

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS LIVRES DE COLISÃO: UM ESTUDO
CONSIDERANDO RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS E DINÂMICAS DE UM
MANIPULADOR PNEUMÁTICO POR MEIO DE ALGORITMOS METAHEURÍSTICOS

por

Rafael Crespo Izquierdo

Tese de Doutorado

Porto Alegre, Dezembro de 2017.

PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS LIVRES DE COLISÃO: UM ESTUDO
CONSIDERANDO RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS E DINÂMICAS DE UM
MANIPULADOR PNEUMÁTICO POR MEIO DE ALGORITMOS METAHEURÍSTICOS

por

Rafael Crespo Izquierdo

Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Processos de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Flávio José Lorini

Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Aprovada por:

Prof. Dr. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara.....DEMEC / UFRGS

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes.....PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Rafael Antônio Cumparsi Laranja.....PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes.....PPGMC/FURG

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de Dezembro de 2017.

No es héroe el que carece de miedo, lo es quien lo siente, lo enfrenta y lo supera.

Roberto Gómez Bolaños

AGRADECIMENTOS

A minha querida mãe e amiga, Sabrina Pereira de Abreu, por todo o amor, apoio, carinho e compreensão; Mãe, a tua presença é fundamental para minha caminhada até hoje. Muito obrigado, eu te amo.

Ao meu querido pai, Carlos Crespo Izquierdo, por toda sua atenção e carinho, sempre demonstrando força e superação neste período. Muchas gracias, Papa.

A minha amada família que sempre me acompanhou e ajudou em todas as etapas da minha vida. Muito obrigado: meu primo-irmão, Luis Fernando; minhas avós, Maria e Ricarda, meu tio, Orígenes, minha madrasta, Graça, e a todos que torceram por mim.

A minha companheira Janaína Nazzari Gomes, por todo seu amor, dedicação e compreensão durante a realização desta tese. Obrigado, amor.

Ao meu orientador, professor Dr. Flávio José Lorini, por ter se envolvido neste trabalho, orientando cada etapa de execução desta pesquisa com competência, companheirismo e dedicação.

Ao meu coorientador, professor Dr. Eduardo André Perondi, por ter abraçado a nossa causa, minha e do professor Lorini, sempre apoiando nos momentos necessários.

Aos professores do PROMEC, por terem participado da formação do meu conhecimento, obrigado.

Aos meus queridos amigos pessoais (da vida, da pelada, do kart e dos tatames) e aos amigos do PROMEC e do GPFAI por todo apoio, carinho, compreensão e amizade.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

O presente trabalho consolida um estudo para o planejamento de trajetória livre de colisão para um robô pneumático com 5 graus de liberdade aplicando três algoritmos metaheurísticos: algoritmos metaheurísticos por vagalumes, algoritmos metaheurísticos por enxames de partículas e algoritmos genéticos. No que se refere à aplicação de algoritmos metaheurísticos ao estudo de planejamento de trajetória de robôs manipuladores na presença de obstáculos, existem diferentes tipos de técnicas para evitar colisões que consideram os efeitos cinemáticos e dinâmicos na obtenção de trajetórias com o menor tempo, torque, etc. Neste estudo, são propostas contribuições à aplicação dessas técnicas especificamente a robôs manipuladores pneumáticos, sobretudo, no que diz respeito às características específicas dos servoposicionadores pneumáticos, como, por exemplo, a modelagem do atrito desses sistemas, o cálculo da massa equivalente, etc. A metodologia utilizada é definida em duas etapas. A primeira delas consiste na obtenção de pontos intermediários, adquiridos considerando a menor distância entre os mesmos e o ponto final, gerados considerando a presença de obstáculos (cilindros, cubos e esferas). Esses obstáculos são mapeados em regiões de colisão, que constituem restrições para o problema de otimização. A segunda etapa baseia-se no estudo do planejamento de trajetórias: aplicam-se *b-splines* de 5º e 7º grau na interpolação dos pontos intermediários, com vistas à obtenção de trajetórias que considerem, de um lado, a menor força dos atuadores associada à dinâmica do manipulador em estudo e, de outro, restrições cinemáticas e dinâmicas, determinadas por meio das características operacionais dos servoposicionadores pneumáticos. Os resultados mostram que a metodologia proposta é adequada para tarefas de manipulação de peças na presença de obstáculos, uma vez que os pontos intermediários situam-se fora da região de colisão nos três casos aqui apresentados. Além disso, quanto à segunda etapa, observou-se que as trajetórias de 5º e 7º grau apresentaram resultados similares, de maneira que os erros obtidos poderiam ser melhorados analisando aspectos associados ao controlador do robô em estudo.

Palavras-chave: Planejamento de trajetória; Planejamento de caminho; Algoritmo metaheurístico por Vagalumes; Algoritmo metaheurísticos por enxame de partículas; Algoritmos Genéticos; Robô pneumático com 5 graus de liberdade.

ABSTRACT

The thesis presents a study for collision-free trajectory planning for a pneumatic robot with 5 degrees of freedom applying three metaheuristic algorithms: firefly metaheuristic algorithm, particle swarm optimization and genetic algorithms. As regards the application of metaheuristic algorithms to the study of the trajectory planning of manipulating robots in the presence of obstacles, there are different types of techniques to avoid collisions that consider the kinematic and dynamic effects, obtaining trajectories with the optimal time, torque, etc. In this study, contributions are made to the application of these techniques specifically to pneumatic manipulator robots, particularly with regard to the specific characteristics of pneumatic servo-actuators, such as friction modeling of these systems, calculation of equivalent mass, etc. The methodology used is defined in two steps. The first one consists of obtaining intermediate points, acquired considering the smallest distance between the intermediate points and the final point, generated considering the presence of obstacles (cylinders, cubes and spheres). These obstacles are mapped in collision regions, which are constraints to the optimization problem. The second step is based on the study of the trajectory planning: 5th and 7th degree b-splines are applied in the interpolation of the intermediate points, in order to obtain trajectories that consider the smallest actuator force associated to the dynamics of the manipulator and the kinematic and dynamic constraints, determined by the operational characteristics of pneumatic servo-positioners. The results show that the proposed methodology is suitable for tasks of manipulating parts in the presence of obstacles because the intermediate points are outside the collision region in the three cases presented here. In addition, it was observed that the trajectories of 5th and 7th degree presented similar results, so that the errors obtained could be improved by analyzing aspects associated to the controller of the robot.

Keywords: Robot Trajectory Planning; Robot Path Planning; Firefly Metaheuristic Algorithm; Particle Swarm Optimization; Genetic Algorithm; Cylindrical Pneumatic Robot.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	IV
1 INTRODUÇÃO	1
1.1. Objetivo Geral	4
1.2. Objetivos específicos	4
1.3. Motivações do Trabalho	5
1.4. Organização do trabalho	5
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
2.1. Componentes de um Manipulador Industrial	8
2.2. Modelagem Matemática de Manipuladores.....	9
2.2.1. Articulações de um Manipulador.....	9
2.2.2. Graus de Liberdade de um Manipulador	10
2.2.3. Volume de Trabalho de Manipuladores	12
2.3. Tipos de Estruturas de Manipuladores Industriais.....	13
2.3.1. Manipulador Cilíndrico	13
2.4. Análise Cinemática dos Manipuladores	14
2.4.1. Abordagem da Cinemática Direta em Manipuladores.....	15
2.4.2. Abordagem da Cinemática Inversa de Manipuladores.....	16
2.5. Análise Dinâmica dos Manipuladores	17
2.5.1. Formulação lagrangeana para robôs com elos rígidos.....	18
2.6. Planejamento de Trajetórias para Manipuladores.....	19
2.6.1. Planejamento do Caminho e as Técnicas usadas para Manipuladores	22
2.6.2. Funções Matemáticas aplicadas ao Planejamento de Trajetórias Robóticas	25
2.6.2.1. Polinômios Associados a Trajetórias do tipo Multiponto	26
2.6.2.2. Polinômios Definidos por b-splines.....	30
2.7. Definições do Problema de Otimização	33
2.7.1. Algoritmos de Otimização	35
2.7.2. Técnicas Estocásticas de otimização	37
2.7.3. Algoritmo de Otimização por Colônia de Vagalumes (FMA)	39
2.7.3.1. Atratividade e Intensidade Luminosa	40

2.7.4.	Algoritmo de otimização por Enxame de Partículas (PSO)	43
2.7.5.	Algoritmos Genéticos (AG).....	45
2.7.5.1.	Estrutura dos Algoritmos Genéticos	46
2.7.5.2.	Codificação do cromossomo.....	47
2.7.5.3.	Função de Avaliação ou Objetivo.....	48
2.7.5.4.	Seleção de indivíduos	49
2.7.5.5.	Operador de Cruzamento (<i>Crossover</i>).....	51
2.7.5.6.	Operador de Mutação	51
2.8.	Técnicas de Otimização no Planejamento de Trajetórias de Manipuladores	51
3	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS LIVRE DE COLISÃO	55
4	RPC - O ROBÔ EM ESTUDO.....	70
4.1.	As configurações do RPC	73
4.1.1.	Relação entre as variáveis de juntas e dos atuadores do RPC	74
4.2.	Mapeamento dos Obstáculos no Volume de Trabalho do RPC	75
4.3.	Modelagem Mecânica dos servoposicionadores do manipulador pneumático.....	81
4.3.1.	Relação entre a Força Pneumática e o torque nas juntas do RPC	83
4.3.2.	Modelo de atrito LuGre	84
4.3.3.	Parâmetros do modelo LuGre <i>aplicados ao RPC</i>	87
4.4.	Cinemática Direta do Manipulador Pneumático.....	88
4.5.	Cinemática Inversa do Manipulador Pneumático.....	90
4.6.	Dinâmica do Manipulador Pneumático	92
4.7.	Massas Equivalentes dos Atuadores do RPC	94
5	METODOLOGIA PARA O PLANEJAMENTO DO CAMINHO E TRAJETÓRIA NO MOVIMENTO DO RPC	101
5.1.	Estudo do Planejamento do Caminho para o RPC	101
5.2.	Estudo de Planejamento de Trajetória para o RPC.....	108
5.2.1.	Representação da trajetória por funções b-splines de 5° e 7° grau	109
5.2.1.1.	Graus de liberdade do sistema e parametrização do vetor de nós	111
5.2.1.2.	Derivada de uma curva <i>b-spline</i>	115
5.2.1.3.	Sistema de equações para interpolação por <i>b-splines</i>	118
5.2.2.	Formulação do problema de otimização para o planejamento de trajetórias.....	123
5.2.2.1.	Restrições laterais do problema de otimização de trajetórias.....	125

5.2.2.2.	Restrições de colisão no espaço de juntas	126
5.2.2.3.	Restrições cinemáticas e dinâmicas do RPC	129
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	149
6.1.	Identificação dos Parâmetros do RPC para simulação e experimento	150
6.1.1.	Parâmetros associados ao Planejamento do Caminho no RPC	150
6.1.2.	Parâmetros associados ao Planejamento de Trajetória no RPC.....	152
6.1.2.1.	Parâmetros do manipulador e seus atuadores pneumáticos.....	153
6.1.2.2.	Definição das restrições de Velocidade.....	154
6.1.2.3.	Definição das restrições de aceleração	156
6.1.2.4.	Definição das restrições de <i> jerk</i>	159
6.1.2.5.	Definição das restrições de torque.....	161
6.2.	Planejamento do Caminho do RPC na presença de obstáculos.....	163
6.2.1.	Análise comparativa entre as técnicas de otimização no Planejamento do Caminho	169
6.3.	Planejamento de Trajetória do RPC	173
6.3.1.	Análise das restrições de colisão no espaço de juntas do RPC.....	173
6.3.2.	Análise do erro de seguimento de trajetória no RPC.....	175
6.3.3.	Análise comparativa entre as técnicas de otimização no Planejamento de Trajetória	183
6.4.	Contribuições do presente trabalho para outros estudos de trajetória de manipuladores.....	186
6.4.1.	Contribuições do método de otimização para o planejamento do caminho	186
6.4.2.	Contribuições do método de otimização para o planejamento de trajetórias	188
7	CONCLUSÕES.....	191
7.1.	Sugestões de trabalhos futuros.....	196
ANEXO A – EQUACIONAMENTOS UTILIZADOS NO CÁLCULO DO MODELO DINÂMICO DO RPC		207
ANEXO B – CÁLCULO DAS CONSTANTES UTILIZADAS NO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA INTERPOLAÇÃO POR B-SPLINES.....		209
ANEXO C – RESULTADO DA TRAJETÓRIA T5 COM OS ALGORITMOS FMA, PSO E AG.....		215

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – RPC e os aspectos considerados no planejamento de trajetória livre de colisão. ...3	
Figura 2.1 - Representação dos tipos convencionais de juntas de robôs. 10	10
Figura 2.2 - Representação de um punho esférico com seus respectivos movimentos. 11	11
Figura 2.3 - Robô de 6 GDL com efetuador apresentando um eixo de simetria. 12	12
Figura 2.4 - Representação de um manipulador Cilíndrico. 13	13
Figura 2.5 - Representação de uma cadeia cinemática aberta (a) e fechada (b). 14	14
Figura 2.6. Relação entre cinemática e direta e inversa. 15	15
Figura 2.7 - Principais categorias de Trajetórias. 20	20
Figura 2.8 - Exemplo de uma trajetória multidimensional aplicada a um robô industrial. 21	21
Figura 2.9 - Exemplo de um diagrama de Voronoi. 23	23
Figura 2.10. Características das interpolações polinomiais. 29	29
Figura 2.11. Representação das funções de base em função do grau da <i>b-spline</i> 32	32
Figura 2.12 - Classificação dos algoritmos de otimização. 35	35
Figura 2.13 - Pseudocódigo do algoritmo FMA. 42	42
Figura 2.14 - Representação vetorial da atualização da velocidade e posição. 44	44
Figura 2.15 - Princípio de funcionamento dos AG. 46	46
Figura 2.16 – Representação de Cromossomos na implementação dos AG. 47	47
Figura 2.17 - Princípio da função objetivo no AG. 48	48
Figura 2.18 – Seleção pelo método da Roleta. 50	50
Figura 2.19 - Seleção pelo método do Torneio. 50	50
Figura 4.1 - Estrutura do robô e o arranjo de suas juntas. 73	73
Figura 4.2 - Representação do volume de trabalho do robô. 74	74
Figura 4.3 - Representação da região crítica. 76	76
Figura 4.4 - Representação da região 1 no volume de trabalho do robô. 76	76
Figura 4.5 - Representação da região 2 no volume de trabalho do robô. 77	77
Figura 4.6 - Representação dos pontos característicos no plano bidimensional. 78	78
Figura 4.7 - Representação do parabolóide nas bases XYZ e X'Y'Z'. 79	79
Figura 4.8 - Representação da parábola nas bases XYZ e X'Y'Z'. 80	80

Figura 4.9 - Sistema pneumático de posicionamento.	81
Figura 4.10 - Força de atrito versus velocidade constante.	86
Figura 4.11 - Modelo sólido do robô com os sistemas de coordenadas de cada elo por meio do método de Denavit-Hartenberg.	95
Figura 4.12 - Sistema de coordenadas utilizado no 2° ao 5° GDL do RPC.	96
Figura 4.13 - Modelagem Geométrica do 4° GDL do RPC.	98
Figura 5.1 - Metodologia proposta para o planejamento do caminho.	102
Figura 5.2 - Representação do volume de trabalho utilizado no planejamento do caminho. .	103
Figura 5.3 - Metodologia proposta para o planejamento do caminho.	104
Figura 5.4 - Relação entre as distâncias d_1 e d_2 no caso de esferas e cubos.	107
Figura 5.5 - Relação entre as distâncias d_1 e d_2 no caso de cilindros.	107
Figura 5.6 - Metodologia proposta para o planejamento de trajetória.	108
Figura 5.7 - Caso de colisão da trajetória interpolada no espaço de juntas.	126
Figura 5.8 – Representação do RPC e dos limites da região de colisão.	127
Figura 5.9 - Representação de um caso de colisão no espaço de juntas do RPC.	129
Figura 5.10 - Análise das restrições de velocidade.	131
Figura 5.11 - Curvas experimentais da força de atrito dos atuadores do RPC em regime de velocidade constante.	133
Figura 5.12 - Curva da diferença de pressão calculada para o 1° GDL do RPC.	136
Figura 5.13 - Sistema de transmissão do 1° GDL e as hipóteses consideradas para determinar a diferença de pressão do 1° e 2° GDL do RPC.	137
Figura 5.14 - Conjunto formado pelo 2°, 3°, 4° e 5° GDL e as condições consideradas para determinar a diferença de pressão do 3° e 4° GDL do RPC.	139
Figura 5.15 - Conjunto formado do 4° ao 5° GDL e as condições consideradas para determinar a diferença de pressão do 5° GDL do RPC.	140
Figura 5.16 - Curva experimental de velocidade no 1° GDL do RPC.	142
Figura 5.17 - Variação da diferença de pressão no 1° GDL do RPC.	145
Figura 6.1 - Imagem do protótipo do RPC.	150
Figura 6.2 - Curvas de velocidade obtidas experimentalmente.	155
Figura 6.3 - Curvas de aceleração obtidas pelo modelo proposto e experimentalmente.	157
Figura 6.4 - Curvas de <i>Jerk</i> obtidas pelo modelo proposto e experimentalmente.	160
Figura 6.5 - Curvas de Torque obtidas pelo modelo proposto.	162

Figura 6.6 - Pontos intermediários no caso de cilindros (a), esferas (b) e cubos (c) (1° caso)	164
Figura 6.7 - Pontos intermediários no caso de cilindros (a), esferas (b) e cubos (c) (2° caso)	166
Figura 6.8 - Pontos intermediários no caso de cilindros (a), esferas (b) e cubos (c) (3° caso).	168
Figura 6.9 - Trajetória no espaço de trabalho (a) e de juntas (b) do RPC	174
Figura 6.10 – Pontos-chave utilizados para a obtenção da trajetória.	177
Figura 6.11 – T5, trajetória executada e seu respectivo erro.	179
Figura 6.12 – T7, trajetória executada e seu respectivo erro	180
Figura 6.13 – T7M, trajetória executada e seu respectivo erro	181
Figura C.1 – Trajetória T5 (posição) obtida com o algoritmo FMA	215
Figura C.2 - Trajetória T5 (velocidade) obtida com o algoritmo FMA	216
Figura C.3 - Trajetória T5 (aceleração) obtida com o algoritmo FMA	217
Figura C.4 - Trajetória T5 (<i>jerk</i>) obtida com o algoritmo FMA	218
Figura C.5 - Trajetória T5 (torque) obtida com o algoritmo FMA	218
Figura C.6 - Trajetória T5 (posição) obtida com o algoritmo PSO	219
Figura C.7 - Trajetória T5 (velocidade) obtida com o algoritmo PSO	220
Figura C.8 - Trajetória T5 (aceleração) obtida com o algoritmo PSO	221
Figura C.9 - Trajetória T5 (<i>jerk</i>) obtida com o algoritmo PSO	221
Figura C.10 - Trajetória T5 (torque) obtida com o algoritmo PSO	222
Figura C.11 - Trajetória T5 (posição) obtida com o algoritmo AG	223
Figura C.12 - Trajetória T5 (velocidade) obtida com o algoritmo AG	224
Figura C.13 - Trajetória T5 (aceleração) obtida com o algoritmo AG	225
Figura C.14 - Trajetória T5 (<i>jerk</i>) obtida com o algoritmo AG	225
Figura C.15 - Trajetória T5 (torque) obtida com o algoritmo AG	226

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Características de um Robô Industrial.....	9
Tabela 3.1 - Trabalhos que tratam do planejamento de caminho, de trajetória livre, ou de ambos, usando algoritmo metaheurístico (1994 a 2011).	57
Tabela 3.2 - Trabalhos que tratam do planejamento de caminho, de trajetória livre, ou de ambos, usando algoritmo metaheurístico (2012 a 2015).	58
Tabela 4.1 - Estudos sobre o projeto, a construção e o funcionamento do RPC.....	70
Tabela 4.2 - Valores limites das juntas do robô pneumático.....	73
Tabela 4.3 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg do robô pneumático.	88
Tabela 4.4 - Relação das Massas dos elos do RPC.	95
Tabela 4.5 - Massas dos elementos do 4º GDL.....	100
Tabela 5.1 - Relação entre o vetor de nós e os instantes de tempo.	121
Tabela 6.1 - Casos utilizados no estudo do Planejamento do Caminho.....	151
Tabela 6.2 - Parâmetros utilizados no planejamento de trajetória do RPC.....	153
Tabela 6.3 - Parâmetros estáticos e dinâmicos para o atrito.....	154
Tabela 6.4 - Velocidades máximas e mínimas aplicadas às restrições de velocidade.....	156
Tabela 6.5 - Acelerações máximas e mínimas aplicadas às restrições de aceleração.	158
Tabela 6.6 - <i>Jerk</i> máximo e mínimo aplicado às restrições de <i>jerk</i>	161
Tabela 6.7 - Torque máximo e mínimo aplicado às restrições de torque.....	163
Tabela 6.8 - Resultado dos algoritmos FMA, PSO e AG para o 1º caso do planejamento do caminho	170
Tabela 6.9 - Resultado dos algoritmos FMA, PSO e AG para o 2º caso do planejamento do caminho	170
Tabela 6.10 - Resultado dos algoritmos FMA, PSO e AG para o 3º caso do planejamento do caminho	171
Tabela 6.11 - Parâmetros de calibração do Algoritmo FMA	172
Tabela 6.12 - Parâmetros de calibração do Algoritmo PSO.....	172
Tabela 6.13 - Parâmetros de calibração do Algoritmo AG	173
Tabela 6.14 – Dados da trajetória e os limites cinemáticos e dinâmicos experimentais.....	175
Tabela 6.15 – Ganhos do controlador por torque computado utilizado nos experimentos	176

Tabela 6.16 - Coordenadas dos pontos intermediários no espaço de juntas.....	177
Tabela 6.17 – Erro máximo entre T5, T7 e T7M e a trajetória executada pelo RPC.....	182
Tabela 6.18 - Erro médio entre T5, T7 e T7M e a trajetória executada pelo RPC.....	183
Tabela 6.19 - Resultados dos algoritmos FMA, PSO e AG no Planejamento de Trajetórias.	184
Tabela 6.20 - Parâmetros de calibração do Algoritmo FMA no Planejamento de Trajetórias.	185
Tabela 6.21 - Parâmetros de calibração do Algoritmo PSO no Planejamento de Trajetórias.	186
Tabela 6.22 - Parâmetros de calibração do Algoritmo AG no Planejamento de Trajetórias.	186

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABC	Algoritmo de Otimização por Colônia de Abelhas Artificiais
ACO	Algoritmo de Otimização por Colônia de Formigas
AG	Algoritmos Genéticos
AR	Ambientes de Realidade Aumentada
AS	Algoritmo Simplex
<i>Cspace</i>	Espaço de configuração
<i>Cfree</i>	Configuração de espaço livre
DFP	<i>Davidon-Fletcher-Powell</i>
DOE	Projeto de Experimentos
D-H	Denavit - Hartenberg
FMA	Algoritmo Metaheurístico de Vagalumes
FP	Fator de Penalização
GDL	Graus de Liberdade
GH	Heurística Ganaciosa
GPS	Algoritmo de Pesquisa de Padrões Generalizados
GSA	Algoritmo de Busca Gravitacional
HIG	Algoritmo Genético Híbrido
HS	Busca Harmônica
ILS	Pesquisa Local Iterada
IS	Sistemas Imunológicos
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
IWO	Algoritmo de Otimização Invasiva de Ervas Daninhas
LAMECC	Laboratório de Mecatrônica e Controle
PROMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
P	Junta Prismática
PF	Poliedro Flexível
PPP	Manipuladores Cartesianos
PRM	<i>Probabilistic Roadmap Method</i>

PSO	Algoritmo de Otimização por Colônia de Vagalumes
R	Junta Rotativa
RIA	<i>Robotics Industries Association</i>
RPP	Manipuladores Cilíndricos
RPP	<i>Randomized Path Planner</i>
RRR	Manipuladores Antropomorfos
RRP	Manipuladores Esféricos
RRT	<i>Rapidly-Exploring Random Trees</i>
RPC	Robô Pneumático com 5 graus de liberdade
SA	Recozimento Simulado
SCARA	<i>Selective Compliance Assembly Robot Arm</i>
SQP	Programação Quadrática Sequencial
TCCA	Torque Calculado com Compensação de Atrito
TS	Busca Tabu
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Comprimento do elo, [m]
A_i	Área útil do êmbolo do i -ésimo atuador, m ²
${}^{i-1}A_i$	Matriz de transformação do sistema de coordenadas $i-1$ para o sistema de coordenadas i
$C(u)$	Polinômio utilizado na interpolação por b -splines
$C(q, \dot{q})$	Matriz de efeitos centrífugos de Coriolis do manipulador
c_1	Componente cognitiva da partícula no PSO
c_2	Componente social do enxame no PSO
d	Variável da junta prismática, [m]
d_{rel}	Distância relativa que afasta os pontos intermediários do espaço geométrico que representa o obstáculo, [m]
d_1	Distância entre u_i e o plano diretriz, [m]
d_2	Distância entre o foco (F) e o ponto u_i , [m]
ε^i	Vetor dos números aleatórios resultante de uma distribuição gaussian: uniforme no FMA
$f(\cdot)$	Função (polinômio) de interpolação de grau n
f_{p_i}	Força pneumática resultante em um determinado atuador i , [Pa]
F_{e_i}	Possíveis Forças externas no atuador, [N]
F_{grav_i}	Força devido à ação da gravidade no embolo do atuador, [N]
F_{S_i}	Força de atrito estático do i -ésimo atuador (força de quebra), [N]
F_{SS_i}	Força de atrito em regime permanente do i -ésimo, [N]
F_{l_i}	Força líquida no atuador, [N ou N.m]
F_{atr_i}	Força de atrito no atuador i , [N]
\dot{F}_{atr_i}	Derivada da Força de atrito no atuador i , [N/s]
F_{c_i}	Força de atrito seco (ou de Coulomb), [N]
g	Aceleração da gravidade, [m/s ²]
G	Função objetivo do problema de otimização
$G(q)$	Vetor de efeitos gravitacionais do manipulador
$G_{caminho}$	Função objetivo do problema de otimização do caminho

$G_{\text{trajetória}}$	Função objetivo do problema de otimização da trajetória
$H(q)$	Matriz de efeitos inerciais do manipulador
$I(r_{i,j})$	Intensidade de luz associadas ao FMA
I_0	Intensidade de luz na origem relacionadas ao FMA
I_s	Intensidade de luz na fonte no FMA
$I_{4^{\circ} \text{ e } 5^{\circ} \text{ elo}}$	Momento de inércia em relação ao eixo z do sistema de coordenadas 5, [kgm ²]
I_{p3}	Momento de inércia em relação ao eixo z do sistema de coordenadas 3, [kgm ²]
J_i	Termo da diagonal i da matriz de relações de transmissão mecânica
l	Variável da junta prismática, m
m	Número de nós das b -splines
M_i	Massa equivalente no êmbolo do atuador i , [kg]
$M_{1^{\circ} \text{ elo}}$	Massa do 1° elo do RPC, [kg]
$M_{2^{\circ} \text{ elo}}$	Massa do 2° elo do RPC, [kg]
$M_{3^{\circ} \text{ elo}}$	Massa do 3° elo do RPC, [kg]
$M_{4^{\circ} \text{ elo}}$	Massa do 4° elo do RPC, [kg]
$M_{5^{\circ} \text{ elo}}$	Massa do 5° elo do RPC, [kg]
$M_{C4^{\circ} \text{ GDL}}$	Massa da correia do 4° GDL, [kg]
$M_{CE4^{\circ} \text{ GDL}}$	Massa do Suporte do <i>Clamp</i> do 4° GDL, [kg]
$N_{i,p}$	Funções de base das b -splines de grau p
p	Grau da função b -spline
p_{atm}	Pressão atmosférica, [Pa]
p_{sup}	Pressão de suprimento, [Pa]
\tilde{p}	Trajetoória realizada pelo efetuador
p_{Δ_i}	Diferença de pressão do i -ésimo atuador, [Pa]
P	Pontos de controle da função b -spline
\dot{p}_i	Diferença de pressão experimental do i -ésimo atuador, [Pa/s]
PR_i	Probabilidade do i -ésimo indivíduo da população ser selecionado para a reprodução nos AG
q_j	Posição da j -ésima junta (espaço de juntas), [rad ou m]
\dot{q}_j	Velocidade da j -ésima junta (espaço de juntas), [rad/s ou m/s]
\ddot{q}_j	Aceleração da j -ésima junta (espaço de juntas), [rad/s ² ou m/s ²]

q_m	Vazão mássica, [kg/s]
R	Raio da esfera de referência utilizado no planejamento do caminho
r_1 e r_2	vetores contendo números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo [0,1] (PSO).
r_{ij}	Distância entre vagalume i e o vagalume j no FMA
t	Tempo, [s]
tol.cov	Tolerância pelo coeficiente de variação no PSO
tol.FP	Tolerância pelo fator de penalização no PSO
T_{arr}	Vetor coluna de torque/forças de atrito, N ou N.m
u	Nós da função <i>b-spline</i>
u_i^*	i -ésimo ponto intermediário da trajetória (planejamento do caminho)
U	Vetor de nós relacionados às <i>b-splines</i>
$v_{i,j}(t)$	Velocidade atual da i -ésima partícula referente a j -ésima variável de projeto (PSO)
$v_{i,j}(t + 1)$	Velocidade futura da i -ésima partícula referente a j -ésima variável de projeto (PSO)
y_i	Posição do i -ésimo atuador (espaço dos atuadores), [m]
\dot{y}_i	Velocidade do i -ésimo atuador (espaço dos atuadores), [m/s]
\dot{y}_{exp_i}	Velocidade experimental do i -ésimo atuador, [m/s]
\ddot{y}_i	Aceleração do i -ésimo atuador (espaço dos atuadores), [m/s ²]
\ddot{y}_{exp_i}	Aceleração experimental do i -ésimo atuador, [m/s ²]
\dot{y}_{s_i}	Velocidade de Stribeck do atuador i , [m/s ²]
\mathbf{x}	Vetor das variáveis de projeto do problema de otimização
$xgbest_{i,j}(t)$	Melhor posição do enxame para a j -ésima variável de projeto
$x_{caminho}$	Vetor das variáveis de projeto de otimização (caminho)
$x_{i,j}(t)$	Posição atual da i -ésima partícula referente a j -ésima variável de projeto
$x_{i,j}(t + 1)$	Posição futura da i -ésima partícula referente a j -ésima variável de projeto
$xlbest_{i,j}(t)$	Melhor posição da i -ésima partícula referente a j -ésima variável de projeto
$x_{trajetória}$	Vetor das variáveis de projeto de otimização (trajetória)
ζ	Médias das microdeformações dos elementos elásticos do modelo de atrito, [m]
α	Ângulo de torção do elo, [rad]

α_s	Ângulo entre o eixo de deslocamento e uma linha vertical, [rad]
β	Atratividade de um vagalume no FMA
Γ	Distância característica dos vagalumes no FMA
γ	Coefficiente de absorção de luz do FMA
ω	Peso de inércia no PSO
\emptyset	Restrições de igualdade do problema de otimização
σ_0	Coefficiente de rigidez elástica do modelo de atrito, [N/m ²]
σ_1	Coefficiente de amortecimento do modelo de atrito, [Ns/m]
σ_2	Coefficiente de amortecimento viscoso do modelo de atrito, [Ns/m]
θ	Variável da junta rotacional, rad
τ	Vetor de forças e torques, [N ou N.m]
χ	Fator de constrição no PSO

Símbolos

Δ	Variação
(\cdot)	Derivada primeira
$(\ddot{\cdot})$	Derivada segunda
$(\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot})$	Derivada terceira

1 INTRODUÇÃO

Considerando uma aplicação em um manipulador composto por 5 graus de liberdade (GDL) com acionamento pneumático, este trabalho propõe o desenvolvimento de um algoritmo de planejamento de trajetória livre de colisão através da aplicação de três algoritmos metaheurísticos: Algoritmo por Enxame de Partículas (PSO), Algoritmos Genéticos (AG) e o Algoritmo de Otimização por Colônia de Vagalumes (FMA). Levando em conta trajetórias otimizadas e variáveis físicas associadas ao movimento do robô, como velocidade, aceleração, *jerk* (restrições cinemáticas) e torque (restrição dinâmica), busca-se fazer com que esse robô pneumático, ao longo de trajetórias planejadas, evite obstáculos localizados em seu volume de trabalho. Este robô, o qual foi desenvolvido no LAMECC (Laboratório de Mecatrônica e Controle da UFRGS), será doravante denominado RPC (Robô Cilíndrico Pneumático).

