A FATORIAL NO INFINITO

COLÓQUIO SBM/UFRGS

José Franciso P. da Silveira

Série C2/MAR/88

A FATORIAL NO INFINITO

por

J.F. Porto da Silveira
IM da UFRGS

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar a clássica questão da medida da velocidade com que a fatorial tende ao infinito.

Pretendemos dar uma visão panorâmica desse problema e apresentar várias provas elementares da principal de tais medidas: a fórmula de Stirling.

Ao longo da investigação dessa questão, nos defrontaremos com algumas questões mais técnicas que nos darão a oportunidade de referenciar o leitor a textos de Cálculo Infinitesimal de caráter mais sólido e substancioso do que os que hoje tendem a predominar em nossas universidades. Haverá, também, oportunidade para atingirmos alguns problemas em aberto.

INDICE

I - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.

1) A Questão Maior Que Investigaremos

Como medir a velocidade com que a fatorial tende ao infinito ?

2) As Duas Versões Da Questão

Em Matemática trabalhamos com duas versões da noção de fatorial:

- a fatorial discreta $n!$, que é a função de variável discreta n definida por : $0! = 1$, e $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ se n é inteiro ≥ 1.

- a fatorial contínua $z!$, que é a função da variável contínua (real ou complexa) z e que é definida de modo a ser uma extensão NATURAL da fatorial discreta, e que em particular preserva o caráter recursivo :

$(z + 1)! = (z + 1) . z!$.

Muitos autores preferem expressar a fatorial contínua em termos da função gama, via $z! = \Gamma(z + 1)$.

Apesar da fatorial contínua ser extensão da discreta, é mais fácil estudar o comportamento de $n!$ ao $n \to \infty$, do que estudar o de $z!$ ao $z \to \infty$, e então por razões de brevidade nos limitaremos a estudar o comportamento no infinito da fatorial discreta $n!$. Contudo, em ordem a despertar a curiosidade do leitor e dar maior riqueza a essa exposição, em alguns exemplos mencionaremos resultados envolvendo a fatorial contínua.

3) Estratégia Que Adotaremos

Desenvolveremos nossa investigação em tres direções:

- busca de DELIMITAÇÕES INTERVALARES tipo $a_n \leq n\,! \leq b_n$, com a_n e b_n simples.

- busca de SUBSTITUTOS, tipo comportamento de $\sqrt[n]{n!}$ ao $n \to \infty$.

- busca de IGUALDADES ASSINTÓTICAS $n\,! \sim \gamma\,(\,n\,)$, ie buscaremos expressões $\gamma\,(\,n\,)$ tq ao $n \to \infty : n\,!/\gamma\,(\,n\,) \to 1$.

A mais simples e conhecida das igualdades assintóticas para $n\,!$ é a famosa fórmula de STIRLING:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

que será provada e aperfeiçoada no que segue.

II - OCORRÊNCIA DO PROBLEMA.

1) Na Medida De Complexidade Computacional.

Tipicamente, o número de operações elementares para resolver problemas combinatórios é expresso em termos da fatorial discreta $n\,!$ de algum parâmetro n do problema. É então fundamental termos uma idéia do quão grande tal complexidade computacional pode se tornar, ao $n \to \infty$.

Exemplo 1 (simples).

O número de operações aritméticas necessárias para avaliar o determinante de uma matriz n x n, via definição, é:

[(n ! - 1) adições + n ! (n-1) multiplicações] = n ! n-1. Ora, usando a fórmula de Stirling, temos que $50! \simeq 3.0 * 10^{64}$ e então precisamos realizar $1.5 * 10^{66}$ operações aritméticas para calcular, via definição, o determinante de uma matriz 50 x 50 (tamanho bastante pequeno frente ao de matrizes de muitos problemas tecnológicos e científicos).

Quanto tempo levaria o computador mais rápido em existência, o ETA 10-E, para realizar todas essas operações ? O ETA 10-E faz 6800 milhões de operações artiméticas por segundo, e então precisaria de $7.0 * 10^{48}$ anos para calcular nosso determinante. Uma óbvia impossibilidade, em escala humana.

Exemplo 2 (mais sofisticado).

Dado um problema, cujo "tamanho" pode ser medido por um parâmetro discreto n (ex.: problema de calcular o determinante de uma matriz n x n), dizemos que:

- esse problema é um P-PROBLEMA se existir algoritmo capaz de resolvê-lo com um número de operações, ou tempo, polinomial em n. Ou seja: o algoritmo resolve o problema em tempo $O(n^k)$, para algum k natural.

- esse problema é um NP-PROBLEMA se toda candidata a solução puder ser verificada ser ou não solução em tempo $O(n^k)$, para algum k natural.

Obviamente, todo P-problema é um NP-problema. É, contudo, um problema em aberto:

CONJECTURA DE COOK (1971) : P = NP

Se ela for verdadeira teríamos que todo problema para o qual é facil verificar soluções, automaticamente também será fácil de resolver.

Se ela for falsa, como a maioria dos problemas combinatórios de interesse industrial (scheduling, packing, etc.) são sabidos estarem em NP, então provavelmente muitos desses importantes problemas não estarão em P. Conseqüentemente eles só poderiam ser resolvidos em tempo maior do que o polinomial, e muito provavelmente em tempo $O(n!)$. Ou seja: não poderiam ser resolvíveis em tempo humanamente viável.

2) <u>No Cálculo Numérico De Expressões Envolvendo Fatoriais.</u>

Essas expressões podem envolver:

- fatoriais discretos, como é o que ocorre em permutações, combinações, coeficientes binomiais, probabilidades discretas, etc.

- fatoriais contínuas (ou função gama, já que $z! = \Gamma\,(z + 1)$), como é o que ocorre em coeficientes de funções especiais, como na função de Bessel:

$$J_{\nu}\,(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!\,(\nu+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

em valores de integrais, como em:

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^{\nu}\, dx = \left(\frac{1}{\nu}\right)!\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2\nu}\ , \text{ etc}$$

Tal determinação numérica é feita:

- nas expressões com fatoriais discretas n! :

  .e n pequeno: diretamente da definição.

  .e n grande: usando aproximações assintóticas.

- nas expressões com fatoriais contínuas z!, com z pequeno ou grande, aproveita-se a relação:

$$z! = \frac{(z+p)!}{(z+1)\ (z+2)\ \ldots\ (z+p)}$$

onde se toma p suficientemente grande para que possamos avaliar $(z + p)!$ via expansão assintótica (vide detalhes no item IX).

3) <u>No Cálculo De Limites.</u>

Freqüentemente encontramos fatoriais indo ao infinito. Exemplos simples ocorrendo na aplicação de testes de convergência para séries, no cálculo do raio do disco de convergência de séries de potências, etc.

Um exemplo mais sofisticado seria o clássico estudo estatístico da aproximação da distribuição binomial pela normal (conforme veremos adiante, no item V, foi esse o problema que provocou a descoberta da fórmula de Stirling).

4) <u>Na Indicação Da Velocidade De Convergência.</u>

Freqüentemente é útil não apenas mostrar que uma dada quantidade converge para zero ou infinito, mas precisar - via funções elementares -

a velocidade com que tal convergência ocorre. Isso é particularmente importante quando tal quantidade é expressa em termos fatoriais.

Exemplo - (simples)

Sendo $V_n(R)$ o volume da bola de raio R e no R^n, prova-se que:

$$V_n(R) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} R^n, & \text{se } n = 2,4,6,\ldots \\[2ex] \dfrac{2^n}{n!} \left(\dfrac{n-1}{2}\right)! \, \pi^{\frac{n-1}{2}} R^n, & \text{se } n = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

Usando informação sobre o comportamento de k! ao $k \to \infty$ podemos mostrar que $V_n(R) \to 0$, e inclusive dar indicação da velocidade com que ocorre tal convergência.

