

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTABILIDADE ESTRUTURAL APLICADA NO CONTEXTO
LDEM

por

Bruno Grebin Gasparotto

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2017

ESTABILIDADE ESTRUTURAL APLICADA NO CONTEXTO

LDEM

por

Bruno Grebin Gasparotto

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Aprovada por:

Prof. Dr. Rogério J. Marczak PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Luis E. Kostascki PPGENG / UNIPAMPA

Prof. Dr. Daniel M. De Leon DEMEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 08, Dezembro de 2017

“ De tanto ver triunfar as nulidades, de tanto ver prosperar a desonra, de tanto ver crescer a injustiça, de tanto ver agigantarem-se os poderes nas mãos dos maus, o homem chega a desanimar da virtude, a rir-se da honra, a ter vergonha de ser honesto”.

Rui Barbosa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela sua qualidade de ensino. Agradeço ao incentivo financeiro dado pelos meus pais e pela CAPES.

RESUMO

A demanda por estruturas mais leves implica num ganho em economia, porém o aumento de esbeltez da estrutura pode tornar ela susceptível a instabilidade frente a tensões compressivas estáticas ou dinâmicas. A instabilidade acontece em várias escalas da estrutura analisada e pode interagir com outras formas de colapso como a propagação instável de fissuras, problema governado pela mecânica da fratura, pela plastificação do material, ou por uma combinação dos efeitos citados. Neste contexto, no presente trabalho, se explora a capacidade do método dos elementos discretizados por barras (LDEM) na simulação de problemas de instabilidade estática e dinâmica devido as tensões de compressão. Este método permite simular o sólido como um arranjo de barras com rigidez equivalente ao contínuo que se quer representar. Leis constitutivas não lineares permitem modelar ruptura de forma simples. A equação de movimento resultante da discretização permite formular uma equação de movimento desacoplada que pode ser integrada no domínio do tempo com um método explícito (Método das Diferencias Finitas Centrais). O fato das barras serem rotuladas nos seus extremos e a solução do problema ser obtida de forma incremental permite capturar problemas com não linearidade geométrica, entre eles a instabilidade estrutural frente a tensões compressivas. Como último exemplo se realiza a análise de um painel sanduiche por flexão em três pontos, que é composto por um núcleo de poliuretano, com duas lâminas externas de material compósito, neste caso a instabilidade estrutural está associada a flambagem da camada da lâmina comprimida. Finalmente a potencialidade da metodologia de análise utilizada é discutida.

Palavras-chaves: Estabilidade Estrutural; esbeltez; método dos elementos discretos; painel de sanduiche.

ABSTRACT

The demand for lighter structures implies a gain in economy, but the increase in slenderness of the structure may make it susceptible to instability against static or dynamic compressive stresses. Instability occurs at various scales of the analyzed structure and may interact with other forms of collapse such as unstable crack propagation, problem governed by fracture mechanics, plastification of the material, or a combination of the cited effects. In this context, in the present work, we explore the ability of the discrete elements methods by bars (LDEM) in the simulation of problems of static and dynamic instability due to the compression stresses. This method allows to simulate the solid as an arrangement of bars with rigidity equivalent to the continuum that one wants to represent. Constitutive non-linear laws allow simple modeling of rupture. The equation of motion resulting from the discretization allows us to formulate a decoupled motion equation that can be integrated in the time domain with an explicit method (Central Finite Differences Method). The fact that the bars are labeled at their ends and the solution of the problem is obtained in an incremental way allows to capture problems with geometric non-linearity, among them the structural instability against compressive tensions. The last example, the analysis of a sandwich panel by three-point bending, which is composed of a polyurethane core, with two external blades of composite material, in this case the structural instability is associated with buckling of the layer of the compressed blade . Finally, the potential of the analysis methodology is discussed.

Keywords: Structural Stability; slenderness; discrete element method; sandwich panels.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	Estabilidade Estrutural	6
2.2	Instabilidade Bifurcacional.	8
2.2.1	Interação da Instabilidade Bifurcacional com imperfeições geométricas.....	14
2.3	Instabilidade por Ponto Limite	15
2.4	Instabilidade Dinâmica	17
2.5	Análises Não lineares e lineares	20
3	METODOLOGIA	23
3.1	Método dos elementos discretos por barras LDEM.....	23
3.2	Modelo não linear para dano anisotrópico.....	25
3.3	Distribuição aleatória dos parâmetros do material	30
3.4	Perturbações geométricas no arranjo do modelo	31
3.5	Utilização do algoritmo	31
4	APLICAÇÕES.....	33
4.1	Instabilidade Bifurcacional em Colunas	33
4.2	Instabilidade Dinâmica em Colunas	46
4.3	Instabilidade bifurcacional em Placas.....	50
4.4	Determinação da carga última de um painel formado por núcleo de poliuretano expandido e duas lâminas externas de fibra de vidro e resina.....	59
5	CONCLUSÕES	73
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75
	APÊNDICE A	80
	APÊNDICE B.....	86

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Flambagem global (b) Flambagem distorcional (c) Flambagem local.	2
Figura 2.1 Instabilidade Bifurcacional.	7
Figura 2.2 Instabilidade por ponto limite (Snap Through).	8
Figura 2.3 Coluna de Euler e trajetória de equilíbrio.	10
Figura 2.4 Coluna Tubular	11
Figura 2.5 Instabilidade em placa quadrada submetida à carga distribuída p [N/m] compressiva em uma direção.	12
Figura 2.6 Flambagem de uma casca cilíndrica, (o deslocamento q é medido na direção de z).	13
Figura 2.7 Comparação existente entre os sistemas ideais e reais.	15
Figura 2.8 Estruturas susceptíveis de sofrer flambagem por ponto limite.	16
Figura 2.9 Coluna bi rotulada submetida a uma carga axial com flutuação harmônica (a) esquema que mostra a estrutura com a carga aplicada. (b) diagrama $p=Pt/2(P_{cr}-P_0)$ vs Ω/w_r que permite determinar as regiões de equilíbrio estáveis e instáveis. Linhas vermelhas indicam região de instabilidade no caso do sistema não ser amortecido, a linha azul a região de instabilidade no caso do sistema ter um amortecimento de $a/w_r=0.05$	20
Figura 2.10 Diferença entre o modelo linear e não linear	21
Figura 3.1 Estratégia de discretização empregada pelo Ldem.	23
Figura 3.2 Modelo de dano constitutivo bi linear do material	26
Figura 4.1 Descrição da coluna bi rotulada a ser analisada, (a) se aplica um deslocamento prescrito δ e se perturba a coluna com uma pequena força transversal F_1 , (b) se aplica deslocamento prescrito vertical, (c) se aplica uma força na direção vertical.	35
Figura 4.2 Coluna: (a) Condição de Equilíbrio Estável (b) Condição de Equilíbrio Neutro (c) Condição de Equilíbrio Instável. Note que as unidades do eixo vertical para cada caso estão indicadas nas legendas de cada figura. Em linha tracejada se indica a carga crítica teórica $P_E=1.7 \times 10^4$ N (Tab.1)	38
Figura 4.3 Coluna: Deslocamento Prescrito Axial: Reação e Deslocamento Transversal. Em linha tracejada se indica a carga crítica teórica $P_E=1.7 \times 10^4$ N (Tab.1)	39
Figura 4.4 Coluna: Deslocamento Prescrito Axial: Energia Elástica e Cinética.	40
Figura 4.5 Coluna: Deslocamento Prescrito Axial: Resposta Estrutural, onde q representa o deslocamento transversal no meio do vão e λ a reação medida no apoio dividida P_E	41

Figura 4.6 Configuração da Coluna sobre a qual se aplico um deslocamento axial maior que o crítico.....	42
Figura 4.7 Coluna: Reação Axial: Deslocamento Axial, Deslocamento Transversal.....	43
Figura 4.8 Coluna: Força Prescrita Axial: Energia Elástica e Cinética.....	44
Figura 4.9 Coluna: Força Prescrita Axial: Resposta Estrutural em termos do λ e do deslocamento transversal no meio do vão.....	45
Figura 4.10 Força Prescrita Axial: Coluna após flambagem.....	46
Figura 4.11 Instabilidade dinâmica: Deslocamento Transversal, para os pontos A e B.....	49
Figura 4.12 Instabilidade dinâmica. Deslocamento Axial e Transversal para o caso instável (A).....	49
Figura 4.13 Instabilidade Dinâmica: Energia Elástica e Cinética para o caso instável (A).....	50
Figura 4.14 Placa apoiada em seus 4 bordas (a) no caso de flambagem produzida por tensões de compressão numa direção. (b) no caso de flambagem produzida por tensões de corte.....	52
Figura 4.15 Placa, Deslocamento Prescrito Axial: Reação, Deslocamento Transversal. As unidades do eixo horizontal estão indicadas na legenda.....	53
Figura 4.16 Placa: Deslocamento axial prescrito: Energia Elástica e Cinética.....	54
Figura 4.17 Placa. Deslocamento axial prescrito: Resposta numérica.....	54
Figura 4.18 Flambagem placa simplesmente apoiada submetida a compressão numa direção (a) configuração de flambagem obtida na simulação com o LDEM. (b) ensaio que ilustra flambagem de placas em condições de contorno similares.....	55
Figura 4.19 Placa: Deslocamento Prescrito Corte: Reação, Deslocamento Transversal.....	56
Figura 4.20 Placa: Deslocamento Prescrito corte: Energia Elástica e Cinética.....	57
Figura 4.21 Placa: Deslocamento Prescrito de corte: Resposta estrutural com e sem imperfeições geométricas.....	57
Figura 4.22 Flambagem placa simplesmente apoiada submetida a esforço de corte na suas quatro bordas: (a) configuração de flambagem obtida na simulação com o LDEM. (b) configurações de flambagem de estruturas reais que ilustram a flambagem de placas em condições de contorno similares.....	58
Figura 4.23 Painel de Sanduiche: Propriedades geométricas, condições de contorno (Ventadori 2017).....	60
Figura 4.24 Painel de Sanduiche: Ensaio de Flexão.....	61
Figura 4.25 Painel de Sanduiche: forma de colapso da lamina superior (Ventadori 2017).....	61

Figura 4.26 Correlação entre a densidade e Módulo de elasticidade longitudinal (Fonte: Mourão e Netto 2002)	62
Figura 4.27 Esquema que ilustra o processo de homogeneização realizado sobre a estrutura composta estudada.	63
Figura 4.28 Painel de sanduiche: Tensões axial (Ansys 13.0)	65
Figura 4.29 Configuração analisada no programa de análise matricial Mastan. (McGuire 2000).....	67
Figura 4.30 Detalhes da configuração de ruptura do painel	67
Figura 4.31(a) Modelo global, (b) Modelo local, (c) Modelo local: Condições de contorno ..	68
Figura 4.32 Balanço de Energia obtido na simulação. Observe que as unidades do eixo vertical estão indicados na legenda da figura.	70
Figura 4.33 Resultados obtidos com a simulação do DEM, onde se mostram as reações na direção vertical e horizontal do modelo e a variação dos deslocamentos verticais. Note que as unidades do eixo vertical estão indicadas nas legenda.	70
Figura 4.34 Modelo: (a) configuração experimental e numérica (b) y (c) dois detalhes da configuração final obtida com o modelo numérico.	72
Figura A.1 Coluna: Deslocamento Prescrito: Resposta estrutural	84
Figura A.2 Coluna: Força Axial: Resposta Estrutural Analítica	85
Figura B.1 (a) Estrutura celular intacta, (b) Configuração deformada quando aplicamos carga de compressão na direção vertical, (c) Configuração final quando aplicamos carga de compressão na direção horizontal. Fonte: (Lorna 2005)	86
Figura B.2 (a) Microestrutura no caso de um osso (placas minerais embebidas numa matriz proteica branda), (b) Microestrutura no caso do Nacar onde muda a relação de massa das placas e da matriz proteica. (c) Flambagem de placa isolada submetida à compressão uniaxial. (d) Configuração de flambagem das placas minerais dentro da estrutura composta analisada.	87
Figura B.3 Configurações de ruptura em filmes finos onde o substrato sofre uma variação da temperatura impondo deslocamentos prescritos sobre o filme e induzindo sua flambagem (filme de $11 \times 9 \text{mm}^2$, com uma espessura de 500nm).	88
Figura B.4 (a) e (b) Fotografias obtidas com Microscópio Eletrônico onde se observa a aplicação da carga sobre o nanotubo (c) Configurações de flambagem num nano tubo.....	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 Coluna: Propriedades geométricas físicas da estrutura, (P_E calculado com expressão (2.2), δ_E com expressão (2.3).)	34
Tabela 4.2 Coluna: Variáveis inseridas no algoritmo numérico.	34
Tabela 4.3 Parâmetros e propriedades físicas e mecânicas da viga sob instabilidade dinâmica	47
Tabela 4.4 Parâmetros do modelo numérico utilizados no problema de instabilidade dinâmica analisado;	47
Tabela 4.5 Placa: Propriedades geométricas e físicas.	51
Tabela 4.6 Placa simulada com o modelo LDEM: Propriedades do modelo numérico.	51
Tabela 4.7 Propriedades do painel a ser analisado (Ventadori, 2017).	60

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PROMEC – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

UFRGS – UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL.

LDEM – MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS POR BARRAS

LISTA DE SÍMBOLOS

L	Comprimento principal [m]
P	Carregamento aplicado [N]
q	Deslocamento transversal [m]
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal [Pa]
I	Momento de Inércia da seção [m ⁴]
δ	Deslocamento prescrito[m]
σ	Tensão [Pa]
b	Lado da placa [m]
t	Espessura da placa [m]
ν	Coefficiente de Poisson
R	Raio de curvatura [m]
ρ	Densidade [kg/m ³]
A	Área da seção [m ²]
C	Amortecimento [kg/s]
Ω	Frequência excitação [rad/s]
ω_n	Frequência natural [rad/s]
ω_r	Frequência ressonância [rad/s]
p	Parâmetro de carga
d_{eq}	Comprimento característico do material [m]
L_C	Comprimento da aresta do módulo cúbico [m]
m	Massa [kg]
F	Forças Internas [N]
Df	Parâmetro de amortecimento [1/s]
ξ	Coefficiente de amortecimento [1/rad]

Δt	Incremento de tempo [s]
v_p	Velocidade de propagação da onda volumétrica [m/s]
G_f	Energia específica de Fratura [N/m]
Γ	Energia dissipada de fratura [N/m]
c_A	Coefficiente de dissipação
ε_p	Deformação de falha crítica
K_C	Fator intensidade de Tensão
d	Tamanho crítico da fissura [m]
Y	Coefficiente geométrico
s	Índice de fragilidade
ε_r	Deformação limite
K_r	Relação entre deformação limite e deformação crítica
L_{cr}	Tamanho crítico do elemento cúbico [m]

1 INTRODUÇÃO

Como explica Camotin, 2001, a noção de ‘Estabilidade Estrutural’ aparece sempre associada ao conceito de equilíbrio, na medida em que é utilizada para classificar “configurações de equilíbrio”. A estabilidade dessa configuração pode ser avaliada através do comportamento da estrutura após sofrer uma “perturbação” causada por uma pequena ação exterior arbitrária, desta forma a configuração de equilíbrio se diz “estável” ou “instável” dependendo se a estrutura regresse ou não ao estado inicial. Na engenharia moderna a exigência de criar estruturas econômicas tem levado a diminuição do material empregado na sua construção, em contrapartida estas apresentam um aumento de “esbeltez”.

A esbeltez é um parâmetro adimensional que relaciona propriedades geométricas da estrutura analisada e é uma medida de sua susceptibilidade a apresentar instabilidade estrutural. Seguindo o conceito apresentado em [Camotin, 2001] no projeto de estruturas a palavra flambagem (“*buckling*”) tem sido adotada como um termo geral para designar os fenômenos de instabilidade estrutural, independentemente da natureza específica e do tipo de estrutura em que ocorrem (barras, placas, cascas, etc.).

Cabe salientar, referindo-se aos problemas de instabilidade estrutural, que eles podem acontecer em diferentes escalas. Exemplifica-se na continuação os perfis de chapa dobrada, placas e cascas, outros exemplos se encontram no Apêndice B:

Estruturas formadas por perfis de chapa dobrada: Cabe salientar que esta classificação dos tipos de flambagem é no contexto de estruturas unidimensionais metálica, [Yu e Roger, 2010].

Neste tipo de estrutura, para determinar a resistência à flambagem do sistema estrutural, considera-se a flambagem do mesmo de forma global, no qual acontece a translação do centro de gravidade, como ilustra a Figura 1.1 (a), chamada *flambagem global* do perfil.

Também pode acontecer a flambagem em dois ou mais elementos do perfil, o centro de gravidade de cada elemento translada, produzindo uma interação na flambagem dos elementos que compõem o perfil (mesa, alma, enrijecedores), este segundo tipo de flambagem é chamado *flambagem distorcional*, ilustrado na Figura 1.1 (b).

Por último na Figura 1.1 (c) se ilustra a flambagem dos elementos que formam o perfil de forma isolada (os nós que vinculam os diferentes elementos permanecem fixos) é o caso da chamada *flambagem local*.

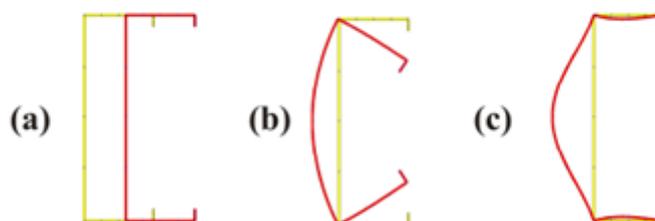


Figura 1.1 - Flambagem global (b) Flambagem distorcional (c) Flambagem local.

Secção transversal de um perfil de chapa dobrada típico.

Em amarelo secção indeformada, em vermelho secção deformada.

Flambagem de placas: Tipo de instabilidade estrutural relacionada com a flambagem local e distorcional no contexto dos perfis metálicos de chapa dobrada. O que caracteriza a flambagem de placas é a reserva de resistência após a flambagem acontecer.

Flambagem de cascas: Neste caso o que caracteriza este fenômeno estrutural é a sensibilidade da carga crítica às imperfeições.

A flambagem que acontece na estrutura e em diversas escalas pode interagir entre os diferentes componentes, por exemplo: a flambagem local da alma de um perfil metálico submetida a compressão faz com que o mesmo perca a rigidez e flambe globalmente a uma carga crítica menor que o dado pela carga crítica de Euler. Outro fator que modifica sensivelmente a flambagem é a distribuição de imperfeições no domínio.

O fenômeno de flambagem pode interagir com outros problemas de Estabilidade Estrutural como a plasticidade, dano ou fratura frágil. Existe grande quantidade de textos clássicos que tratam dos diferentes tipos de flambagem e sua interação com outras formas de colapso, entre eles podemos citar Allen e Bulson, 1980, Bleich, 1952, Galambos, 1968, Timoshenko e Gere, 1985.

A instabilidade estrutural, quando na equação de equilíbrio adiciona-se o termo de forças de inércia e dissipativas, tornam o problema mais complexo em se avaliar. Muitos problemas relacionados a esta interação são encontrados quando o problema envolve fluido e estrutura. Na fundamentação teórica será apresentado um dos tipos de instabilidade estrutural dinâmica, chamada de instabilidade paramétrica, neste caso a excitação é uma força harmônica com frequência conhecida, e a carga crítica (aquela que leva a estrutura a configuração de instabilidade) depende da carga média aplicada e da magnitude da flutuação, assim como da

relação entre a frequência da excitação e da frequência natural de vibração da estrutura. Uma explicação mais completa sobre instabilidade estrutural dinâmica se pode encontrar nas seguintes referências clássicas Bazant e Cedolin, 2003, Bolotin, 1964.

A Estabilidade Estrutural é também estudada numericamente ao se discretizar o domínio espacial em um problema de valor de contorno, que caracterize o problema estudado, utilizando métodos numéricos como o método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno, método dos elementos discretos, entre outros. Com esta forma é possível transformar um sistema de equações diferenciais de poucos graus de liberdade num sistema de equações algébricas de grande quantidade de graus de liberdade.

Este problema quando associado com a flambagem do sistema estudado, consiste em determinar a carga ou fator de escala pela qual teria que se multiplicar às cargas aplicadas para que o sistema perca sua estabilidade estrutural. Para determinar esta carga ou fator crítico, devemos resolver o problema de autovalores, e a carga crítica será a multiplicação da força aplicada pelo menor dos autovalores do sistema. O autovetor associado fornece a configuração espacial na qual a estrutura se desloca.

Outra forma de resolver o problema é considerar o problema como não linear geométrico onde as relações entre deslocamentos e deformações são não lineares, o que equivale a considerar que o equilíbrio é calculado sobre a configuração deformada. Isto torna o problema a ser resolvido não linear e diversos esquemas de solução existem, nos quais, a carga é aplicada de forma incremental e a solução não linear permite chegar ao equilíbrio energético dentro de cada incremento de carga.

Outra alternativa para resolver este problema é resolver ele no domínio do tempo, ou seja, realizar a integração da equação de movimento. Para analisar como a flambagem interage com outros fenômenos não lineares ou com as forças de inércia este é o caminho mais adequado de análise. Grande quantidade de referências bibliográficas existem sobre a forma de resolver o problema de estabilidade estrutural, entre eles cita-se o Bathe, 1976, McGuire, Gallagher e Ziemian, 2000, estes últimos autores apresentam o problema para o caso de elementos unifilares.

Na década dos anos 90 uma série de métodos numéricos foi desenvolvida, estes tinham a premissa de permitir simular ruptura e fragmentação com facilidade, um destes, os métodos discretos, consiste em arranjos de nós vinculados por leis de interação, que fisicamente dão a propriedade do meio contínuo, podendo ser consideradas como barras, que se conectam aos nós, que fisicamente constituem a massa da estrutura. Diferentes conectividades darão ao

método diferentes características. Leis não lineares das barras permitem representar de diferentes formas o processo de fratura.

Diversas versões do método podem ser citadas Rinaldi e Krajcinovic, 2008, apresentam um método para estudar o processo de ruptura em materiais quase frágeis, e Silling, 2000, que apresenta uma versão deste método chamado de Peridinâmica, sendo que em Madenci e Oterkus, 2014, apresenta-se a sua aplicação no estudo da interação entre flambagem e fratura, estudadas com o uso de tal algoritmo.

Estes métodos permitem introduzir, de forma natural, uma formulação não linear para o colapso num local da estrutura, que depende do que acontece no ponto estudado e em sua vizinhança, cuja distância relativa à vizinhança é uma propriedade do material (seu comprimento característico). Em Taylor, 2007, se discute este assunto com profundidade.

Se a lei de interação que vincula os pontos materiais, onde se concentram as massas da estrutura, não leva em conta as rotações, ou seja, se representamos estas interações por barras rotuladas aos pontos materiais é possível demonstrar que a não linearidade geométrica está sendo considerada nas simulações, ou seja, fenômenos de flambagem serão capturados sem nenhuma modificação na formulação Bathe, 1976.

No trabalho aqui apresentado se utiliza uma versão deste método proposta por Riera, 1984, onde se utiliza um arranjo periódico de barras rotuladas que vinculam pontos materiais que concentra a massa do sólido simulado. A rigidez das barras é equivalente à rigidez do sólido que se quer representar. A discretização espacial realizada permite chegar a uma equação de movimento que pode ser integrada empregando um esquema explícito de integração (Método das diferenças finitas centrais).

No capítulo 3, será realizada uma explicação detalhada da formulação utilizada. Deste modo, e após realizar a contextualização apresentada, é possível apresentar os objetivos da dissertação:

Objetivo Geral: Explorar as possibilidades do método dos elementos discretos formado por barras, que chamaremos de LDEM, na simulação de problemas nos quais se apresente flambagem, assim como problemas onde coexistem flambagem e fratura.

Objetivos Específicos:

-Utilizar o LDEM para demonstrar a flambagem de uma coluna (flambagem global), discutindo diversos aspectos da forma em que a instabilidade estrutural acontece.

-Utilizar o LDEM na determinação das regiões de flambagem de uma coluna submetida a cargas harmônicas, explorando assim as possibilidades do método numérico na captura de problemas onde a instabilidade dinâmica está presente.

-Utilizar o LDEM demonstrar a flambagem de uma placa, explorando o comportamento pós flambagem, assim como o resultado obtido é influenciado por imperfeições geométricas que modificam a estrutura estudada.

-Explorar as possibilidades do LDEM num problema de engenharia, isto na análise preliminar de um painel sanduíche formado por um núcleo de poliuretano expandido e duas lâminas de resina com fibra de vidro solicitado a flexão. Neste problema o colapso está associado a flambagem da lâmina comprimida do painel.

Organização do trabalho: Após a presente introdução, no capítulo 2 desta dissertação, se apresentam os fundamentos teóricos do trabalho realizado. Posteriormente no capítulo 3, se apresenta a metodologia, onde se descreve o método numérico utilizado. No capítulo 4, se apresentam as aplicações realizadas e em todos os casos se descreve, primeiramente o problema estudado, as características do modelo numérico implementado e os resultados obtidos na simulação. No capítulo 5, se apresentam as conclusões obtidas na realização do trabalho e se discutem as possibilidades de continuação do mesmo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na continuação se apresentam os tópicos teóricos que serviram de fundamento para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Estabilidade Estrutural

A revisão dos conceitos de Estabilidade Estrutural será feita seguindo as premissas de Reis e Camotim, 2001, tendo a consciência de não entrar em deduções as quais podem ser encontradas na bibliografia citada. Sobre este tema existe grande variedade de excelentes livros, entre eles citamos, Allen e Bulson, 1980, Bazant e Cedolin, 2003, Bleich, 1952, Timoshenko e Gere, 1985 e Thompson e Hunt, 1984, entre os outros já citados na introdução.

Atualmente no projeto de estruturas a segurança da estrutura, definida pela Estabilidade Estrutural, se determina utilizando o método dos estados limites, entre as referências pode-se citar [Pfeil W e Pfeil M.,2009] sobre este tema no contexto das estruturas metálicas.

Estes estados limites estão associados às seguintes situações:

- (a) Situações de colapso global, local ou distorcional, chamados estados limites últimos.
- (b) Situações que deixam a estrutura fora de serviço, chamados estados limites de utilização.

A implementação de critérios de estabilidade estrutural na equação de equilíbrio do sistema estrutural, a fim de proporcionar limites de rigidez e material para o meio elástico, podem ser nomeados através de critérios dinâmicos ou critérios estáticos.

Veremos primeiramente os critérios estáticos (associados ao limite último de rigidez), porém é possível demonstrar que quando ocorre equilíbrio energético, os critérios estáticos e dinâmicos são equivalentes [Timoshenko e Gere, 1985], [Thompson e Hunt, 1984]. Um sistema equilibrado energeticamente é dito conservativo, quando a resposta estrutural não faz variar a taxa de energia que se aplica à estrutura.

O fenômeno de instabilidade estrutural, flambagem, corresponde à situação de estado limite último, e pode ocorrer em diversos tipos de estruturas (barras, placas, cascas) ou na combinação delas, estruturas complexas, quando submetidas a diversos tipos de solicitações.

A flambagem de uma estrutura evolui ao longo da sua trajetória de equilíbrio (relação carga-deslocamento) e corresponde à transição entre equações de equilíbrio estáveis e instáveis, configuração deformada e indeformada. A flambagem estática pode surgir de duas formas:

a) Instabilidade bifurcacional: A estrutura inicialmente apresenta uma trajetória de equilíbrio fundamental, linear (Figura 2.1 (a)) ou não linear (Figura. 2.1 (b)), linha verde contínua, dependente da relação cinética utilizada, porém após certo nível de carga, essa trajetória deixa de ser estável e passa a ocorrer outra trajetória estável ou instável, que caracteriza o comportamento pós flambagem, trajetória de equilíbrio de pós flambagem estável, linha azul contínua, ou trajetória de equilíbrio fundamental instável, linha verde tracejada. A intersecção entre as duas trajetórias se produz num ponto chamado ponto de bifurcação, ponto vermelho, e ocorre a transição das equações de equilíbrio da configuração indeformada para deformada.

Na Figura 2.1 se apresenta de forma esquemática os conceitos vistos.

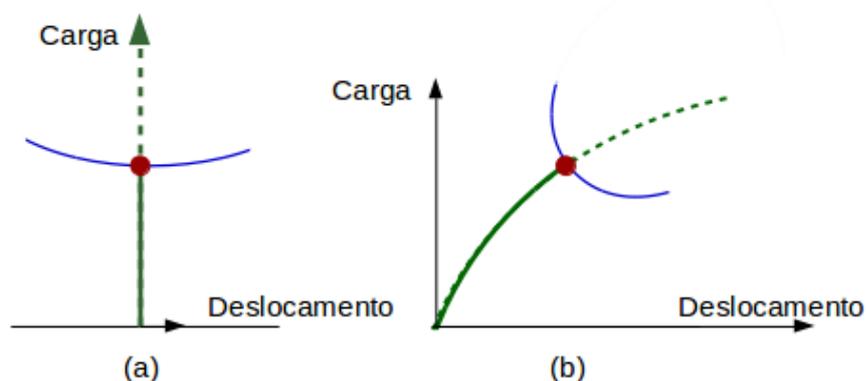


Figura 2.1- Instabilidade Bifurcacional.

(a) com trajetória fundamental linear, linha contínua em verde

(b) com trajetória fundamental não linear, linha contínua em verde.

Ponto de bifurcação em vermelho.

Trajetoária pós-flambagem estável (linha contínua azul), instável (linha tracejada em verde).