O estudo relacionado ao planejamento de trajetórias utilizando algoritmos estocásticos de otimização com desvios de obstáculos para manipuladores tem sido abordado em diferentes trabalhos, tais como: Baba e Kubota, 1994; Yano e Tooda, 1999; Tian e Collins, 2004; Çakir et al., 2006; Chong et al., 2009; Abu-Dakka, 2011; Chyan e Ponnambalam, 2012; e Severin e Rossmann, 2012, entre outros. Independentemente da especificidade de cada um desses estudos, ou seja, do fato de terem sido desenvolvidos para diferentes tipos de robôs, todos esses trabalhos buscam planejar as trajetórias de forma a assegurar que os movimentos ocorram livres de colisão. No entanto, essas pesquisas, apesar de terem contribuições relevantes para o planejamento de trajetória livre de colisão, em sua maioria, não abordam as características relacionadas à continuidade e à suavidade das derivadas da função que interpola os pontos da trajetória no espaço de juntas do robô, e também não abordam como essa função pode ser obtida por meio de otimização, isto é, como se otimiza importantes fatores relacionados ao planejamento de trajetórias de robôs, tais como: o torque, o tempo e os efeitos de *jerk* da trajetória.

No estudo do planejamento de trajetórias livres de colisão de um robô industrial, Severin e Rossmann, 2012, compararam o desempenho de três algoritmos estocásticos: PSO, FMA e Busca Harmônica (HS). Os autores propuseram trajetórias descritas através de uma série de pontos obtidos por meio desses algoritmos. Para gerar esses pontos, utilizaram uma função objetivo que otimiza o movimento global das juntas do robô. A pesquisa dos autores mostra que é possível gerar pontos para desvios de obstáculos em uma determinada trajetória, mas eles não apresentam estratégias para garantir a continuidade e a suavidade das derivadas da função

que interpola os pontos da trajetória no espaço de juntas, pois os pontos gerados pelos algoritmos foram interpolados por funções predefinidas pelo manipulador simulado em ambiente virtual.

Quanto ao planejamento de trajetórias no espaço de juntas, Lin et al., 1983; Piazzzi e Visioli, 2000; Tangpattanakul e Artrit, 2009; Lin e Liu, 2011; Abu-Dakka et al., 2012; Yang et al., 2013; entre outros, propõem interpolar trajetórias com o intuito de otimizar o tempo e/ou *jerk* nas juntas do robô. Esses estudos apresentam diferentes abordagens para o planejamento de trajetórias no espaço de juntas. Entre essas diferenças, podem-se destacar a maneira como o problema é formulado matematicamente em cada um dos trabalhos, as restrições que são impostas ao problema de otimização e o método de otimização empregado.

No estudo de Gasparetto e Zanotto, 2008, no qual se propõe um método para o planejamento de trajetória suave de robôs manipuladores, utiliza-se, para buscar a otimização, o algoritmo Programação Quadrática Sequencial (SQP), aplicado a um robô com 6 GDL. A formulação do problema é apresentada com *splines* cúbicas, e a função objetivo é composta por dois termos: um, proporcional ao tempo total de execução, e outro, proporcional à integral do quadrado do *jerk* ao longo da trajetória. Restrições cinemáticas foram consideradas (velocidade, aceleração e *jerk*).

Ainda, existem trabalhos que, além de tratar do planejamento de trajetória na presença de obstáculos, também analisam questões associadas à trajetória otimizada no espaço de juntas, como, por exemplo, a minimização do torque [Saramago e Steffen Jr., 2000], entre outras. Essas pesquisas, embora forneçam contribuições muito significativas nesta área, não tratam especificamente de um manipulador cilíndrico pneumático, considerando questões relacionadas às características funcionais dos atuadores pneumáticos no planejamento de trajetórias ótimas.

Com base nas informações apresentadas, no presente trabalho propõe-se uma nova metodologia para planejamento de trajetória para um manipulador cilíndrico pneumático com 5 GDL considerando pontos gerados por meio dos algoritmos PSO, FMA e AG. Os pontos gerados por esses algoritmos devem garantir que o caminho gerado seja livre de colisão. Definidos os pontos intermediários (planejamento do caminho) para o robô em estudo, pretende-se aplicar a cinemática inversa para interpolar esses pontos no espaço de juntas do robô, visando a obter uma trajetória otimizada que atenda as restrições cinemáticas e dinâmicas

associadas ao robô, otimizando a força associada à dinâmica do RPC¹ nos atuadores e garantindo a continuidade e a suavidade da trajetória na movimentação do manipulador pneumático.

Para aplicação da metodologia proposta, mapeia-se inicialmente o volume de trabalho do robô através de formulações matemáticas relacionadas à geometria do objeto e à configuração cinemática do manipulador, estabelecendo uma região restrita dentro do volume de trabalho. Tendo identificado o obstáculo no volume de trabalho do robô, o algoritmo proposto deve gerar um conjunto de pontos a serem otimizados de acordo com a menor distância entre o ponto inicial e o ponto final. Assim, pressupõe-se que a melhor solução relacionada ao caminho corresponde ao conjunto de pontos externos à região restrita (região de colisão) com a menor distância entre o ponto inicial e o final. Conhecidos os pontos selecionados, esses são transformados em coordenadas de juntas através da cinemática inversa e interpolados por meio da aplicação dos algoritmos PSO, FMA e AG, com o intuito de que a função gerada no processo de otimização atenda requisitos, como, por exemplo, o de que a força associada à dinâmica do RPC sejam as menores possíveis. É importante destacar que neste estudo serão consideradas restrições cinemáticas e dinâmicas específicas do robô em estudo. A Figura 1.1, adaptada de Sarmanho, 2014, ilustra o RPC e os conceitos associados à metodologia proposta para o planejamento de trajetória livre de colisão.

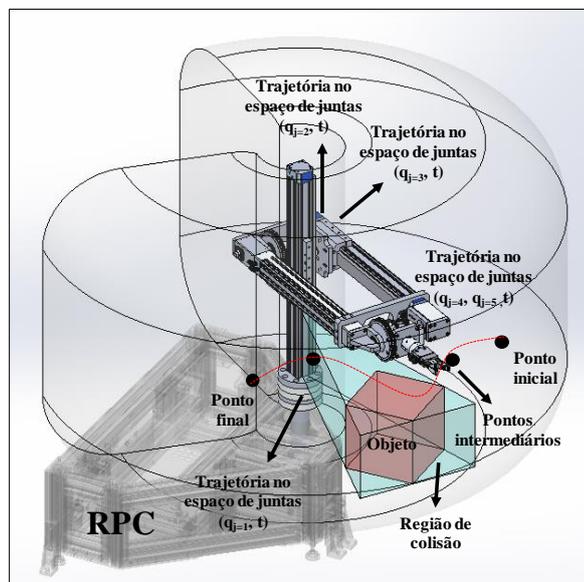


Figura 1.1 – RPC e os aspectos considerados no planejamento de trajetória livre de colisão.

¹ Entende-se por ‘força associada à dinâmica do RPC’ a força necessária a cada atuador para movimentar o robô. Tal força, correspondente ao torque no espaço de juntas, considera os efeitos associados ao equacionamento da dinâmica aplicados ao robô em estudo.

1.1. Objetivo Geral

Propor uma metodologia que garanta uma trajetória ótima (minimizando a força associada à dinâmica do RPC), por meio de um planejamento de trajetória livre de colisão, assegurando a continuidade e a suavidade da trajetória até a sua terceira derivada (*jerk*) através de pontos específicos gerados por um algoritmo de otimização que considera a presença de obstáculos no volume de trabalho do robô.

1.2. Objetivos específicos

- Propor um método de otimização para obtenção de pontos intermediários na presença de obstáculos, estabelecendo regiões de colisão por meio do mapeamento da geometria dos obstáculos (cilindros, esferas e cubos) e da delimitação do volume de trabalho do RPC;
- Obter o equacionamento das *b*-splines de 5° e 7° grau utilizadas na interpolação dos pontos intermediários no espaço de juntas, levando em conta as pesquisas de Gasparetto e Zanotto, 2007, e Liu et al., 2013;
- Propor, considerando as restrições cinemáticas e dinâmicas do RPC, um método de otimização para obtenção de trajetória com o intuito de minimizar as forças dos atuadores associadas à dinâmica do RPC;
- Determinar as restrições cinemáticas e dinâmicas do RPC por meio de procedimentos experimentais;
- Viabilizar que no espaço de juntas o RPC não execute movimentos impedidos por obstáculos (restrições de colisão);
- Aplicar os algoritmos metaheurísticos FMA, PSO e AG aos estudos do planejamento de caminho e trajetória e verificar, comparativamente, a eficiência de cada um deles; e
- Realizar, com base nos resultados obtidos nos itens anteriores, simulações e experimentos para analisar, respectivamente, os estudos do planejamento do caminho e da trajetória.

1.3. Motivações do Trabalho

A realização deste trabalho é motivada pelo fato de que, apesar das contribuições científicas já mencionadas, o problema a ser tratado ainda apresenta aspectos que podem ser explorados para incrementar o conhecimento sobre o planejamento de trajetória livre de colisão, particularmente no que diz respeito às especificidades de um manipulador cilíndrico pneumático. Assim, os resultados obtidos no presente trabalho poderão contribuir com as pesquisas já desenvolvidas sobre planejamento otimizado de trajetórias livres de colisão e com os estudos que envolvem o projeto de manipuladores pneumáticos, como, por exemplo, os estudos de Sarmanho, 2014, e as pesquisas de Abou-Fayssal, 1997.

Além disso, considerando que, em geral, a trajetória nos estudos de controle são geradas de forma específica para cada atuador, não relacionando a posição do efetuador de forma explícita, e que, na maioria das vezes, os robôs industriais são programados com base nas informações dos pontos no espaço de trabalho ou no tipo de movimento que deve executar, torna-se necessário aplicar algoritmos para a geração de trajetória que levem em conta restrições impostas pelo programador ou usuário. Nesse sentido, ao aplicar algoritmos na geração de trajetórias, o presente trabalho objetiva proporcionar trajetórias otimizadas no espaço de juntas do RPC. As restrições impostas às trajetórias referem-se à geração de pontos que assegurem o movimento livre de colisão, minimizando a distância entre cada ponto intermediário e o ponto final, e à otimização da força associada à dinâmica do manipulador, levando em conta suas restrições cinemáticas e dinâmicas. Assim, ao fornecer uma trajetória que possa ser implementada no algoritmo de controle do RPC, o trabalho contribuirá também com o desenvolvimento de pesquisas que estão sendo realizadas para a melhoria do funcionamento desse manipulador, como os estudos que definiram a geometria [Allgayer, 2011; Rijo, 2013; Sarmanho, 2014], que viabilizaram a construção do robô [Rijo, 2013; Sarmanho, 2014] e que desenvolveram a arquitetura do hardware de controle [Sarmanho, 2014].

1.4. Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica sobre os temas abordados no presente trabalho e sobre os pontos teóricos necessários a sua devida compreensão. Desta forma, são tratados temas como: modelagem matemática de robôs manipuladores, análise

cinemática de manipuladores, planejamento de trajetória de robôs manipuladores, conceitos de otimização e características dos métodos estocásticos, entre outros.

No Capítulo 3, que procura sistematizar o estado da arte das áreas abordadas no presente trabalho, são discutidas as principais contribuições das pesquisas já realizadas na área de planejamento de trajetória livre de colisão que aplicam algoritmos metaheurísticos. Também são apresentados os critérios utilizados na definição do tema da presente tese. Além disso, são definidas as etapas desenvolvidas nesta pesquisa.

O Capítulo 4 apresenta as características operacionais e funcionais do RPC necessárias ao planejamento do caminho e da trajetória. Os temas abordados neste capítulo são: os equacionamentos cinemáticos e dinâmicos do referido manipulador, os equacionamentos do subsistema mecânico dos atuadores pneumáticos, a modelagem do atrito (LuGre) aplicada aos atuadores do RPC e a maneira como os obstáculos são mapeados no seu volume de trabalho.

No Capítulo 5, que se refere à metodologia adotada no presente trabalho, são apresentados os procedimentos e os equacionamentos utilizados para obtenção dos pontos intermediários na presença de obstáculos (planejamento do caminho) e para a obtenção da trajetória ótima no espaço de juntas (planejamento de trajetória) através de funções *b*-splines de 5º e 7º grau. Os aspectos discutidos neste capítulo referem-se à formulação do problema de otimização (variáveis de projeto, função objetivo e restrições) para ambos os métodos.

O Capítulo 6 apresenta os resultados obtidos na aplicação do método de planejamento do caminho e da trajetória. No que diz respeito ao planejamento do caminho, são analisados os resultados por meio de simulações em três casos (hipóteses de movimentos) que levam em conta o posicionamento do obstáculo e os pontos iniciais e finais da trajetória. Em relação ao planejamento de trajetória, os resultados são analisados através de procedimentos experimentais, comparando-se a trajetória obtida com o método proposto por Missiaggia, 2014.

No Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e as sugestões de trabalhos futuros, os quais podem complementar a pesquisa aqui desenvolvida.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Spong et al., 2004 e Niku, 2013, entre outros, ao apresentarem o histórico da robótica, relatam que o termo ‘robô’ foi criado por Karel Capek em 1920 e desde então passou a fazer parte do vocabulário. Capek escreveu uma história chamada *Rossum’s Universal Robots*, na qual introduziu a palavra *robota*, que, no idioma tcheco, significa ‘trabalho forçado’.

Conforme a *Robotics Industries Association* (RIA), um robô consiste em um manipulador multifuncional reprogramável projetado para mover materiais, peças, ferramentas ou dispositivos especializados através de movimentos variáveis programados para o desempenho de uma variedade de tarefas. A Norma ISO 8373 complementa que o manipulador pode ser programado com três ou mais eixos, com base fixa ou móvel, e que pode ser utilizado em aplicações de automação industrial.

Segundo Spong et al., 2004, qualquer dispositivo que funcione com um certo grau de autonomia e que seja controlado por um computador pode ser chamado de ‘robô’. Nesta perspectiva, a robótica consiste em um campo da tecnologia moderna que ultrapassa as fronteiras tradicionais de engenharia, pois, para entender a complexidade do funcionamento dos robôs e suas aplicações, necessita-se do conhecimento que envolve diversas áreas, tais como: engenharia elétrica, engenharia mecânica, sistemas e engenharia industrial, ciências da computação e matemática.

Para Ceccarelli, 2004, a arquitetura de um robô manipulador deve ser composta por um braço para movimentos de translação, por um pulso para movimentos de orientação e por um efetuador para interação com o meio ambiente. Cupido et al., 1996, descrevem que um robô industrial, quanto à sua estrutura mecânica, é constituído de corpos rígidos, chamados de ‘elos’, os quais são conectados por juntas que conferem movimento relativo entre os elos adjacentes.

A cinemática de robôs determina a configuração e o movimento dos manipuladores, analisando a geometria e posições para execução do movimento, sem considerar as ações que geram ou limitam o movimento. Portanto, segundo Ceccarelli, 2004, os estudos cinemáticos possibilitam determinar e conceber as características de movimento de um manipulador, mas não tratam do projeto mecânico e da capacidade dos atuadores.

Neste sentido, Spong et al., 2004, definem que, para cada junta do robô, haverá uma variável de posição independente associada, sendo necessário o conhecimento de todas as variáveis das juntas para se obter a localização completa dos elos do robô e, conseqüentemente,

a posição do seu efetuador (garra ou ferramenta), ou seja, o número de juntas que o robô possui é o que determina seu número de GDL.

Para o presente estudo, também é importante abordar o estudo referente ao planejamento de trajetórias de um robô. Segundo Biagiotti e Melchiorri, 2008, o problema de planejamento de trajetória consiste em encontrar uma relação entre dois elementos que pertencem a domínios diferentes, no caso, o tempo e o espaço, considerando ainda que uma trajetória é geralmente expressa como uma equação parametrizada em função do tempo, o qual fornece em cada instante a respectiva posição desejada. No entanto, após definida esta equação, existem outros aspectos relacionados com a sua aplicação que também devem ser considerados, tais como: a discretização do tempo, a saturação do sistema de acionamento, as vibrações induzidas sobre a carga, entre outros.

Para caracterizar o robô em estudo no contexto deste trabalho, independentemente de sua aplicação específica, é necessário abordar aspectos como: **(i)** componentes de robôs manipuladores, **(ii)** modelagem matemática de robôs manipuladores; **(iii)** tipos de cinemática de manipuladores, especialmente dos manipuladores cilíndricos; **(iv)** análise cinemática de manipuladores; **(v)** planejamento de trajetória de robôs manipuladores, **(vi)** definição do problema de otimização, particularmente os métodos estocásticos; e, **(vii)** técnicas de otimização utilizadas no planejamento de trajetórias de robôs manipuladores.

Conceitos importantes para o embasamento teórico desta pesquisa, de acordo com os itens mencionados acima, são apresentados a seguir.

2.1. Componentes de um Manipulador Industrial

Há na literatura diversas abordagens que tratam de aspectos relacionados a sistemas robóticos e aos elementos que definem um robô, por exemplo, Romano, 2002, Spong et al., 2004, Jazar, 2007 e Niku, 2013. Essas abordagens, de maneira geral, mencionam que um robô consiste em corpo principal que é composto por elos, juntas, sistemas de transmissão (componentes mecânicos que transmitem potência mecânica dos atuadores para os elos) e por outros elementos estruturais, tais como: efetuador, atuadores, sensores e controlador. Com o objetivo de sintetizar cada um destes elementos apresenta-se, a seguir, a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Características de um Robô Industrial.

ELEMENTOS	O QUE É? e PARA QUE SERVE ?
Efetuator	Sua função é manipular objetos ou conduzir ferramentas, estabelecer conexões com outras máquinas e executar as tarefas necessárias. Estruturalmente, está ligado à última articulação de um manipulador.
Sensores	Sua função é fornecer informações sobre o comportamento do manipulador através de medições realizadas sobre cada elo e junta e do modo de interação entre o manipulador e o ambiente operacional (sistema de visão, sensores táteis, entre outros).
Atuadores	Sua função é transformar energia elétrica, hidráulica ou pneumática, em potência mecânica, a qual é enviada para os elos através dos sistemas de transmissão.
Controlador	Sua função é gerenciar e monitorar os parâmetros operacionais necessários à execução de uma determinada tarefa, isto é, o controlador caracteriza-se por coletar e processar as informações obtidas dos sensores do robô; tomar decisões em relação ao planejamento do movimento geométrico da estrutura do robô; e organizar as informações entre o robô e seu ambiente, fornecendo os sinais para os atuadores executarem os movimentos planejados.

Genericamente, pode-se considerar que esses elementos fazem parte obrigatória da constituição de um robô, mesmo que outros possam ser acrescentados.

2.2. Modelagem Matemática de Manipuladores

Spong et al., 2004, apresenta métodos para representar os aspectos geométricos básicos de manipulação robótica e os aspectos dinâmicos da manipulação, visando a desenvolver métodos de planejamento e controle de movimentos de robôs. Estes métodos contemplam conceitos básicos que são comuns no desenvolvimento de modelos matemáticos para robôs manipuladores. Estes conceitos referem-se aos tipos de articulações, ao espaço de configuração, aos GDL e ao volume de trabalho de robôs manipuladores, os quais serão descritos a seguir.

2.2.1. Articulações de um Manipulador

Os robôs manipuladores são compostos por elos (*links*) conectados através de juntas ou articulações para formar uma cadeia cinemática. Essas juntas são definidas como rotacionais (revolução) ou prismáticas (lineares).

As juntas rotativas funcionam de forma similar a uma dobradiça, ou seja, este tipo de junta possibilita uma rotação relativa entre dois elos [Spong et al., 2004]. Embora as juntas rotativas com acionamento hidráulico e pneumático sejam comuns, a maioria das juntas

rotativas são acionadas eletricamente, seja por motores de passo ou servomotores, que são os mais utilizados [Niku, 2013].

As juntas prismáticas permitem o movimento linear entre dois elos de um robô. Nestes tipos de juntas não há rotação envolvida. Os atuadores utilizados nestas juntas são os cilindros hidráulicos ou pneumáticos e os atuadores elétricos lineares. Estes tipos de juntas são aplicadas em variações de estruturas de manipuladores do tipo cilíndrico ou esférico, entre outros.

Uma das formas de identificação dos manipuladores é associada à denominação para a sequência de tipos comuns de cadeia de manipuladores. Desta forma, por exemplo, as juntas rotativas são indicadas como R e as juntas prismáticas são indicadas como P. Assim, um conjunto de elos conectados a três juntas rotativas é definido como um robô antropomórfico, que pode ser identificado como um manipulador do tipo RRR. A Figura 2.1, ilustra os tipos convencionais de juntas de robôs manipuladores, adaptada de [Spong et al., 2004].

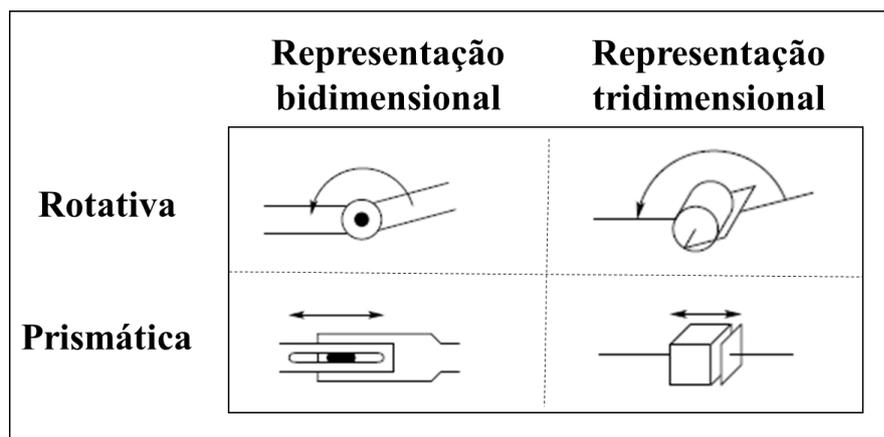


Figura 2.1 - Representação dos tipos convencionais de juntas de robôs.

2.2.2. Graus de Liberdade de um Manipulador

Um objeto com n GDL, pode ter sua configuração especificada por, no mínimo, n parâmetros [Spong et al., 2004]. Isto implica que, para um robô manipulador, o número de juntas existentes determina o número de GDL do mesmo.

Craig, 2005, define o número de GDL de um robô como o número de variáveis de posição independentes que necessitam ser especificadas para determinar a posição de todos os elos.

Para localizar um corpo rígido no espaço, necessita-se definir a localização de um ponto selecionado sobre o mesmo, precisando-se de três elementos de informação para localizá-lo.

No entanto, como existem infinitas formas possíveis para orientar um determinado objeto no espaço, para especificar completamente a localização e orientação de um objeto, é necessário dispor-se de 6 GDL. Por este motivo, os robôs precisam ter 6 GDL para posicionar e orientar livremente qualquer objeto no seu volume de trabalho [Niku, 2013]. Isto significa que um robô com 6 GDL pode manipular objetos em qualquer posição e orientação desejadas dentro do seu espaço de trabalho. Se um determinado manipulador tem um número menor de GDL, não é possível especificar qualquer posição e orientação; isto é, o manipulador só pode atingir posições e seguir orientações que suas articulações permitirem. Segundo Spong et al., 2004, determinadas tarefas podem exigir que o robô necessite de mais de 6 GDL, como, por exemplo, o desvio de obstáculos. Este tipo de característica dos robôs manipuladores faz com que existam infinitas soluções de posicionamento e orientação de peças, tornando necessária uma rotina adicional de decisão que permita escolher uma entre as infinitas soluções [Niku, 2013].

De acordo com Spong e Vidyasagar, 1989, a classificação cinemática dos manipuladores ocorre normalmente com base no braço, que é composto pelas três primeiras juntas, e o punho, que é analisado separadamente. O punho é conectado na extremidade do manipulador, fazendo a união entre o braço ao efetuador.

O número de GDL de um robô está relacionado com o número de GDL de seu punho. Os punhos podem apresentar um, dois ou três GDL. A escolha dos GDL do punho depende da aplicação desejada. A Figura 2.2 representa um punho esférico, que é composto por três juntas rotacionais, adaptada de [Spong et al., 2004].

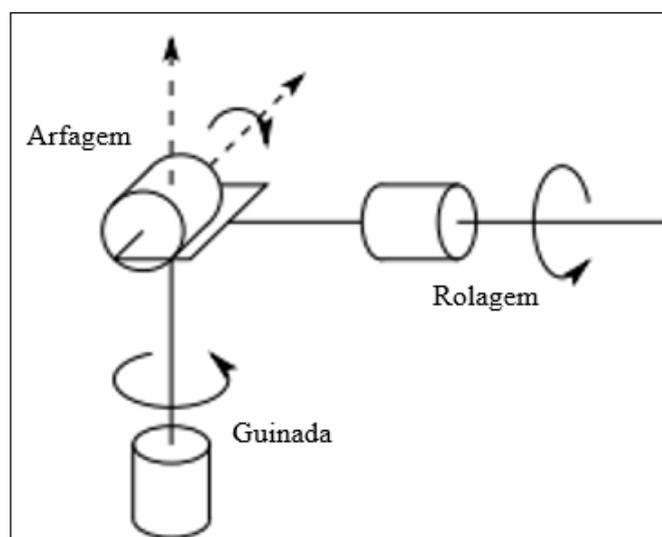


Figura 2.2 - Representação de um punho esférico com seus respectivos movimentos.

