha)), \quad (2.6)$$

em que  $F_{z_t}^{-1}$  é a função inversa da função de distribuição acumulada  $F_{z_t}$ .

Sendo assim, a ES é definida como:

$$ES_t^\alpha = -(\mu_t + \sigma_t E[z_t | z_t < F^{-1}(\alpha)]) = -(\mu_t + \sigma_t (\alpha^{-1} \int_0^\alpha F^{-1}(s) ds)). \quad (2.7)$$

Um dos métodos semi paramétricos mais usados, é a FHS (*Filtered Historical Simulation*), que computa parametricamente a média e o desvio padrão condicional via modelo ARMA-GARCH, e assume a Distribuição Empírica para os resíduos padronizados.

## 2.3 REVISÃO DA LITERATURA

As medidas de risco são uma das principais partes da literatura de finanças. Muitos autores já fizeram diferentes comparações entre as diversas medidas e os diversos tipos de modelagem possíveis. A seguir encontra-se uma tabela com um resumo de alguns dos mais importantes trabalhos realizados ao longo dos anos sobre medidas de risco. Nela se encontram os autores e ano de publicação do trabalho, o seu objetivo, a metodologia utilizada (medidas, intervalos de confiança e objeto de estudo) e os resultados de tais estudos, principalmente em relação a quais foram as distribuições e modelos que obtiveram os melhores resultados na previsão das medidas de risco.

Tabela 2.1 – Principais trabalhos na área

<b>Autores e ano</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Metodologia</b>	<b>Resultados</b>
Angelidis et al. (2004)	Implementar diferentes modelos sobre três distribuições diferentes e quatro amostras históricas para estimar o VaR e avaliar a capacidade de previsão de cada modelo.	VaR, quantis 1% e 5% para os ativos S&P 500, Nikkei225, FTSE100, CAC40, DAX 30.	As distribuições leptocúrticas produziram melhores estimações do VaR, o processo de estimação da média não teve importância para a medida - somente adicionando ou diminuindo a complexidade da estimação - e o melhor modelo dependeu do ativo analisado.
Christoffersen e Gonçalves (2005)	Avaliar a perda de precisão por erro da estimação quando foi calculado o VaR e a ES e conferir a habilidade e quantificar a magnitude desse erro.	VaR e ES, quantil 1% com simulação de Monte Carlo.	Os resultados sugerem que o FHS é melhor para estimar o VaR, a distribuição normal não estima tão bem as medidas se for comparada com as outras distribuições e o Hill é melhor para estimar a ES.

*Continua na próxima página*

Tabela 2.1 – Continuação da página anterior

<b>Autores</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Metodologia</b>	<b>Resultados</b>
Harmantzis et al. (2006)	Testar empiricamente diversos modelos, medindo o VaR e a ES na presença de caudas longas nos retornos, usando dados históricos.	VaR e ES, quantis 1%, 2,5% e 5% para os ativos S&P, DAX, CAC, NIKKEI, TSE, FTSE, moedas (US dollar, Euro, Yen, Pound, Canadian dollar).	Pelos resultados apresentados, os modelos que capturam os eventos raros preveem o VaR melhor do que os modelos que não têm caudas longas. Para a ES, HS e POT se mostram melhores.
Kuester et al. (2006)	Comparar a performance de métodos existentes e novos modelos para a estimação do VaR univariado.	VaR, quantis 1%, 2,5% e 5% para o ativo NASDAQ Composite Index.	Os modelos que utilizam a distribuição <i>t</i> -Student's <i>t</i> -Assimétrica tiveram a performance melhor que os outros, em conjunto com os EVT e FHS.
Marinelli et al. (2007)	Comparar a performance de modelos univariados do VaR e da ES baseados em leis estáveis e na teoria dos valores extremos (EVT).	VaR e ES, quantis 1% e 5% para os ativos S&P, NASDAQ, USD/GBP, USD/YEN, ações da Microsoft e Amazon.	Os resultados mostraram que $\alpha$ -stable é melhor para estimar o VaR e POT é melhor para estimar a ES. Além disso, modelos semiparamétricos como EVT se saem bem na estimação do VaR.

*Continua na próxima página*

Tabela 2.1 – Continuação da página anterior

Autores	Objetivo	Metodologia	Resultados
Berkowitz et al. (2011)	Avaliar qual é o melhor método para estimar o VaR entre o GARCH e a HS de acordo com quatro distribuições diferentes de perdas e ganhos obtidas de quatro diferentes tipos de serviço de um banco usando simulações de Monte Carlo.	VaR, quantis 1% e 5% com simulações de Monte Carlo para 4 tipos de serviços de um banco com 6 tamanhos de amostras diferentes.	Houveram diferentes dinâmicas de volatilidades e não normalidade nos dados da empresa, que não são capturados pela simulação histórica, mostrando falhas no sistema de <i>backtesting</i> recomendado pelo Acordo da Basileia.
Mabrouk e Saadi (2012)	Examinar a performance de diferentes modelos para estimar o VaR em períodos dentro e fora das amostras e examinar se a escolha da equação da média afeta ou não a precisão da estimativa do VaR.	VaR, quantis 1% e 5% para os ativos DAX, DJIA, NASDAQ, Nikkei, CAC40, FTSE100, S&P 500.	Os resultados sugerem que o modelo AR(1)-FIAPARCH(1, <i>d</i> ,1) com distribuição <i>t</i> -Student's <i>t</i> -Assimétrica tem a melhor performance entre todos os analisados.

Continua na próxima página



Tabela 2.1 – Continuação da página anterior

<b>Autores</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Metodologia</b>	<b>Resultados</b>
Zhou (2012)	Comparar as performances de diversos métodos usados normalmente para prever o VaR e a ES para prever o risco de REITs (Real Estate Investment Trust).	VaR e ES, quantis - 0,5%, 1%, 5%, 95%, 99% e 99,5% para o ativo REITs.	Os resultados mostram que EGARCH com <i>t</i> -Student Assimétrica, GARCH- <i>t</i> e GARCH-EVT promovem as melhores estimativas do risco.
Degiannakis et al. (2013)	Testar empiricamente se a memória de curto prazo do modelo GARCH é pior para a previsão de VaR multiperíodico para horizontes de tempo mais longos do que o modelo de longo prazo do FIGARCH.	VaR e ES, quantis 1% e 5% para 20 índices de ações, entre eles o S&P 500, além de simulação de Monte Carlo.	O FIGARCH (longo horizonte de tempo) não teve melhor previsão do risco em comparação ao GARCH (curto horizonte de tempo).
Righi e Ceretta (2015)	Investigar se há um padrão na qualidade dos modelos e métodos da estimação da ES, considerando diferentes tipos de ativos, janelas de estimação e níveis de significância.	VaR e ES, quantis 1% e 5% para os ativos S&P, DAX, FTSE100, Nikkei225, Ibovespa, Hang Seng, além de títulos do Tesouro americano e taxas de câmbio de moedas.	Segundo os resultados, os modelos condicionais, especialmente os que representam melhor os retornos financeiros, têm predominância sobre os outros.

