UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Daniel Rodrigues Topanotti

TRIGONOMETRIA, RELAÇÃO ENTRE MOVIMENTOS CIRCULARES E GRÁFICOS COM A AJUDA DO GEOGEBRA

Porto Alegre, RS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Daniel Rodrigues Topanotti

TRIGONOMETRIA, RELAÇÃO ENTRE MOVIMENTOS CIRCULARES E GRÁFICOS COM A AJUDA DO GEOGEBRA

Trabalho de conclusão de curso de Mestrando do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob orientacão do Prof. Dagoberto Adriano Rizzotto Justo, Ph.D.

Porto Alegre, RS
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Daniel Rodrigues Topanotti

TRIGONOMETRIA, RELAÇÃO ENTRE MOVIMENTOS CIRCULARES E GRÁFICOS COM A AJUDA DO GEOGEBRA

Banca Examinadora

____
Prof. Rodrigo Sychocki da Silva

____
Profa. Dra. Isolda Gianni de Lima

____
Prof(a). Dr(a). Débora da Silva Soares

Porto Alegre, RS
2016

RESUMO

Essa dissertação analisará uma abordagem investigativa de ensino de funções trigonométricas que prioriza a compreensão da relação entre movimentos circulares em diferentes velocidades com a formação gráfica gerada por esses movimentos. Com o auxílio do software Geogebra, diferentes movimentos foram criados, o que proporcionou a investigação gráfica por parte dos alunos. A atividade foi realizada no laboratório de informática onde, constantemente, houve investigação por parte dos alunos e intervenções significativas por parte do professor. Escolheu-se para essa pesquisa uma análise qualitativa embasada no processo descritivo das ações ocorridas em sala de aula. Para conhecer as características dessa abordagem, foi utilizado um estudo de casos. Após a atividade, os alunos conseguiram interpretar os principais movimentos gerados na circunferência e traduzi-los na sua forma gráfica. A análise mostra que os alunos não somente conseguiram desenvolver significados aos movimentos circulares, como também interpretaram corretamente situações cotidianas estabelecidas pelo professor ao fim do trabalho

Palavras-chave: movimentos circulares; gráficos trigonométricos; GeoGebra; investigação matemática.

ABSTRACT

This dissertation will analyze an investigative approach to the teaching of trigonometric functions that prioritizes the understanding of the relation between circular movements at different speeds with the graphical formation generated by these movements. With the help of the software Geogebra, different movements were created, which provided the graphic investigation by the students. The activity was carried out in the computer lab where, constantly, there was investigation by the students and significant interventions by the teacher. For this research, a qualitative analysis based on the descriptive process of the actions taken in the classroom was chosen. To know the characteristics of this approach, a case study was used. After the activity, the students were able to interpret the main movements generated on the circumference and translate them into their graphic form. The analysis shows that the students not only managed to develop meanings to the circular movements, but also correctly interpreted daily situations established by the teacher at the end of the work

Keywords: circular movements; Trigonometric graphs; GeoGebra; Mathematical research.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na busca de inspiração para digitar as primeiras palavras desse relato, procurou-se refletir sobre os impactos sociais provocados pela popularização dos computadores na sociedade. No início da década de 90, debatia-se sobre o provável e iminente período de desemprego que se aproximava com a popularização dos computadores. Achava-se que os homens seriam preteridos pelas máquinas que poderiam trabalhar com muita mais rapidez, precisão e de forma não assalariada.

Sabe-se que a história se desenvolveu por outros caminhos. A máquina que fora considerada provável inimiga do trabalhador passou a ser grande aliada na transformação da sociedade. Hoje fica difícil imaginar a sociedade longe desses instrumentos.

Se o computador ajudou o homem a melhorar a sociedade e está presente em muitos setores, então o ele pode ser significativo no desenvolvimento intelectual em sala de aula. Conforme Borba e Penteado (2003, p. 87), “no momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares.”

Trazer computadores para a sala de aula não significa somente utilizá-los como expositores, eles devem desconstruir o formato atual de transmissão de conhecimento centralizado no professor. Valente (2002) afirma que “o uso do computador para auxiliar o aprendiz a realizar tarefas sem compreender o que está fazendo é uma mera informatização do atual processo pedagógico.”

Desse modo, esse trabalho busca analisar uma forma alternativa de ensino de funções trigonométricas com o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra.

O trabalho consiste em criar uma série de movimentos circulares com diferentes velocidades e propor uma investigação gráfica. O objetivo dessa abordagem alternativa é a construção do significado de funções trigonométricas, pois, na abordagem tradicional, muitas vezes esse objetivo não é alcançado.

Nota-se que o ensino de funções trigonométricas, apresentado em muitos livros didáticos atuais, se limita a relacionar as transformações de funções na forma algébrica com a forma gráfica, deixando de lado o significado que elas carregam.

Acredita-se que o significado de funções trigonométricas deveria receber importância maior.

O trabalho consiste em criar uma série de movimentos circulares com diferentes velocidades e propor uma investigação gráfica. Investigar em matemática significa observar e estabelecer relações matemáticas existentes em determinada situação. Entre os seus objetivos está o desenvolvimento da autonomia, da capacidade de se envolver para atingir um objetivo, da habilidade em trabalhar em equipe, entre outros.

O objetivo dessa abordagem alternativa é a construção do significado de funções trigonométricas, pois, na abordagem tradicional, muitas vezes esse objetivo não é alcançado.

O estudo de funções se desenvolveu a partir de problemas que apareceram ao longo da história, grande parte sobre astronomia e navegação. A inspiração gerada por problemas reais desencadeou esse estudo teórico que hoje tem grande importância na modelagem de fenômenos periódicos, como variação de temperaturas, comportamentos das marés, vibrações sonoras, pressão sanguínea arterial ou até mesmo o funcionamento de um motor.

Problemas cotidianos inspiraram os homens a desenvolver parte da matemática. Ensinar trigonometria de forma mecânica e limitar-se a relacionar funções na forma algébrica com a forma gráfica empobrece o ensino e limita a capacidade criativa dos alunos. Acredita-se que a investigação dos movimentos circulares, proporcionará aos alunos a capacidade de interpretar outros movimentos periódicos presentes no cotidiano.

A dissertação aborda inicialmente como deve se desenvolver o ensino de trigonometria segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais. Posteriormente, faz-se um panorama sobre o uso das tecnologias em sala de aula, em especial, as potencialidades do software GeoGebra. Por fim, o artigo, em sua parte teórica, descreve as principais características de uma investigação matemática.

A atividade prática traz a descrição dos movimentos circulares junto com os resultados gráficos produzido pelos alunos. Alem disso, apresenta os gráficos corrigidos pelo software e, por fim, a síntese feita no GeoGebra sobre o papel dos coeficientes a, b, c e d na função genérica $f(x)=a+b.sen(cx+d)$.

Durante a atividade, ao mesmo tempo em que havia investigações por parte dos alunos, havia intervenções significativas por parte do professor.

Com a atividade de investigação gráfica, alem dos objetivos de gerar significado, os alunos desenvolveram habilidades sócio-afetivas fundamentais nos dias de hoje como o trabalho em equipe e a autonomia.

Ao fim do trabalho, o professor trabalhou situações práticas através de resolução de exercícios contextualizados. Os alunos foram capazes de associar os movimentos estudados na circunferência com movimentos circulares contextualizado, interpretando corretamente situações cotidianas e representando-as nas múltiplas formas de função.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Trigonometria e PCNs

A Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação implantou em 2009 um programa de orientação aos professores sobre inovações curriculares, o programa Ensino Médio Inovador (BRASIL, 2009).

As alterações curriculares propostas pelo programa visam a construção de uma escola mais ativa e criativa. Dentre as orientações, destacam-se alguns aspectos como a necessidade de construir uma escola que supere a mera memorização de conceitos; promover a articulação entre teoria e prática, vinculando o trabalho intelectual com atividades práticas experimentais; utilizar novas mídias e tecnologias educacionais como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem; estimular a capacidade de aprender do aluno, desenvolvendo o autodidatismo e a autonomia dos estudantes.

No campo da matemática, o programa recomenda que o estudo de funções, entre elas as trigonométricas, deva ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre grandezas, esboçando gráficos que modelem as relações e registrem tipos de crescimento e decrescimento.

Ao encontro dessas recomendações, se desenvolveu a estrutura desse trabalho que propõem uma investigação das diferentes funções trigonométricas. Essa nova proposta não limita o aluno a memorização de resultados e técnica, ela desenvolve o domínio de um saber fazer e saber pensar matemática, bem como recomenda os (PCNs) Parâmetro Curriculares Nacional (1999).

Alem disso, os PCNs afirmam que o ensino médio deva promover ao aluno conhecimento necessário para ele possa seguir aprendendo. Saber aprender é fundamental para o aperfeiçoamento em qualquer trajetória.

A trigonometria pode ser usada como exemplo dessa relação entre aprendizagem matemática e o desenvolvimento das habilidades descritas pelos PCNs. Segundo os PCNs, a trigonometria deve estar ligada às aplicações evitando exageros em cálculos algébricos de identidades. O ensino deve enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise dos seus gráficos.

Essa pesquisa não critica o ensino em abordar funções trigonométricas através da relação entre funções na forma algébrica com a forma gráfica, apenas sugere que o significado dessas funções deva ganhar importância maior.

Segundo os PCNs, especialmente aos estudantes que não darão continuidade aprofundada à matemática ao longo da vida, deve se assegurar as aplicações trigonométricas na resolução de problemas de distâncias inacessíveis a na construção de funções que modelem fenômenos periódicos.

Fortalecendo a ideia apresentada pelos Parâmetros Curriculares, o processo investigativo trabalhado nessa dissertação abre possibilidade para que esse assunto seja abordado de forma interdisciplinar com física.

Alem disso, os PCNs recomendam que o estudo de Trigonometria deve se reservar às funções seno, cosseno e tangente enfatizando o estudo da primeira volta do ciclo trigonométrico.

Segundo Costa (1997) a trigonometria se desenvolveu devido aos problemas relacionados à astronomia e a navegação. Com inspiração em problemas reais, o antigos investigaram e desenvolveram as funções trigonométricas que servem para modelar fenômenos periódicos.

Essa abordagem, alem de ir ao encontro dos principais aspectos que recomenda os PCNs, também se apropria de uma metodologia investigativa que aproxima os alunos a desenvolverem o conhecimento partindo de uma problematização para chegarem em uma conclusão. Segundo Basso, Notare (2012) experimentações, observações e descoberta, devem fazer parte do ensino de matemática. A conseqüência dessas atribuições é a compreensão em vários estágios fundamentais ao pensamento matemático.

2.2 Uso das tecnologias

Não há dúvidas que a popularização dos computadores e da internet ocasionaram profundas mudanças na sociedade. Hoje fica difícil lembrar como era a rotina de trabalho de um contador sem a sua planilha Excel; ou como era o quinto dia útil do mês numa agência bancária que não possuía máquinas de auto-atendimento; ou como os alunos pesquisavam sem a existência do Google.

No momento que a sociedade passa por transformações, se espera que o ensino promova mudanças para se adequar às novas exigências.

Segundo Kenski (1997), a educação passa por um processo de renovação de espaço e de valores, tendo como ponto de partida todas as mudanças ocorridas em sociedade. Talvez a mudança mais impactante ocorrida na sociedade moderna foi a popularização dos computadores domésticos. A partir desse impacto, a educação passa por processos de transformação que perduram até os dias de hoje.

Os primeiros movimentos em busca da mudança do ensino e a utilização de tecnologias nas escolas ocorreram no início da década de 80. O MEC e a secretaria de educação lançaram alguns programas entre eles o Educom. O objetivo desse programa era estimular as principais universidades como a UFRGS, UFRJ, UNICAMP, UFMG e UFPE a desenvolverem centros de pesquisas sobre as possibilidades de utilização da informática na educação.

Desses centros saíram os primeiros trabalhos sobre informática e educação. Como exemplo, pode-se citar o projeto FORMAR que oferecia cursos de especialização a tutores que, posteriormente, levavam as inovações para diferentes estados do Brasil.

Na área da educação, segundo Borba (2014), o uso de tecnologias em educação matemática no Brasil se divide em 4 fases, a primeira frase se caracteriza pelo uso do software LOGO, a segunda pelo uso de softwares de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica, a terceira pelo usa da internet em cursos a distância e a quarta pelo uso da internet rápida que democratiza a publicação de materiais digitais na grande rede.

A primeira fase, que teve início em meados de 1985, com o software de geometria LOGO, foi caracterizada pela perspectiva teórica construcionista que enfatizava a relação entre programação e pensamento matemático. Nessa fase as escolas começaram a se equipar com laboratórios de informático. O papel das tecnologias no processo de inserção não era o foco central, deu-se mais ênfase sobre como se deveria ensinar ficando em segundo plano o que deveria se ensinado.

A segunda fase teve início no início dos anos 90, quando houve a popularização dos computadores pessoais. Nessa fase as opiniões sobre a importância do computador na educação eram divergentes. O computador era novidade para maioria das pessoas. Por isso a insegurança e a falta de conhecimento sobre ele gerou dúvidas sobre a sua contribuição para a educação. Para que houvesse um reconhecimento da importância do computador na educação, professores tiveram que se expor ao novo e se desacomodar.

Nesse período surgiram programas de representações de funções como Winplot, Fun, Graphmathica e outros de geometria dinâmica como Cabri Géomètre e Geometricks. Com a criação desses programas de Geometria dinâmica, pela primeira vez foi possível trabalhar com o dinamismo de pode manipular, visualizar e construir figuras geométricas virtuais.

A terceira fase teve início por volta de 1999 com a popularização da internet. Nesse momento a internet começa a ser usada como fonte de pesquisa e comunicação. Foi nesse período que começaram a surgir os primeiros cursos de formação a distância.

Atualmente vive-se a quarta fase do desenvolvimento tecnológico em sala de aula. A novidade é a popularização da internet rápida. A quarta fase teve início em 2004 e se caracteriza pela publicação de trabalhos, vídeos, pesquisa e o fácil acesso que se tem a eles.

De acordo com Borba (2014), o surgimento de uma nova fase ocorre quando há inovações tecnológicas que mudam o cenário de educação matemática. O autor ainda destaca que o surgimento de uma nova fase não exclui ou substitui a anterior, elas se complementam e passam a existir de forma integrada.

O software GeoGebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e surge como um dos principais programas inovadores. Antes dele, programas como Cabri Geométre integravam a plataforma de Geometria dinâmica, e programas como Winplot integravam a plataforma da computação algébrica. Mas não havia um programa que integrava as duas plataformas simultaneamente. O GeoGebra surge como inovação nesse aspecto. Devido a sua potencialidade múltipla, atividades matemáticas diferenciadas passaram a ser desenvolvidas nesse programa.

A atividade desenvolvida nessa pesquisa relaciona conceitos geométricos na circunferência com relações funcionais. A produção de um material de apoio a outros professores caracteriza a fase atual que vivemos, a quarta fase, onde a popularização do internet rápida proporciona trocas de inovações.

Essa atividade é uma experimentação tecnológica onde será analisado aspectos do papel da mídia na produção de significado. O software GeoGebra oferece meios para a investigação da atividade que, por sua vez, permite a exploração de diferentes estratégias conduzida pelo professor. De acordo com Borba e Penteado(2001) e Broba e Villarreal (2005),

> Experimentação tecnológica pode ser entendido como o uso de tecnologias informáticas no estudo de conceitos ou na exploração de problemas matemáticos.

Além disso, segundo esses autores, a experimentação com tecnologia deve fornecer meios para: a manipulação dinâmica de objetos construídos; criação e conexão entre diferentes tipos de representação de objetos matemáticos; exploração do caráter visual dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos; criação de atividades matemáticas com direcionalidade ao seu objetivo; envolvimento com um novo tipo de linguagem entre outros.

Essa atividade apresentada as principais características citadas pelos autores. Os alunos constantemente manipulam partículas que giram sobre a circunferência em busca do gráfico gerado pelo seu movimento. Alem disso, fazem conexões entre as relações presentes na geometria com modelagem de funções.

Os autores ainda afirmam que as atividades que apresentam essas características assumem uma dimensão de descoberta, sendo totalmente apropriado aos cenários de ensino e aprendizagem de Matemática.

As relações estabelecidas pelos alunos entre movimentos geométricos e funções proporcionam a produção de significado desenvolvendo aprendizagem matemática.

Sobre o software GeoGebra, Basso e Notare (2012), afirmam que o software permite o estabelecimento de uma relação entre os dados de observação e a ação do aluno e, nesse processo, o aluno aumenta o grau de compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no processo.

2.3 Investigação em Matemática

Investigar em matemática significa observar e estabelecer relações matemáticas existentes em determinada situação. Quando o professor propõe uma atividade investigativa em sala de aula, entre os seus objetivos está o desenvolvimento da autonomia, da capacidade de se envolver para atingir um objetivo, da habilidade em trabalhar em equipe, entre outros.

> Ponte (2015) Os alunos aprendem quando mobilizam os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo.

Segundo Ponte (1999) o processo de investigação matemática se divide em quatro fases: A primeira abrange a exploração e reconhecimento da situação. Na segunda fase, há a formulação de conjecturas e a organização de dados. Na terceira há a execução de testes e na última há a construção do argumento e a demonstração do que se afirma.

Numa atividade investigativa o professor deixa de ser o transmissor de conhecimento e passa a orientar a atividade. Para que o aluno possa investigar, o professor deve deixá-lo exercer a sua autonomia agindo categoricamente, quando necessário, para orientar os alunos a aprender a investigar.

No inicio da atividade, o professor precisa garantir que todos os alunos tenham compreendido o objetivo da tarefa. Esse ponto é fundamental, pois só há investigação a partir dessa compreensão. Normalmente nessa fase os alunos que nunca fizeram atividades investigativas podem ficar ansiosos e perdidos, pois estão acostumados a lidarem com situações mais delimitadas e com respostas imediatas. O professor tem de aceitar que a fase inicial de um trabalho investigativo é caracterizada por situações com essas características.

Ás vezes, conforme relata Borba (2015), na etapa inicial, os alunos muitas vezes ficam observando e aparentam estarem perdidos, sem sabem o que fazer. Esse tempo inicial é essencial para que os alunos comecem a formularem questões.

Com o andamento do trabalho, o professor deve observar como andam as investigações dos alunos e prestar as orientações necessárias para que os alunos conquistem os seus objetivos.

Com o decorrer da atividade, alguns alunos começam a coletar e manipular dados, através desses dados, muitos alunos começam a criar conjecturas, outros alunos formulam suas conjecturas por outros caminhos.

A partir dessas formulações, o aluno passa a sustentar as suas conclusões deixando-as mais refinadas. Esse momento é considerado importante, pois nele se faz a sustentação de um argumento que começa a se criar.

Ao fim do processo, é o momento de compartilhar as conclusões com o grande grupo. Essa etapa é considerada importante pois há, muitas vezes, divergências de conclusões e debates de argumentações.

O papel do professor ao longo do processo é de contra-balancear o desenvolvimento da autonomia do aluno com a garantia que o trabalho esteja sendo executado de forma satisfatória. Para que isso ocorra, é necessário que o professor desafie e motive o aluno na busca de soluções.

No decorrer do processo, o professor deve coletar informações nos grupos que transita. É comum o professor se deparar com novas formas de pensar desenvolvidas pelos alunos. Por isso o professor deve estar atento e aberto para acompanhar essas estratégias e lidar com as possibilidades diversas que podem surgir.

Segundo Borba (2015):

> As aulas caracterizam-se por uma grande margem de imprevisibilidade, exigindo do professor uma grande flexibilidade para lidar com as situações novas que, com grande probabilidade, irão surgir

Essas imprevisibilidades não devem desmotivar o professor, pois fazem partes das novas habilidades que surgem na sociedade moderna.

3 PERCURSO METOTOLÓGICO

Levando em consideração os traços subjetivos de uma relação de aprendizagem estabelecida pelo sujeito, escolheu-se para essa pesquisa uma análise qualitativa embasada no processo descritivo das ações ocorridas em sala de aula. Segundo Garnica (2004) as características de uma pesquisa qualitativa são:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (p. 86).

A forma como se desenvolveu a abordagem do orientador, interferindo, muitas vezes, de maneira significativa para contribuir com as investigações propostas, mostra a ausência de neutralidade do professor pesquisador tanto no ambiente como em suas interpretações.

Além disso, é subjetiva a análise da construção de idéias dos alunos no processo investigativo, não sendo apropriado quantificar as fases do pensamento estabelecidas pelos alunos.

A própria análise construída a partir da captação de áudios dessa dissertação é caracterizada pela subjetividade da análise e pode ser melhor interpretada sob uma perspectiva qualitativa.

Não há maneira adequada de mensurar o investigado, tão pouco de que forma suas conclusões seriam significantes para a pesquisa.

3.1 Dados da Pesquisa

Para conhecer as características dessa abordagem alternativa de ensino, bem como concluir se os alunos compreendem o significado das principais funções trigonométricas, foi utilizado um estudo de casos.

Segundo Ponte, J.P (2006):

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objectivo é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse.

Nessa pesquisa, busca-se observar o conhecimento desenvolvido pelos alunos no processo investigativo proporcionado pelo GeoGebra. O trabalho de campo será relatado nessa pesquisa com fatores descritivos que visam conhecer os benefícios que esse processo inovador pode trazer ao ensino. Ponte (2006) afirma que em educação matemática, é comum em trabalho de mestrado e doutorado a utilização de estudos de caso para a investigação de questões referentes à aprendizagem de grupos de alunos, práticas de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos.

Segundo Ponte (2006):

> no estudo de um caso, seja ele qual for, é sempre preciso dar atenção à sua história (o modo como se desenvolveu) e ao seu contexto (os elementos exteriores, quer da realidade local, quer de natureza social e sistémica que mais o influenciaram).

Por isso, a cada aula, o professor registrou, tanto as atividades ocorridas em sala de aula, quanto os avanços ou dificuldades apresentados pelos alunos. Esses registros foram feitos em Diários de Campo e gravações de áudio em sala de aula.

