TRANSFORMATION DES SINGULARITÉS

Marcos Sebastiani

- Trabalho de Pesquisa -

Série A1/MAR/89

Série A: Trabalho de Pesquisa.

1. Marcos Sebastiani - Transformation des Singularités - MAR/89

TRANSFORMATION DES SINGULARITÉS

Marcos Sebastiani

Considerons la catégorie dont les objets sont les germes de fonctions analytiques $f: (\mathbb{C}^{n+1},0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ ($n > 0$ fixé) ayant un pointcritique isolé en 0. Si g en est un autre objet, un morphisme $T: f \longrightarrow g$ est un germe $T: (\mathbb{C}^{n+1},0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1},0)$ d'application analytique finie tel que $f = g^{\circ}T$.

Dans cette catégorie on peut définir deux foncteurs contravariants qui sont essentiellement: l'un, la cohomologia complexe (en dimension n) de la fibre de Milnor; l'autre, le quotient de l'anneau local $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ par l'idéal engendré par les derivées partielles du germe. Les deux sont à valeurs dans la categorie des $\mathbb{C}$ - espaces vectoriels. On les définit de façon précise:

a) Pour $\epsilon > 0$ assez petit et $\rho > 0$ assez petit respect de ϵ on considere:

$$H^n_{\epsilon,\rho} = H^n(B_\epsilon \cap f^{-1}(-\rho),\mathbb{C})$$

où B_ϵ est la boule de centre 0 et rayon ϵ dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Les propriétés de la fibration de Milnor nous disent que si $\epsilon' > 0$ et $\rho' > 0$ sont aussi convenablement petits, alors on a un isomorphisme canonique $H^n_{\epsilon',\rho} = H^n_{\epsilon',\rho'}$. Donc, on a un objet bien défini qu'on note $H^n(f)$ et qui est un $\mathbb{C}$ - espaco vectoriel.

Le morphisme $T: f \longrightarrow g$ applique $B_{\epsilon'} \cap f^{-1}(-\rho)$ dans $B_\epsilon \cap g^{-1}(-\rho)$, si ϵ' est assez petit respect de ϵ, et, donc induit une application lineaire

$T^{\sim}: H^n(g) \longrightarrow H^n(f)$. Ceci definit le premier foncteur.

b) Coit Ω^*_0 le faisceau germes de formes holomorphes dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Soit $$E(f) = \Omega^{n+1}_0 / df \wedge \Omega^n_0.$$

Le morphisme $T: \longrightarrow g$ induit l'application evidente $\Omega^{n+1}_0 \longrightarrow \Omega^{n+1}_0$ qui passe au quotient et définit une <u>application</u> <u>linéaire</u>

$$T': E(g) \longrightarrow E(f).$$

On a ainsi le deuxième foncteur.

La correspondance $h \longrightarrow h dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{n+1}$ ($h \in \mathcal{O}$) induit un <u>isomorphisme</u>:

$$\mathcal{O}/(\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_{n+1}) \xrightarrow{\sim} E(f)$$

Modulo cet isomorphisme, T' est induite par:

$$h \longrightarrow \mathrm{Jac}(T).\,(h^{\circ}T).$$

On peut, donc, calculer explicitement le deuxième foncteur.

On sait que

$$\dim_{\mathbb{C}} H^n(f) = \dim_{\mathbb{C}} E(f) = \mu(f),$$

nombre de Milnor de f.

CONJECTURE. Les foncteurs H^n et E sont isomorphes.

(Comparer avec [1] chap. I, § 5.1 et [8]).

L'objet de cet article est d'étudier les relations entre ces deux foncteurs.

Je remercie Jean-Paul Brasselet et Robert Moussu par leurs obsérvations éclairantes.

Ce travail a été réalisé pendant les séjours de l'auteur aux Univérsités de Dijon et Lille. Je remercie l'univérsité de Dijon et le CNRS par leur support économique.

1. - Fixons un germe analytique f: $(C^{n+1}, O) \longrightarrow (C, O)$ ayant un point critique isolé en O et considérons un groupe G de germes d'<u>isomorphismes</u> analytiques $(C^{n+1},O) \longrightarrow (C^{n+1},O)$ qui laissent f <u>invariante</u> (i.e., $f \circ T=f$ pour tout $T \in G$). Alors $H^n(F)$ et E(f) sont des G- modules à droite.