Exemplo (mais sofisticado)

Quando o parâmetro $\lambda \to \infty$, temos que a integral $\int_a^\infty \frac{\lambda^x}{x!} dx$ vai ao infinito sendo que podemos precisar a velocidade com que isso ocorre:

$$\int_a^\infty \frac{\lambda^x}{x!} dx \sim e^\lambda \qquad , \quad (a > 0)$$

5) Na Prova De Propriedades Ou Justificativa De Operações Infinitesimais.

Precisamos, frequentemente, obter desigualdades envolvendo fatoriais e que sejam válidas ao menos para valores grandes do argumen to de tais fatoriais.

Exemplo - (simples)

é o que ocorre na justificativa da primeira operação no cálculo:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\left(\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}} x\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n/3} x \, dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{3}\right)!}$$

Exemplo - (mais sofisticado).

A aplicação da fórmula de Stirling mostra que a série que representa a função de Bessel (vide (2)), fixado $z \neq 0$, é uniformemente convergente em ν sobre cada compacto do plano complexo. Consequentemente, $J_{\nu}(z)$ tem a propriedade de ser função inteira do parâmetro ν, para cada $z \neq 0$ fixado.

6) Em Muitas Outras Ocorrências

Poderíamos evidenciar a necessidade ou vantagem de conhecer o comportamento da fatorial no infinito. Por razões de brevidade, e porque muitas dessas ocorrências são difíceis de separar do contexto que as envolve, terminaremos aqui essa exemplificação.

III - SOLUÇÃO VIA DELIMITAÇÕES INTERVALARES PARA N!.

1) Teorema.

Para todo inteiro $n \geq 0$: $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Prova:

A série de Taylor-Maclaurin para a exponencial dá:

$$e^n = 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots \geq \frac{n^n}{n!} \text{, e então: } n! \geq \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Por outro lado, usando que a média geométrica é sempre $\leq$ que a média aritmética correspondente, temos:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1.2 \ldots n} \leq \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{\frac{1}{2}\, n\,(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2} \text{, e então:}$$

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

QED.

2) Tabulando Alguns Valores:

n	$(n/e)^n$	$n!$	$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
10	$4.54 * 10^{5}$	$3.63 * 10^{6}$	$2.53 * 10^{7}$
20	$2.16 * 10^{17}$	$2.43 * 10^{18}$	$2.65 * 10^{20}$
30	$1.93 * 10^{31}$	$2.65 * 10^{32}$	$5.13 * 10^{35}$
40	$5.14 * 10^{46}$	$8.16 * 10^{47}$	$2.95 * 10^{52}$
50	$1.71 * 10^{63}$	$3.04 * 10^{64}$	$2.12 * 10^{70}$
100	$3.72 * 10^{156}$	$9.33 * 10^{157}$	$2.1 * 10^{170}$
1000	$5.1 * 10^{2565}$	$4.02 * 10^{2567}$	$2.5 * 10^{2699}$

3) Aplicação: A Fatorial Cresce Mais Rapidamente Que Qualquer PG.

mais precisamente:

Teorema.

Dado δ real positivo, então $\delta^n \leq n!$, para todo $n \geq 3\delta$.

prova:

para todo tal n: $\delta \leq \frac{n}{3} \leq \frac{n}{e}$ e então $\delta^n \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

QED.

4) <u>Aplicação: A Fatorial Cresce Menos Rapidamente Que n^n</u>.

<u>Teorema.</u>

Para todo n inteiro ≥ 1: $n! \leq n^n$.

Prova:

Para tais n vale: $\frac{n+1}{2} \leq n$ e então $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \leq n^n$ QED.

<u>Corolário.</u>

Para n grande: $e^n \leq n! \leq e^{e^n}$.

Prova:

Use os dois teoremas anteriores. QED.

5) <u>Aplicação: O Volume Da Bola Do R^n Tende A Zero Ao $n \to \infty$</u>.

Prova:

- se n for par, escrevamos $n=2k$. Teremos então:

$$V_n = R^{2k} \frac{\pi^k}{k!} \leq R^{2k} \pi^k \left(\frac{e}{k}\right)^k = \left(\frac{\pi e R^2}{k}\right)^k \to 0$$

- se n for ímpar, escrevamos $n=2k+1$. Teremos então:

$$V_n = R^{2k+1} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} k! \pi^k \leq (2R)^{2k+1} \pi^k \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \left(\frac{e}{2k+1}\right)^{2k+1} =$$

$$= \frac{(4R^2\pi)^{k+1}}{2R\pi}\left[\frac{e}{2}\,\frac{k+1}{2k+1}\right]^k\left[\frac{e}{2k+1}\right]^{k+1} =$$

$$\frac{1}{2R\pi}\left[\frac{e}{2}\,\frac{k+1}{2k+1}\right]^k\left[\frac{4R^2\,\pi e}{2k+1}\right]^{K+1} \longrightarrow 0$$

IV - SOLUÇÃO VIA SUBSTITUTOS PARA N!.

1) Motivação.

Muitas vezes o que efetivamente precisamos determinar é o comportamento de uma função de n!, ao $n \to \infty$. Por exemplo, no estudo da convergência de séries numéricas via o teste da raiz é comum precisarmos saber a velocidade com que $\sqrt[n]{n!}$ vai ao infinito. Assim:

2) Teorema.

ao $n \to \infty$: $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$

prova nº 1:

da teoria das sequências numéricas temos que (sendo $a_n > 0$):

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Consequentemente, se existe $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ tambem existirá $\lim \sqrt[n]{a_n}$ e os dois tem o mesmo valor.

Aplicando essa observação no caso em que $a_n = n!\ / n^n$, teremos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e}\text{, e então:}$$

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \longrightarrow \frac{1}{e}\text{, ou seja:}$$

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}\ .\qquad \text{QED.}$$

Prova nº 2.

Usando apenas o teorema da média, aplicado a função:

$y = \ln x$ no $[k,k+1]$:

$\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{\epsilon}$, com $\frac{1}{k+1} \leq \epsilon \leq \frac{1}{k}$ Consequentemente:

$$\frac{1}{k+1} < \ln\frac{k+1}{k} < \frac{1}{k} \quad \text{e dai} \quad k\ln\frac{k+1}{k} < 1\text{, e}\quad 1 < (k+1)\ln\frac{k+1}{k}$$

e então, finalmente: $k \ln \frac{k+1}{k} < 1 < (k+1) \ln \frac{k+1}{k}$ ∴

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$$.

Se agora fizermos $k=1,2,\ldots$:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^1 < e < \left(\frac{2}{1}\right)^2 \quad , \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad , \ldots ,$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$, e então:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e^n < \left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \therefore$$

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \therefore \frac{(n+1)^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \therefore$$

$$\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{e}\,(n+1)^{1/n} \therefore \frac{1}{e} \leq \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \therefore$$

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$ QED.

V - SOLUÇÃO VIA RESULTADOS ASSINTÓTICOS: HEURÍSTICA E HISTÓRIA.

1) Observação.

Examinando a tabela feita no III, vemos que $(n/e)^n$ parece seguir muito de perto os valores de n!. Isso nos leva a seguinte:

2) Conjectura Inicial.