Diário de campo segundo Feil (1995) é um instrumento no qual o pesquisador registra, descreve o que é significativo para a pesquisa e toma decisões. Ele se constitui na memória da pesquisa, dessa forma, deve ser feito no decorrer do processo.

O registro de áudio foi realizado de forma contínua com duas duplas que foram escolhidas de forma voluntária. Nesses áudios ficaram registrados os debates, as discussões, as dúvidas e a forma como cada dupla chegou aos resultados.

> Yin (1984) caracteriza um estudo de caso como: um tipo de pesquisa que tem sempre um forte cunho descritivo. Para isso apoia-se numa “descrição grossa” (thick description).

A análise dessa atividade não se limita somente à descrição detalhada da prática onde é apresentado características dessa nova abordagem, ela explora relações com o ensino tradicional onde constantemente será discutido a compreensão do significado.

Segundo Ponte (2006):

> um estudo de caso não tem de ser meramente descritivo, de um modo geral, quando isso acontece, o seu valor é muito reduzido. Na verdade, um estudo de caso pode ter um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes.

Portanto, essa análise apresenta características interpretativa onde busca-se observar a forma como os alunos desenvolvem o significado com a ajuda do GeoGebra contrabalanceando com os modelos tradicionais.

Para Ponte (2006):

> Uma das perspectivas teóricas fundamentais que inspira a investigação qualitativa é a interpretativa. Nesta perspectiva, uma ideia central é a de que a actividade humana é fundamentalmente uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado (meaning making). Num estudo de caso interpretativo pretende-se conhecer a realidade tal como ela é vista pelos actores que nela intervêm directamente.

Na mesma linha apresentada por Ponte, Bogdan e Biklen (1994) apontam que existem muitas formas de interpretação dessas experiências e elas estão entrelaçadas com a interação do professor com o aluno.

3.2 Descrição da Prática

Esse trabalho foi realizado com duas turmas da 3° série do ensino médio do colégio Israelita Brasileiro, em Porto Alegre, no laboratório de informática. No turno da manhã, os alunos foram dispostos em duplas, onde cada dupla construiu e trabalhou com o seu próprio círculo. Em cada turma, a atividade durou 10 períodos de 45 minutos.

Ao início do trabalho, o professor definiu com seus alunos de forma expositiva o conceito de circunferência trigonométrica. Após a definição, cada dupla recebeu orientações por escrito para a construção do círculo trigonométrico no GeoGebra. Nessa sequência de passos, constava a criação de um ponto *B* que girava sobre a circunferência trigonométrica referenciado por um ponto seletor *α*. Sobre o eixo y, foi projetado a altura desse ponto que variava conforme o ponto se deslocava. Essa projeção foi definida como a função seno do ângulo seletor α, como indica a figura abaixo.

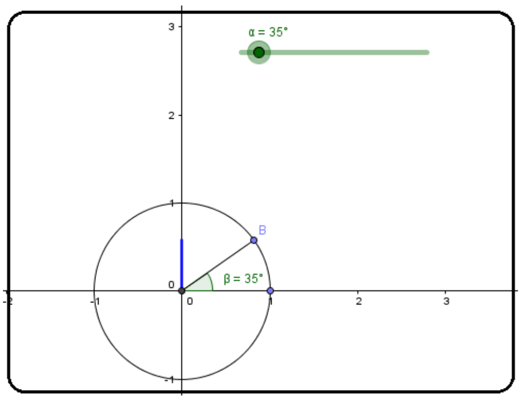


Figura 1: círculo trigonométrico com o ponto referenciado pelo ponto seletor

Abaixo segue os passos apresentados aos alunos para a construção do círculo. Todas as construções e atividades propostas aparecem de forma integral no apêndice 1 na forma como foram apresentada aos alunos.

i) Construção de um círculo com raio 1.

Clique com o botão direito sobre a tela e ative o botão malha. Clique no menu "Exibir" e ative a função "janela de "visualização 2". Nesse momento, abrirá duas janelas de visualização, a da esquerda será usada para a construção dos gráficos; a da direita, para a construção da *circunferência. Como estamos construindo a circunferência trigonométrica, todos os passos que serão descritos a seguir serão efetuado na janela de visualização 2, ou seja a da direita. A malha só será importante na janela de visualização 1, logo não há necessidade de repetir o processo na janela de visualização 2.*

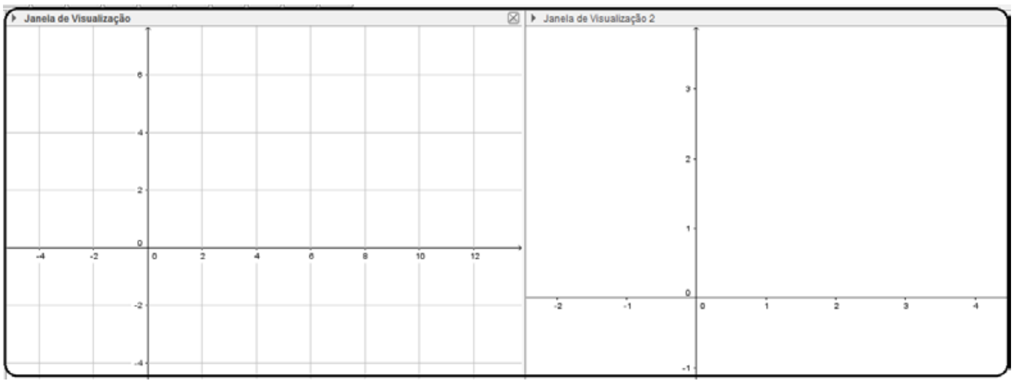


Figura 2: janelas de visualizações

Abra o sexto menu, *, e escolha a opção "círculo dado centro e raio". Clique no centro dos eixos coordenados. Imediatamente o programa perguntará o valor do raio, você deve digitar "1", pois se trata de uma circunferência trigonométrica. O resultado será como mostra a figura abaixo.*

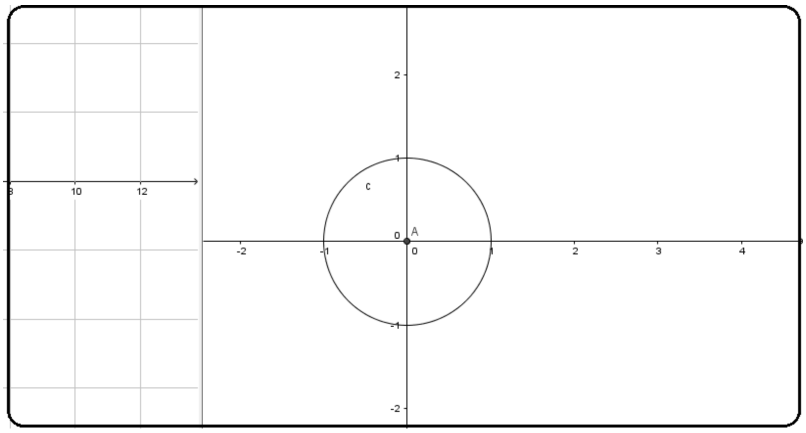
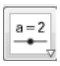


Figura 3: círculo dado centro e raio

ii) Construção de um ponto seletor.

Vá ao penúltimo menu 

, selecione a opção "controle deslizante" e clique sobre alguma região da área de visualização 2. Abrirá uma janela onde deve-se ativar o botão "ângulo" e dentro da aba "animação" deve-se marcar para repetir de forma "crescente". Após, clique em "ok" Veja abaixo.

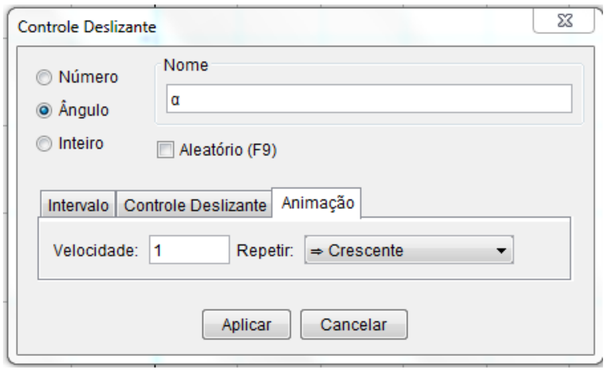


Figura 4: criação do controle deslizante

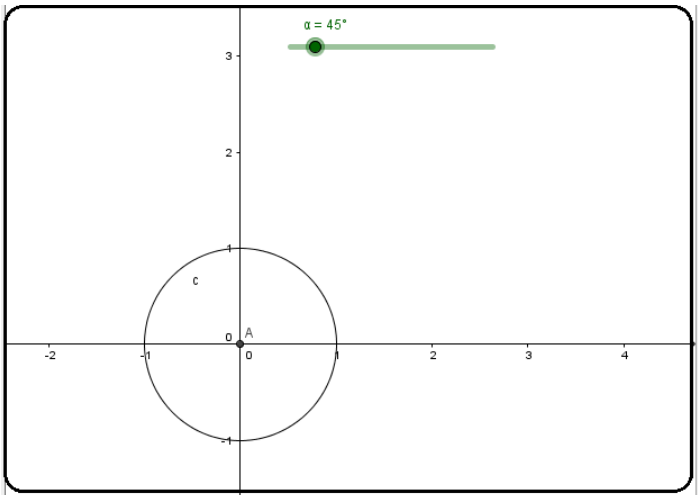


Figura 5: controle deslizante criado

iii) Ponto livre sobre a circunferência

O próximo passo é criar um ponto que se movimente sobre a circunferência de acordo com a variação do ângulo seletor α. Vá ao segundo menu  *e clique na opção “ponto”. Clique sobre a circunferência para criar um ponto B. Vá ao mesmo menu e escolha a opção ‘interseção de dois objetos” . Clique sobre o eixo x e, em seguida, sobre a circunferência, com isso um ponto C será criado. O ponto C servirá de referência para a movimentação do ponto B.*

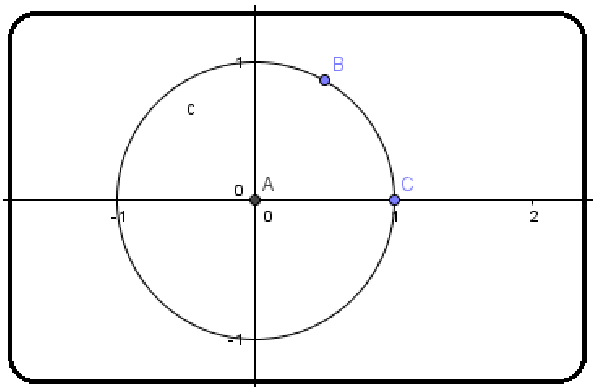


Figura 6: ponto sobre a circunferência

Procure no oitavo menu  *a opção "ângulo" e clique nela. Após isso, clique sobre os pontos C, A, B, nessa ordem. Dessa forma aparecerá um ângulo β com referência CÂB. Observe que o ponto B é livre pela circunferência e que o ângulo β varia conforme a movimentação do ponto.*

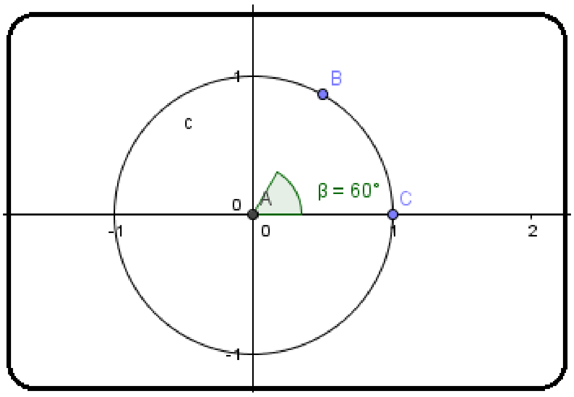


Figura 7: criação do ângulo β

iv) Associação do ponto B ao ponto seletor α.

Agora temos de fazer o ponto B variar sobre a circunferência utilizando como referência o ângulo seletor α. Dê um duplo clique no ponto B, aparecerá uma janela como a representada abaixo, escreva Girar[C, α, A] e clique em ok. Após isso mexa o seletor α e observe se o ponto B "correrá" sobre a circunferência. Observe que o ângulo β interno à circunferência é congruente ao ângulo seletor α, com isso, a mesma variação que ocorrer em α, ocorrerá em β.

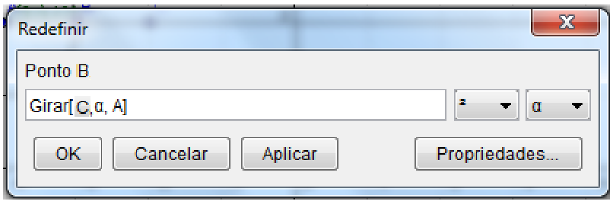


Figura 8: redefinição do ponto B

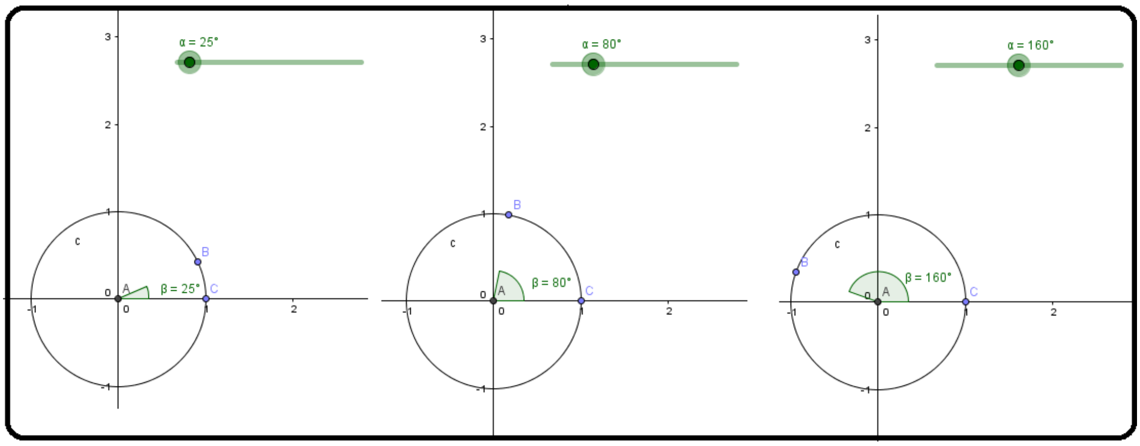


Figura 9: ponto B se movimentando conforme o ponto seletor

v) Seno no círculo trigonométrico.

Inicialmente, criaremos somente a função seno e deixaremos as outras funções como desafio. Vá ao quarto menu  *e clique em "reta perpendicular" . Em seguida clique sobre o ponto B e o eixo y, nessa ordem. Observe que uma reta perpendicular ao eixo y passando por B é criada.*

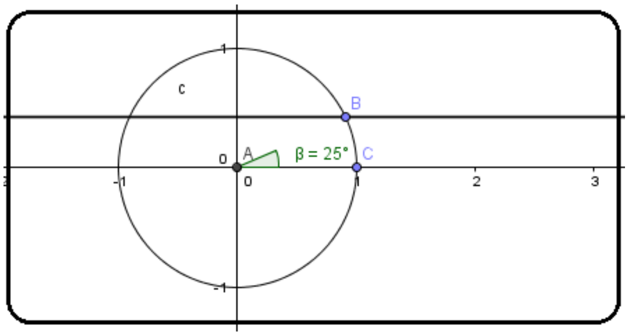


Figura 10: reta perpendicular ao eixo y passando por B

Vá ao segundo menu  *e clique em "interseção de dois objetos". Em seguida clique primeiro sobre o eixo y e, depois, sobre a reta perpendicular criada. Observe que um ponto será criado nessa intersecção.*

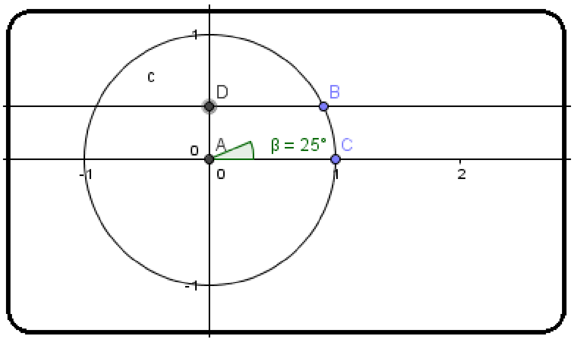


Figura 11: ponto de intersecção entre a reta perpendicular e o eixo y

Vamos criar um segmento que ligue a origem ao ponto de interseção D. Vá ao terceiro menu  *e clique em segmento, em seguida clique primeiro no ponto D depois no ponto de origem A. Para deixar o segmento mais visível, clique com o botão direito do mouse sobre o segmento e abra o menu propriedades. Na aba "cor", altere para a de sua preferência; na aba "estilo", altere a espessura da linha para 5, feche o menu. Aproveite também para criar um segmento que ligue os pontos B e a origem A, para melhor ilustrar o movimento.*

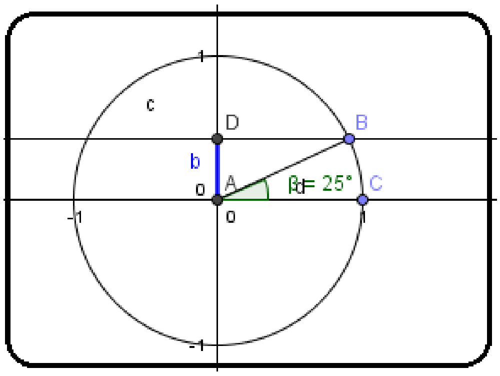


Figura 12: segmento AD

vi) esconder o que não deve ser mostrado.

Devemos esconder tudo que não tem importância para a nossa atividade. Vá ao último menu e clique em "Exibir/Esconder Objeto", em seguida clique sobre a reta perpendicular e o ponto D. Vá ao último menu novamente e clique em "Exibir/Esconder Rótulo", em seguida cliquei sobre os rótulos c, b, d, C, A, veja a figura abaixo.

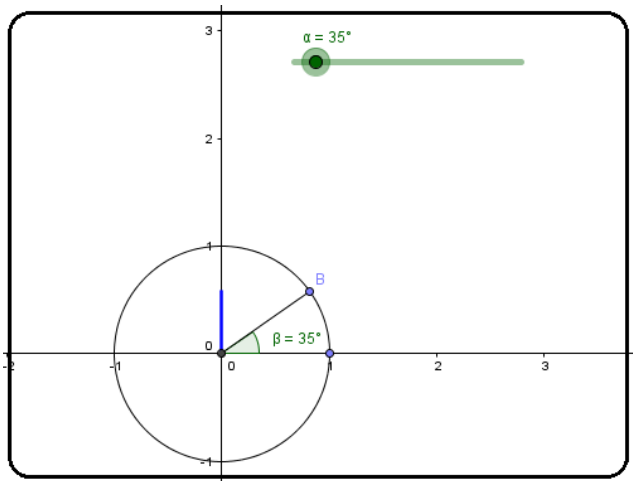


Figura 13: construções escondidas

Ative o ponto seletor, clique com o botão direito sobre o ponto α e marque a opção "animar". Veja se o ponto B girará sobre a circunferência.

Após a construção, cada dupla possuía em seu computador um círculo trigonométrico com a função seno (α) variando conforme o ponto seletor. Alguns conceitos que não são objetivos principais dessa pesquisa deram início ao processo investigativo. Para isso, os seguintes questionamentos foram feitos:

1) O comportamento da função seno no 1° quadrante é crescente, decrescente ou contínua?

2) Qual o sinal da função seno no primeiro quadrante?

3) Responda as perguntas 1 e 2 para todos os quadrantes.

4) É possível determinar o valor da função sobre os eixos coordenados, se sim, diga quanto vale.

Foi concedido um tempo de 10 minutos para que os alunos, em duplas, discutissem as questões entre si. Enquanto os alunos respondiam as questões, a animação da função y=sen(x) era repetida pelo programa em cada computador. Após expirar o tempo, os seis grupos responderam em voz alta as suas conclusões.

Posteriormente foi proposto às duplas que tentasse desenhar um gráfico que representasse o comprimento da projeção em função do ângulo seletor. O orientador explicou que o comprimento deveria ser representado no eixo y enquanto que a variação angular α deveria ser representada no eixo x. A animação do GeoGebra foi posta em atividade novamente para auxiliar na elaboração do gráfico. Para essa tarefa foi estimado um tempo de 10 minutos, todos olhavam com frequência para os computadores a cada rabisco que esboçavam no papel. A borracha foi muito utilizada até que um resultado final fosse apresentado.

Após essa investigação, alguns questionamentos pré-estabelecidos foram apresentados aos alunos, veja:

I) Ative o movimento do seletor e faça um esboço no plano cartesiano abaixo de um gráfico que modele o comprimento da projeção seno em função do ângulo seletor. O comprimento da projeção deverá ser representado no eixo Y, enquanto que o valor de α deverá ser representado no eixo x. Após isso, cada grupo deverá eleger um representante para apresentar os resultados para todos. Utilize o plano abaixo para fazer esse esboço.

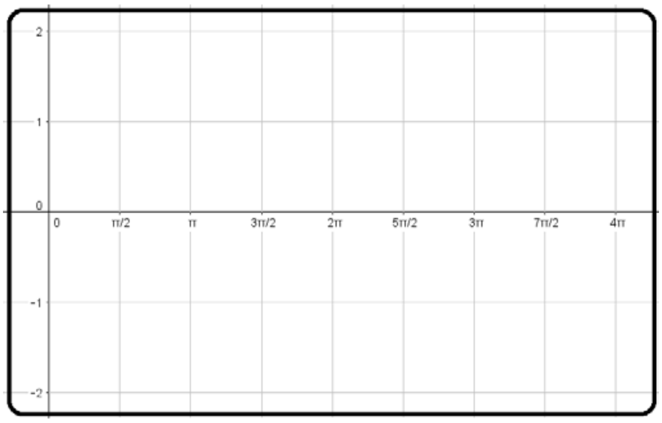


Figura 14: plano cartesiano para a atividade 1

II) Definimos período de uma função periódica como o comprimento de uma oscilação completa em relação à variável x. Com base nessa definição, indique o período dessa função.