A maioria das aplicações industriais utilizam robôs com 6 GDL, mas não são todas as tarefas que exigem a utilização dos 6 graus; o caso mais comum ocorre quando o efetuador possui um eixo de simetria.

Craig, 2005, ilustra um exemplo do posicionamento de um manipulador com uma ferramenta de polimento em duas configurações diferentes. Nesse exemplo, a ferramenta de polimento (efetuador) gira em torno do seu próprio eixo, de maneira que, para executar esta tarefa, a orientação dos demais eixos da ferramenta não é relevante. Desta forma, como um robô de 6 GDL pode ser posicionado em várias configurações para executar a tarefa, considera-se que este tipo de robô é redundante nesta aplicação. A Figura 2.3 ilustra essa característica de redundância de um manipulador com 6 GDL, adaptada de [Craig, 2005].

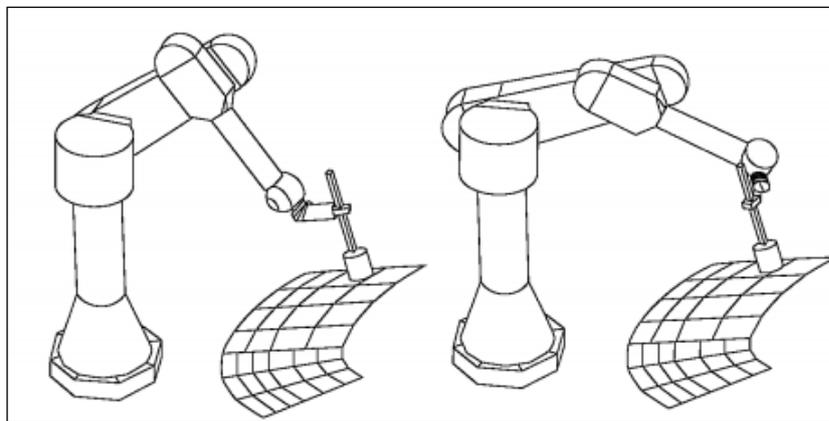


Figura 2.3 - Robô de 6 GDL com efetuador apresentando um eixo de simetria.

2.2.3. Volume de Trabalho de Manipuladores

O volume de trabalho de um manipulador consiste no volume espacial varrido pelo efetuador, onde o mesmo executa todos os movimentos possíveis em um domínio limitado pela geometria dos elos, bem como pelas restrições físicas das juntas (limites mecânicos). Segundo Niku, 2013, o volume de trabalho pode ser determinado de duas maneiras: a primeira consiste em uma solução matemática, definindo as equações que representam as ligações e articulações do manipulador, incluindo as suas limitações, bem como os alcances dos movimentos de cada articulação; a segunda maneira consiste em encontrar o volume de trabalho de maneira empírica, isto é, movendo virtualmente cada articulação por meio da sua gama de movimentos possíveis, combinando todo o espaço que pode ser alcançado pelo manipulador subtraído do espaço que o robô não pode alcançar.

2.3. Tipos de Estruturas de Manipuladores Industriais

Embora existam muitas formas de aplicar juntas prismáticas (P) e de revolução (R) para a construção de cadeias cinemáticas, apenas algumas configurações são frequentemente utilizadas na prática. A norma ISO 8373 classifica as estruturas cinemáticas em cinco categorias básicas: articulado (RRR), esférico (RRP), SCARA (RRP), cilíndrico (RPP) ou cartesiano (PPP). Autores como Romano, 2002, Ceccarelli, 2004, Spong et al., 2004, Siciliano et al., 2008 e Niku, 2013, descrevem as características destes tipos de estrutura. A seguir, são apresentadas as particularidades dos manipuladores pneumáticos que dizem respeito ao robô em estudo.

2.3.1. Manipulador Cilíndrico

Os manipuladores cilíndricos são constituídos por uma junta de revolução e por duas juntas prismáticas (RPP). Nesta configuração, a primeira junta é rotacional, produzindo um movimento de rotação em torno da base, enquanto a segunda e a terceira juntas são prismáticas. Estes manipuladores são utilizados principalmente para o transporte de objetos. Informações sobre este tipo de manipulador são fundamentais para este trabalho, pois, como ilustrado na Introdução, Figura 1.1, o RPC é um manipulador pneumático cilíndrico. Esse manipulador será apresentado mais detalhadamente no Capítulo 4.

O volume de trabalho deste manipulador é definido pelo volume de um cilindro vazado, ou seja, as variáveis comuns são as coordenadas cilíndricas da extremidade do efetuador com relação à base. Esta estrutura apresenta boa rigidez mecânica, mas a precisão de posicionamento do efetuador pode ser influenciada de acordo com a posição de sua junta horizontal. A Figura 2.4, adaptada da Norma ISO 8373, apresenta as características dos manipuladores cilíndricos.

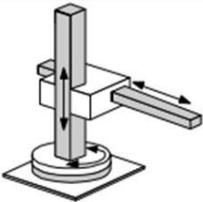
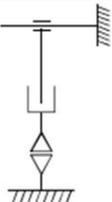
Robô	Eixos		Exemplos
Princípio	Estrutura Cinemática	Volume de Trabalho	Imagem
 Robô Cilíndrico			

Figura 2.4 - Representação de um manipulador Cilíndrico.

2.4. Análise Cinemática dos Manipuladores

A cinemática de robôs lida com a determinação da configuração e com o movimento de manipuladores, analisando a geometria durante o movimento sem considerar as ações que geram ou limitam seu movimento, como detalhes de projeto mecânico e capacidade dos atuadores [Ceccarelli, 2004].

Segundo Barrientos et al., 1997, a cinemática descreve analiticamente o movimento espacial do robô como uma função do tempo, e em particular nas relações entre a posição e a orientação da posição do efetuador do robô com os valores de suas coordenadas articulares.

As estruturas cinemáticas podem ser classificadas como de cadeia aberta ou fechada [Siciliano et al., 2008]. De um ponto de vista topológico, a cadeia cinemática é dita aberta quando existe apenas uma sequência de elos para ligar as duas extremidades da cadeia, enquanto uma cadeia cinemática fechada contém uma sequência de elos que sugerem a formação de um anel.

A Figura 2.5 ilustra manipuladores com as configurações de cadeia cinemática aberta e fechada.

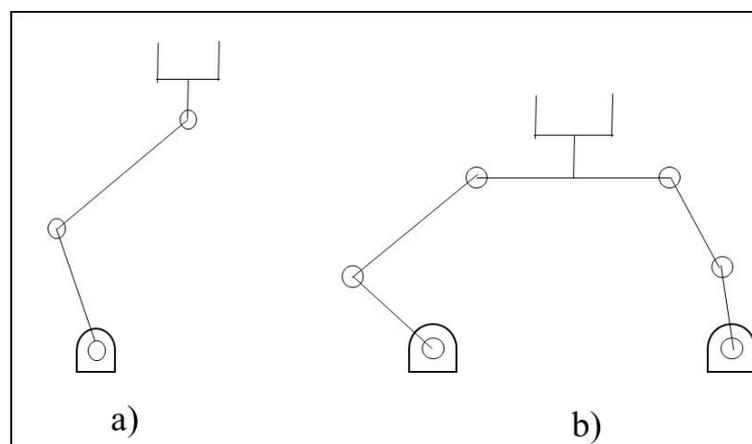


Figura 2.5 - Representação de uma cadeia cinemática aberta (a) e fechada (b).

De acordo com Barrientos et al., 1997, existem dois problemas fundamentais relativos às cinemáticas dos robôs, conhecidos como problemas de cinemática direta e de cinemática inversa.

O estudo da cinemática direta se ocupa da relação que se estabelece entre as juntas do robô, analisadas individualmente, e a posição e orientação da ferramenta ou efetuador [Spong

et al., 2004]. Niku, 2013, complementa que, se todas as variáveis articulares do robô são conhecidas, pode-se calcular a posição e orientação do efetuador em qualquer instante, utilizando as equações de cinemática direta.

A análise da cinemática inversa parte do pressuposto que, para posicionar a extremidade do robô em um local e orientação desejados, deve-se estabelecer quais devem ser os deslocamentos das juntas lineares ou ângulos das articulações do robô de maneira que, nesses valores, a extremidade alcance a posição e orientação desejadas. Isto significa que, em vez de substituir as variáveis conhecidas do manipulador nas equações de cinemática direta, deve-se encontrar as relações inversas destas equações [Niku, 2013].

A Figura 2.6 apresenta as relações entre a cinemática direta e inversa, adaptada de [Barrientos et al., 1997].

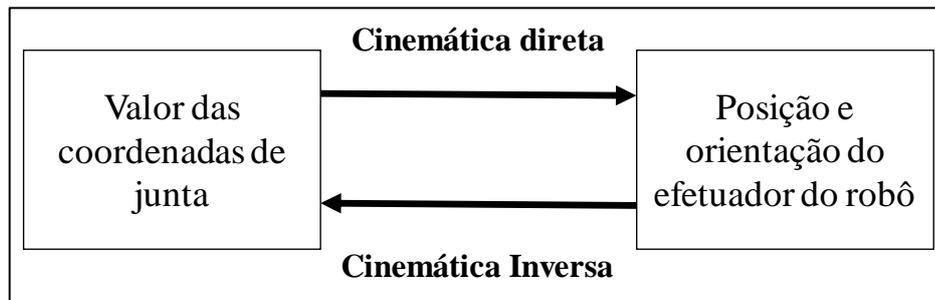


Figura 2.6. Relação entre cinemática e direta e inversa.

As restrições geradas pela cadeia cinemática do robô são solucionadas através da descrição matemática das transformações espaciais relacionadas com cada junta. Desta forma, diversas notações são propostas na literatura, tais como: a notação clássica de Denavit – Hartenberg (D-H), a versão de Richard Paul, e o método de Sheth-Uicker [Shirmer, 2005].

2.4.1. Abordagem da Cinemática Direta em Manipuladores

No presente trabalho, para analisar a cinemática direta, adota-se a notação de D-H, que consiste em uma notação matricial que permite estabelecer de maneira sistemática um sistema de coordenadas associado a cada junta de uma cadeia articulada, podendo determinar a equação cinemática de uma cadeia completa através das relações entre todos sistemas de coordenadas associados aos respectivos elos da cadeia [Paul, 1981].

De acordo com Ceccarelli, 2004, a metodologia de D-H proporciona o número mínimo de parâmetros necessários para descrever a geometria de uma ligação entre duas articulações, indicando as variáveis das juntas. Para, Niku, 2013, este método consiste em uma forma muito simples de modelagem de elos e articulações robóticas, e pode ser aplicado para qualquer configuração de robô, independentemente de sua sequência ou complexidade.

Na aplicação do método de D-H, a cada elo se associa um sistema de coordenadas, desde a base inercial até o efetuador, de acordo com o número de GDL do robô. Os conceitos básicos de D-H e o algoritmo de implementação, que é composto por uma sequência de passos, não são apresentados neste trabalho, uma vez que se tratam de conceitos amplamente discutidos na literatura².

2.4.2. Abordagem da Cinemática Inversa de Manipuladores

Segundo Ceccarelli, 2004, a cinemática inversa consiste em um problema no qual a posição e a orientação do efetuador de um determinado manipulador são conhecidas, e a configuração da cadeia do manipulador é determinada pelo cálculo dos valores dos parâmetros de juntas. Craig, 2005, mostra que, a partir da posição e orientação da extremidade do efetuador, torna-se possível, através da solução do problema da cinemática inversa, obter todos os conjuntos possíveis de ângulos de junta que podem ser utilizados para se atingir a posição e a orientação dadas.

De acordo com Barrientos et al., 1997, diferentemente do que ocorre com a abordagem dos problemas de cinemática direta (os quais podem ser tratados de uma maneira sistemática através da utilização de matrizes de transformação homogêneas, independentemente da configuração do robô), no caso dos problemas que envolvem cinemática inversa, o procedimento de obtenção das equações é dependente da configuração do robô.

Segundo Siciliano et al., 2008, o problema de cinemática inversa de robôs com cadeias abertas é mais complexo que o problema de cinemática direta pelas seguintes razões: 1) as soluções das equações são normalmente não-lineares, de forma que nem sempre é possível encontrar uma solução de forma fechada; 2) podem existir múltiplas soluções; 3) podem existir infinitas soluções (manipulador cinematicamente redundante); e 4) podem ocorrer soluções não admissíveis, considerando-se a estrutura cinemática do manipulador.

² Maiores informações sobre o método de D-H e o algoritmo de implementação da cinemática direta podem ser obtidas em Fu et al, 1987; Barrientos et al, 1997, entre outros.

Dois métodos são geralmente utilizados para a solução da cinemática inversa: o primeiro é baseado em uma solução numérica; e o segundo é baseado em uma interpretação analítica.

De acordo com Siciliano et al., 2008, o método numérico pode ser utilizado nos casos em que é difícil encontrar soluções de forma fechada, e consiste na aplicação de técnicas iterativas que utilizam a matriz Jacobiana do manipulador. Este método tem a vantagem de ser aplicável a qualquer estrutura cinemática, mas não permite o cálculo de todas as soluções admissíveis. Barrientos et al., 1997, comentam que o inconveniente dos métodos numéricos iterativos é que sua convergência não é sempre garantida.

Para Siciliano et al., 2008, a interpretação analítica, ou método analítico, que consiste em obter as soluções das equações existentes, propicia que as singularidades possam ser identificadas. Este método se subdivide em abordagens como: solução geométrica, solução algébrica, entre outras.

A solução geométrica permite obter os valores das primeiras variáveis de juntas, as quais definem o posicionamento do robô, de forma que é necessário conhecer a orientação de sua extremidade. Para isto, utilizam-se relações trigonométricas e geométricas dos elementos do robô. Este método é aplicado para obter matematicamente a configuração das posições dos elos associadas às respectivas articulações do manipulador. Em síntese, este método baseia-se na decomposição da geometria do manipulador em planos visando a determinar um número suficiente de relações matemáticas que relacionam as coordenadas do extremo do robô com as coordenadas das articulações e com as dimensões físicas dos elos [Barrientos et al., 1997]. Nesta abordagem, a solução algébrica consiste em obter o modelo cinemático inverso do robô a partir do conhecimento do seu modelo cinemático direto, supondo que sejam conhecidas as relações que expressam o valor da posição e orientação da extremidade do robô em função de suas coordenadas das articulações.

2.5. Análise Dinâmica dos Manipuladores

A dinâmica de manipuladores trata das relações que podem ser estabelecidas entre o torque ou forças no espaço de juntas e os movimentos realizados por cada tipo de robô. Existem diversos métodos para realizar a modelagem dinâmica de robôs manipuladores. Dentre eles, destacam-se as formulações de Newton-Euler (N-E) e de Euler-Lagrange (Lagrangeana) [Barrientos et al., 1997; Craig, 2005; Lewis et al., 2006].

A formulação de Newton-Euler, que apresenta característica recursiva, baseia-se nos princípios da segunda Lei de Newton para o movimento e permite determinar as parcelas de forças e torques por meio da cinemática (direta e inversa) do manipulador. Esse método, mesmo que eficiente no cálculo de torques, não relaciona os efeitos inerciais, de Coriolis e gravitacionais, o que prejudica a aplicação de métodos de controle baseados na dinâmica inversa, como o utilizado no RPC por Sarmanho, 2014.

Para autores como Spong et al., 2004, Craig, 2005, e Lewis et al., 2006, a formulação lagrangeana é definida em termos da energia potencial e da energia cinética do sistema mecânico. Para Fu et al., 1987, na aplicação direta da formulação lagrangeana, associada à notação de Denavit-Hartenberg, é possível obter uma descrição algorítmica conveniente e compacta das equações de movimento do manipulador, a qual facilita a análise e a implementação computacional. Porém, em função das derivações numéricas necessárias para a resolução do problema, esse método requer geralmente uma grande quantidade de operações matemáticas.

Em termos do planejamento de trajetória, algumas abordagens propõem métodos de otimização considerando como restrição os efeitos dinâmicos associados a um robô específico, como, por exemplo, a pesquisa de Saramago e Steffen Jr., 1998, propõe o planejamento de trajetória de um robô manipulador considerando a formulação lagrangeana para definir as restrições dinâmicas do problema de otimização.

2.5.1. Formulação lagrangeana para robôs com elos rígidos

Com a finalidade de formular o modelo dinâmico do RPC, assume-se que este robô é composto por 5 GDL e opera na ausência de forças externas aplicadas ao efetuador, considerando os efeitos de atrito dinâmico associados aos sistemas pneumáticos. O modelo dinâmico proposto, baseado na formulação lagrangeana, é expresso em uma forma matricial compacta, de acordo com a Equação (2.1).

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (2.1)$$

onde $q \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de coordenadas generalizadas das juntas (θ para juntas rotacionais e d para juntas prismáticas), $H(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia simétrica positiva definida, geralmente dependente da configuração do robô, $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz que representa os

efeitos centrífugos e de Coriolis, $G(q) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor que representa o momento gerado em cada eixo de junta do manipulador devido à presença da gravidade, e $\tau \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de torques ou forças de atuação nas juntas. Os equacionamentos referentes ao modelo dinâmico do RPC são apresentados na Seção 3.4.

2.6. Planejamento de Trajetórias para Manipuladores

O planejamento de trajetórias é um aspecto importante no estudo de manipuladores que geralmente busca a definição de perfis de deslocamento com continuidade e suavidade na sua execução, evitando que efeitos, como os de derivadas das acelerações (*jerk*), assumam valores infinitos ou muito grandes, induzindo vibrações no sistema mecânico.

O requisito mínimo de um manipulador é a capacidade para se deslocar de uma posição inicial para uma posição final que lhe foi atribuída. Este trajeto deve ser caracterizado por leis de movimento que requerem atuadores para exercer determinadas forças que não violem os seus limites de saturação e não excitam significativamente os modos de ressonância de uma estrutura [Siciliano et al., 2008].

Para se planejar uma trajetória, é também preciso relacionar tempo e espaço, concebendo uma equação parametrizada em função do tempo para expressar uma determinada trajetória que fornece a posição desejada em um determinado intervalo de tempo.

No planejamento de trajetórias, de maneira geral, podem-se adotar diferentes categorias de curvas, as quais podem ser diferenciadas pelo fato de serem unidimensionais ou multidimensionais. Nas trajetórias unidimensionais é definida uma posição para um sistema de um GDL. Nas trajetórias multidimensionais, considerando-se uma máquina constituída por vários motores, delimita-se as posições no seu espaço operacional através da coordenação entre os diferentes eixos de movimento [Biagiotti e Melchiorri, 2008]. Por exemplo, no caso de um robô, a trajetória multidimensional no seu espaço de trabalho é obtida através do movimento coordenado de cada junta. A Figura 2.7 ilustra as principais categorias de trajetórias, adaptada de [Biagiotti e Melchiorri, 2008].

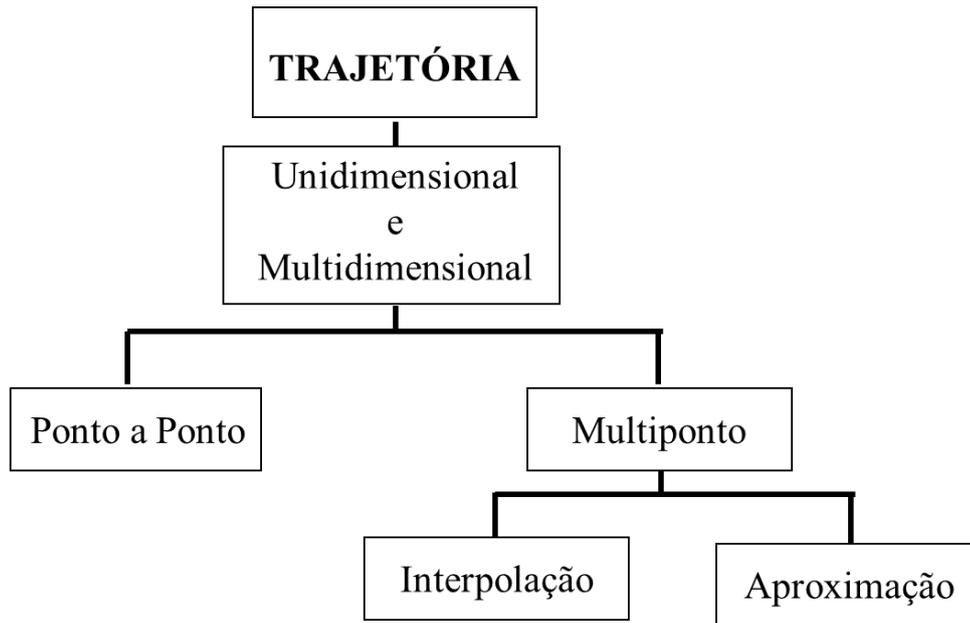


Figura 2.7 - Principais categorias de Trajetórias.

Como o objetivo desta pesquisa é planejar o caminho e a trajetória do RPC, para estabelecer a trajetória otimizada serão consideradas apenas as trajetórias multidimensionais, em função de apresentarem características associadas aos movimentos efetuados pelos robôs manipuladores.

Biagiotti e Melchiorri, 2008, propõem o pressuposto de que cada trajetória deve ser descrita de acordo com especificações particulares, sendo a primeira delas o caminho geométrico $p(u)$ a ser seguido, considerando também a orientação ao longo da curva; a segunda é a forma como esse caminho geométrico deve ser monitorado, isto é, a aplicação da lei de movimento $u(t)$, onde os termos $p(t)$ e $u(t)$ referem-se às coordenadas que representam os pontos do caminho geométrico, conforme apresentado na Figura 2.8.

Neste contexto, a curva a ser percorrida pelo efetuador (caminho geométrico) deve ser concebida em função das restrições impostas pela tarefa, como, por exemplo, a interpolação e a aproximação de um determinado conjunto de pontos, enquanto a determinação da lei de movimento é definida por outras restrições, como a imposição das condições sobre as máximas velocidades, acelerações e torques que os atuadores são capazes de fornecer. Assim, a partir da composição do caminho geométrico e da lei do movimento, conforme Biagiotti e Melchiorri, 2008, pode-se determinar a trajetória completa (\tilde{p}) através da Equação (2.2):

$$\tilde{p}(t) = p(u(t)) \quad (2.2)$$

Uma vez em que um movimento seja definido, utiliza-se os conceitos de cinemática inversa do robô para obter a trajetória correspondente no espaço de juntas, de maneira que o movimento seja gerado e controlado. A Figura 2.8, apresentada por Biagiotti e Melchiorri, 2008, exemplifica o caso de uma trajetória multidimensional para um robô industrial.

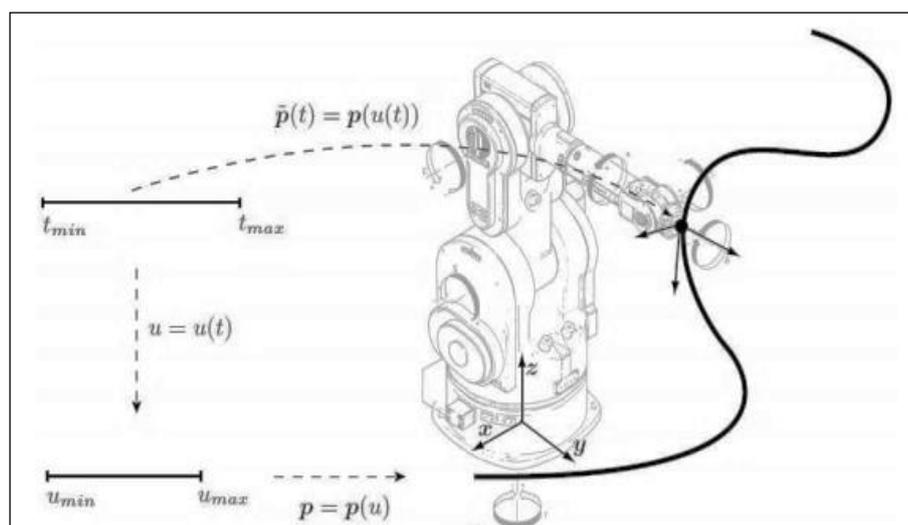


Figura 2.8 - Exemplo de uma trajetória multidimensional aplicada a um robô industrial.

Para Siciliano et al., 2008, um caminho geométrico não pode ser totalmente especificado por um usuário, pois se trata de um procedimento complexo. Assim, é necessário especificar um número mínimo de parâmetros, como os pontos extremos, os possíveis pontos intermediários e a geometria que interpola os pontos. Além disso, a lei de movimento normalmente não é especificada em cada ponto do caminho geométrico, mas deve respeitar o tempo total de trajetória, as restrições sobre as velocidades e acelerações máximas e, eventualmente, a atribuição de velocidade e aceleração em pontos de interesse particular. Com base nesta informação, o algoritmo de planejamento de trajetórias gera uma sequência temporal de variáveis que descrevem a posição e a orientação do efetuador ao longo do tempo no que diz respeito às restrições impostas (velocidade e aceleração). Uma vez que a ação de controle é realizada no espaço de juntas, um algoritmo de cinemática inversa é adequado para reconstruir a sequência de pontos no espaço operacional do robô.

De acordo com Craig, 2005, é desejável que a trajetória de um manipulador tenha movimentos suaves. Neste caso, define-se uma função suave como uma função contínua, onde sua primeira derivada também é contínua. Além disso, pode haver casos em que ter uma segunda derivada contínua é desejável de acordo com a aplicação especificada. Movimentos

bruscos e o *jerk* tendem a causar um desgaste maior dos componentes, vibrações e efeitos de ressonância no manipulador. Assim, a fim de garantir caminhos suaves, deve-se estabelecer algum tipo de restrição às características espaciais e temporais no caminho entre os pontos.

Segundo Siciliano et al., 2008, são diferentes os conceitos de caminho e trajetória. O caminho indica o lugar geométrico dos pontos no espaço de juntas, ou no espaço operacional, que o manipulador tem de seguir na execução do movimento atribuído. Já, a trajetória é o caminho que apresenta uma variável relacionada ao tempo, que é especificada em termos de velocidade ou acelerações em cada ponto.

2.6.1. Planejamento do Caminho e as Técnicas usadas para Manipuladores

Segundo Gasparetto et al., 2012, o planejamento do caminho para um sistema móvel é uma questão basicamente geométrica, pois implica na geração de um caminho geométrico sem uma lei de tempo especificada. Para planejar um caminho, deve-se buscar um movimento livre de colisão entre uma configuração inicial e final (meta).

Para Abu-Dakka, 2011, o problema básico do planejamento do caminho consiste em computar um caminho livre de colisão entre a configuração inicial e final do robô em ambientes estáticos com obstáculos. O movimento planejado deve considerar as restrições cinemáticas do robô, de maneira que as restrições da solução do caminho sejam definidas pela geometria do caminho e pela geometria do robô.

Ainda, segundo Gasparetto et al., 2012, no planejamento do caminho podem ocorrer diferentes situações, de acordo com a área de aplicação ou com a tarefa a ser realizada, como, por exemplo, para manipuladores aplicados em processos industriais, o caminho padrão é definido pela geometria da tarefa. Já, para robôs que operam em ambientes mais complexos, o caminho padrão será definido de forma a evitar obstáculos automaticamente.

Com relação às técnicas para o planejamento de caminho, existem dois tipos de abordagens: as chamadas ‘técnicas clássicas’ e as denominadas ‘técnicas probabilísticas’ [Sousa, 2017].

As técnicas clássicas são descritas por Latombe, 1991, para o qual, conceitos como espaço de configuração (*C-space*), configuração de espaço livre (*C-free*) e representação dos obstáculos no *C-space*, são definidos junto com as três técnicas clássicas de planejamento de caminho: sistema de curvas unidimensionais (*Roadmap*), campos potenciais (*potential fields*) e decomposição de células (*cell decomposition*).

a) *Roadmap*

A técnica conhecida como *roadmap* é baseada na busca da conectividade de um espaço livre para o robô em uma rede de curvas unidimensionais (*roadmap*), de maneira que, uma vez que o *roadmap* é conhecido, define-se que existe um conjunto de caminhos padronizados. Assim, o planejamento de um caminho consiste em ligar as configurações iniciais e finais com o objetivo de encontrar um caminho unidimensional entre as duas configurações [Latombe, 1991]. Ainda, para Latombe, 1991, Abu-Dakka, 2011, entre outros, um caminho resulta da concatenação de três sub-caminhos: um sub-caminho que liga a configuração inicial ao *roadmap*, um sub-caminho contido no *roadmap*, e um sub-caminho que liga o *roadmap* à configuração final (alvo), considerando-se um *roadmap* satisfatório aquele que tem a propriedade de ser livre de colisões no espaço entre duas configurações.