Com a trajetória de equilíbrio de pós flambagem estável é possível determinar a reserva de resistência da estrutura após a ocorrência da flambagem.

b) Instabilidade por ponto limite ou instabilidade por Snap Through: neste caso a trajetória de equilíbrio fundamental, que obrigatoriamente é não linear, apresenta um deslocamento do centro de gravidade não nulo já no início do carregamento, chega a um ponto onde tem derivada nula, e se a carga continua aumentando o centro de gravidade da estrutura

se translada dinamicamente, apresentando uma singularidade na trajetória de equilíbrio fundamental. Na Figura 2.2 se ilustra este fenômeno.

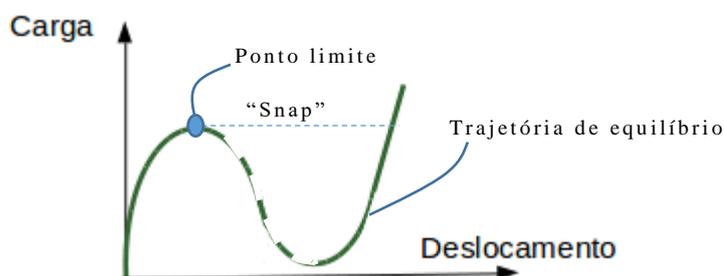


Figura 2.2 - Instabilidade por ponto limite (Snap Through).

Na continuação, se analisa os dois tipos de instabilidade estrutural de forma intuitiva, um tratamento mais rigoroso destes tópicos se encontra nas referências já citadas.

2.2 Instabilidade Bifurcacional.

Um problema de instabilidade bifurcacional é caracterizado pela existência de:

- (i) Uma trajetória de equilíbrio fundamental (linear ou não linear), que inicia na origem do diagrama carga deslocamento.
- (ii) Uma trajetória de equilíbrio de pós-flambagem que não passa pela origem do diagrama carga-deslocamento.
- (iii) Um ponto de bifurcação que corresponde a interseção das duas trajetórias e no qual as equações de equilíbrio da estrutura passam de estáveis a instáveis, indeformada para deformada.

Analizamos algumas estruturas onde esse tipo de instabilidade aparece.

- **Instabilidade de uma coluna bi-rotulada: Coluna de Euler**

Denomina-se assim o caso da coluna elástica de comprimento L simplesmente apoiada e submetida a uma carga axial P , a trajetória do equilíbrio e a descrição da coluna são apresentadas na Figura 2.3, onde q é o valor do deslocamento transversal do centro de gravidade ($q=w(L/2)$). Nesta figura se apresenta a trajetória de equilíbrio fundamental estável para $P < P_E$

indicada em verde contínuo na figura, o ponto de bifurcação $P=P_E$, ponto vermelho, a trajetória de equilíbrio fundamental se torna instável (linha verde tracejada), e a partir do ponto de bifurcação pode surgir à trajetória de equilíbrio de pós-flambagem (linha azul contínua).

Resolvendo a equação diferencial

$$E I \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (2.1)$$

onde E [N/m^2] é o módulo de elasticidade, o momento de inércia se representa pelo, I [m^4], e o comprimento da coluna pelo L [m], e $w(x)$ representa o deslocamento transversal da viga é possível achar a carga na qual se encontra o ponto de bifurcação da coluna de Euler, a qual é dada pela seguinte expressão.

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.2)$$

Sendo o deslocamento axial crítico, δ_E [m], aquele que produz uma reação nesse apoio igual à P_E [N], este deslocamento se pode expressar utilizando a relação da rigidez axial:

$$\delta_E = \frac{P_E L}{E A} \quad (2.3)$$

Onde A [m^2] é a área da seção transversal. O modo de instabilidade, obtido pelas equações de equilíbrio na configuração deformada para as condições de contorno definida na Figura 2.3 é dada pela expressão.

$$w(x) = q \text{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (2.4)$$

Utilizando desde modo de instabilidade, introduzindo as condições de contorno na equação de equilíbrio, chega-se a Equação (2.2), ponto onde as duas trajetórias se intersectam define o ponto de bifurcação e corresponde ao estado de equilíbrio neutro da coluna.

A trajetória de pós-flambagem, neste caso, na vizinhança do ponto de bifurcação é dada por uma relação que pode ser aproximada pela parábola, na forma de

$$q = \sqrt{\frac{\frac{P}{P_E} - 1}{\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}} \quad (2.5)$$

que em termos de $P = f(q)$ ficaria.

$$P = P_E \left(1 + q^2 \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right) \quad (2.6)$$

Esta trajetória é ilustrada na Figura 2.3.

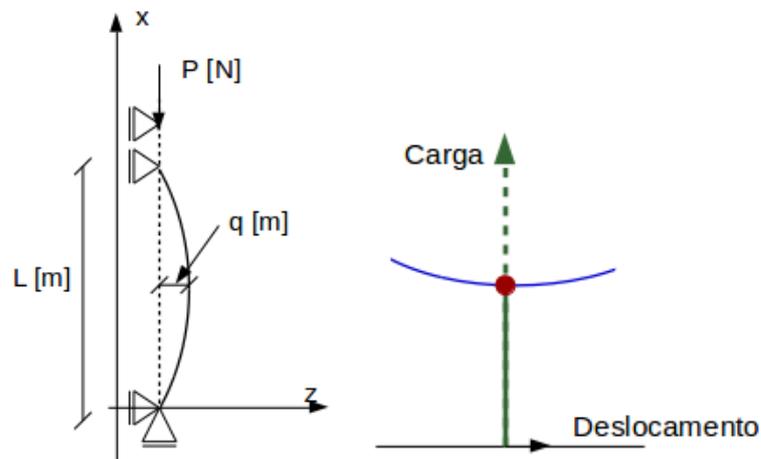


Figura 2.3- Coluna de Euler e trajetória de equilíbrio.

O deslocamento transversal do centro de gravidade dado pela Equação (2.5) deve ser posto no modo de instabilidade, Equação (2.4), para então verificar a configuração deformada da estrutura pós flambagem, quando submetida à força axial de compressão.

- **Instabilidade de uma placa**

A continuação se analisa como exemplo ilustrativo, a relação cinemática da trajetória de equilíbrio fundamental e de pós flambagem para uma placa quadrada com suas quatro bordas rotuladas, submetidas a tensões de compressão em uma direção, proporcionada por força axial, assim como, tensões de cisalhamento dadas por forças de corte.

Esta situação pode reproduzir a análise de estruturas, onde localmente alguns de seus elementos se comportem como placas. É o caso, por exemplo, de colunas formadas por tubos quadrados, como ilustrado pela Figura 2.4, quando a instabilidade não acontece no nível global

(movimento rígido da seção transversal da coluna), e sim de um de seus elementos estruturais, a este fenômeno se chama de instabilidade local.

Também neste caso, quando a tensão aplicada na placa atingir um valor crítico a trajetória de equilíbrio fundamental deixará de ser estável, e uma nova trajetória de equilíbrio de pós-flambagem estável será possível. Esta situação se produz num ponto de bifurcação indicado pela condição $\sigma = \sigma_{cr}$.

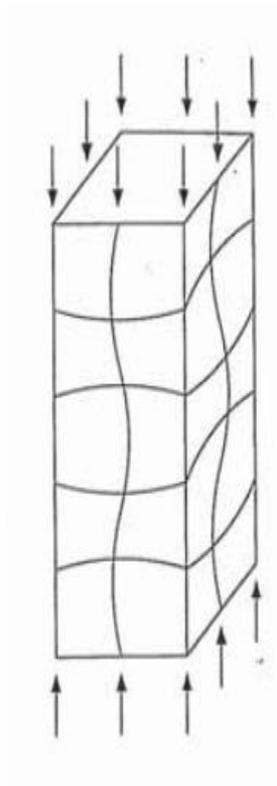


Figura 2.4 - Coluna Tubular

Fonte: Reis e Camotim, 2001.

Na Figura 2.5 se apresenta de forma esquemática os elementos que representam a flambagem na placa analisada.

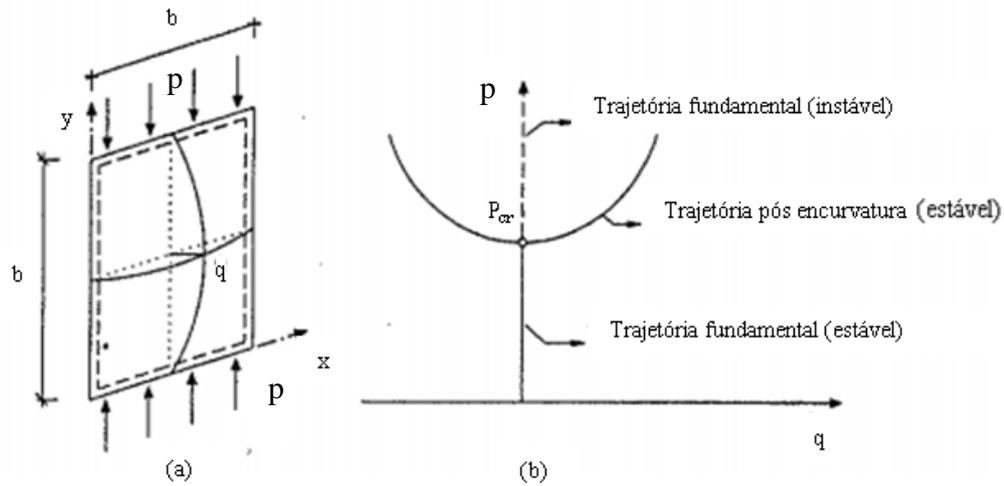


Figura 2.5 - Instabilidade em placa quadrada submetida à carga distribuída p [N/m] compressiva em uma direção

Fonte: Reis e Camotim, 2001.

Neste caso a carga distribuída crítica, p_{CR} [$\frac{N}{m}$], é fornecida por:

$$p_{CR} = K \frac{\pi^2 E t^2}{12 (1 - \nu^2) b} \quad (2.7)$$

Onde t [m] é a espessura da placa, b [m] sua largura, e ν o coeficiente de Poisson e K é um coeficiente adimensional que leva em conta as condições de contorno, de cargas e apoios. Para o caso de placas quadradas com suas 4 bordas apoiadas, se aplicarmos uma pressão compressiva em um dos lados da placa, $K=4$, e se sobre a mesma placa aplicamos corte puro, $K=9.34$ [Yu e Roger, 2010]. O modo de flambagem é dado pela Equação:

$$w(x, y) = q \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (2.8)$$

A trajetória de equilíbrio de pós flambagem no caso de força axial compressiva é dada pela Equação:

$$\left(\frac{p}{p_{CR}} \right) = 1 + \left(\frac{3}{8} (1 - \nu^2) \left(\frac{q}{t} \right)^2 \right) \quad (2.9)$$

Comparando as Figuras 2.3 e 2.5 constata-se que tanto a coluna de Euler como a placa comprimida tem uma trajetória inicial de pós-flambagem parabólica e estável. Todavia apesar da semelhança qualitativa entre as duas relações elas têm uma diferença quantitativa considerável, (a curvatura da trajetória pós-flambagem da placa é muito mais acentuada), de tal forma que para deslocamentos $q=0.1 L$ para a coluna sobre a trajetória pós-flambagem se chega a uma carga $P=1.012 PE$, sendo que para $q=t$ sendo t a espessura da placa, o incremento da tensão ao se utilizar a trajetória de pós-flambagem será de $P=1.34 PE$.

- **Instabilidade em cascas**

A diferença do que acontece com as colunas e placas a trajetória inicial de pós-flambagem de uma casca é em geral retilínea e numa das direções instável, isso se ilustra na Figura 2.6.

Onde se apresenta as trajetórias de equilíbrio de um painel cilíndrico, (espessura t , raio de curvatura R , comprimento e largura b , de grande curvatura (valor de $1/R$ elevado)), simplesmente apoiada em todo o contorno e submetido à compressão axial uniforme.

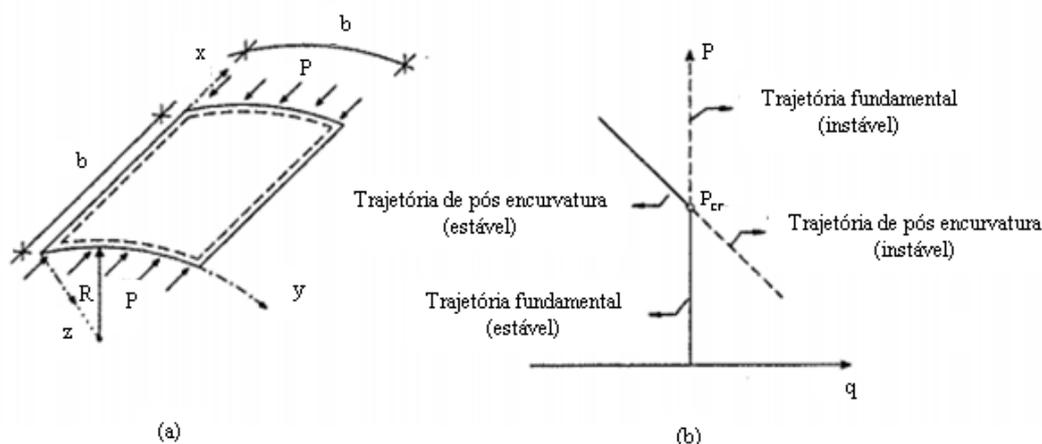


Figura 2.6 - Flambagem de uma casca cilíndrica, (o deslocamento q é medido na direção de z).

Sendo que a tensão crítica é expressa:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E t^2}{3(1-\nu^2)b^2} (1 + \theta^4) \quad (2.10)$$

Onde o termo θ representa um parâmetro referente à curvatura da casca, definido através de.

$$\theta = \frac{b^4}{\pi} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{4R^2t^2}} \quad (2.11)$$

Neste caso o modo de flambagem se pode expressar como:

$$w(x, y) = q \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.12)$$

E a trajetória de pós flambagem, no início do desequilíbrio estrutural é retilínea conforme.

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} = 1 - \frac{10E}{3\pi^2 R} q \quad (2.13)$$

Essa última equação representa na relação carga deslocamento uma reta inclinada, as Equações (2.10), e (2.13) tendem às Equações da placa (2.7), (2.8) quando o raio de curvatura tende a infinito, sendo que a inclinação da trajetória de pós flambagem tende para zero, assim como valor obtido a partir da Equação (2.9). No presente trabalho não são analisados exemplos de cascas mas se decidiu manter esta breve introdução sobre a flambagem nas mesmas para ilustrar a analogia e diferencia entre estes três elementos fundamentais (vigas, placas e cascas).

Nos três exemplos vistos de instabilidade bifurcacional ao se modificar as condições de contorno outras expressões, para a carga crítica, modo de flambar e trajetória pós-flambagem surgiram, em muitos casos não é possível chegar a estas equações em forma analítica, nestes casos a utilização de métodos numéricos é a única saída.

No presente trabalho apresenta-se no Apêndice A um estudo relacionado à trajetória de pós flambagem para o caso da coluna de Euler onde se impõe deslocamentos prescritos acima do ponto de bifurcação.

2.2.1 Interação da Instabilidade Bifurcacional com imperfeições geométricas

Nas estruturas reais (sistemas reais) imperfeições geométricas estão naturalmente presentes, e a ocorrência da bifurcação de equilíbrio, instabilidade bifurcacional, deixa de existir. Nestes casos só existe uma trajetória de equilíbrio fundamental, mas se constata que é possível estabelecer uma relação entre a forma dessa trajetória, e as trajetórias de equilíbrio

fundamental e de pós-flambagem dos sistemas nos quais não se considera as imperfeições (sistemas ideais). Na Figura 2.7 se apresentam as trajetórias ideais e reais dos três tipos de estruturas já vistos (coluna, placa e casca).

Podemos ver que o comportamento real dos três sistemas estruturais é claramente diferenciado do comportamento do sistema ideal, em particular observa-se que a carga crítica de bifurcação fornece uma estimativa da capacidade de carga que é razoável no caso da coluna, claramente conservativa no caso da placa (neste caso a carga crítica não contabiliza a reserva de resistência pós-flambagem), e claramente não conservativa no caso do painel cilíndrico (a determinação da carga crítica não contabiliza a perda de resistência provocada pelas imperfeições geométricas iniciais). A importância da análise pós-flambagem reside em permitir detectar estas diferenças de comportamento. O comportamento destes sistemas estruturais é em regime elástico, mas é conveniente não esquecer que os fenômenos de instabilidade também influenciam o comportamento em regime elastoplástico.

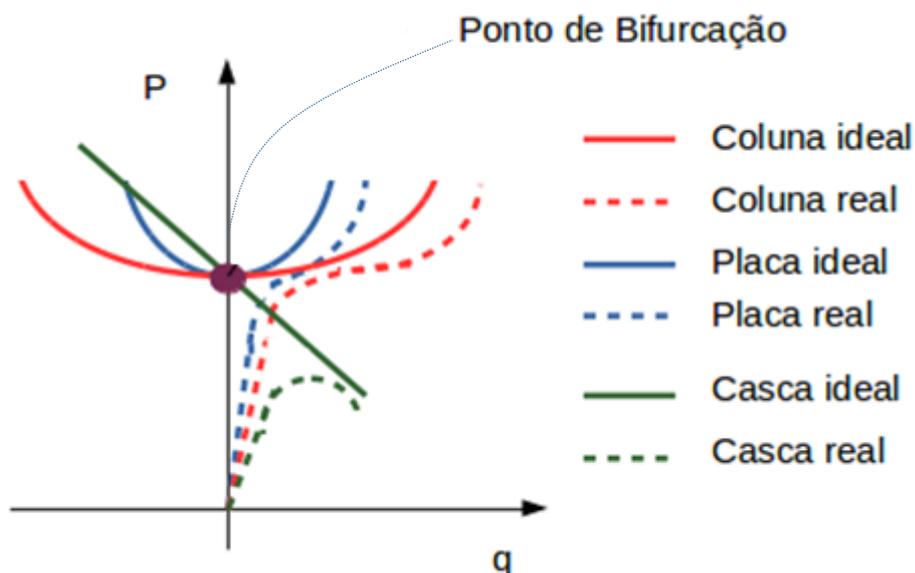


Figura 2.7 - Comparação existente entre os sistemas ideais e reais.

2.3 Instabilidade por Ponto Limite

Na Figura 2.2 é apresentado um diagrama carga deslocamento, que mostra os aspectos essenciais de um problema de instabilidade de ponto limite, que discriminamos a seguir:

- (i) Uma trajetória de equilíbrio não linear que inicia na origem do diagrama carga-deslocamento.
- (ii) Um ponto limite que corresponde a condição de declive nulo da trajetória de equilíbrio e no qual as configurações de equilíbrio passam de estáveis a instáveis.
- (iii) Um deslocamento abrupto que ocorre quando a estrutura se encontra no ponto limite e é submetida a um leve aumento de carga. Este fenômeno descreve a passagem dinâmica da estrutura para uma configuração de equilíbrio afastada e estável.

Diferentemente do que acontece com a instabilidade bifurcacional, os deslocamentos que definem o snap, estão presentes desde o início do carregamento. O aumento do carregamento provoca uma diminuição progressiva da rigidez da estrutura. Para estudar este problema é necessário levar em conta a não linearidade geométrica do modelo estudado.

Este tipo de instabilidade se dá em arcos ou calotas abatidas como os ilustrados na Figura 2.8.

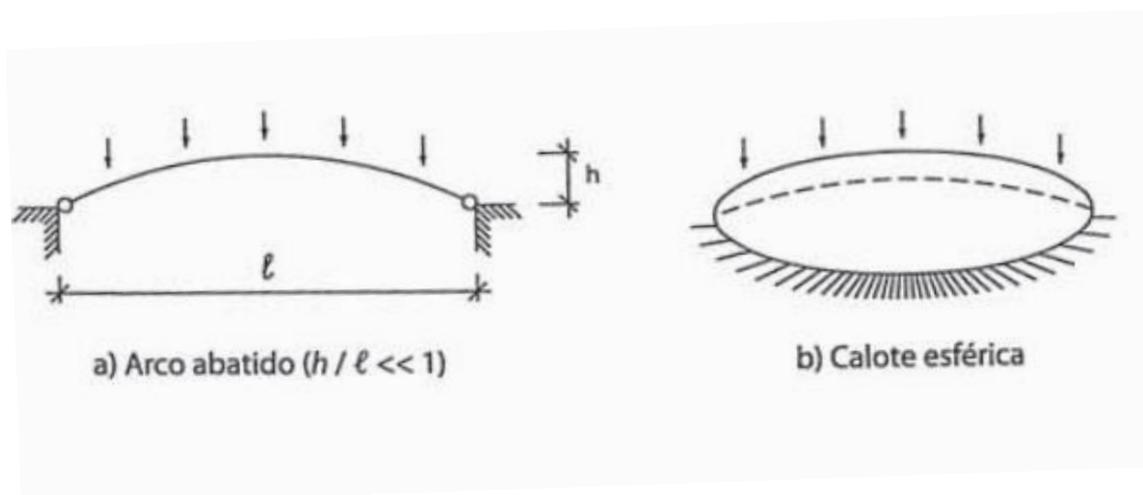


Figura 2.8 - Estruturas suscetíveis de sofrer flambagem por ponto limite.

Fonte: Reis e Camotim, 2001.

A análise de problemas específicos desta forma de instabilidade pode ser encontrada em Reis e Camotim, 2001, bibliografia utilizada para organizar esta revisão além de outros textos clássicos de flambagem já citados no começo desta seção.

2.4 Instabilidade Dinâmica

No caso de incorporar na análise de estabilidade estrutural a dimensão temporal, a equação de movimento terá adicionadas forças de inércia, que dependem da massa e das acelerações da estrutura, e as forças dissipativas, que na sua versão mais simples dependem da velocidade atingida pela estrutura analisada, o problema deixa de ser estático e passa a ser dinâmico, isto é introduzido pelas equações de compatibilidade. Neste caso definir as condições nas quais a estrutura é estável ou não depende da magnitude da força externa aplicada e da sua variação no tempo. Isso faz que o processo seja muito mais complexo. Tratado em numerosa bibliografia, entre elas é possível Bazant e Cedolin, 2003, Bolotin, 1964, Oliveira, 1998, Soares e Mazzili, 1992.

Este tema tem consideráveis implicações práticas, pois muitas estruturas submetidas à interação com fluídos, pontes e cabos suspensos, pilares de estruturas fora da costa, veículos em geral, entre outras, apresentam problemas de instabilidade dinâmica. Também é possível encontrar problemas de instabilidade no caso de estruturas submetidas a forças flutuantes produzidas por máquinas rotatórias por exemplo.

No trabalho desenvolvido, a maneira de exemplificar o fenômeno é analisando o caso de uma coluna birotulada, sobre a qual se aplica uma carga axial de compressão com componente flutuante com variação harmônica de frequência. Neste caso veremos que a instabilidade da coluna dependerá não só da magnitude da carga, mas também da frequência de excitação da mesma.

Quando imposta na estrutura um deslocamento ou carregamento paramétrico o equilíbrio neutro será associado à frequência de excitação e seu carregamento compressivo, tornando-se este o limite último, antes de atingir a ressonância. Tal limite é encontrado pela instabilidade paramétrica associada à teoria da estabilidade estrutural. A literatura clássica do problema é associada à linearização do equilíbrio de movimento da estrutura vinculada às equações de Mathieu, designando que a faixa de ressonância é aproximadamente o dobro da frequência natural.

Para uma coluna bi rotulada sofrendo excitação paramétrica de forma axial, conforme Figura 2.9. A equação de movimento, considerando o sistema amortecido, é expressa como segue:

$$E I \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = - \rho A_s \frac{\partial^2 w(x)}{\partial t^2} + 2 c \frac{\partial w(x)}{\partial t} \quad (2.14)$$

onde w , representa o modo de flambagem ou solução fundamental, ρ [kg/m³] representa a densidade, A_s [m²], a área da seção transversal, E [Pa] o módulo de elasticidade longitudinal, I [m⁴] o momento de inércia, c [kg/s] é o coeficiente de amortecimento.

No caso da excitação paramétrica a carga aplicada se escrever,

$$P = P_0 + P_t \cos(\Omega t) \quad (2.15)$$

onde Ω [rad/s] é a frequência de excitação, P_0 [N] é dado pelo carregamento constante e P_t [N] é dado pelo carregamento harmônico. Considerando o sistema não amortecido e substituindo o valor da excitação externa na equação de movimento resulta

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (P_0 + P_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho A_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

que tem como solução fundamental, modo de flambagem.

$$w(x, t) = f_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.17)$$

Trabalhando a expressão anterior e descrevendo a frequência de ressonância, w_r , a frequência natural de vibração, w_n , e o parâmetro de carga p .

$$\begin{aligned} w_r^2 &= w_n^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_{cr}}\right) \\ w_n^2 &= \frac{n^2 \pi^4}{L^4} \left(\frac{EI}{\rho A_s}\right) \\ p &= \frac{P_t}{2(P_{cr} - P_0)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Chega-se a uma equação diferencial do problema linearizado (análise de estabilidade de primeira ordem), não incluindo as não linearidades geométricas da estrutura chamada de equação de Mathieu apresentada em Bolotin, 1964.

$$\frac{d^2 f_n}{d t^2} + w_r^2 (1 - 2 p \cos \Omega t) f_n = 0 \quad (2.19)$$

A solução desta equação se pode escrever.

$$f_n(t) = q_n \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \quad (2.20)$$

Onde a amplitude q_n como apresentada em Oliveira, 1998.

$$q_n = \frac{1}{3} \frac{\left(6 w_r \tau \Omega - 12 w_r^2 \tau \pm 3^2 \sqrt{\pi^4 \delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^3} \quad (2.21)$$

onde

$$\tau = \frac{\rho A_S L^4}{EI} \quad (2.22)$$

$$\delta = \frac{P_t L^2}{EI}$$

Na Figura 2.9 se apresenta em forma esquemática o problema analisado no domínio p vs Ω/w_r . Onde p é definido na Equação (2.18) e Ω/w_r representa a relação entre a frequência aplicada e a frequência ressonância de vibração.

Na Figura 2.9 (b) se apresentam os pontos no domínio p vs Ω/w_r que representam situações na que a estrutura estará em equilíbrio estável o instável. Linhas vermelhas indicam o contorno da região de instabilidade no caso do sistema não ser amortecido, a linha azul demonstra a região de instabilidade no caso do sistema ter um amortecimento de $a/w_r=0.05$.

Ou seja que para uma combinação de parâmetros, p , Ω , e w_r se representa na região estável do diagrama, se o sistema é perturbado, ele retornará a vibrar dentro da sua configuração de equilíbrio estável. Por outro lado se p , Ω , w_r se representa na região instável, o sistema perturbado passara a vibrar numa configuração instável, flambando.

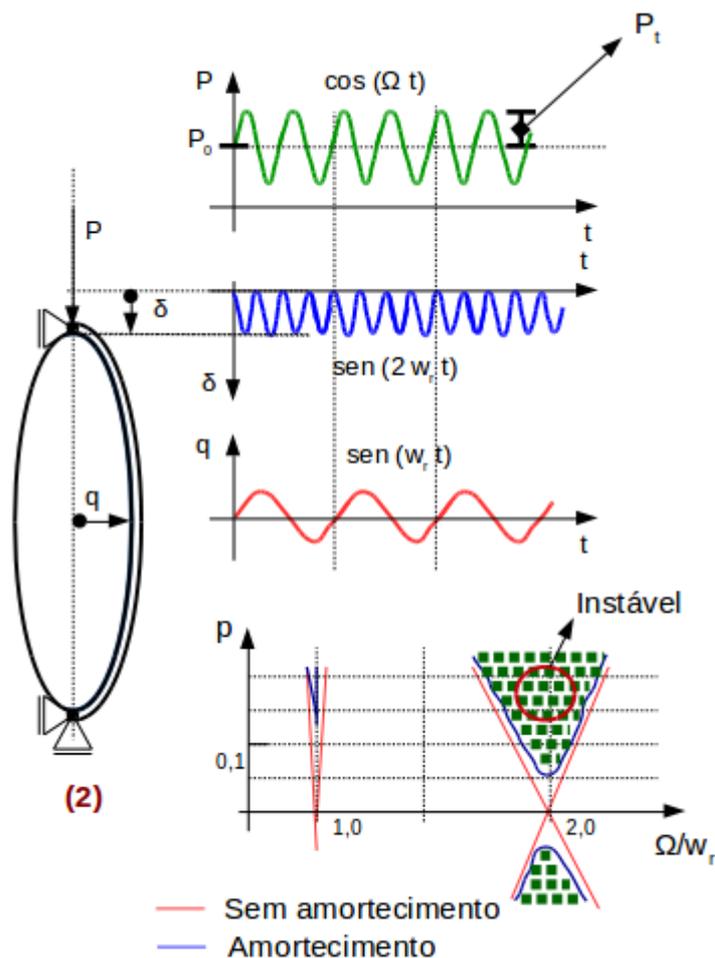


Figura 2.9 - Coluna bi rotulada submetida a uma carga axial com flutuação harmônica (a) esquema que mostra a estrutura com a carga aplicada. (b) diagrama $p = P_t/2(P_{cr} - P_0)$ vs Ω/w_r que permite determinar as regiões de equilíbrio estáveis e instáveis. Linhas vermelhas indicam região de instabilidade no caso do sistema não ser amortecido, a linha azul a região de instabilidade no caso do sistema ter um amortecimento de $a/w_r = 0.05$.