III) Pode compreender a imagem de uma função como os intervalos do eixo y onde a curva está representada. Indique a imagem dessa função.

O professor estimou um tempo para que os alunos discutissem em voz alta as suas conclusões. Após a apresentação dos gráficos modelados pelos alunos, o professor os orientou a programarem o GeoGebra para traçar o gráfico ao mesmo tempo em que o ponto *B* se movimentava pela circunferência trigonométrica. Para isso, os seguintes passos foram apresentados aos alunos:

Resolução da atividade 1 com o GeoGebra

Crie um ponto na janela de visualização 1 e dê um duplo clique sobre o ponto com o botão esquerdo do mouse. Aparecerá uma janela com as coordenadas x e y desse ponto. A coordenada x deve ser substituída por α; a coordenada y, por sin(α). Veja abaixo.

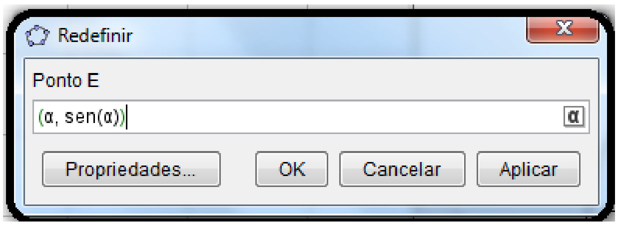


Figura 15: redefinir ponto E

Além disso, devemos editar a unidade de medida do eixo x. É comum em trigonometria medir ângulo de rotação em radianos. Para alterar isso no eixo, devemos clicar com o botão direito na janela de visualização 1 e procurar a opção "janela de visualização". Dentro dessa opção, devemos procurar a opção "Eixo x" e marcar distância em π/2 e unidade em π, como na figura abaixo.

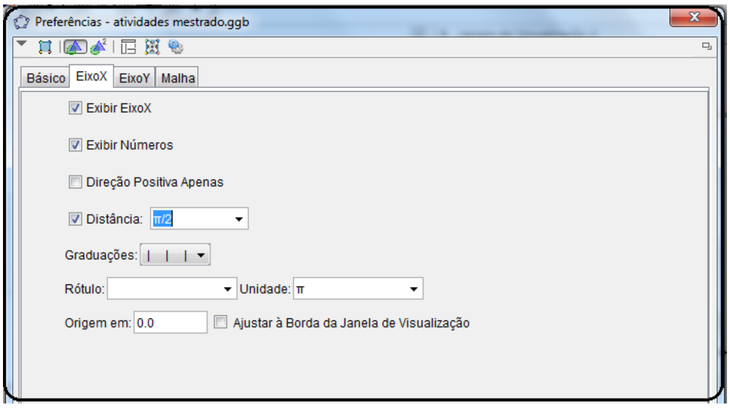


Figura 16: edição da unidade de medida do eixo x

Clique com o botão direito sobre o ponto E e ative a opção habilitar rastro. Após isso ative a rotação do seletor na janela de visualização 2 e observe o gráfico resultante.

Esse gráfico é igual ao que você esboçou no papel? O que é igual e o que é diferente?

Dessa forma, após as construções acima, foi iniciada a movimentação do seletor *α*, e o gráfico foi traçado simultaneamente conforme a variação da projeção, observe a figura abaixo:

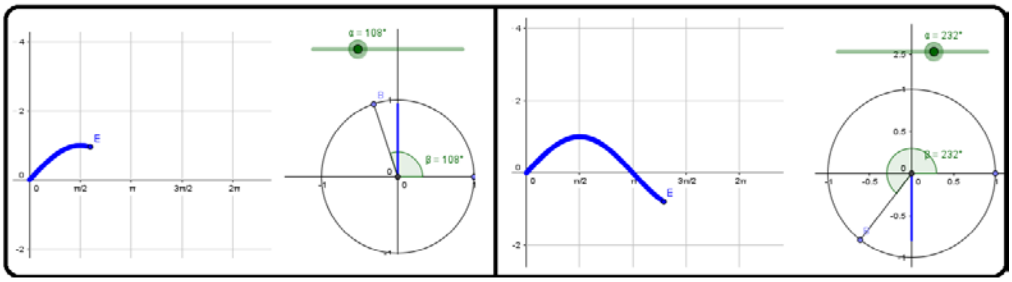


Figura 17: correção da atividade 1

Para iniciar a atividade 2, foi necessário criar um ponto *F* que girasse pela circunferência trigonométrica formando um ângulo *θ* de forma que *θ=2α*. O mesmo procedimento utilizado para a criação do ponto *B* foi utilizado para a criação do ponto *F*, inclusive a criação de uma nova projeção sobre o eixo y com cor diferenciada da anterior. A diferença entre os dois pontos é que o ponto *E* girava sobre a circunferência ao mesmo passo do seletor *α* através da orientação *"Girar[B, α, A]"* enquanto que o ponto *F* se movia com o dobro da velocidade através da orientação *"Girar[B, 2α, A]"*, veja:

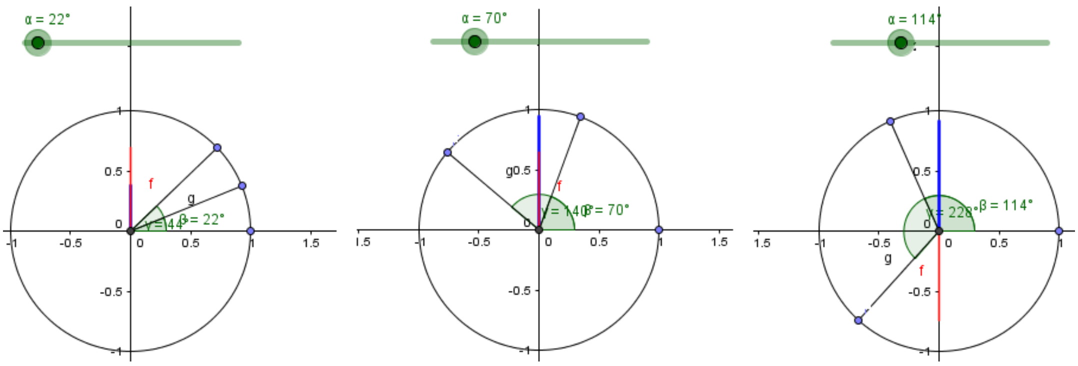


Figura 18: novo ponto sobre a circunferência trigonométrica com o dobro da velocidade

Para criar o novo ponto, os seguintes passos foram apresentados aos alunos:

Criação de um novo ponto com o dobro da velocidade

Criaremos um novo ponto sobre a circunferência, na janela de visualização 2, com o dobro da velocidade do ponto B. O mesmo procedimento utilizado para criarmos o ponto B, será utilizado para a criação do ponto F. Insira um ponto sobre a circunferência, dê um duplo clique com o botão esquerdo sobre o ponto e escreva: Girar[C, 2α, A]. Dessa forma, ele passará a girar com o dobro da velocidade. Para gerar a projeção desse novo ponto sobre o eixo y, devemos repetir o processo do ponto B. Passe uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto F. Após isso, insira um ponto de interseção dessa reta com o eixo y, como a figura abaixo.

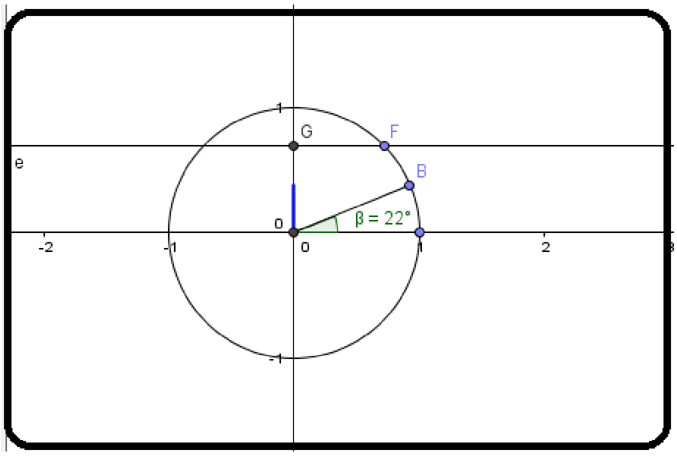


Figura 19: criação do novo ponto com o dobro da velocidade

Crie um segmento com os pontos AG, mude a cor e aumente a espessura desse segmento, esconda a antiga projeção de B e deixe somente o ponto B. Crie outro segmento com os pontos AF e forme um ângulo de rotação CAF, nessa ordem. Esconda a reta criada e ative a rotação do novo ponto.

Agora o novo desafio para os grupos era descobrir o gráfico gerado pela projeção do ponto F em função da variação do seletor α. Foi concedido um tempo para que os grupos pensassem as mudanças ocorridas no gráfico e respondessem algumas questões estabelecidas pelos professor, veja abaixo:

I) Desenhe um gráfico que modele o comprimento dessa nova projeção em função do seletor, O eixo x deve conter as coordenadas do seletor, e não do ângulo de rotação do novo ponto. Cada grupo deverá escolher um representante para apresentar os resultados

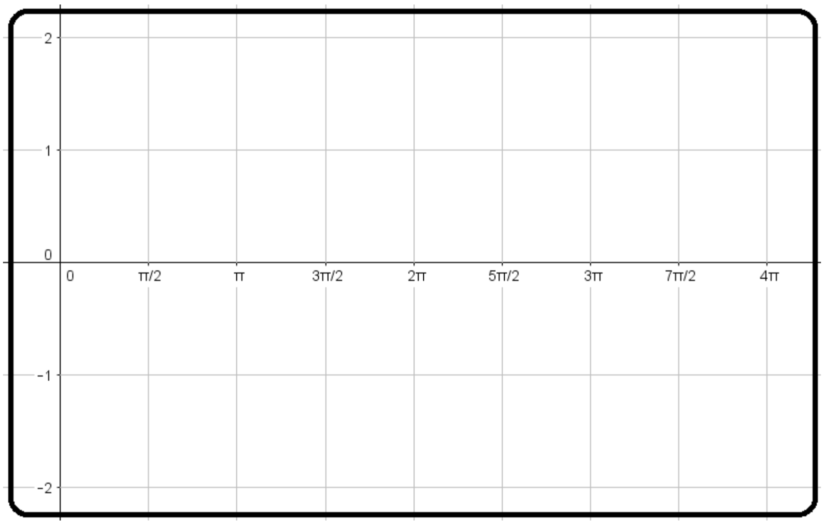


Figura 20: plano cartesiano para a atividade 2

II) Qual o período dessa nova função?

III) Qual a imagem dessa nova função?

IV) Entendemos frequência como o número de oscilações de uma curva em um determinado tempo. Nesse caso, qual a frequência dessa função no intervalo 2π?

Novamente foi dado um tempo para que os alunos modelassem o gráfico e respondessem aos questionamentos. Após a resolução os resultados foram discutidos em grande grupo. Para corrigir os gráficos, os alunos foram orientados a criar um ponto H na janela de visualização 2 e programá-lo a traçar o gráfico da nova projeção conforme a figura abaixo:

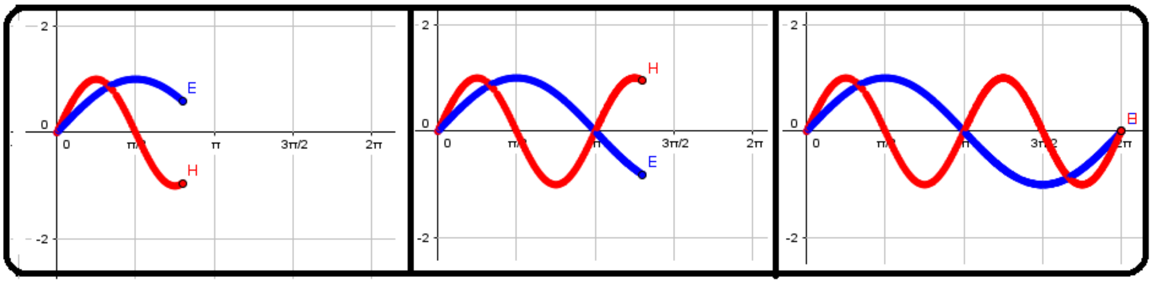


Figura 21: correção da segunda atividade

Para a resolução da atividade 2, os seguintes passos foram utilizados:

Resolução da atividade 2 com o GeoGebra

Crie um novo ponto na janela de visualização 1 e dê um duplo clique sobre esse ponto com o botão esquerdo do mouse. Aparecerá uma janela com as coordenadas x e y desse ponto. A coordenada x deve ser substituída por α; a coordenada y, por sin(2α). Veja abaixo.

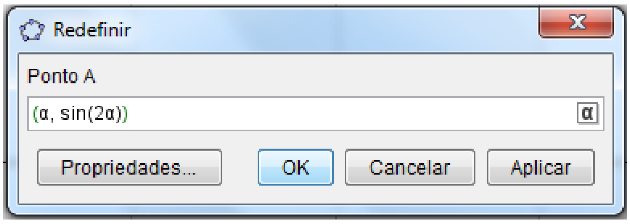


Figura 22: redefinição do ponto A

Clique com o botão direito sobre esse novo ponto e ative a opção habilitar rastro. Após isso ative o ponto seletor na janela de visualização 2 e observe o gráfico resultante.

Para dar início à atividade 3, foi necessário um ponto com metade da velocidade do ponto seletor. Para isso, bastou editar a velocidade do segundo ponto para metade da velocidade do seletor. Os seguintes passos foram apresentados:

Novos procedimentos para a atividade 3

Edite o último ponto criado sobre a circunferência para girar com metade da velocidade. De um duplo clique com o botão esquerdo sobre o ponto e escreva: Girar[C, α/2, A]. Agora ative o ponto seletor.

Novamente foi concedido um tempo para investigação dos gráficos e, após as conclusões, responderem as perguntas, veja:

I) Desenhe um gráfico que modele o comprimento dessa nova projeção em função do ponto seletor, O eixo x deve conter os valores do seletor, e não do ângulo de rotação do novo ponto. Cada grupo deverá escolher um representante para apresentar os resultados

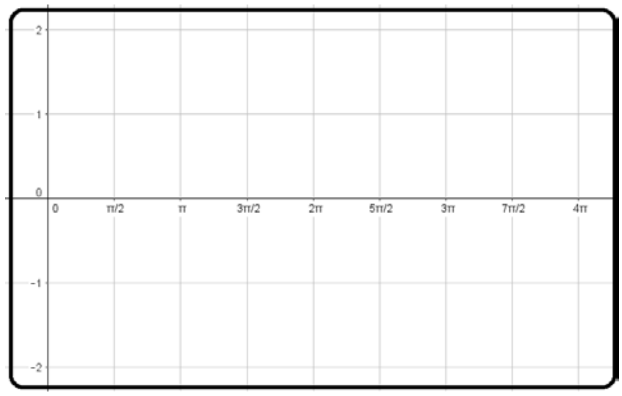


Figura 23: plano cartesiano para a atividade 3

II) Qual o período dessa nova função?

III) qual a imagem dessa nova função?

IV) Qual a frequência da função?

Após as novas apresentações em voz alta com o grande grupo, os alunos corrigiram as suas investigações com a ajuda dos seguinte roteiro

Resolução da atividade 3 com o GeoGebra

Edite o último ponto da janela de visualização 1. Dê um duplo clique sobre esse ponto com o botão esquerdo do mouse. Aparecerá uma janela com as coordenadas x e y desse ponto. A coordenada x deve ser substituída por α; a coordenada y, por sin(α/2). Antes de ativar a rotação do ponto seletor, edite o ponto para variar no intervalo de 0° a 720°. Dê um duplo clique com o botão esquerdo sobre o ponto seletor e mude os valores min e max.

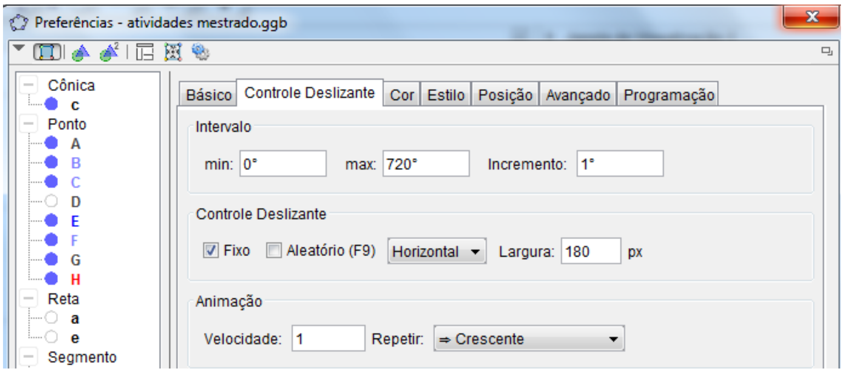


Figura 24: edição do intervalo do ponto seletor

Ative a rotação do ponto seletor.

A primeira parte da tarefa foi concluída. Com o intuito de fortalecer as conclusões estabelecidas, os professor apresentou aos alunos alguns exercícios (incluíndo também alguns exercícios de vestibular), veja abaixo:

Exercícios

I) Complete o quadro abaixo editando a velocidade tanto no ponto da janela de visualização 2 quanto na janela de visualização 1. Depois responda qual a relação entre a mudança de velocidade das partículas e o período dos gráficos?

Velocidade	***Período***
α/4	*8p*
α/2	*4p*
α	*2π*
2α	*p*
4α	*p/2*

II) Sem a ajuda do GeoGebra, indique o período das funções sen(3α) e sin(α/3)?

*III) O que ocorre com o gráfico da função y=sen(k*α) quando k>1 e quando 0<k<1?*

Exercícios

1(UFRGS) O número de interseções da função f(x)=sen(5x) com o eixo das abscissas no intervalo [-2π, 2π] é

Obs: use o GeoGebra para conferir sua resposta.

a) 10 b) 14 c)21 d) 24 e) 27

2. O período da função definida por $f(x) = \text{sen}(3x)$ *é*

a) $\frac{\pi}{2}$ *b)* $\frac{2\pi}{3}$ *c)* $\frac{5\pi}{6}$ *d)* π *e)* 2π

3. (UCS-2004/1) Nossa respiração é um fenômeno cíclico, com períodos alternados de inspiração e expiração. Em um determinado adulto, a velocidade do ar nos pulmões em função do tempo, em segundos, decorrido a partir do início de uma inspiração é dada pela equação $v(t) = 0{,}5.\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$. *O ciclo respiratório completo desse adulto é de:*

4. Poderíamos definir som como sendo o resultado de oscilações muito rápidas
que ocorrem na natureza. Desta forma, as notas musicais poderiam se definir como sendo variações da frequência dessas oscilações. O Lá (ou A) que fica logo acima do Dó (ou C) central do piano tem a frequência de 440 Hz . A próxima nota Lá, a direita da anterior, tem frequência de 880 Hz, veja o desenho abaixo:

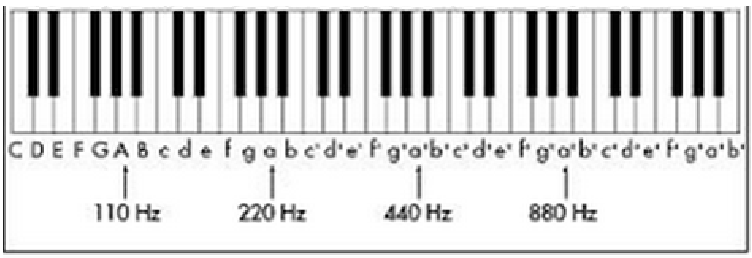


Figura 25: frequências no piano

A vibração de uma nota musical em função do tempo é representada pela função
y = sen(2πf.t) onde f é a frequência de oscilações.

Marque V ou F e justifique as falsas.

( ) Quanto maior a frequência maior o período.

( ) Quanto maior a frequência maior a amplitude.

( ) As frequências das diferentes notas Lá formam uma progressão aritmética de razão 110.

( ) As frequências das diferentes notas Lá formam uma progressão geométrica de razão 2.

A segunda parte da aula se caracterizou por investigações referentes a mudanças realizadas no círculo, ou seja, o novo desafio era explorar as variações em relação à variável y. Para isso se construiu uma circunferência concêntrica à circunferência trigonométrica com o dobro do raio. Sobre essa nova circunferência foi criado uma partícula que girava com a mesma velocidade da partícula inicial *E.* O movimento vertical dessa partícula foi projetado no eixo y. O trabalho dos alunos após a construção era modelar o comprimento da projeção em função do ângulo seletor α.

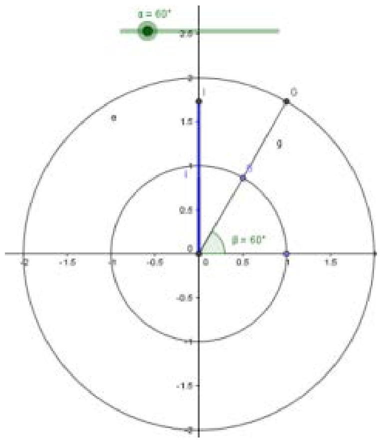


Figura 26: círculo de raio 2 concêntrico com a circunferência trigonométrica

Para a construção desse novo círculo, os seguinte passos foram apresentados:

Exclua o ponto F, e mantenha somente o ponto inicial B. Para isso, basta clicar sobre o ponto F e apertar a tecla "delete". Delete também os pontos que desenham os gráficos na janela de visualização 1. Faremos outro círculo concêntrico ao primeiro com o dobro do raio. No sexto menu, clique na opção "círculos dados centro e raios". Após, clique no centro da circunferência trigonométrica já existente na janela de visualização 2. Aparecerá uma janela que perguntará o raio da circunferência, digite 2. Veja a figura abaixo

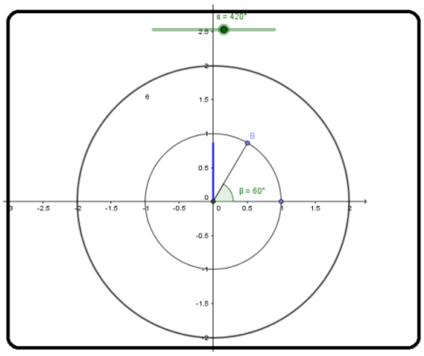


Figura 27: circunferência de raio 2

Crie uma reta que passe pelo ponto de origem dos círculos e pelo ponto B, após crie um novo ponto F na interseção dessa reta com a circunferência de raio 2.