Analisando os diversos estudos anteriores feitos em relação ao tema das medidas de risco, verifica-se certas tendências no uso dos modelos, distribuições e medidas usadas. Primeiro, é interessante notar que mesmo sendo considerado uma medida teoricamente deficiente, o VaR continua sendo o centro das atenções das pesquisas acadêmicas. Muito provavelmente porque sua popularidade com as instituições financeiras continua intacta.

Quanto aos modelos, infere-se que, nos paramétricos, outros modelos da família ARCH, além do GARCH e seus diferentes tipos, estão sendo muito estudados, embora o GARCH ainda seja o modelo mais popular,. Além disso, modelos semiparamétricos como a FHS têm papel de destaque nos estudos realizados. Sem contar os modelos não paramétricos, que continuam sendo parte importantíssima da maioria dos casos. Ademais, depreende-se que a maioria dos estudos utiliza dados empíricos para realizar as comparações, ao invés de simulações de Monte Carlo, que são consideradas nesse estudo. As distribuições, na maioria dos casos, resume-se a três distribuições principais: a distribuição normal, a *t*-Student e a *t*-assimétrica. Com a distribuição *t*-Student assimétrica encontrando certo destaque, mostrando-se uma das distribuições com melhores resultados. Por último, quanto aos intervalos, é visível que a teoria se foca principalmente em dois intervalos: o de 95% de confiança e o de 99%. Sendo assim, de acordo com a teoria foi analisada, assume-se que o FHS melhores resultados, assim como os resultados obtidos pelas distribuições *t*-Student e *t*-Student Assimétrica.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção são descritos os procedimentos metodológicos usados para identificar qual a melhor distribuição para prever o VaR e a ES no contexto univariado. Lembrando que serão usados três métodos diferentes para a obtenção das medidas: o método não paramétrico, o paramétrico e o semi-paramétrico. Todas as análises serão realizadas usando a linguagem estatística R (R CORE TEAM, 2017) com o pacote Rugarch.

Para obter as estimativas via o método paramétrico e o semi-paramétrico, é utilizado o modelo ARMA-GARCH, apresentado nas Seções 2.2 desta pesquisa. As distribuições consideradas são: Empírica, Normal, Normal Assimétrica, *t*-Student, *t*-Student Assimétrica, Erro Generalizado e Erro Generalizado Assimétrica. Também foi utilizado a HS.

As medidas de risco escolhidas para a análise são o VaR e a ES, as quais já foram introduzidas na Seção 2.1 desta pesquisa. Essas medidas foram escolhidas devido ao fato de que elas são recomendadas pelo Comitê da Basileia para mensuração do risco de mercado (BIS, 2010). Os níveis de significância escolhidos são de 1%, 2,5% e 5%. Justifica-se tal escolha pelo fato de que o Comitê da Basileia recomenda que se utilizem os quantis 1% para se prever o VaR e 2,5% para prever a ES, além de que 1% e 5% são os níveis mais utilizados na literatura, como, por exemplo, Angelidis et al. (2004), Marinelli et al. (2007), Righi e Ceretta (2015), Harmantzis et al. (2006) e Kuester et al. (2006). A janela de observação escolhida é de 1000 observações diárias. Essa janela foi escolhida devido ao fato de ser geralmente utilizada nos estudos que comparam modelos para prever medidas de risco.

As diferentes formas de *Backtesting* são úteis para analisar se as previsões são corretas. Entretanto, através delas não é possível comparar diferentes métodos de previsão. Sendo assim, o mais adequado é usar funções de perda (*Loss Function*). A função de perda que será usada para o VaR pode ser expressa com a seguinte equação (BELLINI; BERNARDINO, 2017):

$$S_t(VaR_t, X_t) = (1 - \alpha) \times |X_t + VaR_t(\alpha)| \quad \text{se } X_t \geq VaR_t \\ \alpha \times |X_t + VaR_t(\alpha)| \quad \text{se } X_t < VaR_t, \quad (3.1)$$

em que  $\alpha$  é o grau de confiança. Por sua vez, a Função de Perda que será usada para a comparação dos diferentes modelos para calcular a ES pode ser expressa com a seguinte expressão (GERLACH et al., 2017):

$$\begin{aligned} S_t(X_t, VaR_t, ES_t) &= (l_t - \alpha)VaR_t - l_t X_t + \exp(ES_t) \\ &\times (ES_t - VaR_t + \frac{l_t}{\alpha}(VaR_t - X_t)) \\ &- \exp(ES_t) + 1 - \log(1 - \alpha), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$l_t$  é igual a 1 se  $X_t < VaR_t$  e 0 nos outros casos, sendo  $t = 1, \dots, T$ .

Para identificar a melhor distribuição para prever o VaR e a ES, foram usadas simulações de Monte Carlo. O número de réplicas de simulação utilizadas é iguais a 5000. Esse número é suficiente para obter resultados confiáveis. A simulação de Monte Carlo foi escolhida em virtude de permitir obter resultados mais próximos da realidade e devido a maioria dos estudos usarem dados empíricos. Os cenários que são utilizados mantêm comportamento semelhante aos dados de índices de mercados financeiros. Os retornos são gerados por meio da estrutura do modelo ARMA-GARCH a seguir:

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + 0,1X_{t-1} + 0,001\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= h_t z_t \sim F(0, 1) \\ h_t^2 &= h_t^2(1 - 0,1 - 0,85) + 0,1\varepsilon_{t-1}^2 + 0,85h_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$F$  vai seguir as distribuições: Normal,  $t$ -Student, Normal Assimétrica,  $t$ -Student Assimétrica, Generalizada do Erro e a Generalizada do Erro Assimétrica. Os parâmetros necessários para as distribuições, além de média 0 e variância 1, são considerados os parâmetros padrão da função geradora de retornos do ARMA-GARCH no software R. Na sequência, foi ajustado o modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1), considerando as distintas distribuições analisadas. Justifica-se a utilização desse modelo, porque apresenta a mesma ordem que o modelo gerador dos dados. Além disso, essa ordem é bastante comum para ajustar dados utilizados para prever medidas de risco. Com a média condicional e o desvio-padrão condicional previstos, são obtidos o VaR e a ES. Para cada modelo foi obtido uma previsão de um passo à frente, como é feito usualmente em estudos que consideram Simulações de Monte Carlo, assim como Müller e Righi (2017). Esse procedimento foi repetido 5000 vezes. A qualidade das previsões foi analisada descritivamente e via funções de perda.