Dans [6] on a introduit le nombre

$$\mu(f,T) \doteq \text{Trace } (T') \quad , T \in G$$

(repris dans [4]) Le théorème suivant entraîne que $\mu(f,T)$ est un nombre entier, puisque T^* préserve la cohomologie entière (voir [6]).

THEOREME 1. ([9], [6]). Pour tout $T \in G$,

$$\text{Trace } (T^*) = \mu \ (f,T).$$

COROLLAIRE 1. Pour tout $T \in G$, T' et T^* ont le même polynôme caractéristique.

COROLLAIRE 2. Si G est fini alors $H^n(f)$ et E(f) sont des G- modules isomorphes.

THEOREME 2. Si $T \in G$ et T^* est l'identité, alors T' est aussi l'identité.

COROLLAIRE 3. Si $G \subset GL\ (n+1,C)$ est le sous-groupe des tous les isomorphismes linéaires qui laissent f invariante, alors les G- modules $H^n(f)$ et E(f) sont isomorphes.

<u>Démonstration</u>. L'ensemble des transformations linéaires qui laissent f invariante est un sous-ensemble algébrique de l'espace des matrices $(n+1) \times (n+1)$, dont $GL(n+1,C)$ est un ouvert affine. Donc, G n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Soit G_0 la composante connexe de

l'identité. Alors G_0 opère trivialement sur $H^n(f)$. D'après le théorème 2, G_0 opère alors trivialement aussi sur $E(f)$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2 à G/G_0.

EXEMPLE. Soient $n = 2$, $f = z_1 z_2 + z_1 z_2 z_3^5 + z_3^3$

$$G = \left\{ T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} : \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0 \ \text{ et } \epsilon^3 = 1 \right\}$$

$E(f)$ est de dimension 2, engendré par les classes de

$$dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \qquad \text{et} \qquad z_3 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \quad .$$

Alors il existe une base de $H^2(f)$ dans laquele la matrice de T est:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{bmatrix}$$

pour tout $T \in G$.

COROLLAIRE 4. Suposons qu'il existe $T \in G$ tel que les valeurs propres de T^* sont toutes différentes. Alors f est analytiquement conjugué a un germe quasi-homogène.

Demonstration. D'apres le corollaire 1, T' a aussi toutes ses valeurs propres differentes. Dans $E(f)$ la multiplication par f est une application linéaire nilpotente qui commute avec T'. Elle est, donc, nulle. Cola veut dire que f appartient a l'ideal de $\mathcal{O}$ engendré par ses derivées partielles et on peut, alors, appliquer le théorème de K. Saito [5].

EXEMPLE. $f = (z_1 z_2 \dots z_{n+1})^2 + z_1^{2n+4} + \dots + z_{n+1}^{2n+4}$

Ce germe n'est pas equivalent à un germe quasi-homogène. Alors si, par exemple, T est une permutation des coordonnes, T^* a des valeurs propres multiples. Cela résulte aussi du fait que la monodromie de f n'est pas diagonalisable et commute avec T^* (voir [2]).

2. - Supposons toujours donné le germe f comme au §1. On va maintenant généraliser le corollaire 4. Pour ce faire, rappelons que tout $\omega \in \Omega_0^{n+1}$ definit un germe de section $s[\omega]$ du fibré de cohomologie complexe en dimension n associé au fibre de Milnor: $s[\omega]$ (t) est la classe de cohomologie de rham de $(\omega/df)|x_t$ ou

$$x_t = f^{-1}(t) \cap B_\epsilon \quad , 0 < |t| < \rho \text{ ([1] chap. III§12.3).}$$

Ils existent $\omega_1, \dots, \omega_\mu \in \Omega_0^{n+1}$ telles que pour tout $\omega \in \Omega_0^{n+1}$ on ait:

$$s[\omega]\ (t) = u_1\ (t) s[\omega] + \dots u_\mu(t) s\ [\omega_\mu]$$

oû les $u_j(t)$ sont des germes de fonctions holomorphes en $0 \in C$ univoquement determines.

Soit, d'autre part, $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ une base de $H^n(f)$. Chaque ξ_j définit une section (multiforme) $\xi_j(t)$ du fibre de cohomologie associé a la fibration de Milnor, de derivée covariante nulle respect de la connexion de Gauss-Manin.