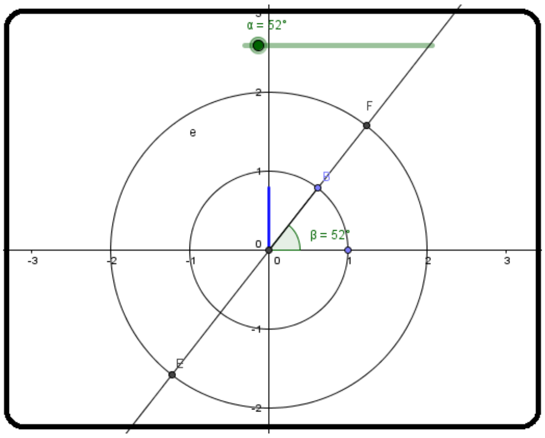


Figura 28: reta que passa pelo centro e por B

Trace uma reta paralela ao eixo X passando pelo ponto F e crie um novo ponto G de interseção entre essa reta e o eixo y, veja o desenho abaixo.

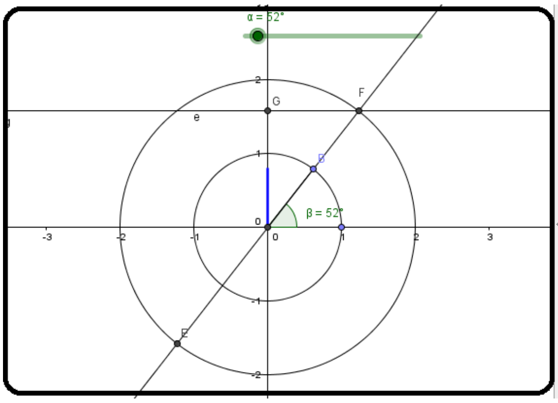


Figura 29: reta paralela ao eixo x passando por F

Vamos criar agora uma nova projeção, a antiga projeção não será mais necessária, pode-se escondê-la nesse momento. Trace um segmento de reta entre a origem e o ponto G. Para isso, vá ao terceiro menu e clique em segmento, logo após, clique sobre a origem e o ponto G. Mude a cor e a espessura da projeção, clique com o botão direito sobre o segmento de reta e vá *em propriedade. Após esconda as duas retas mantendo somente o segmento e o ponto F.*

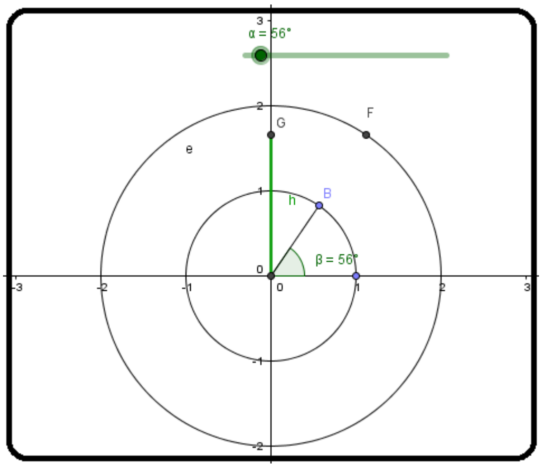


Figura 30: nova projeção

Após a construção dos novo círculo, foi proposto a investigação gráfica e a resolução de alguns questionamentos, veja abaixo:

I) Ative o movimento do seletor e faça um esboço de um gráfico que modele o comprimento da projeção em função do ângulo seletor. O comprimento da projeção deverá ser representado no eixo Y, enquanto que o valor de α deverá ser representado no eixo x. Após isso, cada grupo deverá eleger um representante para apresentar os resultados para todos. Utilize o plano abaixo para fazer esse esboço.

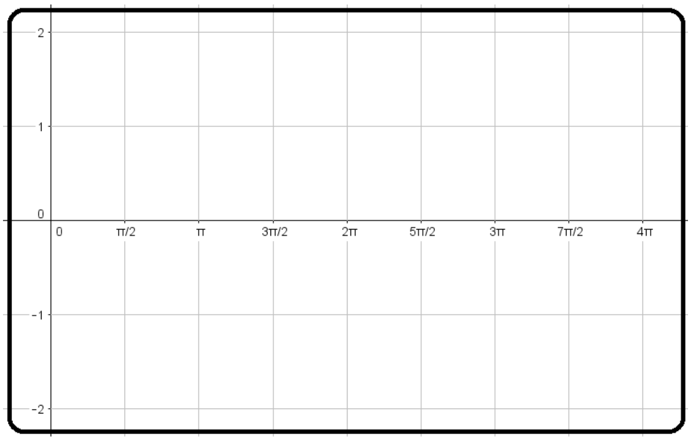


Figura 31: plano cartesiano para a atividade 1

II) Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período

III) Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, dia a nova imagem.

IV) O que aconteceria com o gráfico se criássemos outro círculo concêntrico com metade do raio da circunferência trigonométrica?

*V) Explique o que ocorre com o gráfico da função y = k*sen(α) para k>1 e 0<k<1.*

Após responder as perguntas e discutir os novos gráficos em grande grupo, os alunos fizeram as correções dos gráficos pelo GeoGebra através das orientações apresentada abaixo:

> *Resolução da atividade 1 com o GeoGebra*
>
> *Crie um ponto na janela de visualização 1 e dê um duplo clique sobre o ponto com o botão esquerdo do mouse. Aparecerá uma janela com as coordenadas x e y desse ponto. A coordenada x deve ser substituída por α; a coordenada y, por 2*sin(α). Veja abaixo.*

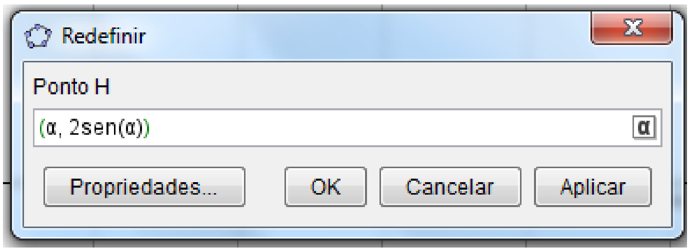


Figura 32: redefinir o ponto H

> *Clique com o botão direito sobre o ponto H e ative a opção habilitar rastro. Após isso ative a rotação do seletor na janela de visualização 2 e observe o gráfico resultante.*

As próximas atividades são de deslocamento linear, tanto para a coordenada x quanto para a coordenada y. Essas duas atividades foram deixadas por último propositalmente, pois são consideradas as mais complexas no sentido investigativo.

Inicialmente foi abordado os deslocamentos lineares em relação à variável independente. Os alunos construíram um segundo ponto sobre a circunferência com a mesma velocidade do ponto inicial E, entretanto esse novo ponto estaria π/2 a frente do ponto *E*. O círculo de raio 2 foi excluído e manteve-se o círculo trigonométrico original. Foram repetidos os passos para a criação de um novo ponto sobre a circunferência. Entretanto, esse ponto continha o comando *Girar[C, α + π / 2, A].*

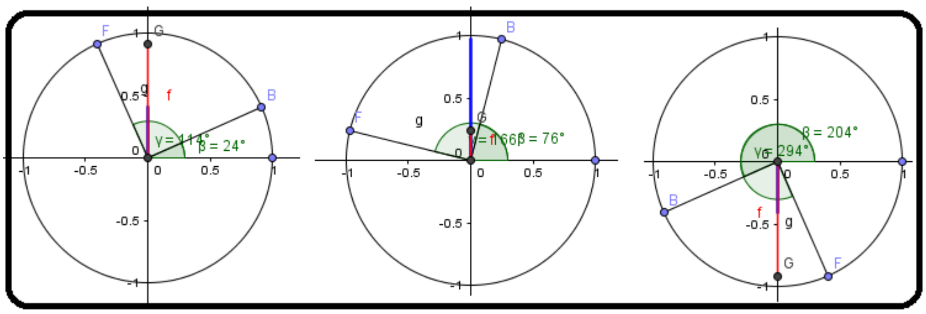


Figura 33: criação da partícula deslocada π/2 a frente

Após a criação do ponto as seguintes tarefas foram apresentadas:

I) Ative o movimento do seletor e faça um esboço de um gráfico que modele o comprimento da nova projeção em função do ângulo seletor. O comprimento da projeção deverá ser representado no eixo Y, enquanto que o valor de α deverá ser representado no eixo x. Após isso, cada grupo deverá eleger um representante para apresentar os resultados para todos. Utilize o plano abaixo para fazer esse esboço.

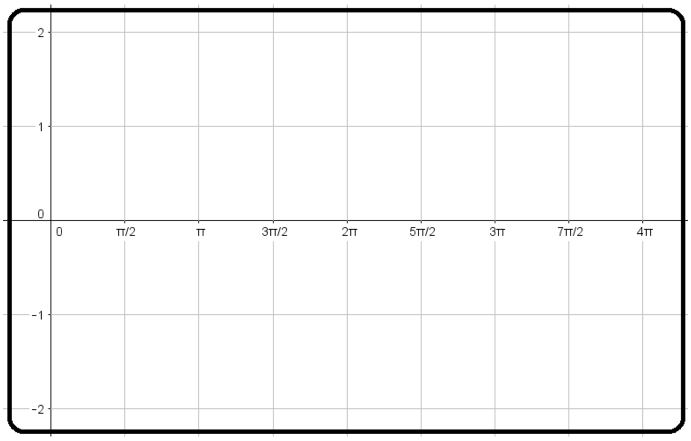


Figura 34: plano cartesiano para a atividade 2

II) Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período

III) Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, dia a nova imagem.

IV) Quais as alteração no gráfico dessa partícula deslocada em relação à partícula original?

V) Explique o que ocorreria com o gráfico das funções y = sen(α+π), y = sen(α-π/2), y = sen(α+π/2).

Para a realização da última tarefa, foi necessário construir um circulo trigonométrico centrado nos pontos (0,1). Os mesmos passos utilizados para a construção inicial do círculo trigonométrico foram repetidos com a diferença que este agora não estaria centrado na origem. Após a construção, cada dupla tinha um círculo conforme a figura abaixo:

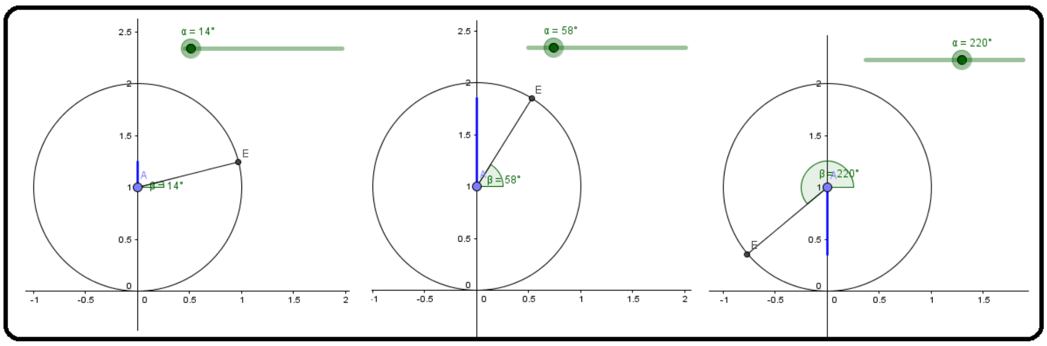


Figura 35: movimento vertical da circunferência

Após a criação do novo círculo, os seguintes questionamentos foram apresentados:

I) Ative o movimento do seletor e faça um esboço de um gráfico que modele o comprimento da nova projeção em função do ângulo seletor. O comprimento da projeção deverá ser representado no eixo Y, enquanto que o valor de α deverá ser representado no eixo x. Após isso, cada grupo deverá eleger um representante para apresentar os resultados para todos. Utilize o plano abaixo para fazer esse esboço.

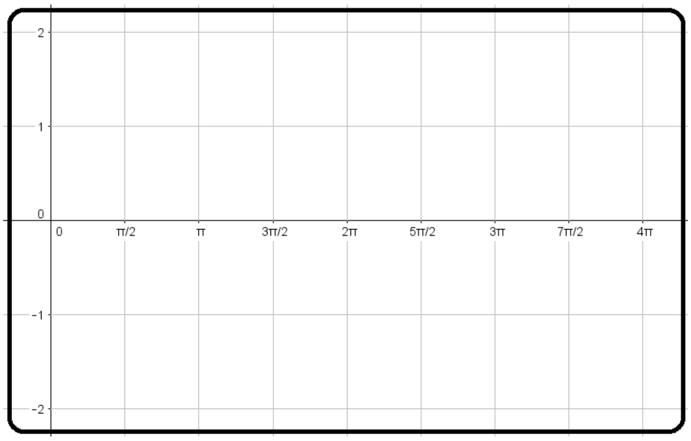


Figura 36: plano cartesiano para a atividade 3

II) Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período

III) Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, diga a nova imagem.

IV)O que aconteceria com o gráfico se direcionássemos o centro da circunferência para o ponto (0, -1)?

V) Explique o que ocorreria com o gráfico da função y = k+sen(α) para qualquer k tal que, k≠0 e k≠1.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Nesse capítulo, serão apresentadas os resultados obtidos com as atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula.

Parte dessa análise foi elaborada com base nos roteiro das atividades investigativas entregue às duplas no decorrer das aulas. Ao fim do trabalho, esses roteiros foram recolhidos pelo professor para que fosse feito a análise dessa pesquisa.

Além do roteiro de atividades, foi entregue aos alunos folhas de rascunho que também foram recolhidas pelo professor para análises posteriores. Os alunos foram orientados a não apagar o esboço de suas ideias na folha de rascunho, mesmo que estas fossem consideradas equivocadas. Os erros fizeram parte da construção de cada processo investigativo que se desenvolveu. Portanto esses esboços também serviram para análise nesse trabalho.

Tanto o roteiro de atividades quanto as orientações para as investigações foram apresentados no capítulo anterior.

Além disso, foi gravado o diálogo de duas duplas durante todo o processo. Esses áudios auxiliaram o professor a entender como se desenrolou as investigações de cada dupla dos primeiros pensamentos até o resultado final. A escolha das duplas foi feita de forma voluntária, ou seja, os alunos se propuseram a terem seus áudios registrados.

O trabalho inicia com a construção do círculo trigonométrico. Foi entreguei aos alunos, conforme mostrado no capítulo anterior, orientações sequenciais sobre a construção do círculo no GeoGebra.

Inicialmente o plano era que todos os grupos desenvolvessem a tarefa no mesmo ritmo. O professor acreditara que, por ser a primeira experiência, os alunos teriam dificuldades em lidar com software GeoGebra. Portanto, contemplar as dúvidas em voz alta facilitaria o andamento do trabalho.

Entretanto, parte dos alunos não demonstrou dificuldade e seguiu seu trabalho sem precisar de mais orientações além da folha. O professor mudou o planejamento e deixou que cada um seguisse o seu próprio ritmo.

Alguns alunos apresentavam problemas por não acompanhar todos os passos das orientações preestabelecidas. Eles olhavam os menus e arriscavam construções que, muitas vezes, eram equivocadas por não apresentarem embasamento matemático.

Na construção de retas paralelas, por exemplo, os alunos traçavam retas que eram paralelas somente ao olhar e não por construção matemática.

Segunda Borba, Penteado(2014), existem diferenças entre desenho e construção. Essas diferenças não eram perceptíveis quando se utilizava lápis e papel. Com a criação de softwares de geometria dinâmica essas diferenças ficam evidenciadas, por exemplo, através da prova do arrastar. Uma construção preserva suas propriedades quando pontos moveis são arrastados.

Os alunos percebiam que erravam as construções quando moviam alguns pontos e as figuras perdiam as suas propriedades. As dificuldades encontradas pelos alunos os remetiam a solicitar a ajuda ao professor. O professor, na maior parte das vezes, orientava que os alunos lessem novamente as orientações com mais atenção, às vezes os acompanhava na leitura frase a frase.

Outro equívoco que apareceu com certa frequência foi na construção do círculo de raio 1. Muitos alunos construíram círculos quaisquer, sem raio definido. Problemas como esses era esperado pelo professor, visto que era a primeira vez que os alunos trabalhavam com o GeoGebra. Entretanto, os alunos conseguiam perceber os próprios erros através da interatividade que o programa propiciava.

Após a construção do círculo, iniciou-se a primeira investigação gráfica sobre a variação da projeção vertical gerada pela movimentação de uma partícula sobre o círculo trigonométrico.

Houve dúvidas iniciais sobre como fazer, talvez pela novidade em participar de uma atividade investigativa pela primeira vez, os alunos estavam acostumados com outras formas de aulas. Muitos ficavam inquietos com a sensação de incapacidade perante a investigação. Embora tivesse passado as orientações da investigação por escrito, o professor percebeu a necessidade de orientar os alunos em grande grupo para que todos conseguissem entender o que estava sendo pedido.

Segundo Borba (2015) o arranque da aula é um momento breve e crítico do processo investigativo, pois o professor deve garantir o entendimento dos alunos a respeito da tarefa e motivá-los para que possam desenvolver as investigações.

Após algumas orientações, os alunos começaram as atividades. Muito demoraram a decidir quais estratégias utilizariam par concluir o gráfico. Aos poucos alguns grupos mostravam boas ideias, como coletar algumas amostras.

> A exploração inicial da situação é uma etapa na qual os alunos, muitas vezes, precisam gastar algum tempo. Aos olhos do professor, porém, pode parecer que nada está acontecendo e que os alunos estão com dificuldades quanto a essa atividade. (BORBA,2015)

Com as investigações iniciadas, o professor assumiu o papel de observador e passou a orientar o menos possível, para zelar pela autonomia das investigações.

Inicialmente, alguns coletavam amostras que não era possível avaliar ao certo o comprimento da projeção. Por exemplo, observar o comprimento da projeção quando o ponto seletor estivesse marcando 20°, 55° ou 78°.

As amostras eram significativas, pois, percebia-se que todas eram crescentes e apresentavam sinais positivos. Entretanto era necessário que os alunos aproximassem valores para o comprimento da projeção no momento da marcação dos pontos nos eixos.

Aos poucos alguns foram percebendo que existiam valores na circunferência que poderiam ser explorado com mais significado, como os pontos de extremidade.

Os pontos sobre os eixos coordenados não só apresentavam valores inteiros, como também eram essenciais na análise do comportamento da projeção. Era sobre os pontos de extremidades que a projeção mudava o comportamento crescente e passava a ser decrescente ou mudava de positivo para negativo.

> Em muitas tarefas de investigação, os alunos são levados a começar por gerar (mais) dados e a organizá-los, e só depois começam a conseguir formular questões. Por vez, as conjecturas surgem logo na sequência de manipulações desses dados. Borba (2015)

Os alunos utilizavam esses pontos para traçar o gráfico e isso ficou evidenciado no trabalho de muitos deles. Podemos ver o exemplo abaixo.

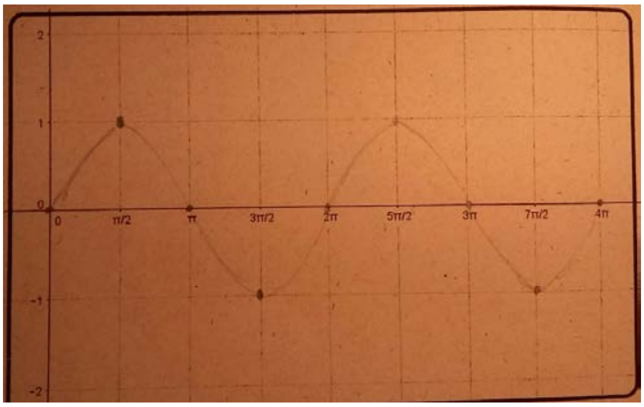


Figura 37: gráfico resultante de um aluno na atividade 1

É possível observar que a dupla que apresentou o gráfico acima utilizou como referência os pontos de extremidades, e eles foram decisivos na construção do gráfico.

O mesmo foi observado no áudio da dupla 2, junto com uma breve confusão na projeção:

-Aluna 1: quando o ângulo é 0 o valor é 1, quando o ângulo é π o valor também é 1.... ta certo isso?

Elas estavam observando o comprimento da função cosseno, logo elas perceberam o erro

Aluna1: ah, mas é a altura..... entendeu?

Aluna 2: ta ta, saquei, o comprimento é 0 para 0°, 1 para 90°, 0 para 180°, -1 para 270° e 0 para 360°.

Aluna 1: espera, to anotando.

O diálogo acima termina com a estratégia elaborada pela dupla em utilizar os pontos extremos para traçar o gráfico.

Segundo Borba (2015) durante o desenvolvimento do trabalho é papel do professor procurar compreender como ocorre o processamento da investigação dos alunos e prestar apoio sempre que for pertinente.

Essa preocupação em perceber a forma como as duplas exploravam as situações que foram-lhes apresentadas se perpetuará ao longo das próximas investigações.

Outro ponto interessante, em relação a essas primeiras investigações, é o gráfico composto por retas que apareceu em alguns trabalhos. Abaixo é possível observar um exemplo.