2.5 Análises Não lineares e lineares

Para analisar uma estrutura é necessário resolver os seguintes conjuntos de equações acopladas:

- (i) Equações de equilíbrio.
- (ii) Relações constitutivas.
- (iii) Relações cinemáticas.
- (iv) Equações de compatibilidade.

Na análise estrutural linear, mais simples possível, se considera que os conjuntos de equações citados são lineares, isto implica em considerar que a relação constitutiva é elástica linear e que os deslocamentos e deformações são pequenos, o que equivale a considerar que é possível realizar os cálculos dos esforços diretamente sobre a configuração indeformada.

Mas a análise linear de estruturas não permite identificar ou estudar fenômenos de flambagem, o que resulta do fato da natureza destes fenômenos ser intrinsecamente não lineares. Por isto, a definição de qualquer análise de estabilidade de uma estrutura envolve obrigatoriamente estabelecer as equações de equilíbrio na sua configuração deformada ou considerar as relações cinemáticas não lineares.

No exemplo da Figura 2.10 vemos a análise de uma coluna sobre a qual se aplica uma carga axial excêntrica. Na Figura 2.10 se ilustra a diferença de considerar uma análise linear ou não linear geométrica para determinar as trajetórias de equilíbrio.

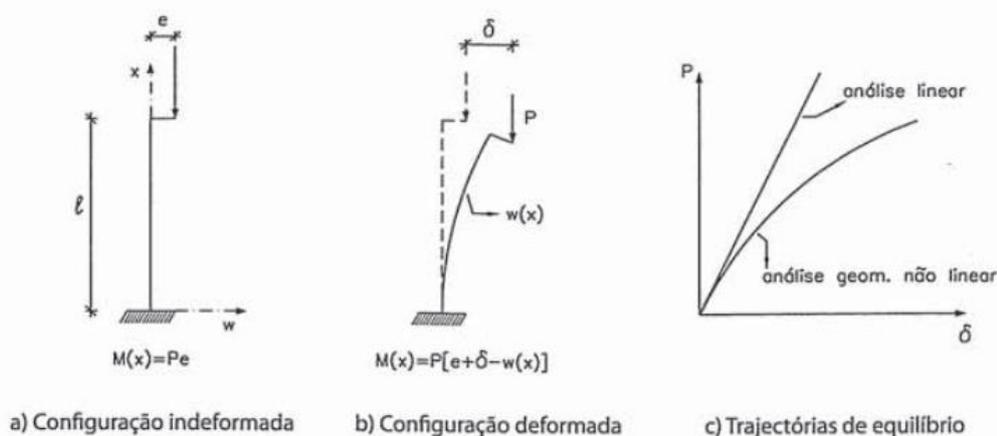


Figura 2.10 - Diferença entre o modelo linear e não linear

Fonte: McGuire, Gallagher, e Ziemian, 2000.

Existem vários tipos de análises de estabilidade em função do nível de não linearidade geométrica nela incorporado.

No caso de instabilidade bifurcacional, é necessário definir (i) uma trajetória fundamental que pode ser linear ou não, (ii) cargas de bifurcação, (iii) modos de flambagem e (iv) trajetórias pós-flambagem.

Cabe salientar que conhecer a trajetória pós flambagem é de importância para conhecer a reserva de resistência que tem o sistema após a estrutura atingir a carga crítica.

No caso de ter sistemas com relação cinemática linear é possível estabelecer as equações de equilíbrio sobre a configuração deformada e linearizar estas equações respeitando os deslocamentos envolvidos. Desta forma é possível calcular a carga de bifurcação (a menor) e os modos de instabilidade abrindo mão de conhecer as trajetórias de pós-flambagem. Quando se modela desta forma o problema estudado, o mesmo se traduz num problema de autovalores, onde o menor autovalor será a carga crítica e seu autovetor associado ao modo de instabilidade no qual a estrutura sai da trajetória fundamental, mas nada se informa sobre a trajetória de pós-flambagem.

Do ponto de vista físico ao realizar esta simplificação assume-se a hipótese que o sistema sai da trajetória fundamental no ponto de bifurcação e na configuração indeformada. Este tipo de simplificação é impossível de ser feita no caso de instabilidade por ponto limite (Snap-through) onde pra resolver o problema é necessário considerar a não linearidade geométrica do problema estudado. Mais informação sobre a implementação de métodos numéricos que permitam resolver problemas de instabilidade com diversos graus de precisão podem ser encontrados em McGuire, Gallagher e Ziemian, 2000.

No método que será utilizado neste estudo, o contínuo é representado por um arranjo de barras regulares e a rigidez das barras permite realizar uma equivalência com o contínuo que se pretende representar. Como o arranjo é regular as expressões que permitem determinar estas equivalências são explícitas. Outro detalhe a ser levado em conta é que como as barras que compõem o arranjo são birotuladas, naturalmente o sistema captura a não linearidade geométrica [Bathe, 1976]. O método permite representar dano estrutural e certos níveis de plasticidade introduzindo não linearidade nas leis constitutivas das barras, desta forma a não linearidade do material poderá interagir com a não linearidade geométrica nas simulações realizadas. O sistema permite também com relativa facilidade incorporar aleatoriedade ao sistema estrutural considerando as propriedades do material como campos aleatórios, e introduzindo também uma perturbação geométrica nos arranjos regulares das barras.

Desta forma se descreve a discretização espacial do modelo, que resulta numa equação de movimento que deverá ser integrada no tempo utilizando algum esquema de integração, entre as opções possíveis se prefere utilizar um esquema de integração explícita por ser mais robusto na integração das fortes não linearidades que podem surgir resultantes das fraturas e instabilidades locais que o modelo pode simular. No próximo capítulo se realiza uma apresentação mais exaustiva do método citado.

3 METODOLOGIA

Este capítulo trata do método dos elementos discretos formado por barras (LDEM) utilizado neste trabalho. Inicialmente, a discretização e o modelo constitutivo empregado em cada barra e seus parâmetros, além da condição de estabilidade da integração são apresentados. A seguir, um comprimento característico do material (d_{eq}) para o Ldem é definido. A aleatoriedade do material e a perturbação geométrica no arranjo do modelo são sucintamente contextualizadas para o LDEM. Por fim citam-se estudos numéricos realizados com esta metodologia de trabalho.

3.1 Método dos elementos discretos por barras LDEM.

O método de discretização empregado no presente trabalho representa o meio contínuo através de um arranjo espacial periódico de barras com massa concentrada nos nós e é chamado de Método dos Elementos Discretos formado por Barras (LDEM – Lattice Discrete Element Method). A estratégia de discretização, apresentada na Figura 3.1, segue [Nayfeh e Hefzy, 1978], na qual utiliza um módulo cúbico básico formado por 20 barras e 9 nós. Cada nó possui três graus de liberdade, que são as três componentes do vetor deslocamento global. Na Figura 3.1, L_c corresponde ao comprimento da aresta do módulo cúbico.

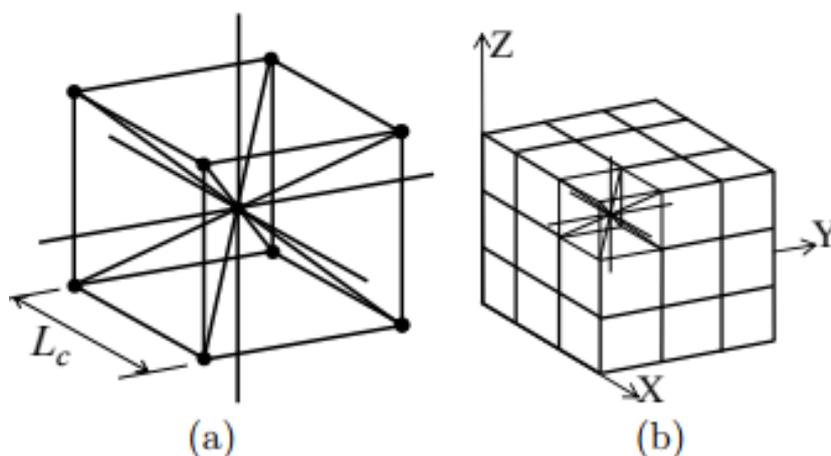


Figura 3.1 - Estratégia de discretização empregada pelo Ldem.

(a) módulo cúbico básico (b) prisma formado usando vários módulos cúbicos básicos.

A massa concentrada nos nós é especificada de tal maneira que a soma das massas nodais represente a massa total do módulo, $m_{modulo} = \rho L_c^3$. Desse modo, a metade da massa do módulo é atribuída ao nó do centro do módulo, $m_{centro} = 0.5\rho L_c^3$, enquanto a outra metade da massa é distribuída igualmente entre os oito nós dos vértices. É importante notar que, uma vez que os módulos vizinhos compartilham os seus nós dos vértices, esses nós levam em conta a contribuição de vários módulos depois da montagem completa do modelo.

No caso de um material elástico isotrópico, a rigidez axial equivalente por unidade de comprimento dos elementos longitudinais (localizado ao longo das arestas do módulo e aqueles conectando os nós no centro dos módulos) é dado por:

$$E_l = A_l E = \Phi E L_c^2 \quad (3.1)$$

A área da seção transversal, A_l , é definida como, $A_l = \Phi L_c^2$ onde

$$\Phi = \frac{(9+8\eta)}{(18+24\eta)} \quad \eta = \frac{9\nu}{(4-8\nu)} \quad (3.2)$$

De forma análoga a rigidez equivalente das treliças diagonais, é definida pela seguinte equação:

$$E_d = A_d E = \frac{2}{\sqrt{3}}\eta \Phi E L_c^2 \quad (3.3)$$

Com estas expressões modela-se um sólido isotrópico, equivalente no caso do módulo de Poisson ser igual a 0.25, para outros valores deste coeficiente erros nos termos de corte devem ser assumidos. Trocando o arranjo básico outros coeficientes de Poisson podem ser simulados.

A segunda lei de Newton é aplicada para cada nó a fim de se obter o sistema de equações.

$$\widetilde{M} \ddot{x}(t) + \widetilde{C} \dot{x}(t) + \widetilde{F}(t) - \widetilde{P}(t) = 0 \quad (3.4)$$

Onde os vetores $\ddot{x}(t)$ e $\dot{x}(t)$ representam respectivamente as acelerações e velocidade nodais, \widetilde{M} e \widetilde{C} são as matrizes de massa e amortecimento, \widetilde{F} , \widetilde{P} representam os vetores de forças internas e externas do sistema. Se \widetilde{M} e \widetilde{C} são diagonais, as equação não são acopladas e podem

ser facilmente integradas no domínio do tempo utilizando o método das diferenças finitas Centrais.

Verificando-se que

$$C = M Df \quad (3.5)$$

Onde Df é um parâmetro vinculado ao coeficiente de amortecimento estrutural ξ_n como segue:

$$Df = \xi_n w_n \quad (3.6)$$

onde w_n representa a frequência natural de vibração do sistema.

Deve-se notar que as coordenadas nodais são atualizadas a cada incremento de tempo, e como os nós são rotulados em seus extremos é possível modelar com este método problemas com não linearidade geométrica, sem adicionar nenhuma complexidade adicional na implementação [Bathe, 1976]. A estabilidade do método de integração é assegurada limitando o incremento de tempo a:

$$\Delta t \leq \frac{0.6 L_c}{v_p} \quad (3.7)$$

Onde v_p é a velocidade de propagação da onda volumétrica, $v_p=(E/\rho)^{0.5}$, e $0.6 L_c$ o comprimento característico da barra diagonal, sendo que a estabilidade da metodologia de integração deve respeitar o mínimo intervalo para que a onda volumétrica atravessasse o menor elemento do modelo num intervalo de integração.

3.2 Modelo não linear para dano anisotrópico

Rocha, Riera e Krutzik, 1991, e mais recentemente Kostaski L. E., Iturrioz, Batista e Cislino, 2011, introduziram modelos de dano não lineares para a energia de fratura do elemento cúbico. O mesmo se ilustra na Figura 3.2.

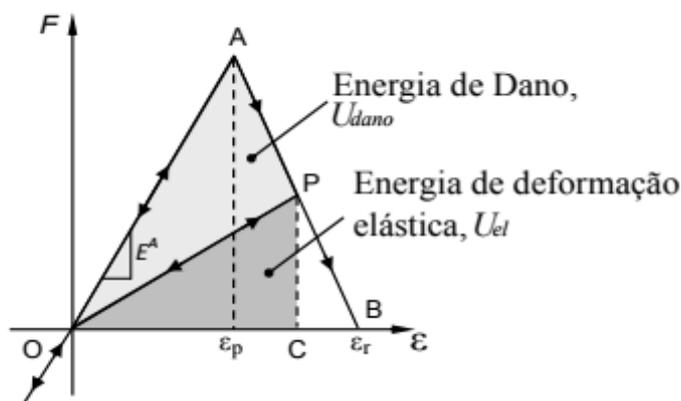


Figura 3.2 - Modelo de dano constitutivo bi linear do material

A área do triângulo OAB na Figura 3.2 representa a densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento. Assim, para um dado ponto P na curva força versus deformação, a área do triângulo OPC representa a densidade de energia elástica que pode ser devolvida no meio, enquanto a área do triângulo OAP representa a densidade de energia dissipada pelo dano. Uma vez que a densidade de energia dissipada atinja a densidade de energia acumulada no elemento (triângulo OAB), o elemento falha e perde a sua capacidade de suportar carga. A compressão, o material se comporta de forma elástica linear. Assim, a falha por compressão é induzida pela tração indireta. Essa suposição é razoável para materiais quase-frágeis para os quais a resistência máxima à compressão é maior em 5 ou 6 vezes do que à tração [Kupfer e Gerstle, 1973].

Os parâmetros do modelo constitutivo bi linear da Figura 3.2. são:

Força, F : força axial na barra em função da sua deformação axial ϵ .

Rigidez do elemento, E^A : depende das características do meio elástico e da discretização utilizada, observe que E^A relaciona uma força com uma deformação.

Comprimento, L_C : comprimento crítico da aresta de um módulo cúbico básico do L_{dem} .

Energia específica de fratura, G_f : energia específica de fratura ela e proporcional a área sob a curva bi linear da Figura 3.2.

Área de fratura equivalente, A^f : depende do comprimento do módulo cúbico. Esse parâmetro reforça a condição de que a energia dissipada pela fratura no meio elástico é equivalente à da sua representação discreta.

A energia dissipada pela fratura de uma amostra elástica de um elemento cúbico que ocorre em uma de suas faces é dada por,

$$\Gamma = G_f L_c^2 \quad (3.8)$$

A energia dissipada por um módulo cúbico no LDEM quando fraturado em duas partes, é constituído pelas contribuições de cinco elementos longitudinais (quatro de aresta e um interno) e quatro elementos diagonais. Se introduz, na expressão um coeficiente c_A que permitirá ajustar a dissipação de energia do modelo discreto com a que acontece no sólido equivalente.

$$\Gamma_{LDEM} = G_f c_A \left[(4)(0.25) + 1 + 4 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right) \right] L_c^2 \quad (3.9)$$

O primeiro termo entre parênteses considera os quatro elementos das arestas, o segundo termo considera o elemento longitudinal interno e o terceiro termo representa a contribuição dos quatro elementos diagonais. O fator $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right)$ é a relação entre a rigidez da barra diagonal e longitudinal. O coeficiente c_A e um fator de escala utilizado para estabelecer a equivalência entre Γ e Γ_{dem} , no caso de $\nu=0.25$

$$G_f L_c^2 = G_f \left(\frac{22}{3} c_A \right) L_c^2 \quad (3.10)$$

onde o coeficiente que permite fazer a equivalência será $c_A = \frac{3}{22}$.

Desta forma a área de fratura, equivalente das barras longitudinais e diagonais, pode ser apresentada.

$$A_d^f = \frac{4}{22} L_c^2 \quad (3.11)$$

$$A_l^f = \frac{3}{22} L_c^2 \quad (3.12)$$

Deformação de falha crítica, ε_p : é definida como a máxima deformação antes do início do dano, dado pelo limite último de utilização do material.

O limite último de utilização do material é imposto pela deformação de falha crítica. O módulo de elasticidade E , o fator de intensidade de tensões crítico K_c e a deformação crítica ε_p estão relacionados com a expressão clássica da mecânica da fratura [Kanninen e Popelar, 1985] que se apresenta a seguir:

$$K_c = E \varepsilon_p Y \sqrt{\pi d} \quad (3.13)$$

As condições de contorno da falha geométrica assim como a orientação da fissura crítica de tamanho, d , são considerados pelo parâmetro adimensional, Y . Caso o comportamento do início de ruptura seja assumido como linear, então $E \varepsilon_p$ é a energia de deformação elástica, recordando a equivalência entre K_c e a energia específica da fratura G_f se pode escrever:

$$\sqrt{G_f E} = E \varepsilon_p Y \sqrt{\pi d} \quad (3.14)$$

A fim de simplificar tal equação, o comprimento crítico característico da fissura, d_{eq} , é definido como:

$$d_{eq} = d \pi Y^2 \quad (3.15)$$

Substituindo-se equações tem-se

$$d_{eq} = \frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \quad (3.16)$$

A equação final indica que d_{eq} é considerado uma propriedade do meio elástico uma vez que não depende do nível de discretização, representando de fato um comprimento característico do material (semelhante à da largura crítica da região plastificada na ponta da fissura no modelo de Dugdale). Sobre esse tópico, podem-se consultar livros clássicos de mecânica da fratura como Kanninen e Popelar, 1985. A relação entre d_{eq} e o conceito de tamanho crítico introduzido por [Taylor, 2007] apresentado na propagação de trincas é evidente, isolando a deformação de falha crítica na expressão, obtêm-se.

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{G_f}{E d_{eq}}} \quad (3.17)$$

O número de fragilidade, proposto por Carpinteri, 1981, como uma medida do grau de ductilidade da estrutura pode ser reescrito utilizando as equações apresentadas no contexto da formulação LDEM, como apresentado na equação abaixo.

$$s = \sqrt{\frac{d_{eq}}{R}} \quad (3.18)$$

O índice de fragilidade s não considera apenas as propriedades do material, mas também o tamanho do meio elástico, representado pelo comprimento característico R . Como mostra o número de fragilidade pode ser definido como a raiz quadrada da razão entre o comprimento característico do defeito intrínseco do material que chamamos de d_{eq} e o comprimento característico do meio elástico.

Para compreender o significado do comprimento característico d_{eq} , pode-se considerar que, se durante o processo de fratura de um elemento cúbico, o processo de dano provocar um defeito maior que o comprimento característico d_{eq} , a trinca se propagaria de maneira instável. E para que aconteça a propagação de trinca em forma instável o comprimento característico da estrutura deve ser maior que o comprimento característico d_{eq} . Para aplicar este raciocínio estamos assumindo que o defeito é uma fissura que está abrindo por modo I para outras condições de contorno e modos a tendência de comportamento será a mesma, mas não tão direta.

Deformação limite, ε_r : é o valor de deformação para o qual o elemento cúbico não apresenta mais resistência, ponto B da Figura 3.2.

A relação entre a deformação limite e a deformação crítica é dada pelo coeficiente K_r .

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (3.19)$$

Onde

$$K_r = \left(\frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_d^f}{A_d} \right) \left(\frac{2}{L_d} \right) \quad (3.20)$$

É importante notar que, para garantir a estabilidade do método de dano, a condição $K_r > 1$, deve ser satisfeita Rocha e Riera, 1991 (a), Miguel, Iturrioz, e Riera, 2014. Essa condição

é imposta usando a restrição $L_d < L_{cr}$ de o comprimento cúbico mínimo estar associado ao fenômeno limite de utilização do material na forma.

$$L_{cr} = 2 d_{eq} \left(\frac{A_d^f}{A_d} \right) \quad (3.21)$$

Note também que, em contraste com a prática habitual em elementos finitos, a relação constitutiva no LDEM não é somente função das propriedades do meio elástico. A relação constitutiva do elemento cúbico apresentado na Figura 3.2 é definida em termos de parâmetros que dependem das propriedades do material e da discretização do modelo. Por essa razão, quando o nível de discretização do elemento cúbico é alterado, a lei uniaxial utilizada em cada treliça deverá ser modificada.

Uma segunda característica interessante do método é que, embora utilize uma lei de dano escalar para descrever o comportamento uniaxial dos elementos, o modelo global leva em consideração o dano anisotrópico, devido ao fato de que os elementos são orientados em diferentes direções espaciais, que pode atribuir diferentes módulos de elasticidade para o meio elástico [Iturrioz, Riera e Miguel, 2011].

3.3 Distribuição aleatória dos parâmetros do material

Iturrioz I., Riera, Miguel e Kostascki, 2011, Miguel, Iturrioz e Riera, 2010, modelaram a aleatoriedade do material considerando G_f como um campo aleatório com uma função densidade de Weibull do tipo III caracterizado por uma média de $\mu(G_f)$ e um coeficiente de variação $CV(G_f)$. A função de probabilidade acumulada é dada por,

$$F(G_f) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{G_f}{\beta} \right)^\gamma \right] \quad (3.22)$$

onde β e γ são parâmetros de escala e forma, respectivamente. O valor médio $\mu(G_f)$ e o coeficiente de variação $CV(G_f)$

Também é necessário considerar a função de correlação espacial (L_{cor}) da função aleatória de G_f [Miguel, Riera e Iturrioz, 2014 (a)]. Na presente versão do LDEM, a função de correlação é considerada constante, o que significa que o intervalo de comprimento da correlação $L_{cor} = 2 L_c$.

3.4 Perturbações geométricas no arranjo do modelo

Outra forma de introduzir aleatoriedade no modelo consiste em perturbar a malha. A introdução de perturbações geométricas no arranjo cúbico, gerado por pequenos deslocamentos iniciais de pontos nodais, também deve resultar em pequenas mudanças na rigidez dos elementos. Porém, assume-se que os coeficientes de rigidez do modelo LDEM permanecem inalterados devido a pequenas perturbações da malha. Além disso, a resposta linear do modelo deve permanecer inalterada dentro da gama de interesse [Miguel, Iturrioz e Riera, 2014] [Riera, Miguel e Iturrioz, 2014 (a)]. Basicamente, é assumido que os nós do modelo perturbado são deslocados da sua posição em um arranjo cúbico perfeito, definido pelas coordenadas nodais (x_n, y_n, z_n) , como indicado na equação abaixo:

$$(x_n + \xi_x(L_c), y_n + \xi_y(L_c), z_n + \xi_z(L_c)) \quad (3.26)$$

onde ξ_x , ξ_y e ξ_z são números aleatórios com distribuição normal, com média zero e coeficiente de variação CVp. L_c indica o comprimento dos elementos longitudinais no módulo cúbico básico.

O valor CVp que melhor se adapta aos resultados experimentais foi determinado por análise numérica sendo igual a 2,5%. A introdução desse tipo de perturbação na malha é fundamental para melhorar o desempenho do modelo em amostras modeladas submetidas à compressão.

3.5 Utilização do algoritmo

A metodologia descrita na seção anterior foi apresentada por Riera J. D., 1984, aplicado originalmente na instabilidade de cascas. A expressão explícita para determinar as rigidezes equivalentes foi desenvolvida para um modelo periódico de treliças espacial foi proposto por Nayfeh e Hefzy, 1978. Em Rocha 1991 foi incorporada ao modelo a possibilidade de simular a fratura e fragmentação adicionando uma lei constitutiva bilinear para as barras. A continuação se comenta brevemente alguns dos trabalhos desenvolvidos nos últimos anos com esta metodologia:

- Riera e Iturrioz, 1995, e Iturrioz e Riera, 1998, modelaram placas e cascas sujeitas a carregamento impulsivo.
- Riera, Dalguer, Irikura e Chiu, 2001, Dalguer, Irikura e Riera, 2003, Realizaram análises de sismos.
- Rios e Riera., 2004, Iturrioz, Riera e Miguel, 2008, Iturrioz e Riera, 2007, Iturrioz I. , Riera, Miguel e Kostascki, 2011, Kostascki, Iturrioz, e Riera, 2010,. Em Rios e Riera, 2004, estudaram o efeito de escala em estruturas de material quase frágil.
- Kostascki, Barrios D'ambra e Iturrioz, 2008, Kostascki, Iturrioz e Riera, 2010, Kostascki L. E., Iturrioz, Batista e Cislino, 2011, Kostascki, D'Ambra e Iturrioz, 2012, abordaram o cálculo de parâmetros fracto mecânicos estáticos e dinâmicos no Ldem e simulações do crescimento de trincas.
- Riera, Miguel e Iturrioz, 2011, estuda-se a aplicação de altas taxas de deformação em espécimes de concreto.
- Miguel, Iturrioz e Riera, 2010, foram analisadas problemas de independência de malha, no Ldem, em simulações de fratura dinâmica em materiais frágeis, além do efeito de escala.
- Iturrioz, Riera e Miguel, 2014, pequenas perturbações foram introduzidas na malha do Ldem, permitindo melhorar significativamente a capacidade de previsão do dano no modelo cúbico.
- Rodrigues, Birck e Iturrioz, 2016, analisou três clássicos índices de dano em materiais quase frágeis utilizando o método dos elementos discretos.
- Iturrioz, Lacidogna e Carpinteri, 2014, e Iturrioz, Lacidogna e Carpinteri, 2013, aplicaram o LDEM na simulação de eventos de emissão acústica.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo, exemplos em que a estabilidade estrutural está presente são apresentados, estudados e discutidos utilizando o método numérico formado por barras (LDEM). Primeiramente apresenta-se o estudo comparado das respostas de uma coluna sobre a qual se aplica uma excitação axial de compressão, como carga e como deslocamento prescrito, no extremo superior da mesma. Posteriormente se estuda a instabilidade dinâmica da mesma coluna submetida a um carregamento harmônico. Nestes casos serão apresentados os pontos de bifurcação, carga e frequência crítica, a trajetória de equilíbrio de pós flambagem, para diferentes combinações dos parâmetros que definem a excitação. Posteriormente se analisa o caso de uma placa, submetida à compressão e corte aplicados com deslocamento prescrito, apresenta-se a trajetória de equilíbrio de pós flambagem obtida. A influência das imperfeições na resposta estrutural também é investigada. Finalmente é apresentado um estudo preliminar realizado sobre um painel sanduiche composto por duas lâminas de material composto por resina e fibra de vidro com um núcleo de poliuretano expandido, submetido a um ensaio de flexão em três pontos. O tipo de colapso apresentado experimentalmente foi o descolamento da lâmina comprimida. Esta última aplicação é estudada utilizando diversos modelos, ilustrando uma aplicação de engenharia onde o colapso é governado pela interação entre flambagem e ruptura, onde o LDEM pode ser utilizado como ferramenta de análise.

4.1 Instabilidade Bifurcacional em Colunas

Como primeira aplicação, será analisada uma coluna bi rotulada, submetida a três condições de excitação.

- a) Deslocamento prescrito axial no extremo superior que produza compressão e força transversal no meio do vão para perturbar a coluna;
- b) Deslocamento prescrito axial no extremo superior maior que o crítico;
- c) Força axial compressiva aplicada no extremo superior.

Na Tabela 4.1 se apresentam os parâmetros necessários para realizar o estudo analítico desta aplicação. Os parâmetros obtidos a partir das propriedades geométricas e mecânicas primárias definidas são também apresentados.

Tabela 4.1 - Coluna: Propriedades geométricas físicas da estrutura, (P_E calculado com expressão (2.2), δ_E com expressão (2.3).)

E [GPa]	b [mm]	h [mm]	L [cm]	I [mm ⁴]	P_E [kN]	δ_E [mm]
200	8	5.1	10	88.4	17.4	0.21

Descrição do modelo numérico construído para realizar este estudo

Na Tabela 4.2, se apresentam os parâmetros adotados no teste realizado com o modelo dos elementos discretos, o tamanho do elemento cúbico L_c utilizado na discretização, a quantidade de módulos considerados em cada direção do modelo, o intervalo de integração, Δt , menor que o Δt_{cr} definido na Equação (3.7), o coeficiente de amortecimento viscoso, D_f , aplicado proporcional a massa, também especificado e definido de acordo com a Equação (3.6). Cabe salientar que as características elásticas consideradas para o material adotado estão definidas por um modulo de elasticidade longitudinal E indicado na Tabela 4.1, e um coeficiente de Poisson de 0.25. Desta forma, como foi explicado na seção 3 o modelo de elementos discretos permite representar a situação de modelar um material elástico e isotrópico.

Tabela 4.2 - Coluna: Variáveis inseridas no algoritmo numérico.

L_c [mm]	N_x, N_y, N_z	Δt [s]	D_f [1/s]
1.7	6,4,61	1.8×10^{-7}	3×10^4

Os parâmetros relacionados ao comportamento não linear físico do modelo não são especificadas, pois eles não serão ativados nestas aplicações. Na Figura 4.1 se apresenta um esquema do modelo utilizado, onde são indicadas as condições de contorno empregadas em cada caso, desta forma estão sendo simuladas as condições de contorno da coluna de Euler bi-rotulada apresentadas na Figura 2.3, apoio fixo, reações em y e z , na extremidade inferior, e apoio móvel, reação em y na extremidade superior.