On a:

$$s[\omega_i]\ (t) = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ji}(t)\ \xi_j(t) \qquad 1 \leq i \leq \mu,$$

ou les $a_{ij}(t)$ sont des fonctions holomorphes (multiformes) dans

$0<|t|<\rho$. La matrice $S = ((a_{ij}(t)))_{i,j}$ sera appelée <u>matrice fondamentale</u>. Son determinant est non-nul.

PROPOSITION. Le germe f est analytiquement équivalent à un germe quasi-homogène si et seulement si il existe une matrice fondamentale diagonale.

<u>Demonstration</u>. Si f est quasi-homogène il résult du calcul explicite de sa connexion de Gauss-Manin qu'il existe une matrice fondamentale diagonale.

Réciproquement, si il existe une matrice fondamentale diagonale, alors le système differentiel de Gauss-Manin associé à f possède une matrice fondamentale diagonale ([1] chap. III). Comme ce système est régulier singulier, cela implique qu'il a un pole d'ordre un au plus. Cela signifique que $f \in (\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_{n+1})$ dans $\mathcal{O}$. On conclut par [5].

Théorème 3. Soit $T: (C^{n+1},0) \xrightarrow[0]{} (C^{n+1},0)$ un germe d'isomorphisme analytique d'ordre fini tel que $f \circ T = f$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les valeurs propres différentes de T^* avec multiplicités $r_1, \ldots, r_k$ respectivement. Alors, il existe une matrice fondamentale de la forme:

$$S = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$$

où A_j est une matrice $r_j \times r_j$ ($j=1, \ldots, k$).

3. - Dans ce qui précède on a consideré des isomorphismes $T: f \longrightarrow f$. On va étudier maintenant le cas des isomorphismes $T: g \longrightarrow f$ où $g=\lambda f$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$. Comme $E(g)=E(f)$ on peut considérer

$$T': E(f) \longrightarrow E(f).$$

<u>Choisissons</u>, d'autre part, $\sigma \in R$ tel que $\lambda=|\lambda|e^{2\pi i\sigma}$. Considérons, comme plus haut, $\epsilon > 0$ assez petit et $\rho>0$ très petit respect de ϵ.

Soient: D_ρ le disque de centre 0 et rayon ρ dans C et:

$$X_{\epsilon,\rho} = f^{-1}(D\rho) \cap B_\epsilon \quad , X_t = f^{-1}(t) \cap X \quad , t \in D\rho$$

$$X'_{\epsilon,\rho} = X_{\epsilon,\rho} - X_0 \qquad , D'_\rho = D_\rho - \{0\}.$$

Alors $f: X'_{\epsilon,\rho} \longrightarrow D'_\rho$ est la fibration de Milnor.

Si $\rho' < \rho$, $\epsilon' < \epsilon$ sont aussi choisis convenablement on aura l'inclusion de fibrés:

$$\begin{tikzcd}
X'_{\epsilon',\rho'} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & X'_{\epsilon,\rho} \arrow[d, "f"] \\
D'_{\rho'} \arrow[r, hook] & D'_\rho
\end{tikzcd}$$

qui est une équivalence d'homotopie fibrée, et un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
X'_{\epsilon',\rho'} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & X'_{\epsilon,\rho} \arrow[d, "f"] \\
D'_{\rho'} \arrow[r, "\times\lambda"'] & D'_\rho
\end{tikzcd}$$

Le choix de σ determine un relevèment de ce diagramme aux revêtements universels de D'_ρ, , D'_ρ . Comme $H^n(f)$ s'identifie a l'espace des sections (multiformes) de derivée covariante nulle (pour la connexion de Gauss-Manin) du fibré de n-cohomologie complexe associé au fibré de Milnor, on voit qu'on peut considérer

$$T^*: H^n(f) \longrightarrow H^n(f),$$

une fois que l'on a fixé σ.

Sur la fibration de Milnor cela revient à appliquer T et puis revenir à la même fibre en suivant un chemin dont classe d'homotopie est determinée par le choix de σ. Changer le choix de σ équivaut à multiplier par une puissance de la monodromic.

Par exemple, soient: T= Id. , $\lambda = 1$. Si $\sigma = 0$, T^* est l'identité tandis que si $\sigma = -1$ alors T^* est la monodromie. Dans les deux cas, T' est l'identité.