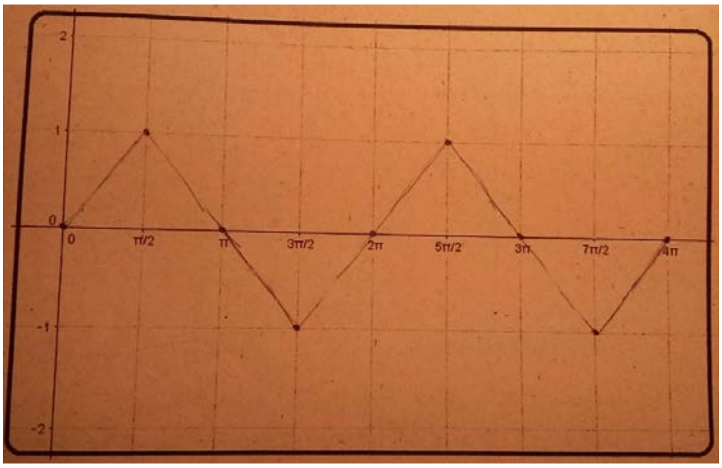


Figura 38: gráfico resultante de um aluno na atividade 1

Após perceber que todos já haviam desenhado seus gráficos, o professor interrompe as atividades e pergunta qual gráfico estaria mais apropriado: o gráfico com curvas ou o gráfico com retas.

Um aluno respondeu que o correto era o gráfico apresentar curvas, pois a movimentação da projeção não estava em “MRU”.

O professor reforçou com a turma que “MRU” significa movimento retilíneo uniforme e que o aluno alertava que havia alteração de velocidade na projeção.

O professor questionou a turma e perguntou em que momento se percebia essa alteração.

O mesmo aluno respondeu que, quando a projeção se aproximava das extremidades, ela perdia velocidade até chegar a zero e inverter o sentido do movimento.

O professor resolveu problematizar ainda mais e perguntar como era possível uma partícula que apresenta velocidade constante gerar uma projeção com alteração de velocidade.

Por falta de respostas, o professor teve de propor alguns questionamentos e alertou os alunos quanto às componentes X e Y da partícula:

Professor: quando a partícula está próxima do zero, qual componente sofre mais alteração x ou y? Ou seja, a partícula se desloca mais na posição vertical ou na posição horizontal?

Os alunos observaram a movimentação da partícula e responderam que a partícula se deslocava mais na vertical. O professor, então, questionou:

Professor: quando a partícula se aproxima de 90°, ela varia mais na posição vertical ou na posição horizontal?

Os alunos concluíram que havia uma inversão, ou seja, quando mais perto de 90° mais ela variava em relação à horizontal e menos em relação à vertical.

O professor reforçou que, como a projeção foi feita no eixo y, essa variação na componente vertical da partícula era justamente o que influenciava a variação de velocidade da projeção que estava sendo investigada. Ou seja, embora a partícula estivesse com velocidade constante, a sua velocidade em relação à vertical estava com desaceleração.

Após a modelagem do gráfico os alunos tinham duas perguntas:

II) Definimos período de uma função periódica como o comprimento de uma oscilação completa em relação à variável x. Com base nessa definição, indique o período dessa função.

III) Pode-se compreender a imagem de uma função como os intervalos do eixo y onde a curva está representada. Indique a imagem dessa função.

O professor escolheu utilizar definições com linguagem simples e direta para facilitar o entendimento por parte dos alunos. O objetivo maior não era o rigor das definições, mas sim as investigações, o desenvolvimento da autonomia e o processo de criação de significados.

Os alunos não tiveram problemas em indicar o período e a imagem da função. O único questionamento que surgiu foi sobre o que seria uma oscilação: somente uma crista de onda, ou uma crista e um vale de onda. Após o professor responder que seria uma crista e um vale, todas as duplas conseguiram concluir.

Conforme visto anteriormente, após responder as perguntas os alunos seguiram o roteiro com orientações de correção. Nesse roteiro, os alunos programaram uma nova partícula para construir o gráfico na janela de visualização 2. Na medida em que o ponto se deslocava sobre a circunferência na janela de visualização 1, o novo ponto traçava o gráfico na janela de visualização 2.

A interatividade, nesse momento, surpreendeu a todos. Um aluno comentou com o grande grupo que o GeoGebra desenhou o gráfico com o mesmo dinamismo que sua mente imaginara na hora da investigação.O GeoGebra como ferramenta se mostrou eficaz no momento que possibilitou a visualização do objeto que estava sob investigação.

Ao programar o novo ponto que desenhou os gráfico, foi utilizado como referência coordenadas cartesianas na forma (α, sen(α)). Importante frisar que, nesse momento, a estratégia do professor era direcionar os alunos a associar a investigação que fora realizadas com a simbologia algébrica já convencionada pela matemática.

Segundo Scucuglia (2012) a associação entre o objeto a ser estudado e símbolos proporciona o desenvolvimento da matemática, dessa forma, a visualização é fundamental ao pensamento matemático.

Em relação à segunda tarefa já era notória a distância entre os alunos. Alguns já iniciavam a segunda tarefa enquanto outros ainda permaneciam na atividade um.

A atividade 2 consistia em construir uma nova partícula com o dobro da velocidade para girar na mesma circunferência com a partícula anterior.

O GeoGebra ainda se mostrava pouco familiar para alguns alunos, pois muitos ainda apresentavam os mesmo problemas que tiveram na construção do primeiro ponto. Por exemplo, na construção do novo ponto é necessário traçar uma reta perpendicular, alguns alunos ainda traçavam retas não perpendiculares por construção, mas pelo visual.

O GeoGebra sempre mostrava o erro por meio da prova do arrastar, mas os alunos não liam o roteiro para verificar onde haviam se equivocado. O professor insistia para que os alunos voltassem no texto e lessem com atenção.

Ainda que aparecessem algumas dificuldades na construção, os alunos se saíram bem e, cada um no seu tempo, conseguiram montar a segunda partícula.

Na investigação desse novo ponto, alguns grupos concluíram que o gráfico não se alteraria. O professor verificou que esses alunos desenhavam o gráfico da projeção do novo ponto em função do ângulo do próprio ponto.

Dessa forma, realmente o gráfico não se alteraria, visto que o ângulo desse novo ponto também variava com o dobro da velocidade.

O professor teve de intervir e explicar novamente a tarefa, explicou que a projeção do novo ponto deveria ser relacionada com a variação angular do ponto seletor inicial. Com a intervenção do professor, os alunos compreenderam a nova tarefa e iniciaram a investigação.

Durante as investigações, o professor retomou a postura de observador das estratégias utilizadas pelas duplas para modelar a nova relação.

Essa investigação foi mais complicada, e os alunos demoraram um pouco mais para concluir as respostas. Algumas duplas conseguiram somente quando desativaram a movimentação automática do ponto e passaram a movê-lo manualmente.

Dessa forma pode-se observar mais claramente a relação entre o movimento da projeção e o ângulo apontado pelo seletor. O diálogo de uma das duplas foi transcrito abaixo:

Aluna 1: Vai chegar a um..... vai ser antes de 90°

Aluna 2: para, espera, para ali o seletor..... vai na mão...

Aluna 1: quando é 90° já é zero....quando é 45° é 1.

....

Aluna 1: ta, vai ser igual só que pela metade.

Pode-se observar pelo diálogo que a dupla concluiu corretamente que o aumento da velocidade ocasionaria diminuição no comprimento de onda.

Ao mesmo tempo, pode-se perceber a necessidade da dupla em parar o movimento automático para coletar as amostras. Após a manipulação dos dados, as alunas concluíram que o período da curva seria reduzido ela metade, isso fica evidente na ultima linha do diálogo. Abaixo é possível observar o gráfico final dessa dupla.

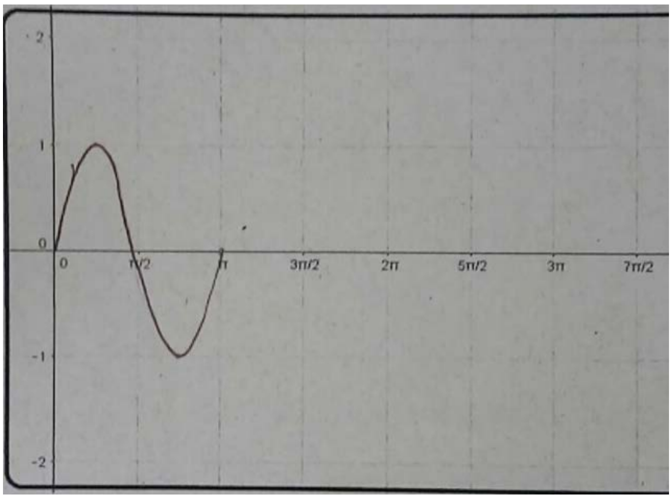


Figura 39: gráfico resultante de um aluno na atividade 2

Após a investigação do novo gráfico, os alunos responderam as seguintes perguntas:

II) Qual o período dessa nova função?

III) Qual a imagem dessa nova função?

IV) Entendemos frequência como o número de oscilações de uma curva em um determinado tempo. Nesse caso, qual a frequência dessa função no intervalo 2π?

A compreensão e a visualização do objeto que estava em investigação fizeram com que todos as duplas respondessem as perguntas corretamente.

Após a resolução do questionário, as duplas foram orientadas pelo material a construir a correção da tarefa. Esse é o momento onde o professor associa a nova situação prática explorada pelos alunos com a sentença y=sen(2α).

Uma das motivações em buscar significados com essa metodologia alternativa é verificada quando, na forma tradicional, onde há somente a associação entre a forma algébrica e a forma gráfica, os alunos acreditam que a função y=sen(2x) tem o dobro do período da função Y=sen(x). Talvez a confusão ocorra porque a função y=2.sen(x) tem o dobro da amplitude, logo, por analogia, os alunos acreditam que o mesmo ocorrerá com a função y=sen(2x).

Nessa abordagem investigativa, nenhum grupo desenhou o gráfico com o comprimento de onda maior que o anterior.

O cenário proposto pelo professor nessa atividade permite que o aluno parta da observação de uma situação, faça algumas coletas de dados, desenvolva de uma conjectura para então realizar o teste de verificação.

Conforme Ponte, Brocado e Oliveira (2003) um cenário de investigação matemática envolve reconhecimento de uma situação problema e suas inquietações, parte para a formulação de conjecturas, logo em seguida realizar testes e refinamentos de conjecturas, para então realizar uma demonstração ou uma prova do trabalho realizado.

Além disso, Borba, Penteado(2014) afirma que buscar intensificar gradualmente o nível de complexidade é fundamental em uma atividade investigativa, conforme se estabelece as atividades proposta nessa dissertação.

Para dar início à atividade 3, conforme foi explicado no capítulo anterior, era necessário um ponto com metade da velocidade do ponto seletor. Para isso, bastou editar a velocidade do segundo ponto para metade da velocidade.

Após a realização da atividade anterior, antes mesmo alterar a velocidade do ponto, ficou evidente para alguns alunos o novo gráfico teria o dobro do comprimento de onda. Mesmo assim, o professor pediu que os alunos fizessem as alterações e verificassem se as suas expectativas estavam certas.

> É habitual, após o surgimento das primeiras questões e do estabelecimento das primeiras conjecturas, que os alunos formulem outras questões e conjecturas por analogia com as anteriores. BORBA (2015)

Após algumas observações, os alunos concluíram o gráfico corretamente. Abaixo encontra-se o registro do gráfico encontrado por uma das duplas:

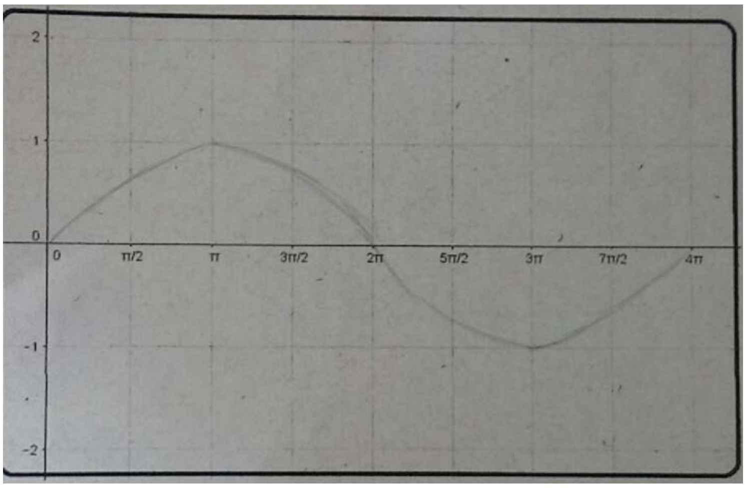


Figura 40: gráfico resultante de um aluno na atividade 3

Essa dupla observou corretamente que era necessário um comprimento de 4π para representar toda a oscilação.

O professor, antes de iniciar a atividade 3, orientou os alunos sobre a necessidade de alteração do intervalo da variação do ponto seletor. Antes o ponto seletor oscilava de zero a 2π, agora, era necessário que oscilasse de zero a 4π. Essa alteração se fez necessária, pois o novo ponto tinha metade da velocidade e precisava de um período maior para completar a sua trajetória.

Os alunos que não escutaram as recomendações do professor desenharam o gráfico pela metade, ou seja, somente a parte compreendida do intervalo entre zero e 2π.

O professor corrigiu os intervalos e as duplas que haviam desenhado o gráfico até 2π conseguiram determinar o gráfico corretamente.

Uma dupla ainda apresentava dificuldades em relação ao sinal da projeção e ainda a representava como valor absoluto, veja abaixo:

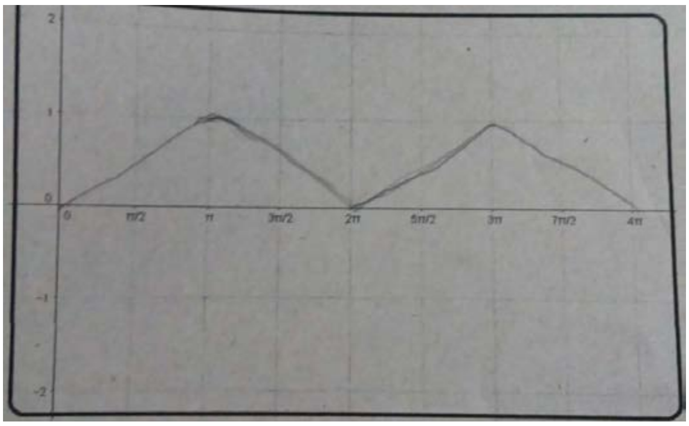


Figura 41: gráfico resultante de um aluno na atividade 3

Esse gráfico evidencia a falta de atenção quanto à definição de que o círculo estava centrado nos eixos cartesianos. Entretanto, mesmo com esse equívoco, percebe-se que os alunos investigaram corretamente o aumento no comprimento de onda.

Para a atividade 3 foram feitas 3 perguntas sobre a nova função:

II) Qual o período dessa nova função?

III) qual a imagem dessa nova função?

IV) Qual a frequência da função?

Em relação às duas primeiras perguntas não houve surpresas, os alunos haviam compreendido bem o conceito de período e imagem e já apresentavam respostas convictas.

Sobre a freqüência, foi observada algumas duvidas. Alguns alunos questionaram como era possível representar a frequência se, em 2π, o gráfico ainda não havia completado um ciclo. Outros responderam que a freqüência era de 1 volta a cada 4π.

Para corrigir a atividade 3, assim como nas atividades anteriores, foi necessário relacionar a situação prática com a sentença $y=sen(\alpha/2)$. Após a programação do ponto pelas duplas, os gráficos foram corrigidos a o primeiro dia do encontro chegava ao fim.

O professor iniciou a próxima aula com uma série de questionamentos com o intuito de recuperar com os alunos o que eles haviam investigado na aula passada.

O professor então inicia com as seguintes perguntas:

Professor: o que ocorria com o gráfico quando a velocidade aumentava? O que ocorria com o gráfico quando a velocidade diminuía? Havia alguma relação entre velocidade e comprimento de onda?

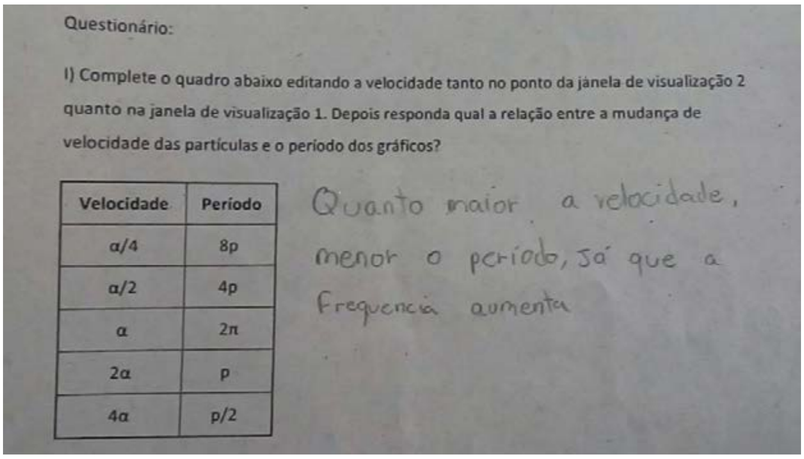
O professor pediu que os alunos não respondessem em voz alta, que apenas pensassem sobre essas relações.

Após instigar os alunos com essas perguntas, o professor orientou que as duplas respondessem o questionário contido na folha. A primeira pergunta do questionário era:

I) Complete o quadro abaixo editando a velocidade tanto no ponto da janela de visualização 2 quanto na janela de visualização 1. Depois responda qual a relação entre a mudança de velocidade das partículas e o período dos gráficos?

Velocidade	***Período***
α/4	*8p*
α/2	*4p*
α	*2π*
2α	*p*
4α	*p/2*

Alguma respostas são mostradas como exemplo:



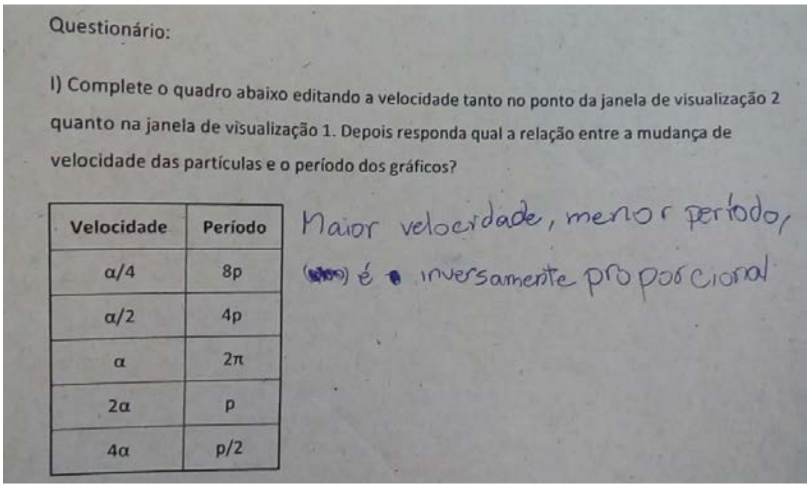
Questionário:

I) Complete o quadro abaixo editando a velocidade tanto no ponto da janela de visualização 2 quanto na janela de visualização 1. Depois responda qual a relação entre a mudança de velocidade das partículas e o período dos gráficos?

Velocidade	Período
α/4	8p
α/2	4p
α	2π
2α	p
4α	p/2

Quanto maior a velocidade, menor o período, só que a frequencia aumenta

Figura 42: questionário de um aluno



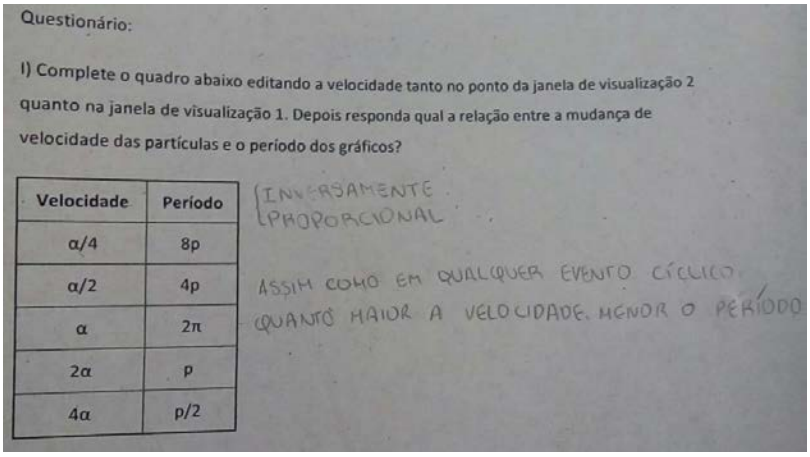
Questionário:

I) Complete o quadro abaixo editando a velocidade tanto no ponto da janela de visualização 2 quanto na janela de visualização 1. Depois responda qual a relação entre a mudança de velocidade das partículas e o período dos gráficos?

Velocidade	Período
α/4	8p
α/2	4p
α	2π
2α	p
4α	p/2

Maior velocidade, menor período, é inversamente proporcional

Figura 43: questionário de um aluno



Questionário:

I) Complete o quadro abaixo editando a velocidade tanto no ponto da janela de visualização 2 quanto na janela de visualização 1. Depois responda qual a relação entre a mudança de velocidade das partículas e o período dos gráficos?

Velocidade	Período
α/4	8p
α/2	4p
α	2π
2α	p
4α	p/2

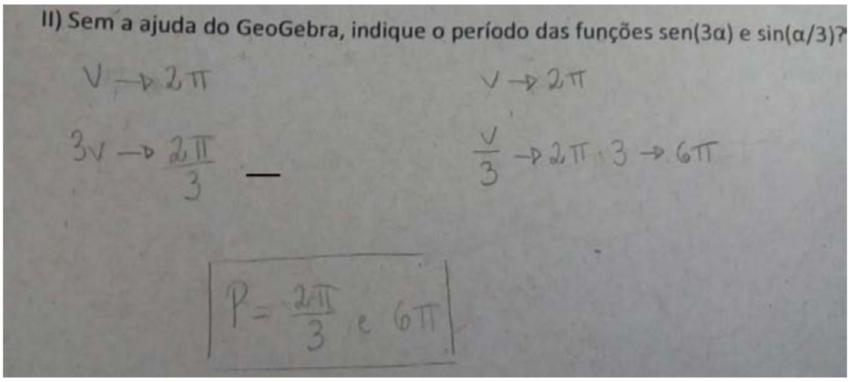
INVERSAMENTE PROPORCIONAL

ASSIM COMO EM QUALQUER EVENTO CÍCLICO QUANTO MAIOR A VELOCIDADE MENOR O PERÍODO

Figura 44: questionário de um aluno

Conforme mostram os exemplos acima, a maior parte das duplas concluiu que havia uma relação inversa entre as grandezas. Entretanto as amostras apresentadas pelo quadro, todas continham relações com o dobro ou metade da velocidade anterior.