## 4 RESULTADOS

Para comparar as distribuições do modelo GARCH para prever o VaR e a ES, utilizou-se simulações de Monte Carlo. Com base nos procedimentos numéricos descritos, obteve-se os resultados computacionais. Nas Tabelas 4.1 a 4.3 são descritos os resultados das funções de perda do VaR e da ES, para os quantis 1%, 2,5% e 5%, respectivamente. E nas Tabelas 4.4 a 4.9 foram analisados a média, o viés, o desvio-padrão das previsões do VaR e da ES, para os três quantis analisados. Para um melhor entendimento, os resultados foram analisados na seguinte ordem: primeiramente os resultados obtidos via funções de perda para o VaR, para os três quantis considerados, e em um segundo momento os resultados obtidos via funções de perda para a ES. Após, são discutidas estatísticas descritivas da performance dos modelos.

Tabela 4.1 – Resultado das Funções de perda do VaR e da ES com quantil 1%

Modelo Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student's	t-Student's Assim.	GED	GED Assim.
Normal	VaR	$7,9288 \times 10^{-7}$	$9,0836 \times 10^{-7}$	$9,4190 \times 10^{-6}$	$9,3019 \times 10^{-6}$	$2,4861 \times 10^{-5}$	$9,4419 \times 10^{-6}$	$9,8843 \times 10^{-6}$	$9,7621 \times 10^{-6}$
	ES	0,006 937 278 0	0,013 129 330 0	0,000 202 054 8	0,000 202 069 3	<b>0,000 202 015 2</b>	0,000 202 070 4	0,000 202 057 9	0,000 202 074 2
Normal Assimétrica	VaR	$4,4597 \times 10^{-7}$	<b><math>2,8083 \times 10^{-7}</math></b>	$2,6590 \times 10^{-5}$	$2,6577 \times 10^{-5}$	$2,6732 \times 10^{-5}$	$2,6732 \times 10^{-5}$	$2,6169 \times 10^{-5}$	$2,6167 \times 10^{-5}$
	ES	0,008 302 544 0	0,008 637 807 0	0,000 213 535 6	0,000 213 619 9	0,000 216 482 0	<b>0,000 213 337 2</b>	0,000 214 261 6	0,000 214 332 4
t-Student	VaR	$6,4708 \times 10^{-7}$	<b><math>3,9655 \times 10^{-7}</math></b>	$5,3112 \times 10^{-6}$	$5,1294 \times 10^{-6}$	$4,9454 \times 10^{-6}$	$7,7174 \times 10^{-6}$	$9,0032 \times 10^{-6}$	$8,3627 \times 10^{-6}$
	ES	0,006 219 406 0	0,004 728 297 0	0,000 178 594 4	<b>0,000 177 879 3</b>	0,000 185 672 9	0,000 185 118 1	0,000 183 343 7	0,000 181 550 3
t-Student Assimétrica	VaR	$7,0612 \times 10^{-7}$	<b><math>6,4442 \times 10^{-7}</math></b>	$1,4164 \times 10^{-5}$	$1,392 \times 10^{-5}$	$1,3718 \times 10^{-5}$	$1,8042 \times 10^{-5}$	$2,1054 \times 10^{-5}$	$1,8365 \times 10^{-5}$
	ES	0,008 288 187 0	0,011 899 550 0	0,000 199 390 7	0,000 199 185 0	0,000 200 127 7	0,000 199 220 2	0,000 199 656 5	<b>0,000 198 336 5</b>
GED	VaR	$6,6499 \times 10^{-7}$	$6,2529 \times 10^{-7}$	$1,9036 \times 10^{-8}$	<b><math>1,6510 \times 10^{-8}</math></b>	$2,0549 \times 10^{-8}$	$1,1875 \times 10^{-7}$	$2,600 \times 10^{-7}$	$2,5793 \times 10^{-7}$
	ES	0,004 953 099 0	0,006 018 565 0	0,000 197 418 1	0,000 197 508 4	<b>0,000 197 352 6</b>	0,000 197 496 4	0,000 197 420 9	0,000 197 514 0
GED Assimétrica	VaR	$3,6650 \times 10^{-7}$	<b><math>3,6618 \times 10^{-7}</math></b>	$4,2259 \times 10^{-5}$	$4,2228 \times 10^{-5}$	$3,9528 \times 10^{-5}$	$4,2370 \times 10^{-5}$	$4,2014 \times 10^{-5}$	$4,1991 \times 10^{-5}$
	ES	0,010 440 620 0	0,015 457 100 0	0,000 227 162 9	0,000 227 290 1	0,000 230 106 3	<b>0,000 227 134 9</b>	0,000 227 425 1	0,000 227 539 2

Nota: Em **negrito** os melhores resultados da distribuição geradora

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.2 – Resultado das Funções de perda do VaR e da ES com quantil 2,5%

Modelo Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	VaR	$2,165\ 619 \times 10^{-6}$	$1,681\ 544 \times 10^{-6}$	$4,872\ 317 \times 10^{-7}$	$4,889\ 595 \times 10^{-7}$	$5,333\ 000 \times 10^{-7}$	<b><math>4,858\ 459 \times 10^{-7}</math></b>	$4,871\ 981 \times 10^{-7}$	$4,880\ 177 \times 10^{-7}$
	ES	0,000 905 298 5	0,000 163 420 1	0,000 132 555 0	0,000 133 485 0	<b>0,000 131 678 2</b>	0,000 133 410 5	0,000 132 556 7	0,000 133 514 9
Normal Assimétrica	VaR	$1,023\ 067 \times 10^{-6}$	<b><math>9,010\ 190 \times 10^{-7}</math></b>	$2,353\ 412 \times 10^{-5}$	$2,343\ 715 \times 10^{-5}$	$2,119\ 414 \times 10^{-5}$	$2,356\ 846 \times 10^{-5}$	$2,298\ 105 \times 10^{-5}$	$2,299\ 471 \times 10^{-5}$
	ES	0,002 948 820 0	0,003 726 131 0	0,000 182 291 1	0,000 181 282 2	0,000 191 561 3	<b>0,000 180 705 5</b>	0,000 184 477 1	0,000 183 373 6
t-Student	VaR	$1,136\ 381 \times 10^{-6}$	<b><math>9,514\ 604 \times 10^{-7}</math></b>	$5,602\ 918 \times 10^{-6}$	$5,630\ 518 \times 10^{-6}$	$3,556\ 633 \times 10^{-6}$	$6,537\ 717 \times 10^{-6}$	$7,622\ 295 \times 10^{-6}$	$7,556\ 585 \times 10^{-6}$
	ES	0,001 725 838 0	0,001 771 328 0	0,000 116 023 5	0,000 116 858 8	<b>0,000 113 591 3</b>	0,000 115 240 6	0,000 115 597 7	0,000 116 544 9
t-Student Assimétrica	VaR	<b><math>9,990\ 286 \times 10^{-7}</math></b>	$1,151\ 024 \times 10^{-6}$	$2,433\ 645 \times 10^{-5}$	$2,399\ 291 \times 10^{-5}$	$2,329\ 568 \times 10^{-5}$	$2,794\ 313 \times 10^{-5}$	$3,018\ 305 \times 10^{-5}$	$2,810\ 708 \times 10^{-5}$
	ES	0,002 845 366 0	0,004 603 038 0	0,000 177 929 7	0,000 177 200 0	0,000 181 841 7	0,000 162 292 5	0,000 159 364 9	<b>0,000 158 443 1</b>
GED	VaR	$2,028\ 601 \times 10^{-6}$	$1,506\ 282 \times 10^{-6}$	$5,867\ 271 \times 10^{-8}$	$5,854\ 323 \times 10^{-8}$	$1,082\ 311 \times 10^{-7}$	$4,186\ 057 \times 10^{-8}$	<b><math>3,323\ 571 \times 10^{-8}</math></b>	$3,499\ 140 \times 10^{-8}$
	ES	0,002 140 406 0	0,001 728 009 0	0,000 151 356 6	<b>0,000 150 413 7</b>	0,000 151 833 4	0,000 151 719 4	0,000 152 184 5	0,000 151 067 6
GED Assimétrica	VaR	$1,251\ 284 \times 10^{-6}$	<b><math>1,091\ 474 \times 10^{-6}</math></b>	$1,333\ 447 \times 10^{-5}$	$1,314\ 533 \times 10^{-5}$	$1,134\ 397 \times 10^{-5}$	$1,329\ 979 \times 10^{-5}$	$1,374\ 431 \times 10^{-5}$	$1,323\ 958 \times 10^{-5}$
	ES	0,002 358 136 0	0,002 799 071 0	0,000 143 779 6	0,000 138 900 8	0,000 142 997 1	0,000 138 837 4	0,000 143 880 9	<b>0,000 138 825 1</b>