Existem diversos métodos que aplicam a técnica de *roadmap* produzidos com base em princípios diferentes, tais como: grafos de visibilidade, diagramas de Voronoi, silhuetas, entre outros.

Para exemplificar o método de *roadmap*, apresenta-se aqui o princípio de funcionamento dos diagramas de Voronoi. Este diagrama consiste em um método completo de mapas de rotas que busca otimizar (maximizar) a distância entre o robô e os respectivos obstáculos no mapa [Siegwart e Nourbakhsh, 2004]. Para cada ponto livre no mapa, calcula-se a distância em relação ao obstáculo mais próximo. O diagrama de Voronoi resulta dos pontos que são equidistantes a um ou mais obstáculos. A Figura 2.9, apresentada por Siegwart e Nourbakhsh, 2004, ilustra um exemplo de um diagrama de Voronoi.

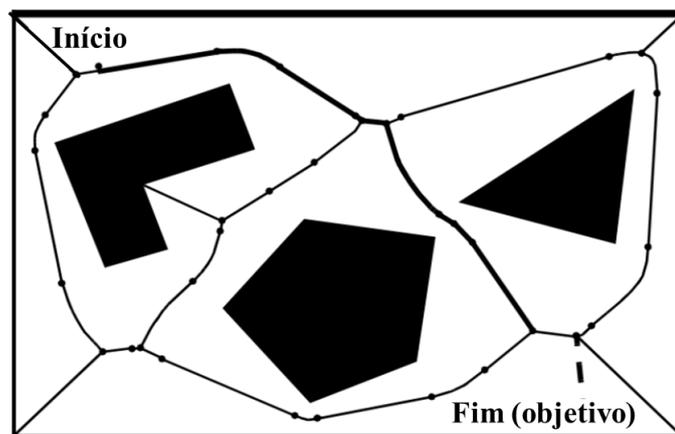


Figura 2.9 - Exemplo de um diagrama de Voronoi.

b) Campos Potenciais

De acordo com Abu-Dakka, 2011, os campos potenciais foram desenvolvidos por Khatib, 1986, como uma abordagem *online* para evitar obstáculos aplicada quando o robô não tem *a priori* um modelo do obstáculo, mas consegue detectá-lo durante a execução do movimento. Esta técnica consiste na discretização do espaço de configuração em grades densas e regulares, conhecidas como ‘*campos potenciais*’ [Gasparetto et al., 2012], salientando-se que, como a grade gerada pode apresentar uma dimensão muito grande, esta técnica requer a utilização de técnicas heurísticas para a busca do melhor caminho.

Basicamente, a técnica dos campos potenciais busca representar o robô no espaço de configuração como um ponto que se move sob a influência do potencial que é gerado pela configuração desejada (objetivo) e dos obstáculos. De forma geral, a configuração alvo gera um potencial atrativo, enquanto que os obstáculos podem ser caracterizados como um potencial repulsivo. O potencial total anti-gradiente torna-se uma “força artificial” aplicada ao robô. A direção da força artificial é a direção de movimento mais promissora em termos de caminho livre.

c) Decomposição de Células

Esta técnica de planejamento do caminho, de acordo com Latombe, 1991, consiste em dividir o espaço livre do robô em regiões (células), a fim de que seja possível gerar um caminho entre duas configurações da mesma célula. As relações entre células adjacentes são representadas através da construção de um grafo de conectividade. Neste grafo, as células extraídas a partir do espaço livre constituem nós. Assim, dois nós estão conectados por uma ligação, se, e somente se, as células correspondentes são adjacentes. Com base nessas ligações, uma sequência de células é identificada para mapear um caminho contínuo e livre entre as configurações iniciais e finais definidas.

Já, as chamadas técnicas de planejamento *probabilísticas* são usadas mais frequentemente quando os caminhos são de grande dimensão e a representação explícita do espaço de configuração é complexa [Abu-Dakka, 2011]. Assim, ainda segundo o mesmo autor, como não há uma representação explícita do *C-space*, os métodos probabilísticos envolvem um verificador de colisão binário para testar se uma configuração específica é viável. De acordo

com o autor, os três métodos mais usados atualmente são: *Randomized Path Planner* (RPP), *Probabilistic Roadmap Method* (PRM) e *Rapidly-Exploring Random Trees* (RRT). Maiores detalhes sobre esses métodos, podem ser encontrados em Abu-Dakka, 2011.

Sumariamente, pode-se afirmar que toda trajetória pressupõe um caminho definido em determinado período de tempo (em certa velocidade ou aceleração), enquanto que o conceito de caminho não está diretamente relacionado ao de trajetória, e sim do percurso estimado em um domínio geométrico no espaço de juntas ou no espaço cartesiano, sem que a variável tempo esteja a ele associada. Por esta razão, há pesquisas que tratam apenas do caminho, não considerando a variável tempo, e, conseqüentemente, velocidade ou aceleração, em suas análises. Outros trabalhos tratam apenas da trajetória, assumindo que o lugar geométrico dos pontos no espaço de juntas já está determinado. Além disso, há ainda trabalhos em que se planeja inicialmente o lugar geométrico a ser percorrido para, após, planejar a trajetória para atender a esse caminho; e, por fim, existem casos em que o caminho e a trajetória são planejados de forma simultânea (ver Saramago, 1998).

2.6.2. Funções Matemáticas aplicadas ao Planejamento de Trajetórias Robóticas

O objetivo de um planejamento de trajetória é gerar as entradas de referência para o sistema de controle de movimento, garantindo que o manipulador execute as trajetórias previstas, de acordo com os parâmetros especificados para a execução. O planejamento consiste em gerar uma sequência no tempo dos valores obtidos por uma função de interpolação (tipicamente um polinômio) da trajetória desejada [Siciliano et al., 2008].

De acordo com Barrientos et al., 1997, uma das funções do controle cinemático é unir sucessivos pontos no espaço de juntas, onde deseja-se que atuem as articulações do robô em um determinado instante de tempo. Junto com as condições de posição e tempo, é conveniente inserir restrições de velocidade e aceleração ao longo desses pontos, com o intuito de assegurar a suavidade da trajetória, além de limitar as velocidades e acelerações máximas. Desta forma, para definir uma trajetória, deve-se selecionar uma função cujos parâmetros ou coeficientes possam se ajustar de acordo com as condições de contorno desejadas para o movimento do robô. Os efeitos físicos associados à posição, à velocidade, à aceleração e ao *jerk*, entre outros, são restrições comumente aplicadas ao planejamento de trajetórias de manipuladores. As funções aplicadas geralmente são polinomiais, cujos parâmetros ou coeficientes se ajustarão automaticamente ao se impor as condições de contorno.

No planejamento de trajetórias robóticas, seja no plano de trabalho ou no espaço de juntas, a referência da trajetória é uma curva calculada a partir dos pontos previamente definidos para o robô. Com relação às funções utilizadas no planejamento de trajetória de robôs manipuladores, diversas abordagens relacionadas ao tipo de funções (polinômios) podem ser consideradas pelas características associadas aos polinômios de interpolação, como, por exemplo, as trajetórias do tipo ponto-a-ponto ou multiponto. Neste trabalho serão discutidas somente as trajetórias do tipo multiponto, uma vez que serão aplicadas funções *b-splines* no planejamento de trajetória do RPC.

2.6.2.1. Polinômios Associados a Trajetórias do tipo Multiponto

As trajetórias do tipo multiponto são aquelas especificadas com todas as informações necessárias para descrevê-las quando não pode ser definida simplesmente pela configuração final desejada. Assim, a inclusão de mais detalhes na descrição de uma trajetória multiponto consiste em disponibilizar uma sequência de pontos intermediários entre as posições inicial e final [Craig, 2005].

Segundo Biagiotti e Melchiorri, 2008, neste tipo de trajetória são especificados pontos intermediários através dos quais é possível determinar movimentos complexos de forma arbitrária. Geralmente, a trajetória é definida como a solução de um problema de otimização global que depende das condições impostas em cada ponto e do perfil geral da mesma. Ademais, neste tipo de trajetória pode-se escolher diversos critérios para definir os pontos ao longo de uma trajetória. Por exemplo, podem haver casos em que os pontos não cruzem necessariamente a trajetória, de forma que a curva ao longo dos pontos pode ser ajustada de duas maneiras: por interpolação ou por aproximação. A interpolação ocorre quando a curva cruza exatamente a posição geométrica dos pontos determinados considerando os respectivos instantes de tempo; enquanto a aproximação ocorre quando a curva não cruza os pontos pré-determinados, apresentando um valor de erro que deve estar dentro de uma tolerância especificada.

Para os casos de trajetórias multiponto, Biagiotti e Melchiorri, 2008, apresentam diversos métodos de interpolação, como funções polinomiais, polinômios ortogonais, polinômios trigonométricos e *splines*. Por se tratarem de assuntos relevantes para o desenvolvimento deste trabalho, serão aqui apresentadas as interpolações por funções polinomiais e por *b-splines*.

Em diversas aplicações é necessário estimar valores intermediários entre dados definidos por pontos [Chapra e Canale, 2006]. Para atender a este propósito, a interpolação polinomial é o método mais utilizado. Este tipo de interpolação consiste na determinação de um polinômio único de grau n que se ajuste a $n+1$ pontos definidos, conforme representado na Equação (2.3):

$$f(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 + \dots + a_n(t-t_0)^n \quad (2.3)$$

Para obter este polinômio de interpolação, existem diversos métodos que são abordados na literatura, tais como, o método de Lagrange, o método de Newton e o método baseado na resolução de sistemas lineares, os quais são apresentados por diversos autores³.

Segundo Biagiotti e Melchiorri, 2008, para determinar os a_{n+1} coeficientes de um polinômio de grau n existem desvantagens como: o grau do polinômio depende do número de pontos, a variação de um único ponto implica que todos os coeficientes necessitam ser recalculados, a inserção de um ponto resulta na utilização de um polinômio de grau $n+1$, etc. As técnicas convencionais utilizadas na interpolação polinomial não consideram condições adicionais de velocidades e acelerações nos pontos (iniciais, finais ou intermediários) da trajetória, as quais são aspectos importantes no planejamento de trajetória de robôs. No caso das trajetórias que requerem tais condições, é necessário assumir um polinômio de grau superior. Ao utilizar velocidades e acelerações iniciais e finais (04 restrições adicionais ao problema de interpolação polinomial), os autores exemplificam que o polinômio deve ser de grau $n+4$ para poder se determinar os coeficientes da equação. Maiores informações sobre a formulação do sistema de equações para resolver este problema de interpolação polinomial são apresentadas em Biagiotti e Melchiorri, 2008.

Spong et al., 2004, apresentam uma abordagem para o caso do planejamento de uma trajetória que passa por uma sequência de configurações chamadas de *via points*. Em um exemplo apresentado, consideram um caminho especificado por três pontos q_0 , q_1 e q_2 , de maneira que os mesmos devem ser alcançados nos intervalos tempos t_0 , t_1 e t_2 , respectivamente. Assim, as restrições para estes problemas são definidas de acordo com a Equação (2.4):

³ Maiores informações sobre os métodos utilizados para obter os polinômios por interpolação polinomial podem ser obtidas em Chapra e Canale, 2006, Burden e Faires, 2000, entre outros.

$$\begin{aligned}
 f(t_0) = q_0; \quad \dot{f}(t_0) = v_0; \quad \ddot{f}(t_0) = a_0; \quad f(t_1) = q_1; \\
 f(t_2) = q_2; \quad \dot{f}(t_2) = v_2; \quad \ddot{f}(t_2) = a_2;
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Para atender a estas restrições, a trajetória pode ser gerada utilizando um polinômio de 6º grau. Com relação ao problema apresentado, Spong et al., 2004, consideram que uma vantagem desta abordagem é que as derivadas da função $f(t)$ são contínuas, não ocorrendo descontinuidades na velocidade ou aceleração no ponto de passagem q_1 . Porém, para determinar os coeficientes deste polinômio, é necessário resolver um sistema linear com 7 equações polinomiais de 6º grau.

Biagiotti e Melchiorri, 2008, apresentam algumas vantagens relacionadas à aplicação de funções polinomiais na interpolação de $n + 1$ pontos:

1. a trajetória estabelecida deve cruzar todos os pontos definidos;
2. torna fácil descrever a função de interpolação dos pontos, uma vez que são necessários somente $n + 1$ coeficientes;
3. as derivadas da função $f(t)$ são contínuas no intervalo $[t_0, t_n]$. No caso em que a n ésima derivada é constante, todas as derivadas de ordem superior são nulas;
4. a função de interpolação da trajetória $f(t)$ é única.

Com relação à implementação numérica das interpolações polinomiais, Biagiotti e Melchiorri, 2008, e Siciliano et al., 2008 apresentam algumas desvantagens, que são:

1. em casos de polinômios de graus elevados, a precisão numérica do cálculo de seus coeficientes pode ser comprometida. Além disso, o comportamento oscilatório do polinômio aumenta, gerando trajetórias que podem ser inadequadas a algumas aplicações;
2. a variação de um único ponto ao longo da trajetória implica que todos os coeficientes do polinômio devam ser calculados novamente;
3. a inserção de um ponto adicional sobre a trajetória resulta em um polinômio de maior grau, necessitando recalcular todos os coeficientes; e
4. o sistema resultante das equações de restrições requisita alto esforço computacional.

Ferreira, 2011, apresenta exemplos que ilustram comportamentos indesejáveis no planejamento de trajetórias robóticas, como, a instabilidade numérica e o erro de truncamento. De acordo com o autor, a instabilidade numérica está relacionada com a disposição dos pontos de controle associada com o aumento do grau do polinômio. Na Figura 2.10, adaptada de Ferreira, 2011, estão apresentadas as seguintes situações: (a) interpolação polinomial de cinco

pontos, aplicando um polinômio de 4° grau; e (b) interpolação polinomial de sete pontos, aplicando um polinômio de 6° grau.

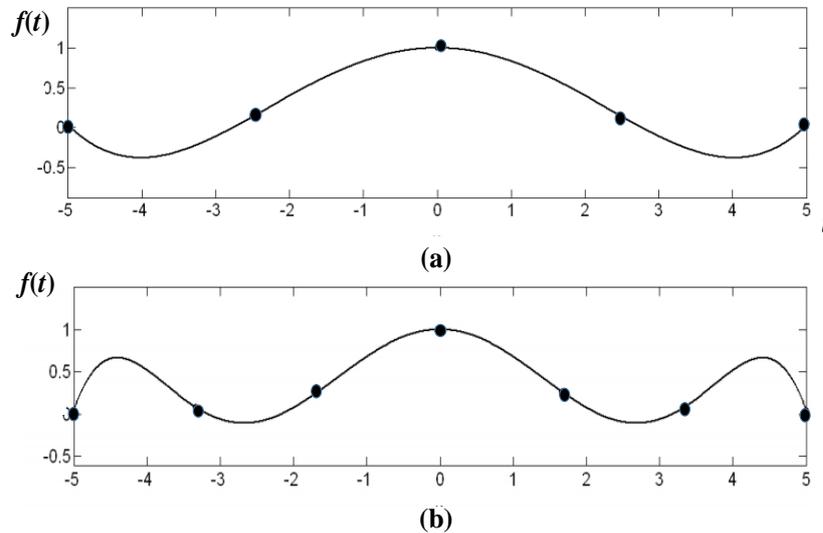


Figura 2.10. Características das interpolações polinomiais.

Os gráficos da Figura 2.10 representam interpolações polinomiais que têm seus graus determinados através da quantidade de pontos que se quer interpolar, ou seja, quanto maior a quantidade de ponto interpolados, maior será o grau do polinômio.

Segundo Ferreira, 2011, o erro de truncamento está relacionado com o número de casas decimais que são utilizadas em sistemas computacionais, ou seja, um número real que possui infinitas casas decimais será representado por um número real com quantidade limitada de casas decimais devido à disponibilidade de memória para representá-lo. Aumentando o grau do polinômio, é possível que os valores de seus coeficientes diminuam, como mostra a Figura 2.10, através da qual Ferreira, 2011, ilustra esta situação para um sistema que é configurado para trabalhar com nove casas decimais. Observa-se que os coeficientes do polinômio estão na ordem da nona casa decimal, resultando em um erro de interpolação.

Para evitar os erros de truncamento e de instabilidade numérica, Ferreira, 2011, apresenta como alternativa a utilização de polinômios de ordens menores. Neste sentido, para trajetórias multipontos, pode-se calcular um polinômio para cada segmento definido por dois pontos, garantido a continuidade desejada. Este processo é denominado de interpolação por partes, como, por exemplo, interpolação por *b-splines*, a qual é aplicada em problemas de otimização de trajetórias.

2.6.2.2. Polinômios Definidos por b-splines

Autores como Piegl e Tiller, 1997, De Boor, 2000, Ferreira, 2011, entre outros, destacam que os polinômios definidos por *b-splines* consistem em uma variante de uma função *spline* acrescida da possibilidade de controle local da curva, onde qualquer mudança em um determinado ponto de controle modifica a curva somente na região dos pontos vizinhos mais próximos em função da ordem de continuidade.

Com relação ao papel que as *b-splines* podem exercer na solução de problemas de natureza unidimensional e multidimensional, destaca-se a obtenção da continuidade entre dois segmentos dentro da curva (unidimensional), e, no que diz respeito ao segundo tipo (multidimensional), as *b-splines* auxiliam na definição de curvas paramétricas, bem como no planejamento de trajetória no espaço tridimensional [Biagiotti e Melchiorri, 2008].

A função *b-spline* $C(u)$ é definida pelo somatório de funções de base não nulas que são multiplicadas pelos pontos de controle, conforme a Equação (2.5).

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u), \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (2.5)$$

onde os coeficientes P_i ($i = 0, \dots, n$) são chamados de pontos de controle, $N_{i,p}(u)$ são as funções de base das *b-splines* e os elementos u_i são chamados de nós.

No cálculo das *b-splines*, é importante ressaltar que os elementos u_i são representados através de uma sequência de números reais não decrescentes, i.e, $u_j \leq u_{j+1}$ ($j=0, \dots, m-1$), e são expressos através um vetor de nós U ($U = [u_0, \dots, u_m]$).

Segundo Piegl e Tiller, 1997, para determinar uma curva *b-spline* são necessárias as seguintes etapas: a) encontrar o intervalo em que u encontra-se no vetor de nós U , b) calcular as funções de base não nulas, e c) multiplicar entre as funções de base não nulas e os respectivos pontos de controle.

A seguir, para ilustrar a metodologia utilizada na obtenção das funções por *b-splines* e a formulação utilizada no planejamento de trajetória de manipuladores, apresenta-se alguns conceitos importantes, tais como, das propriedades das curvas *b-splines*, das definições das funções de base e da característica associada às interpolações por *b-splines*.

- **Propriedades das funções *b-spline***

Em Piegl e Tiller, 1997, e em De Boor, 2000, são apresentadas diversas propriedades relacionadas às funções *b-splines*, as quais, por serem importantes no contexto do presente trabalho, estão aqui reproduzidas:

- a) Se $n=p$ e $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$, então $C(u)$ é definida como uma curva de Bézier.
- b) $C(u)$ é definido como um polinômio por partes; o grau p , o número de pontos $n+1$ e o número de nós $m+1$ são relacionados de acordo com a Equação (2.6).

$$m = p + n + 1 \quad (2.6)$$

- c) Os pontos extremos do intervalo de interpolação são definidos como os pontos de controle: $C(0)=P_0$ e $C(1)=P_1$
- d) A alteração de um ponto de controle P_i da *b-spline* gera mudança na curva somente no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$
- e) A continuidade de $C(u)$ está relacionada com continuidade de suas funções de base $N_{i,p}(u)$
- f) A derivada da curva *b-spline* ($C^{(k)}(u)$) é determinada através da derivada da função de base $N_{i,p}^{(k)}(u)$.

- **Definições das Funções de base da *b-spline***

Para Piegl e Tiller, 1997, existem diferentes maneiras para definir as funções de base e provar as propriedades importantes de uma *b-spline*, como, por exemplo, o método *blossoming*, apresentado por Ramshaw, 1987, o método da recorrência, proposto por deBoor, Cox e Mansfield, entre outros. Para apresentar as funções de base das *b-splines*, adota-se, neste trabalho, o método da recorrência, o qual é útil para implementações computacionais [Piegl e Tiller, 1997].

A *i-ésima* função de base de uma *b-spline* de grau p (ou de modo equivalente de ordem $p + 1$) é definida como:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad p > 0 \quad (2.8)$$

Com relação às propriedades das Equações (2.7) e (2.8) pode-se observar que:

1. $N_{i,0}(u)$ é uma função tipo pulso (igual a zero para qualquer valor exceto no intervalo aberto $u \in [u_i, u_{i+1})$);
2. No caso em que $p > 0$, $N_{i,p}(u)$ é definida como uma combinação linear de duas funções de base de grau $p-1$;
3. O cálculo de um conjunto de funções de base requer a especificação de um vetor de nós U e o grau p ;
4. A Equação (2.8) pode apresentar quocientes $0/0$. Neste caso, os coeficientes são zero;
5. $N_{i,p}(u)$ são polinômios por partes, definidos em todo domínio real, mas, geralmente, somente o intervalo $[u_0, u_m]$ é de interesse;
6. O intervalo aberto $u \in [u_i, u_{i+1})$ é chamado de i -ésimo intervalo do nó. Ele pode ter comprimento zero, desde que os nós não precisem ser distintos;
7. O cálculo das funções de grau p gera uma tabela triangular truncada, conforme ilustrado na Figura 2.11, apresentada por Piegl e Tiller, 1997.

$$\begin{array}{cccc}
 N_{0,0} & & & \\
 & N_{0,1} & & \\
 N_{1,0} & & N_{0,2} & \\
 & N_{1,1} & & N_{0,3} \\
 N_{2,0} & & N_{1,2} & \\
 & N_{2,1} & & N_{1,3} \\
 N_{3,0} & & N_{2,2} & \vdots \\
 & N_{3,1} & \vdots & \\
 N_{4,0} & \vdots & & \\
 \vdots & & &
 \end{array}$$

Figura 2.11. Representação das funções de base em função do grau da b -spline.

Maiores detalhes sobre as propriedades da derivada e das funções de base na determinação das *b-splines* são apresentados em Piegl e Tiller, 1997.

- **Características da interpolação com *b-spline***

De acordo com Ferreira, 2011, para obter uma função *b-spline* que passe por pontos pré-determinados, é necessário especificar um conjunto de pontos de controle e um novo vetor de nós a partir dos pontos dados.

Para exemplificar, considera-se que seja conhecido um conjunto de pontos Q_k ($k=0, \dots, n$) e se deseja determinar uma *b-spline* que interpole estes pontos. Neste caso, considerando que para cada ponto Q_k existe um nó u_k correspondente, o vetor de nós $U = [u_0, \dots, u_m]$ pode ser escolhido para o cálculo das funções de base. Desta forma, com base na Equação (2.5), pode-se resolver um sistema de $(n+1)$ equações, onde os pontos de controle P_i são as $(n+1)$ incógnitas do sistema, como apresentado na Equação (2.9).

$$Q_k = C(u_k) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(u_k) P_i \quad (2.9)$$

A partir dos pontos de controle obtidos, calcula-se a função *b-spline*, onde a curva resultante passará por todos os pontos Q_k .

Com relação à metodologia de interpolação por *b-splines*, Ferreira, 2011, afirma que um dos problemas a ser resolvido é a escolha do nó u_k e o vetor de nós U , pois suas escolhas afetam a forma da curva. Entre as metodologias utilizadas para a definição dos nós u_k , pode-se citar o método de comprimento de corda, o método centrípeto e o método para os nós igualmente espaçados.

2.7. Definições do Problema de Otimização

De acordo com Fritzsche, 1978, um problema de otimização consiste na busca dos valores máximo ou mínimo de uma função, denominada ‘objetivo’, que é composta por um grande número de variáveis, as quais devem satisfazer determinados requisitos denominados ‘restrições do problema’.

Para Yang, 2010b, a otimização inclui uma grande variedade de problemas na busca de uma determinada solução ideal. Os problemas de otimização podem ser nomeados e classificados de diferentes maneiras e também podem variar significativamente de acordo com o problema analisado. Nestes tipos de problemas (otimização), não é possível realizar uma abordagem única, e a complexidade de um problema de otimização depende em grande parte da forma de suas funções objetivo e de suas restrições.

De maneira geral, um problema de otimização com restrições é apresentado da seguinte forma [Haftka e Gurdal, 1991; Arora, 2004; Yang, 2010b].

$$\text{Minimizar } G_i(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n \quad (i = 1, 2, \dots, nv) \quad (2.10)$$

sujeito a:

$$\phi_j(x) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, J) \quad (2.11)$$

$$\Psi_k(x) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (2.12)$$

onde $G_i(x)$, $\phi_j(x)$, e $\Psi_k(x)$ são funções do vetor de projeto. Os elementos do vetor x , apresentado na Equação (2.13), são chamados de variáveis de projeto ou de decisão.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{nv})^T \quad (2.13)$$

As variáveis do vetor x , podem ser definidas as como contínuas, discretas ou como composta por estes dois tipos. As funções $G_i(x)$ são denominadas funções objetivo, onde $i = 1, 2, \dots, m$, sendo que no caso de $m = 1$ existe apenas um único objetivo. Além disso, com relação à implementação da função objetivo, cabe salientar que pode-se formular os objetivos como um problema de maximização, que consiste na busca do valor máximo de uma função a ser analisada. O espaço de busca pela solução ótima consiste na região que compreende as possíveis soluções com relação às variáveis de projeto do problema a ser otimizado. Esta região é delimitada pelas funções de restrição, as quais são responsáveis por dividir o espaço de busca em domínio viável e inviável. No domínio viável, a busca pela solução ótima parte de uma solução previamente conhecida; já, no domínio inviável, não se dispõe previamente de uma estimativa inicial de solução ótima. As igualdades para ϕ_j e desigualdades para Ψ_k são

chamadas de restrições do problema de otimização, sendo que as desigualdades podem ser reescritas também como $\Psi_k \geq 0$.

2.7.1. Algoritmos de Otimização

De acordo com Yang, 2010b, muitas vezes é necessário utilizar diferentes técnicas de otimização, de acordo com o tipo de problema a ser otimizado, pois alguns métodos são mais adequados para determinados tipos de aplicação do que outros. De maneira geral, os algoritmos de otimização podem ser divididos em duas categorias: os algoritmos determinísticos e os algoritmos estocásticos, conforme ilustrado na Figura 2.12, adaptada de [Yang, 2010b].

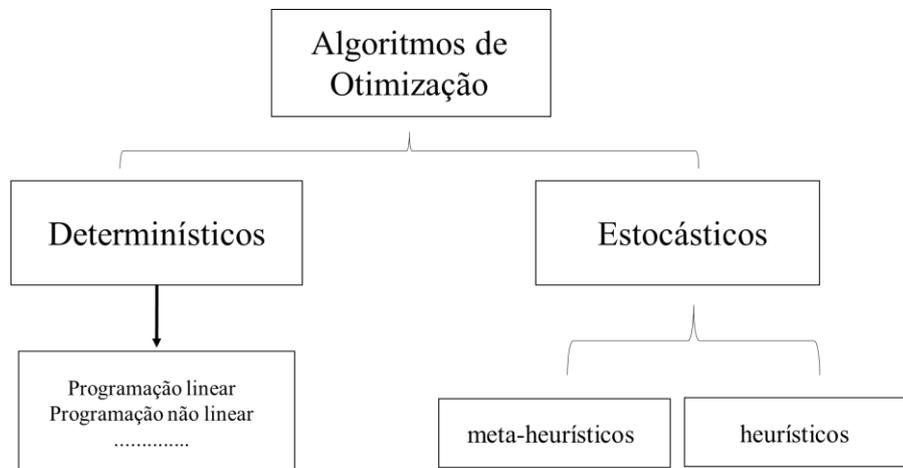


Figura 2.12 - Classificação dos algoritmos de otimização.

Para Yang, 2010b, os algoritmos determinísticos seguem um procedimento rigoroso, ou seja, os valores de suas variáveis de projeto e suas funções são repetidas a cada iteração. Esposito, 2012, esclarece que os métodos determinísticos consistem em métodos tradicionais de ajustes de parâmetros (variáveis de projeto), que, a partir de uma estimativa inicial de parâmetros, visam a minimizar ou maximizar a função objetivo. Estes métodos se caracterizam por se basearem em gradientes, além de necessitarem de funções que sejam contínuas e diferenciáveis. Como vantagem, estes métodos apresentam rápida convergência. No entanto, é preciso conhecer o comportamento da função a ser otimizada em termos analíticos e também é preciso observar que a mesma atenda a critérios de convexidade e de suavidade. Entre os algoritmos determinísticos, estão o método de programação linear, *newton-raphson*, algoritmo simplex (AS), entre outros.