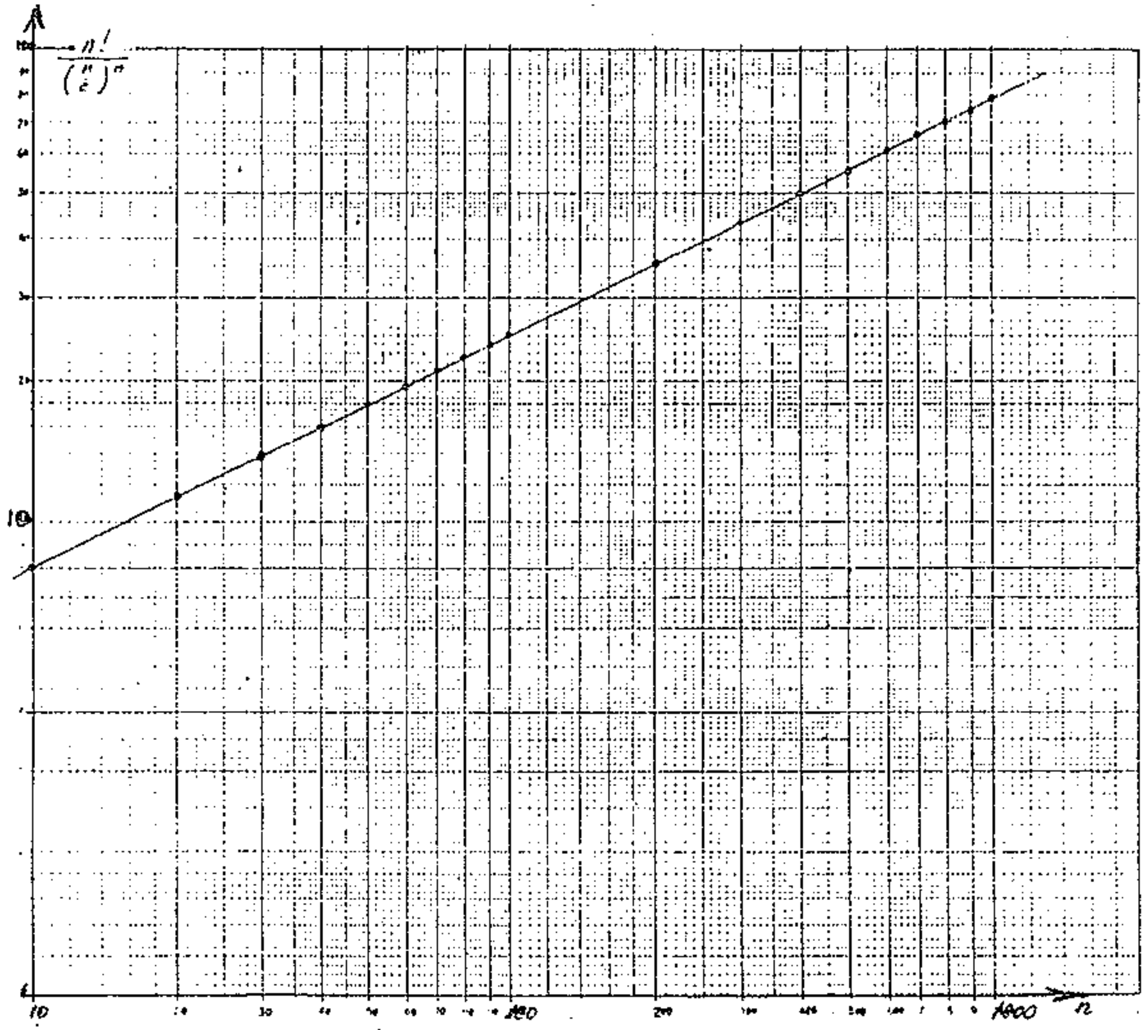
ao $n \to \infty$: $n! \sim c \left(\frac{n}{e}\right)^n . n^{\alpha}$ com c= constante e $0 < \alpha < 1$.

3) Teste Experimental Da Conjectura.

Ela equivale a afirmar que, para c e α a achar, $y \simeq c\, n^{\alpha}$ torna-se tanto mais verdadeira quanto maior for n, e onde $y = n! \,/\, (n/e)^n$.

Ora a relação $y = c\, n^{\alpha}$ dá $\log y = \log c + \alpha \log n$, que é uma relação linear entre log y e log n. Ou seja: a relação $y \sim cn^{\alpha}$ será verdade se e somente se desenhando os pontos (n,y) em escala logarítmica eles tenderem, ao $n \to \infty$, a uma reta.

O gráfico na próxima folha confirma essa hipótese e nos permite determinar aproximadamente o valor de c e α .



$\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n}$
10
10
100
1000
n

Calculando os parâmetros da reta:

$$\alpha = \frac{\log 79.273\,15180 \quad - \quad \log 25.087\,1796}{\log 1000 \qquad\qquad - \quad \log 100} \cong 0.\,499\,674\,281$$

$$C = \frac{79.273\,15180}{100^{0.499\,674\,281}} = 2.512\,483\,871$$

4) Melhorando A Conjectura Inicial.

Visto, conforme calculamos acima, que $\alpha \cong 1/2$, e $C \cong \sqrt{2\pi}$, conjecturamos que:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \ .$$

Nos itens seguintes provaremos a veracidade desse resultado, o qual é a famosa fórmula de STIRLING.

5) Breve Histórico.

Em verdade é impróprio chamar a fórmula de (4) de fórmula de Stirling, pois:

- a primeira pessoa a se preocupar com o comportamento da fatorial no infinito foi DE MOIVRE (1730), embora esse jamais tenha explicitado uma fórmula assintótica para n!.

- STIRLING, motivado por De Moivre, publicou uma fórmula assintótica para $n!$, mas essa é completamente diferente da dada acima.

- até 100 anos atrás usava-se apenas séries assintóticas para $n!$ e, embora seja trivial delas obter a fórmula acima, foi acerca de 100 anos que surgiram as primeiras demonstrações da fórmula de (4).

De qualquer modo, é interessante darmos alguns maiores detalhes acerca do envolvimento de De Moivre e Stirling quanto a $n!$.

Partindo de problemas sobre jogos de azar, De Moivre c.1730 foi levado a estudar o valor (ao $n \to \infty$) da razão entre o termo central da binomial $(1+1)^n$ e a soma de todos seus termos, ie:

$$\pi_n = \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)!^2}$$

Nesse processo acabou, essencialmente, obtendo uma das mais básicas relações da Estatística, qual seja: a relação entre a distribuição binomial e a distribuição normal. Mas o que mais nos interessa aqui é que, para tal, De Moivre provou que:

$$\pi_n \sim 2/\left(B\sqrt{n}\right)$$

sendo que isso equivale a afirmar que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n B\sqrt{n}$

Contudo, De Moivre jamais escreveu explicitamente essa última relação. Quanto ao valor de B, De Moivre conseguiu apenas provar que:

$$\ln B = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} + \cdots$$

Pediu então a ajuda de STIRLING, que na época era um dos maiores especialistas em técnicas de soma de séries. Esse, usando a fórmula de WALLIS, provou que $B = \sqrt{2\pi}$

Além disso, Stirling obteve uma expressão assintótica mais completa, ie uma serie assintótica, para n!, conforme veremos em VII, onde aprofundaremos os aspectos históricos desse problema.

VI - FÓRMULA DE STIRLING: PROVAS

1) Tipo De Provas.

As provas dessa fórmula podem ser divididas em duas categorias:

- as que NÃO determinam o valor da constante c em $n! \sim c\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$

- as que acham o valor de c, provando que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

2) Provas Intuitivas.

As provas da segunda categoria, ie as provas completas, tem como principal dificuldade a determinação da constante $c = \sqrt{2\pi}$,o que as faz um tanto técnicas e não naturais. Seria um interessante projeto didático a descoberta de provas intuitivas desse resultado, pois o tornaria acessível a mesmo alunos de cursos iniciais de Cálculo Infinitesimal. Obviamente, enquadramos o argumento heurístico do V na categoria de argumentos empíricos e então não matemáticos.

3) Provas Sem A Constante: Técnica Da Série Telescópica.

Se definirmos a sequência $(\gamma_n)_n$ via $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\cdot\gamma_n$ nos bastará provar que $\gamma_n \to c$.

Ora a série de termo genérico:

$a_n = \ln \dfrac{\gamma n+1}{\gamma_n} = \ln \gamma_{n+1} - \ln \gamma_n$ é obviamente telescópica, pois:

$$a_1+a_2+ \dots + a_n = \ln\gamma_2 - \ln\gamma_1 + \ln\gamma_3 - \ln\gamma_2 + \dots + \ln\gamma_{n+1} - \ln\gamma_n =$$

$$= \ln\gamma_{n+1} - \ln\gamma_1$$

e então sua convergência implicará a da sequência $\ln\gamma_{n+1} - \ln\gamma_1$, e isso implicará a desejada convergência dos γ_n.