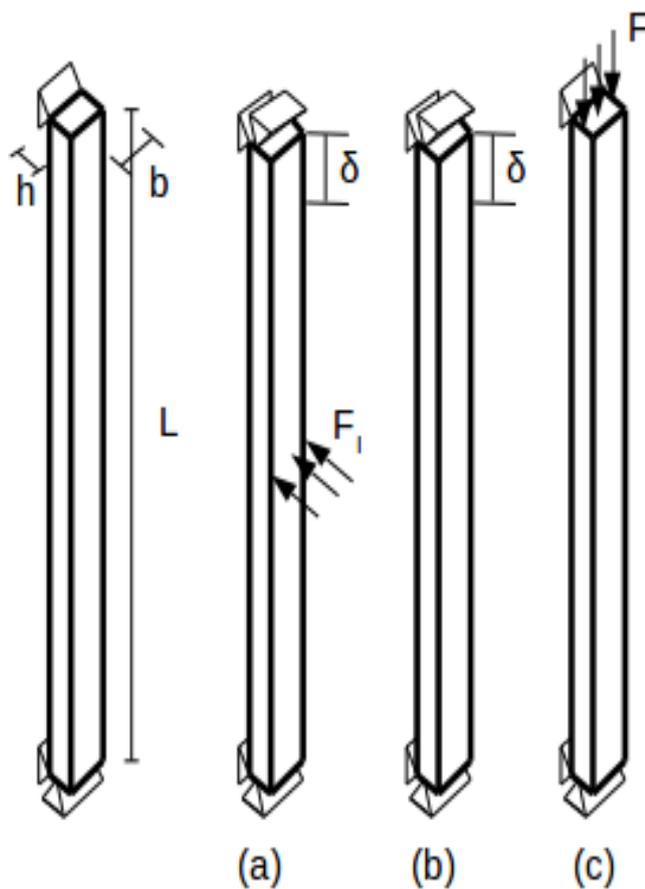


Figura 4.1 - Descrição da coluna bi rotulada a ser analisada, (a) se aplica um deslocamento prescrito δ e se perturba a coluna com uma pequena força transversal F_i , (b) se aplica deslocamento prescrito vertical, (c) se aplica uma força na direção vertical.

No primeiro teste adiciona-se a estrutura um deslocamento prescrito axial no extremo superior, assim como uma força transversal impulsiva no meio do vão. No segundo teste, é adicionado somente deslocamento prescrito superior, assim como no último caso é adicionada a estrutura força compressiva no extremo superior.

(a) Deslocamentos Prescritos e perturbação produzido por uma Força Transversal no meio do vão.

Consiste em aplicar na coluna, além das condições de contorno indicadas na Figura 4.1, um deslocamento axial no apoio superior até diferentes patamares, para explorar o comportamento do modelo na sua transição do equilíbrio estável ao instável. Uma perturbação

produzida por uma força transversal aplicada no meio da coluna permite verificar se a estrutura retorna a posição de equilíbrio (condição de equilíbrio estável), ou perde o equilíbrio (condição de equilíbrio instável).

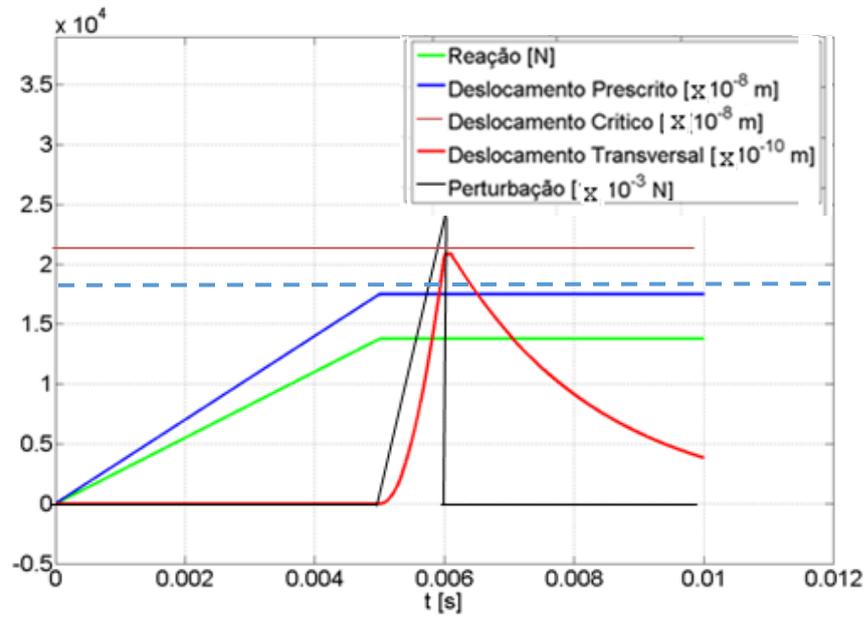
São aplicados três níveis de deslocamentos, maior, menor e aproximadamente igual ao crítico (ver Tabela 4.1), posteriormente se perturba o sistema com uma força transversal como se indica na Figura 4.1, e verifica-se a estrutura retorna ou não a situação de equilíbrio estável.

Resultados

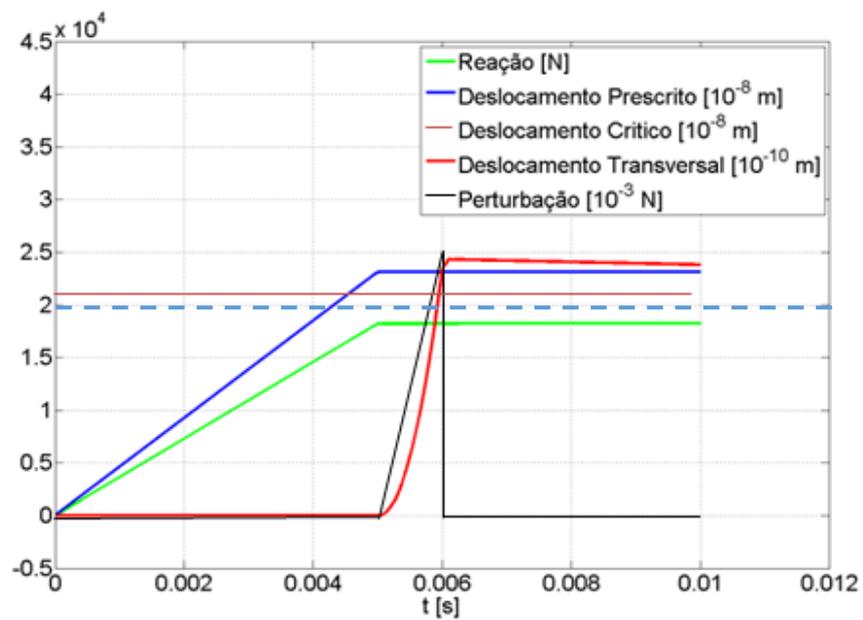
Os resultados mostram que a coluna modelada no LDEM verifica o comportamento esperado:

- Condição de equilíbrio estável: Na Figura 4.2(a), o deslocamento transversal no meio do vão retorna a sua posição original após aplicar uma força transversal no meio do vão como perturbação na coluna. Neste caso se aplica sobre a coluna um deslocamento prescrito axial que solicita a coluna com uma tensão de compressão subcrítica.
- Condição de equilíbrio neutro: Na Figura 4.2(b) o deslocamento transversal no meio do vão permanece na magnitude produzida pela perturbação da força lateral. Neste caso se aplica sobre a coluna um deslocamento axial que solicita a coluna com uma tensão de compressão igual a crítica.
- Condição de equilíbrio instável: Na Figura 4.2(c) o deslocamento transversal no meio do vão continua aumentando após aplicar e retirar a perturbação da força lateral. Neste caso se aplica sobre a coluna um deslocamento axial que solicita a coluna com uma tensão de compressão maior que a crítica. Se pode observar que no caso de equilíbrio instável a reação atinge um valor superior ao carga crítica de Euler, para entender isto se deve ter em conta que a simulação realizada é dinâmica e que a situação de instabilidade estática será prevista em valores de tempo posteriores da simulação, na Figura 4.3 para condições de contorno similares foi se ilustra como para valores posteriores da simulação a situação Reação= PE atingida.

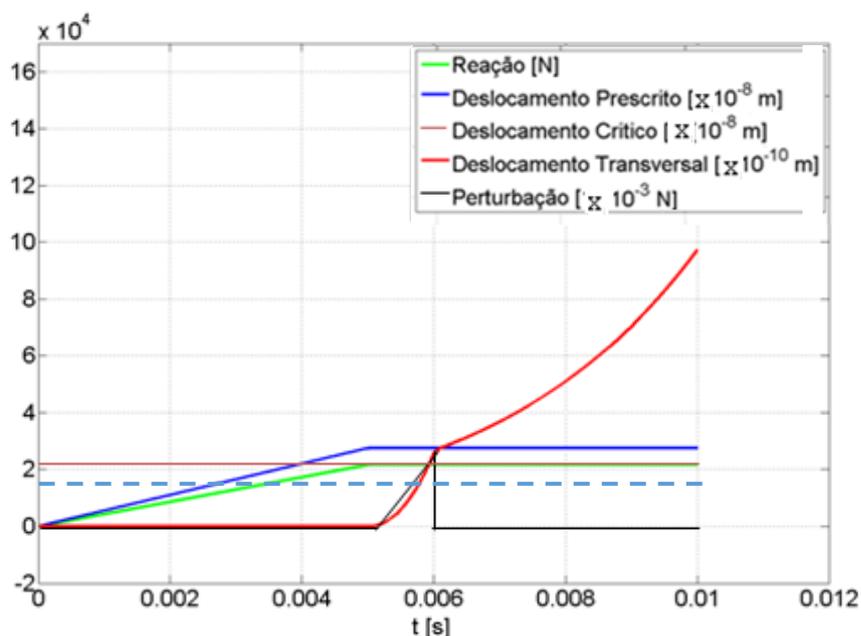
Na Figura 4.2 se apresenta o valor dos deslocamentos axiais aplicado no extremo superior da coluna bi rotulado, os deslocamentos transversais obtidos no meio da coluna, quando excitados por força transversal de perturbação, assim como o valor da reação.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2 - Coluna: (a) Condição de Equilíbrio Estável (b) Condição de Equilíbrio Neutro (c) Condição de Equilíbrio Instável. Note que as unidades do eixo vertical para cada caso estão indicadas nas legendas de cada figura. Em linha tracejada se indica a carga crítica teórica $PE = 1.7 \times 10^4$ N (Tabela 4.1)

Como era esperado, percebe-se que quando aplicado deslocamento axial prescrito menor que o crítico, a estrutura retorna a posição de equilíbrio, quando aplicado o deslocamento prescrito aproximadamente igual ao crítico, a estrutura se mantém na posição deformada imposta pela perturbação, e quando aplicamos um deslocamento prescrito maior que o crítico, a estrutura sai da configuração na qual se encontrava.

(b) Deslocamento prescrito axial no extremo superior maior que o crítico;

Neste caso se aplica um deslocamento prescrito levemente superior ao necessário para a condição de flambagem, esta condição foi aplicada com uma velocidade baixa suficiente para não produzir efeitos de inercia na coluna (0.05 m/s) até atingir o deslocamento de $u = 0.275$ mm, calculado pela Equação (2.2), posteriormente este deslocamento é mantido constante, utilizou-se deste valor por ser acima do crítico.

Neste caso não foi introduzido nenhuma força transversal de perturbação, assim como nenhuma perturbação geométrica no arranjo do modelo. Os parâmetros que definem o modelo são apresentados na Tabela 4.2.

Resultados

Na Figura 4.3 se apresenta o valor da reação axial a variação do deslocamento axial aplicado e a variação do deslocamento transversal durante o processo simulado.

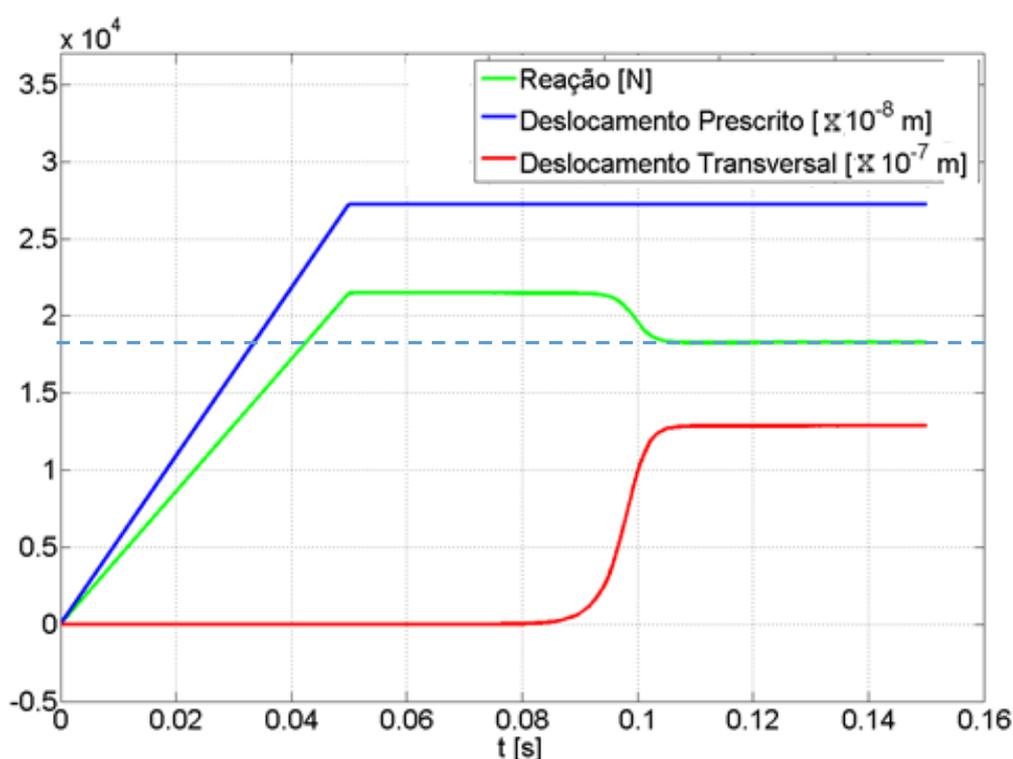


Figura 4.3 - Coluna: Deslocamento Prescrito Axial: Reação e Deslocamento Transversal. Em linha tracejada se indica a carga crítica teórica $PE=1.7 \times 10^4$ N (Tabela 4.1)

O deslocamento prescrito axial crítico, dado pela equação 2.3, é de 0.21mm. O aplicado é de 0.27 mm o qual gera uma força de reação no modelo numérico, inicialmente de 21.5 kN. Quando o deslocamento transversal devido a flambagem da coluna se desenvolve totalmente ele tem um valor de 1.28 mm e esta nova configuração diminui o valor da reação de 21.5KN para 18.2KN próximo do valor da carga crítica determinado pela Equação (2.2) que é de 17.4KN.

Na Figura 4.4 se apresenta o balanço de energia calculado com o modelo de elementos discretos que se produz durante a flambagem da coluna, se pode perceber que quando a coluna flamba a energia elástica diminui e temos um aumento da energia cinética que deixa em evidencia a característica dinâmica do fenômeno de instabilidade acontecido. É importante salientar que como deslocamentos prescritos estão sendo aplicados a flambagem fica restrita ao deslocamento aplicado. Os valores de energia elástica, cinética e as energias dissipadas se houver são calculadas no modelo em cada tempo de integração.

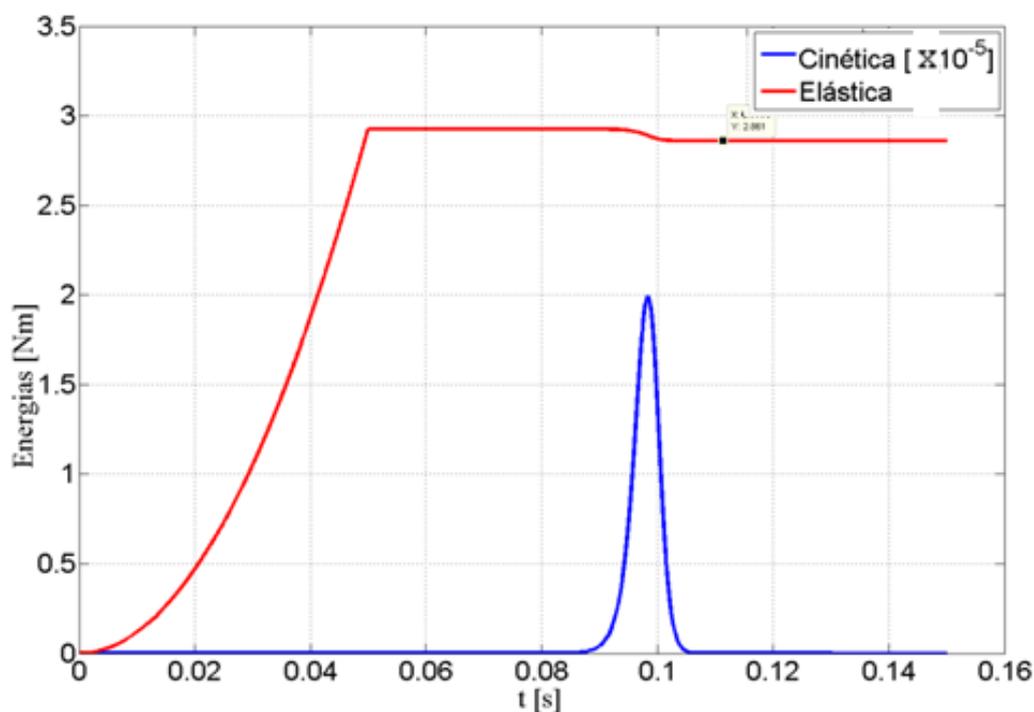


Figura 4.4 - Coluna: Deslocamento Prescrito Axial: Energia Elástica e Cinética

Na Figura 4.4 se pode perceber como a configuração de flambagem muda para uma que consuma menos energia elástica e que esta mudança é produzida dinamicamente pois no modelo numérico utilizado a equação que governa o problema em estudo é a equação de movimento apresentada na Equação (3.4).

A resposta estrutural dada pela força de reação e pelo deslocamento transversal durante a flambagem é apresentada na Figura 4.5, neste caso, o valor da reação diminui à medida que o deslocamento horizontal no meio do vão aumenta, caracterizando a condição de pós-flambagem. A resposta é comparada com a expressão da trajetória pós flambagem obtida em forma analítica apresentada no Apêndice A.

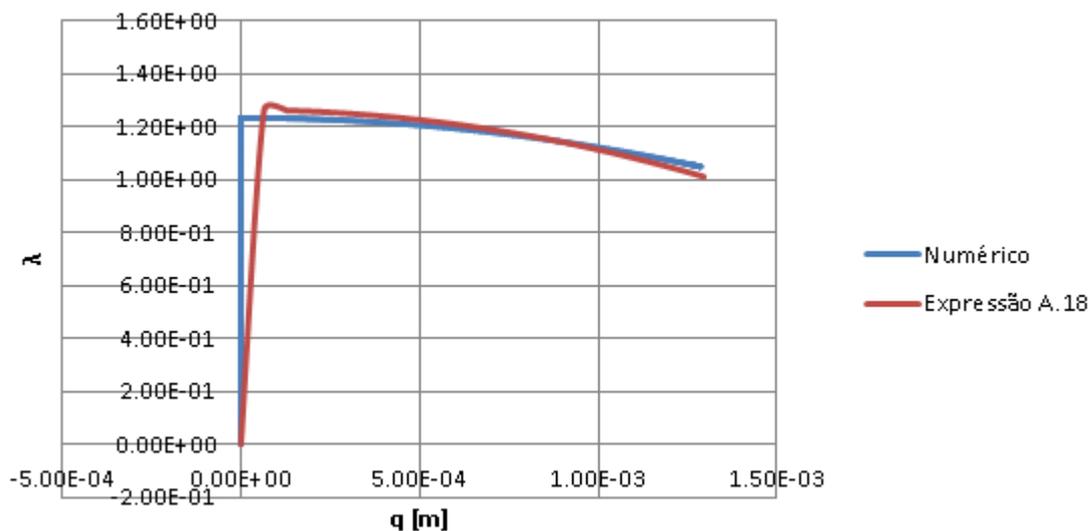


Figura 4.5 - Coluna: Deslocamento Prescrito Axial: Resposta Estrutural, onde q representa o deslocamento transversal no meio do vão e λ a reação medida no apoio dividida P_E .

Ao aplicar um deslocamento prescrito no extremo superior da coluna, a qual gerou uma força de compressão no valor de 22 kN ($\lambda=1.22$ na Figura 4.5) leva em conta a análise da instabilidade considerando o problema como não linear geométrico). A Equação (A.18) é definida no Apêndice A.

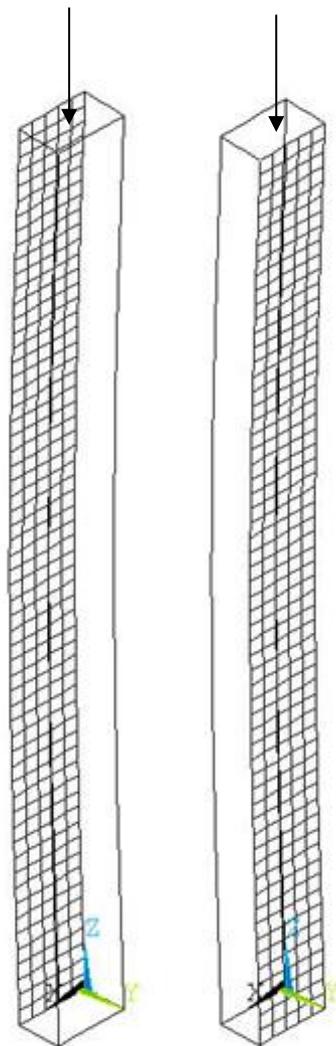


Figura 4.6 - Configuração da Coluna sobre a qual se aplica um deslocamento axial maior que o crítico.

Na Figura 4.6 se apresenta a deformada obtida com o DEM para o caso da coluna axial sobre a qual se aplica um deslocamento axial superior ao crítico.

(c) Força axial compressiva aplicada no extremo superior.

Neste caso, se aplica sobre o modelo apresentado na Figura 4.1, uma carga prescrita axial de compressão na máxima velocidade de carga para que não produza forças de inercias significativas na análise (1.1×10^7 N/s), como se verifica na Figura 4.8 a energia cinética se mantém em patamares muito baixos até se produzir a flambagem. Chegando a uma carga de 21 kN carga que permanece constante (superior a carga crítica analítica (17.4 kN) definida na Tabela 4.1).

Resultados

Na Figura 4.7 apresenta-se a força de reação, o deslocamento axial e o deslocamento transversal, no caso analisado.

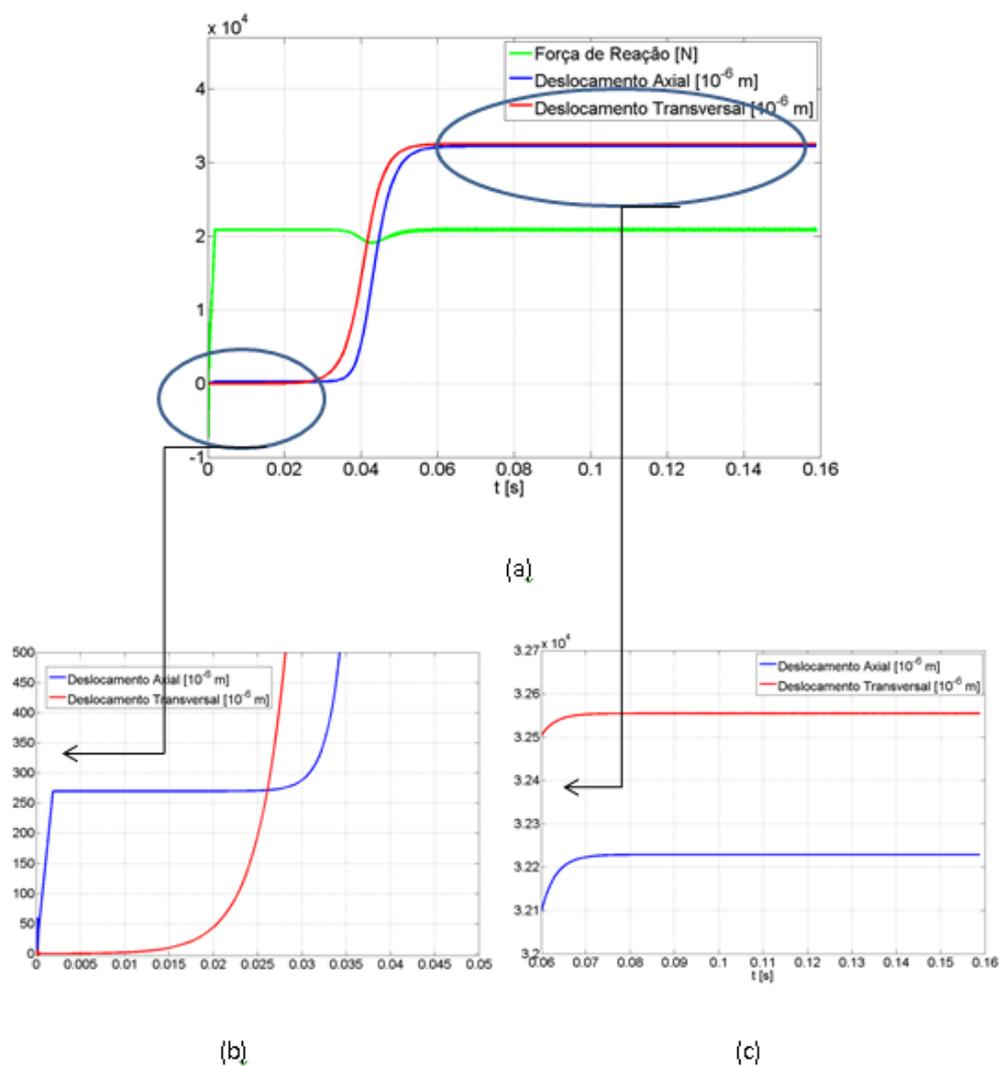


Figura 4.7 - Coluna: Reação Axial: Deslocamento Axial, Deslocamento Transversal

Neste caso, o deslocamento transversal inicia-se quando o carregamento máximo é atingido. O retardo no início do deslocamento transversal se dá pelo amortecimento viscoso que foi introduzido no modelo (ver D_f na Tabela 4.2). O deslocamento transversal dado pela equação 2.4, é no valor de 0.042 m, e o obtido com a simulação é de 0.033 m.

Na Figura 4.8, apresenta-se o balanço energético obtido na simulação. Se pode perceber como após a flambagem a coluna acumula muita mais energia de deformação. Também se pode ver como a passagem de uma configuração a outra é dinâmica, por isso o sensível aumento da energia cinética. Por outro lado se consideramos que a rigidez da viga a flexão, considerando como entrada uma carga pontual e como saída o deslocamento no meio do vão será $K=(48EI/L^3)$, substituindo com parâmetros fornecidos na tabela 1, e considerando a massa da coluna e possível calcular a frequência fundamental de vibração da viga em 821Hz. Se consideramos que a mudança de configuração acontece num tempo de 0.01 s, que corresponderia a excitar frequências de 100Hz-200Hz vemos que a excitação não estaria ativando a frequência fundamental da viga analisada. Também na Figura 4.9 é possível observar que o amortecimento fornecido ao sistema cancela oscilações locais na energia elástica.

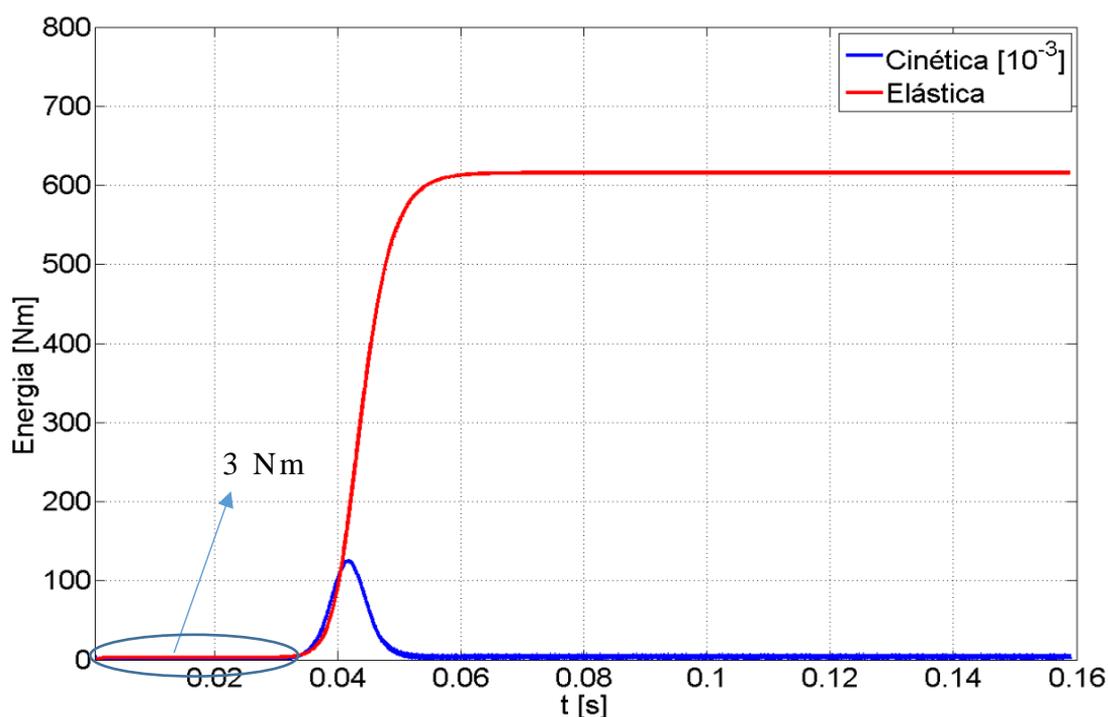


Figura 4.8 - Coluna: Força Prescrita Axial: Energia Elástica e Cinética.