Segundo Esposito, 2012, em aplicações reais de engenharia, a não linearidade relacionada aos modelos matemáticos pode apresentar uma série de dificuldades na minimização ou maximização da função objetivo, tais como: a presença de mínimos ou máximos locais, a alta correlação entre os parâmetros, incerteza dos valores das variáveis e comportamento do modelo utilizado para representar o problema, falta de convexidade por limitações das funções de restrições, o desconhecimento de uma boa estimativa inicial dos parâmetros e a falta de suavidade da função a ser otimizada pela presença de variáveis de projeto não contínuas.

Desse modo, as características encontradas em aplicações usuais de engenharia respaldam algumas das dificuldades dos métodos determinísticos na busca de um ótimo global, de maneira que uma alternativa para contornar os problemas associados aos métodos tradicionais determinísticos é aplicar os algoritmos estocásticos.

De acordo com Yang, 2010b, os algoritmos estocásticos estão sempre relacionados com algum tipo de aleatoriedade. Para exemplificar a aplicação deste método, as implementações com Algoritmos Genéticos (AG), nos quais os vetores ou soluções da população são diferentes cada vez que o programa é executado através de alguns números pseudo-aleatórios. Neste caso, embora os resultados finais possam não apresentar grandes diferenças, os caminhos de cada indivíduo (vetores da população) não são repetidos de forma exata.

Os algoritmos estocásticos, em termos gerais, são classificados em dois tipos: heurísticos e metaheurísticos. A heurística é uma estratégia de solução por “tentativa e erro” que produz soluções aceitáveis para problemas complexos de otimização em um intervalo de tempo razoável, porém estes algoritmos não garantem a obtenção das soluções ótimas [Yang, 2010b].

Os algoritmos metaheurísticos são usualmente mais sofisticados que os algoritmos heurísticos e geralmente apresentam desempenho superior, se caracterizando por apresentar restrições de aleatoriedade e de busca local. No entanto, ressalta-se que não existem definições acordadas de heurísticas e meta-heurísticas na literatura, onde estes termos são utilizados de maneira alternada. Recentemente, os algoritmos estocásticos com aleatoriedade e busca local são definidos como meta-heurísticas. A aleatoriedade consiste em uma boa alternativa de se afastar de uma busca local para a busca na escala global, assim grande parte dos algoritmos metaheurísticos são adequados para o otimização global.

De acordo com Yang, 2010b, existe um terceiro tipo de algoritmo de otimização que utiliza os métodos determinísticos e estocásticos em uma mesma estrutura algorítmica. Esses métodos são conhecidos como híbridos, cuja ideia básica é utilizar um algoritmo determinístico com pontos iniciais aleatórios. Estes algoritmos muitas vezes são classificados na literatura de otimização como algoritmos estocásticos, uma vez que existem componentes aleatórias que compõem este tipo de algoritmo.

Como se pressupõe que os problemas reais relacionados com o planejamento de trajetórias de robôs apresentam modelos com comportamentos não lineares que dificultam a determinação da função objetivo, neste trabalho propõe-se estudar os algoritmos estocásticos no planejamento de trajetória de robôs. Para o embasamento teórico deste trabalho, convencionou-se que tanto os algoritmos heurísticos como os metaheurísticos serão tratados como algoritmos estocásticos de otimização, considerando que não existem definições estabelecidas que diferenciem adequadamente os dois métodos. Especificamente, considera-se o FMA como um algoritmo metaheurístico [Yang, 2010b]. Este algoritmo está apresentado em detalhes na Seção 2.7.3.

2.7.2. Técnicas Estocásticas de otimização

Segundo Rendón et al., 2008, os algoritmos heurísticos apresentam uma estratégia de busca de soluções que utiliza um conjunto de procedimentos simples, muitas vezes baseados no sentido comum, que encontram soluções de boa qualidade (não necessariamente a solução ótima global) de maneira simples e rápida. Em problemas de grande dimensão, poucas vezes um algoritmo heurístico encontra a solução ótima global.

Para Esposito, 2012, nos métodos heurísticos o procedimento de busca aleatória e o número elevado de avaliações da função objetivo são fatores que auxiliam para que a procura não fique presa a um ótimo local, aumentando sua probabilidade de encontrar um ótimo global. Além disso, estes métodos não dependem de uma boa estimativa inicial dos parâmetros e não utilizam gradientes durante a otimização. Estas características heurísticas permitem a estes métodos trabalhar tanto com funções contínuas quanto com funções discretas.

De acordo com Rendón et al., 2008, quando se utiliza uma técnica heurística deve-se considerar os seguintes fatores:

- a) Codificação: consiste na forma de codificar as alternativas que aparecem no espaço de busca definido para o problema. Quando se utilizam estas técnicas, é importante

considerar que o espaço de busca nem sempre coincide com o espaço solução e a codificação usada pode afetar o desempenho do algoritmo.

- b) Estratégia de busca e vizinhança: está relacionada à forma em que se realizam as transições entre soluções, ou seja, consiste no método que diferencia uma estratégia heurística de outra. Neste caso, a estratégia de busca determina as diferenças que podem ter as soluções associadas a dois passos consecutivos do processo (iterações).
- c) Função Objetivo: em muitas situações, os métodos de solução resolvem um problema equivalente, em que a função objetivo original é substituída por uma nova função denominada ‘função de adaptação’ ou função *fitness*. Esta função é obtida realizando modificações na função objetivo do problema de tal forma que facilite a implementação dos mecanismos próprios da técnica de solução utilizada, o que reduz o esforço computacional. Para que a função de adaptação represente a função objetivo original, é necessário que a localização da solução ótima, no espaço de solução, seja a mesma nos dois casos.
- d) Ponto inicial: refere-se a uma estimativa inicial de busca pela solução. Em problemas multimodais, a seleção do ponto inicial está estritamente correlacionada com a qualidade da solução encontrada no final do processo.
- e) Critério de parada: define a condição que dá por finalizado o processo de busca de soluções. Normalmente, o processo finaliza quando a solução atual não tem uma solução vizinha de melhor qualidade, ou seja, quando a distância entre as soluções encontradas por cada candidata à solução for menor do que valor (tolerância) especificado. Também pode ser utilizado como critério de parada um número máximo de tentativas (iterações).

Uma gama significativa de diferentes algoritmos heurísticos são relatados na literatura, destacando-se entre os mesmos, Recozimento Simulado (SA) [Kirkpatrick et al., 1983], Sistemas Imunológicos (IS) [Farmer et al., 1986], Algoritmos Genéticos (AG) [Goldberg, 1989], Busca Tabu (TS) [Laguna, 1994], Heurística Gananciosa (GH) [Feo e Resende, 1995], Algoritmo por Enxame de Partículas (PSO) [Kennedy e Eberhart, 1995], Otimização da Colônia de Formigas (ACO) [Dorigo et al., 1996], Busca Harmônica (HS) [Geem e Kim, 2001], Pesquisa Local Iterada (ILS) [Glover e Kochenberger, 2002], Colônia de Abelhas Artificiais (ABC) [Basturk e Karaboga, 2006] e Algoritmo de Busca Gravitacional (GSA) [Rashedi et al., 2009].

2.7.3. Algoritmo de Otimização por Colônia de Vagalumes (FMA)

O FMA, em inglês *Firefly Metaheuristic Algorithm*, foi desenvolvido por Xin-She Yang na Universidade de Cambridge em 2007, baseado nas observações relacionadas com comportamento da luminosidade (bioluminescência) dos vagalumes, que consistem em insetos coleópteros conhecidos por suas emissões luminosas [Yang, 2010]. É importante ressaltar que existem diversas pesquisas implementadas em diferentes áreas da engenharia que usam este algoritmo. Apenas para citar algumas, Gomes, 2011, utilizou o algoritmo FMA na otimização das formas e tamanhos de estruturas considerando restrições dinâmicas e frequências naturais. Pérez, 2014, aplicou o algoritmo FMA na otimização de amortecedores por atrito, visando a diminuir a amplitude da resposta dinâmica do deslocamento máximo no topo de estruturas, definindo o local de um número máximo de amortecedores e suas respectivas forças de atrito. Sayadi et al., 2013, implementaram o algoritmo FMA na área de sistemas de fabricação, visando à formação de células de manufatura, através de *layouts*, conhecidos como matrizes de incidência peça-máquina.

De acordo com Yang, 2010b, não existe um método universal que forneça a melhor solução para qualquer tipo de problema de otimização. Segundo ele, os algoritmos metaheurísticos apresentam um desempenho semelhante, sendo isso também válido para o FMA. Entre as vantagens deste algoritmo pode-se citar sua efetividade na busca de um ótimo local e ótimo global de forma simultânea, além da possibilidade de ajuste de parâmetros associados ao FMA, como a variação da atratividade (γ) e do ajuste de aleatorização (α). Essas características podem tornar seu desempenho superior aos métodos de busca aleatória. Além disso, a característica de varredura quase independente do FMA, o torna interessante para implementação computacional em paralelo.

A bioluminescência pode ser definida de maneira generalizada como a produção e emissão de luz gerada por um organismo vivo. Nesta área, existem muitas definições que são utilizadas, como fluorescência, fosforescência, luminescência, quimiluminescência, e, mais recentemente, a biofluorescência. Para facilitar a compreensão, tem-se definido a bioluminescência como: “a produção direta de luz a partir de uma reação química que ocorre dentro de um organismo vivo” [Day, 2010].

Segundo Yang, 2010, na área da biologia ainda não existe um amplo conhecimento sobre as atribuições que a luminescência pode fornecer ao vagalume, porém existem três funções que já foram identificadas, que são: (a) ferramenta de comunicação e atração para

potenciais parceiros na reprodução; (b) isca para atração de eventuais presas; e (c) mecanismo de alerta de possíveis predadores. Já, para o processo de otimização através do algoritmo FMA, existem idealmente três regras:

1) todos os vagalumes são considerados unissex, com intuito de que um vagalume seja atraído por outros vagalumes;

2) A atração está relacionada de forma proporcional ao seu brilho. Isto faz com que, independente dos vagalumes, o menos brilhante irá se mover para o mais brilhante. A atração é proporcional ao brilho, e ambos diminuem na medida em que a sua distância aumenta;

3) O brilho de um vagalume está associado com a indicação da função objetivo.

Pela definição de Yang, 2010, um vagalume é atraído por vagalumes mais brilhantes ao mesmo tempo em que se move de forma aleatória. Esta atração está relacionada com a intensidade da luz intermitente, que diminui com a distância; por isso, a capacidade de atração será avaliada através de outros observadores, no caso, outros vagalumes. A diminuição da intensidade de luz é controlada pelo coeficiente de absorção de luz, a qual está associada a uma escala característica, conforme apresentado a seguir na Equação (2.17).

2.7.3.1. Atratividade e Intensidade Luminosa

Na formulação do algoritmo, é necessário determinar as características de variação da intensidade da luz e da atratividade. Em uma abordagem simplificada, pode-se assumir que a atratividade de um vagalume é determinada pelo seu brilho, o qual está associado com a função objetivo codificada $G(x^i)$, de maneira que o brilho I de um vagalume i em uma posição particular $x^i = (x_1, x_2, \dots, x_{nv})^T$ (vetor de variáveis de projeto) pode ser escolhido como $I(x^i) \propto f(x^i)$ (relação de proporcionalidade entre o brilho e a função objetivo). Além disso, a atratividade β é relativa, pois ela irá variar de acordo com a distância r_{ij} entre os vagalumes i e j .

Ademais, a intensidade da luz diminui com a distância de sua fonte e a luz também é absorvida pelo meio. Assim, deve-se permitir que a atratividade varie com o grau de absorção de luz. Na forma mais simples, a intensidade da luz $I(r_{ij})$, que varia de acordo com a lei do inverso do quadrado, é definida de acordo com a Equação (2.14).

$$I(r_{ij}) = I_s / r_{ij} \quad (2.14)$$

onde I_s é a intensidade na fonte.

Para um dado meio, com um coeficiente de absorção fixo γ , a intensidade da luz $I(r_{ij})$ varia com a distância r_{ij} da seguinte forma:

$$I(r_{ij}) = I_0 \exp(-\gamma r_{ij}^2) \quad (2.15)$$

sendo I_0 a intensidade de luz na origem. Sabendo-se que a intensidade da luz percebida por vagalumes adjacentes está diretamente ligada à atratividade, pode-se definir a atratividade β de um vagalume de acordo com a seguinte equação:

$$\beta(r_{ij}) = \beta_0 \exp(-\gamma r_{ij}^2) \quad (2.16)$$

onde β_0 é a atratividade em $r_{ij}=0$.

A distância característica é definida através da Equação (2.17), considerando que a atratividade muda significativamente de β_0 para $\beta_0 e^{-1}$.

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad (2.17)$$

Na implementação computacional, a função de atratividade $\beta(r_{ij})$ pode ser uma função monotonicamente decrescente como, por exemplo,

$$\beta(r_{ij}) = \beta_0 \exp(-\gamma r_{ij}^m) \quad (2.18)$$

Neste caso, considerando um valor fixo de γ , o comprimento característico Γ é definido de acordo com a Equação (2.19), considerando $m \rightarrow \infty$.

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma^m} \rightarrow 1 \quad (2.19)$$

Alternativamente, para uma dada escala característica de comprimento Γ em um problema de otimização, o parâmetro γ é usado com um valor típico inicial definido como:

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma m} \quad (2.20)$$

O movimento do vagalume i que é atraído por outro vagalume j mais atrativo (mais brilhante) é determinado por:

$$x^i = \beta_0 \exp(-\gamma r_{ij}^2) + (x^i - x^j) \alpha \epsilon^i \quad (2.21)$$

Na Equação (2.21), o primeiro termo do lado direito da equação está relacionado à atração, enquanto que o segundo termo consiste na definição da randomização. O termo α é parâmetro de aleatorização, enquanto ϵ^i é definido como um vetor de números aleatórios resultante de uma distribuição gaussiana ou distribuição uniforme.

Na maioria das implementações que utilizam o algoritmo FMA, pode-se considerar $\beta_0 = 1$ e $\alpha \in [0,1]$. Com relação à Equação (2.21), é importante destacar que se trata de um caminho aleatório tendendo em direção aos vagalumes mais brilhantes, de maneira que, se $\beta_0 = 0$, a equação torna-se um simples caminho aleatório.

O parâmetro γ caracteriza a variação da atratividade. Esse valor é extremamente importante na determinação da velocidade de convergência, bem como na eficácia do FMA na busca de uma solução ótima global. Como indicado por Yang, 2008, a atratividade é definida $\gamma \in [0, \infty]$. No entanto, em diversas aplicações, em função dos valores do comprimento característico Γ do sistema a ser otimizado, esse valor situa-se entre 0,1 e 10. A Figura 2.13, ilustra o pseudocódigo do algoritmo FMA, adaptada de [Yang, 2008] e [Gomes, 2011].

```

Definir a função objetivo  $G(\mathbf{x}^i)$  onde  $\mathbf{x}^i = (x_1, x_2, \dots, x_{nv})^T$  e  $nv = n^\circ$  de variáveis de projeto
Gerar uma população inicial de vagalumes randomicamente  $\mathbf{x}^i$   $i=1, 2, \dots, n$ , onde  $n = n^\circ$  de vagalumes, classificados em ordem crescente.
A intensidade luminosa  $I$  em  $\mathbf{x}^i$  é determinada por  $G(\mathbf{x}^i)$  para todos vagalumes.
Define-se o coeficiente de absorção luminosa  $\gamma$  baseado no  $\Gamma$  valor da população inicial
enquanto  $t <$  número máximo de gerações ou critério de convergência seja atendido
  para  $i=1$  até  $n$ 
    para  $j=1$  até  $n$ 
      se ( $I^i > I^j$ ), mover o vagalume  $i$  na direção do vagalume  $j$ 
        Calcular a distância  $r_{ij} = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j|$ 
        Calcular  $\beta(r_{ij}) = \beta_0 \exp(-\gamma r_{ij}^2)$ 
        Atualizar as variáveis de projeto  $\mathbf{x}^i = \beta_0 \exp(-\gamma r_{ij}^2) + (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) \alpha \epsilon^i$ 
        Atualizar  $I^i = G(\mathbf{x}^i)$ 
      fim se
    fim para  $j$ 
  fim para  $i$ 
  Ordena os vagalumes em ordem decrescente e encontra o melhor vagalume até o presente momento
fim enquanto
Resultados após o processamento

```

Figura 2.13 - Pseudocódigo do algoritmo FMA.

Como se observa na Figura 2.13, o algoritmo FMA baseia-se na determinação do valor da função objetivo ($G(\mathbf{x}^i)$) em diversos pontos do espaço de busca, os quais são inicialmente determinados de maneira randômica. Estes pontos, variáveis de projeto do problema de otimização (\mathbf{x}^i), são representados como vagalumes. Os valores da função objetivo nestes pontos estão relacionados com a intensidade de luz associadas aos vagalumes. Assim, seguindo a metodologia associada ao FMA, são realizadas diversas iterações com intuito de fazer com que os valores convirjam para o ponto que gere o maior brilho, obtido no ponto em que a função apresenta a solução ótima.

2.7.4. Algoritmo de otimização por Enxame de Partículas (PSO)

O algoritmo de otimização por enxame de partículas, em inglês *Particle Swarm Optimization* (PSO) [Eberhart e Kennedy, 1995], baseia-se em uma técnica de otimização associada ao comportamento social de pássaros em bandos. Isto é, levando em conta o comportamento dos pássaros durante o período de voo, realizado pela busca por alimento e pela interação entre os pássaros, esse algoritmo é modelado como um mecanismo de otimização. Em síntese, o princípio de funcionamento do algoritmo PSO, o qual tem como base os trabalhos de Gomes, 2011a e Espósito, 2016, é o seguinte: os pássaros, em bando, são interpretados como um conjunto de pontos (denominado enxame de partículas) que trocam informações entre si, o que permite conduzir o enxame e suas respectivas partículas para o ponto ótimo de uma determinada função dentro de um espaço de busca estabelecido. Assim, para cada unidade de tempo, os dados de posição e velocidade das partículas são atualizados por meio das Equações (2.22) e (2.23):

$$v_{i,j}(t+1) = \omega [v_{i,j}(t) + c_1 r_1 (x_{lbest_{i,j}}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2 r_2 (x_{gbest_j}(t) - x_{i,j}(t))] \quad (2.22)$$

$$x_{i,j}(t+1) = x_{i,j}(t) + v_{i,j}(t+1) \quad (2.23)$$

onde ω é o peso de inércia para as velocidades, $x_{i,j}(t)$ é o valor atual da variável de projeto j da partícula i , $v_{i,j}(t+1)$ é a velocidade atualizada da variável de projeto j da partícula i , $x_{lbest_{i,j}}(t)$ é a variável de projeto ótima j encontrada até agora pela partícula i , $x_{gbest_j}(t)$ é a variável de projeto ótima j encontrada até agora pelo enxame, e r_1 e r_2 são dois vetores contendo números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$.

Segundo Espósito, 2016, essas equações se tratam de uma versão modificada do algoritmo proposto originalmente por Eberhart e Kennedy, 1995, e se caracterizam pela inserção de dois parâmetros. O primeiro parâmetro, o peso de inércia ω [Shi e Eberhart, 1998], tem grande influência na convergência do PSO, de modo que os autores sugerem que o valor de ω inicie em 1 (para favorecer o comportamento exploratório inicial da partícula) e seja reduzido durante a execução do algoritmo, para, assim, realizar uma busca mais refinada no entorno da posição onde a partícula se encontra; e o segundo parâmetro, o fator de constrição χ [Clerc, 1999], é utilizado para garantir a convergência do algoritmo. Com base em um estudo de convergência, Bergh e Engelbrecht, 2006, apresentam a Equação (2.24):

$$\chi = \frac{1.6}{2 - (c_1 + c_2) - \sqrt{(c_1 + c_2)^2 - 4(c_1 + c_2)}} \quad (2.24)$$

onde c_1 é uma componente cognitiva da partícula e c_2 é uma componente social do enxame. Essas constantes são utilizadas para direcionar as partículas, guiando-as para as melhores posições. A Figura 2.14, apresentada em Espósito, 2016, apresenta a atualização da posição e da velocidade da partícula para cada instante de tempo.

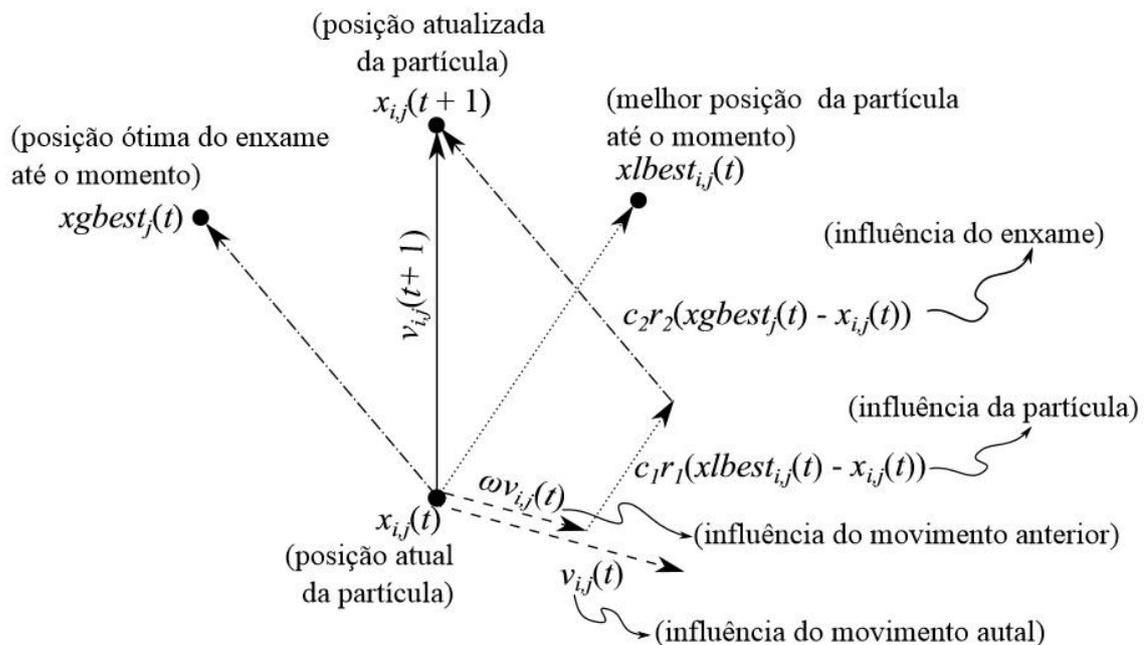


Figura 2.14 - Representação vetorial da atualização da velocidade e posição.

Para estabelecer o critério de convergência do algoritmo, que é a última etapa da implementação do PSO, são utilizadas duas condições apresentadas em Gomes, 2011a, Espósito, 2016, entre outros, as quais devem ser atendidas simultaneamente: 1) a razão entre o desvio padrão e o valor médio das funções de todas as partículas deve ser menor ou igual a uma tolerância especificada (tol_{cov}); e 2) para que as restrições não sejam violadas, é estabelecida uma tolerância pelo fator de penalização (tol_{cov}), visando a não comprometer a solução. Portanto, uma vez que as duas condições tenham sido atendidas, o algoritmo é finalizado; e, caso contrário, o processo volta a realizar iterações utilizando os últimos resultados obtidos.

Na literatura, existem outras alternativas que são utilizadas para melhorar a eficiência do PSO. Além das modificações aqui apresentadas, um dos estudos baseia-se na análise da forma assíncrona de atualização das velocidades e posições das partículas do enxame, visto que no PSO original esse procedimento é feito de forma síncrona. No entanto, apesar de existirem modificações que venham a fornecer melhorias para o algoritmo PSO, tornando-o mais eficiente e robusto, os resultados obtidos por esses métodos não apresentam diferenças significativas em relação ao desempenho médio sobre todas as funções de custo, já que, segundo Yang, 2010, todos os algoritmos de otimização apresentarão a mesma performance quando se considera a média do desempenho de várias funções diferentes. Nesse sentido, o presente trabalho aplica o algoritmo PSO com as modificações propostas por Espósito, 2016, ou seja, não tratando dos modelos paralelos aplicados ao algoritmo PSO.

2.7.5. Algoritmos Genéticos (AG)

Os Algoritmos Genéticos (AG) são fundamentados pelo processo de seleção proposto por Charles Darwin em 1859. Tais algoritmos foram desenvolvidos por John Holland na década de 1960 e aperfeiçoados posteriormente por seus alunos e colegas da Universidade de Michigan entre 1960 e 1970. [Michell,1999]. Segundo Rao, 2009, e Silva, 2005, esses algoritmos são baseados nos princípios da genética e seleção natural (reprodução, cruzamento e mutação), os quais são utilizados no procedimento de pesquisa genética. Nesse sentido, os algoritmos genéticos são analisados a cada iteração, de modo que os princípios de seleção e reprodução são aplicados a uma população de candidatos que serão posteriormente selecionados. A seleção consiste na definição dos indivíduos que conseguirão se reproduzir, estabelecendo, assim, descendentes para a próxima geração. A estrutura dos AG e os operadores genéticos que são utilizados na implementação desses algoritmos são apresentados a seguir.

2.7.5.1. Estrutura dos Algoritmos Genéticos

Autores como Goldberg, 1989, Guerra, 2008, entre outros, descrevem o princípio de funcionamento dos AG, ilustrado na Figura 2.15 [Guerra,2008], da seguinte maneira:

- 1) inicialmente, os AG operam com uma população inicial, de maneira que cada indivíduo (cromossomo) é avaliado em uma determinada geração;
- 2) dentre todos os indivíduos, são selecionados os pais para gerar novos indivíduos (cromossomos);
- 3) nos indivíduos definidos como pais, aplicam-se os operadores genéticos de recombinação (crossover) e mutação, enquanto a antiga geração de pais é apagada e os novos cromossomos são avaliados e inseridos na população;
- 4) se os critérios de parada são atendidos, pelo número de gerações ou por convergência, obtém-se, então, a função objetivo; e
- 5) se estas condições não foram satisfeitas, seleciona-se novamente os pais para gerar novos cromossomos até que o critério de parada seja satisfeito.

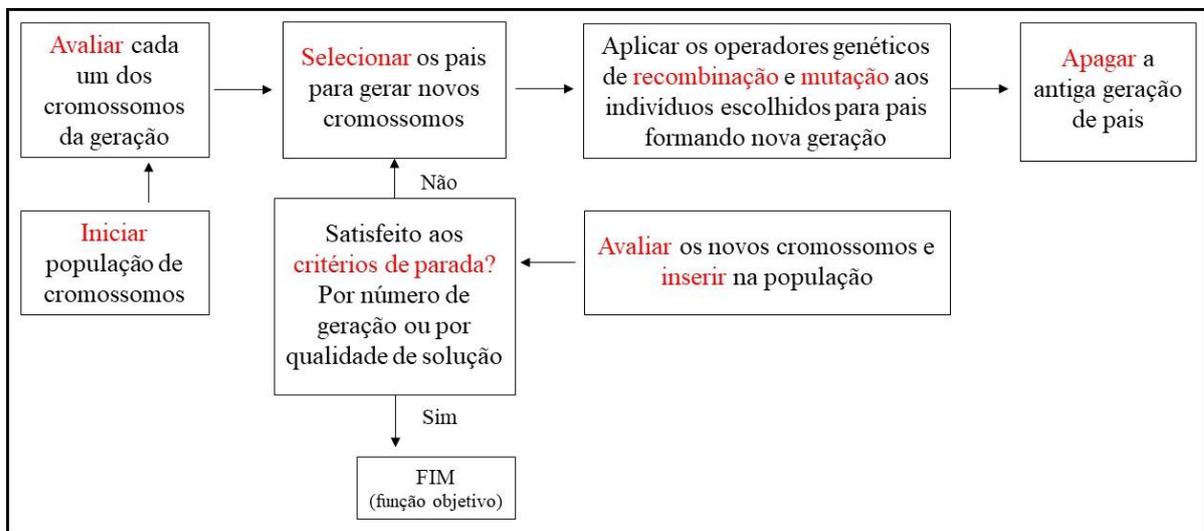


Figura 2.15 - Princípio de funcionamento dos AG.

Maiores informações sobre a terminologia biológica para a implementação de AG podem ser obtidas em Rao, 2009, entre outros.

2.7.5.2. Codificação do cromossomo

Para Silva, 2005, os cromossomos caracterizam-se por uma estrutura constituída de dados que representa uma solução do problema a ser otimizado, ou seja, conjunto de parâmetros da função objetivo a ser otimizada. Estes parâmetros são codificados em vetores ou cadeia de valores binários (0's e 1's), reais ou combinação de ambas. Já, Argoud et. al., 2008, estabelecem que um cromossomo é composto por n elementos, denominados “genes”, cada um desses elementos representa uma variável de projeto do problema de otimização.