Nota: Em **negrito** os melhores resultados da distribuição geradora

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.3 – Resultado das Funções de perda do VaR e da ES com quantil 5%

Modelo Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	VaR	$2,656\ 702 \times 10^{-6}$	<b><math>1,870\ 837 \times 10^{-6}</math></b>	$4,210\ 461 \times 10^{-6}$	$4,073\ 579 \times 10^{-6}$	$2,256\ 982 \times 10^{-6}$	$4,080\ 175 \times 10^{-6}$	$4,208\ 511 \times 10^{-6}$	$4,046\ 124 \times 10^{-6}$
	ES	0,000 873 271 2	0,000 658 155 9	$7,381\ 109 \times 10^{-5}$	$7,551\ 057 \times 10^{-5}$	<b><math>7,256\ 564 \times 10^{-5}</math></b>	$7,570\ 684 \times 10^{-5}$	$7,380\ 591 \times 10^{-5}$	$7,544\ 134 \times 10^{-5}$
Normal Assimétrica	VaR	$1,595\ 939 \times 10^{-5}$	<b><math>2,923\ 879 \times 10^{-6}</math></b>	$6,759\ 151 \times 10^{-5}$	$7,041\ 89 \times 10^{-5}$	$6,462\ 804 \times 10^{-5}$	$6,783\ 266 \times 10^{-5}$	$6,759\ 553 \times 10^{-5}$	$6,764\ 356 \times 10^{-5}$
	ES	0,002 366 544 0	0,003 811 085 0	0,000 389 006 6	0,000 392 959 8	0,000 404 762 5	0,000 390 717 7	<b>0,000 388 977 4</b>	0,000 392 539 5
t-Student	VaR	$1,161\ 47 \times 10^{-6}$	<b><math>1,108\ 828 \times 10^{-6}</math></b>	$2,052\ 115 \times 10^{-5}$	$2,008\ 054 \times 10^{-5}$	$1,842\ 91 \times 10^{-5}$	$2,275\ 559 \times 10^{-5}$	$2,355\ 378 \times 10^{-5}$	$2,386\ 957 \times 10^{-5}$
	ES	0,001 096 278 0	0,001 393 104 0	0,000 136 133 3	0,000 138 892 1	0,000 151 533 2	0,000 119 843 5	0,000 113 201 9	<b>0,000 110 302 1</b>
t-Student Assimétrica	VaR	$3,3287 \times 10^{-6}$	$2,841\ 542 \times 10^{-6}$	$3,523\ 367 \times 10^{-7}$	$3,688\ 771 \times 10^{-7}$	$4,453\ 995 \times 10^{-7}$	$1,755\ 013 \times 10^{-7}$	<b><math>2,812\ 492 \times 10^{-8}</math></b>	$9,117\ 424 \times 10^{-8}$
	ES	0,000 519 560 9	0,000 424 166 1	$9,131\ 207 \times 10^{-5}$	$8,966\ 614 \times 10^{-5}$	$9,039\ 014 \times 10^{-5}$	$8,994\ 445 \times 10^{-5}$	$9,356\ 686 \times 10^{-5}$	<b><math>8,743\ 495 \times 10^{-5}</math></b>
GED	VaR	$1,344\ 467 \times 10^{-6}$	<b><math>8,114\ 964 \times 10^{-7}</math></b>	$2,375\ 734 \times 10^{-5}$	$2,379\ 044 \times 10^{-5}$	$2,193\ 156 \times 10^{-5}$	$2,384\ 52 \times 10^{-5}$	$2,359\ 346 \times 10^{-5}$	$2,364\ 398 \times 10^{-5}$
	ES	0,001 396 623 0	0,001 443 250 0	0,000 192 958 7	0,000 192 892 8	0,000 208 365 0	<b>0,000 192 521 2</b>	0,000 194 273 0	0,000 194 030 2
GED Assimétrica	VaR	<b><math>6,882\ 566 \times 10^{-7}</math></b>	$2,286\ 689 \times 10^{-6}$	$4,383\ 478 \times 10^{-5}$	$4,381\ 395 \times 10^{-5}$	$4,011\ 997 \times 10^{-5}$	$4,400\ 383 \times 10^{-5}$	$4,364\ 625 \times 10^{-5}$	$4,390\ 956 \times 10^{-5}$
	ES	0,001 626 439 0	0,003 534 189 0	0,000 199 781 0	0,000 199 355 1	0,000 211 382 0	<b>0,000 198 722 7</b>	0,000 200 361 2	0,000 199 034 9

Nota: Em **negrito** os melhores resultados da distribuição geradora

Fonte: Elaborada pelo autor



Na Tabela 4.1, ao analisar os resultados, percebe-se que o modelo que apresenta função de perda mais próxima a zero não coincide com o modelo gerador dos dados. Esse resultado só é observado ao analisarmos os resultados apresentados na Tabela 4.2, na GED. Para o quantil 1% verifica-se, que, no geral, o modelo com melhor desempenho é o FHS. Isso não acontece quando os dados são gerados com distribuição Normal, em que o HS apresenta melhor desempenho, e quando os dados são gerados com distribuição GED. Nesse caso, o modelo ARMA-GARCH com distribuição Normal Assimétrica obteve melhor desempenho. Na Tabela 4.2, que se refere aos resultados para o quantil 2,5%, verificam-se resultados distintos aos do quantil 1%. Nos casos dos processos geradores com distribuição Normal Assimétrica, *t*-Student, e *t*-Student Assimétrica e Generalizada do Erro Assimétrica, os melhores desempenhos são percebidos por meio do FHS e o HS. Nos outros casos, os GARCHs com a GED e a distribuição *t*-Student Assimétrica obtiveram o melhor resultado.