Na Figura 4.9 se observa a relação entre a força de reação normalizada e a força de flambagem $P_E(\lambda)$ vs. o deslocamento transversal obtido no meio do vão q . Note que o deslocamento transversal pós-flambagem, mostra um comportamento similar ao apresentado pela expressão teórica, apresentada na Equação (2.4).

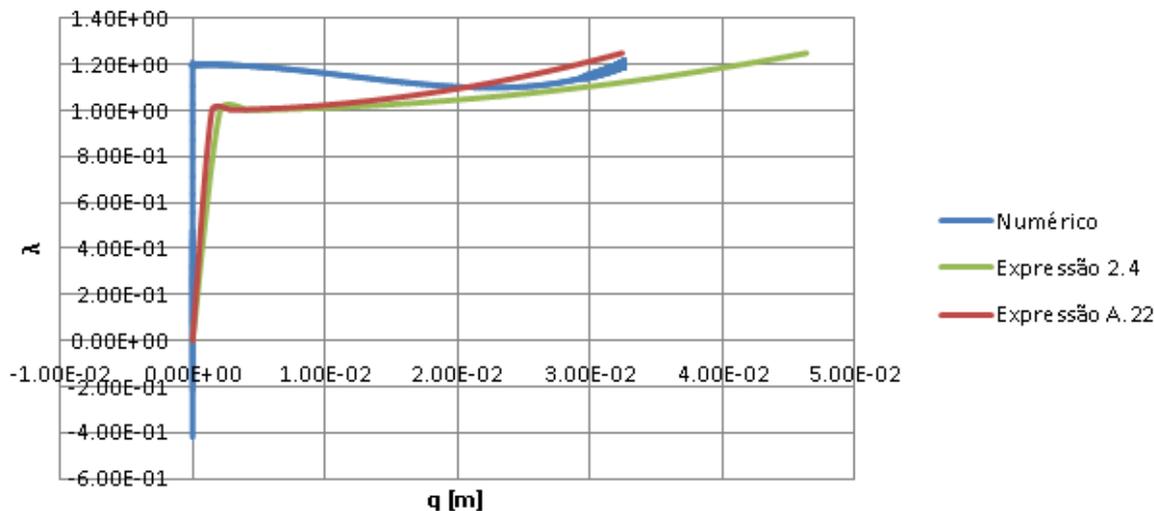


Figura 4.9 - Coluna: Força Prescrita Axial: Resposta Estrutural em termos do λ e do deslocamento transversal no meio do vão.

Onde λ , λ , é igual ao P/P_E , a força aplicada é de 21 kN, onde λ é aproximadamente 1.2. Com a aplicação de uma força axial maior que a crítica acontece a instabilidade estrutural. Na mesma Figura 4.9 se apresenta os resultados teóricos para a configuração pós-flambagem apresentado na Equação (2.4) e o desenvolvido na Equação (A.22).

Note na mesma figura que no eixo horizontal o valor máximo de q [m] foi de 3,4 cm sendo que o comprimento da viga e de 10 cm, sendo que para estes grandes deslocamentos a influência da não linearidade geométrica nos resultados será considerável. A diferença entre o valor numérico e experimental se deve a carga aplicada maior que a de flambagem, mas é possível verificar que as três curvas tem a mesma forma. Um estudo de sensibilidade dos fatores que influenciam nestes gráficos será um dos temas a desenvolver como continuação deste trabalho.

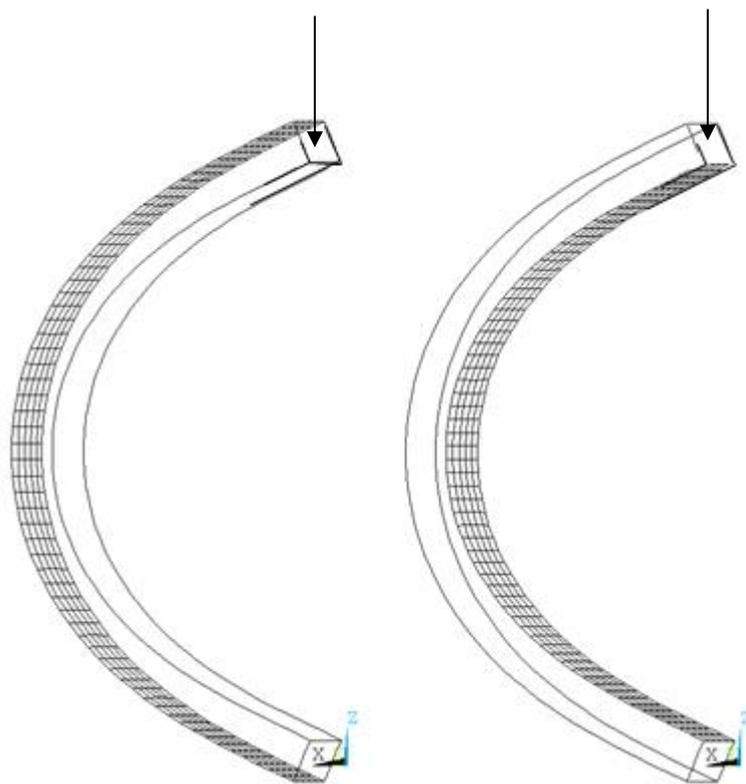


Figura 4.10 - Força Prescrita Axial: Coluna após flambagem

Na Figura 4.10, apresenta-se a estrutura após a ocorrência de flambagem, causada pela força prescrita.

4.2 Instabilidade Dinâmica em Colunas

Como segunda aplicação será analisada uma viga bi rotulada submetida a duas condições de excitação.

- (a) Força harmônica compressiva na extremidade superior com frequência de excitação dentro da região de instabilidade. (Ponto A na Figura 2.9b e na Figura 4.11).
- (b) Força harmônica compressiva na extremidade superior com frequência de excitação fora da região de instabilidade. (Ponto B na Figura 2.9b e na Figura 4.11).

Na Figura 2.9.a se apresentam as condições de contorno da viga estudada. A região na qual o sistema entra em ressonância e indicada no domínio P vs Ω/ω na Figura 2.9 (b).

Na Figura 4.11 se apresenta também as duas condições estudadas (pontos A e B indicados).

Os pontos A e B são obtidos quando se aplica na coluna uma relação de cargas, definida na Equação (2.13) de 0.17, assim como uma relação entre a frequência de excitação e a frequência natural de vibração da coluna sob carga axial, de 1.93 para o ponto A, e 1.43 para o ponto B.

Tabela 4.3 - Parâmetros e propriedades físicas e mecânicas da viga sob instabilidade dinâmica

E [GPa]	ρ [kg/m ³]	b [mm]	h [mm]	L [cm]	P_E [N]	w_r [rad/s]
200	7830	0.4	0.24	0.49	37.9	1.23×10^5

Na Tabela 4.3 P_E é calculado com a Equação (2.2) e w_r e a frequência de ressonância, definida pela Equação (2.18).

Um esquema da estrutura aqui estudada está representada na Figura 2.9.a, A força de excitação é aplicada no extremo superior da viga. O deslocamento transversal é medido no meio do vão (Ver Figura 4.1).

O modelo implementado no algoritmo LDEM tem suas propriedades e parâmetros apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Parâmetros do modelo numérico utilizados no problema de instabilidade dinâmica analisado;

L_c [mm]	N_x, N_y, N_z	Δt [s]
0.085	6,4,61	1.6×10^{-10}

A excitação harmônica e as forças aplicadas na estrutura são apresentadas.

$$\begin{aligned}
 P(t) &= P_0 + P_t \cos \Omega t \text{ [N]} \\
 P_0 &= 10 \text{ [N]} \\
 P_t &= 10 \text{ [N]}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Para a verificação da ocorrência do ponto de bifurcação causado pela instabilidade aplicam-se três carregamentos divididos em três intervalos de tempo.

Primeiramente aplica-se P_0 .

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= \alpha_A t \text{ se } t \leq t_A \\
 P_0(t) &= \alpha_A t_A \text{ se } t > t_A
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Onde $t_A = 1.0 \text{ E-6 [s]}$, e $\alpha_A = 1.0 \text{ E+7 [N/s]}$. A parcela harmônica da excitação P_t foi aplicada como se indica a seguir:

$$\begin{aligned}
 P_t(t) &= 0 \text{ se } t < t_A \\
 P_t(t) &= \alpha_B(t - t_A) \cos(\Omega t) \text{ se } t < t_B \\
 P_t(t) &= \alpha_B(t_B - t_A) \cos(\Omega t) \text{ se } t \geq t_B
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Onde $t_B = 2.0 \text{ E-6 [s]}$, e $\alpha_B = 1.0 \text{ E+7 [N/s]}$. Após $t \geq t_B$ a carga axial aplicada de compressão se pode expressar.

$$P(t) = 10 + 10 \cos(\Omega t) [N] \tag{4.4}$$

Sendo aplicada parcialmente nos nós, a fim de contabilizar um carregamento axial com este valor. Foram testados dois casos

$$\Omega(A) = 2.5 \times 10^5 \text{ rad/s} \qquad \Omega(B) = 1.7 \times 10^5 \text{ rad/s} \tag{4.5}$$

O deslocamento transversal para os dois casos são apresentados.

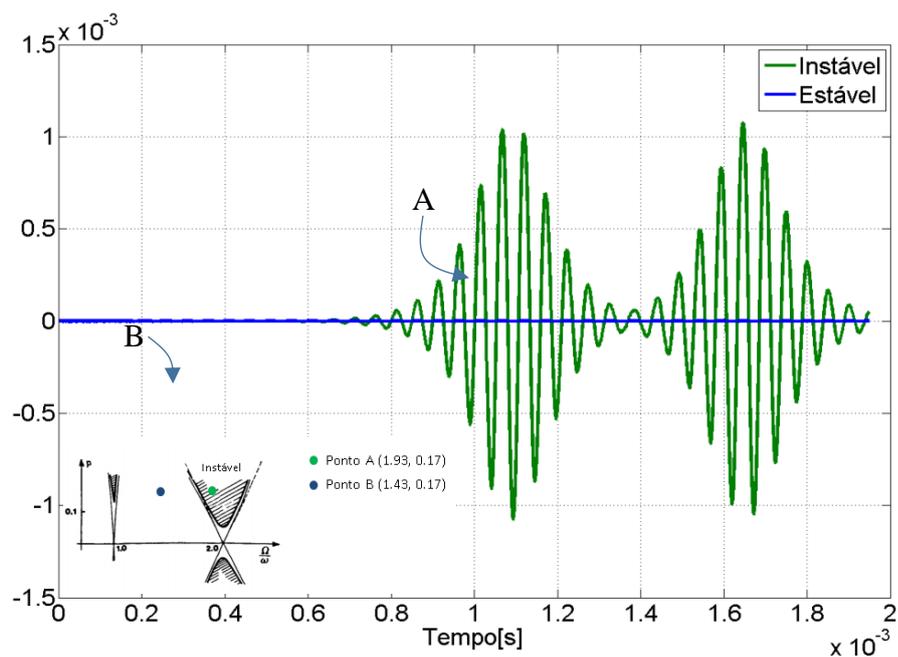


Figura 4.11 - Instabilidade dinâmica: Deslocamento Transversal, para os pontos A e B.

Para o caso instável, (A), na Figura 4.12 se apresenta o deslocamento axial junto com o deslocamento transversal no meio do vão.

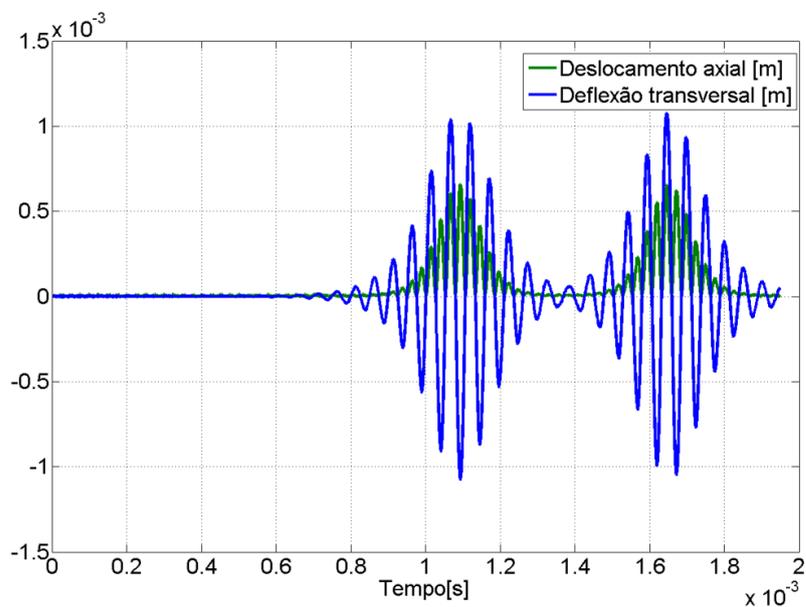


Figura 4.12 - Instabilidade dinâmica. Deslocamento Axial e Transversal para o caso instável (A).

Também na região instável (caso A) a energia de deformação elástica e a energia cinética são apresentadas na Figura 4.13.

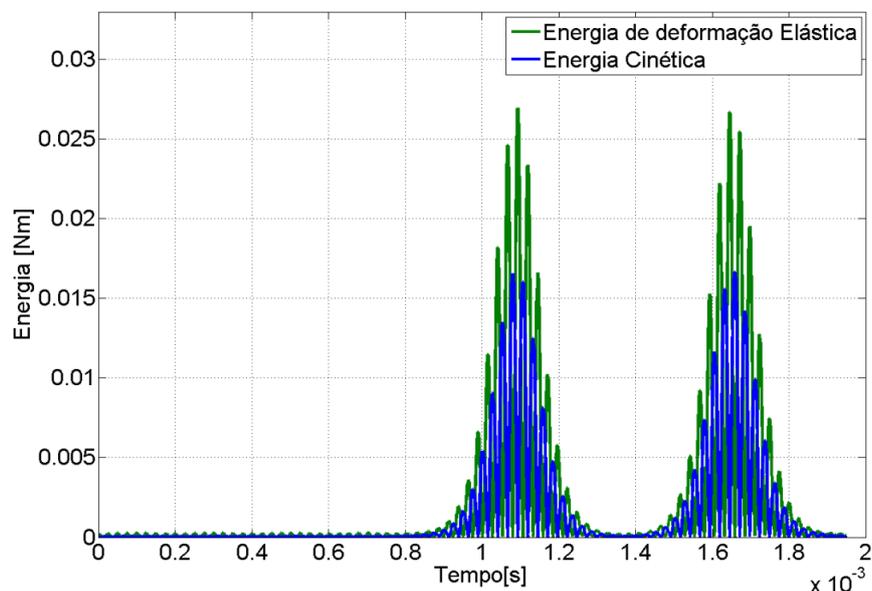


Figura 4.13 - Instabilidade Dinâmica: Energia Elástica e Cinética para o caso instável (A)

Para a condição de excitação A, onde a frequência de excitação imposta é aproximadamente o dobro da frequência de ressonância da coluna, o deslocamento transversal é de 1.1 mm, sendo que no caso da condição B, onde se impôs uma frequência de excitação de 1.43 vezes a frequência de ressonância da coluna sob carga compressiva, o deslocamento transversal ocorrido é nulo.

4.3 Instabilidade bifurcacional em Placas

Se a analisa a seguir uma placa apoiada nas quatro bordas, submetida a dois tipos de carregamentos a seguir especificados:

Os tipos de solicitações analisadas foram

- a) Deslocamento prescrito axial na borda superior, induzindo tensões axiais compressivas sob a placa.
- b) Deslocamento de corte aplicada nas quatro bordas induzindo tensões de cisalhamento sob a placa. Neste caso foi também investigado a influência de imperfeição na malha do modelo (foi introduzida como imperfeição a perturbação da treliça regular nas coordenadas aleatória com media zero e coeficiente de variação

CVp=2.5% (ver Tabela 4.6)). Detalhes de como estas imperfeições são introduzidas são explicadas no Capítulo 3 desta dissertação.

Na Tabela 4.5 se apresentam os parâmetros necessários para realizar o estudo analítico dos dois carregamentos aplicados.

Tabela 4.5 - Placa: Propriedades geométricas e físicas.

E [Pa]	b [m]	t [m]	p_{1cr} [N/m]	p_{2cr} [N/m]
2.0×10^{11}	8.0×10^{-2}	6×10^{-3}	23.68×10^6	55.37×10^6

A p_{1cr} é a carga distribuída que produz a flambagem da placa para o caso de força axial de compressão, utilizando a Equação (2.7) com o coeficiente de flambagem adequado para o caso analisado ($K=4$) o valor teórico obtido para o $p_{cr1}=23.68\text{MN/m}$, No caso de corte puro foi também calculado com a Equação (2.7) com um coeficiente $K=9.35$ e o valor teórico é $p_{2cr}=55.37\text{MN/m}$ neste caso. Se observa que estes valores (p_{1crit}, p_{2crit}) são muito elevados devido ao pequeno índice de esbeltez da placa (b/t). Como o modelo não considera a possibilidade da estrutura plastificar ainda é possível avaliar valores de tensões elevados. A instabilidade do sistema no caso de estudar uma placa metálica destas dimensões seria a plastificação. Um esquema da estrutura aqui estudada foi apresentado na Figura 2.6 onde as condições de contorno para os dois casos estudados são apresentados. Foi também neste caso considerado um amortecimento no sistema para manter o controle dos efeitos dinâmicos.

Tabela 4.6 - Placa simulada com o modelo LDEM: Propriedades do modelo numérico.

L_c [mm]	N_x, N_y, N_z	Δt [s]	Cvp [%]
2	4,41,41	2.3×10^{-8}	0.025

Os parâmetros relacionados à ruptura do material não foram introduzidos neste caso, pois se está verificando só o comportamento da instabilidade do sistema, sem ter como interesse verificar seu colapso. Já as imperfeições foram introduzidas a fim de verificar a mudança da resposta estrutural.

Na Figura 4.14 se apresenta um esquema do modelo utilizado, onde são indicadas as condições de contorno empregadas em cada caso, desta forma estão sendo simuladas as

condições de contorno da placa apoiada nos quatro bordas, conforme apresentadas na Figura 2.6.

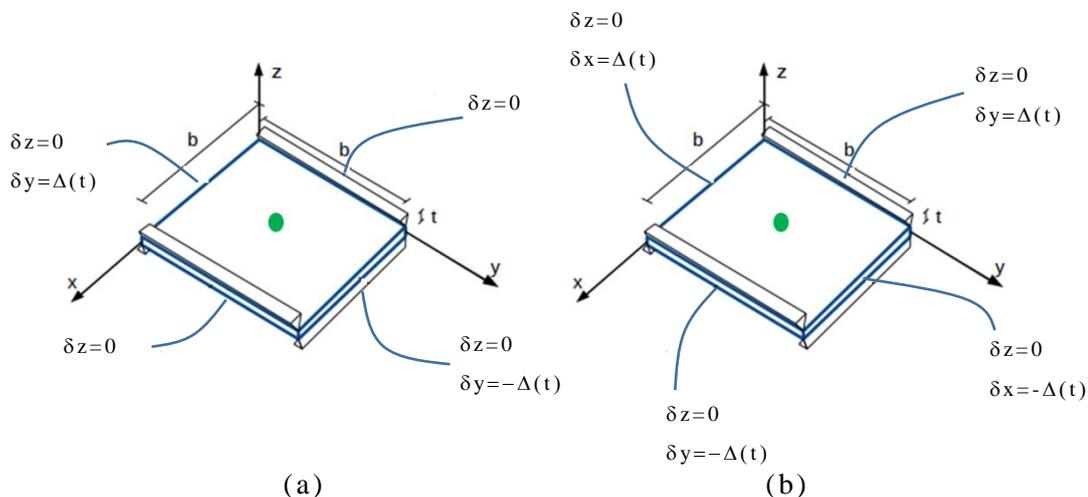


Figura 4.14 - Placa apoiada em seus 4 bordas (a) no caso de flambagem produzida por tensões de compressão numa direção. (b) no caso de flambagem produzida por tensões de corte.

(a) *Deslocamento Prescrito Axial*

Foi aplicado um deslocamento prescrito levemente superior ao necessário para a condição de flambagem, esta condição foi aplicada com uma velocidade de 0.05 m/s até atingir o deslocamento de $u=2.1$ mm, calculado pela Equação (2.2), posteriormente este deslocamento é mantido constante.

Neste caso não foi introduzido nenhuma força transversal de perturbação

Resultados

Na Figura 4.15 se apresenta o valor da reação axial a variação do deslocamento axial aplicado e a variação do deslocamento transversal no centro da placa durante o processo simulado.

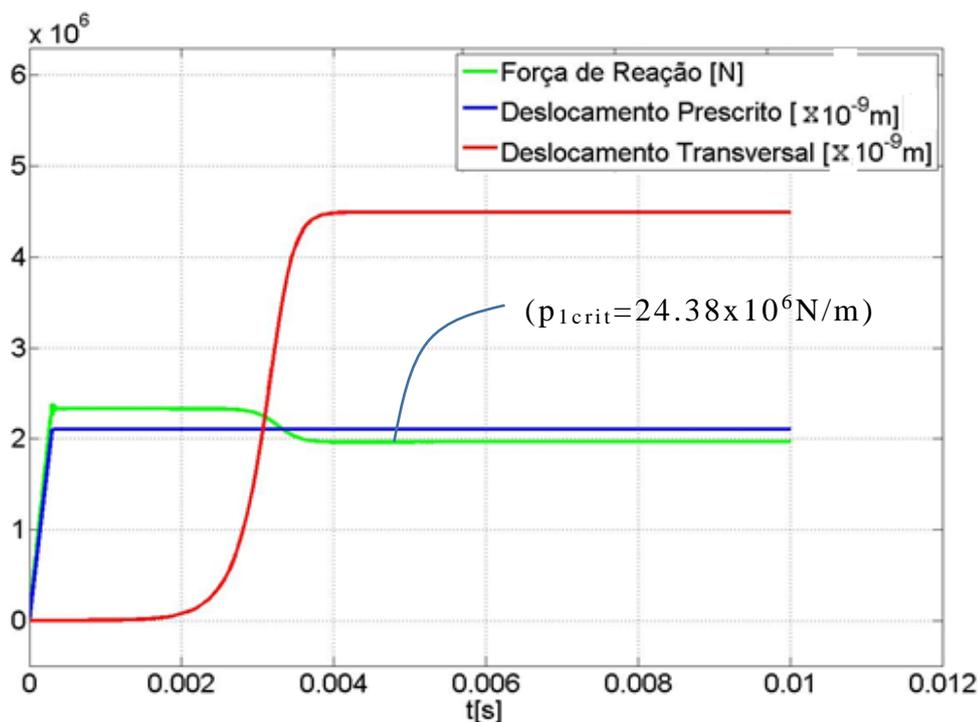


Figura 4.15 - Placa, Deslocamento Prescrito Axial: Reação, Deslocamento Transversal. As unidades do eixo horizontal estão indicadas na legenda.

A reação indicada corresponde a soma de todas as forças produzidas numa borda da placa. Para facilitar a comparação na Figura 4.15 se indicou o valor da reação em termos da carga distribuída crítica p_{1cr} [N/m] comparável com o valor teórico apresentado na tabela 5. Se pode observar que os valores obtidos na simulação apresentaram coerência com os definidos analiticamente com a Equação (2.7) apresentados na Tabela 4.5.

Ao modelo numérico é aplicado um deslocamento prescrito de 2.1 mm, sendo que com este a força de reação é de 2.4 MN. Após a ocorrência da instabilidade estrutural, e quando a deflexão transversal no meio da placa, ponto verde na Figura 4.11, atinge o seu valor máximo, a força de reação apresentada pelo modelo numérico é de 1.9 MN. O deslocamento transversal máximo obtido com o modelo foi de 4.49 mm.

Na Figura 4.16 se apresenta as energias contabilizadas pelo algoritmo durante a simulação do processo, note como quando a estrutura flamba e muda de configuração de equilíbrio a quantidade de energia elástica acumulada na placa passa a um valor menor. Neste caso a influência da passagem da configuração original a outra configuração de equilíbrio se produzir num curto espaço de tempo e não tem produz efeitos de inercia consideráveis, pois a energia cinética avaliada durante a simulação se manteve em patamares muito baixos se comparada a energia elástica.

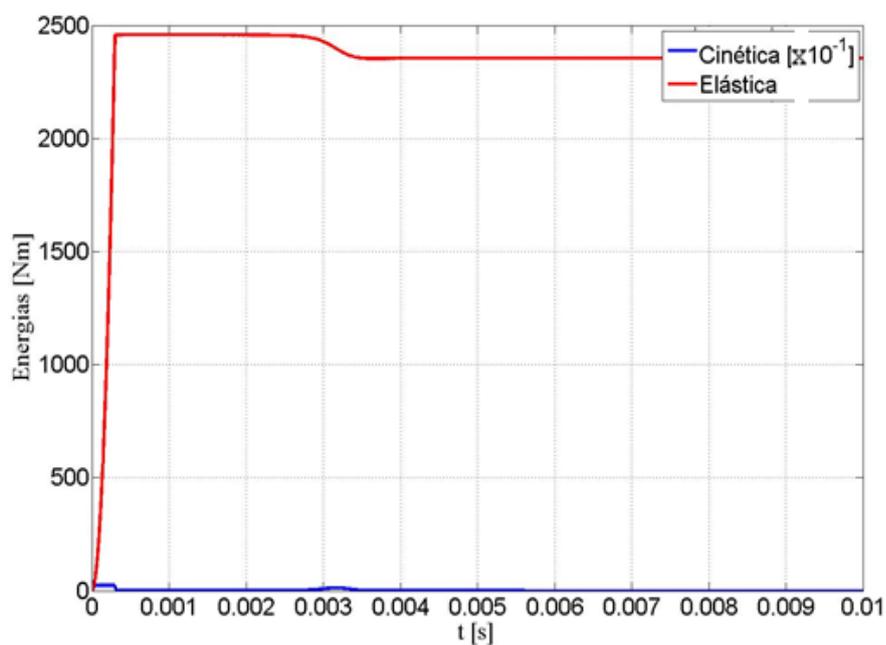


Figura 4.16 - Placa: Deslocamento axial prescrito: Energia Elástica e Cinética

A resposta estrutural dada pela força de reação e pelo deslocamento transversal durante a flambagem é apresentada na Figura 4.17.

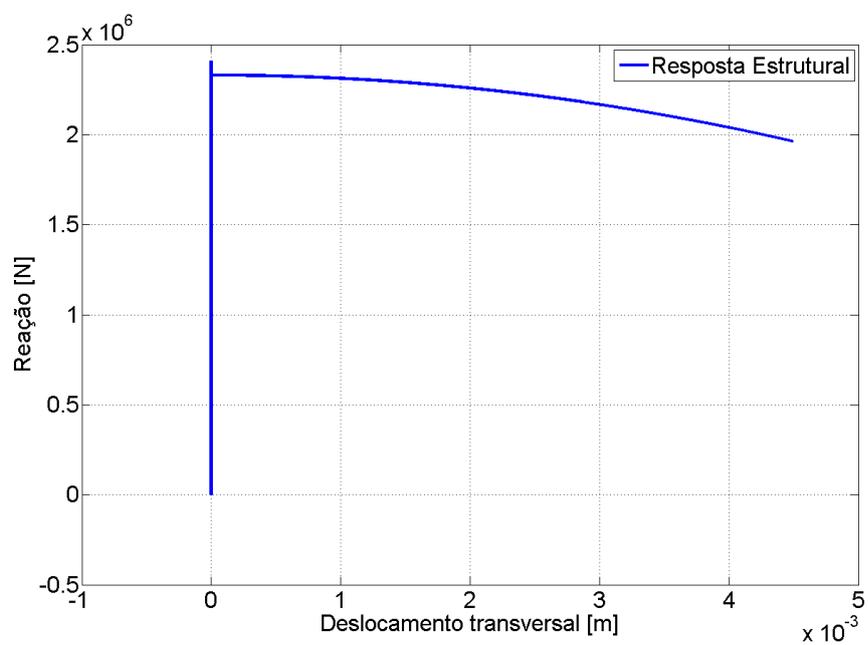


Figura 4.17 - Placa. Deslocamento axial prescrito: Resposta numérica.

Neste caso, o valor da reação diminui à medida que o deslocamento horizontal no meio do vão aumenta, caracterizando a condição de pós- flambagem.

Na Figura 4.18, apresenta-se a configuração deformada da estrutura após a flambagem obtida com o modelo do LDEM e se compara a mesma com uma fotografia de uma estrutura metálica que flamba com condições de contorno similares.