Segundo Ávila, 2002, Silva, 2005, Guerra, 2008, entre outros, a representação dos cromossomos por números binários e reais pode ser caracterizada da seguinte maneira:

- Binários: é historicamente importante, sendo a forma de codificação mais utilizada por ser de fácil análise e manipulação. Esta representação requer atenção em problemas com parâmetros contínuos, os quais requerem provavelmente a utilização de um número maior de genes para representar as soluções, e em problemas com a não-uniformidade dos operadores.
- Reais: codificação por números reais que é mais utilizada para problemas que utilizam variáveis contínuas e requerem menos memória que a representação.

Na implementação dos AG, aspectos como o tamanho do cromossomo e o tipo de codificação, estão diretamente relacionados às características do problema de otimização a ser implementado. A Figura 2.16, apresentada por Silva, 2005, ilustra algumas formas de representar os Cromossomos na implementação dos AG.

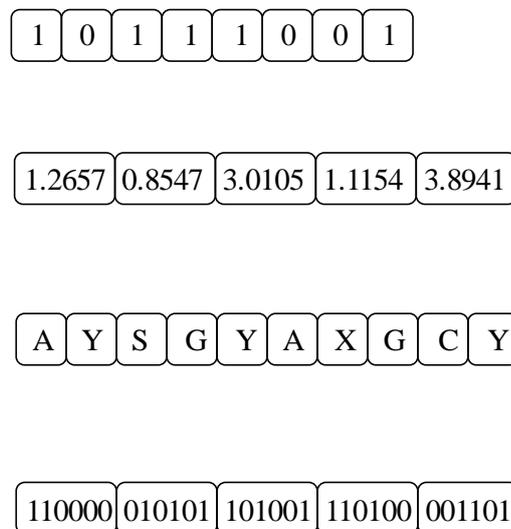


Figura 2.16 – Representação de Cromossomos na implementação dos AG.

2.7.5.3. Função de Avaliação ou Objetivo

Nos AG, a função objetivo é responsável por avaliar o desempenho dos cromossomos em uma população por meio de informações numéricas, além de expressar as características necessárias para a resolução do problema analisado. Para Souza, 2008, esta avaliação faz com que os indivíduos sejam ordenados individualmente para que o processo de seleção escolhido (ver Seção 2.7.5.4) possa definir os melhores indivíduos que são utilizados na geração subsequente. O autor ressalta que esse ordenamento ocorre pelos escores da função objetivo de cada indivíduo em relação à solução encontrada pelo algoritmo.

Segundo Silva, 2005, nos AG a função objetivo avalia as chances de sobrevivência e reprodução de cada indivíduo, uma vez que ela fornece uma medida de como os indivíduos estão adaptados ao ambiente em questão. Ainda, segundo o autor, a avaliação de cada indivíduo resulta num valor denominado aptidão (*fitness*).

O critério para avaliar a resposta da função de aptidão baseia-se na diferença (erro) entre os valores definidos como base e aqueles estimados pelos AG, de modo que o erro indica o quão adequada é a resposta encontrada pelos AG em relação aos valores de referência. Assim, a função objetivo visa a analisar a capacidade de cada indivíduo de sobreviver devido às variações dos parâmetros envolvidos.

A Figura 2.17 ilustra, considerando que o caso em que função objetivo é representada na forma de $G_i(x)$, onde x_1, x_2, \dots, x_{nv} são variáveis de projeto do problema de otimização (genes), o princípio da função objetivo e do ordenamento no caso de um cromossomo representado na forma binária, conforme apresentado em Izquierdo, 2013, são também descritas.

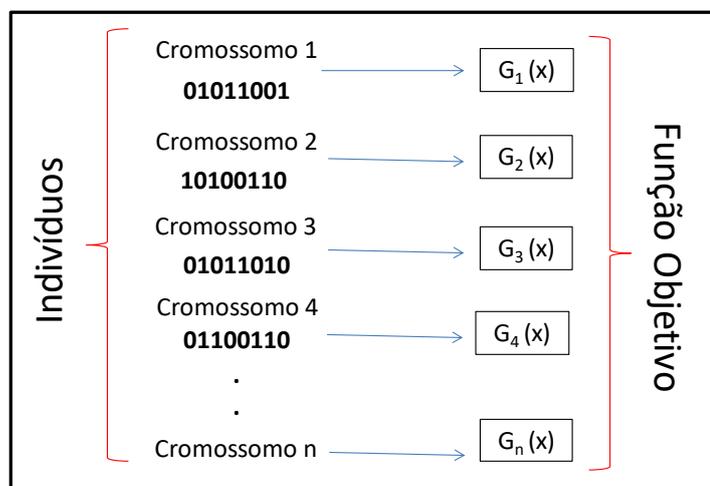


Figura 2.17 - Princípio da função objetivo no AG.

2.7.5.4. Seleção de indivíduos

Segundo Souza, 2008, a seleção dos indivíduos nos AG, a qual se baseia na ideia básica da seleção natural apresentada por *Charles Darwin*, está diretamente relacionada com os fenômenos da natureza, já que os indivíduos (cromossomos) mais adaptados ao seu ambiente têm mais oportunidade de se reproduzirem quando comparados com os indivíduos considerados menos adaptados.

Uma vez definida a representação dos indivíduos (cromossomos) da população, é necessário estabelecer o método que será utilizado promover a seleção dos mesmos, com a finalidade de gerar outros descendentes, privilegiando, assim, os melhores indivíduos da população [Borges, 2003]. Em síntese, a seleção dos indivíduos de uma população consiste na sobrevivência dos melhores indivíduos, os quais serão selecionados para a reprodução formando uma nova geração. Os principais métodos de seleção de indivíduos são:

- **Seleção pelo Método da Roleta (*Roulette Wheel*)**

Segundo Silva, 2005, entre outros, o método da roleta é o mais simples e o mais utilizado entre os métodos de seleção. Neste método, os indivíduos são selecionados de uma geração para outra por meio de uma roleta, onde cada indivíduo da população compõe um segmento da roleta proporcional ao valor de sua respectiva função objetivo. Assim, quanto maior for o valor da função objetivo associada a um indivíduo, maior será a sua probabilidade de ser selecionado. Isto é, a probabilidade PR_i de *i-ésimo* indivíduo da população ser selecionado para a reprodução é proporcional a sua probabilidade de seleção $fp_i = G(x_i)$, conforme a Equação (2.25):

$$PR_i = \frac{fp_i}{\sum_{i=1}^N G_i} \quad (2.25)$$

onde G_i é a função objetivo do elemento i da população e N é o tamanho da população

A Figura 2.18, apresentada em Izquierdo, 2013, ilustra o princípio de funcionamento do método da roleta no caso de uma população de N indivíduos.

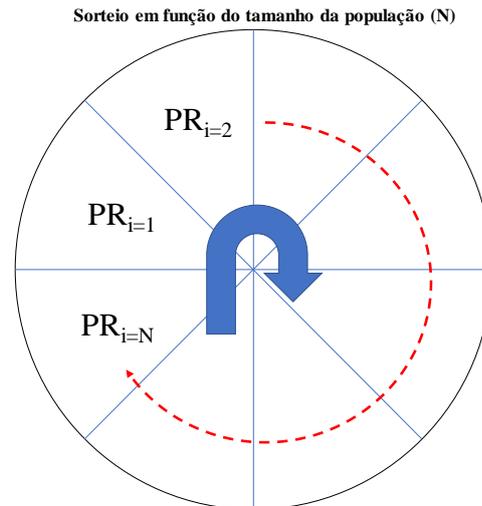


Figura 2.18 – Seleção pelo método da Roleta.

- **Seleção pelo Método do Torneio (*Tournament selection*)**

Na seleção pelo método do torneio, N indivíduos (cromossomos) são escolhidos aleatoriamente, de modo que o indivíduo que tiver o maior aptidão é selecionado para uma população intermediária e escolhido em função de um valor de probabilidade k previamente definido. Este processo se repete até que a população intermediária seja preenchida [Silva, 2005; Guerra, 2008; Souza, 2008]. A Figura 2.19, apresentada em Silva, 2005, ilustra o princípio de funcionamento do método do Torneio no caso em que $N=3$.

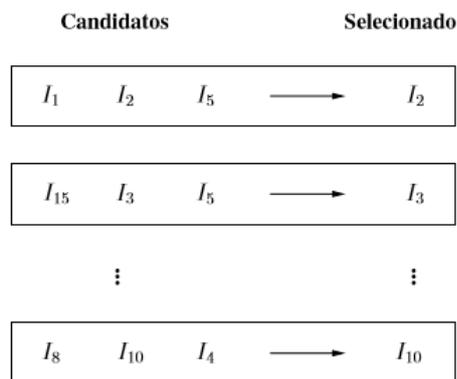


Figura 2.19 - Seleção pelo método do Torneio.

Maiores informações sobre os demais métodos para a seleção de indivíduos, como o método do Ordenamento Linear e o método Etilista, podem ser encontrados em Mitchell, 1999, Guerra, 2008, Souza, 2008, entre outros.

2.7.5.5. Operador de Cruzamento (*Crossover*)

Para Silva, 2005, Silva, 2006, Souza, 2008, e outros, os operadores de cruzamento relacionam-se com os mecanismos de reprodução natural, visto que dois indivíduos (Cromossomos), denominados pais, trocam fragmentos de seus materiais genéticos combinando essas informações para que exista uma probabilidade razoável dos novos indivíduos serem melhores que seus pais. A recombinação desses indivíduos, que deve ser feita aos pares na formação dos filhos, pode ser do tipo convencional (Uniforme ou N pontos), Aritmético (Média Aritmética, Média Geométrica, Blend, entre outros) e Heurísticos.

2.7.5.6. Operador de Mutação

Segundo Silva, 2005, este operador baseia-se no princípio da busca aleatória, já que, uma vez selecionada uma posição do indivíduo (cromossomo), o valor deste elemento (gene) é alterado para um outro elemento possível. Esse procedimento é controlado por um parâmetro fixo que indica a probabilidade de um gene sofrer mutação. Os principais operadores de mutação são aleatória (uniforme), não-uniforme, escorregamento (*Creep*), Gaussiana, entre outros.

2.8. Técnicas de Otimização no Planejamento de Trajetórias de Manipuladores

Existem na literatura diversas técnicas e métodos propostos para resolver o problema de otimização de planejamento de trajetória de robôs manipuladores. Tangpattanakul e Artrit, 2009, comentam que existem muitos algoritmos sendo desenvolvidos para a obtenção do planejamento de trajetória ideal de robôs manipuladores, sendo seus objetivos relacionados com três pontos fundamentais que caracterizam suas implementações: a) a função objetivo e as restrições do problema de otimização; b) as formas da trajetória; e c) as técnicas de otimização. A função objetivo de problemas de otimização pode ser baseada no tempo de trajetória, no *jerk* ou na minimização de energia. As restrições são relacionadas aos efeitos físicos de velocidade, aceleração, *jerk*, torque, entre outros. Neste trabalho, para padronizar os conceitos discutidos, convencionam-se, daqui em diante, que as restrições cinemáticas se referem à velocidade, aceleração e *jerk*, e a restrição dinâmica baseia-se no torque. A forma da trajetória consiste na utilização de polinômios, *splines*, entre outros. As técnicas de otimização são usualmente investigativas, como, por exemplo, Algoritmos Genéticos (AG), Programação Sequencial

Quadrática (SQP), Recozimento Simulado (SA), entre outros. A seguir serão discutidos alguns trabalhos encontrados na literatura.

Lin et al., 1983, desenvolveram um algoritmo para programar o intervalo de tempo entre cada par de nós adjacentes, de maneira que o tempo total do percurso seja minimizado. Este método foi aplicado em um robô Industrial PUMA 560 com 6 GDL. O método de otimização foi aplicado utilizando o algoritmo Poliedro Flexível (PF), cuja função objetivo utilizada consiste na minimização do tempo, utilizando *splines* cúbicas na interpolação dos pontos da trajetória e considerando as restrições cinemáticas.

Wang e Horng, 1990, utilizaram funções *b-splines* de 3º grau no planejamento de trajetória de um robô industrial PUMA 560 com 6 GDL. O método de otimização proposto, que utiliza o algoritmo Poliedro Flexível (PF), consiste na minimização do tempo da trajetória (função objetivo), onde as restrições cinemáticas são consideradas.

Em Cao et al., 1994, foi proposta uma nova estratégia para o planejamento de trajetória de um robô SCARA RTX com 6 GDL. Neste trabalho, foram utilizadas *splines* cúbicas para a interpolação dos pontos intermediários (nós) da trajetória, e o método de otimização proposto consiste na aplicação do método de *Davidon-Fletcher-Powell* (DFP), visando a encontrar os intervalos de tempo entre os nós para obter uma trajetória suave com tempo ótimo. Desta forma, a função objetivo utilizada pelos autores relaciona a suavidade da aceleração das juntas com o intervalo de tempo entre os nós da trajetória. Cumpre registrar que foram consideradas somente as restrições cinemáticas.

Saramago e Steffen Jr., 1998, apresentam uma solução para o problema de movimentação de robôs manipuladores, onde são analisadas as trajetórias em um robô com 3 GDL e um robô Stanford com 6 GDL, aplicando *splines* cúbicas na interpolação dos pontos da trajetória. Com relação à otimização, a função multi-objetivo proposta pelos autores consiste na minimização do tempo e energia mecânica dos atuadores, onde os resultados dependem dos fatores de peso associados a esta função. As restrições cinemáticas e dinâmicas foram consideradas.

Piazzini e Visioli, 2000, aplicam a estratégia de otimização *minimax* no planejamento de trajetória, visando a encontrar o mínimo *jerk* global no espaço de juntas de um robô manipulador com 6 GDL. Nessa pesquisa, aplicam-se *splines* cúbicas na formulação do problema de otimização, enquanto que a função objetivo proposta consiste na minimização do

valor máximo do *jerk*, sob as restrições de tempo entre os pontos adjacentes da trajetória (tempo total).

Lo Bianco e Piazzi, 2002, apresentam uma abordagem de otimização global para o problema de planejamento de trajetória de manipuladores. Nesse trabalho foram analisadas as trajetórias de um robô com 2 GDL e um robô PUMA 560 com 6 GDL. O problema de otimização proposto consiste na implementação do algoritmo Genético Híbrido (HIG) através da formulação de *splines* cúbicas. A função objetivo proposta consiste na minimização do tempo sob restrições dinâmicas e sua primeira derivada ao longo do tempo.

Chettibi, 2004, aborda o problema de planejamento de trajetória aplicando o algoritmo SQP. Essa pesquisa é aplicada a um robô industrial PUMA 560 com 6 GDL, e o problema de otimização por meio de *splines* cúbicas é formulado da seguinte maneira: a função objetivo é proposta de forma a minimizar o tempo do movimento, os esforços de junta e a potência. Neste trabalho foram consideradas as restrições cinemáticas e dinâmicas. É importante ressaltar que o autor apresenta uma estratégia que abrange o problema de planejamento do movimento com obstáculos.

Gasparetto e Zanotto, 2007, propõem um método para o planejamento de trajetória suave de robôs manipuladores, onde o método de otimização, que utiliza o algoritmo SQP, é aplicado em um robô com 6 GDL. A formulação do problema é apresentada com *b-splines* de 5° grau, sendo a função objetivo composta por dois termos: um, proporcional ao tempo total de execução, e outro, proporcional à integral do quadrado do *jerk* ao longo da trajetória. Restrições cinemáticas foram consideradas. Em Gasparetto e Zanotto, 2008, os autores estudaram o planejamento de trajetória considerando as mesmas características apresentadas anteriormente. O problema de otimização, porém, foi formulado utilizando-se *splines* cúbicas.

Xu et al., 2009, abordaram o planejamento de trajetória de um robô Stanford com 6 GDL considerando o tempo mínimo e os critérios de mínima energia através do algoritmo de otimização *Environment-Gene Evolutionary Immune Clonal* (EGICA). Nessa pesquisa, os autores formularam o problema de otimização através de *splines* cúbicas, e a função objetivo consiste na relação entre o tempo percorrido e a energia mecânica dos atuadores. Restrições cinemáticas e dinâmicas foram consideradas.

Tangpattanukul e Artrit, 2009, propõem o planejamento de trajetória aplicando o algoritmo HS para resolver o problema de otimização. Essa pesquisa foi aplicada a um robô

manipulador com 6 GDL e a solução foi implementada utilizando-se *splines* cúbicas. A função objetivo adotada consiste na minimização do tempo com restrições cinemáticas aplicadas.

Gasparetto e Zanotto, 2010, apresentam uma análise dos resultados de um algoritmo para planejamento de uma trajetória ótima para um robô cartesiano com pulso esférico com 6 GDL, aplicando *splines* cúbicas e *b-splines* de 5º grau na formulação do problema de otimização. O algoritmo utilizado foi o SQP e a função objetivo é composta por dois termos: um primeiro termo, proporcional ao tempo total de execução; e outro, proporcional à integral do quadrado do *jerk*. As restrições cinemáticas foram consideradas.

Abu-Dakka, 2011a, aplicou AG com populações paralelas para a obtenção de uma trajetória com tempo mínimo de um robô industrial PUMA 560 com 6 GDL, apresentando duas formulações utilizando *splines* cúbicas. A função objetivo do problema consiste na minimização do tempo, e as restrições cinemáticas e dinâmicas, assim como os efeitos de potência e energia, foram considerados.

Lin e Liu, 2011, propõem uma nova abordagem baseada na otimização por PSO com agrupamento *k-means* no planejamento de trajetória de um robô manipulador com 6 GDL. O problema de otimização é formulado através de *splines* cúbicas. São consideradas duas funções objetivos: uma primeira, visando a minimizar o valor máximo do *jerk* e outra, com o objetivo de minimizar a soma da integral do quadro do *jerk*. Ambas as funções são aplicadas no espaço de juntas e as restrições utilizadas consistem no intervalo de tempo necessário para a trajetória (tempo total).

Yang et al., 2013, abordam o planejamento de uma trajetória considerando o tempo e *jerk* ótimo. O método é testado em um robô de inspeção EAST Tokamak (10 GDL), através de formulação de *splines* cúbicas aplicadas ao problema de otimização. A função objetivo final é composta de duas restrições: tempo de execução e suavidade, a qual é expressa como associada à integral do quadrado do *jerk*. O algoritmo utilizado foi o algoritmo SQP e as restrições cinemáticas foram consideradas.

Meligy et al., 2013, apresentam um método para determinar o tempo ótimo no planejamento de trajetórias de robôs manipuladores. Nessa pesquisa, os autores aplicaram o método para os três primeiros GDL de um robô CRS *Catalyst-5T* com 5 GDL. Quanto ao problema de otimização, é aplicado o algoritmo SQP. O problema foi formulado aplicando-se *b-splines* de 4º, 5º e 6º grau. A função objetivo do problema consiste na minimização do tempo percorrido.

3 PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS LIVRE DE COLISÃO

O planejamento de trajetória livre de colisão com a utilização de algoritmos estocásticos de otimização é um tema de pesquisa que já foi tratado por diferentes autores, com diversas técnicas de implementação associados a diferentes tipos de algoritmos de controle de manipuladores.

Para o fundamentação deste trabalho, são considerados alguns aspectos julgados relevantes com relação ao estado da arte sobre o assunto, ou seja, particularidades que caracterizam o planejamento de trajetória livre de colisão com a utilização de algoritmos estocásticos de otimização, tais como: **(i)** objetivos da pesquisa realizada; **(ii)** características do robô; **(iii)** tipo de planejamento: de caminho, de trajetória, ou de caminho e de trajetória; **(iv)** técnicas para a prevenção de obstáculo; **(v)** estratégia de interpolação dos pontos da trajetória no espaço de juntas (ponto-a-ponto ou multiponto); **(vi)** tipo de algoritmo utilizado na otimização; **(vii)** parâmetro otimizado (função objetivo); e **(viii)** as restrições utilizadas no problema de otimização.

Com relação às características do robô, considera-se que as mesmas consistem basicamente dos parâmetros necessários para a definição de sua estrutura cinemática, ou seja, da configuração de suas juntas e dos GDL que constituem o manipulador, além da representação do tipo de volume de trabalho analisado (bidimensional ou tridimensional).

Na bibliografia pesquisada, que consiste de artigos e trabalhos acadêmicos sobre o assunto, observou-se que seus autores abordam diferentes tipos de planejamento. Ora estudam planejamento apenas do caminho, ora abordam apenas o planejamento de trajetória, ou ainda tratam de ambos, ou seja, do planejamento do caminho e da trajetória, como será mostrado a seguir.

Em um trabalho que propõe analisar o planejamento de trajetória livre de colisão, é necessário que se abordem as técnicas utilizadas para planejar o caminho, de forma a propor soluções de comportamento para que o robô evite colidir com um obstáculo no seu volume de trabalho. Dentre tais técnicas, as mais conhecidas são de *roadmap*, campos potenciais repulsivos (*potential fields*) e decomposição de células, entre outras.

A estratégia de interpolação dos pontos da trajetória no espaço de juntas consiste no estudo da função que interpola os pontos intermediários da trajetória. O tipo de função, um polinômio ou uma *spline*, por exemplo, utilizado para interpolar os pontos influencia nas características da trajetória realizada pelo robô (tais como, velocidade, aceleração, *jerk*) e os

efeitos dinâmicos no robô (esforços, energia e potência). Além disso, outro aspecto importante a ser avaliado é o grau da função polinomial de interpolação, uma vez que este influencia na suavidade e na continuidade do movimento (com respeito as suas derivadas).

Como apresentado na revisão bibliográfica, existem várias abordagens para o problema de otimização. Como o presente trabalho trata de uma aplicação de um algoritmo estocástico de otimização, é importante destacar que diversos tipos de algoritmos são aplicados para a otimização de variados problemas de engenharia, como: AG, PSO, FMA, entre outros. Além desses algoritmos, há, ainda, os algoritmos híbridos, que consistem em algoritmos que aplicam técnicas determinísticas e estocásticas de otimização.

Outra característica a ser observada é a identificação da variável de projeto a ser otimizada, isto é, o parâmetro utilizado na avaliação da função objetivo. Por exemplo, se forem consideradas as coordenadas das juntas como variável de projeto (otimização), uma possível função objetivo pode ser a minimização do movimento das juntas no planejamento do caminho e/ou trajetória, o tempo e a energia, entre outras possibilidades.

Outro aspecto a ser considerado consiste nas restrições aplicadas ao problema de otimização de trajetórias. Em aplicações robóticas, uma das características mais importantes no planejamento de trajetórias é a de realizar um movimento entre um ponto inicial e um final no menor tempo possível, com menor consumo de energia e maior precisão de movimento [Gasparetto e Zanotto, 2007]. Desta forma, é importante avaliar no espaço de juntas do robô as restrições aplicadas à trajetória, visto que, se mal definidas ou dimensionadas, podem influenciar significativamente o desempenho dos manipuladores. Por exemplo, uma trajetória planejada com valores excessivos de *jerk* pode acarretar em dificuldades no movimento de um robô, tais como: a imprecisão dos movimentos do efetuator na manipulação de peças e ocorrência de esforços excessivos nas juntas e na estrutura do robô. Dentre as restrições aplicadas ao planejamento de trajetórias ótimas, são analisadas as restrições cinemáticas (velocidade, aceleração e *jerk*) e dinâmica (torque).

Como síntese de importantes trabalhos que abordam o assunto sob diferentes óticas que tratam do planejamento de caminho, ou da trajetória livre de colisão, ou de ambos, usando algoritmos estocásticos de otimização, apresenta-se as Tabelas 3.1 e 3.2, as quais permitem realizar uma comparação entre os trabalhos e as respectivas técnicas aplicadas.

Tabela 3.1 - Trabalhos que tratam do planejamento de caminho, de trajetória livre, ou de ambos, usando algoritmo metaheurístico (1994 a 2011).

	Autor, ano	(i) Objetivo da pesquisa	(ii) Caract. do robô	(iii) Planej. Realizado	(iv) Téc. para prevenção de obstáculo	(v) Estratégia para interpolação dos pontos da traj. no esp. de juntas	(vi) Algoritmo usado na otimização	(vii) Parâmetro otimizado (Função Objetivo)	(viii) Restrições utilizadas no problema de otimização
1994 a 2011	Baba e Kubota, 1994	Planejar um caminho livre de colisão considerando obstáculos móveis em um ambiente bidimensional.	Robôs manipuladores (plano cartesiano)	Caminho.	Foram geradas $N \times N$ células no volume de trabalho do robô, que foram atribuídas ao valor de um pseudo-potencial para avaliar a proximidade com os obstáculos.	—	AG	Minimização da distância entre os pontos e o valor de um pseudo-potencial que está associado com a proximidade dos obstáculos no espaço de trabalho.	—
	Saramago, 2002	Calcular a trajetória ótima de um manipulador, considerando a presença dos obstáculos no espaço de trabalho do robô.	Robô - 3 GDL (bidimensional)	Trajetória.	Foram estabelecidas formulações matemáticas para identificar as colisões.	Foram utilizadas <i>b-splines</i> cúbicas uniformes nas juntas.	AG	Otimização da potência mecânica envolvida para mover o manipulador.	Foram consideradas as restrições de velocidade, aceleração e <i>jerk</i> (cinemáticas) e torque (dinâmicas)
	Monteiro, 2003	Apresentar soluções para planejamento de trajetória, para controle de posição e para seleção de controladores de posição envolvidos em robótica.	Robô Jeca II - 5 GDL (plano cartesiano)	Caminho e trajetória.	Foram realizadas formulações matemáticas através da resolução de um sistema de equações lineares entre todos os segmentos de reta e o círculo (o obstáculo) no plano bidimensional.	Consiste na otimização realizada em duas etapas: 1) posicionamento da ferramenta terminal no ponto inicial da trajetória; e 2) rastreamento da trajetória.	AG	Minimização da distância entre o ponto inicial e final do caminho percorrido pelo efetuador. E, para posicionar a ferramenta no ponto inicial da trajetória, minimizou-se o erro entre os elementos da matriz gerada pelo AG e os elementos da matriz desejada.	—
	Tian e Collins, 2004	Propor um novo método de planejamento de trajetória utilizando os AG, considerando vários obstáculos em um ambiente bidimensional.	Robô industrial - 2 GDL (bidimensional)	Caminho e trajetória.	Foram realizadas formulações matemáticas em função dos elos do robô para definir a região de colisão com os obstáculos.	—	AG	Minimização da soma do ângulo das juntas do robô do ponto inicial ao ponto final. (caminho)	—
	Çakir et al., 2006	Apresentar um novo método de planejamento de trajetória valendo-se de AG utilizando álgebra <i>quaterniana</i> para robôs em ambientes tridimensionais.	Robô - 6 GDL (tridimensional)	Caminho.	Os obstáculos foram expressos por funções potenciais repulsivas.	—	AG	Otimização do campo potencial final ou mapa de <i>fitness</i> .	—
	Ata e Myo, 2006	Projetar uma trajetória livre de colisão para um manipulador planar redundante.	Robô - 3 GDL (bidimensional)	Trajetória.	As características do obstáculo e a informação do ambiente foram previamente informados.	—	GPS	Minimização do erro entre a posição desejada e a posição gerada do efetuador e o movimento dos atuadores, considerando o deslocamento das juntas entre sucessivos pontos.	—
	Chong et al., 2009	Discutir o uso de ambiente de realidade aumentada (AR) para facilitar a programação intuitiva de robôs e também apresentar uma nova metodologia para o planejamento de trajetória livres de colisão para um manipulador.	Robô industrial PUMA 560 - 6 GDL. (O método pode ser aplicado para robôs com n GDL) (tridimensional)	Caminho.	Foi gerado um volume livre de colisão (CFV), representado por um conjunto virtual de esferas.	—	<i>Heuristic Beam</i>	Minimização, considerando o efeito gravitacional, da média do torque (junta rotacional) ou força (junta prismática) entre o ponto n e $n-1$, levando em conta as perturbações: angular (distância em radianos) e linear (distância em metros).	—
	Sengupta et al., 2011	Propor um método de eficiência energética para o planejamento de um braço robótico considerando o desvio de obstáculos.	Robô - 3 GDL (tridimensional)	Caminho e trajetória.	Os obstáculos são mapeados através do volume de uma esfera, de maneira que é estabelecida uma distância entre o robô e o obstáculo.	Interpolou-se um polinômio de 3º grau no espaço de juntas, onde uma das restrições foi relacionada com a mínima energia mecânica do robô.	IWO	Minimização do movimento das juntas, utilizando penalizações na função objetivo em caso de colisão. (caminho).	—
	Xi et al., 2011	Aplicar AGs para o problema de caminho livre de colisão.	Robô - 5GDL (bidimensional)	Caminho.	O obstáculo foi simplificado pelo volume de um círculo, que através formulações matemáticas em função dos elos dos robôs define a região livre de colisão.	—	AG	Minimização do movimento das juntas entre o ponto inicial e final.	—

Tabela 3.2 - Trabalhos que tratam do planejamento de caminho, de trajetória livre, ou de ambos, usando algoritmo metaheurístico (2012 a 2015).