O primeiro questionamento sobre uma alteração de velocidade que envolvia a terça parte ou triplo era apresentada na questão 2, veja um exemplo abaixo:



II) Sem a ajuda do GeoGebra, indique o período das funções sen(3α) e sin(α/3)?

$V \to 2\pi$ $\quad$ $V \to 2\pi$

$3V \to \frac{2\pi}{3}$ $\quad$ $\frac{V}{3} \to 2\pi \cdot 3 \to 6\pi$

$\boxed{P = \frac{2\pi}{3} \text{ e } 6\pi}$

Figura 45: questionário de um aluno

Nota-se que ha uma idéia de proporcionalidade na resposta desse aluno para a questão 2. O aluno se fez entender que havia uma relação inversamente proporcional entre velocidade e comprimento de onda. Essa proporção inversa fica evidenciada quando o aluno sinaliza que com a velocidade V o período é 2π; com a velocidade 3V o período é 2π/3.

A mesma proporção inversa é sinalizada para a velocidade V/3 quando ele evidencia que o comprimento de onda 2π deve ser multiplicado por 3.

A mesma relação inversa pode ser encontrada nesse outro exemplo:

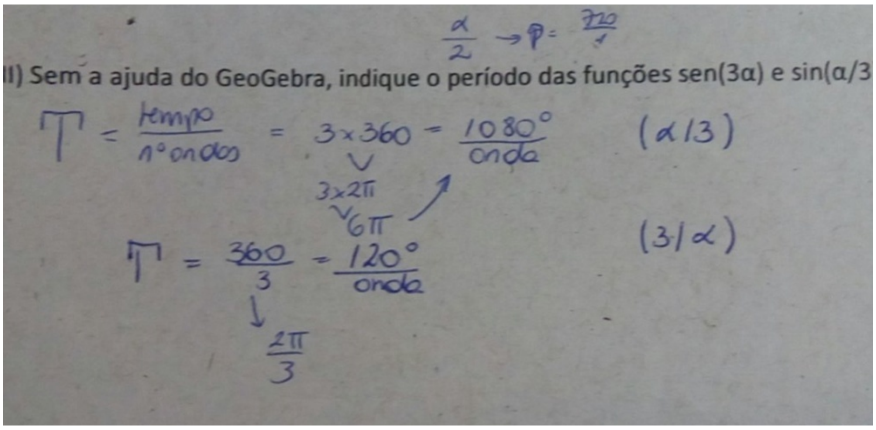


Figura 46: questionário de um aluno

Com algumas diferenças na forma de representação, o aluno responsável pela última resolução utiliza-se da proporção inversa para responder esse questionamento.

Após a resolução do questionário, havia algumas questões contextualizadas a serem respondidas. Todas abordavam somente os movimentos com variações de velocidade, não sendo consideradas ainda outras movimentações.

Sobre essas questões, observa-se que alguns alunos tiveram dificuldades iniciais em perceber os movimentos periódicos quando explorados sob a perspectiva da contextualização. Como por exemplo na questão abaixo:

> *(UCS-2004/1) Nossa respiração é um fenômeno cíclico, com períodos alternados de inspiração e expiração. Em um determinado adulto, a velocidade do ar nos pulmões em função do tempo, em segundos, decorrido a partir do início de uma inspiração é dada pela equação* $v(t) = 0{,}5.\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$. *O ciclo respiratório completo desse adulto é de:*

A dificuldade ocorreu, segundo alguns alunos, não pela contextualização, mas pelo período inédito que aparecera, coeficientes representados por π.

Aluno: Como um ângulo π está sendo utilizado nesse contexto?

Embora o π seja um símbolo que representa um número, e esse número possa ser utilizado em qualquer contexto, normalmente utiliza-se π para representar ângulos na maior parte dos exercícios escolares. Nesse exercício, o π era utilizado como um coeficiente, esse fato causou estranhamento para os alunos.

O professor acredita que a dificuldade encontrada pelos alunos esteja no significado que os alunos deram a esse símbolo. Entretanto, já era hora de terminar o encontro e o professor iniciou a próxima aula com esse assunto.

No próximo encontro o professor iniciou a aula com uma síntese do que havia sido investigado na aula passada. O professor escreveu no quadro as seguintes sentenças:

y=sen(x)

I)	y=sen(2x)	y=sen(x/2)
II)	y=sen(4x)	y=sen(x/4)
III)	y=sen(3x)	y=sen(x/3)
IV)	y=sen(kx)	y=sen(x/k)
V)	y=sen(πx)	y=sen(2πx/12)

Os itens I e II foram respondidos com convicção pelos alunos, o professor ainda encontrou algumas dúvidas nas respostas sobre o item III.

Alguns alunos haviam entendido bem a relação inversa entre velocidade e comprimento de onda; outros haviam esquecido. O professor reforçou a existência da relação e como ela alterava o período original.

Professor: O período original era 2π, ao multiplicar a velocidade por 2, esse períodos se reduziria a metade, ao multiplicássemos por 1/2, se duplicaria. A mesma relação ocorreria com velocidades 3 vezes maior e 3 vezes menor. No primeiro caso, o gráfico ficaria 2π/3 e no segundo ficaria 6π.

O professor então concluiu com seus alunos que, qualquer que seja a constante que alterasse a velocidade, o comprimento do gráfico se alteraria na proporção inversa.

Professor: Se for y=sen(kx), o comprimento fica 2π/k; se for y=sen(x/k), o comprimento fica k2π.

Professor: Se essa relação se mantém para qualquer numero real k, se esse k assumir o valor de π, o que ocorre na situação y=sen(πx)?

Aluno: basta dividir 2π por π e cortar, o período fica 2.

Professor: No caso y=sen(2πx/12) como ficaria?

Alunos: divide 2π por 2π e multiplica por 12, o período fica 12.

Professor: Agora quero que vocês tentes responder a questão 3.

(UCS-2004/1) Nossa respiração é um fenômeno cíclico, com períodos alternados de inspiração e expiração. Em um determinado adulto, a velocidade do ar nos pulmões em função do tempo, em segundos, decorrido a partir do início de uma inspiração é dada pela equação . O ciclo respiratório completo desse adulto é de:

Todos conseguiram responder corretamente a questão, alguns questionaram a função 0,5 na sentença. O professor disse que isso seria estudado em breve e escolheu não responder a pergunta para não prejudicar as próximas investigações.

A partir desse diálogo, o momento da aula foi dedicado para que os alunos pudessem responder algumas questões e fortalecerem as investigações da aula passada.

Sobre a primeira questão, cada dupla desenvolveu um caminho para encontrar a resposta, abaixo é possível observar a justificativa de um aluno:

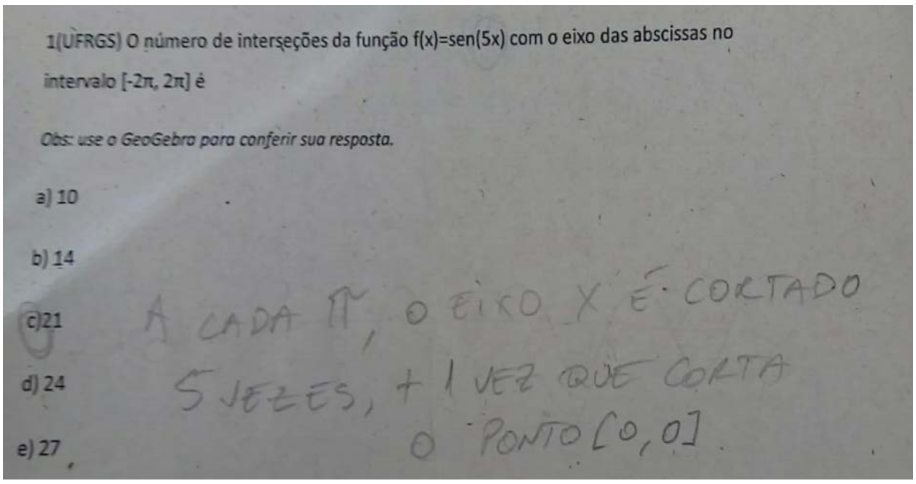


Figura 47: questão 1, resposta de um aluno

Aluno: A cada π, o eixo x é cortado 5 vezes, + 1 vez que corta o ponto (0,0)

Pela justificativa apresentada pelo aluno, ficou subentendido que primeiro o aluno analisou o número de cortes da função no intervalo (0, π). Após ele conclui que, se a curva corta 5 vezes o eixo a cada intervalo de comprimento π, cortaria 20 vezes num intervalo que varia de -2π a 2π, mais o ponto central.

Veja abaixo a explicação de outro aluno para a mesma questão:

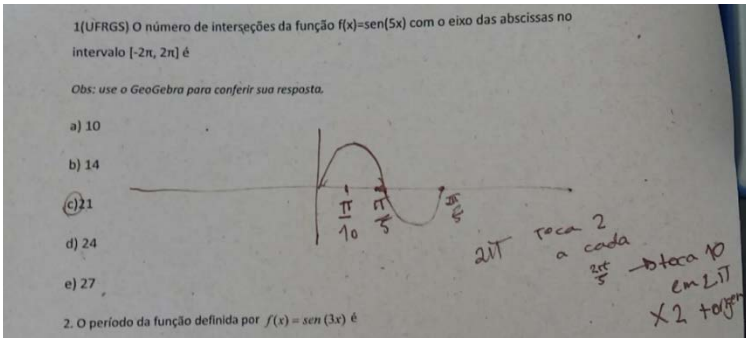


Figura 48: questão 1, resposta de um aluno

Aluno: 2π toca 2. A cada 2π/5 -> toca 10 em 2π. X2+origem.

Mesmo com a dificuldade em relatar a sua forma de pensar, fica implícito nas palavras desse aluno que se fosse a função y=sen(x), haveria dois cortes no intervalo 2π. Como a curva sen(5x) é reduzida a quinta parte, a cada 2π/5 a curva toca 2 vezes o eixo. Logo, no intervalo de 2π, a curva tocará 10 vezes o eixo. Como o intervalo varia de -2π a 2π, devemos multiplicar por 2 e acrescentar o ponto da origem.

Na comparação das duas respostas fica evidente que há uma investigação distinta na busca pela resposta, entretanto ambos tomam como base a alteração do comprimento de onda em decorrência do aumento de velocidade.

Outra questão interessante foi a questão 4. Essa questão foi criada pelo próprio professor e consistia em marcar V para as alternativas verdadeiras e F para as alternativas falsas.

Questão *4. Poderíamos definir som como sendo o resultado de oscilações muito rápidas que ocorrem na natureza. Desta forma, as notas musicais poderiam se definir como sendo variações da frequência dessas oscilações. O Lá (ou A) que fica logo acima do Dó (ou C) central do piano tem a frequência de 440 Hz . A próxima nota Lá, a direita da anterior, tem frequência de 880 Hz, veja o desenho abaixo:*

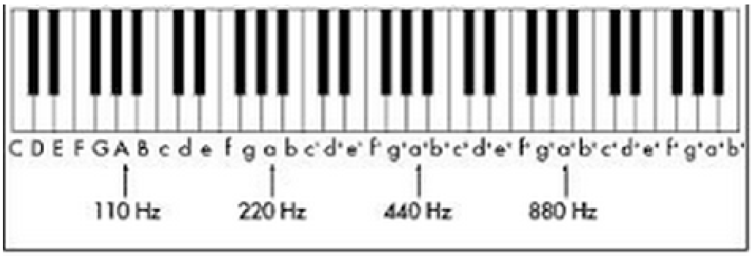


Figura 49: freqüências no piano

A vibração de uma nota musical em função do tempo é representada pela função

y = sen(2πf.t) onde f é a frequência de oscilações.

Marque V ou F e justifique as falsas.

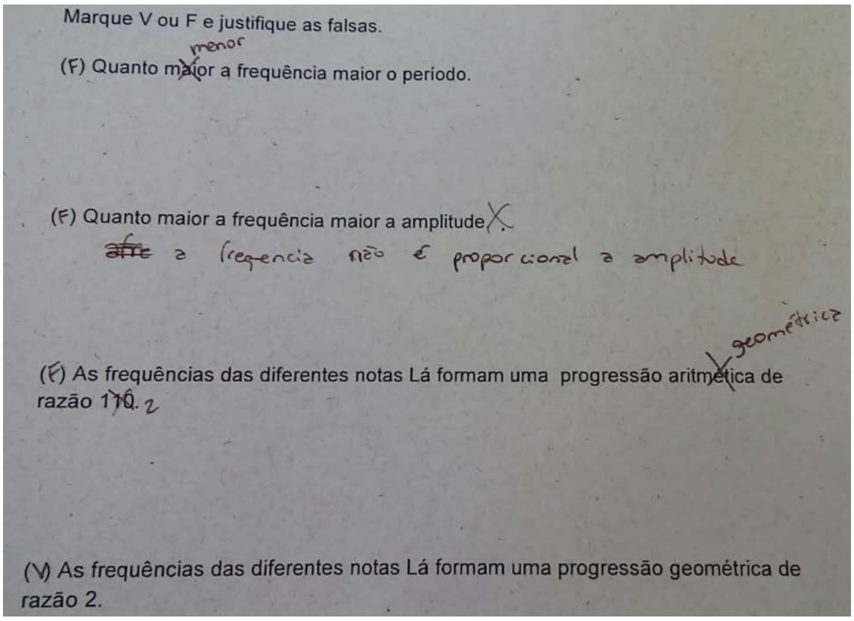
( ) Quanto maior a frequência maior o período.

( ) Quanto maior a frequência maior a amplitude.

( ) As frequências das diferentes notas Lá formam uma progressão aritmética de razão 110.

( ) As frequências das diferentes notas Lá formam uma progressão geométrica de razão 2.

Abaixo, veja a resposta apresentada por um aluno:



Marque V ou F e justifique as falsas.

(F) Quanto ~~maior~~ menor a frequência maior o período.

(F) Quanto maior a frequência maior a amplitude.

~~afre~~ a frequencia não é proporcional a amplitude

(F) As frequências das diferentes notas Lá formam uma progressão ~~aritmética~~ geométrica de razão ~~110~~. 2

(V) As frequências das diferentes notas Lá formam uma progressão geométrica de razão 2.

Figura 50: questão 4, respostas de um aluno

Principalmente pelos dois primeiros itens, fica claro que os alunos internalizaram a relação entre movimentos circulares em diferentes velocidades e a variação que ocorre no comprimento de onda. Alem disso, compreenderam bem o conceito de freqüência, período e amplitude.

Antes da próxima investigação, o professor resolve fazer algumas conexões com assuntos já estudados pelos alunos.

O professor aproveita que as investigações abordam movimentos circulares e relaciona esse assunto com MCU (movimento circular uniforme).

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999), o ensino de funções trigonométricas torna-se mais significativo quando contextualizados e podem ser estudados de forma interdisciplinar com física.

O professor então resolve, mesmo que não seja o foco desse trabalho, relacionar o conteúdo com as diferentes velocidades que se pode ter nesse tipo de movimento.

Professor: Pessoal, sabemos que velocidade média pode ser descoberta pela relação: $velocidade = \frac{distância}{tempo}$ *. A forma que podemos observar distância nos direciona a dois tipos de velocidades, vejamos:*

Professor: Poderíamos medir essa distância em metros ou outra unidade de medida qualquer. como podemos encontrar a distância percorrida pela partícula?

Alunos: Comprimento da circunferência, usa o 2πr.

Professor: Muito bem, então teríamos a seguinte relação: $v = \frac{2\pi r}{t}$*. Essa velocidade que acabamos de encontrar chama-se velocidade escalar.*

Professor: Qual seria a outra velocidade?

Nenhum aluno respondeu o questionamento do professor.

Professor: bom, acabamos de pensar em medir a distância em metros. Se pensássemos em representar essa distância pelo ângulo que o ponto varre na circunferência conforme se movimenta, qual seria a distância angular total percorrida por esse ponto?

Aluno: 360°

Professor: bom, como360° é igual a 2π, nesse caso teríamos a relação $v = \frac{2\pi}{t}$.

Professor: Vocês podem perceber que a velocidade angular não depende do comprimento do raio, já a velocidade escalar sim.

Após as observações do professor, os alunos seguiram trabalhando nos exercícios de fixação com contextualizações.

Com o fim dos exercícios de fixação, a próxima investigação se referia a mudanças ocorridas no raio da circunferência.

Foi construída uma circunferência concêntrica à circunferência anterior com o dobro do raio. Sobre essa circunferência, foi criado um novo ponto que girava com a mesma velocidade da partícula da circunferência menor. O movimento vertical dessa nova partícula foi projetado no eixo y. A construção dessa nova circunferência foi apresentada no capítulo anterior.

Nesse momento do trabalho, os alunos já estavam mais familiarizados com o GeoGebra e efetuavam as construções mais rapidamente.

Após a construção da nova circunferência e a ativação da movimentação da partícula, os alunos iniciaram a investigação do novo gráfico resultante. Era o momento do professor assumir a postura de observador e orientar seus alunos sempre que necessário.

Veja o resultado de um dos gráficos resultantes abaixo:

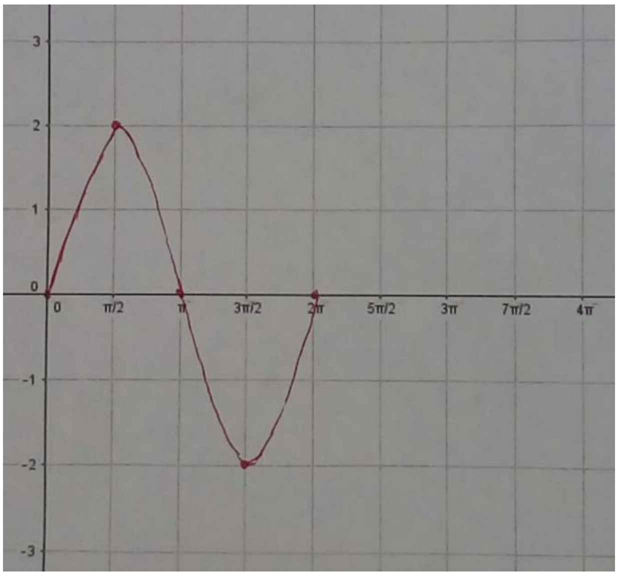


Figura 51: gráfico resultante de um aluno

A maior parte dos alunos não encontrou dificuldade na obtenção desse gráfico, o aumento do raio da circunferência tornou sugestivo o aumento da amplitude da curva.

Veja o diálogo de uma das duplas:

Aluna 1: ta, olha ele vai la em cima.
Aluna 1: o gráfico tem que ir até o 2.
Aluna 2: ta e depois...
Aluna 2: ele vai até o -2 também, olha.
Aluna 1: e o período não muda nada, né?
Aluna 1: ... é não muda, não muda..

Após a construção do gráfico, cada dupla fez a correção no Geogebra, conforme as explicações do roteiro. Nesse momento houve a associação entre o novo movimento estudado e a sentença y=2sen(x).

Após a construção desse gráfico, surge uma pergunta interessante de uma aluna:

Aluna: Dani, eu achava que as funções seno e cosseno se limitavam na circunferência de raio 1, como uma função dessas pode oscilar no intervalo de -2 a 2?

A pergunta feita pela aluna é muito interessante e mostra que ela estava atenta às definições.

O professor explicou que a circunferência trigonométrica ainda era aquela de raio 1, entretanto, concêntrica a ela, havia uma outra circunferência não trigonométrica que apresentava a característica de ter o dobro do raio.

Era possível observar isso na sentença y=2sen(x). Imagine as funções f(x)=2x e g(x)=sen(x). A função g(x) é limitada no intervalo de [-1,1], a função f(x) não é limitada, mas duplica todos os valores atribuídos à variável x.

Logo, a composição *fog* resulta em f(g(x))=2sen(x). Observe que a f duplicará todos os valores da g, como os valores da g eram limitados em [-1,1] agora estarão limitados de [-2,2].

Após as correções, as duplas tinham algumas perguntas a serem respondidas, veja abaixo:

II) Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período

III) Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, dia a nova imagem.

IV) O que aconteceria com o gráfico se criássemos outro círculo concêntrico com metade do raio da circunferência trigonométrica?

V) Explique o que ocorre com o gráfico da função $y = k*sen(\alpha)$ para $k>1$ e $0<k<1$.

Não houve problemas em relação à primeira pergunta, após a investigação e a correção, os alunos acharam fácil perceber que a alteração no raio da circunferência não ocasionaria mudanças no período.

Pare essa atividade, o professor utilizou a estratégia de criar a nova circunferência concentra à anterior, com duas partículas se movimentando, uma em cada circunferência. Esse fato ajudou os alunos a perceberem que o tempo que as duas partículas levavam para completar uma oscilação era o mesmo, logo não haveria alteração no período.

Essa percepção pode ser observada na resposta apresentada abaixo, onde o aluno relaciona o conteúdo com a aula passada onde o professor relacionara a trigonometria com movimentos circulares uniformes.

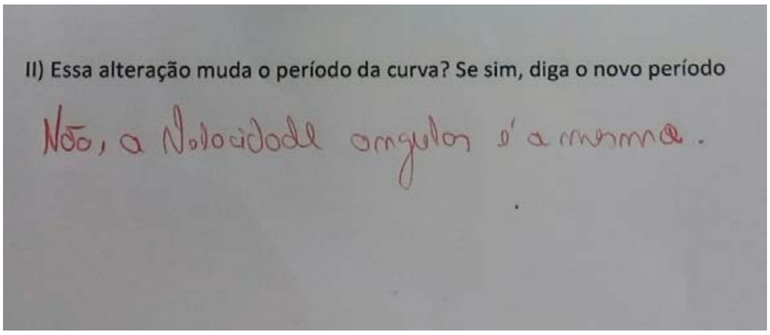


Figura 52: questionário de um aluno

Professor: tu disse que a velocidade angular é a mesma, mas e a escalar, também é a mesma?