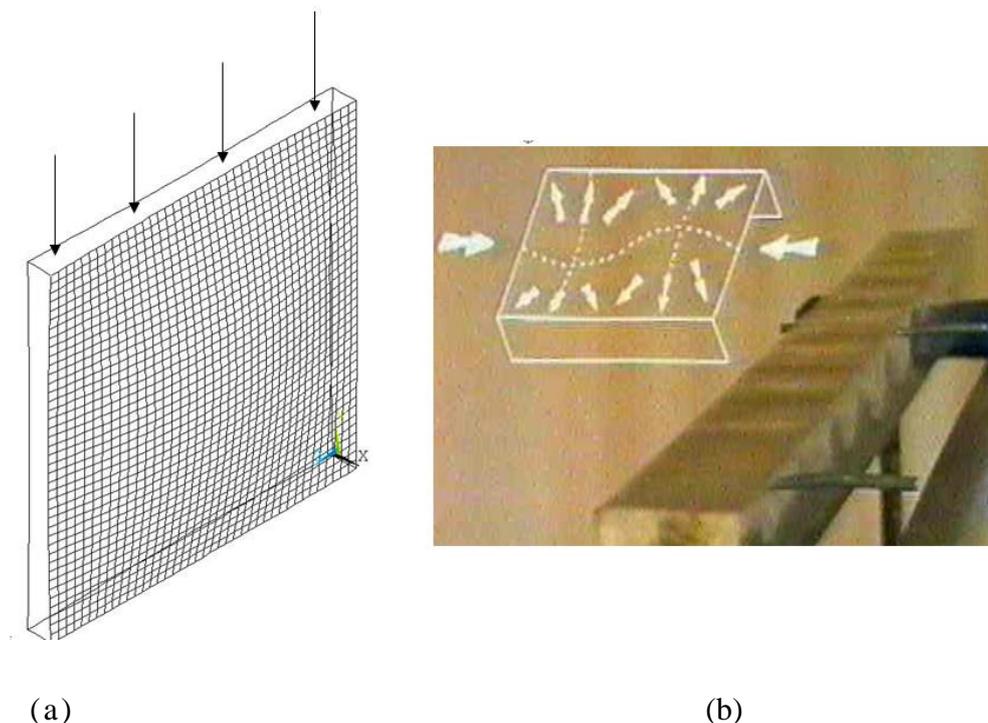


Figura 4.18 - Flambagem placa simplesmente apoiada submetida a compressão numa direção (a) configuração de flambagem obtida na simulação com o LDEM. (b) ensaio que ilustra flambagem de placas em condições de contorno similares.

(b) Deslocamento cisalhante em placa sob apoio com e sem imperfeições

Aplica-se um deslocamento prescrito levemente superior ao necessário para a condição de flambagem por corte, esta condição foi aplicada com uma velocidade de 3.3 m/s até atingir o deslocamento de $u=3.15$ mm posteriormente este deslocamento é mantido constante.

Neste caso não foi introduzido nenhuma força transversal de perturbação, porém foi testada a influência de considerar a malha perturbada.

Resultados

Na Figura 4.19 se apresenta a variação da reação o deslocamento prescrito aplicado e o deslocamento transversal da placa durante o processo simulado, (ponto verde da Figura 4.1). O deslocamento prescrito aplicado foi de 3.15 mm e gerou uma força de reação no valor de 5.21 MN. Após a ocorrência da instabilidade estrutural a reação por corte foi de 4.98 MN, obtendo um deslocamento transversal no valor de 8.28 mm, quando não foi aplicada nenhuma perturbação no arranjo geométrico do modelo. Sobre a figura se indico a reação em termos da carga distribuída aplicada sobre as bordas da placa para produzir a flambagem da mesma, para facilitar sua comparação com o valor teórico calculado com a Equação (2.7) apresentado na Tabela 4.5, também neste caso os valores obtidos com o modelo numérico e os experimentais foram coerentes.

Na simulação deste problema se pode observar que a mudança de configuração na flambagem produz vibrações que são amortecidas após um certo tempo devido ao amortecimento aplicado. Estas oscilações não chegam a mudar o resultado da carga final dos deslocamentos axiais transversal e da carga de reação, assim como da energia acumulada no sistema após a flambagem acontecer.

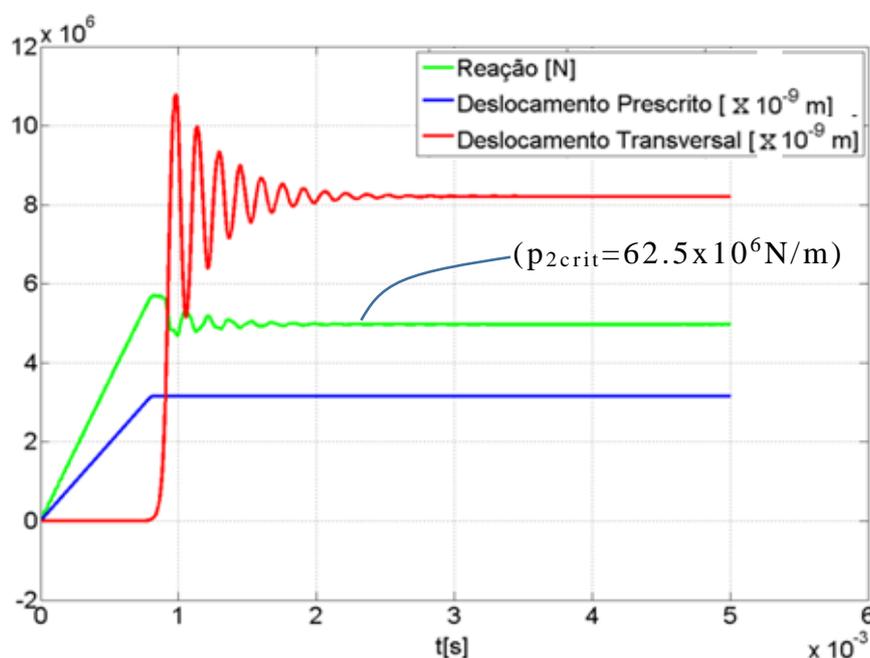


Figura 4.19 - Placa: Deslocamento Prescrito Corte: Reação, Deslocamento Transversal

A energia de deformação elástica e cinética é apresentada na Figura 4.20.

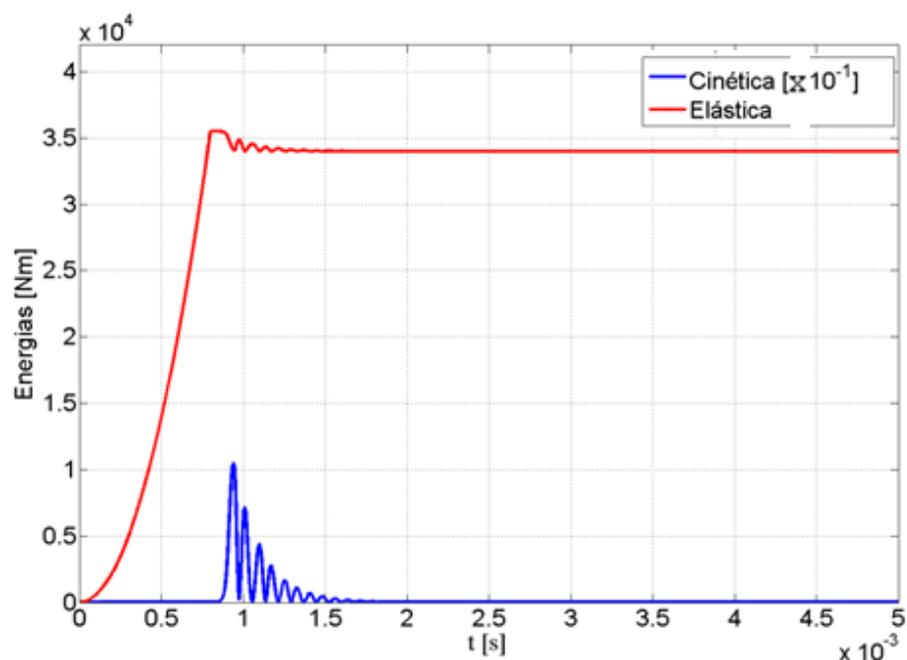


Figura 4.20 - Placa: Deslocamento Prescrito corte: Energia Elástica e Cinética

A resposta estrutural dada pela força de reação e deslocamento transversal no meio da placa é dada pela Figura 4.21.

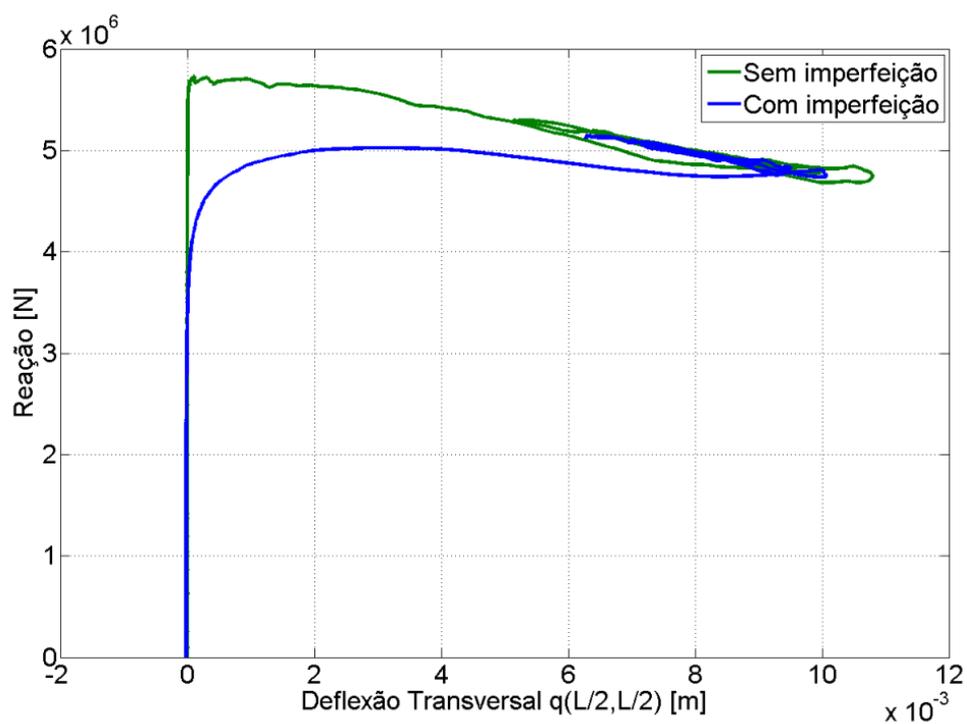


Figura 4.21 - Placa: Deslocamento Prescrito de corte: Resposta estrutural com e sem imperfeições geométricas.

Na Figura 4.21 apresenta-se a resposta estrutural numérica quando são aplicadas imperfeições geométricas aleatórias no modelo estrutural no valor de 2.5 % do comprimento do modulo cúbico, os resultados são comparados com a solução sem imperfeições na malha.

Percebe-se que o deslocamento transversal obtido com imperfeições é menor que o obtido sem imperfeições, e que a imperfeição geométrica inicial acentua a instabilidade estrutural, não deixando que a estrutura suporte uma carga acima da crítica.

Neste caso os resultados são apresentados em termos de força reativa (as reações somadas num lado da placa), com e sem considerar imperfeições na malha. Note que em ambos casos as oscilações devido aos efeitos que se visualizam na Figura 4.19 e 4.20 perturbam também as trajetórias apresentadas na Figura 4.21.

Na Figura 4.22 se apresenta a configuração pós flambagem obtida com o modelo do LDEM comparados com configurações de flambagem de estruturas reais com condições de contorno similares.

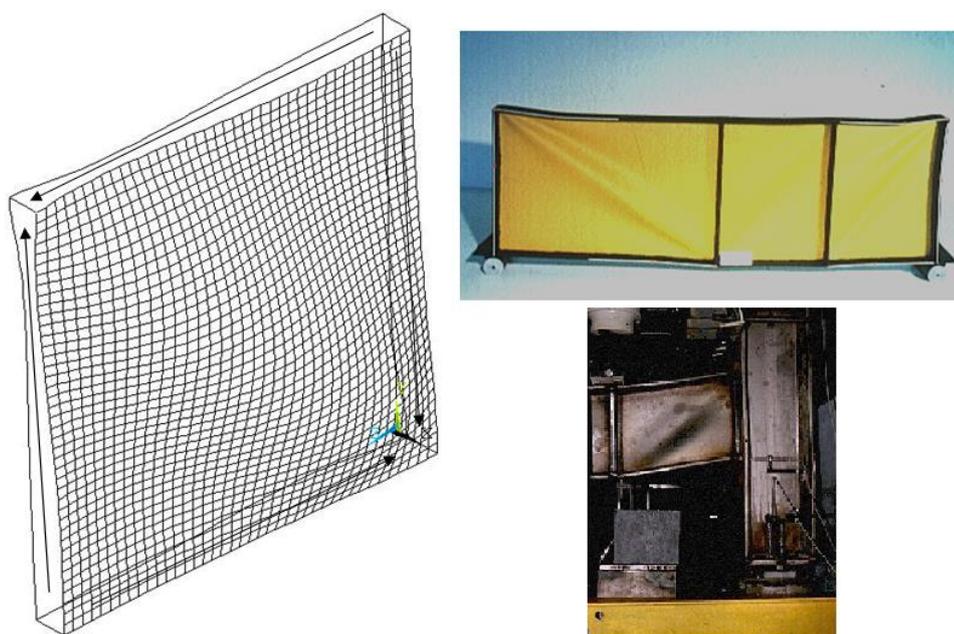


Figura 4.22 - Flambagem placa simplesmente apoiada submetida a esforço de corte na suas quatro bordas: (a) configuração de flambagem obtida na simulação com o LDEM. (b) configurações de flambagem de estruturas reais que ilustram a flambagem de placas em condições de contorno similares.

4.4 Determinação da carga última de um painel formado por núcleo de poliuretano expandido e duas lâminas externas de fibra de vidro e resina.

(a) Introdução

Como quarta aplicação se estuda um painel formado por um núcleo de Poliuretano expandido e duas lâminas de material composto (fibra de vidro e resina), colada na parte superior e inferior. Estes painéis são fabricados pela empresa T-Pan <http://www.t-pan.it/>. Na Figura 4.23, se ilustram algumas aplicações deste tipo de estrutura na indústria.



Figura 4.23 - Aplicação dos painéis sanduiche analisados. <http://www.t-pan.it/>

Estes painéis foram ensaiados a flexão em três pontos no Departamento de Engenharia civil da Universidade de Parma, Itália, Coordenado pela Prof.^a Sabrina Ventadori, Ventadori, 2017.

Na Figura 4.24 se apresenta uma vista do painel ensaiado e a especificação das principais dimensões do mesmo.



Figura 4.234 - Painel de Sanduiche: Propriedades geométricas, condições de contorno (Ventadori 2017).

Na Tabela 4.7 se especificam as dimensões da estrutura a ser analisada.

Tabela 4.7 - Propriedades do painel a ser analisado (Ventadori, 2017).

L (comprimento total)	2000 [mm]
S (comprimento entre apoios)	1900 [mm]
B (largura)	500 [mm]
t (altura total)	103 [mm]
tn (espessura do núcleo)	100 [mm]
tc (espessura das camadas)	1.5 [mm]
Densidade da lamina	1000 [kg/m ³]
Densidade do núcleo	35 [kg/m ³]

Como resultado dos ensaios realizados se apresenta a curva carga deslocamento no meio do vão para dois ensaios, na Figura 4.25. Nota-se que em um começo a curva apresenta um assentamento inicial típico da acomodação dos apoios e do sistema de carga. Depois deste período inicial o comportamento do sistema é linear até a falha final que se apresenta abrupta quando a deflexão no meio do vão é de 66 mm. Na mesma figura, se apresenta a curva carga deslocamento, obtida retificando a mesma e deixando seu comportamento linear.

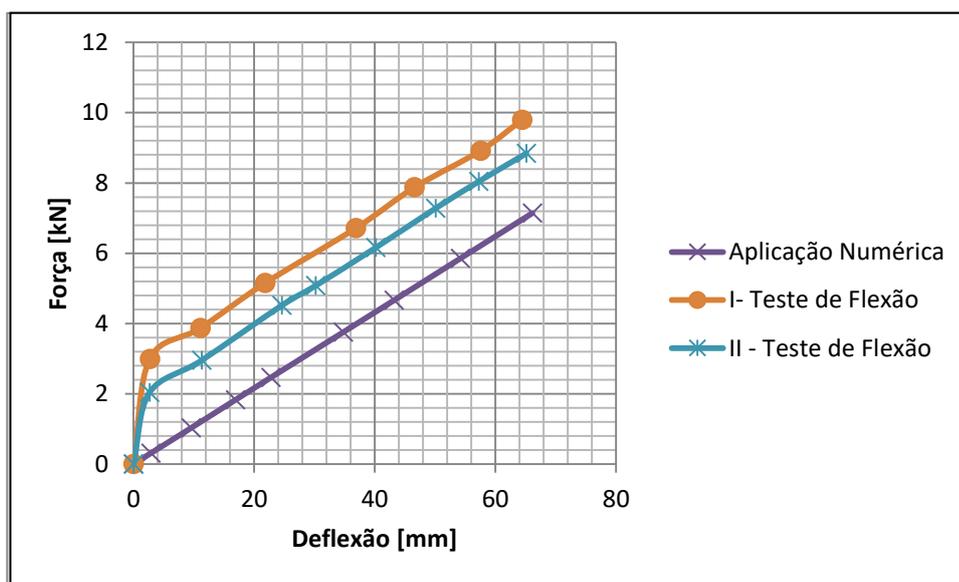


Figura 4.24 - Painel de Sanduiche: Ensaio de Flexão

Na Figura 4.25 se pode verificar a configuração final obtida em um dos testes.

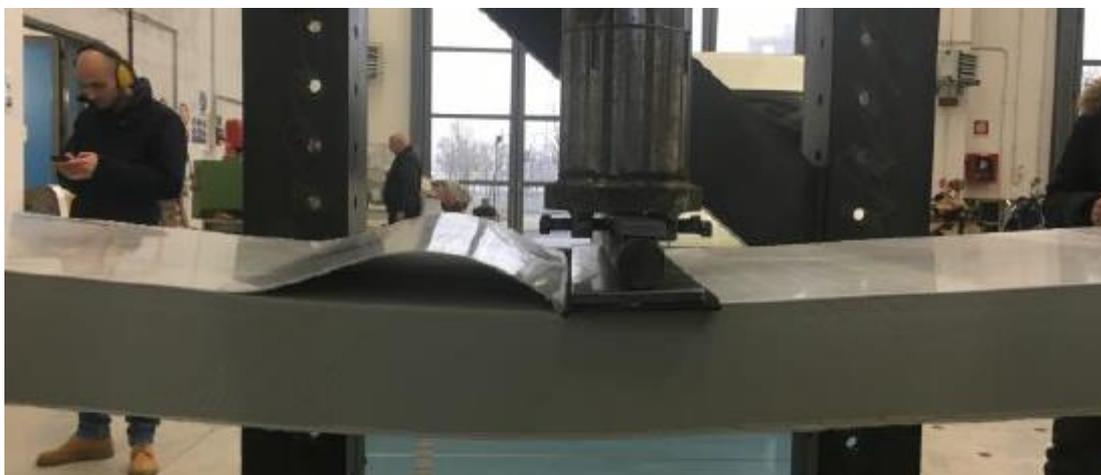


Figura 4.25 - Painel de Sanduiche: forma de colapso da lamina superior (Ventadori 2017).

Na figura, se evidencia que o colapso da estrutura é devido ao descolamento da lâmina perante o núcleo, na parte superior do painel, e sua posterior flambagem. Esta forma particular de colapso é o motivo de realizar este estudo como última aplicação nesta dissertação.

(b) Calibração do modelo numérico

Com o intuito de calibrar o modelo dos elementos discretos para o ensaio a flexão em três pontos do painel, foi estimada a rigidez do núcleo da viga, utilizando a relação entre densidade e módulo de elasticidade proposta em Mourão e Netto, 2002, neste trabalho se apresentam as correlações proposta na Figura 4.26. Utilizando esta curva, com uma densidade de 35 kg/m^3 é possível calcular um valor de $E = 8 \text{ Mpa}$, para o módulo de elasticidade do poliuretano (material do núcleo do painel).

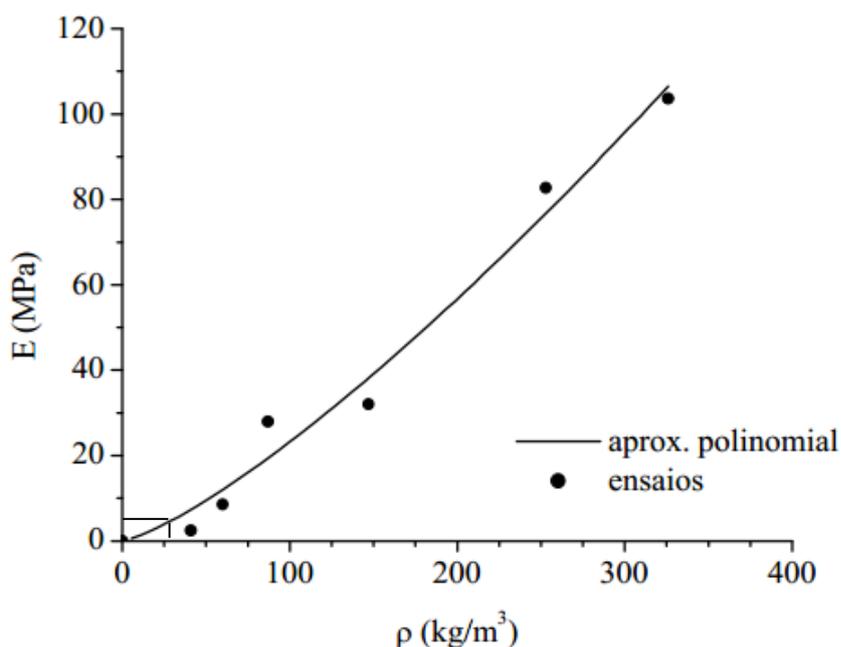


Figura 4.26 - Correlação entre a densidade e Módulo de elasticidade longitudinal (Fonte: Mourão e Netto 2002)

Para calcular o módulo de elasticidade da lâmina (E_{lam}) se procedeu a determinar o módulo de elasticidade da seção da viga composta homogeneizada, considerando toda a seção do mesmo material que o núcleo.

Da Figura 4.24 se pode estimar a carga de colapso do painel, medida sobre a curva retificada ($\delta_{\max}=66\text{mm}$, $P_{\max}=7.14\text{kN}$). Aplicando a expressão da elástica fornecida, pela resistência dos materiais clássica Young e Budynas, 2002.

$$\delta_{\max} = \frac{P S^3}{48 E I_{zz}} \quad (4.6)$$

Onde $P = 7.14 \text{ kN}$ é a carga de ruptura estimada pela curva 4.24, $S=1.90 \text{ m}$ é o comprimento entre apoios da viga composta (ver Tabela 4.7), $E = 8 \text{ Mpa}$ o módulo de elasticidade do núcleo e $\delta_{\max}=66\text{mm}$ o deslocamento máximo da viga composta.

Na Equação (4.6) fica como incógnita o momento de inércia da secção homogeneizada que será de $I_{zz} = 1.93 \times 10^{-3} \text{ m}^4$. Na Figura 4.27 se esquematiza o procedimento utilizado para homogeneizar a secção da estrutura em análise.

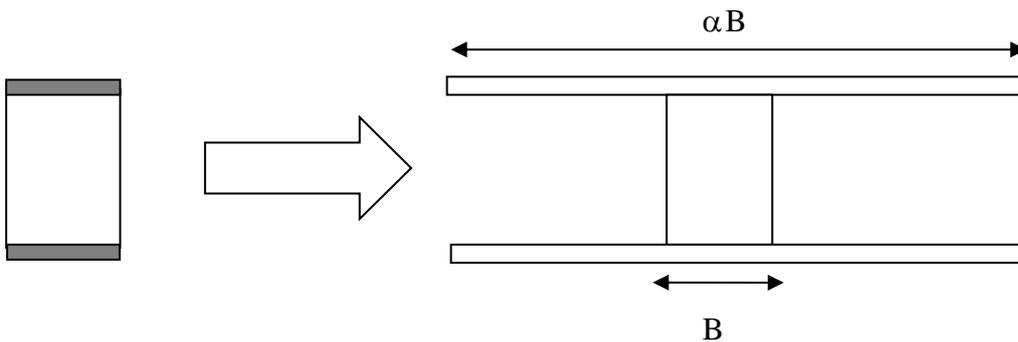


Figura 4.27 - Esquema que ilustra o processo de homogeneização realizado sobre a estrutura composta estudada.

Desta forma a expressão do momento de inércia da seção homogeneizada será.

$$I_{zz} = \frac{B t_n^3}{12} + \frac{B \alpha t_c^3}{12} + 2 B \alpha \left(\frac{t - t_c}{2} \right)^2 \quad (4.7)$$

Substituindo valores do I_{zz} homogeneizado calculado com a Equação (4.6), e as dimensões do painel apresentados na Tabela 4.7 na Equação (4.7), se chega a que $\alpha=521$. Conhecendo o valor de α é possível calcular o valor do módulo de elasticidade longitudinal da lâmina de vidro resina.

$$E_{lam} = 8 \text{ Mpa} \quad \alpha = 4.17 \text{ GPa} \quad (4.8)$$

Desta forma é possível encontrar as tensões axiais impostas no painel de sanduíche na condição limite. Aplicando a expressão de resistência dos materiais, calcula-se esta tensão, para seu valor máximo, $y_{\text{máx}} = t/2 = 0.05$ m, sendo t a altura total do painel, se obtém assim:

$$\sigma_{hom} = \frac{P_{\text{máx}} S y_{\text{máx}}}{4 I_{zz}} = 88 \text{ kPa} \quad (4.9)$$

Desta forma a tensão a qual está sujeita a lâmina quando a carga aplicada no meio do vão do painel for, $P_{\text{máx}} = 7.14$ kN será

$$\sigma_{lam} = \alpha \sigma_{hom} = 46 \text{ Mpa} \quad (4.10)$$

Para verificar os cálculos realizados, se construiu um modelo de elementos finitos no ANSYS 13.0, considerando os dois materiais com os módulos elásticos especificados $E_{\text{núcleo}} = 8$ MPa e $E_{\text{lam}} = 4.17$ GPa. A carga aplicada foi de $P = 7.14$ kPa obtendo o perfil de tensões axiais no meio do vão apresentado na Figura 4.28. Observa-se na figura que as tensões na lâmina (extremo superior e inferior, são iguais as calculadas em forma analítica).

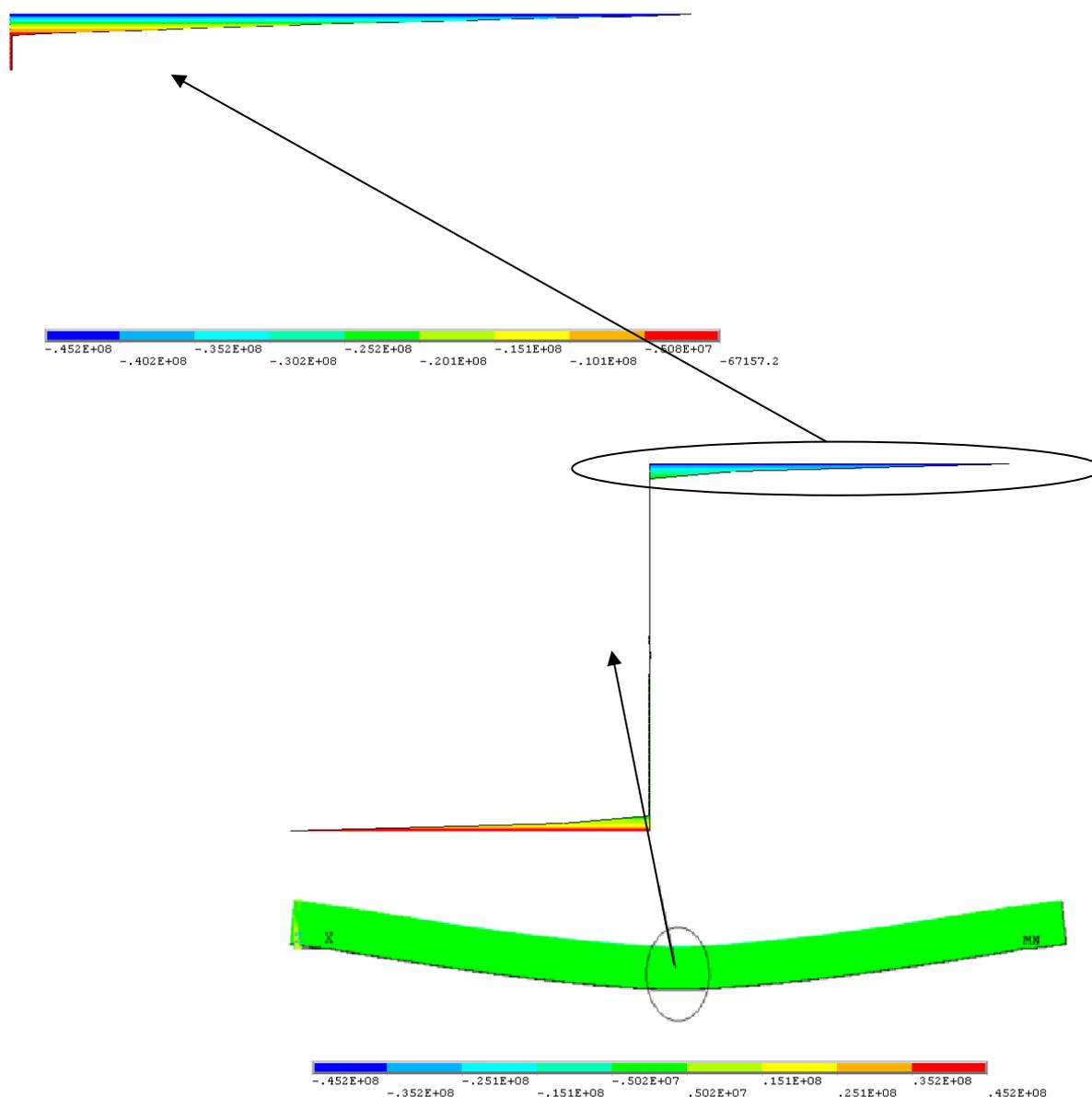


Figura 4.28 - Pannel de sanduiche: Tensões axial (Ansys 13.0)

Com o objetivo de determinar a tensão crítica que produz a flambagem da lâmina superior ao submeter à viga a flexão, foi confeccionado um programa em software de análise matricial Mastan, McGhire et al, 2000. Este software permite realizar diversos tipos de análises em estruturas espaciais unidimensionais.