Resta, então, provar a convergência da série dos a_n.

Ora, como:

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \sqrt{n+1}} = e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$$

segue que:

$$an = \ln \frac{\gamma_n+1}{\gamma_n} = 1- \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1- \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} +\right.$$

$$\left. + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1- \left(1-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e entao Σ an é convergente. QED.

4) Provas Sem A Constante: Técnica Da Integração Por Trapézios.

A fórmula clássica da integração via trapézio:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a) - \frac{(b-a)^3}{12}\,f''(\xi) \quad , \text{com } a \le \xi \le b,$$

nos fornece, no caso de $f(x) = \ln x$:

$$\int_k^{k+1} \ln x\,dx = \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} + \frac{1}{12\,\xi_k^2} \quad , \text{com } k \le \xi_k \le k+1$$

consequentemente:

$$\int_1^n \ln x\,dx = \frac{1}{2}\,(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}\,(\ln 2 + \ln 3) + \ldots +$$

$$\frac{1}{2}\,(\ln(n-1) + \ln n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\xi_1^2} + \ldots + \frac{1}{\xi_{n-1}^2}\right) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots +$$

$$+ \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\xi_1^2} + \ldots + \frac{1}{\xi_{n-1}^2}\right) \text{ e como:}$$

$$\int_1^n \ln x\,dx = \int_1^n D\,[\,x\ln x - x\,]\,dx = n\ln n - n + 1 \quad \text{segue então:}$$

$$n \ln n - n + 1 = \ln n! - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\xi_1^2} + \ldots + \frac{1}{\xi_{n-1}^2} \right) \quad \text{, e daí:}$$

$$\ln e \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\xi_1^2} + \ldots + \frac{1}{\xi_{n-1}^2} \right) \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{1^2} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)^2} \right).$$

Ora como $\Sigma \frac{1}{n^2}$ e convergente, segue que $\ln \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}$ é convergente, e então que também é convergente a razão: $\frac{(n/e)^n \sqrt{n}}{n!}$

QED.

5) Provas Que Determinam A Constante.

Essas provas determinam o valor da constante usando o caminho achado por Stirling em 1730, ie elas fazem uso da fórmula de Wallis.

A literatura atual chama de fórmula de Wallis a várias expressões dando π em termos de produtório. Contudo apenas uma delas e a fórmula original de Wallis, a qual em notação moderna fica:

$$\frac{4}{\pi} = \lim \frac{9.25.49.81. \ldots (2n+1)^2}{8.24.48.80. \ldots (2n)(2n+2)} \sqrt{\frac{2n+3}{2n+2}}$$

e na qual, obviamente, podemos eliminar o fator $\sqrt{\frac{2n+3}{2n+2}}$ sem nada alterar.

Wallis obteve essa fórmula (1656: Arithm. Infinitorum) ao calcular a área do quadrante do círculo unitário, via:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Modernamente chega-se a fórmulas "de" Wallis via outras integrais, como:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx \quad , \int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^n} \quad , \text{ etc.}$$

Em particular, Ostrowski (vol. II, pg 373) obtém:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2.2.4.4 \ \dots \ 2n.2n}{1.3.3.5 \ \dots \ (2n-1)\ (2n+1)} \qquad (*)$$

da qual podemos facilmente obter a fórmula original de Wallis e vice-versa.

Dito isso, voltemos a determinação da constante c em:

$$n! \sim c\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Prova nº 1:

Partindo de (*):

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2.4 \ldots 2n}{(2n)!\ (2n+1)!} = \lim \frac{2^{4n}\ .\ n!^4}{(2n)!\ \ (2n+1)!}$$

e usando que $n! \sim (n/e)^n \sqrt{n}\ .\ c$ temos:

$$n!^4 \sim c^4 \quad \frac{n^{4n+2}}{e^{4n}}\quad , \ (2n)! \sim c\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n} = c\ \ 2^{2n+\frac{1}{2}}\ \frac{n^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}},$$

$$(2n)!\ (2n+1)! = (2n)!^2.(2n+1) \sim 2n.(2n)!^2 \sim c^2\ 2^{4n+2}\ \frac{n^{4n+2}}{e^{4n}}$$

e então:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2^{4n}\ c^4\ n^{4n+2}}{e^{4n}} . \frac{e^{4n}}{c^2\ 2^{4n+2}\ \ n^{4n+2}} =$$

$$= \lim \frac{c^2}{2^2} \therefore \frac{c^2}{4} = \frac{\pi}{2} \therefore c = \sqrt{2\pi}$$

Prova nº 2:

Como exercício (algo difícil) pedimos ao leitor mostrar que:

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\ n}} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1.3.5.\ \ldots\ (2n-3)}{2.4.6.\ \ldots\ (2n-2)} . \ \frac{1}{|x|^{2n-1}} \quad \text{se } x \neq 0 \ \text{ e } n \geq 2$$

e daí, provando que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \dfrac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$

concluir que:

$$\pi = \lim \left(\frac{2.4.6.\ \dots\ 2n}{1.3.5.\ \dots\ (2n-1)}\right)^2 \frac{1}{n}$$

Finalmente:

- ou prove que desses resultados sai a fórmula "de" Wallis (*)
- ou partindo desse limite, prove que $c = \sqrt{2\pi}$

VII - SÉRIES DE STIRLING PARA ln n!.

1) A Série Histórica De Stirling Para ln n!.

Em 1730, Stirling (na proposição 28 de seu livro Methodus Differentialis) se propôs a achar a soma de logaritmos cujos argumentos variam em PA.

Trabalhando com a série binomial obteve (em notação moderna e usando ln onde ele originalmente usou $\log_{10}$):

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left(n+\tfrac{1}{2}\right) - \left(n+\tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{7}{2880\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \dots - \left(\frac{1}{2}\ \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{7}{360} + \dots\right)$$

A seguir, a partir da fórmula de Wallis, ele mostrou que:

$$\ln\sqrt{2\pi} = -\left[\frac{1}{2}\ \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{7}{360} + \dots\right]$$

e disso concluiu que:

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi} + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left(n+\tfrac{1}{2}\right) - \left(n+\tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{24\left(n+\tfrac{1}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{7}{2880\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2} + \dots$$

que podemos reescrever como:

$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{n+\tfrac{1}{2}}{e}\right)^{n+\tfrac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{24(n+\tfrac{1}{2})} + \frac{7}{2880(n+\tfrac{1}{2})^2} + \cdots\right]}$$

2) A Série De Maclaurin.

Esse, em seu Treatise on Fluxions, de 1742, foi o primeiro a obter a versão da moderna série assintótica "de" Stirling:

$$\ln (n-1)! = (n-\tfrac{1}{2})\ \ln n - n + \ln c + \left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \cdots\right)$$

que podemos reescrever:

$$\boxed{n! = c\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\ \exp\left[\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \dots\right]}$$

$$\left[\text{onde } \ln c = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \dots\right]$$

recordamos no bloco abaixo:

NÚMEROS DE BERNOULLI: B_n

- são definidos via a identidade

$$1=\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\right)\left(B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\dots\right)$$

- disso tira-se a seguinte recursão (na qual deve-se fazer a identificação: $B^k \longleftrightarrow B_k$): $\boxed{\begin{array}{l} B_0=1 \\ B_n=(1+B)^n, n\geq 2. \end{array}}$

- alguns valores:

$$B_1=-\tfrac{1}{2}, B_3=B_5=B_7=\dots=0$$

$$B_2=\frac{1}{6} \qquad B_8=-\frac{1}{30} \qquad B_{14}=\frac{7}{6}$$

$$B_4=-\frac{1}{30} \qquad B_{10}=\frac{5}{66} \qquad \vdots$$

$$B_6=\frac{1}{42} \qquad B_{12}=-\frac{691}{2730} \qquad B_{20}=-\frac{174\,611}{330}, \text{ etc.}$$

Então, em notação moderna, Euler concluiu que:

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{|B_2|}{1.2n}-\frac{|B_4|}{3.4n^3}+$$

$$+\frac{|B_6|}{5.6n^5}+\dots$$

Podemos reescrever o resultado de Euler como:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, \exp \left[\frac{B_2}{1.2}\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3.4}\frac{1}{n^3} + \frac{B_6}{5.6}\frac{1}{n^5} + \ldots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2K}} + \ldots \right]$$

4) <u>O Alerta De Cauchy</u>.