Le problème se pose d'étudier les relations entre T' et T^* . On va traiter ce problème dans le cas où f est quasi-homogeñe. On supposera, jusqu'a la fin de ce paragraphe, qu'ils existent $m_1,\dots,m_{n+1}$ rationnels positifs tels que:

$$f(t^{m_1}z_1,\dots,t^{m_{n+1}}z_{n+1}) = tf(z_1, \dots , z_{n+1}) \quad .$$

Soit $\left\{z^r = z_1^{r_1}\dots z_{n+1}^{r_{n+1}}\right\}_r$

une famille de monômes qui induit une C-base dans

$\mathcal{O}/(\partial f/\partial z_1,\dots,\partial f/\partial z_{n+1})$. On a alors aussi une base $\{\overline{\omega}\}_r$ r de E(f). Pour chaque r soit

$$\alpha(r) = -\sum_{i=1}^{n+1}(r_i+1)m_i \quad .$$

Soit $U_\sigma : E(f) \longrightarrow E(f)$ l'application linéaire definie par:

$$U_\sigma(\overline{\omega_r}) = |\lambda|^{\alpha(r)} e^{2\pi i\sigma\alpha(r)}\, \overline{\omega_r} \ .$$

THEOREME 4. T^* et $U_\sigma{}^{\circ}\, T'$ ont le même polynôme caractéristique.

EXEMPLE. $f = z_1^3 + z_2^3 - z_3^3 - z_4^3$, $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, z_4, z_1, z_2)$.

$$\lambda = -1 \quad, \sigma = 1/2 \qquad, \quad m_j = 1/3 \quad, 1 \leq j \leq 4 \quad .$$

On a $\mu = 16$ et $0 \leq r_j \leq 1$ pour $1 \leq j \leq 4$.

$$\alpha(r) = (-1/3)\ (\Sigma_j r_j \ + \ 4) \quad , U_\sigma(\overline{\omega_r}) = e^{\pi i\alpha(r)}\, \overline{\omega_r}$$

$$T'(\overline{\omega_r}) = \overline{\omega_{r'}} , \qquad \text{ou} \quad r' = (r_3, r_4, r_1, r_2) \qquad .$$

En appliquant le théorème 4 on obtient que les valeurs propres de T^* sont $1, -1, \epsilon, -\epsilon, \epsilon^2, -\epsilon^2$ avec multiplicités 4, 2, 2, 3, 3, 2 respectivement, où $\epsilon = e^{\pi i/3}$.

4. - Démonstration des théorèmes 1, 2, 3, 4.

Soit $\hat{\Omega}_0^p$ l'espace des germes de p-formes formelles à l'origine de C^{n+1}. Soit

$$\Omega = \hat{\Omega}_0^{n+1} / df \wedge d\, \hat{\Omega}_0^{n-1} \quad .$$

Soit $\epsilon > o$ assez petit et $\rho > 0$ tres petit respectde ϵ . Soient:

$$X = \left\{ z \in C^{n+1} : ||z|| < \epsilon \ \text{ et } \ |f(z)| < \rho \right\},$$

$$X^- = \left\{ z \in X : \operatorname{Re}(f(z)) < 0 \right\} .$$

Soit $H = H_{n+1}(X, X^- ; \mathbb{C})$. Les propriétés de la fibration de Milnor montrent que $H^n(f)$ s'identifie au dual de H.

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ la forme bilinéaire définie par Malgrange ([3] , §6)

$$\langle\ ,\ \rangle : H \times \Omega \longrightarrow \Lambda \qquad \langle \Gamma, \omega \rangle = \int_\Gamma^{\sim} e^{\tau f} \omega$$

(~ veut dire comportement asympotique pour $\tau \longrightarrow +\infty$).

Ici Λ est l'anneau commutaif intègre des séries formelles

$$\Sigma_{k,\alpha}\, a_{k,\alpha}\, \tau^{-\alpha} \log^k \tau \qquad (a_{k,\alpha} \in \mathbb{C})$$

où $\alpha \geq 0$ et $e^{2\pi i \alpha}$ est valeur propre de la monodromie.

Ω et Λ sont des $\mathbb{C}\,[[\tau^{-1}]]$ -modules et la forme $\langle\ ,\ \rangle$ respecte ces structures. Ω est libre de rang μ, nombre de Milnor de f.