Para aproximar-se das condições de contorno as quais o pannel está sujeito quando colapsa, realizou-se um modelo como o indicado na Figura 4.29 onde a lâmina foi representada como uma viga com secção retangular de largura B e altura t_{lam} . Considerando como modulo

de elasticidade o E_{lam} já determinado. Introduce-se uma configuração inicial coincidente com a que a lâmina tem quando o painel está flexionado, com uma deflexão máxima $\delta_{max}=66\text{mm}$.

Esta configuração foi definida como a curva elástica do painel considerando a secção homogeneizada com uma carga de $P=7.14\text{kN}$. Desta forma segunda a resistência dos materiais a configuração inicial é.

$$y(x) = [P_{max} S / (6EI_z)] x^3 = 0.0769x^3 \quad (4.11)$$

Onde para o meio do vão do painel teríamos, $y(S/2)=y(950\text{mm})=66\text{mm}$, valor coerente com a δ_{max} apresentada na Figura 4.25. Na Figura 4.29 se apresentam as condições de contorno aplicadas no modelo para simular a situação apresentada na Figura 4.25. Dentro do programa Mastan se realizaram duas análises para determinar a carga distribuída q_x [N/m] que levará a lâmina à instabilidade. Com um comprimento de flambagem de 0.30m.

Realizando uma análise de flambagem elástica, se chegou a um $q_{critico} = 313\text{N/m}$, realizando uma análise não linear geométrica a carga crítica que produz a instabilidade do modelo estudado é $q_{nlg} = 343\text{N/m}$. Como esta carga distribuída é aplicada sobre um comprimento de $S/2=0.95\text{m}$, vamos ter em cada caso uma reação horizontal total de $Q_{critico}=313\text{ N/m} \times 0.95\text{ m} = 297\text{ N}$, $Q_{nlg}=326\text{N}$. Mais detalhes sobre as características do programa e os tipos de análises mencionados se podem encontrar em McGuire et al, 2000.

Como a área transversal da lâmina considerada foi de $A = B \times t_{lam} = 0.5 \times 0.0015\text{m}^2$, a tensão na lâmina na qual se produz a instabilidade será, $\sigma_{crit}=[0.396,0.43\text{MPa}]$, tensão aproximadamente 100 vezes menor que a esperada (46 Mpa obtida com a Equação (4.10)), está sensível diferença se pode explicar pois no modelo não foi considerada a influência do adesivo na restrição a flambagem da lâmina.

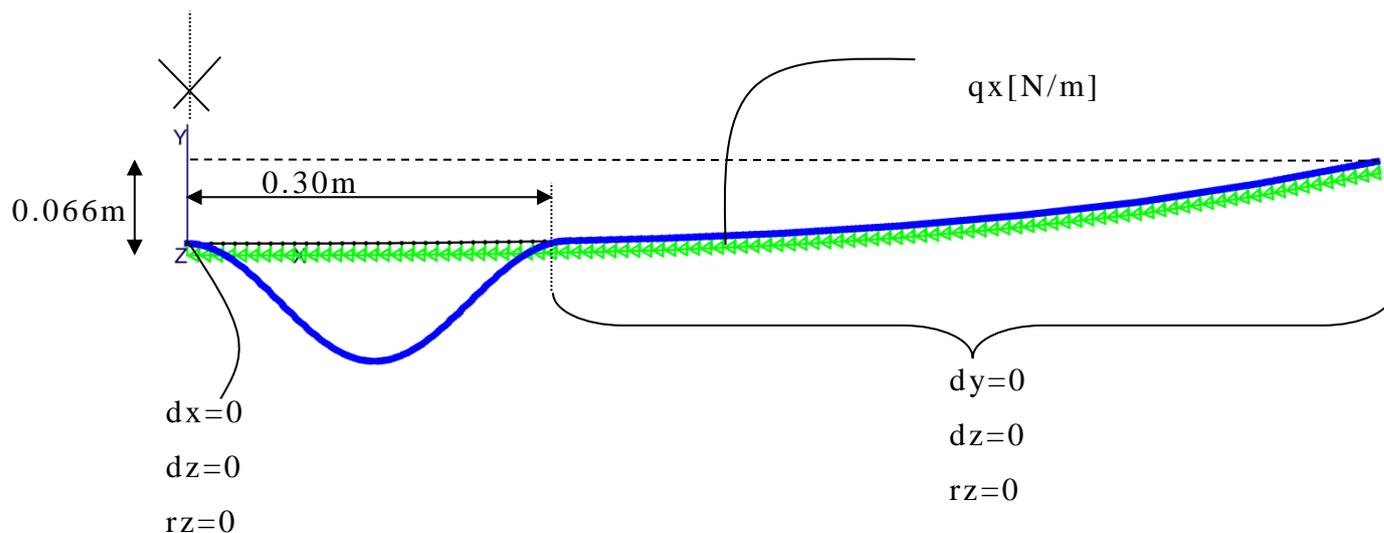


Figura 4.29 - Configuração analisada no programa de análise matricial Mastan. (McGuire 2000)

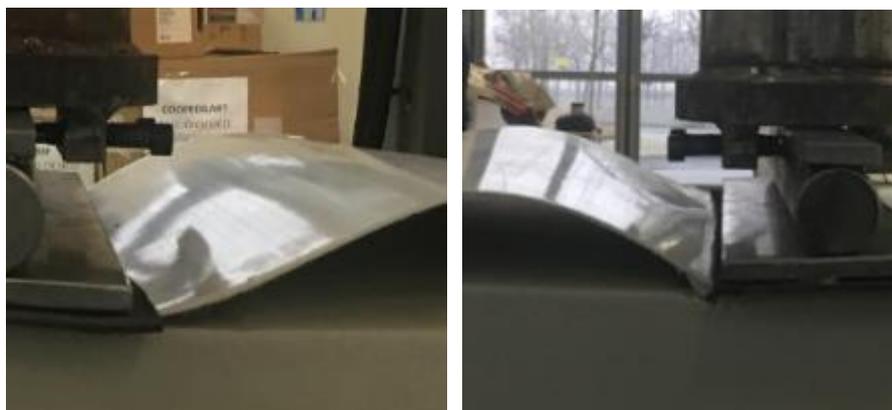


Figura 4.30 - Detalhes da configuração de ruptura do painel

Também as condições de contorno adotadas para realizar a análise numérica se considerou restrita a rotação em torno do eixo z nos dois extremos, pois se considera a lâmina descolada do núcleo. Observando as configurações da lâmina flambada apresentada na Figura 4.30 se pode ver que a lâmina rota parcialmente em seus extremos.

(c) Descrição do modelo realizado com o método dos elementos discretos

Utilizando as informações obtidas na seção anterior, um modelo dos elementos discretos foi implementado, também neste caso será avaliado em forma localizada a região superior do modelo, onde acontece o descolamento da lâmina do núcleo. Na Figura 4.32 se apresenta em (a) um esquema do painel estudado, indicando em vermelho a parte que está sendo modelada em detalhe, em (b) se ilustra o modelo realizado utilizando o método dos elementos discretos, e em (c) ampliações das regiões de interesse do modelo.

Sobre o modelo são aplicados deslocamentos prescritos na direção vertical para deixar, lâmina + interface, com a mesma configuração que tem quando aconteceu a instabilidade no ensaio. Posteriormente se aplica uma força distribuída em todos os nós da lâmina na direção horizontal. O modelo estudado simula um problema de estado plano de deformações, isto implica que só é necessário considerar um modulo na direção da espessura, todos os deslocamentos na direção em z devem ser restringidos.

Tanto o processo de aplicação dos deslocamentos prescritos como da carga horizontal aplicada devem simular um processo quase-estático, para conseguir isto se controlou as forças de inércia introduzidas a patamares aceitáveis, isto se pode regular diminuindo a velocidade de aplicação das excitações e aumentando o amortecimento viscoso com o objetivo de filtrar oscilações do sistema.

Na região indicada com (*) na Figura 4.32 a resistência dos elementos que simulam a interface foi totalmente debilitada para induzir a forma de flambagem visualizada nas Figuras 4.26 e 4.31.

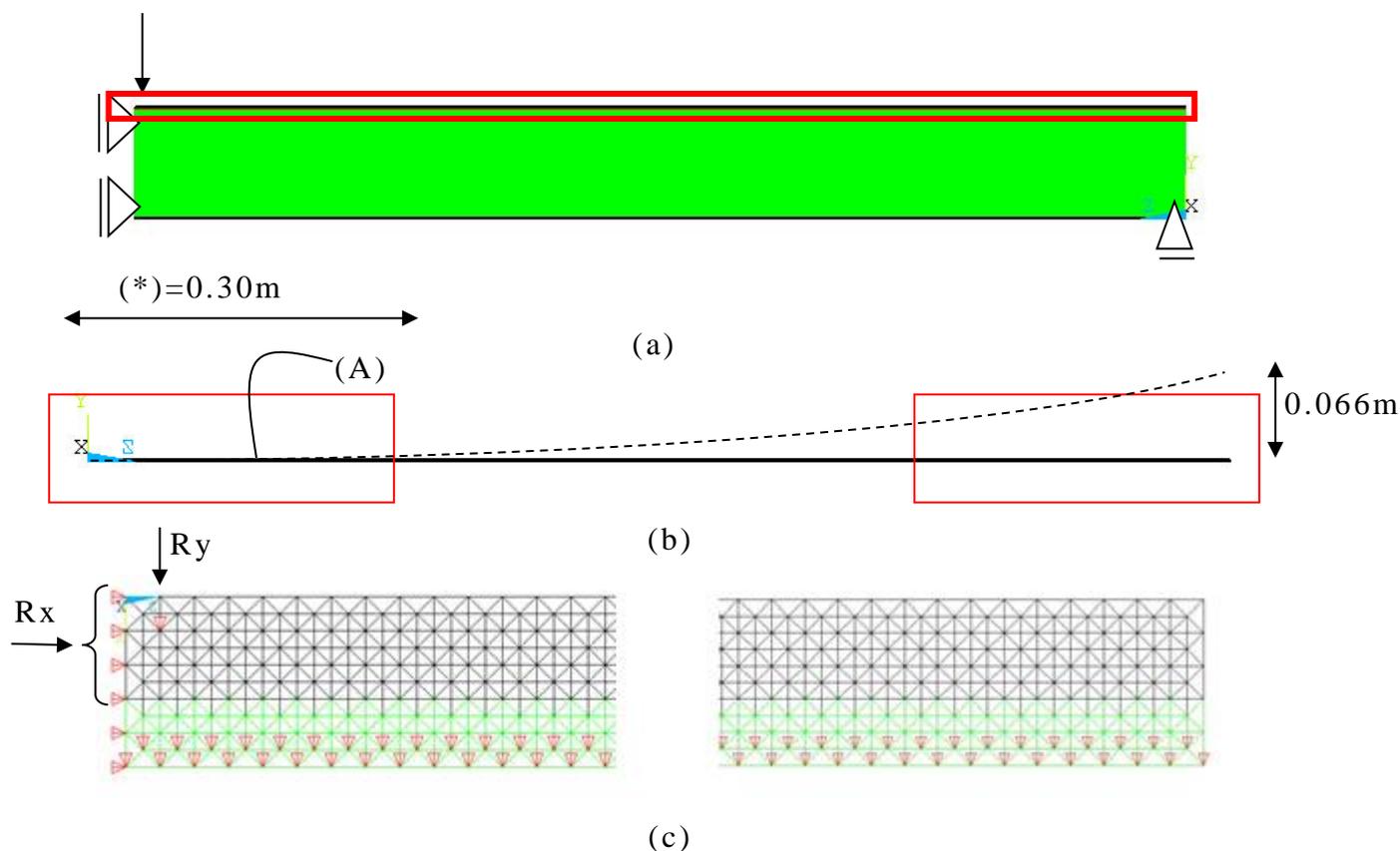


Figura 4.31- (a) Modelo global, (b) Modelo local, (c) Modelo local: Condições de contorno

Na Figura 4.31 (c) se indica em cor verde os elementos da interface, o núcleo que não é modelado, e em preto a região que representa a lâmina de vidro-resina.

Os parâmetros utilizados para construir o modelo são os seguintes: os módulos utilizados tem um $L_c=5 \times 10^{-4}$ m de lado, foram utilizados 1800 módulos na direção de x, 5 módulos na direção y, sendo 3 para modelar a lâmina e dois para modelar a região de aderência, e 1 módulo na direção da espessura z, lembrando que aplicando a condição de que todos os deslocamentos são fixos na direção de z o modelo representa a condição de estado plano de deformações. Considerou-se para a região da lâmina $E_{lam} = 4.3$ GPa, e $\rho_c = 1000$ kg/m³, e para a região da interface $E_{interface} = 8$ MPa, e $\rho_n = 35$ kg/m³. Não foi investigada, neste modelo preliminar, a possibilidade de que o mesmo se descole e rompa durante o processo de flambagem, nem na interface nem na lâmina. Mas se salienta a potencialidade do modelo dos elementos discretos para avaliar a evolução de dano no modelo como foi apresentado no capítulo 3.

(d) Resultados preliminares

Uma primeira avaliação do problema estudado se apresenta na continuação de tentar aproximar a simulação do teste do painel. Após aplicar os deslocamentos prescritos para dar ao modelo a configuração indicada na Figura 4.31, se aplica uma carga distribuída horizontal sobre toda a lâmina que atinge um patamar de $R_x = 1.8$ N que equivale a submeter a lâmina a uma tensão axial de compressão máxima de $s = R_x/A_{lam} = 1.8 \text{ N} / (7.5 \times 10^{-7}) = 2.4$ MPa, a área considerada e a área transversal da parte do modelo que representa a lamina que será $A_{lam} = 3(L_c)^2$ como se pode verificar na Figura 4.31c.

Na Figura 4.32 se apresenta o balanço de energia onde se mostra a energia cinética e a energia elástica em função do tempo durante todo o processo. Observa-se que a energia cinética se mantém em patamares muito mais baixos que a energia elástica.

Na Figura 4.33 se apresenta a variação do deslocamento vertical no ponto (A) indicado na Figura 4.32 (b), e é possível verificar que com a carga que produz uma reação horizontal na lâmina de $R_x = 1.8$ N o modelo se instabiliza, e a reação no apoio baixa chegando a $R_x = 0.89$ N que equivale a produzir uma tensão axial máxima de compressão de 1.19 MPa.

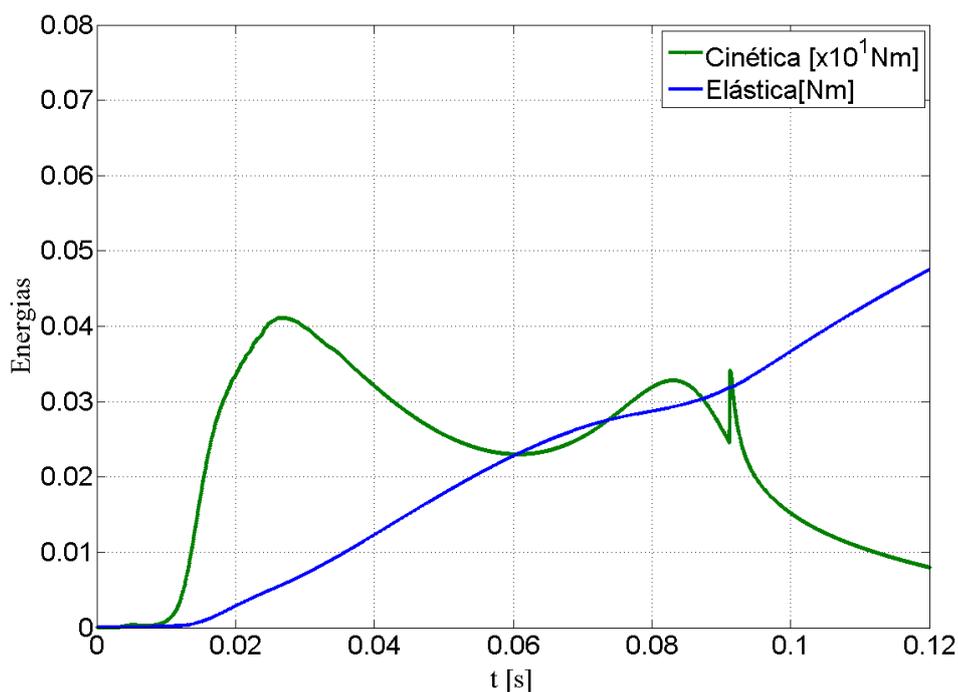


Figura 4.32 - Balanço de Energia obtido na simulação. Observe que as unidades do eixo vertical estão indicados na legenda da figura.

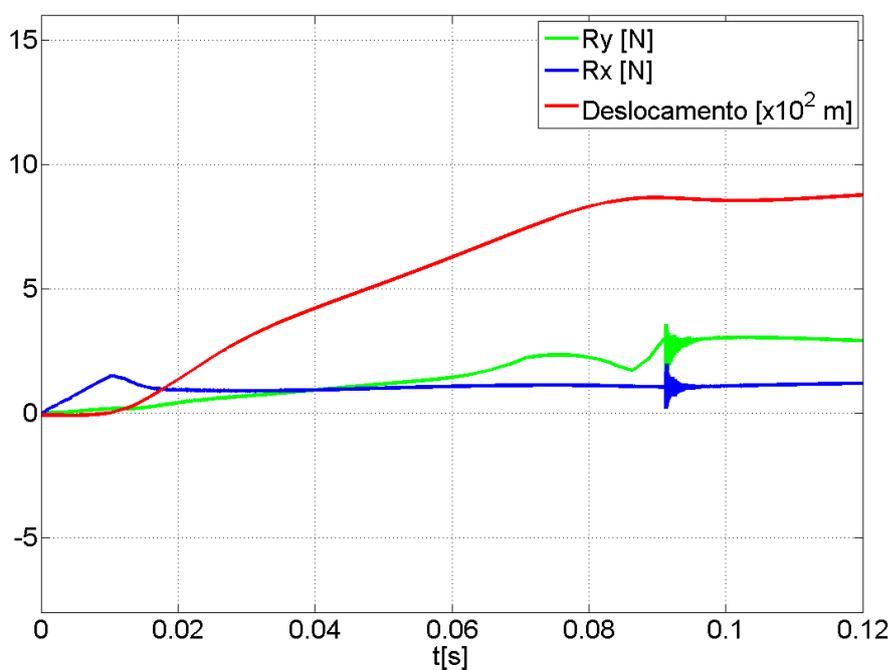


Figura 4.33 - Resultados obtidos com a simulação do DEM, onde se mostram as reações na direção vertical e horizontal do modelo e a variação dos deslocamentos verticais. Note que as unidades do eixo vertical estão indicadas nas legenda.

Na Figura 4.33 também é possível verificar a variação da reação vertical no modelo. Os resultados obtidos mostram valores da ordem aos obtidos na simulação realizada no Mastan, (o modelo do LDEM $\sigma_{crit} = 1.19 \text{ MPa}$, no Mastan $\sigma_{crit} = [0.396, 0.43 \text{ MPa}]$).

Finalmente na Figura 4.34 se apresenta a comparação entre modelo experimental e numérico em termos das configurações finais obtidas.

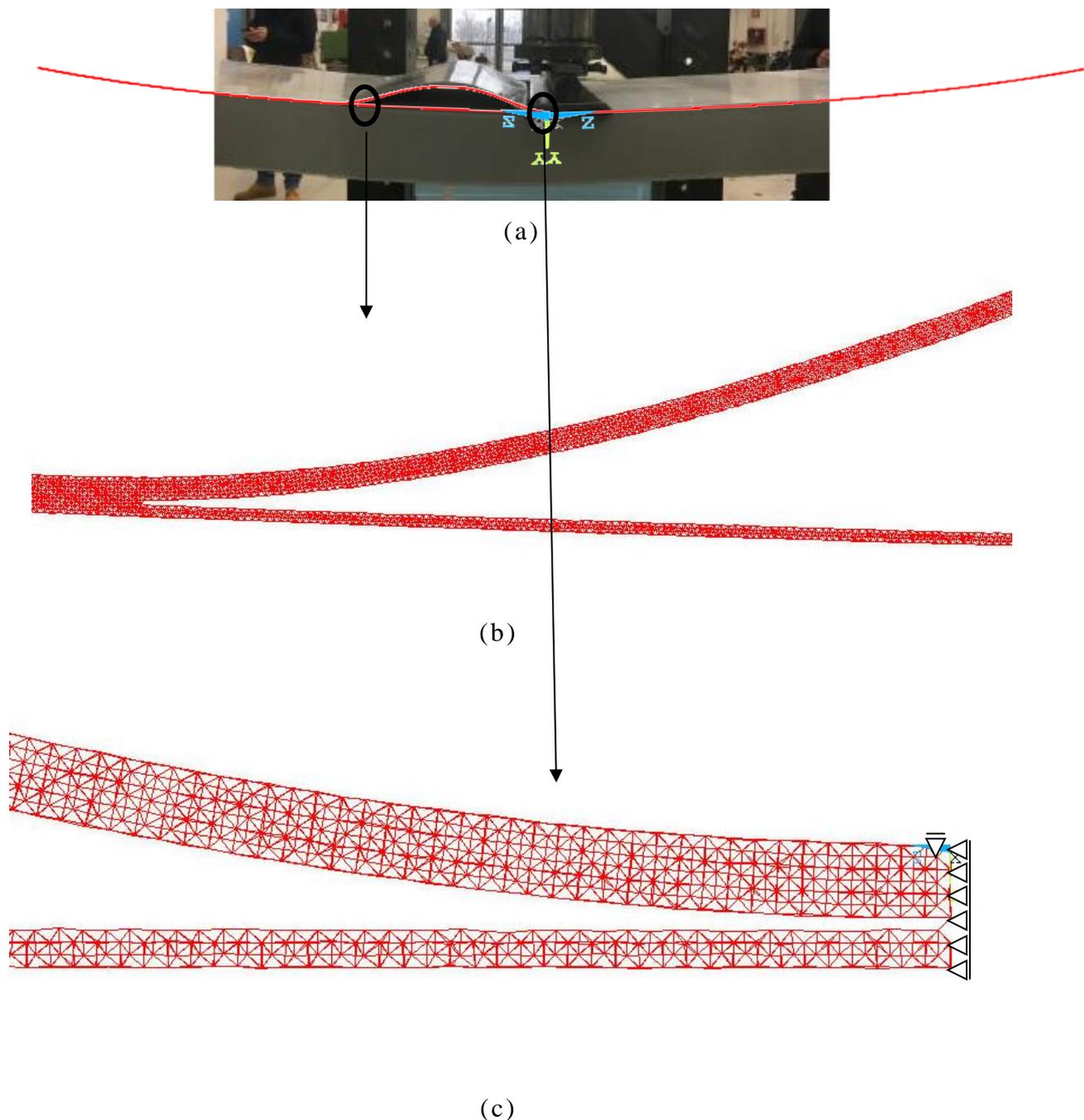


Figura 4.34 - Modelo: (a) configuração experimental e numérica (b) y (c) dois detalhes da configuração final obtida com o modelo numérico.

Cabe salientar que os resultados apresentados nesta secção permitiram realizar uma análise preliminar do problema aqui apresentado. Os valores de tensões obtidos sem considerar a influência da cola levaram a tensões de flambagem 50 vezes menores que as determinadas experimentalmente ($\sigma_{cr_dem}=1.19\text{Mpa}$, $\sigma_{r_exp}=46\text{Mpa}$). Modelos mais sofisticados onde se considere o adesivo serão realizados na continuação deste trabalho.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi aplicado uma versão do método dos elementos discretos formado por barras (LDEM) para simular problemas de estabilidade estrutural. Problemas básicos de flambagem elástica, estática e dinâmica, em vigas e em placas foram analisados, também foi realizada uma análise preliminar de um painel composto por um núcleo de poliuretano expandido e lâmina de material compósito de fibra de vidro e resina coladas nas faces superior e inferior.

- Respeito a análise de problemas de flambagem elástica estático simples foi possível obter resultados da simulação coerentes, tanto para estruturas unifilares como bidimensionais. O resultado em termos de carga crítica e comportamento pós-flambagem foram os esperados.

- O modelo numérico utilizado resolve o problema integrando uma equação de movimento no domínio do tempo, isto permite incorporar o tempo na análise e visualizar como se aproximam os resultados clássicos de instabilidade quase estáticos com os obtidos incorporando a dimensão temporal. Foi de interesse esta forma de proceder para perceber que a flambagem não é instantânea e que pode localmente produzir efeitos de inércia importantes de serem avaliados em estruturas susceptíveis de romper ou sofrer deterioração por fadiga.

-Na avaliação de uma coluna solicitada com cargas paramétricas os resultados também simularam corretamente os esperados pela teoria.

-Na análise do painel composto submetido à flexão em três pontos, com os resultados preliminares obtidos foi possível perceber a possibilidade do método dos elementos discretos em capturar efeitos que envolvam a interação de instabilidade e ruptura. Cabe salientar que neste trabalho as possibilidades do método dos elementos discretos para modelar diversos tipos de dano não foi aplicado, esta capacidade do método foi explicada no capítulo 3 onde diversos trabalhos são referenciados.

- Do ponto de vista geral, foi elucidativo ver como resultados vinculados com instabilidade se apresentam quando se incorporam na análise a dimensão temporal, ainda que não fosse ela crucial na sua análise, mas sim para interpretar como o processo de flambagem acontece.

- A continuidade do trabalho aqui desenvolvido está relacionada com a simulação do painel composto. Se pretende melhorar o modelo preliminar apresentado, para poder explicar como acontece o colapso relacionado com a flambagem da lâmina que se descola do núcleo. No estudo experimental realizado na Universidade de Parma a correta aplicação da cola que

adere as laminas ao núcleo foi definido como o fator crítico na resistência do painel ao colapso. Se acredita que é possível verificar e aprofundar este estudo empregando o método numérico apresentado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, H. G., & Bulson, P. S. **Background to Buckling**. Great Britain: McGRAW-HILL Book Company Inc., 1980.

Ansys, R. Ansys Mechanical APDL Product Release 13.0. **Ansys Inc.**, Canonsburg, Pennsylvania, 2012.

Bathe, K.-J. **Numerical methods in finite element analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976.

Bazant, Z. P., & Cedolin, L. **Stability of Structures**. United States of America: Oxford University Press Inc., 2003.

Bleich, F. **Buckling strength of metal structures**. New York: McGRAW-HILL Book Company Inc., 1952.

Bolotin, V. V. **The Dynamic Stability of Elastic Systems**. São Francisco: Holden-Day, 1964.

Carpinteri, A. Static and energetic fracture parameters for rocks and concretes. **Materials and Construction**, 151-162, 1981.

Dalguer, L., Irikura, K., & Riera, J., Simulation of tensile crack generation by three dimensional dynamic shear rupture propagation during an earthquake. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, 1978-2012, 2003.

Galambos, T. V. **Structural Members and Frames**. United States of America: Prentice-Hall Inc., 1968.

Gao, H. Application of fracture mechanics concepts to hierarchical biomechanics of bone and bone-like material. **International Journal of Fracture**, 101-137, 2006.

Goods, S. H. **Mechanical Properties and Energy Absorption Characteristics of Polyurethane Foam**. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1997.

Iturrioz, I., & Riera, J. D. Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. **Nuclear Engineering and Design**, 135-144, 1998.

Iturrioz, I., & Riera, J. D. Size effects in the analysis of concrete or rock structures. **International conference on Structural Mechanics in Reactor Technology**, 2007.

Iturrioz, I., Riera, J. D., & Miguel, L. F. Influence of size on the constitutive equations of concrete or rock dowels. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1857-1881, 2008.

Iturrioz, I., Riera, J. D., & Miguel, L. F. Strength of brittle materials under high strain rates in Dem simulations. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, 113-136, 2011.

Iturrioz, I., Riera, J. D., Miguel, L. F., & Kostaski, L. E. Scale effects in quasi-fragile materials subjected to compression. **International Conference on Structural Mechanics Reactor Technology**, 2011.

Iturrioz, I., Lacidogna, G., & Carpinteri, A. Experimental analysis and truss-like discrete element model simulation of concrete specimens under uniaxial compression. **Engineering Fracture Mechanics**, 81-98, 2013.

Iturrioz, I., Riera, J. D., & Miguel, L. Introduction of imperfections in the cubis mesh of the truss-like discrete element method. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, 539-552, 2014.

Iturrioz, I., Lacidogna, G., & Carpinteri, A. Acoustic emission detection in concrete specimens: Experimental analysis and lattice model simulations. **International Journal of Damage Mechanics**, 327-358, 2014.

Kanninen, M., & Popelar, C. **Advanced Fracture Mechanics**. Oxford engineering science series. Oxford University Press, 1985.

Kostaski, L., Barrios D'ambra, R., & Iturrioz, I. Determinación de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos utilizando el método de los elementos discretos compuestos por barras. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, 323-343, 2008.