Nas expressões acima, para n! ou ln n!, os termos escritos parecem indicar a convergência das séries. Contudo se tivermos um pouco mais de paciência que Maclaurin, e calcularmos mais alguns termos, veremos que a partir do termo n^{19} os coeficientes ficam maiores que um:

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi} + \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \ldots - \frac{174\,611}{125\,400}\frac{1}{n^{19}} + \ldots$$

Mais do que isso, Cauchy (1843) mostrou que em verdade essas series são divergentes.

Com efeito, isso fica fácil de provar usando a versão de Euler (3) e sabendo o comportamento no infinito dos números de Bernoulli (vide Henrici II, pg. 624):

$$|B_{2k}| \sim \frac{2}{(2\pi)^{2k}} (2k)! \sim \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k} =$$

$$= 2 \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k}$$

e então, fixando n, ao $k \longrightarrow \infty$:

$$\frac{|B_{2k}|}{(2k-1)\ (2k)} \quad \frac{1}{n^{2k-1}} \sim \frac{1}{2k^2} \quad \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k} \longrightarrow \infty$$

Essa observação de Cauchy estabeleceu uma grande confusão conceitual: como é que tais séries divergentes prestavam-se ao cálculo numérico?

A resposta só surgiu com Poincaré (1886): deviam ser vistas NÃO como séries convencionais mas como séries ASSINTÓTICAS.

5) A Noção De Série Assintótica.

Uma soma $a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \ldots$

é dita ser:

- uma série (convencional) convergente e de soma f(x) se, fixando x:

$$f(x) - \left[a_0 + \frac{a_1}{x} \quad \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_k}{x^k} \right] \equiv R_k\ (x) \longrightarrow 0 \text{ ao } k \longrightarrow \infty$$

- uma <u>série</u> <u>assintótica</u> de $f(x)$ se, fixado k:

$$f(x) - \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_k}{x^k} \right] \equiv R_k\ (x) \longrightarrow 0 \text{ como o } \left(\frac{1}{x^k} \right)$$

ao $x \longrightarrow \infty$ ie, se ao $x \longrightarrow \infty$: $R_k\ (x) = o \left(\frac{1}{x^k} \right)$

Escrevemos respectivamente:

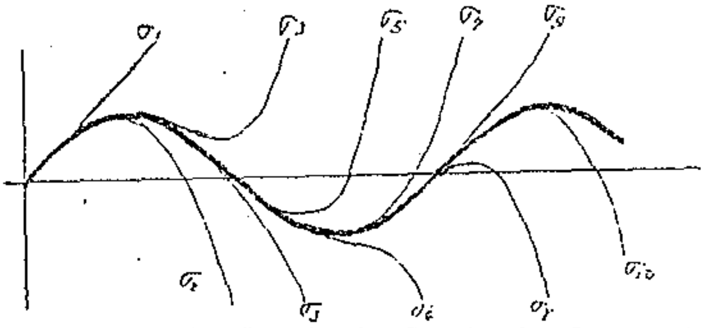
. $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$

. $f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$

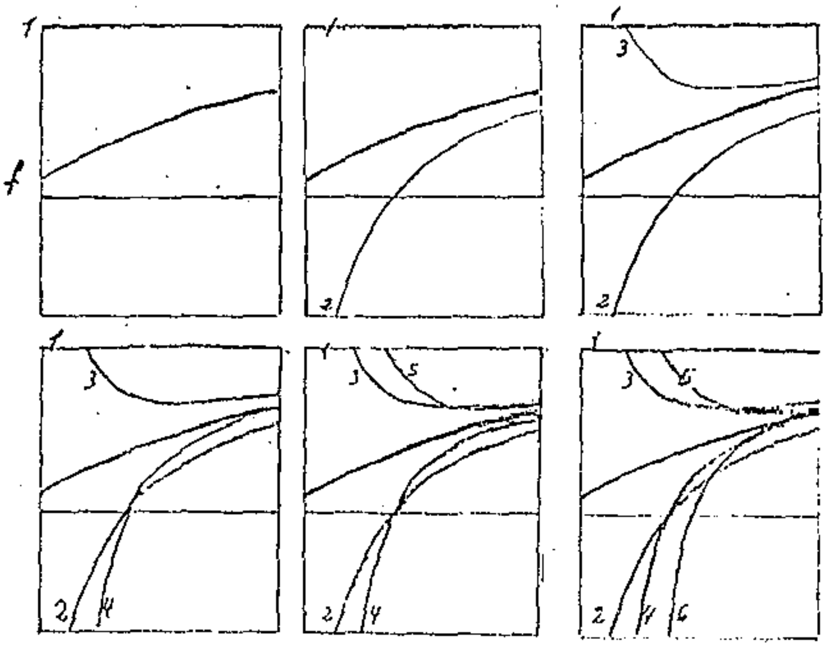
ou também: $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o \left(\frac{1}{x^n} \right)$

Podemos ilustrar gráficamente a diferença entre essas duas noções:

SERIE CONVENCIONAL



SERIE ASSINTÓTICA:



6) Versão Moderna Da Série Assintótica De ln n!.

$$\ln n! \sim \ln \sqrt{2\pi} + (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n$$

$$\ln n! \sim \ln \sqrt{2\pi} + (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n + \frac{1}{12n}$$

$$\ln n! \sim \ln \sqrt{2\pi} + (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}$$

etc.

ou mais precisamente:

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi} + (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n + \frac{B_2}{1.2} \frac{1}{n} + \dots +$$

$$+ \frac{B_{2k}}{(2k-1)\ (2k)} \frac{1}{n^{2k-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right)$$

As vezes pode ser mais útil vê-lo como:

$$\boxed{n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad e^{J(n)}}$$

onde J(n) é chamada função de BINET e é dada por:

$$J(n) = \frac{B_2}{1.2} \frac{1}{n} + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)\ (2k)} \frac{1}{n^{2k-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right)$$

De modo menos informativo, tambem podemos escrever:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right)$$

$$\vdots$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ \exp\left(\frac{B_2}{1.2}\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3.4}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}}\right)$$

prova:

precisamos apenas ser mais precisos do que o foi Maclaurin no (2), e isso envolve usar uma forma mais rigorosa da fórmula de Euler-Maclaurin, como é o caso da seguinte:

Teorema (fórmula Euler-Maclaurin, versão de POISSON).

Sendo $f \in C^{2k+1}([1, n])$ então:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}[f(1) + f(n)] + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(1)] + \frac{B_4}{4!}[f^{(3)}(n) - f^{(3)}(1)] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1)] + \int_1^n \phi(x)\, f^{(2k+1)}(x)\, dx,$$ onde $\phi(x) = (-1)^{K+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} 2\pi nx}{(2n\pi)^{2k+1}}$.