Para as funções de perda do VaR com quantil 5% o modelo que teve os melhores resultados no geral foi o FHS, visto que sua função de perda ficou mais próxima a zero. Esses resultados corroboram com os encontrados por (CHRISTOFFERSEN; GONÇALVES, 2005), que também identificam o modelo FHS como um bom candidato para prever o VaR. Salienta-se que no modelo FHS, a média condicional e o desvio-padrão condicional foram obtidos assumindo que os retornos seguem distribuição Normal. Outro interessante resultado observado é que o HS, embora bastante criticado na literatura, obteve, no geral, bons resultados para prever o VaR. De acordo com os resultados de (PÉRIGNON; SMITH, 2010), cerca de 73 % das instituições bancárias que divulgam seu VaR utilizam esse procedimento. Em relação aos piores resultados, nota-se que os modelos com maiores funções de perda se referem aos modelos condicionais (ARMA-GARCH). Também, verifica-se que no geral os resultados das funções de perda para os modelos condicionais são similares.

Já para a ES, os resultados foram mais heterogêneos e se alteram de acordo com o quantil analisado. Para os resultados do quantil 1%, os modelos com os melhores resultados são os GARCHs com a distribuição *t*-Student e com a distribuição *t*-Student Assimétrica, com exceção dos processos geradores que seguem as distribuições *t*-Student e *t*-Student Assimétrica. Nesses casos, respectivamente, o ARMA-GARCH com a distribuição Normal Assimétrica e com distribuição Generalizada do Erro Assimé-

trica, obtiveram os melhores resultados. Na Tabela 4.2 percebe-se que para o quantil 2,5% o modelo ARMA-GARCH com a distribuição  $t$ -Student obteve melhores resultados quando o processo gerador segue distribuição Normal (resultado identificado para o quantil 1%) e quando o processo gerador segue a própria distribuição  $t$ -Student. Outra distribuição do GARCH que obteve melhores resultados é a Generalizada do Erro Assimétrica, nas distribuições  $t$ -Student Assimétrica e na própria Generalizada do Erro Assimétrica. Isso não acontece quando o processo gerador segue as distribuições Normal Assimétrica, e GED em que os melhores resultados são obtidos pelos modelos ARMA-GARCH com distribuição  $t$ -Student Assimétrica e Normal Assimétrica, respectivamente. Quanto à distribuição geradora de dados, os melhores resultados são obtidos pela  $t$ -Student. Nota-se que para os processos geradores que seguem distribuições  $t$ -Student e GED Assimétrica, o modelo com melhor desempenho para prever a ES coincide com o processo gerador.

A Tabela 4.3 tem os modelos GARCH com a  $t$ -Student Assimétrica e a distribuição GED Assimétrica com os melhores resultados, exceto quando as distribuições geradoras são as distribuições Normal e Normal Assimétrica. Nesse caso, os modelos ARMA-GARCH que seguem as distribuições  $t$ -Student e Generalizada do Erro apresentam os melhores resultados. Para esse quantil, o modelo gerador dos dados não coincide com o modelo com os melhores resultados da distribuição. Esses resultados indicam que de acordo com o quantil analisado, os dados se alteram e que não existe um padrão entre os resultados apresentados para o VaR e para ES, diferentemente do que observado por (MÜLLER; RIGHI, 2017), para o caso multivariado. Outro resultado observado para a ES é que, apesar dos melhores resultados para o VaR, a FHS teve uma performance ruim na ES, sendo superada por todos os modelos paramétricos. O modelo HS também demonstrou pobre performance para prever a ES, diferentemente dos resultados observados para o VaR.

A seguir são apresentadas a média, o desvio-padrão e o viés de ambas as medidas para todos os quantis analisados. Na literatura o viés é utilizado como um critério auxiliar para análise da performance de distintos modelos.

Tabela 4.4 – Medidas do VaR no quantil 1%

Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	Média	0,342	0,319	-0,0551	-0,0550	-0,0424	-0,0559	-0,0550	-0,0549
	DP	0,0367	<b>0,07783</b>	0,0214	0,0214	0,0196	0,0215	0,0215	0,0215
	Viés	0,3434	0,3206	-0,0538	-0,0537	-0,0536	-0,0535	<b>-0,0411</b>	-0,0546
Normal Assimétrica	Média	0,357	0,332	-0,0549	-0,0544	-0,0425	-0,0554	-0,0547	-0,0542
	DP	0,03953	<b>0,0802</b>	0,0204	0,02035	0,0189	0,0204	0,0206	0,0204
	Viés	0,3565	0,3310	-0,0553	-0,0555	-0,0552	-0,0547	<b>-0,0430</b>	-0,0559
t-Student	Média	0,378	0,346	-0,0524	-0,0522	-0,0408	-0,0710	-0,0799	-0,0767
	DP	0,0234	<b>0,1468</b>	0,0263	0,0259	0,0225	0,0445	0,0476	0,0463
	Viés	0,3783	0,3459	-0,0529	-0,05271	-0,0804	-0,0771	<b>-0,0413</b>	-0,0715
t-Student Assimétrica	Média	0,404	0,372	-0,0523	-0,0496	-0,0449	-0,0695	-0,0845	-0,0708
	DP	0,0873	<b>0,1509</b>	0,0278	0,0277	0,0237	0,0342	0,0396	0,0361
	Viés	0,4054	0,3732	-0,0513	-0,0485	-0,0835	-0,0697	<b>-0,0438</b>	-0,0685
GED	Média	0,341	0,318	-0,0551	-0,0550	-0,0424	-0,0559	-0,0549	-0,0548
	DP	0,0365	<b>0,0749</b>	0,0207	0,0206	0,01890	0,0207	0,0207	0,0207
	Viés	0,3428	0,3198	-0,0537	-0,0536	-0,0535	-0,0534	<b>-0,0410</b>	-0,0545
GED Assimétrica	Média	0,355	0,333	-0,0554	-0,0548	-0,0430	-0,0551	-0,0547	-0,0546
	DP	0,0380	<b>0,0806</b>	0,0203	0,0202	0,0188	0,0204	0,0204	0,203
	Viés	0,3541	0,3320	-0,0567	-0,0562	-0,0564	-0,0560	<b>-0,0444</b>	-0,0572

Nota: DP se refere a desvio-padrão e os valores em **Negrito** se referem ao maior desvio-padrão e ao viés com valor mais próximo a zero.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.5 – Medidas da ES no quantil 1%

Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	Média	0,0046	0,3599	-6,9782	-6,9780	-6,9687	-6,9858	-6,9778	-6,9772
	DP	0,0045	0,0879	1,6490	1,6511	1,6462	<b>1,6520</b>	1,6489	1,6506
	Viés	<b>0,0059</b>	0,3612	-6,9768	-6,9767	-6,9764	-6,9759	-6,9674	-6,9844
Normal Assimétrica	Média	0,0029	0,3756	-6,9243	-6,7299	-6,9153	-6,7302	-6,9243	-6,7308
	DP	0,0046	0,0911	<b>1,5914</b>	1,5448	1,5881	1,5446	1,5913	1,5446
	Viés	<b>0,0024</b>	0,3751	-6,9248	-6,7303	-6,9248	-6,731	-6,915	-6,731
t-Student	Média	0,0059	0,4563	-6,6152	-6,6126	-6,6808	-6,711	-6,5008	-6,4997
	DP	0,0044	0,2201	0,8767	<b>0,8892</b>	0,8373	0,8606	0,8552	0,8627
	Viés	<b>0,0053</b>	0,4558	-6,6157	-6,6130	-6,5013	-6,5002	-6,6813	-6,7118
t-Student Assimétrica	Média	0,0040	0,4939	-6,6008	-6,3926	-6,6693	-6,3530	-6,491	-6,0233
	DP	0,0046	0,2099	<b>2,655</b>	2,5990	2,6197	2,4887	2,5443	2,3697
	Viés	<b>0,0051</b>	0,4950	-6,5998	-6,3916	-6,4897	-6,0223	-6,6682	-6,3521
GED	Média	0,0045	0,3588	-6,9636	-6,9637	-6,9538	-6,9720	-6,9630	-6,9628
	DP	0,0044	0,0844	1,5876	1,5897	1,5851	<b>1,591</b>	1,5872	1,5887
	Viés	<b>0,0059</b>	0,3602	-6,9621	-6,9622	-6,9616	-6,9614	-6,9524	-6,9706
GED Assimétrica	Média	0,0028	0,3772	-6,9663	-6,7695	-6,9577	-6,7701	-6,9666	-6,7717
	DP	0,0046	0,0908	1,601	1,5557	1,5985	1,5554	<b>1,6015</b>	1,5574
	Viés	<b>0,0015</b>	0,3759	-6,968	-6,9767	-6,9680	-6,7731	-6,9590	-6,7715

Nota: DP se refere a desvio-padrão e os valores em **Negrito** se referem ao maior desvio-padrão e ao viés com valor mais próximo a zero.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.6 – Medidas do VaR no quantil 2,5%

Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	Média	0,2803	0,2688	-0,0546	-0,0545	-0,0545	-0,0544	-0,0420	-0,0554
	DP	0,0244	<b>0,0609</b>	0,0200	0,0199	0,0185	0,0200	0,0201	0,0200
	Viés	0,2818	0,2704	-0,0531	-0,05293	<b>-0,0404</b>	-0,0538	-0,0529	-0,0528
Normal Assimétrica	Média	0,2911	0,2802	-0,0547	-0,0543	-0,0423	-0,0553	-0,0545	-0,0541
	DP	0,0262	<b>0,06817</b>	0,0192	0,0191	0,0182	0,0192	0,0194	0,0192
	Viés	0,2948	0,2840	-0,0509	-0,0508	<b>-0,0385</b>	-0,0515	-0,0507	-0,0504
t-Student	Média	0,0059	0,4563	-6,6152	-6,6126	-6,5008	-6,4997	-6,6808	-6,711
	DP	0,0431	<b>0,1193</b>	0,0297	0,0296	0,0259	0,0398	0,0448	0,0445
	Viés	0,2732	0,2619	-0,0501	-0,0498	<b>-0,0383</b>	-0,0683	-0,0762	-0,0740
t-Student Assimétrica	Média	0,2859	0,2793	-0,0528	-0,0500	-0,0842	-0,0722	-0,0452	-0,0708
	DP	0,0467	<b>0,1769</b>	0,0342	0,0329	0,0454	0,0413	0,0265	0,0448
	Viés	0,2876	0,2810	-0,0511	-0,0482	<b>-0,0434</b>	-0,0690	-0,0824	-0,0704
GED	Média	0,2791	0,2687	-0,0552	-0,0551	-0,0426	-0,0560	-0,0551	-0,0550
	DP	0,0242	<b>0,0637</b>	0,0203	0,0203	0,0188	0,0204	0,0204	0,0204
	Viés	0,2773	0,2668	-0,0570	-0,0570	<b>-0,0444</b>	-0,0578	-0,0569	-0,0568
GED Assimétrica	Média	0,29013	0,2786	-0,0551	-0,0548	-0,0428	-0,0557	-0,0550	-0,0546
	DP	0,0264	<b>0,0657</b>	0,0196	0,0196	0,0181	0,0197	0,0198	0,0197
	Viés	0,2874	0,2759	-0,0578	-0,0575	<b>-0,0455</b>	-0,0585	-0,0577	-0,0573

Nota: DP se refere a desvio-padrão e os valores em **Negrito** se referem ao maior desvio-padrão e ao viés com valor mais próximo a zero.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.7 – Medidas da ES no quantil 2,5%

Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	Média	0,0093	0,3171	-2,8060	-2,8058	-2,7945	-2,8092	-2,8058	-2,8054
	DP	0,0042	0,0713	0,6060	0,6073	0,6028	<b>0,6073</b>	0,6057	0,6069
	Viés	<b>0,0109</b>	0,3187	-2,8044	-2,804	-2,804	-2,8038	-2,7929	-2,808
Normal Assimétrica	Média	0,0066	0,3327	-2,8122	-2,7335	-2,7992	-2,7343	-2,8124	-2,7345
	DP	0,0044	0,0801	0,6363	0,6167	<b>0,6376</b>	0,6159	0,6362	0,6170
	Viés	<b>0,0104</b>	0,3364	-2,8084	-2,7298	-2,7954	-2,7306	-2,8086	-2,7307
t-Student	Média	0,2709	0,2596	-0,0523	-0,0521	-0,0406	-0,0705	-0,0785	-0,0763
	DP	0,0043	0,1755	<b>1,2483</b>	1,2466	1,2114	1,2256	1,2236	1,2482
	Viés	<b>0,0130</b>	0,3631	-2,6806	-2,6772	-2,6501	-2,6487	-2,6951	-2,7272
t-Student Assimétrica	Média	0,0079	0,3950	-2,713	-2,6205	-2,7244	-2,6121	-2,6698	-2,4713
	DP	0,0048	0,2800	<b>1,6819</b>	1,6123	1,5433	1,49137	1,3729	1,2712
	Viés	<b>0,0096</b>	0,3967	-2,7116	-2,6188	-2,6681	-2,4696	-2,7227	-2,6104
GED	Média	0,0092	0,3173	-2,8124	-2,8125	-2,8003	-2,8165	-2,8124	-2,8126
	DP	0,0043	0,07455	0,6264	0,6266	0,6260	<b>0,6271</b>	0,6265	0,6268
	Viés	<b>0,0074</b>	0,3155	-2,8142	-2,8143	-2,8021	-2,8183	-2,8142	-2,8144
GED Assimétrica	Média	0,0066	0,3310	-2,8039	-2,7270	-2,7916	-2,7279	-2,8036	-2,7275
	DP	0,0046	0,0908	1,601	1,5557	1,5985	1,5554	<b>1,6015</b>	1,5574
	Viés	<b>0,0039</b>	0,3282	-2,8066	-2,8042	-2,7943	-2,7307	-2,8063	-2,7302