2012 a 2015	Autor, ano	(i) Objetivo da pesquisa	(ii) Caract. do robô	(iii) Planej. realizado	(iv) Téc. para prevenção de obstáculo	(v) Estratégia para interpolação dos pontos da traj. no esp. de juntas	(vi) Algoritmo usado na otimização	(vii) Parâmetro otimizado (Função Objetivo)	(viii) Restrições utilizadas no problema de otimização
	Abardeh e Akbarzadeh, 2012	Definir a relação entre as dimensões do obstáculo e os parâmetros necessários para o planejamento da trajetória de juntas, que permitem que o robô chegue ao seu destino na presença de um obstáculo.	Robô - 2 GDL (bidimensional)	Caminho e trajetória.	Foram realizadas formulações matemáticas em função dos elos dos robôs, relacionadas no plano bidimensional para definir os obstáculos, penalizando a função objetivo em caso de colisão.	Foi considerada uma função sinusoidal na interpolação das juntas.	PSO	Minimização do erro entre a posição obtida pelo algoritmo e a posição desejada, representada por um polinômio de 4º grau.	—
	Chyan e Ponnambalam 2012	Avaliar o comportamento de 4 variantes do algoritmo PSO no planejamento do caminho livre de colisão.	Robô redundante - 5GDL (bidimensional)	Caminho.	As características do obstáculo e as informações sobre o ambiente devem ser previamente conhecidas.	—	PSO-W PSO-C q-PSO q-PSOC	Minimização da distância entre o efetuador e o ponto alvo.	—
	Severin e Rossmann, 2012	Apresentar um método para automatizar a otimização de movimentos ponto-a-ponto do tipo <i>blended</i> para robôs industriais e comparar a performance de 3 algoritmos metaheurísticos.	Robôs industriais (tridimensional)	Caminho e trajetória.	Os obstáculos são identificados em ambientes de simulação virtual.	—	FMA HS PSO	Avaliação do mínimo tempo necessário em função do movimento global das juntas.	—
	Abu-Dakka, 2013	Aplicar um método indireto para o planejamento de trajetória de robôs industriais usando um algoritmo evolucionário (populações paralelas).	Robô PUMA 560 - 5 GDL. (tridimensional)	Caminho e trajetória.	O volume de trabalho do robô foi modelado como um prisma retangular entre a posição inicial e final do robô. Neste prisma, foi considerada uma malha de pontos para prevenir a existência de obstáculos entre dois pontos adjacentes.	Foram interpoladas <i>splines</i> cúbicas no espaço de juntas do robô.	AG	A otimização é composta em diferentes etapas: 1) consiste no planejamento do caminho através da minimização da distância percorrida do efetuador no seu volume de trabalho; 2) consiste em minimizar o tempo para percorrer os pontos gerados sob restrições cinemáticas, dinâmicas e carregamento.	Foram consideradas as restrições de velocidade, aceleração e <i>jerk</i> (cinemáticas) e torque (dinâmicas).
	Machmudah <i>et. al.</i> , 2013	Abordar o planejamento de movimento do braço do robô com obstáculos de geometria complexa.	Robô - 3 GDL. (bidimensional)	Caminho e trajetória.	Utiliza-se uma regra de detecção de colisão, que relaciona a posição dos elos em relação às áreas dos obstáculos. Os tamanhos dos elos são definidos de acordo com a cinemática direta do robô.	Foi aplicado um polinômio de 6º grau nas juntas.	AG e PSO	A otimização é composta por duas etapas: 1) minimização da distância percorrida do ângulo de junta sob regras de detecção de colisão como restrição. 2) minimização do tempo total do percurso e o torque sob a velocidade máxima, a aceleração máxima, o <i>jerk</i> máximo, e as limitações de torque máximo.	Foram consideradas as restrições de velocidade, aceleração e <i>jerk</i> (cinemáticas) e torque (dinâmicas)
	Menasri <i>et. al.</i> , 2015	Propor uma nova abordagem para manipuladores redundantes na presença de diversos obstáculos.	Robô <i>neuromatic</i> (tridimensional)	Caminho.	Os obstáculos, independente de sua característica geométrica, são modelados através de esferas (3D) ou círculos (2D). Para evitar colisão com obstáculo, este trabalho apresenta formulações matemáticas em função dos elos do robô.	—	Bi-genético	Como trata-se de uma abordagem baseada em um problema de otimização em dois níveis, a formulação deste problema é representada em duas etapas. O primeiro nível consiste em encontrar a posição no espaço cartesiano que seja mais próxima da posição final, mantendo o robô longe dos obstáculos, enquanto que o segundo nível objetiva corrigir a solução obtida no primeiro nível de otimização por meio da análise de redundância do manipulador.	—

Como apresentado nas Tabelas 3.1 e 3.2, há vários objetivos e abordagens para o desenvolvimento de pesquisas que tratam do planejamento de trajetória livre de colisão com aplicação de algoritmos estocásticos de otimização. Esses objetivos acabam por direcionar as escolhas que os autores fazem em relação aos diversos aspectos que podem ser considerados.

Baba e Kubota, 1994, adotam AG no plano cartesiano para o planejamento de um caminho do efetuador livre de colisão contra obstáculos móveis. De acordo com os autores, o planejamento pode ser utilizado em qualquer tipo de robô. Como técnica para a prevenção de obstáculos, os autores geraram células de mesmo tamanho nas direções ortogonais do plano base do volume de trabalho do robô manipulador, atribuindo um valor de um pseudo-potencial para avaliar a proximidade de um dado ponto com os obstáculos. A otimização apresentada nesse trabalho consiste em minimizar a distância entre os pontos gerados e o valor do pseudo-potencial que está associado à proximidade dos obstáculos no espaço de trabalho do robô. Uma simulação computacional para um problema de caminho livre de colisão considerando dois robôs manipuladores confirma a efetividade da abordagem. No entanto, nesse trabalho, os autores se concentraram apenas em avaliar o caminho realizado pelo efetuador do robô, não tratando da colisão entre os elos do robô e os obstáculos.

Saramago, 2002, utiliza AG para calcular a trajetória ótima de uma manipulador planar com 3 GDL, considerando a presença de obstáculos no espaço de trabalho. A autora considera os obstáculos como paredes obstruindo apenas o movimento da última junta. Neste caso, foram estabelecidas formulações matemáticas para identificar as colisões, tendo sido o estudo de planejamento de trajetórias formulado como um problema de controle ótimo, ou seja, utilizando como função objetivo a potência mecânica necessária para mover o manipulador considerando restrições cinemáticas e dinâmicas.

Monteiro, 2003, apresenta contribuições para soluções de algumas das categorias dos problemas envolvidos na robótica (planejamento de trajetória, controle de posição e seleção de controladores de posição). Especificamente em relação ao planejamento de trajetória, a metodologia utilizada para a resolução dos problemas trata de técnicas de inteligência artificial que utilizam os AG. No trabalho é utilizado um robô JECA 2 que possui 5 GDL. Para detectar os

obstáculos, foram realizadas formulações matemáticas através da resolução de um sistema de equações lineares entre todos os segmentos de retas e um círculo (obstáculo) no plano cartesiano analisado na pesquisa. Para planejar a trajetória do efetuador deste robô foram considerados três estágios. O primeiro consiste no planejamento de trajetórias com desvios de obstáculos (plano cartesiano), através da geração de pontos que garantam um caminho livre de colisão, a fim de minimizar a distância entre o ponto inicial e o final. O segundo estágio consiste no planejamento da trajetória no espaço de juntas. Neste caso, para posicionar a ferramenta no ponto inicial da trajetória, minimiza-se o erro entre os elementos da matriz gerada pelo AG e os elementos da matriz desejada, os quais estão relacionados com os ângulos de cada junta do robô. No terceiro estágio, que inicia com a ferramenta já posicionada no ponto inicial da trajetória, as mesmas operações do AG podem ser aplicadas considerando o incremento ou decremento de ângulo para a posição a ser rastreada na trajetória. Apesar de apresentar um planejamento e controle de trajetória específico para o robô em estudo, não são observadas técnicas de planejamento de trajetória considerando as restrições cinemáticas e dinâmicas desse robô.

Tian e Collins, 2004, propõem um novo método de planejamento de trajetória, utilizando os AG e considerando vários obstáculos em um ambiente bidimensional. Neste trabalho, o caminho é planejado através da geração dos pontos intermediários da trajetória (nós); e a trajetória, considerada por meio da interpolação desses pontos através de uma função cúbica hermitiana. A interpolação cúbica hermitiana foi realizada no espaço do efetuador, analisando-se somente a continuidade e a suavidade no mesmo. A técnica para prevenção de obstáculos empregada pelos autores consiste em formulações matemáticas que relacionam os elos do robô com a geometria do obstáculo. A otimização fundamenta-se na minimização da soma do ângulo das juntas do robô entre o ponto inicial e o final. Apesar de aplicar uma interpolação cúbica hermitiana para planejar a trajetória no efetuador do robô, neste trabalho não foi apresentada uma análise em relação aos efeitos cinemáticos e dinâmicos nas juntas do robô para esse tipo de trajetória.

Valendo-se de AG e de álgebra quarteniana, Çakir et al., 2006, propõem otimizar o caminho através de um novo método de planejamento para robôs com 6 GDL operando em um ambiente tridimensional, visando a alcançar a menor distância predeterminada. Resultados de

simulação colocam em evidência o emprego de um algoritmo que prevê a colisão com obstáculos pelo cálculo do potencial repulsivo exercido nos elos, baseado na menor distância para o alvo. Para evitar a colisão do robô com os obstáculos, geram-se funções potenciais repulsivas com o intuito de formar um campo potencial repulsivo para os obstáculos no caminho, sendo o ponto final expresso por uma função potencial atrativa. O parâmetro otimizado é o campo potencial final ou mapa de ajuste. Embora, do ponto de vista da relação entre o obstáculo e o caminho, a análise apresentada seja promissora, o trabalho não trata da interpolação dos pontos na trajetória no espaço de juntas e não analisa os efeitos cinemáticos e dinâmicos nas juntas do robô.

Ata e Myo, 2006, apresentam um algoritmo do tipo Pesquisa de Padrões Generalizados (GPS), em inglês *Generalized Pattern Search*, algoritmo híbrido que combina algoritmos genéticos e a busca padronizada (*Pattern Search*), para planejar uma trajetória livre de colisão para um robô planar redundante com 3 GDL no plano bidimensional. O objetivo principal é buscar os ângulos de juntas otimizados para que o efetuador possa atingir o alvo sem colisão com obstáculos. O parâmetro otimizado é o erro entre a posição desejada e a posição gerada pelo efetuador e o movimento das juntas entre sucessivos pontos. A estratégia empregada consiste em, inicialmente, definir um conjunto de pontos entre o início e fim da trajetória desejada, o qual é interpolado verificando se os pontos se encontram dentro dos obstáculos. Caso positivo, são selecionados pontos fora do obstáculos, e, caso negativo, é aplicado o algoritmo de otimização GPS para fazer o procedimento de busca. Com esta técnica foram geradas trajetórias suaves e contínuas através de uma interpolação por *spline* cúbica (realizada no espaço cartesiano), não sendo, porém, considerados os efeitos cinemáticos (de aceleração e *jerk*) e dinâmicos nas juntas do robô.

Chong et al., 2009, focam o uso de ambientes de realidade aumentada (AR) para facilitar a programação intuitiva de robôs e também apresentam uma nova metodologia para o planejamento de caminhos livres de colisão para um robô Industrial PUMA 560 de 6 GDL. O algoritmo heurístico *beam* é aplicado como método de busca para encontrar o melhor caminho. O parâmetro otimizado consiste na multiplicação do torque com a magnitude das perturbações. Para juntas rotativas, a perturbação é angular, definida em radianos. Para juntas lineares, a perturbação é a distância percorrida. Apesar de ser considerado o torque, essa abordagem não leva em conta as

velocidades e acelerações necessárias para a realização dos movimentos desejados, não sendo, portanto, consideradas as restrições cinemáticas e dinâmicas no planejamento da trajetória.

Sengupta et al., 2011, propõem um método de eficiência energética para o planejamento de trajetória de um braço robótico com 3 GDL no plano tridimensional, considerando desvios de obstáculos. O algoritmo de Otimização Invasiva de Ervas Daninhas (IWO) é aplicado para determinar os nós da trajetória. Como técnica de prevenção, são mapeados os obstáculos através do volume de uma esfera, de maneira que é predefinida uma distância entre o centro da esfera e o obstáculo por meio de relações matemáticas. Para determinar os pontos intermediários do caminho, o parâmetro otimizado consiste na minimização do movimento das juntas, utilizando penalizações na função objetivo em caso de colisão. Através dessa metodologia, obtém-se uma trajetória interpolada por polinômios de 3º grau no espaço de juntas, considerando a mínima energia mecânica do robô. Ainda que se apresente uma análise para o espaço de juntas, não é considerado neste trabalho o comportamento da trajetória em suas derivadas (velocidade, aceleração e *jerk*).

Xi et al., 2011, aplicam AG no problema de desvios de obstáculos. O estudo é apresentado para um robô com 5 GDL, simplificando sua estrutura cinemática para um mecanismo planar de 3 barras. Os obstáculos são posicionados dentro da geometria de um círculo, de forma que, através de formulações matemáticas feitas em função dos elos do robô, definem-se as regiões livres de colisão. O parâmetro otimizado é a minimização do movimento das juntas entre o ponto inicial e o ponto final. Neste caso, como não foi considerado o planejamento da trajetória, também não foram estudados os efeitos cinemáticos nas juntas do robô.

Abardeh e Akbarzadeh, 2012, propõem estabelecer uma relação entre as dimensões do obstáculo e as variáveis utilizadas na trajetória no espaço de juntas que permitem a um robô com 2 GDL, operando no plano bidimensional, atingir seu destino na presença de um obstáculo. O método metaheurístico utilizado é o PSO. Definem-se formulações matemáticas em função dos elos dos robôs relacionadas no plano bidimensional para identificar os obstáculos, penalizando a função objetivo em caso de colisão. A variável otimizada consiste nos parâmetros da função sinusoidal proposta em função da minimização do erro entre a posição obtida pelo algoritmo e a

posição ideal, representada por um polinômio de 4º grau. É estabelecida uma relação entre as variáveis otimizadas pelo algoritmo PSO e as dimensões do obstáculo, ou seja, a largura e o comprimento, através da técnica de projeto de experimentos (DOE). Não são também considerados na análise os efeitos cinemáticos e dinâmicos como restrições aplicadas às juntas do robô.

Chyan e Ponnambalam, 2012, avaliaram o comportamento de quatro variantes do algoritmo PSO no planejamento de caminho livre de colisão. O estudo é aplicado a um robô planar com 5 GDL. O parâmetro otimizado é a minimização do erro de posição entre o efetuador e o ponto final, objetivando-se satisfazer as restrições de um posicionamento livre de colisão para os robôs manipuladores. Os autores consideram que as características do obstáculo e a informação sobre o ambiente devem ser previamente conhecidas. O trabalho, apesar de apresentar uma discussão sobre as variantes do algoritmo PSO utilizadas, não trata do estudo de planejamento de trajetórias nas juntas do robô (ou seja, o planejamento apresentado é apenas o do caminho).

Severin e Rossmann, 2012, apresentam um método para automatizar a otimização do movimento ponto-a-ponto tipo *blended*, ou seja, um movimento que força um robô industrial a deixar o caminho que está sendo percorrido, a fim de reduzir o tempo total do movimento, comparando com o desempenho de três algoritmos metaheurísticos (FMA, PSO e HS). O parâmetro otimizado consiste na minimização do tempo necessário em função do movimento global das juntas. O método de otimização é testado em diferentes cenários, com diversos tipos de robôs industriais, e considerando diversas tarefas, tais como: *pick-and-place*, paletização e transferência de máquina para máquina. Os resultados mostram que os algoritmos analisados garantem o movimento ponto-a-ponto tipo *blended* na execução dessas tarefas. Entretanto, como o estudo é realizado em ambientes de simulação virtual considerando robôs industriais comerciais, não é apresentada uma análise dos efeitos cinemáticos nas juntas dos robôs estudados.

Machmudah et al., 2013, apresentam um método de planejamento de movimento de um braço de um robô planar com 3 GDL, considerando obstáculos com geometrias complexas. Os métodos metaheurísticos utilizados são o AG e o PSO. Neste estudo, foram observados o caminho e a trajetória, contemplando duas etapas de otimização. A primeira delas consiste em minimizar o deslocamento do ângulo de junta, considerando restrições em casos de detecção de obstáculo. Na

segunda etapa procura-se determinar o tempo necessário para percorrer esse caminho com o objetivo de minimizar o tempo total e o torque, sob restrições cinemáticas, além das limitações máximas de torque. Essa é uma pesquisa importante no contexto do presente trabalho, pois aborda o planejamento de um caminho livre de colisão, considerando restrições cinemáticas e dinâmicas aplicadas ao robô em estudo por meio de polinômio de 6º grau.

Abu-Dakka et al., 2013, apresentam um método indireto para o planejamento de trajetória de robôs industriais utilizando algoritmos evolutivos. O algoritmo utilizado é estruturado em três etapas: a primeira consiste na aquisição das configurações adjacentes para o planejamento do caminho sujeito às restrições cinemáticas, geométricas e de colisões; a segunda, na aquisição de um caminho livre de colisão entre o ponto inicial e o final; e, por fim, na terceira realiza-se uma avaliação de tempo nas coordenadas das juntas através da minimização do tempo necessário para a execução da trajetória. A pesquisa é realizada com estudo de caso de aplicação a um robô PUMA 560 com 5 GDL. Para o planejamento do caminho, utilizaram-se AG com populações paralelas, a fim de minimizar a soma da distância entre cada par de pontos adjacentes. Com relação ao planejamento da trajetória, utiliza-se AG com populações paralelas, procurando obter o tempo mínimo para percorrer os pontos gerados no caminho, através de *splines* cúbicas com restrições de velocidade, aceleração, *jerk*, potência, torque e energia.

Menasri et al., 2015, propõem uma nova abordagem para manipuladores redundantes na presença de diversos obstáculos. O método proposto é baseado em problema de otimização em dois níveis, sendo algoritmos bi-genéticos utilizados na pesquisa. O método de colisão é apresentado para um robô *neuromatic*. Mesmo considerando que os autores utilizam o termo ‘planejamento de trajetória’, na verdade, eles analisaram o planejamento do caminho, pois não é apresentada abordagem temporal no estudo. Os obstáculos, independentemente de suas características geométricas, são modelados através de esferas (3D) ou círculos (2D). Para evitar colisão com obstáculo, os autores apresentam formulações matemáticas em função dos elos do robô. Como trata de uma abordagem baseada em um problema de otimização em dois níveis, a formulação deste problema é representada em duas etapas. O primeiro nível consiste em encontrar a posição no espaço cartesiano que seja mais próxima da posição final, mantendo o robô longe dos

obstáculos. Nesta etapa, a função objetivo é definida por meio dos seguintes parâmetros: 1) relação do erro de posição entre a posição atual e a posição final do efetuador, 2) um termo utilizado para minimizar o erro entre os níveis de otimização para a mesma posição do efetuador; e, por fim, 3) um termo para manter o robô longe dos obstáculos. O segundo nível objetiva corrigir a solução obtida no primeiro nível de otimização por meio da análise de redundância do manipulador. Neste caso, a função objetivo relacionada à segunda etapa é expressa pelos seguintes parâmetros: 1) um termo para maximizar a capacidade de manipulação do robô através de relações com a matriz jacobiana dos robôs, e 2) uma expressão para minimizar o movimento das juntas. O trabalho não apresenta uma estratégia para a interpolação de pontos na trajetória, não avaliando restrições cinemáticas e dinâmicas.

Da análise dos trabalhos pesquisados, constata-se que há diversas abordagens que tratam do planejamento de trajetória ou de caminho livre de colisão. Alguns trabalhos abordam somente o planejamento do caminho [Baba e Kubota, 1994; Çakir et al., 2006; Chong et al., 2009; Xi et al., 2011], considerando o deslocamento do efetuador ou de suas juntas no domínio do espaço. Outros trabalhos apresentam planejamento de trajetórias livres de colisão sem definir previamente um caminho para realizar a trajetória [Saramago, 2002; Ata e Myo, 2006]; e ainda existem trabalhos que abordam o planejamento do caminho e da trajetória de forma independente [Monteiro, 2003; Tian e Collins, 2004; Sengupta et al., 2011; Abardeh e Akbarzadeh, 2012; Severin e Rossmann, 2012; Machmudah et al., 2013; Abu-Dakka et al., 2013]. Além disso, é importante mencionar que existem trabalhos que abordam o planejamento do caminho e da trajetória de forma simultânea [Saramago e Steffen Jr., 2000].

Com relação ao planejamento do caminho, a principal característica observada é que os pontos intermediários (entre o ponto inicial e o final) devem atender a restrições associadas aos obstáculos, ou seja, os pontos gerados devem garantir que o efetuador do robô e suas juntas não colidam com os obstáculos, além de atenderem as configurações cinemáticas do robô.

Quanto ao planejamento de trajetória livre de colisão, observa-se que existem diversos métodos para planejar trajetórias livres de colisão. Entre esses métodos, podem ser mencionados

os baseados em: funções polinomiais, *splines* cúbicas e *b-splines*, aplicados tanto no efetuador (na trajetória percorrida pelo efetuador) quanto nas juntas.

No caso das interpolações das juntas, objeto de estudo do presente trabalho, há também diversos métodos utilizados no planejamento de trajetória livre de colisão, como estudos de minimização de tempo [Machmudah et al., 2013; Abu-Dakka et al., 2013], estudos de minimização de energia mecânica [Sengupta et al., 2011] e minimização tempo-torque [Machmudah et al., 2013]. É importante ressaltar que, para todas as análises de planejamento de trajetórias comentadas, foram consideradas restrições para os problemas de otimização, sendo que, dentre elas, podem ser citadas as restrições cinemáticas, como velocidade, aceleração e *jerk* [Saramago, 2002; Machmudah et al., 2013], e as restrições dinâmicas, como torque e potência [Saramago, 2002; Abu-Dakka et al., 2013; Machmudah et al., 2013]. Destaca-se, também, que existem diversos trabalhos que aplicam algoritmos determinísticos de otimização que consideram as restrições cinemáticas e dinâmicas no planejamento de trajetória livre de colisão, como, por exemplo, Ozaki e Lin, 1996, Saramago e Steffen Jr., 1998, Saramago e Steffen Jr., 2000, Rubio et al., 2012, entre outros.

Quanto ao tipos de robôs, constata-se que muitas pesquisas utilizam robôs manipuladores com acionamento elétrico no planejamento de trajetórias [Saramago e Steffen Jr., 2000, Rubio et al., 2012, etc.], porém, não foram encontrados trabalhos que abordem esse tema para tratar de manipuladores acionados por atuadores hidráulicos ou pneumáticos. Os sistemas de acionamento pneumáticos caracterizam-se pelo baixo custo, pelos baixos níveis de poluição, pela boa relação peso/potência, pelo número reduzido de componentes [Perondi 2002; Sarmanho, 2014] e pela resiliência (propriedade física natural associada a estes sistemas) [Perondi 2002], o que os tornam atraentes para sua aplicação na robótica. Em aplicações industriais, não é comum a utilização de sistemas robotizados acionados pneumaticamente, assim como são escassas as referências bibliográficas que tratam de robôs desta natureza. Um robô humanoide, por exemplo, baseado no uso de músculos pneumáticos, foi apresentado por Todorov et. al., 2010. Em níveis industriais, são poucos os robôs de uso comercial com acionamento pneumático, como os comercializados pelas marcas Ningbo Super Control Automation Technology *apud* Sarmanho, 2014 e pela marca

Wittman® [Wittman, 2013], enquanto, como linha de pesquisa acadêmica, Sarmanho, 2014, desenvolveu o RPC, o robô pneumático em estudo. Ademais, existem pesquisas que discutem a viabilidade de se utilizar servoposicionadores pneumáticos na robótica industrial [Perondi, 2002; Sobczyk, 2009; Suzuki, 2010; Cukla, 2012, entre outros]. Nesse sentido, entende-se que existem aspectos relativos à dinâmica de robôs pneumáticos que podem ser explorados por meio de estudos de planejamento de trajetórias, a fim de que o desempenho dos controladores destes sistemas possam ser melhorados, como, por exemplo, a suavidade do movimento, a redução dos esforços do robô durante o acionamento das juntas (torque), o tempo, entre outros.

Quando se trata de um planejamento de trajetória livre de colisão, além de se procurar evitar o obstáculo, é importante também avaliar o comportamento do robô ao longo da trajetória. Por exemplo, se uma trajetória for realizada em um curto período de tempo, pode-se ter como consequência altos valores de velocidade, aceleração, *jerk* e torque, os quais podem tornar o movimento impreciso, além de sobrecarregar as juntas do robô. Nesse sentido, embora existam diversos trabalhos que, independentemente do tipo de algoritmo de otimização (determinísticos ou heurísticos), abordem o problema de planejamento de trajetória livre de colisão considerando restrições cinemáticas e dinâmicas, na literatura, ainda não foi encontrada uma abordagem que trate do planejamento de trajetórias ótimas na presença de obstáculos levando em conta os aspectos de cinemática e dinâmica de robôs cilíndricos pneumáticos.

Com base nas características levantadas em cada um dos estudos aqui discutidos e nas particularidades do manipulador em estudo, os seguintes aspectos passam a ser considerados no presente trabalho:

(i) objetiva-se apresentar um planejamento de caminho e de trajetória livre de colisão para um robô pneumático com 5 GDL, considerando restrições como obstáculos presentes no volume de trabalho e as restrições cinemáticas e dinâmicas associadas a este robô em função das características dos atuadores pneumáticos;

(ii) o robô a ser estudado é o RPC, construído em ambiente acadêmico, e objeto de estudo no Laboratório de Mecatrônica e Controle (LAMECC) da UFRGS; tratando-se de um robô pneumático cilíndrico;

(iii) o movimento do robô na presença de obstáculos será analisado em duas etapas:

ETAPA 1: consiste no planejamento do caminho, de tal forma que serão gerados pontos no volume de trabalho do robô para evitar a ocorrência de colisão. Os pontos gerados serão obtidos através de um método de otimização que gera esses pontos em função da menor distância entre os pontos inicial e final definidos pelo usuário. Outra característica relacionada a estes pontos é a de serem avaliados de acordo com a distância entre o efetuador do robô e seus elos, a fim de manter uma certa distância para que o robô não colida com os obstáculos;

ETAPA 2: conhecendo o caminho gerado no espaço de trabalho do robô através do equacionamento da cinemática inversa, torna-se possível transcrever esses pontos para o espaço de juntas do robô. Neste caso, a ideia é aplicar um método de otimização baseado em funções *splines* de 5° e 7° grau. A otimização consiste na minimização da força associada à dinâmica do RPC, considerando as restrições cinemáticas e dinâmicas, as quais são determinadas por meio dos equacionamentos do subsistema mecânico dos atuadores pneumáticos e de procedimentos experimentais;

(iv) com relação à técnica de prevenção de obstáculos, inicialmente define-se o volume do objeto dentro do volume de trabalho do RPC. Através de relações matemáticas, define-se uma região onde o efetuador do robô e seus elos não irão colidir com a geometria do obstáculo;

(v) a estratégia de interpolação dos pontos no espaço de juntas deverá ser definida através de um método de otimização que utiliza *b-splines* de 5° e 7° grau na minimização da força associada à dinâmica do RPC, considerando suas restrições cinemáticas e dinâmicas;

(vi) são utilizados os algoritmos FMA, PSO e AG. A escolha por estes algoritmos deve-se ao fato de que, como nos demais métodos metaheurísticos, eles são capazes de realizar um procedimento de busca aleatória e ainda de executar um número elevado de avaliações da função objetivo. Estes fatores auxiliam na busca da melhor solução, fazendo com que esta não se restrinja a um ótimo local, aumentando a probabilidade de se encontrar um ótimo global. Ademais, como já comentado, os métodos metaheurísticos, além de não necessitarem de uma boa estimativa inicial precisa dos parâmetros, não utilizam gradientes durante a otimização [Espósito, 2012]; e

(vii) serão dois os parâmetros a serem otimizados no presente estudo. Primeiramente, no planejamento do caminho será otimizada a menor distância entre o ponto inicial e o final fornecidos pelo usuário, considerando como variável de projeto os pontos intermediários da trajetória e aplicando restrições que relacionam a geometria dos obstáculos e o volume de trabalho do RPC. No planejamento da trajetória, através dos parâmetros relacionados às funções por meio de *splines*, será otimizado força associada à dinâmica do RPC para percorrer o conjunto de pontos intermediários (entre o ponto inicial e o final) determinados na etapa de otimização anterior.

4 RPC - O ROBÔ EM ESTUDO

Este capítulo tem como objetivo apresentar as características do robô pneumático com 5 GDL, juntamente com os respectivos requisitos necessários para a definição do planejamento de caminho/trajetória considerando as características geométricas do robô, como volume de trabalho, elementos (elos) da estrutura, mapeamento dos obstáculos no volume de trabalho, cinemática e dinâmica. Os algoritmos de processamento necessários para gerar as trajetórias são implementados no *software* Matlab ®, procurando obter trajetórias otimizadas em ambiente virtual a serem aplicadas posteriormente ao robô em estudo.