Aplicando essa fórmula a $f(x) = \ln x$, obtemos semelhantemente ao feito em (2):

$$\ln n! = n \ln n - n + \tfrac{1}{2} \ln n + \frac{B_2}{1.2} \frac{1}{n} + \frac{B_4}{3.4} \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)} \frac{1}{n^{2k-1}} +$$

$$+ \left[(2k)! \int_1^{\infty} \phi(x) \frac{dx}{x^{2k+1}} + 1 - \frac{B_2}{1.2} - \frac{B_4}{3.4} - \cdots - \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)} \right] -$$

$$- (2k)! \int_n^{\infty} \phi(x) \frac{dx}{x^{2k+1}} .$$

Nos resta:

- provar que a última parcela é $o(1/n^{2k-1})$
- provar que o valor da série numérica entre parentesis é $\ln \sqrt{2\pi}$

Vamos a tais provas:

PARA A ÚLTIMA PARCELA -

usando que ϕ é periodica e contínua

$$\left| \int_n^{\infty} \phi(x) \frac{dx}{x^{2k+1}} \right| \leq c_k \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2k+1}} = \frac{c_k}{(2k)\, n^{2k}} =$$

$$= \frac{c'k}{n^{2K}} = o\left(\frac{1}{n^{2k}} \right)$$

QUANTO A SOMA:

Escrevamos $\alpha_k \equiv 1 - \frac{B_2}{1.2} - \frac{B_4}{3.4} - \cdots \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,(2k)} +$

$$+(2k)!\int_1^{\infty}\phi(x)\qquad\frac{dx}{x^{2k+1}}$$

temos então que $\alpha_k = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln n! - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n)$

e então é constante em k. Consequentemente: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots$

Mas daí, tomando k = 1: $\ln n! = \ln n^n + \frac{1}{2}\ln n - n + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha_1$

e então $\quad \ln n! = \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + \ln\sqrt{n\, e^{2\alpha_1}} + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \therefore$

$\ln n! \sim \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n\, e^{2\alpha_1}} \therefore n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n\, e^{2\alpha_1}} \therefore$

$2\pi = e^{2\alpha_1} \therefore\ 2\alpha_1 = \ln 2\pi \therefore \alpha_1 = \ln\sqrt{2\pi}$ QED.

VIII - SÉRIE DE STIRLING PARA n!.

1) <u>A Expressão Que Buscamos.</u>

e uma representação em série assintótica para n!. Visto VII ela terá de ter a forma:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \cdots\right)$$

2) Determinação De Tal Série: Métodos Usuais.

Parece ser coisa fácil achar os coeficientes a, b, c, ... na série acima, pois já vimos que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad e^{J(n)}$$

e já obtivemos série assintótica para a função de Binet J(n). Consequentemente, um caminho é obter a série assintótica de $e^{J(n)}$ a partir da de J(n). Os detalhes, contudo, não são óbvios e apelam para métodos de variável complexa aplicados à VERSÃO CONTÍNUA da expressão acima, ie à:

$$z! = \left(\frac{z}{e}\right)^z \sqrt{2\pi z} \quad e^{J(z)}$$

Henrici II (pg 377) desenvolve essa idéia, obtendo:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840}\frac{1}{n^3} - \frac{571}{2\,488\,320}\frac{1}{n^4} + \dots\right).$$

(note que essa série, em oposição à de ln n!, tem todas as potências n^k). Não se conhece nenhuma expressão em termos finitos para os coeficientes dessa série, mas podemos expressá-los via recursões, como (vide Henrici II, pg 377):

$$e^{J(n)} \sim 1 + \frac{h_1}{n} + \frac{h_2}{n^2} + \frac{h_3}{n^3} + \dots$$

tendo-se: $\forall\, n \geq 1 : n\, h_n = \frac{B_2}{2} h_{n-1} + \frac{B_4}{4} h_{n-3} + \frac{B_6}{6} h_{n-5} + \ldots$

(a soma do membro direito termina quando o índice de h chegar a 0 ou 1).

A literatura também traz outros métodos para obter a série assintótica de n!, sendo que todos eles trabalham com a fatorial contínua z! e tipicamente partem ou de representação integral para z! (como faz Henrici II pg 402 ao aplicar o lema de Watson-Doetsch) ou de representação integral da função de Binet J(z).

3) <u>Um Método Simples Para Achar A Série Assintótica De n!.</u>

Trabalharemos estritamente com a fatorial discreta associada ao método da série telescópica usado em (3) do VI. Coloquemos:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, \lambda_n$$

e então nos bastará achar os coeficientes da igualdade assintótica:

$$\lambda_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} +$$

Ora, na notação do (3) do VI: $\lambda_n = \gamma_n / \sqrt{2\pi}$ e então, cf lá visto:

$$\ln \lambda_{n+1} - \ln \lambda_n = \ln \gamma_{n+1} - \ln \gamma_n = \ln \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (*)$$

Mas por outro lado:

$$\ln \lambda_n = \ln\left[1 + \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \ldots\right) \right] = \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \ldots\right) -$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \ldots\right)^2 + \ldots = \frac{a}{n} + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)\frac{1}{n^2} + \ldots$$

e então $\ln \lambda_{n+1} = \dfrac{a}{n+1} + \left(b - \dfrac{a^2}{2}\right)\dfrac{1}{(n+1)^2} + \ldots$

Daí tiramos:

$$\ln \lambda_{n+1} - \ln \lambda_n = a\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \ldots$$

$$= -\frac{a}{n^2+n} - \left(b - \frac{a^2}{2}\right)\frac{1+2n}{n^2(n+1)^2} + \ldots = -\frac{a}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} -$$

$$-\left(b - \frac{a^2}{2}\right)\frac{1+2n}{n^2(1+n)^2} + \ldots = -\frac{a}{n^2}\left[1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] -$$

$$-2\left(b - \frac{a^2}{2}\right)\left[\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = -\frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (**)$$

Comparando (*) e (* *): $a = \frac{1}{12}$

se em (*) e (* *) explicitarmos os termos de ordem superior, obteremos, de modo semelhante ao feito acima, os demais coeficientes:

$b = \frac{1}{288}$, $c = -\frac{139}{51\ 840}$, etc

IX. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DAS FÓRMULAS E SÉRIES DE STIRLING.

1) Problema Computacional Geral.

Dado o número z, descobrir como calcular facilmente o valor numérico de z!, sendo que agora tal z não é mais necessariamente número natural, podendo ser real (desde que distinto de -1, -2, ...) ou mesmo complexo. Consequentemente, queremos ter condições de poder calcular coisas tais como: $\pi! = 7.188\ 082\ 733$, $(1/2)! = 0.886\ 226\ 926$, etc.

2) Versões Contínuas Das Fórmulas Assintóticas Já Achadas.

. Fórmula moderna de Stirling: $z! \sim \left(\frac{z}{e}\right)^{z} \sqrt{2\pi z}$

. Fórmula histórica de Stirling: $z! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{\tilde{z}}{e}\right)^{\tilde{z}}$, com $\tilde{z} = z + \frac{1}{2}$

. série histórica de Stirling para ln z! (notação: $\tilde{z} = z + \frac{1}{2}$)

$$\ln z! = \ln \sqrt{2\pi} + \tilde{z} \ln \tilde{z} - \tilde{z} - \frac{1}{24} \frac{1}{\tilde{z}} + \frac{7}{2880} \frac{1}{\tilde{z}^3} + \ldots$$

. série moderna de Stirling para ln z!:

$$z! = \left(\frac{z}{e}\right)^z \sqrt{2\pi z}\ e^{J(z)}$$

e então

$$\ln z! = \ln \sqrt{2\pi} + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + J(z)$$

$$\text{onde } J(z) = \frac{B_2}{1*2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{B_4}{3*4} \frac{1}{z^3} + \ldots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)\ (2k)} \frac{1}{z^{2k-1}} +$$

$$o\left(\frac{1}{z^{2k-1}}\right) = \frac{1}{12\ z} - \frac{1}{360 z^3} + \frac{1}{1260\ z^5} + \ldots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)\ (2k)} \frac{1}{z^{2k-1}} +$$

$$+o\left(\frac{1}{z^{2k-1}}\right)$$

. série assintótica para z!:

$$z! \sim \left(\frac{z}{e}\right)^z \sqrt{2\pi z} \left[1 + \frac{1}{12} \frac{1}{z} + \frac{1}{288} \frac{1}{z^2} - \frac{139}{51\ 840} \frac{1}{z^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{571}{2\ 488\ 320} \frac{1}{z^4} + \ldots \right]$$

3) Aproximações Consequentes Para Z!.