Nota: DP se refere a desvio-padrão e os valores em **Negrito** se referem ao maior desvio-padrão e ao viés com valor mais próximo a zero.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.8 – Medidas do VaR no quantil 5%

Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	Média	0,2303	0,2260	-0,0549	-0,0548	-0,0548	-0,0557	0,0161	-0,0547
	DP	0,0183	<b>0,0533</b>	0,0201	0,0201	0,0186	0,0202	0,0202	0,0202
	Viés	0,2297	0,2254	-0,0555	-0,0554	-0,0554	-0,0553	<b>-0,0428</b>	-0,0563
Normal Assimétrica	Média	0,2373	0,2328	-0,0547	-0,0545	-0,0424	-0,0555	-0,0545	-0,0543
	DP	0,0192	<b>0,0543</b>	0,0196	0,0196	0,0198	0,0197	0,0182	0,0198
	Viés	0,2366	0,2321	-0,0555	-0,0556	-0,0553	-0,0551	<b>-0,0431</b>	-0,0563
t-Student	Média	0,2105	0,2100	-0,0527	-0,0502	-0,0451	-0,0710	-0,0822	-0,0740
	DP	0,0234	<b>0,1468</b>	0,0263	0,0259	0,0225	0,0445	0,0476	0,0463
	Viés	0,2027	0,2017	-0,0514	-0,0511	-0,0758	-0,0746	<b>-0,0396</b>	-0,0697
t-Student Assimétrica	Média	0,0079	0,3950	-2,713	-2,6205	-2,7244	-2,6121	-2,6698	-2,4713
	DP	0,0260	<b>0,1010</b>	0,0297	0,0298	0,0245	0,0382	0,0421	0,0406
	Viés	0,2091	0,2086	-0,0541	-0,0516	-0,0836	-0,0754	<b>-0,0465</b>	-0,0724
GED	Média	0,2296	0,2263	-0,0555	-0,0554	-0,0427	-0,0563	-0,0553	-0,055
	DP	0,0183	<b>0,0548</b>	0,0212	0,0212	0,0195	0,0214	0,0212	0,0213
	Viés	0,2266	0,2233	-0,0585	-0,0583	-0,0583	-0,0582	<b>-0,0457</b>	-0,0593
GED Assimétrica	Média	0,2365	0,2330	-0,0550	-0,0548	-0,0548	-0,0558	0,0129	-,0547
	DP	0,0190	<b>0,0534</b>	0,0198	0,0198	0,0184	0,0200	0,0201	0,0200
	Viés	0,2361	0,2326	-0,0554	-0,0553	-0,0553	-0,0551	<b>-0,0431</b>	-0,0563

Nota: DP se refere a desvio-padrão e os valores em **Negrito** se referem ao maior desvio-padrão e ao viés com valor mais próximo a zero.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.9 – Medidas da ES no quantil 5%

Distribuição	Medida	HS	FHS	Normal	Normal Assim.	t-Student	t-Student Assim.	GED	GED Assim.
Normal	Média	-0,0422	0,2812	-1,4320	-1,4316	-1,4193	-1,4339	-1,4318	-1,4315
	DP	0,0039	0,0652	0,3189	0,3195	0,3174	<b>0,3198</b>	0,3191	0,3194
	Viés	<b>0,0154</b>	0,2806	-1,4326	-1,4322	-1,4325	-1,4321	-1,4199	-1,4345
Normal Assimétrica	Média	0,0130	0,2926	-1,4295	-1,3903	-1,4293	-1,3906	-1,4175	-1,3911
	DP	0,0040	0,0669	<b>0,3124</b>	0,3040	0,3123	0,3041	0,3103	0,3041
	Viés	<b>0,0122</b>	0,2919	-1,4302	-1,3911	-1,4183	-1,3918	-1,4300	-1,3914
t-Student	Média	0,0171	0,2950	-1,3730	-1,3709	-1,3714	-1,4023	-1,3671	-1,3660
	DP	0,0044	0,2201	0,8767	<b>0,8892</b>	0,8373	0,8606	0,8552	0,8627
	Viés	<b>0,0179</b>	0,2958	-1,3722	-1,3701	-1,3664	-1,3652	-1,3706	-1,4015
t-Student Assimétrica	Média	0,0137	0,3146	-1,3730	-1,3279	-1,3789	-1,3374	-1,3744	-1,2724
	DP	0,0048	0,1537	<b>0,6514</b>	0,6340	0,6275	0,6134	0,6331	0,5903
	Viés	<b>0,0123</b>	0,3132	-1,3744	-1,3293	-1,3758	-1,2738	-1,3803	-1,3388
GED	Média	0,0161	0,2818	-1,4384	-1,4388	-1,4253	-1,4414	-1,4382	-1,4386
	DP	0,0039	0,0673	0,3355	0,3360	0,3349	<b>0,3364</b>	0,3353	0,3359
	Viés	<b>0,0131</b>	0,2788	-1,4414	-1,4417	-1,4411	-1,4415	-1,4283	-1,4444
GED Assimétrica	Média	-0,0426	0,2927	-1,4310	-1,3922	-1,4183	-1,3928	-1,4309	-1,3923
	DP	0,0041	0,0660	0,3081	0,2999	0,3080	0,3006	<b>0,3082</b>	0,2997
	Viés	<b>0,0125</b>	0,2922	-1,4314	-1,4322	-1,4313	-1,3927	-1,4187	-1,3932

Nota: DP se refere a desvio-padrão e os valores em **Negrito** se referem ao maior desvio-padrão e ao viés com valor mais próximo a zero.

Fonte: Elaborada pelo autor



Ao examinar-se a variabilidade (desvio-padrão) das estimativas do VaR, percebe-se que no geral os maiores valores são apresentados pelos modelos HS e FHS. O segundo modelo com maior desvio-padrão das previsões é o HS. Surpreendentemente, esses modelos foram os que apresentaram melhor qualidade, no geral, para prever o VaR. No que tange ao sinal do viés das estimativas, constata-se um padrão. As estimativas do modelo HS e FHS apresentam valor positivo, indicando que em média esses modelos geram previsões de risco mais acentuadas. Em relação aos modelos com ARMA-GARCH com distribuições condicionais, nota-se que o sinal do viés médio é negativo, ou seja, esses modelos geram estimativas mais atenuadas do risco. Assim, eles subestimam o risco. Também, verifica-se que, de acordo com o viés médio, o modelo ARMA-GARCH com distribuição GED apresenta melhor desempenho (valor de viés mais próximo a zero) para o quantil 1%, diferentemente do que observado ao considerar as funções de perda. Para o quantil 2,5%, de acordo com o viés médio, o modelo ARMA-GARCH com distribuição *t*-Student obteve melhor desempenho, já no quantil 5% o modelo ARMA-GARCH com distribuição GED obteve os melhores valores de viés médio. Além das conclusões do viés médio não coincidirem com os obtidos ao se analisar as funções de perda, infere-se que o viés, para cada quantil, indica o mesmo modelo com melhor desempenho.