D'autre part $\Omega/\tau^{-1}\cdot\Omega = E\ (f)$ canoniquement. Soit $T: (\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe d'isomorphisme analytique tel que $f^{\circ} T = f$. L'action de T sur les formes donne un morphisme $\hat{\Omega}_0^{n+1} \longrightarrow \hat{\Omega}_0^{n+1}$ qui passe au quotient et définit $\tilde{T}^*$: $\Omega \longrightarrow \Omega$ homomorphisme de $\mathbb{C}\,[\,[\tau^{-1}]\,]$ -modules. $\tilde{T}^*$ passe au quotient modulo $\tau^{-1}\Omega$ et définit T': $E\ (f) \longrightarrow E\ (f)$. Par définition:

$$(1) \qquad \langle \Gamma , \tilde{T}^* \omega \rangle = \langle T_* \Gamma, \omega \rangle \ , \ \Gamma \in H \ , \ \omega \in \Omega$$

ou T_* est l'homomorphisme induit par T dans l'homologie.

Supposons que T^* est l'identite. Alors T_* est aussi l'identité. Alors, $\langle \Gamma, \tilde{T}^* \omega - \omega \rangle = 0$ pour tout Γ . Cela implique $\tilde{T}^* \omega - \omega = 0$

([3] §6). Donc, $\tilde{T}^{*}$ est l'identité. Alors, il en va de meme pour T', ce qui prouve le théorème 2.

Soit $\Gamma_1,\ldots, \Gamma_\mu$ une C- base de H et $\omega_1,\ldots, \omega_\mu$ une C $[[\tau^{-1}]]$ - base de Ω. Soit S la matrice:

$$(2) \qquad S = ((\langle \Gamma_j , \omega_k \rangle))_{j,k} \quad .$$

On a det $S \neq 0$ ([7] §6). En explicitant (1) on a: $AS=SB^t$, ou A,B sont les matrices de T_*, $\tilde{T}^{*}$ dans les bases choisies. On en déduit trace (A) = trace (B) . Soit

$$B = B_0 + B_1\tau^{-1} + B_2\tau^{-2} + \ldots.$$

(B_j matrice à coeficients complexes). Alors B_0 est la matrice de T' dans la base de E (f) induite par $\omega_1,\ldots, \omega_\mu$. D'autre part, comme A est une matrice constante, trace (A) $\in$ C . Donc, trace (B) $\in$ C . Alors, trace (B)=trace(B_0) . En definitive:

Trace (T')= trace (B_0)= trace (B)= trace (A)= trace (T_*)= trace (T^*) , ce qui prouve le théorème 1.

Supposons maintenant, pour prouver le théorème 3, que T est de ordre fini. Par un changement analytique de coordonnées au voisinage de 0 on peut supposer que T est linéaire et que chaque vecteur de la base canonique de C^{n+1} est un vector propre de T.

Comme $\mathcal{O}/(\partial f/\partial z_1,\ldots, \partial f/\partial z_{n+1})$ possède une base formée par des monômes, par le lemme de Nakayama on conclut que Ω possède une $C[[\tau^{-1}]]$ -base $\omega_1,\ldots, \omega_\mu$ ou chaque ω_j est la classe d'une forme du type: $z_1^{r_1} \ldots z_{n\neq 1}^{r_{n+1}} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{n+1}$

Donc, $\tilde{T}^{*}(\omega_j) = \beta_j\omega_j$, $\beta_j \in C$ ($j = 1,\ldots, \mu$) . Alors $\beta_1,\ldots\beta_\mu$ sont les valeurs propres de T' . Donc, $\beta_1, \dots, \beta_\mu$ sont les valeurs propres de T_* (corollaire 1).

Soit $\Gamma_1, \dots \Gamma_\mu$ une base de H formee par des vecteurs propres de T_* correspondant à $\beta_1, \dots, \beta_\mu$ respectivement. Alors, par (1):

$$\beta_j \langle \Gamma_j, \omega_k \rangle = \langle \beta_j \Gamma_j, \omega_k \rangle = \langle T_* \Gamma_j, \omega_k \rangle = \langle \Gamma_j, \tilde{T}^* \omega_k \rangle =$$

$$= \beta_k \langle \Gamma_j, \omega_k \rangle .$$

En particulier, $\beta_j \neq \beta_k$ entraîne $\langle \Gamma_j, \omega_k \rangle = 0$. Compte tenu de [3] §6 cela implique le théorème 3.