α_I - Stirling histórico: $z! \cong \sqrt{2\pi}\left(\frac{\tilde{z}}{e}\right)^{\tilde{z}}$, com $\tilde{z} = z+\frac{1}{2}$

α_{II} - Stirling moderno: $z! \cong \left(\frac{z}{e}\right)^{z}\sqrt{2\pi z}$

α_{III} - Stirling histórico de ordem 1: $z! \cong \sqrt{2\pi}\left(\frac{\tilde{z}}{e}\right)^{\tilde{z}} e^{\frac{-1}{24\tilde{z}}}$, com

$$\tilde{z} = z+\frac{1}{2}$$

α_{IV} - Stirling moderno de ordem 1 via ln z! : $z! \cong \left(\frac{z}{e}\right)^{z}\sqrt{2\pi z}\, e^{\frac{1}{12z}}$

α_V - Stirling moderno de ordem 1: $z! \cong \left(\frac{z}{e}\right)^{z}\sqrt{2\pi z}\left(1+\frac{1}{12z}\right)$

α_{VI} - Stirling histórico de ordem 5:

$$z! \cong \sqrt{2\pi}\left(\frac{\tilde{z}}{e}\right)^{\tilde{z}} \exp\left[-\frac{1}{24\tilde{z}}+\frac{7}{2880\,\tilde{z}^3}-\frac{31}{40\,320\,\tilde{z}^5}\right],\ \tilde{z} = z+\frac{1}{2}$$

α_{VII} - Stirling moderno de ordem 5:

$$z! \cong \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^{z} \exp\left[\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260\,z^5}\right]$$

4) Para Referência: Alguns Valores Exatos De Z!.

1! = 1	10! = 3.628800 E 6
2! = 2	20! = 2.432902026 E 18
3! = 6	30! = 2.652528629 E 32
4! = 24	40! = 8.159153243 E 47
5! = 120	50! = 3.041409163 E 64
6! = 720	60! = 8.320986550 E 81
7! = 5040	70! = 1.197857069 E 100
8! = 40320	80! = 7.156945334 E 118
9! = 362880	90! = 1.485715999 E 138
10! = 3628800	100! = 9.332620369 E 157
	200! = 7.886579762 E 374
	300! = 3.060575518 E 614
	400! = 6.403455562 E 868
	500! = 1.2201135323 E 1134
	600! = 1.265572414 E 1408
	700! = 2.422043841 E 1689
	800! = 7.710525894 E 1976
	900! = 6.752677363 E 2269
	1000! = 4.023870543 E 2567
	2000! = 3.316278536 E 5735
	3000! = 4.149368446 E 9130

5) Desempenho Numérico Das Aproximações De (3).

Nas tabelas a seguir é dado, para vários valores inteiros de z, a aproximação para z! obtida pelas fórmulas de (3), e ao lado de cada valor obtido é dada a quantidade de dígitos significativos exatos da aproximação:

n!	α III	α IV
1!	0.999358624 (2.9)	1.002274450 (2.3)
2!	1.999703055 (3.5)	2.000652048 (3.2)
3!	5.999668160 (4.0)	6.000599151 (3.7)
4!	23.99936956 (4.3)	24.00102392 (4.1)
5!	119.9982650 (4.5)	120.0026371 (4.4)
6!	719.9936754 (4.8)	720.0091875 (4.6)
7!	5039.971129 (4.9)	5040.040594 (4.8)
8!	40319.84112 (5.1)	40320.21786 (5.0)
9!	362878.9758 (5.2)	362881.3786 (5.1)
10!	3628792.410 (5.4)	3628810.053 (5.3)
20!	2.432901329E18 (6.3)	2.432902862E (6.2)
30!	2.6525206404E32 (6.8)	2.652528905E32 (6.6)
40!	8.159152593E47 (7.2)	8.159153256E47 (7.0)
50!	3.041409271E64 (7.5)	3.041409400E64 (7.3)

n!	α_V	α_{VI}
1!	0.998981760 (2.7)	0.999977336 (4.3)
2!	1.998962867 (3.0)	1.999998398 (5.8)
3!	5.998326537 (3.3)	5.999999504 (6.8)
4!	23.99588713 (3.5)	23.99999970 (7.6)
5!	119.9861542 (3.6)	119.9999997 (8.3)
6!	719.9403816 (3.8)	720.0000001 (9.6)
7!	5039.686269 (3.9)	5040.000003 (8.9)
8!	40318.04550 (4.0)	40319.99999 (9.3)
9!	362865.9185 (4.1)	362880.0010 (8.3)
10!	3628684.750 (4.2)	3628800.008 (8.4)
20!	2.432881803E18 (4.8)	2.432902014E18 (8.3)
30!	2.652518692E32 (5.1)	2.652528629E32 (7.6)
40!	8.159135571E47 (5.4)	8.159152891E47 (7.8)
50!	3.041405182E64 (5.6)	3.041409329E64 (8.2)

n!	α_{VII}	
1!	1.000287781 (3.2)	
2!	2.000007101 (5.1)	
3!	6.000001436 (6.3)	
4!	24.00000083 (7.2)	
5!	120.0000009 (7.8)	
6!	720.0000010 (8.6)	
7!	5040.000016 (8.2)	
8!	40320.00008 (8.4)	
9!	362880.0007 (8.4)	
10!	3628800.002 (9.0)	
20!	2.432902020E18 (8.0)	
30!	2.652528633E32 (7.6)	
40!	8.159152899E47 (7.8)	
50!	3.041409332E64 (8.1)	

6) Computação em Baixa-Exatidão para a Fatorial.

trata-se da seguinte versão do problema geral de (1):
queremos o valor de z! com poucos dígitos significativos exatos, digamos em torno de dois digitos significativos exatos. Por outro lado, queremos chegar a tal valor usando uma aproximação a mais simples possível.

7) Fatorial Baixa-Exatidão: Soluções Óbvias.

As mais simples aproximações na lista de (3) sao α_{I} e α_{II}.

Os valores calculados em (5) nos dizem duas coisas:

- primeiro: a Stirling histórica é mais exata (cerca de 0.3 dígitos significativos exatos a mais) do que a Stirling moderna.
- segundo: a exatidão dessas aproximações piora em vizinhança do zero, onde é de cerca de 1.5 digitos síginificativos exatos, e aumenta (como não poderia deixar de ser, vista a natureza assintótica dessas fórmulas) a medida que z se afasta da origem. Esse aumento é monótono mas lento.

Se quizermos uma exatidão maior, em torno de 3 dígitos significativos, vemos que das aproximações de (3) as mais simples seriam: α_{III}, α_{IV}, α_{V}. Ou seja, precisariamos ir a aproximações de ordem um. Dessas aproximações, a mais simples é a α_{IV}.

8) Versão Baixa-Exatidão: Aproximações Paramétricas.

Se escrevermos $p_n(\lambda) = \left(\frac{\tilde{n}}{e}\right)^{\tilde{n}} \sqrt{2\pi\tilde{n}} \;\; \frac{1}{\tilde{n}^{\lambda}}$, onde $\tilde{n} =$

$= n+\lambda$, vemos que

$p_n(0) =$ Stirling moderno

$p_n(\frac{1}{2}) =$ Stirling historico

$$p_n(1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)} = \frac{n^n}{e^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e} \sqrt{2\pi(n+1)} \sim$$

$$\sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Isso nos sugere que, ao λ variar de 0 a 1, a exatidão de $p_n(\lambda)$ aument[a] até um máximo e então decresce. Daí a idéia (de Wayne Bowers) d[e] descobrir o valor de λ que da exatidão máxima para $p_n(\lambda)$.