Aluno: a escalar não, o ponto que está no circulo maior tem um percurso maior e demoram o mesmo tempo.

Diálogos como esse mostram que os alunos não somente estavam desenvolvendo significado, conforme o objetivo central dessa abordagem, mas também estavam conectando o assunto com a disciplina de física.

Em relação à segunda pergunta, não houve dificuldades uma vez que a observação da nova projeção oscilar com o dobro da amplitude da projeção anterior sugere um aumento vertical no gráfico. Essa relação foi observada em todos os trabalhos.

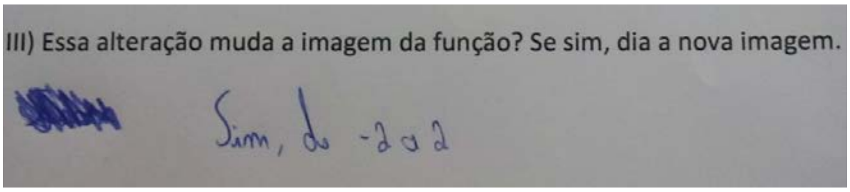


Figura 53: questionário de um aluno

A terceira pergunta se mostra bem mais interessante, pois cobra uma conjectura que deve ser percebida por analogia.

A maior parte dos alunos percebeu que uma circunferência, com metade do raio, concêntrica à circunferência trigonométrica ocasionaria numa redução da amplitude da curva.

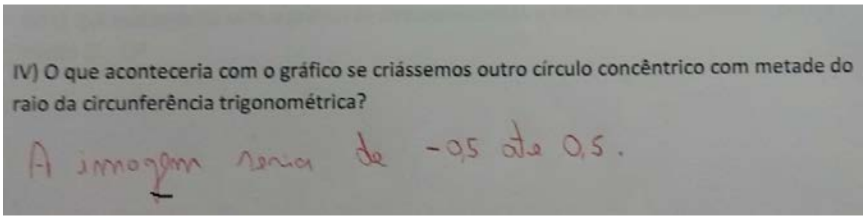


Figura 54: questionário de um aluno

A generalização estava reservada para a última questão, onde os alunos deveriam relacionar a linguagem formal *y = k*sen(α)* para k>1 e 0<k<1com os movimentos na circunferência.

A maior parte dos alunos conseguiu chegar à conclusão correta para esse item, como exemplos pode-se observar a resposta abaixo

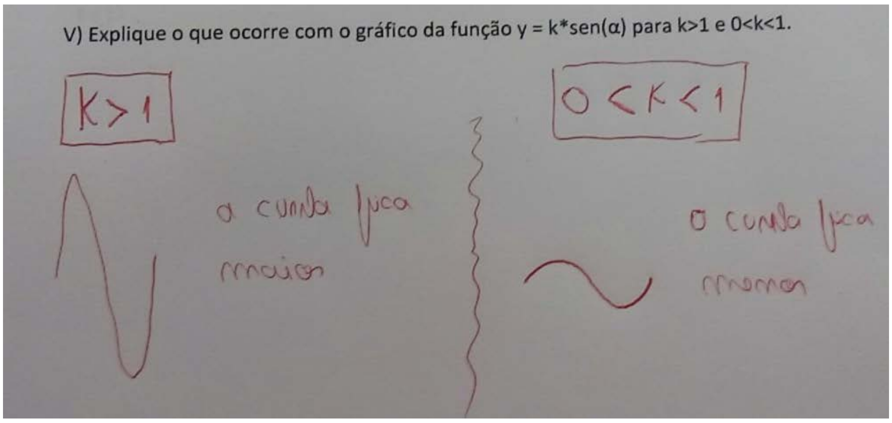


Figura 55: questionário de um aluno

Alguns alunos tiveram dificuldade para interpretar a condição de existência de k, e pediram auxilio ao professor. Após algumas intervenções, os alunos conseguiram tirar as suas conclusões.

Alguns alunos perguntaram ao professor o que aconteceria para k<0. O professor não havia planejado atividade para essa investigação, por falta de tempo não seria possível trabalhas todos os movimentos de forma investigativa.

O professor respondeu aos alunos que o sinal faria com que houvesse uma inversão nas alturas do gráfico, ou seja, a prate positiva passaria a ser negativa e a parte negativa passaria a ser positiva, uma reflexão em relação ao eixo x.

Para essa pergunta o professor não conseguiu pensar alguma atividade que mostrasse significado concreto para essa alteração na circunferência. Por isso ficou restrito ao ensino tradicional e relacionou um significado algébrico somente, inversão de sinal da função.

A próxima investigação era sobre deslocamento linear. Os alunos construíram um novo ponto sobre a circunferência trigonométrica com a mesma velocidade do ponto inicial, entretanto esse novo ponto estava π/2 deslocado a frente. O círculo de raio 2 foi excluído e manteve-se somente o círculo trigonométrico.

A construção do novo ponto foi realizada com rapidez, os alunos já não apresentavam problemas com o GeoGebra.

Esse momento foi fundamental para a observação, pois uma das motivações do professor para a realização desse trabalho com foco no significado era justamente o fato dos alunos acreditarem que a função $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ tinha um deslocamento horizontal para a direita. Alem disso, alguns alunos acreditavam que essa função tinha alteração de período, pois mecanizaram uma relação errada onde se formava a igualdade $x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ e isolava-se o x para encontrar o período.

Esse erro é tão comum que é muito explorado em provas de vestibulares como a questão abaixo que caiu no vestibular da UFRGS em 2010.

(UFRGS 2010) O período da função definida por $f(x) = sen\,(3x - \frac{\pi}{2})$ é

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) π e) 2π

Duas alternativas chamam a atenção nessa questão. A primeira é a alternativa correta que é a letra b onde explora que, como houve um aumento de velocidade e ela ficou 3 vezes maior, a curva deve se reduzir a terça parte, logo a alternativa correta será .

A segunda é a alternativa , que retrata justamente o erro contido no processo mecânico efetuado por muitos alunos, que é construir a igualdade e isolar o x.

Ao investigarem a nova função, alguns alunos se surpreenderam em encontrar a função cosseno e questionaram o professor se era possível. O professor respondeu que sim, que esse tipo de movimento pode fazer com que um gráfico que deveria apresentar o formato da curva seno, modificasse sua estrutura e passasse a ter uma curva idêntica a do cosseno.

Muitos alunos chegaram a conclusões corretas, como o exemplo abaixo, onde a dupla desenhou ambos os gráficos no mesmo eixo.

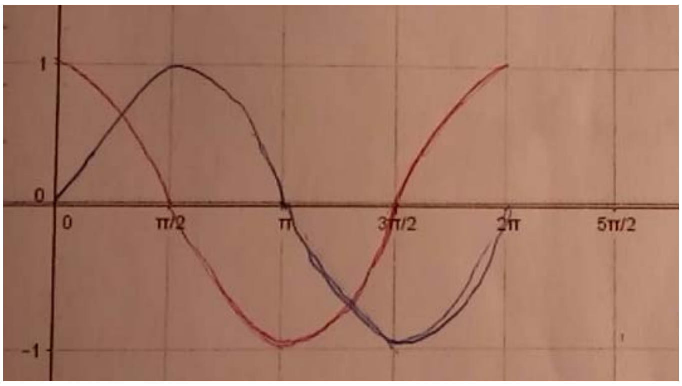


Figura 56: gráfico resultante de um aluno

Entretanto, tivemos alguns equívocos na investigação de algumas duplas. Como a partícula parte π/2 a frente, algumas duplas cometeram o mesmo erro da primeira investigação. Iniciaram o desenho no eixo cartesiano a partir da posição π/2. Foi necessário que o ponto seletor fosse alterado para partir de uma posição anterior ao zero, nesse caso, partir de $\frac{-\pi}{2}$.

Essa atividade reflete bem a importância dessa abordagem com foco ampliado no significado, pois nenhum aluno concluiu que o gráfico se deslocaria para a direita conforme de verifica na abordagem tradicional.

Após a investigação, os alunos corrigiram seus gráfico no GeoGebra e relacionaram a investigação com a sentença $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Alem disso, responderam as seguintes perguntas:

II) Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período

III) Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, dia a nova imagem.

IV) Quais as alteração no gráfico dessa partícula deslocada em relação à partícula original?

V) Explique o que ocorreria com o gráfico das funções y = sen(α+π), y = sen(α-π/2), y = sen(α+π/2).

Em relação às perguntas II e III, não houve dificuldades, todas as duplas conseguiram responder que não havia alteração de período e não havia alteração de imagem. Essas conclusões mostram uma grande evolução ao ensino tradicional, onde frequentemente os alunos acreditam que há alteração no período da curva.

Em relação à pergunta IV, tivemos muitos alunos que responderam que a curva teve outro formato, ou ficou semelhante à curva da função cosseno.

Nenhum aluno respondeu que houve um deslocamento horizontal para a esquerda. O professor se deu conta que a atividade proposta permitia investigar o novo gráfico, mas não era sugestiva a conclusões como essas.

Em ralação a pergunta V, parte das duplas editaram o ponto na janela de visualização 2, utilizada para as correções, e observaram o gráfico resultante nas formas y = sen(α+π), y = sen(α-π/2), y = sen(α+π/2).

O intuito do professor com essa pergunta era fazer seus alunos concluírem que as curvas sofrem deslocamentos horizontais quando se soma valores constantes à variável x. Entretanto o professor mais uma vez reconhece que a atividade não propôs meios para essas conclusões, fato que motivou o professor a realizar uma nova atividade ao final do trabalho que será explicada posteriormente.

Embora os alunos não tenham concluído o que o professor esperava, ele conseguiram desenhar os gráficos corretamente, sem cometer os erros comuns a essa parte do conteúdo, fato positivo na avaliação do professor.

Para a próxima e última investigação, se referia ao deslocamento da circunferência verticalmente. Para isso, foi necessária a construção de um novo círculo centrado nos pontos (0,1). Os mesmos passos utilizados para a construção inicial do círculo trigonométrico foram repetidos com a diferença que este agora não estaria centrado na origem. Após a construção, cada dupla iniciou a sua investigação para tentar determinar o gráfico que modelaria a projeção da partícula que girava agora sobre a nova circunferência.

Essa investigação se mostrou bastante tranqüila, as duplas compreenderam rapidamente que seria a mesma curva deslocada verticalmente. Veja a conclusão do gráfico efetuado por um aluno:

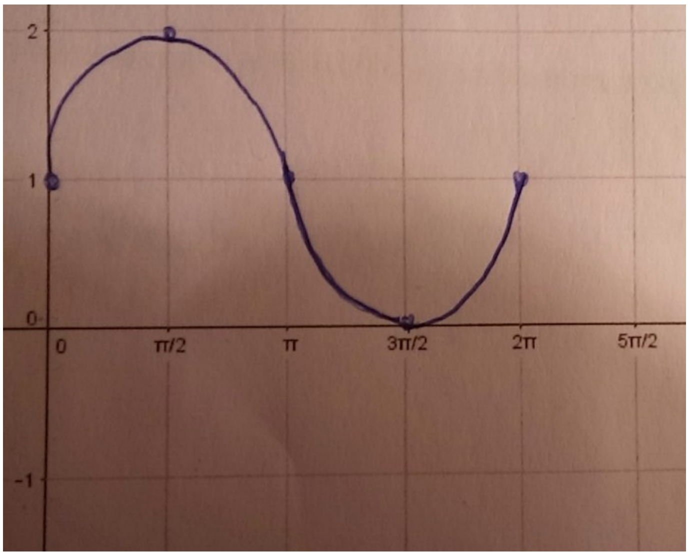


Figura 57: gráfico resultante de um aluno

Percebe-se que a estratégia elaborada nos primeiros gráficos ainda permanece, o aluno tira algumas amostras e traça o gráfico após.

Os alunos após concluírem suas investigações, efetuaram a correção no GeoGebra e relacionaram a situação prática com a sentença y=1+sen(x).

Após a correção, as seguintes perguntas foram feitas aos alunos:

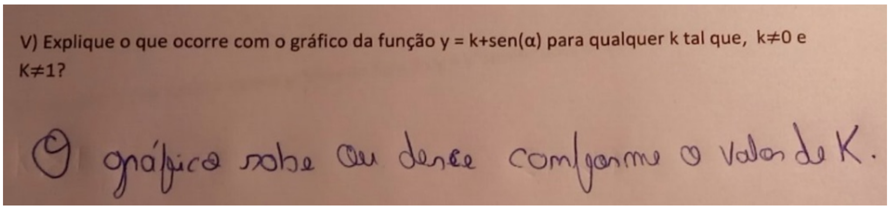
II) Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período

III) Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, diga a nova imagem.

IV)O que aconteceria com o gráfico se direcionássemos o centro da circunferência para o ponto (0, -1)?

V) Explique o que ocorreria com o gráfico da função y = k+sen(α) para qualquer k tal que, k≠0 e k≠1.

Nesse exemplo, o deslocamento da circunferência sugere que aconteça também um deslocamento do gráfico. Talvez seja essa a razão para os alunos concluírem que haveria deslocamento linear. Podemos observar a resposta apresentada por um aluno:



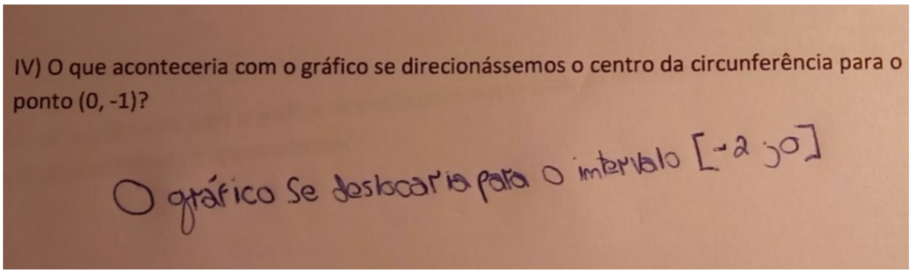
V) Explique o que ocorre com o gráfico da função y = k+sen(α) para qualquer k tal que, k≠0 e K≠1?

O gráfico sobe ou desce conforme o valor de K.

Figura 58: questionário de um aluno

Na investigação anterior, havia uma partícula que se deslocava mais a frente, entretanto o círculo seguia fixado no centro dos eixos coordenados. Por isso, na situação anterior não houve conclusões a respeito de deslocamentos.

Fica ainda mais evidente quando é questionado aos alunos um novo deslocamento para o centro (0, –1), veja uma resposta abaixo:


IV) O que aconteceria com o gráfico se direcionássemos o centro da circunferência para o ponto (0, -1)?

O gráfico se deslocaria para o intervalo [-2 ,0]

Figura 59: questionário de um aluno

Para finalizar, o professor resolve, de forma expositiva, fazer uma síntese geral sobre todos os movimentos estudados. Para isso o professor utilizou o GeoGebra e projetou os movimentos no data show.

Somente agora o professor faz uso da forma tradicional de ensino que relaciona a função $y = a + bsen(cx + d)$ com os movimentos gráficos gerados pela alteração dos coeficientes.

Após os alunos criarem significados a todos os coeficientes no circulo trigonométrico e associá-los aos seus respectivos gráficos, é a hora de fazer uma síntese envolvendo os coeficientes, pois a alteração desses coeficientes torna-se padrão a outras famílias de funções.

Por isso o autor não critica a forma tradicional de ensino, mas sugere que ela deva ser complementada com atividades como essa que abre margem para a criação de significados.

Para realizar essa síntese o professor criou no GeoGebra quatro controles deslizantes, conforme a figura abaixo:

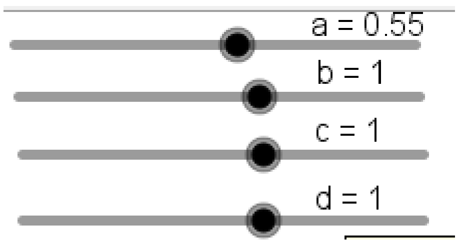


Figura 60: controles deslizantes

Após a criação dos controles deslizantes, o professor criou a função $y = a + bsen(cx + d)$. Agora, conforme o professor alterava os controles deslizantes, os gráficos sofriam as alterações referentes a cada coeficiente. Abaixo, o gráfico inicial do professor:

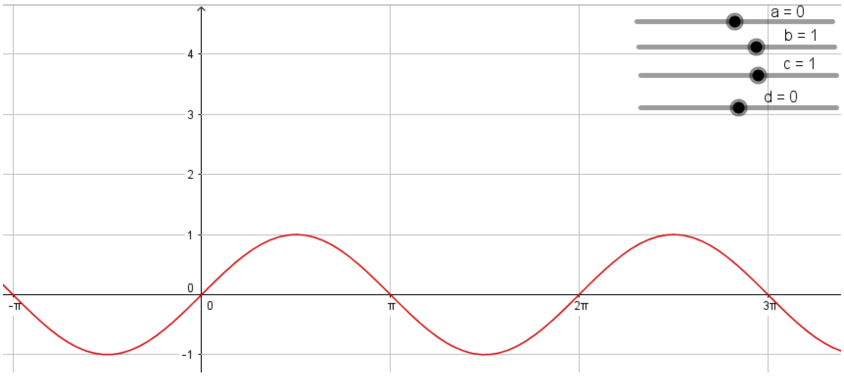


Figura 61: gráfico inicial

O professor alterou o ponto seletor *a* fazendo-o variar de zero a 2. Com isso o gráfico deslocou-se de forma interativa 2 unidades na vertical. Veja o gráfico resultante abaixo.

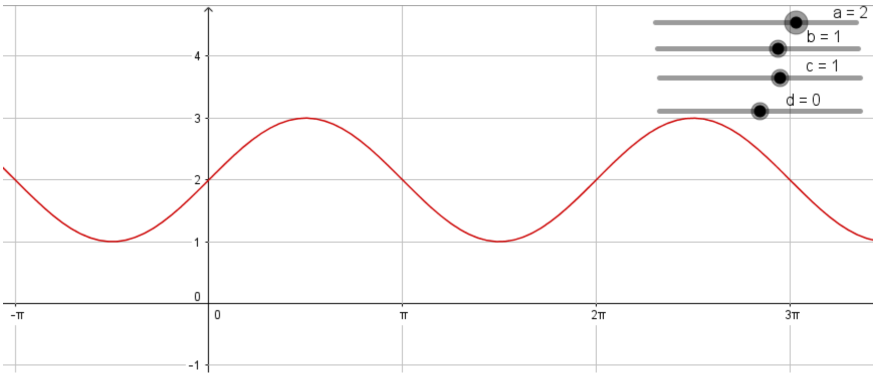


Figura 62: gráfico movimentado verticalmente para cima

O professor arrastou o controle deslizante para a esquerda, fazendo com que o coeficiente a ficasse cada vez menor. Conforme o ponto seletor era alterado, o gráfico deslocava-se na vertical para baixo. Abaixo, o gráfico resultante do professor.

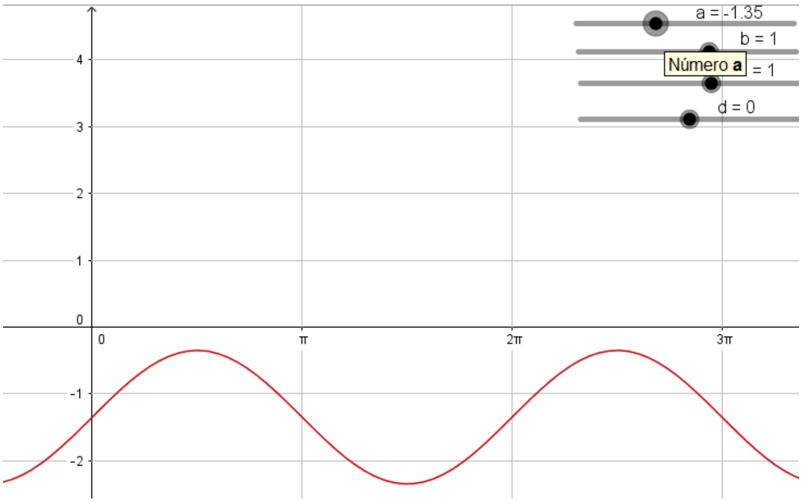


Figura 63: gráfico movimentado verticalmente para cima

Com esse movimento ficou evidenciado o papel do coeficiente a na função trigonométrica.

Uma das curiosidades demonstrada pelos alunos foi em relação ao coeficiente *b*. muitos se surpreenderam quando este passou a ser negativo. Veja a sequência de imagens abaixo.