Pour démontrer le théorème 4 il faut d'abord considerer comment se modifie la formule (1) quand $T: (C^{n+1}, 0) \longrightarrow (C^{n+1}, 0)$ est un germe d'isomorphisme analytique tel que $f^\circ T = \lambda f$ et $\lambda = |\lambda| e^{2\pi i \sigma}$. Pour cela on introduit un automorphisme $\Theta : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ defini par:

$$\Theta\,(\tau^\alpha) = |\lambda|^\alpha\, e^{2\pi i \sigma \alpha} \tau^\alpha \quad , \quad \Theta\,(\log \tau) = \log \tau + \log|\lambda| + 2\pi i \sigma$$

(i.e., $\tau \longrightarrow \lambda\tau$) .

On a vu que le choix de σ definit $T^*: H^n\,(f) \longrightarrow H^n\,(f)$. Par dualite, on a $T_*: H \longrightarrow H$. Alors (1) prend la forme:

(3) $\qquad \langle T_* \Gamma, \omega \rangle = \Theta\,(\langle \Gamma, \tilde{T}^* \omega \rangle)$.

LEMME. Si f est quasi-homogène, il existe un homomorphisme $\phi: \Omega \longrightarrow \Omega$ (en tant que $C[[\tau^{-1}]]$ -module) tel que:

$$\langle \Gamma, \phi\,(\omega) \rangle = \Theta\,(\langle \Gamma, \omega \rangle), \quad \Gamma \in H, \quad \omega \in \Omega.$$

<u>Démonstration.</u> On considère la matrice S définie par (2). La matrice U de ϕ dans la base $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ doit satisfaire:

(4) $\qquad SU = \Theta\,(S)$.

Reprenant les notations du §3, soit $\{\omega_r\}$ la base de Ω induite par la famille de (n+1) -formes:

$$z_1^{r_1} \dots z_{n+1}^{r_{n+1}} \, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n+1}.$$

On sait (voir [3] §6) qu'il existe une base $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\mu$ de H telle que:

$$\langle \Gamma_s, \omega_r \rangle = \delta_{sr} \tau^{\alpha(r)}$$

ou δ_{sr} est le symbole de Kronecker.

Alors, la matrice U définie par (4) est constante, diagonale et:

$$U(\omega_r) = |\lambda|^{\alpha(r)} e^{2\pi i \sigma \alpha(r)} \omega_r. \tag{5}$$

Ceci prouve le lemme et, en plus, nous donne la matrice de Φ dans la base $\{\omega_r\}$.

Revenant à la démonstration du théorème 4, soient A,B les matrices de T_* et $\Phi^0 \tilde{T}^*$. Alors, par (3) et le lemme, $AS=SB^t$. Donc,

$$A^k = S\,(B^t)^k S^{-1} \qquad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Donc, trace (A^k)=trace (B^k) , $k=1, 2, 3, \dots$ .Mais

$$B = B_0 + B_1 \tau^{-1} + B_2 \tau^{-2} + \dots$$

où les B_j sont constantes et B_0 est la matrice de $U_\sigma{}^0\, T'$, d'après (5). Donc,

$$B^k = B_0^k + C_1 \tau^{-1} + C_2 \tau^{-2} + \dots .$$

Comme trace $(A^k) \in C$, on a : trace (B^k)=trace (B_0^k) . Donc,

$$\text{trace } (A^k) = \text{trace } (B_0^k) \quad , k = 1, 2, 3, \dots .$$

Alors, A, B_0 ont le même polynôme caractéristique. Comme A^t est la matrice de T^*, on obtient le théorème 4.

1. - Soient $f,g: (C^{n+1},0) \longrightarrow (C,0)$ des germes analytiques ayant un point critique isolé a l'origine. Soit $T: f \longrightarrow g$ un morphisme au sens défini au début de cet article.

THEOREME 1. T' est injectif et il est bijectif si et seulement si T est un isomorphisme.

THEOREME 2. T^* est inject et il est bijectif si et seulement si T est un isomorphisme.

COROLLAIRE.

a) La monodromie de g s'injecte dans celle de f.

b) Le nombre de Milnor de g est inférieur ou egal à celui de f et l'egalité a lieu si et seulement si T est un isomorphisme.

c) Le polynôme caractéristique de la monodromie de g divise celui de la monodromie de f .

Demonstration. Immédiate, puisque T^* commute avec les monodromies.

EXEMPLE. Une condition nécessaire pour que

$$f = g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_{n+1}^2$$

ou les g_i sont analytiques et nulles on 0 est que la monodromic de f possède la valeur propre $(-1)^{n+1}$.