Kostaski, L. E., Iturrioz, I., & Riera, J. D. Consideration of scale effects and stress localization in response determination using the Dem.. **Mecánica Computacional**, 2785-2801, 2010.

Kostaski, L. E., Iturrioz, I., Batista, R. G., & Cislino, A. P. The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics. **Engineering Computations**, 765-787, 2011.

Kostaski, L. E., D'Ambra, R. B., & Iturrioz, I. Crack propagation in elastic solids using truss-like discrete element method. **International Journal of Fracture**, 139-161, 2012.

Kupfer, H. B., & Gerstle, K. N. Behavior of concrete under biaxial stresses. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, 853-866, 1973.

Kuzumaki, T., & Mitsuda, Y. Nanoscale mechanics of carbon nanoube evaluaes by nanoprobe manipulation in transmiccion electron microscope. **Journal ou Applied Physics**, 364-368, 2006.

Labs, M. Acesso em 05 de 08 de 2017, disponível em T-Pan Sandwich Panels: <http://www.t-pan.it/> , 2017.

Lorna, J. G. Biomechanics of cellular solids. **Journal of Biomechanics**, 377-399, 2005.

Madenci, E., & Oterkus, E. **Peridynamic Theory and Its Applications**. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2014.

McGuire, W., Gallagher, R. H., & Ziemian, R. D. **Matrix Structural Analysis**. Faculty Books, 2000.

Miguel, L. F., Iturrioz, I., & Riera, J. D. Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials. **Computer Modeling in Engineering and Sciences(CMES)**, 1-16, 2010.

Miguel, L., Iturrioz, I., & Riera, J. D. Introduction of imperfections in the cubis mesh of the truss-like discrete element method. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, 539-552, 2014.

Miguel, L. F., Riera, J. D., & Iturrioz, I., Assessment of Brazilian tensile test by means of the truss-like Discrete Element Method (DEM) with imperfect mesh. **Engineering Structures**, 10-21, 2014 (a).

Miguel, L. F., Iturrioz, I., & Riera, J. D. Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials. **Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)**, 1-16, 2010.

Nayfeh, A. H., & Hefzy, M. S. Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. **AIAA Journal**, 779-787, 1978.

Mourão, R. P., & Neto, M. M. (s.d.). **Caracterização de espuma polimérica para uso em embalagens para transporte de rejeitos radioativos**. Belo Horizonte: Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear. <https://www.ipen.br/biblioteca/2002/inac/08773.PDF>

Oliveira, S. S. **Instabilidade Paramétrica de Colunas**. São Paulo: USP, 1998.

Pfeil W& Pfeil M., **Estruturas de aço: dimensionamento pratico**, LTC, 2009.

Reis, A., & Camotim, D. **Estabilidade Estrutural**. Portugal: McGRAW-HILL, 2001.

Rieira, J. D. Local effects in impact problems on concrete structures. **In proceedings of he conference on structural analysis and design of nuclear power plant**, 57-79, 1984.

Riera, J., & Iturrioz, I. Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 417-426, 1995.

Riera, J., Dalguer, L., Irikura, K., & Chiu, H. The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: Brief interpretation of the damage distribution on buildings. **Bulletin of Seismological Society of America**, 1112-1127, 2001.

Riera, J. D., Miguel, L. F., & Itturioz, I. Strength of brittle materials under high strain rates in Dem simulations. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, 113-136, 2011.

Rinaldi, A., & Krajcinovic, D. P. Lattice models of polycrystalline microstructures: A quantitative approach. **Mechanics of Materials**, 17-36, 2008.

Rios, R., & D., R. J. Size effects in the analysis of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, 1115-1125, 2004.

Rocha, M., & Riera, J. D.. A note on the velocity of crack propagation in tensile fracture. **Revista Brasileira de Ciência Mecânica**, 217-240, 1991 (a).

Rocha, R. D., Riera, J. D., & Krutzik, N. J. Extension of a model that apply describes fracture of plain concrete to the impact analysis of reinforced concrete. **In International Conference on Structural Mechanics Reactor Technology (Smirt 11)**, 1991.

Rodrigues, R. S., Birck, G., & Iturrioz, I. Damage index proposals applied to quasi brittle materials simulated using the lattice discrete element method. **International Journal of Damage Mechanics**, 1-23, 2016.

Seelig, T., **Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics**. Mechanical Engineering Series, Springer, 2006.

Shima, H. Buckling of Carbon Nanotubes: A State of the Art Review. **Materials**, 47-84, 2012.

Silling, S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, 175-209, 2000.

Soares, M. E., & Mazzili, C. E. **Excitação paramétrica em sistemas com um grau de liberdade**. São Paulo: USP, 1992.

Taylor, D. **The Theory of Critical Distances**. London: Elsevier, 2007.

Thompson, J. M., & Hunt, G. W. **Elastic Instability Phenomena**. Chichester: Jown Wiley & Sons, 1984.

Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. **Theory of Elastic Stability**. Great Britain: McGRAW-HILL Book Company Inc., 1985.

Vendadori S. **Caratterizzazione Meccanica A Flessione Di Pannelli Sandwich**. Parma: Università degli Studi di Parma, 2017.

Wang, S. B., Jia, H. K., Sun, J. Q., Ren, X. C., & Li, L. A. Buckling of thin Films in Nano-Scale. **EDP Sciences**, 1-6, 2010.

Yu, W. W., & Roger, L. A. **Cold-Formed Steel Desing**. Rolla, Missouri: John Wiley & Sons, Inc., 2010.

Young, C. W., Budynas, G. R., **Roark's Formulas for Stress and Strain**, New York: McGraw-Hill, 2002.

APÊNDICE A

A tensão de compressão em uma estrutura com esbeltez atribuída na zona de criticidade estrutural será apresentada neste apêndice. As diferentes respostas estruturais de pós flambagem serão apresentadas para o caso de uma coluna bi rotulado, chamado de viga de Euler, devido à incompressibilidade, submetida a deslocamentos axiais causadores de tensão crítica. Para o caso de força axial é estipulado um coeficiente adimensional capaz de descrever a trajetória de pós flambagem para o exemplo testado.

A zona de criticidade, atribuída para a confecção da coluna ensaiada, é verificada através de critérios encontrados em [Neut, 1968]. Esse demonstra que a zona de criticidade, para uma coluna perfeitamente longitudinal, encontrasse quando a tensão de compressão for maior ou aproximadamente 1.75 vezes maior que a tensão de compressão obtida pela força de Euler.

A relação entre a deformação axial crítica e a tensão crítica é dada pela lei de Hooke, assim como o cálculo das energias desenvolvidas durante a resposta estrutural, por [Koiter, 1970]. Após a verificação dos coeficientes adimensionais utilizados para elaborar a variação energética, encontra-se a resposta estrutural para os dois casos descritos acima, verificando a diferença encontrada, entre os dois modelos, através dos estudos efetuados por [Lang, 1969].

Para a descrição do problema analítico será utilizado [Koiter, 1969], que para elaborar a descrição espacial dos pontos da linha neutra, utiliza-se da configuração deformada da estrutura.

$$X'_1 = X + u \quad X'_2 = 0 \quad X'_3 = w \quad (\text{A.1})$$

Atribuindo a incompressibilidade da estrutura, o encurtamento da coluna na configuração deformada é nulo, e a encurvatura da coluna é dada por.

$$\rho = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}} \quad (\text{A.2})$$

A energia potencial é dada por.

$$V = \frac{1}{2} \alpha \int_0^L \rho^2 dx \quad (\text{A.3})$$

O trabalho aplicado é dado por

$$W = -k \int_0^L \frac{du}{dx} dx \quad (\text{A.4})$$

Atribuindo a incompressibilidade da coluna, pode-se escrever a deformação axial que está dentro do trabalho na forma de.

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1 \quad (\text{A.5})$$

Onde k e α são coeficientes de rigidez que devem ser estipulados para deixar o problema de variação adimensional, porém conforme visto dados em [N], respeitando a energia e trabalho calculados nas Equações (A.3) e (A.4). Realizando a soma das Equações (A.3) e (A.4), o balanço de energia é verificado.

$$V + W = \frac{1}{2} \alpha \int_0^L \left(\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}} \right)^2 dx - k \int_0^L \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \quad (\text{A.6})$$

[Koiter, 1969] realizou um estudo adimensional nesta equação 6, e neste trabalho será trocado o termo de flexão, α [N], que foram observados através [Lang, 1968], [Koiter, 1969].

$$\alpha = \frac{EI}{L^2} \quad k = EA \quad (\text{A.7})$$

Para dimensionar o problema temos que $\alpha = c k$, encontra-se o raio de inercia, sendo os outros termos dados por.

$$\varepsilon = x L \quad w = \gamma L \quad k = \lambda \pi^2 \alpha \quad c = \frac{I}{AL^2} \quad (\text{A.8})$$

Sendo que o balanço de energia é escrito na forma de,

$$V + W = \frac{1}{2} \alpha L P^\lambda [\gamma] \quad (\text{A.9})$$

Sendo que a variação adimensional do potencial $P^\lambda[\gamma]$ é dada por.

$$P^\lambda[\gamma] = \int_0^1 \left(\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}} \right)^2 d\varepsilon - \frac{1}{2} \lambda \pi^2 c \int_0^1 \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} d\varepsilon \quad (\text{A.10})$$

Utilizando-se da solução completa da coluna, encontra-se os auto valores λ , na forma de.

$$\lambda = 1 \quad (\text{A.11})$$

Encontrando o carregamento crítico para o caso quando o menor auto valor encontrado, percebe que ao dividir a força encontrada pelo carregamento crítico pelo modulo de rigidez a compressão o deslocamento crítico torna-se o mesmo que dado por Euler.

Utilizando-se de [Koiter, 1969], encontra-se o deslocamento transversal pós flambagem.

$$a_I = \sqrt{\frac{8}{\pi^2} c (\lambda_I - \lambda)} \quad (\text{A.12})$$

Sendo que a configuração de pós flambagem é dada pelo modo de instabilidade na forma de.

$$w(x) = aL \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{A.13})$$

Para o caso da Equação (A.12) o deslocamento transversal é dado para uma estrutura em regime de pós flambagem instável. Na definição da resposta estrutural dada por deslocamento compressivo, estipulada pela Equação (A.13), montam-se os termos λ e λ_I , adimensionais na forma de carga compressiva.

$$\lambda = \frac{P_1}{P} \quad \lambda_I = \frac{P_2}{P_3} \quad (\text{A.14})$$

Sabe-se que o parâmetro adimensional λ , é valido para a Equação (A.12) para que a diferenças máxima entre os dois seja 1. Com isso monta-se o seguinte sistema.

$$\begin{aligned} a_I &= \sqrt[2]{\frac{8}{\pi^2} \frac{I}{A} (\lambda_I - \lambda)} = 0 \rightarrow P = \alpha P_E & \frac{P_1}{\alpha P_E} &= \frac{P_2}{P_3} \\ a_I &= \sqrt[2]{\frac{8}{\pi^2} \frac{I}{A} (\lambda_I - \lambda)} = \text{máx} \rightarrow P = P_A & \frac{P_2}{P_3} - \frac{P_1}{P_A} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Para o caso de deslocamento prescrito, com e sem imperfeições, na forma que os coeficientes apresentados anteriormente ficam, onde P_A [N], é a carga aplicada pelo deslocamento prescrito.

$$\lambda = \frac{\alpha P_E P_A}{P(P_A - \alpha P_E)} \quad \lambda_I = \frac{P_A}{P_A - \alpha P_E} \quad (\text{A.16})$$

Construindo a resposta estrutural na forma de

$$q = \sqrt[2]{\frac{8}{\pi^2} \frac{I}{A} \left(\frac{P_A}{P_A - \alpha P_E} - \frac{\alpha P_E P_A}{P(P_A - \alpha P_E)} \right)} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{P_A}{P} = \left[\frac{P_A}{P_A - \alpha P_E} - \frac{\pi^2}{8} \frac{A}{I} q^2 \right] \frac{P_A - \alpha P_E}{\alpha P_E} \quad (\text{A.18})$$

Introduzindo um termo unitário para c e para o carregamento crítico de Euler, assim como um carregamento de 0 a 2, e imperfeições de α 0.9 e 0.8, assim como sem imperfeições, $\alpha=1$ monta-se a trajetória fundamental de pós flambagem para o caso de deslocamento prescrito axial compressivo em coluna bi rotulada.

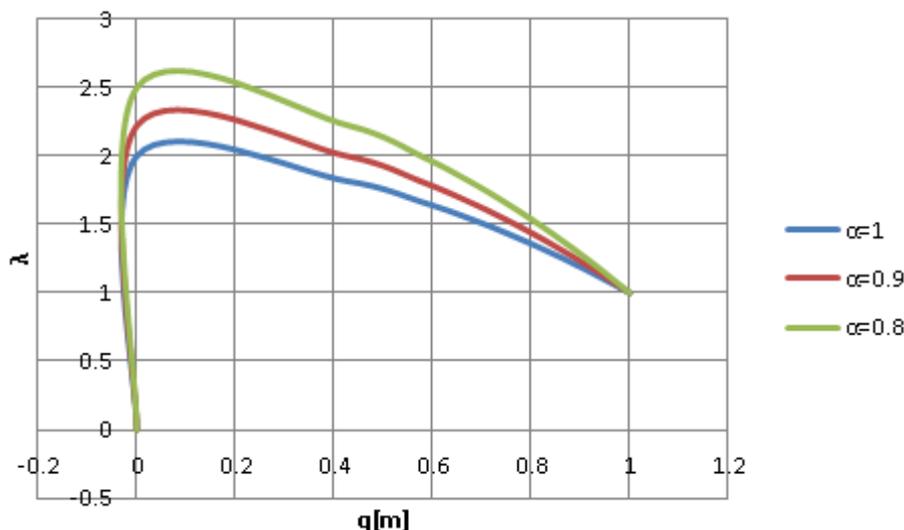


Figura A.1 - Coluna: Deslocamento Prescrito: Resposta estrutural

Percebe-se que ao final da trajetória de pós flambagem a estrutura tem um carregamento axial no valor de seu carregamento crítico, além da pequena influência das imperfeições no valor do deslocamento transversal, porém percebe-se a necessidade de mais carregamento quando são introduzidas imperfeições iniciais na estrutura, além da diminuição da encurvatura quando aplicada imperfeições.

O problema de pós encurvatura para colunas sobre força axial, quando empregado sob a mesma metodologia que a anterior, somente modificando o fator adimensional, também nos apresenta uma resposta estrutural com boa característica. O fator adimensional c , neste caso é atribuído de forma a se obter um deslocamento transversal a favor do experimento numérico.

Para isso, utiliza-se da Equação (A.12), em sua forma de instabilidade estável para descrever a trajetória de pós flambagem, na forma de.

$$a_I = \sqrt{\frac{8}{\pi^2} c (\lambda - \lambda_I)} \quad (\text{A.19})$$

Onde c , deve ter a forma de.

$$c = \frac{\pi^2}{8} \frac{2h}{L} \quad (\text{A.20})$$

Seguindo-se como nas Equações (A.14) e (A.15) encontra-se os coeficientes adimensional, na forma que P_A [N], é a carga prescrita.

$$\lambda = \frac{P}{(P_A - \alpha P_E)} \quad \lambda_I = \frac{\alpha P_E}{P_A - \alpha P_E} \quad (\text{A.21})$$

Assim como um deslocamento transversal e uma relação de carga, determinantes da trajetória de pós encurvatura na forma de.

$$q = \sqrt{2hL \left(\frac{P}{P_A - \alpha P_E} - \frac{\alpha P_E}{P_A - \alpha P_E} \right)} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{P}{P_E} = \left[\frac{\alpha P_E}{P_A - \alpha P_E} + \frac{q^2}{2hL} \right] \frac{P_A - \alpha P_E}{P_E} \quad (\text{A.23})$$

Na Figura A.2 apresenta-se a resposta estrutural para uma coluna sofrendo compressão axial, dada pela Equação (A.22), tendo como dimensão unitária.

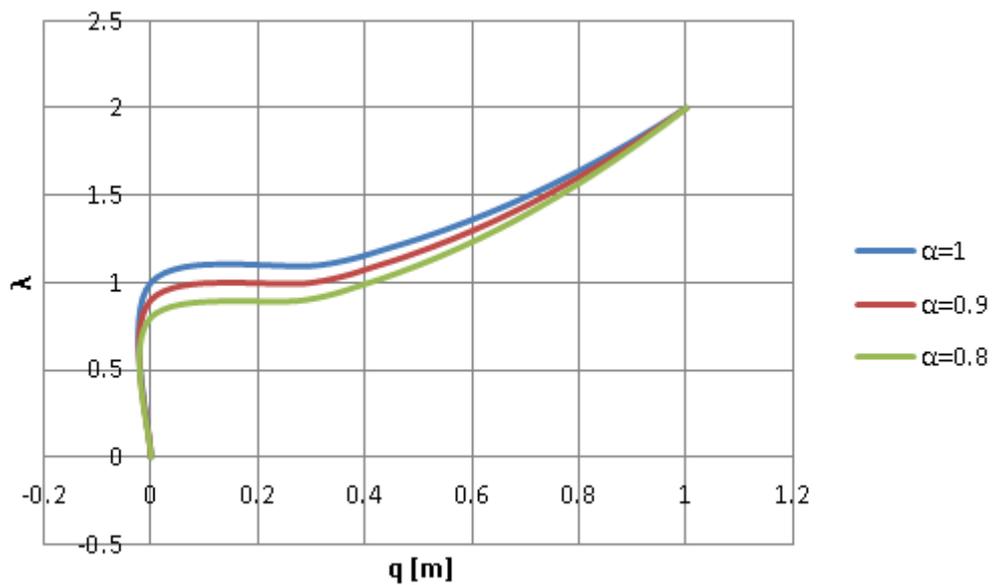


Figura A. 2 - Coluna: Força Axial: Resposta Estrutural Analítica

APÊNDICE B

A continuação se citam outros exemplos nos quais aparece o fenômeno de flambagem.

Estruturas celulares: Como exemplos deste tipo de estruturas que se encontram na natureza se podem citar esponjas e estruturas osseas, e como estruturas artificiais as estruturas tipo honey comb e espumas metálicas. Neste tipo de estrutura o fenômeno de flambagem é crucial na determinação da resistência global das mesmas. Em Lorna, 2005, referência clássica no estudo deste tipo de estruturas, encontram-se exemplos de estruturas em que a instabilidade determina o colapso das mesmas. Na Figura B.1, ilustram-se, numa estrutura celular tipo Honey Comb duas configurações instáveis da estrutura submetida a cargas na direção vertical e horizontal.

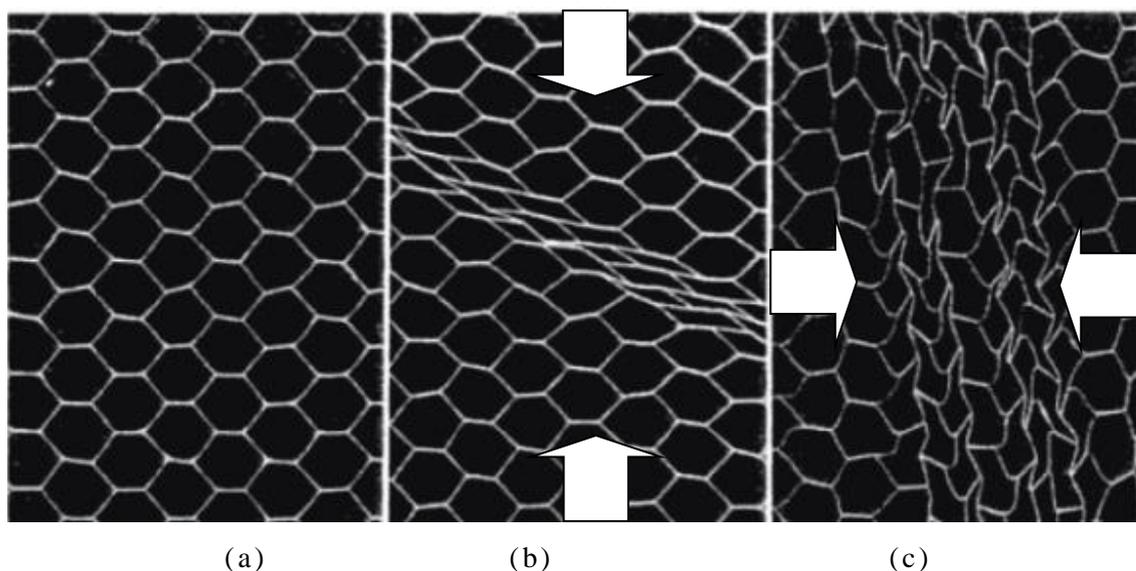


Figura B.1 - (a) Estrutura celular intacta, (b) Configuração deformada quando aplicamos carga de compressão na direção vertical, (c) Configuração final quando aplicamos carga de compressão na direção horizontal. Fonte: (Lorna 2005)

Microestrutura do tecido Ósseo: No trabalho de Gao, 2006, se analisa a microestrutura do tecido ósseo simplificado, formado pelo arranjo quase regular de placas de silicatos minerais rígidas e frágeis embebidas numa matriz proteica de baixa rigidez. A microestrutura descrita permite construir um sistema composto sem que aconteça instabilidade estrutural.

A microestrutura citada é ilustrada na Figura B.2. As placas minerais tem uma esbeltez (medida neste caso como a relação entre a largura e espessura) muito elevada, o que torna a placa isolada susceptível a flambar, mas as restrições de deformação, que a matriz proteica

confinada dentro da estrutura composta impõe sobre as placas, condiciona a instabilidade do composto, aumentando consideravelmente a carga crítica deste tipo de estrutura.

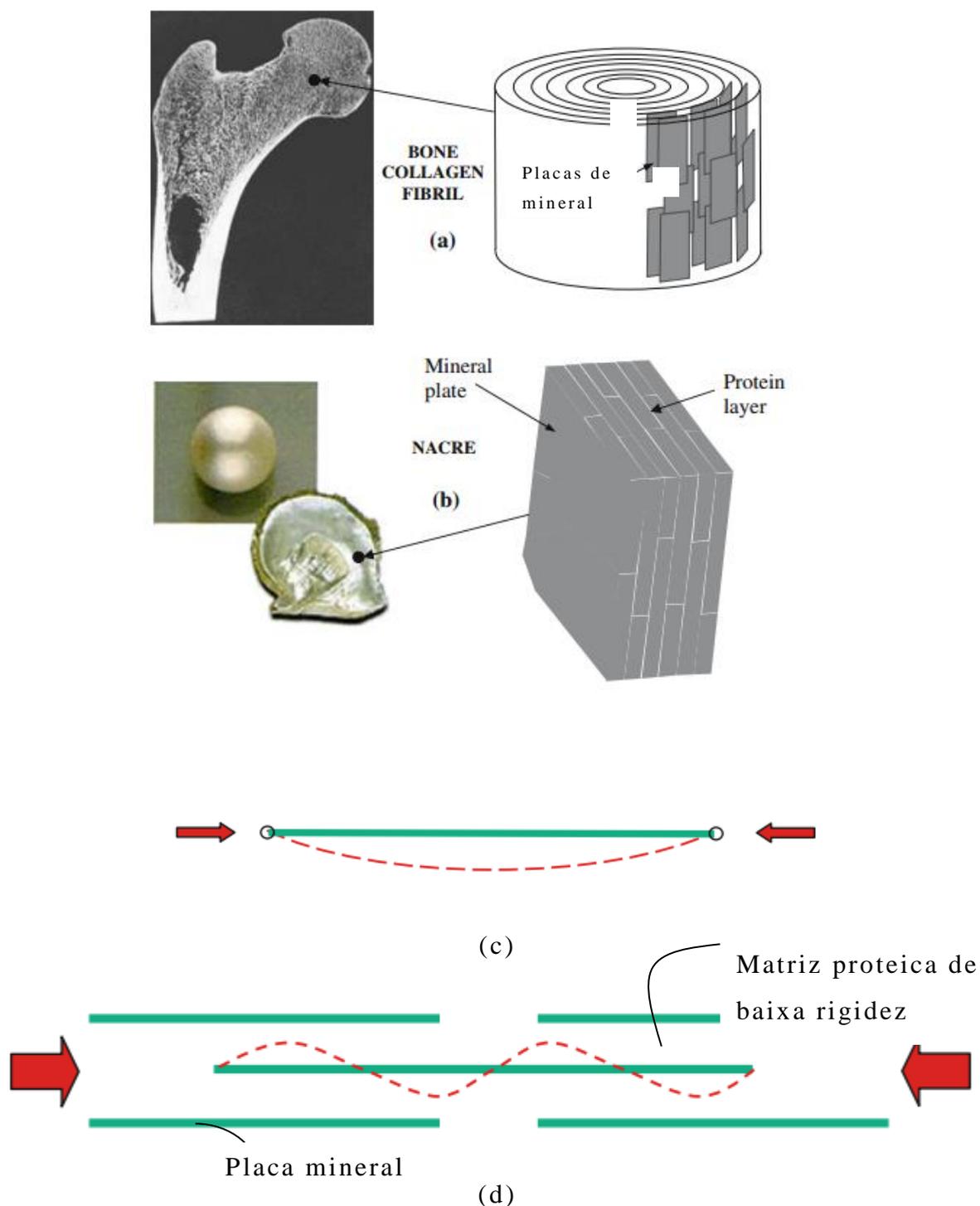


Figura B.2 - (a) Microestrutura no caso de um osso (placas minerais embebidas numa matriz proteica branda), (b) Microestrutura no caso do Nacar onde muda a relação de massa das placas e da matriz proteica. (c) Flambagem de placa isolada submetida à compressão uniaxial. (d) Configuração de flambagem das placas minerais dentro da estrutura composta analisada.

Fonte : (Gao 2006).

Outras estruturas em escala micro e nano métrica onde a flambagem cumpre um papel importante no comportamento mecânico, são discutidas em numerosa bibliografia especializada, como exemplo pode-se citar Wang et.al, 2010, e Shima, 2012.

No caso ilustrado na Figura B.3, uma variação de temperatura no substrato, impõe deslocamentos prescritos no filme, que resulta tensões de compressão acima da crítica, apresentando uma configuração de flambagem característica (enrugamento do filme).



Figura B.3 - Configurações de ruptura em filmes finos onde o substrato sofre uma variação da temperatura impondo deslocamentos prescritos sobre o filme e induzindo sua flambagem.

(filme de $11 \times 9 \text{mm}^2$, com uma espessura de 500nm).

Fonte: Wang et.al (2010).

Na Figura B.4, se apresenta a flambagem de nano tubos, neste caso dependendo da relação entre comprimento espessura da parede e diâmetro do nano tubo, a flambagem pode ser global ou local como se ilustra na Figura B.4.c.

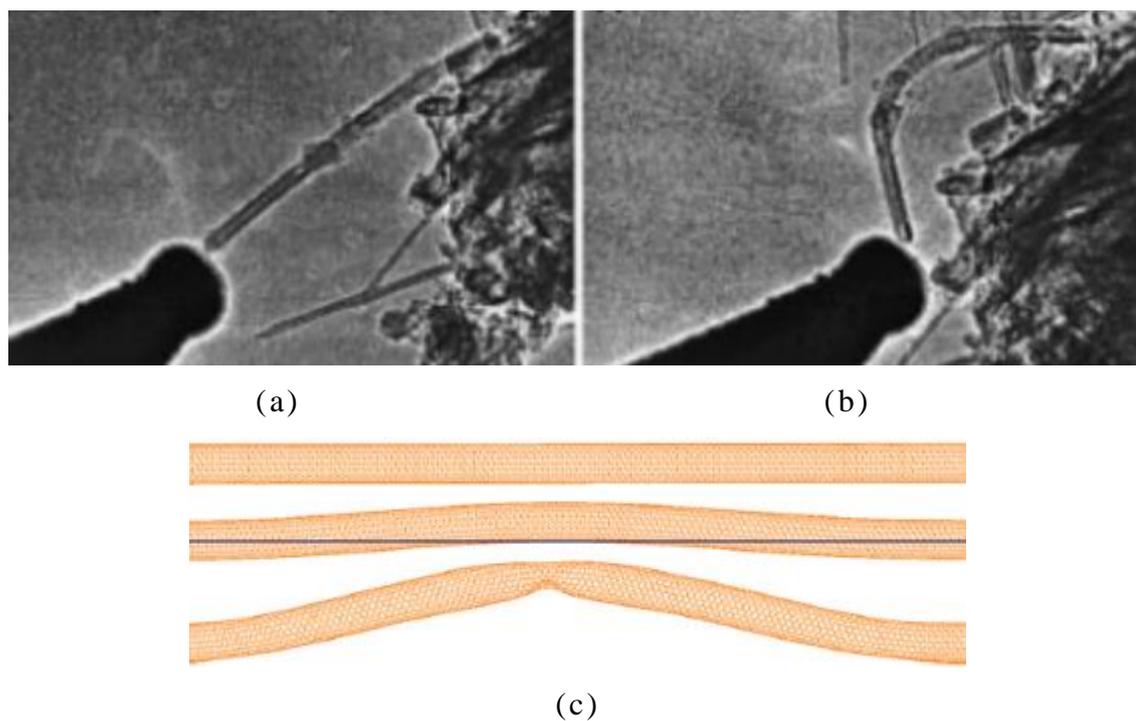


Figura B.4 - (a) e (b) Fotografias obtidas com Microscópio Eletrônico onde se observa a aplicação da carga sobre o nanotubo (c) Configurações de flambagem num nano tubo.

Fonte: (Kuzumaki e Mitsuda, 2006).