Para tal, iniciamos observando que:

$$\left(\frac{\tilde{n}}{e}\right)^{\tilde{n}} \sqrt{2\pi\tilde{n}} \;\; \frac{1}{\tilde{n}^{\lambda}} = \frac{(n+\lambda)^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n+\lambda}} \sqrt{2\pi} \qquad (*)$$

e consequentemente:

$$p_n(\lambda) = \sqrt{2\pi n} \quad \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{\lambda}} =$$

$$= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\lambda} \qquad (**)$$

Mas sendo definido $f(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\lambda}$ temos que:

$$f(0) = 1$$

$$f'(\lambda) = - f(\lambda) + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n - \frac{1}{2}} \quad \text{e então}$$

$$f'(0) = - 1 + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$$

$$f''(\lambda) = - f'(\lambda) - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n - \frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2n}\right) e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n - \frac{3}{2}} \frac{1}{n} \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$f''(0) = - f'(0) - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \frac{1}{n} \left(n - \frac{1}{2}\right) = - \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$$

Disso conclui-se que:

$$f(\lambda) = f(0) + \lambda f'(0) + \frac{\lambda^2}{2} f''(0) + \dots =$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{2n} - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) + \dots = 1 + \frac{\lambda - \lambda^2}{2n} + 0 \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Consequentemente, de (* *) tiramos que:

$$p_n(\lambda) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{\lambda - \lambda^2}{2n} + 0 \left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

Mas daí, comparando com:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right]$$

vemos que há erro mínimo quando $\dfrac{1}{12n} = \dfrac{\lambda - \lambda^2}{2n}$, ou seja:

$$\lambda - \lambda^2 = \frac{1}{6} \quad \text{e entao: } \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

Resumindo, visto (*), temos a nova aproximação:

$$\alpha_{VIII}: \quad n! \cong \frac{(\bar{n})^{\bar{n}+\frac{1}{2}}}{e^{\bar{n}}}\sqrt{2\pi} \quad , \text{com } \bar{n} = n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

9) Confronto Das Baixa-Exatidão: Clássicas x Paramétricas.

Em ordem de exatidão crescente, mas complexidade também crescente, tinhamos selecionado as seguintes aproximações clássicas: α_{II}, α_{I}, α_{IV}, que agora vamos comparar com a aproximação paramétrica α_{VIII} :

1! = 1.002479263
exatid. = 2.3

2! = 2.002066608
2.7

3! = 6.003368695
3.0

4! = 24.00843973
3.2

5! = 120.0288764
3.3

$6! = 720.1259407$

3.5

$7! = 5040.669528$

3.6

$8! = 40324.20534$

3.7

$9! = 362910.5009$

3.8

$10! = 3629051.019$

3.9

$20! = 2.432947260\ E\ 18$

4.4

$30! = 2.652551076\ E\ 32$

4.8

$40! = 8.159192212\ E\ 47$

5.0

$50! = 3.041418786\ E\ 64$

5.2

Conclusão:

pela simplicidade, preferimos α_{II} e α_{IV}

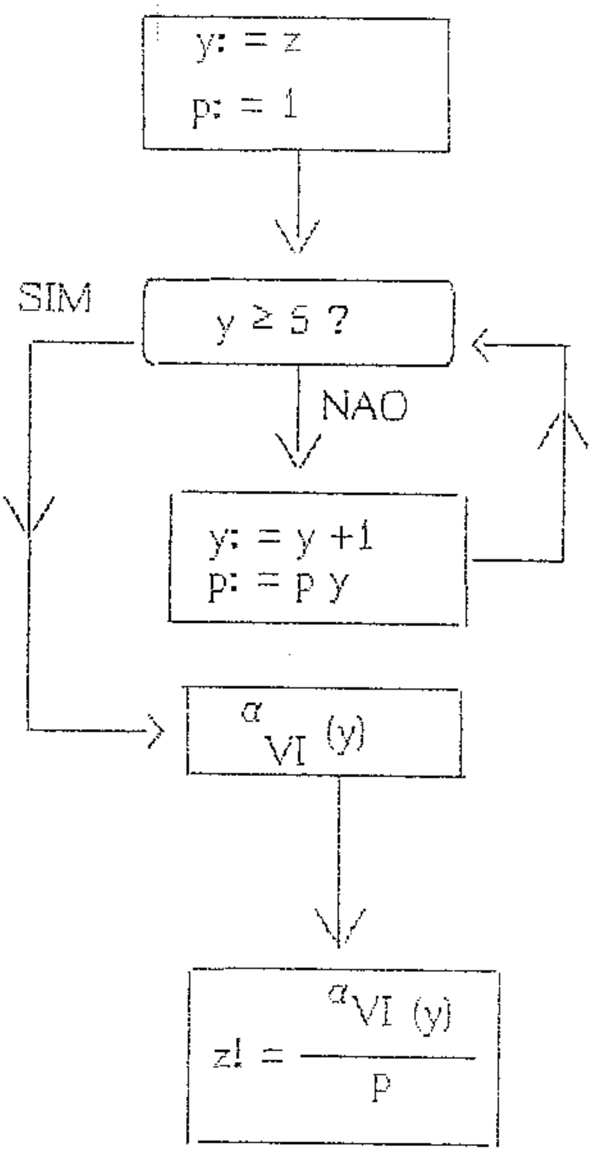
10) Fatorial Alta-Exatidão.

Dado z real ou complexo (distinto de -1, -2, ...) sua z! será obtida via o seguinte algoritmo:

- tome o menor n inteiro ≥ 0 tq $n + \text{Re } z \geq 5$
- calcule $(z + n)!$ via α_{VI}
- calcule, finalmente, $z!$ via: $z! = \dfrac{(z+n)!}{(z+1)\ (z+2)\dots(z+n)}$

Vimos que para $y \geq 5$ a aproximação α_{VI} da $y!$ com erro ABSOLUTO de no máximo 10 unidades da décima casa significativa. Consequentemente, descontando algum erro de arrendamento a mais quando da divisão pelo produto $(z+1)\ (z+2)\ \dots\ (z+n)$, devemos esperar obter $z!$ com erro absoluto menor que 20 unidades da décima casa significativa, ie $\leq 20 * 10^{-10}$.

O fluxograma a seguir mostra como proceder para programar o algoritmo em uma máquina digital:


y: = z
p: = 1
SIM
y ≥ 5 ?
NAO
y: = y +1
p: = p y
αVI (y)
z! = αVI (y) / p

11) Exemplos Finais.

Z	z! via	
	α_{II}	α_{IV}
-0.5	4.132 731 355	3.498 281 566
0.5	0.760 173 450	0.898 038 821
$\sqrt{2}$	1.183 103 224	1.254 913 194
π	7.000 529 738	7.188 709 333
i	0.509 123 980 - 0.110 967 695 i	0.498 120 602 - 0.152 960 523 i
1+2i	0.099 794 167 + 0.321 689 373 i	0.112 255 172 + 0.323 534 370 i

Z	z! via	
	ALGORITMO (10)	VALOR EXATO
-0.5	1.772 453 855	1.772 453 851 ....
0.5	0.886 226 928	0.886 226 9255 ...
$\sqrt{2}$	1.253 815 488	1.253 815 480 ...
π	7.188 082 765	7.188 082 733 ...
i	0.498 015 668 - 0.154 949 828 i	0.498 015 668 ... -0.154 949 828 ... i
1+2i	0.112 294 243 + 0.323 612 884 i	0.112 294 242 ... +0.323 612 885 ... i

X - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. OSTROWSKI - Lições de Cálculo Diferencial e Integral. Lisboa: Fundação C. Gulbenkian, 1971.

P. HENRICI - Applied and Computational Complex Analysis. New York: Wiley, 1977.

J. DIEUDONNE - Calcul Infinitesimal Paris: Hermann, 1968.

J. WRENCH - Concerning two series for the gamma function. Math. of Computation, vol. 22, nº 103 (1968), 617-626.

<u>Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS</u>

01. Marcos Sebastiani - <u>Palestra Inaugural</u> - MAR/88.

02. José Francisco Porto da Silveira - <u>A Fatorial no Infinito</u> - MAR/88