Ao observar-se os resultados descritivos da ES, entende-se que os maiores valores de desvio-padrão são obtidos pelos modelos condicionais. Em relação ao padrão do sinal do viés, verifica-se comportamento similar às estimativas do VaR, isto é, para os modelos HS e FHS o viés é positivo, enquanto para os demais é negativo. Em relação ao viés, deduz-se que o modelo incondicional HS, seguido do FHS apresentam os melhores resultados. Assinalando, desse modo, que, no geral, o viés apresenta um comportamento contrário ao das funções de perda, uma vez que para a ES, o FHS e a ES apresentaram os piores valores.

Assim, em resumo, nota-se que a decisão do modelo com o melhor desempenho se altera ao considerarmos o viés ou as funções de perda como critério de decisão para a escolha do melhor modelo. Com isso, percebe-se a fragilidade do critério viés para a tomada de decisão referente ao modelo com melhor desempenho para previsão do VaR e da ES. Outro fato observado é que as estimativas dos modelos que apresentaram maior desvio-padrão foram aqueles que, no geral, apresentaram menor função de

perda.

## 5 CONCLUSÃO

O objetivo geral do trabalho foi comparar distribuições do modelo GARCH, via simulações de Monte Carlo, para prever o VaR e a ES. Para alcançar o objetivo proposto foi utilizado um procedimento numérico com 5000 réplicas de Monte Carlo, onde em cada uma foi computada uma previsão um passo a frente. Para análise da performance dos modelos utilizou-se funções de perda. Critérios adicionais, como média, viés e desvio-padrão das estimativas, também foram considerados. No geral, os resultados numéricos indicam que os melhores modelos para prever a ES e o VaR não coincidem. A FHS obteve os melhores resultados para o VaR. Além disso, notou-se o HS como um bom candidato para prever o VaR. Já para a ES, notou-se predominância expressiva dos métodos paramétricos. Os modelos HS e FHS foram os que obtiveram os piores resultados para a medida, independentemente das distribuições usadas para a simulação dos dados.

Também verificou-se que os resultados se alteram de acordo com os quantis. Além disso, no geral, o processo gerador não coincide com o modelo gerador dos dados. Isso só foi observado uma vez para a ES e para o VaR, no quantil 2,5%. Outro importante resultado observado no estudo é que a decisão sobre a escolha do modelo com melhor desempenho, ao utilizar o viés e a função de perda como critérios, se alteram. No geral, a decisão indicada pelos dois critérios é inversa. Por exemplo, segundo as funções de perda, o HS e a FHS foram os modelos com pior desempenho para prever a ES, e via viés, os modelos com melhor desempenho.

Assim, em resumo, com esse trabalho foi possível concluir que, assim como a literatura já vem demonstrando, os métodos não paramétricos são insuficientes para a mensuração do ES, com os modelos paramétricos obtendo melhor desempenho. Já para o VaR, o modelo FHS obteve melhores resultados. Como limitações do trabalho, pode se destacar o fato de que não foram considerados diferentes tamanhos de janelas de estimação, e também a análise ter se centrado no caso univariado. Para trabalhos futuros, recomenda-se investigar se com dados reais os resultados identificados nesse estudo se mantêm.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANGELIDIS, T.; BENOS, A.; DEGIANNAKIS, S. The use of garch models in var estimation. *Statistical methodology*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 105–128, 2004.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, Wiley Online Library, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.
- BELLINI, F.; BERNARDINO, E. D. Risk management with expectiles. *The European Journal of Finance*, Taylor & Francis, v. 23, n. 6, p. 487–506, 2017.
- BERKOWITZ, J.; CHRISTOFFERSEN, P.; PELLETIER, D. Evaluating value-at-risk models with desk-level data. *Management Science*, INFORMS, v. 57, n. 12, p. 2213–2227, 2011.
- BIS. *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*. CH-4002 Basel, Switzerland, 2010. Disponível em: <<https://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>>.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 1986.
- CHRISTOFFERSEN, P.; GONÇALVES, S. Estimation risk in financial risk management. *The Journal of Risk*, Incisive Media Limited, v. 7, n. 3, p. 1, 2005.
- DANIELSSON, J. *Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk, with Implementation in R and Matlab*. [S.l.]: A John Wiley and Sons, Ltd, Publication, 2011.
- DEGIANNAKIS, S.; FLOROS, C.; DENT, P. Forecasting value-at-risk and expected shortfall using fractionally integrated models of conditional volatility: International evidence. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 27, p. 21–33, 2013.
- GERLACH, R.; WALPOLE, D.; WANG, C. Semi-parametric bayesian tail risk forecasting incorporating realized measures of volatility. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 17, n. 2, p. 199–215, 2017.
- GNEITING, T.; RANJAN, R. Comparing density forecasts using threshold-and quantile-weighted scoring rules. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 29, n. 3, p. 411–422, 2011.
- HARMANTZIS, F.; MIAO, L.; CHIEN, Y. Empirical study of value-at-risk and expected shortfall models with heavy tails. *The Journal of Risk Finance*, 2006.
- JORION, P. *Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2006.
- KUESTER, K.; MITTNIK, S.; PAOLELLA, M. Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, 2006.

- MABROUK, S.; SAADI, S. Parametric value-at-risk analysis: Evidence from stock indices. *The Quarterly review of economics and finance*, Elsevier, v. 52, n. 3, p. 305–321, 2012.
- MARINELLI, C.; D'ADDONA, S.; RACHEV, S. T. A comparison of some univariate models for value-at-risk and expected shortfall. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, World Scientific, v. 10, n. 06, p. 1043–1075, 2007.
- MÜLLER, F. M.; RIGHI, M. B. Numerical comparison of multivariate models to forecasting risk measures. *Risk Management*, In Press, 2017.
- PÉRIGNON, C.; SMITH, D. R. The level and quality of value-at-risk disclosure by commercial banks. *Journal of Banking & Finance*, v. 34, n. 2, p. 362 – 377, 2010. ISSN 0378-4266.
- R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>.
- RIGHI, M. B.; CERETTA, P. S. A comparison of expected shortfall estimation models. *Journal of Economics and Business*, Elsevier, v. 78, p. 14–47, 2015.
- YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. et al. On the validity of value-at-risk: comparative analyses with expected shortfall. *Monetary and economic studies*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, v. 20, n. 1, p. 57–85, 2002.
- ZHOU, J. Extreme risk measures for reits: A comparison among alternative methods. *Applied Financial Economics*, Taylor & Francis, v. 22, n. 2, p. 113–126, 2012.