2. - Suivant une idée de R. Moussu, on introduit une relation d' ordre entre les germes analytiques $f: (C^{n+1}, 0) \longrightarrow (C, 0)$ ayant un point critique isolé en 0 . On ecrit $f > g$ si il existe un morphisme $T: f \longrightarrow g$.

LEMME. Cette relation est une relation d'ordre partielle entre les classes d'isomorphismes de germes.

<u>Démonstration</u>. Si on a des morphismes $T: f \longrightarrow g$ et $S: g \longrightarrow f$ on a égalite des nombres de Milnor et, alors, T, S sont des isomorphismes (corollaire (b)).

Le meme corollaire (b) montre que pour tout f il existe g <u>minimal</u> tel que $f > g$.

Voici un exemple de germe minimal:

$$f = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$$

où les a_j sont des nombres premiers tous differents. Dans ces conditions le polynôme caractéristique de la monodromie est un polynôme cyclotomique, donc irréductible. D'apres le corollaire (b), (c), f est minimal.

3.- <u>Démonstration des théorèmes 1 et 2</u>. D'après l'interpretation de T' donnée dans le début de cet article, un élément du noyau de T' peut être représenté par un germe h de fonction analytique en $0 \in C^{n+1}$ tel que

$$\mathrm{Jac}(T).(h^0 T) = \Sigma_j\, a_j(\partial f/\partial z_j) \quad , \quad a_j \in \mathcal{O} \ .$$

La relation $f = g^0 T$ entraine:

$$(1) \qquad \mathrm{Jac}(T).\ (h^0 T) = \Sigma_j b_j\ [\ (\partial g/\partial z_j)^0 T] \quad , \quad b_j \in \mathcal{O}.$$

Si Tr est l'homomorphisme trace associe a l'application T (voir [7]) on a que

$$c_j = Tr\ (b_j/\mathrm{Jac}\ (T)) \in \mathcal{O}\ .$$

Alors, en divisant (1) par $\mathrm{Jac}(T)$ et en apliquant Tr on obtient:

$$mh = \Sigma_j\, c_j(\partial g/\partial z_j)$$

ou $m = \deg T$. Donc, la classe de h dans $E(g)$ est nulle, ce qui prouve que T' est injectif.

Si T' est surjectif, alors la classe de Jac(T) dans E(f) n'est pas contenue dans l'eideal maximal. Ceci implique que Jac(T) est un inversible dans $\mathcal{O}$, ce qui complète la preuve du théorème 1.

Pour démontrer le théorème 2 on procede analoguement au §4 de la première partie. On a les formes bilinéaires pour f,g et les correspondantes matrices S_f, S_g, dont les determinants sont non-nuls. Soient μ, ν les nombres de Milnor de f, g respectivement. On a la relation $AS_f = S_g B^t$ et le théorème 1 entraine que B est une matrice de rang ν. Alors, A aussi est de rang ν, ce qui veut dire que T_* est surjective. Alors T^* est injective.

Si T^* est bijective, $\mu = \nu$. Alors, T' est bijective. Donc, le théorème 1 implique le theoreme 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold - A.N. Varchenko - S. Goussein Zade "Singularités des applications différentiables" vol 2 Edit. Mir (Moscou) 1984.

[2] B. Malgrange Letter to the editors Invent. Math 20(1973) 171-172.

[3] B. Malgrange Intégrales asymptotiques et monodromie Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 7(1974) 405-430.

[4] M. Roberts Equivariant Milnor numbers J. London Math Soc. 31(1985) 487-500.

[5] K. Saito Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen Invent. Math. 14(1971) 123-142.

[6] M. Sebastiani Sur les points fixes des automorphismes des fibrés avec singularités Mathem Annalen 248(1980) 267-273.

[7] M. Sebastiani Sur la dualité locale Ann de l'Inst. Fourier 30,1(1980) 65-90.

[8] A.N. Varchenko On the monodromy operator in vanishing cohomology and the operator of multiplication by f in the local ring Soviet Math. Doklady 24(1981) 248-252.
[9] C.T.C. Wall A second note on symmetry of singularities Bull. London Math Soc. 12(1980) 169-175.

Marcos Sebastiani

Instituto de Matematica - UFRGS
Av. Bento Goncalves, 9500.
91 500 - Porto Alegre , RS
BRASIL