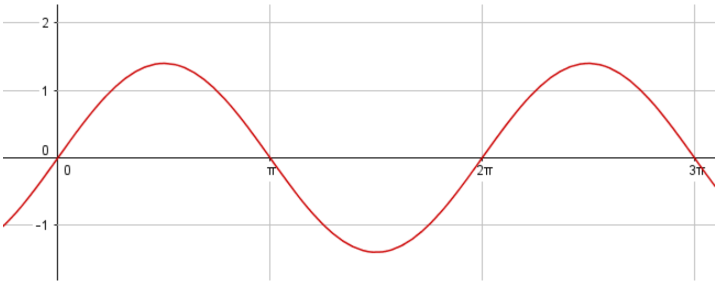


Figura 64: dilatação vertical

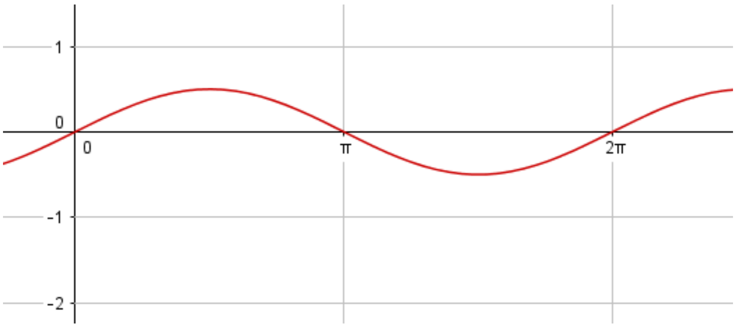


Figura 65: dilatação vertical

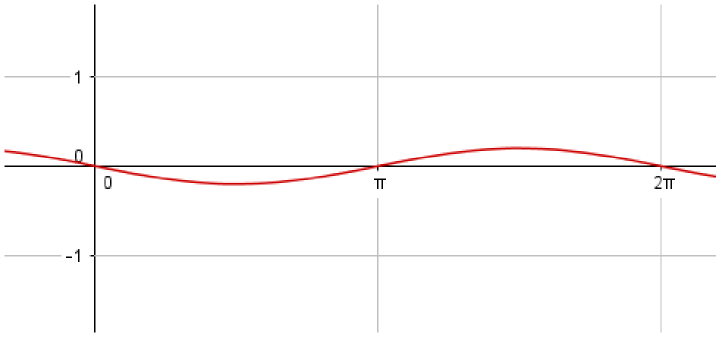


Figura 66: reflexão em relação ao eixo x

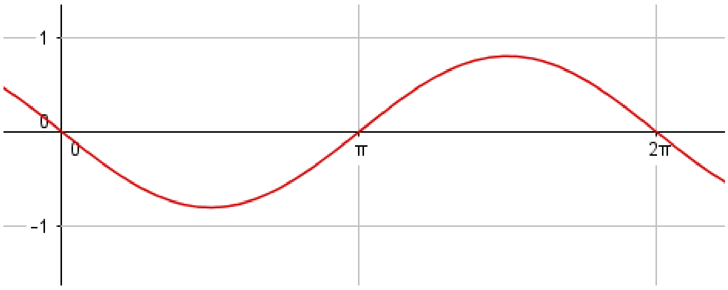


Figura 67: reflexão em relação ao eixo x

O professor aproveitou para reforçar que esse coeficiente representava o aumento do comprimento do raio da circunferência. A inversão do sinal desse coeficiente proporcionava uma reflexão em relação ao eixo x. Não fica evidente essa relação ao se observar a circunferência e a partícula que se desloca.

O próximo ponto seletor se referia ao coeficiente *c*. A compreensão do papel desse coeficiente no círculo ficou bem clara nas investigações, o que chamou a atenção dos alunos foi a interatividade do software que comprimia e dilatava a curva como uma sanfona.

O professor aproveitou para evidenciar justamente esse pensamento de dilatação e compressão. Conforme se aumenta esse coeficiente, no círculo, a velocidade é aumentada; no gráfico, a curva é comprimida. Da mesma forma, quando se diminui o valor do coeficiente, a velocidade diminui e o gráfico é dilatado.

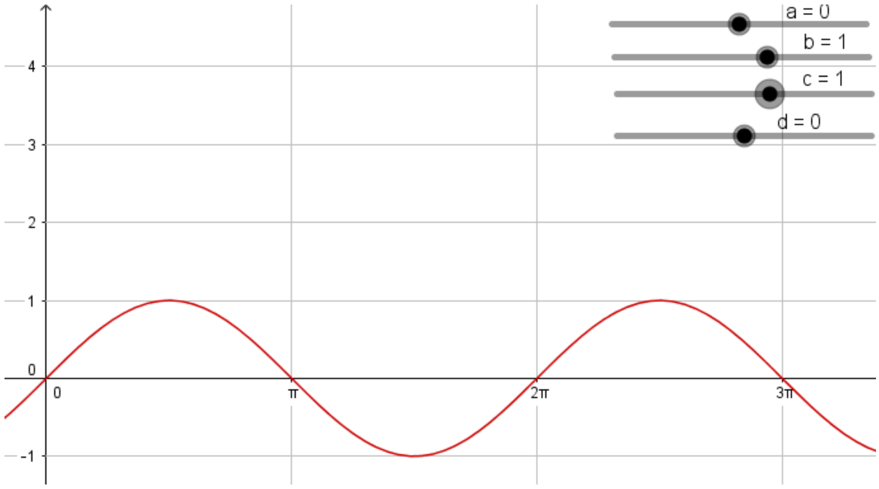


Figura 68: gráfico inicial

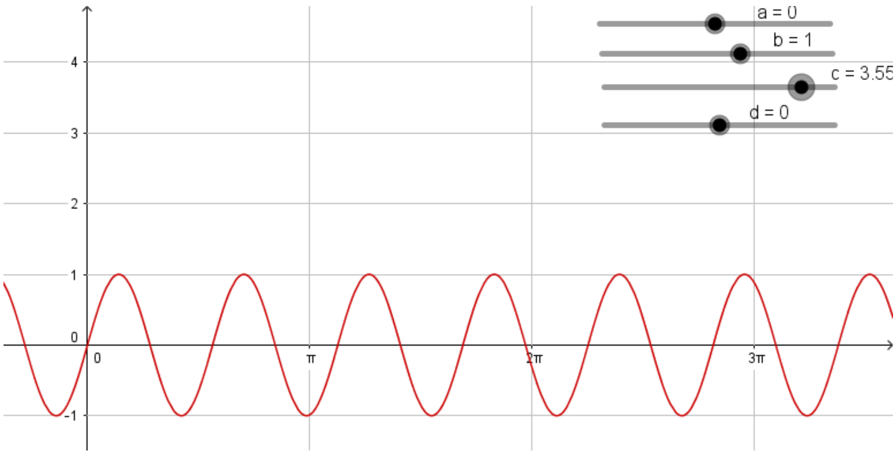


Figura 69: compressão horizontal

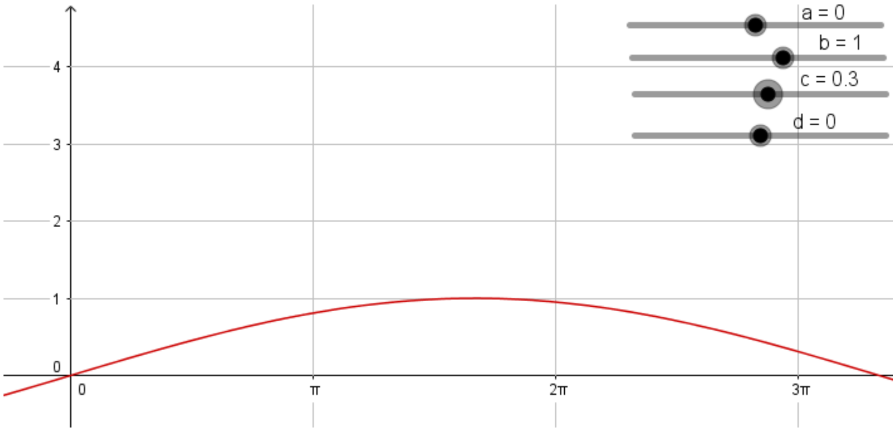


Figura 70: dilatação horizontal

Da mesma forma que a situação anterior, chamou a atenção dos alunos quando esse coeficiente ficou negativo.

O professor sugeriu uma rápida investigação, que os alunos imaginassem a partícula se deslocando pela circunferência trigonométrica no sentido contrário e que rapidamente tentassem desenhar o gráfico da projeção dessa partícula no eixo y.

Alguns alunos concluíram que ele ficaria invertido. O professor reforçou com o GeoGebra que esse movimento resultava em uma reflexão gráfica ocorrida em relação ao eixo y.

Um aluno questionou que não fazia diferença se a reflexão fosse em relação ao y ou em relação ao x, que o gráfico ficaria o mesmo. O professor disse que nesse caso ficariam iguais, mas em outras situações, como na função cosseno, que seria vista depois, teria diferença.

O último coeficiente foi o mais importante, pois os alunos não haviam percebido, nas investigações anteriores, que havia um deslocamento lateral conforme esse coeficiente era alterado.

Agora o professor mostrou que conforme o coeficiente era aumentado o gráfico se deslocava para a esquerda; quando o coeficiente diminuía, o gráfico se deslocava para a direita. Veja abaixo:

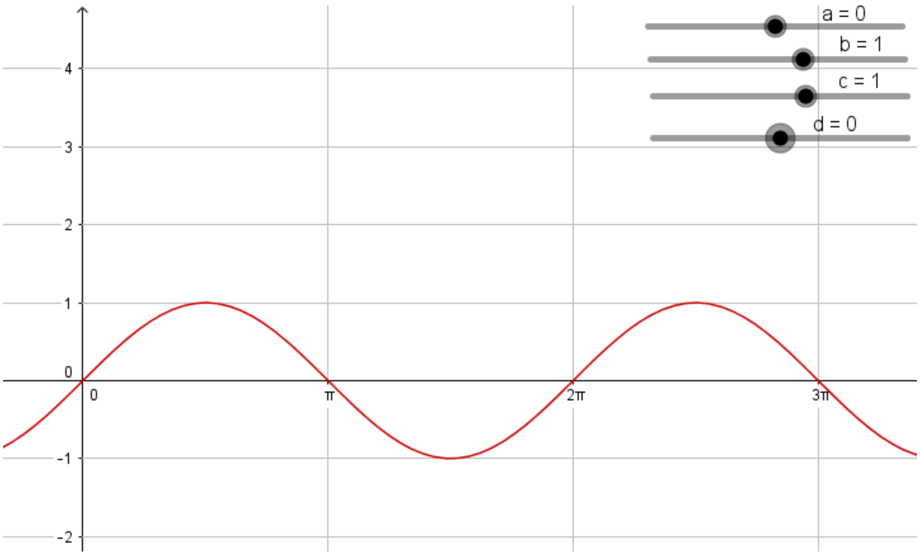


Figura 71: gráfico inicial

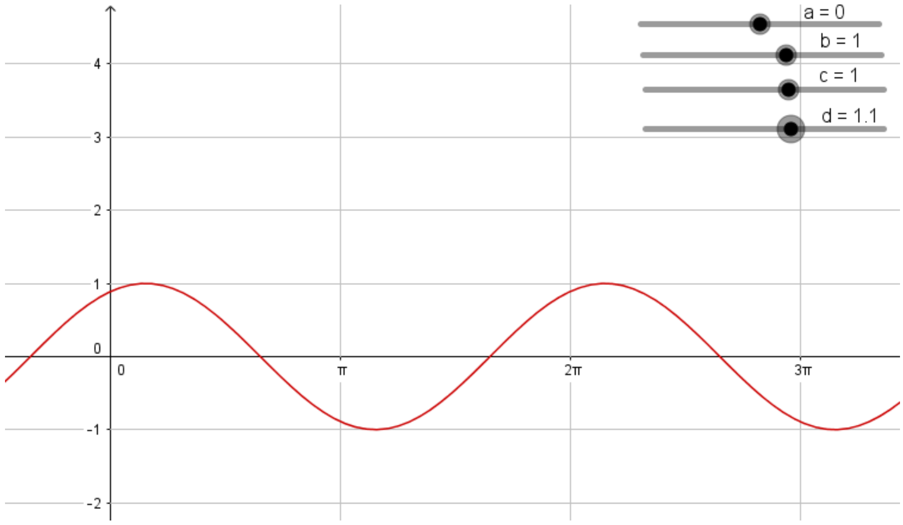


Figura 72: deslocamento linear para a esquerda

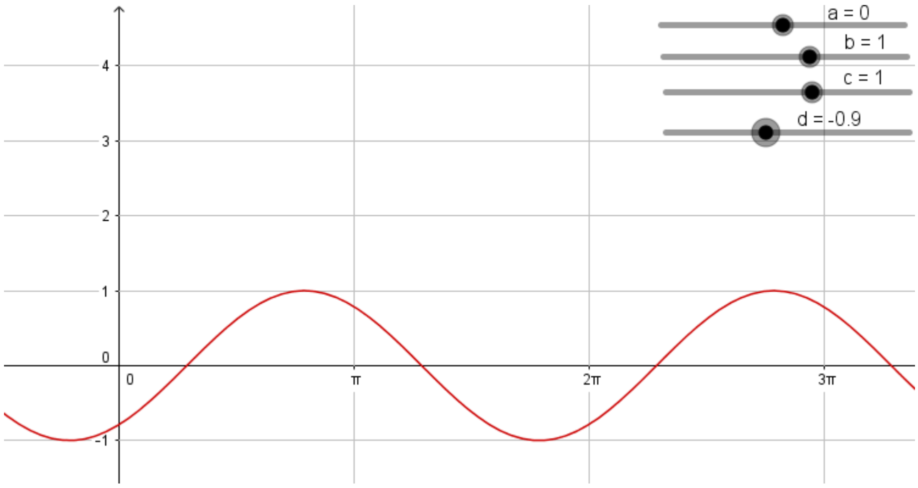


Figura 73: deslocamento linear para a direita

Por falta de tempo, o professor trabalhou as transformações gráficas da função cosseno de forma expositiva com a ajuda do GeoGebra e do data show.

Ao fim do trabalho o professor trabalhos com seus alunos uma lista de exercícios com contextualizações que está anexada ao fim do trabalho. O professor observou que os alunos conseguiram interpretar e associar os movimentos estudados às situações práticas apresentadas nas questões.

5 CONCLUSÃO

Recentemente, ao término de uma aula, me surpreendi pensando que faço parte da última geração que se lembra do mundo antes da popularização dos computadores domésticos. O primeiro computador que entrou em minha casa foi um modelo 386 no ano de 1993. Creio que, nesse mesmo período, modelos similares entraram em muitas outras casas e transformaram a vida de todos.

Desde então, a sociedade evoluiu acentuadamente, como nunca antes se vira em um espaço de tempo tão pequeno. Com essa evolução, novas habilidades se fizeram necessárias para suprir novas necessidades que surgiram justamente a partir da popularização dessas máquinas.

Hoje em dia, formar nossos alunos com habilidades puramente de execução, sem que os mesmo compreendam integralmente determinados assuntos, dificulta a inserção delas na sociedade moderna que cada vez mais utiliza o computador para essas tarefas práticas. Para viver em sociedade, é importante que nossos alunos saiam com a capacidade de tomar decisões, trabalhar em equipe, gerenciar projetos pessoais, aprimorarem idéias, entre outras.

Frente a essas mudanças, os professores devem se adaptar à nova realidade e repensar a forma que contribui para o ensino no mundo de hoje. Sabemos o quando é difícil para um professor que teve a formação profissional longe dos computadores utilizá-los em sala de aula. Entretanto, existem meios que o aproximam o professor de ótimas idéias inovadoras, como cursos de extensão, congressos ou até mesmo a ampla divulgação de trabalhos acadêmicos presentes na internet.

A motivação pode partir de uma inquietação presente no cotidiano do professor, como foi o caso dessa dissertação. A motivação desse trabalho nasce a partir da observação do professor sobre seus alunos que erravam exercícios por mecanizar diversos processos sem saber qual mecânica utilizar e em deferentes situações.

Imagine o quanto deve ser complicado para um aluno memorizar todos os movimentos da sentença $y = a + bsen(cx + d)$ sem compreender quais situações essas funções modelam. Partindo dessa inquietação o professor estabeleceu essa atividade investigativa onde o aluno interpreta os movimentos gerados pelo computador que são semelhantes aos encontrados na realidade.

Sabe-se o quando é difícil para o professor deixar a segurança de sua aula tradicional para abrir possibilidade de experimentar uma didática inovadora. Os problemas não se concentram somente no professor, as instituições de ensino se mostram abertas a metodologias mais inovadoras, mas nem sempre fornecem meios para que elas se concretizem.

Algumas escolas não são equipadas com número de computadores necessários para que se possa realizar um trabalho diferenciado. Além disso, é corriqueiro surgirem imprevistos quando se trabalha com tecnologia, e poucas escolas possuem um setor responsável pela manutenção dos computadores. Não foi a realidade do colégio israelita, onde o professor teve um laboratório de informática equipado com assistência técnica responsável pelo funcionamento dos computadores

Alem disso, para que haja comunicação entre professores, e novas propostas possam ser postas em prática, é necessário que a escola forneça algumas horas de planejamento. Essas medidas, muitas vezes, não são adotadas, pois há elevação nos custos da escola. Problemas como esses é comum na maior parte das escolas, até mesmo as particulares. Esses são alguns dos motivos pelo qual o autor acredita que, embora muitos são idéias para novas metodologias, ainda se encontra muito pouco é pouco nas práticas de sala de aula.

Apesar das dificuldades encontradas nos diferentes ambientes de ensino, é necessário que uma escola ativa e criativa seja criada. A sociedade, transformada a partir da popularização dos computadores, necessita de novas habilidades que devem ser desenvolvidas nessa nova escola. O ensino tradicional baseado na memorização de conceitos perde espaço para o ensino inovador que desenvolve cada vez mais pessoas autônomas que consegue articular teoria e prática.

A metodologia investigativa adotada nesse trabalho desenvolve habilidades sócio-afetivas indispensáveis nos dias de hoje. Na exploração dos gráficos, os alunos além de aprenderem funções trigonométricas e criarem significados aos diferentes movimentos de partículas, desenvolveram a autonomia e a habilidades de trabalhar em equipe, que são fundamentais nos dias de hoje e deve ser papel da escola desenvolvê-las.

Através desses movimentos virtuais criados com a ajuda do GeoGebra, os alunos mostraram maior habilidade de visualização e compreensão de situações reais que envolviam movimentos periódicos. Eles demonstraram essas habilidades nas resoluções de exercícios propostos pelo professor ao fim das investigações.

A comunidade cientifica acreditava até 1970 que a luz se projetava sempre em linhas retas. Até que um experimento, sem qualquer pretensão, mostrou que eles estavam errados. John Tyndall, com uma simples garrafa cheia de água com um furo em sua superfície no qual permitia que a água vazasse em forma de curva, mostrou que, ao posicionar um feixe de luz na mesma direção e sentido do furo, a água acompanhava a sua trajetória. Experimentos como esse, até o momento, não apresentavam qualquer utilidade prática, mas bastou o físico indiano Narinder observar esse experimento para associá-lo a uma idéia que revolucionou o mundo: a invenção da fibra óptica. A fibra óptica é responsável pela comunicação mundial e se ela não fosse realidade hoje, esse trabalho não chegaria a existir.

Exemplos como esse mostram como é importante desenvolver uma escola criativa onde habilidades como a do físico indiano sejam estimuladas com os alunos. A atividade investigativa se mostra importante, pois que parte de uma situação problema para gerar uma conclusão. Trabalhos investigativos desenvolvem significados a partir da pró-atividade de um grupo e alunos que, por sua vez, desenvolvem a capacidade de aprendem a aprender.

Para a elaboração desse tipo de atividade escolar, o computador se mostrou essencial, pois gerou um ambiente propicio à investigação que permitiu que os alunos aprendessem através da interação e coloca o professor em um papel de orientação.

O trabalho com os alunos do colégio Israelita ocorreu de forma satisfatória. Os alunos nunca haviam trabalhado com essa proposta e, ao fim das atividades, todos acharam interessante o processo e demonstraram maior compreensão a respeitos das funções trigonométricas.

A análise do professor sobre o trabalho mostra que os alunos não somente desenvolveram significados aos movimentos circulares, como também interpretaram corretamente situações cotidianas estabelecidas pelo professor ao fim do trabalho através de exercícios.

Por isso o professor acredita que o trabalho investigativo alcançou os objetivos estabelecidos nessa dissertação. Os alunos desenvolveram significados acerca dos movimentos circulares e, com eles, interpretaram corretamente situações práticas contidas no cotidiano.

Uma proposta como essa abre um leque de idéias para futuras modificações que podem ser feitas em outras oportunidades. O professor acredita que, em um próximo ano, trabalhará essa tarefa com a cadeira de Física. Funções trigonométricas têm ampla relação com movimento circular uniforme e ondulatória.

Para que suas idéias possam ser postas em prática, o professor apresentará essa proposta ao responsável pela disciplina de Física para que ambos possam discutir a ampliação do projeto.

Embora esse projeto tenha se desenvolvido com ampla satisfação, ele não se mostra concluído. Idéias como essas apresentadas mostram que ainda há muito que aprimorar e deixar essa atividade ainda melhor.

REFERÊNCIA

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autentica, 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SCUCUGLIA, Ricardo R. da Silva; GADANIDIS, George. Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Autentica, 2014.

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M. E. *humans-eith-media and the reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.* New York: Springer, 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. - Características da investigação qualitativa. In: Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Porto Editora, 1994. p.47- 51

FEIL, Iselda Terezinha Sausen. Pesquisa Etnográfica: ainda um mito. Caderno de Pesquisa n°65 Santa Maria, RS programa de Pós-Graduação em Educação. Mestrado (1995)

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

KENSKI, Vani Moreira. O Ensino e os recursos didáticos em uma sociedade cheias de tecnologias in Didática: O ensino e suas relações. Ilma P. Alencastro Veiga (org) Campinas SP. Papirus, 1997.

LOBO DA COSTA, Nielce M. A História da Trigonometria. Artigo – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Disponível em Acesso em: 07 jun. 2015.

MEC. (1999) Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Brasil.

Ministério da Educação, Programa Ensino Médio Inovador , 2013

NOTARE, M.; BASSO, M. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. Revista Novas Tecnologias na Educação. Porto Alegre, v.10, n.3, dez 2012. Disponível em: . Acesso em: 07 jun. 2015.

PONTE, João Pedro da. Investigação Matemática na Sala de Aula: Autêntica, 2015

PONTE, J. P., FERREIRA, C., VARANDAS, J. M., BRUNHEIRA, L., & OLIVEIRA, H. *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas.* Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999

PONTE, J. P., Matos, J. F., Guimarães, H. M., Leal. L. C., & Canavarro, A. P. (1991). O processo de experimentação dos novos programas de Matemática: Um estudo de caso. Lisboa: IIE.

PONTE, João Pedro da. Estudos de casos em educação matemática. Bolema, Rio de Janeiro: n. 25, 105-132. 2006.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003. 151 p.

VALENTE, José Armando, O computador na Sociedade do Conhecimento. Campinas SP: Nied, 2002.

Yin, R. (1984). Case study research: Design and methods. Newbury Park, CA: Sage.