O RPC é um robô pneumático que resulta de um conjunto de estudos recentes realizados no Laboratório de Mecatrônica e Controle (LAMECC) da UFRGS. Esses estudos abrangem desde questões relacionadas ao projeto do robô, quanto questões vinculadas ao seu funcionamento.

Dentre os principais autores dos estudos que contribuíram para a construção conjunta do RPC, pode-se citar os trabalhos de Allgayer, 2011, Rijo, 2013, Sarmanho, 2014, Missiaggia, 2014, Medina, 2015, Leonardelli, 2015 e Montecinos, 2017. A Tabela 4.1 mostra a evolução da construção e das pesquisas já realizadas sobre o RPC.

Tabela 4.1 - Estudos sobre o projeto, a construção e o funcionamento do RPC.

Autor	Contribuição para o projeto e estudo do RPC
Allgayer, 2011	Primeiro estudo relacionado à modelagem matemática de um robô cilíndrico com 5 GDL realizando uma simulação.
Rijo, 2013	Projeto, construção e avaliação mecânica relacionados aos elementos mecânicos do primeiro GDL do RPC.
Sarmanho, 2014	Projeto, construção e implementação de estratégia de controle não linear.
Missiaggia, 2014	Planejamento de trajetória.
Medina, 2015	Proposição de um sistema de visão computacional aplicado ao RPC.
Leonardelli, 2015	Desenvolvimento de uma metodologia de programação em Grafcet.
Montecinos, 2017	Análise de um sistema estéreo aplicado ao RPC

Como se observa na Tabela 4.1, o projeto de construção do RPC tem origem no trabalho de Allgayer, 2011, com a modelagem matemática inicial para um robô pneumático cilíndrico com 5 GDL, para o qual propõe-se definir uma estratégia para planejamento de trajetória.

O manipulador proposto no estudo de Allgayer, 2011, (RPC), é composto por 5 atuadores pneumáticos de dupla ação (4 translacionais e 1 rotacional). Para posicionar e orientar o efetuador na posição desejada, esses atuadores são ordenados de maneira que os três primeiros atuadores

executam o posicionamento do efetuador, enquanto os dois últimos garantem sua orientação. A configuração é a de um robô cilíndrico, e incorpora mecanismos para a transformação de movimento linear para rotacional na primeira e na quarta junta. O trabalho apresenta a modelagem geométrica do manipulador, assim como o desenvolvimento de um modelo matemático que propiciou a realização de simulações considerando as restrições cinemáticas e dinâmicas do robô.

Rijo, 2013, se concentrou no estudo relacionado ao primeiro GDL do robô, definindo as características do mecanismo de acionamento e da estrutura mecânica. Para tanto, abordou-se detalhadamente todos os itens relacionados à estrutura mecânica do primeiro GDL. Esse trabalho focou principalmente o projeto dos componentes mecânicos da base e do sistema de transmissão para a primeira junta, incluindo o desenvolvimento de um algoritmo de controle realimentado para este GDL. É importante ressaltar que a pesquisa Rijo, 2013, apresentou resultados de simulações e de experimentos que permitiram verificar a efetividade do algoritmo de controle proposto, baseado em alocação de polos e realimentação parametrizada de estados a partir do cálculo explícito da variação inercial gerada em função do movimento simultâneo dos outros 4 GDL do robô.

Sarmanho, 2014, projetou e construiu o primeiro protótipo de um robô cilíndrico pneumático com 5 GDL, considerando particularmente os resultados dos trabalhos realizados por Allgayer, 2011, e por Rijo, 2013. Para o controle do robô, Sarmanho, 2014, propôs a aplicação de um controlador não linear construído de acordo com a Lei do Torque Calculado estendido por com um esquema de compensação do atrito aplicado aos 5 subsistemas de atuação. Os resultados das simulações e dos experimentos deste trabalho aplicados ao RPC mostraram que, em função das características construtivas dos atuadores, a compensação do atrito é importante na obtenção de resultados adequados na tarefa de seguimento de trajetória. Considerando um regime de seguimento de uma trajetória contínua, o controlador proposto, que aplica a estratégia de controle baseada na Lei do Torque Calculado associada a uma estratégia de compensação do atrito, permite que o sistema tenha uma redução dos erros de seguimento de trajetória em posição.

Missiaggia, 2014, propôs um método para o planejamento de trajetórias otimizadas no espaço de juntas do RPC. O método caracteriza-se pela determinação de valores otimizados de *jerk*, aceleração ou velocidade através do ajuste de parâmetros em função das características de cada aplicação. A metodologia utilizada nesse trabalho consiste em aplicar uma solução algébrica da cinemática inversa para gerar trajetórias intermediárias entre os pontos no espaço de trabalho do robô utilizando um algoritmo de interpolação baseado em *splines* compostas por polinômios de 7º grau [Simon, 2004]. Basicamente, este método possibilita a obtenção de curvas no espaço de

juntas com valores otimizados de *jerk*, aceleração ou velocidade, considerando o ajuste dos parâmetros de acordo com as características de cada aplicação.

Uma das contribuições de Missiaggia, 2014, para o RPC consiste no fato de que a trajetória gerada com um polinômio de 7º grau garante a continuidade da função em posição e das suas três primeiras derivadas, que, segundo Slotine e Li, 1988, é uma condição necessária para a implantação de estratégias baseadas no controle por torque calculado, atendendo assim aos requisitos já indicados por Sarmanho, 2014.

Medina, 2015, desenvolveu um sistema de visão computacional aplicado ao RPC. O método proposto é baseado no cálculo dos momentos geométricos para obtenção das características de uma imagem, relacionando as coordenadas em *pixels* com o sistema de coordenadas do robô, obtendo a posição e a orientação de peças para que o robô possa capturá-las. Nessa pesquisa, o algoritmo de planejamento de trajetórias do robô aplicado por Missiaggia, 2014, é usado integrado ao sistema de visão computacional desenvolvido e controlado pelo algoritmo de controle dos atuadores com compensação de atrito proposto por Sarmanho, 2014. Para validar o esquema desenvolvido, foi realizado um estudo de caso cujos resultados mostram que o algoritmo proposto permite que o RPC capture e manipule peças a partir de posições adquiridas por câmeras do tipo CCD.

Leonardelli, 2015, propôs uma metodologia de programação em linguagem Grafset, visando a simplificar o processo de programação de robôs industriais. Para cumprir o propósito deste trabalho, o autor desenvolveu blocos pré-programados em Grafset para diversos tipos de comandos, como, geração de trajetória, atuação do efetuador, comandos de movimentos no espaço de trabalho, entre outros. Para tanto, foi desenvolvido, testado e validado um código interpretador e conversor de linguagem Grafset para o RPC, incluindo a implantação de um canal de comunicação entre um CLP comercial e a plataforma de controle do robô.

Montecinos, 2017, analisou um sistema de visão estéreo para identificar objetos e suas respectivas posições dentro do volume de trabalho do RPC. Nesse trabalho, a comunicação entre o algoritmo proposto para o reconhecimento e medição de posição de objetos, em linguagem C++, e o manipulador é feita por meio do conversor de linguagem Grafset, proposto por Leonardelli, 2015. Esse algoritmo foi validado por meio de testes que consistiam na colocação de peças no volume de trabalho do robô e na geração de trajetórias para o RPC, para, posteriormente, se verificar se os objetos podiam ser capturados por uma garra pneumática do robô. Os resultados obtidos mostraram que o algoritmo proposto permite a manipulação de peças com uma precisão aceitável.

4.1. As configurações do RPC

A estrutura do manipulador pneumático é composta por um braço e um punho: o braço é representado pelos termos RPP, e consiste em uma base formada por uma junta rotacional (R) e por duas juntas prismáticas (P) ortogonais entre si; o punho, representado pelos termos RR, é composto por duas juntas rotacionais, responsáveis pelos movimentos do efetuador. A Figura 4.1, adaptada de Missiaggia, 2014, apresenta a configuração do RPC e a disposição das juntas.

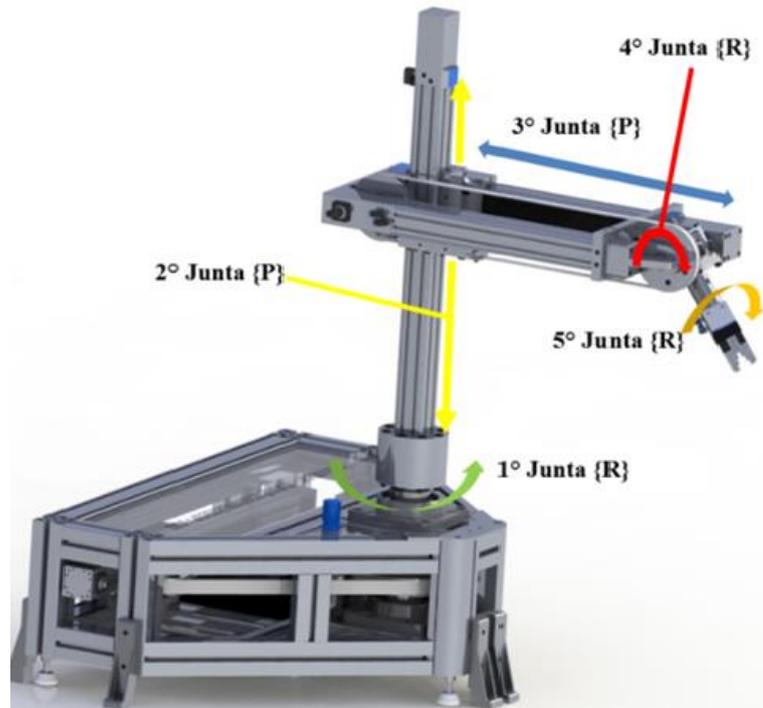


Figura 4.1 - Estrutura do robô e o arranjo de suas juntas.

Com base nas características associadas à geometria do RPC, Sarmanho, 2014, identificou os valores limites dos deslocamentos de cada junta, e, conseqüentemente, delimitou o volume de trabalho do robô, como se observa na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Valores limites das juntas do robô pneumático.

Valores Limites	Juntas				
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Mínimo	-2,454281 rad (-140,62°)	0	0	-1,963495 rad (-112,5°)	-2,35619 rad (-135°)
Máximo	2,454281 rad (140,62°)	0,45 m	0,3 m	1,963495 rad (112,5°)	2,35619 rad (135°)

A Figura 4.2 apresenta a geometria e as dimensões do volume de trabalho do manipulador representado no espaço bidimensional e tridimensional, adaptada de Missiaggia, 2014.

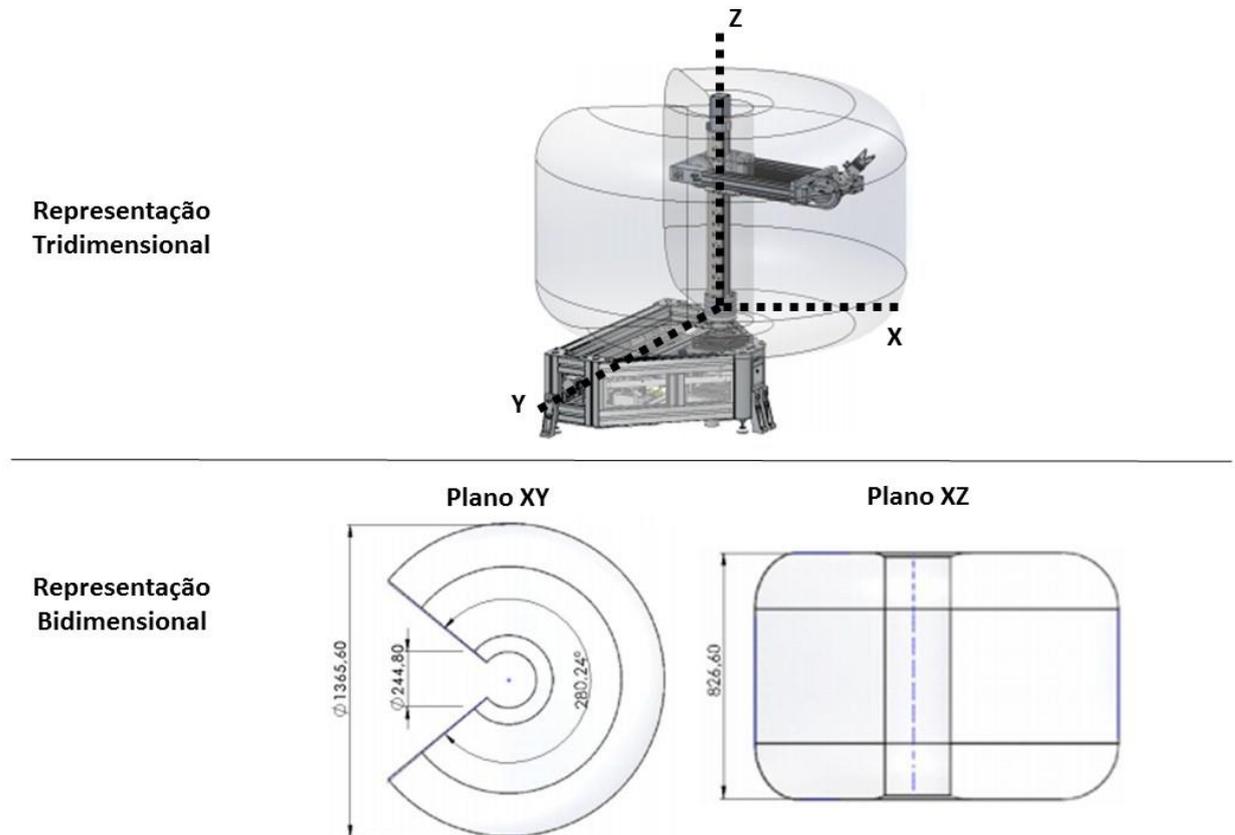


Figura 4.2 - Representação do volume de trabalho do robô.

4.1.1. Relação entre as variáveis de juntas e dos atuadores do RPC

Um dos aspectos considerados no projeto do RPC é a relação entre as variáveis de juntas, as quais definem a configuração do manipulador no espaço tridimensional (espaço das juntas), e as variáveis dos atuadores. Autores como Allgayer, 2011 e Sarmanho, 2014, afirmam que, em grande parte das aplicações, as variáveis dos atuadores diferem em relação às variáveis de juntas, visto que, construtivamente, os atuadores são compostos por sistemas de transmissão mecânica com elementos intermediários (como sistemas de transmissão por correias, entre outros). Assim, a relação entre a posição efetiva de uma junta e a posição do elemento acionador baseia-se no equacionamento apresentado em Craig, 2005; Allgayer, 2011; Sarmanho, 2014, entre outros:

$$q = Jy \quad (4.1)$$

$$\dot{q} = J\dot{y} \quad (4.2)$$

$$\ddot{q} = J\ddot{y} \quad (4.3)$$

onde q é o vetor de variáveis generalizadas das juntas e \dot{q} e \ddot{q} suas derivadas temporais; y, \dot{y} e \ddot{y} são, respectivamente, os vetores posição, velocidade e aceleração no espaço dos atuadores; J é a matriz de relação geométrica.

O RPC, pelo fato de utilizar sistemas de transmissão mecânica nas juntas da base e do efetuador (arfagem e rolagem), requer uma transformação de base das variáveis de juntas para as variáveis dos atuadores. Nesse equacionamento, J caracteriza a relação geométrica das dimensões das polias com os atuadores lineares, conforme a Equação (4.4), adaptada de Sarmanho, 2014.

$$J = \text{diag}[10,9079 \quad 1 \quad 1 \quad 17,453 \quad 44,444] \quad (4.4)$$

A matriz J é utilizada para, na formulação das restrições cinemáticas e dinâmicas do RPC, expressar os valores de velocidade, aceleração, *jerk* e torque em variáveis de juntas, conforme discutido mais adiante na Seção 5.2.2.3.

4.2. Mapeamento dos Obstáculos no Volume de Trabalho do RPC

No presente trabalho, considera-se a situação em que pode existir um obstáculo estático no volume de trabalho do RPC e que o volume do objeto pode ser representado por diferentes geometrias. Além disso, considera-se que as informações referentes ao obstáculo são fornecidas previamente, como, por exemplo, casos em que sensores (sonar ou laser, por exemplo) ou sistemas de visão computacional estejam integrados ao controle do manipulador para fornecer informações em relação aos obstáculos. Em síntese, esta proposta apresenta um método para mapear os objetos no volume de trabalho com o intuito de estabelecer uma região de restrição para o algoritmo de otimização, garantindo que a trajetória planejada seja livre de colisão.

Matematicamente, as zonas de colisão são avaliadas através de regiões delimitadas no volume de trabalho. Como apresentado na Figura 4.3, no caso de um objeto na forma de um paralelepípedo, existe uma região crítica que é determinada pela variação angular ($\theta_{1mincol}$ e $\theta_{1maxcol}$) da primeira junta do robô e a altura do objeto D .

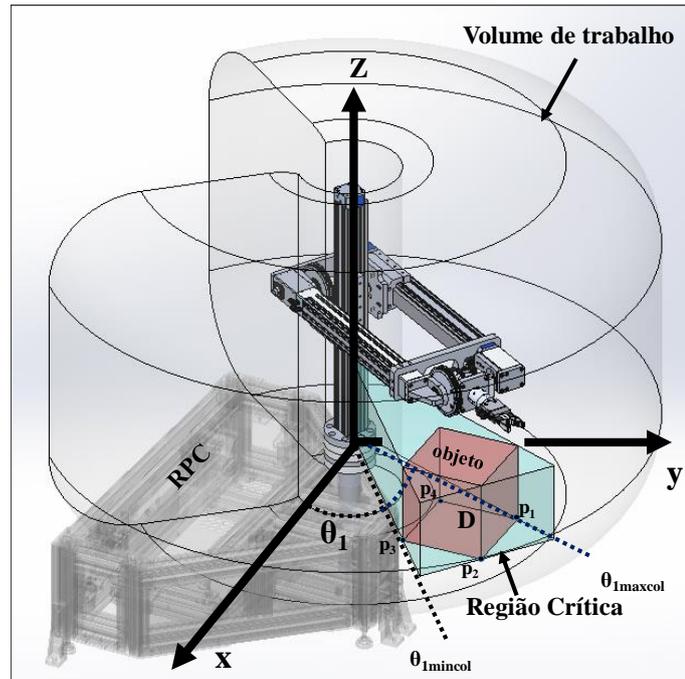


Figura 4.3 - Representação da região crítica.

Desse modo, assume-se que existem duas regiões dentro da zona crítica que geram colisão com o obstáculo. A Região 1 está diretamente relacionada ao volume do objeto, e a região 2 está associada ao alcance e geometria do robô.

A Região 1 consiste no volume do objeto, delimitado pelos pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 e a altura D , conforme apresentado na Figura 4.4.

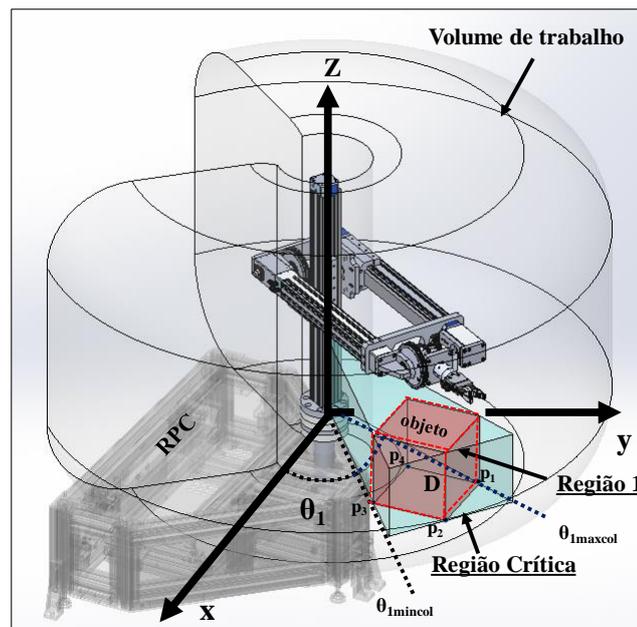


Figura 4.4 - Representação da região 1 no volume de trabalho do robô.

A Região 2, que é definida como a zona de difícil acesso do manipulador, se encontra disposta posteriormente ao objeto em relação à origem do sistema de coordenadas do robô. Assim, considera-se que esta região é definida entre os pontos mais afastados em relação à origem do robô (P_1, P_2, P_3), considerando os ângulos $\theta_{1mincol}$ e $\theta_{1maxcol}$ e a altura do objeto D , conforme ilustrado na Figura 4.5.

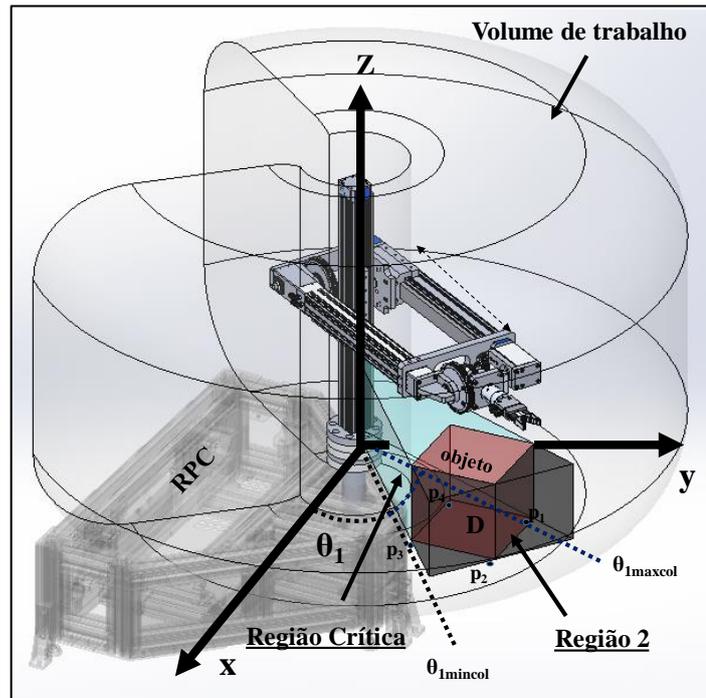


Figura 4.5 - Representação da região 2 no volume de trabalho do robô.

Em síntese, o robô poderá colidir com o obstáculo em função da ocorrência de um ponto intermediário u_i^* no caminho nas seguintes situações:

- (i) **Colisão dos elos do robô:** ocorre quando algum ponto qualquer da trajetória ultrapassa os limites da região 2.
- (ii) **Colisão simultânea do efetuador e dos elos:** ocorre somente quando os pontos da trajetória estão localizados dentro da Região 1, ou seja, o ponto de uma determinada trajetória encontra-se dentro do volume definido do objeto.

Para especificar uma região que represente as zonas de colisão no volume de trabalho do robô, definido obstáculos representados por cilindros, esferas e paralelepípedos, é necessário conhecer o centro geométrico e as dimensões do obstáculo, além dos pontos característicos, para, posteriormente, definir as funções que delimitam a região de colisão. Nesta abordagem,

independentemente da geometria do obstáculo, são considerados 5 pontos para determinar as funções que delimitam a zona de colisão do robô, como apresentado na Figura 4.6.

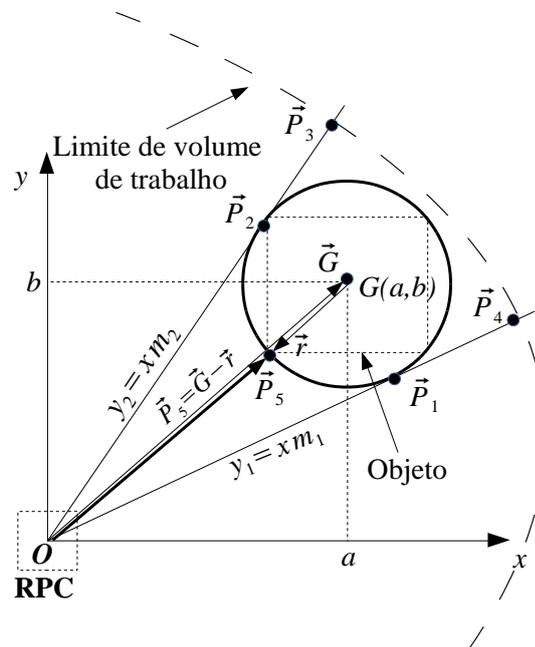


Figura 4.6 - Representação dos pontos característicos no plano bidimensional.

Como ilustrado na Figura 4.6, os pontos P_1 e P_2 e os coeficientes angulares das retas tangentes ao obstáculo (cilindros, esfera e cubo), as quais interceptam o centro de coordenadas do RPC, são determinados através de um sistema de equações, cuja solução refere-se às raízes de uma função de 2º grau, conforme descrito na Equação (4.5).

$$\begin{cases} y_1 = m_1 x \\ y_2 = m_2 x \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

sendo r o valor do raio da circunferência, m o coeficiente angular da reta, a e b as coordenadas do centro da circunferência.

Os pontos P_3 e P_4 são definidos pela intersecção entre a reta tangente ao obstáculo, utilizada na determinação dos pontos P_1 e P_2 , e o limite do volume de trabalho do robô, representado em coordenadas cartesianas. O ponto P_5 , que é o ponto mais próximo ao robô, é calculado pela diferença entre os vetores do centro de origem de coordenadas do robô até o centro do objeto (G) e o mesmo vetor de comprimento (r), conforme ilustrado na Equação (4.5).

Como os pontos característicos estabelecem os limites da região de colisão do RPC, propõe-se a utilização de funções específicas em razão dos pontos P_1 , P_2 e P_5 e da geometria do obstáculo. No caso de obstáculos representados por esferas e paralelepípedos, são utilizados paraboloides de revolução; e, para cilindros são utilizadas parábolas, as quais são limitadas pela altura do objeto.

Nas esferas, considerando a geometria delimitada por um paraboloides de revolução, a posição do centro de suas coordenadas é representada pelo ponto $G(a,b,c)$, cujos ângulos são definidos por β e δ , como apresentado na Figura 4.7.a. Para formular as restrições do problema de otimização, as funções do paraboloides e da esfera são transformadas de um espaço cartesiano X,Y,Z , em sua base canônica, para um espaço cartesiano $X'Y'Z'$ (Figura 4.7.b) por meio de matrizes de rotação descritas em Grossman, 2014.

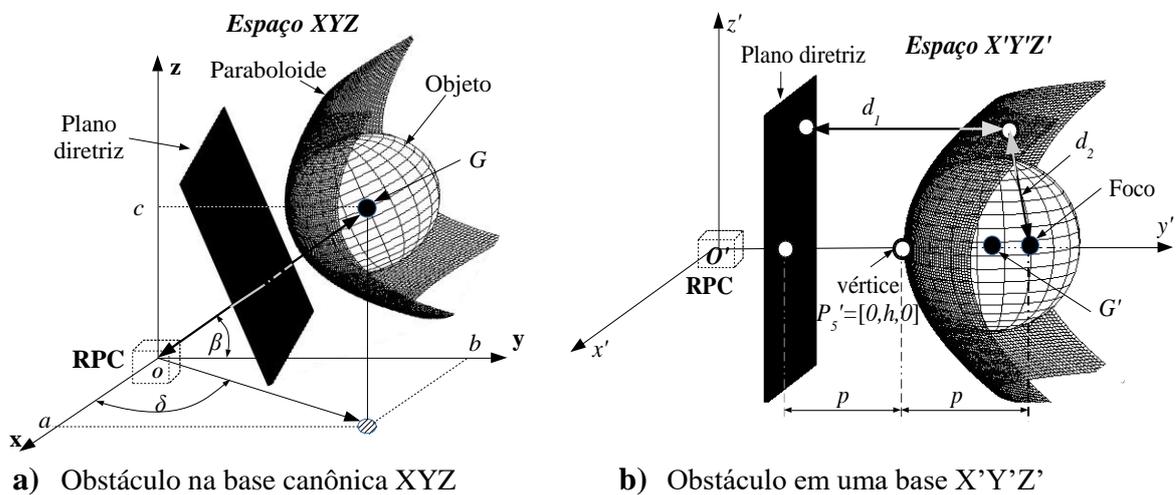


Figura 4.7 - Representação do paraboloides nas bases XYZ e $X'Y'Z'$.

Os cubos são obstáculos representados por esferas circunscritas com diâmetro igual ao vértice do cubo. No caso deste objeto, assume-se a mesma solução apresentada para uma esfera.

As equações do paraboloides de revolução no plano $X'Y'Z'$, utilizadas nos casos de esferas e cubos, são determinadas em função dos pontos P_1' , P_2' e P_5' (Figura 4.7.b), de acordo com a Equação (4.6):

$$x^2 + z^2 = 4p(y - h) \quad (4.6)$$

sendo h o valor da coordenada do vértice da paráboloide no eixo “y”, p a constante que relaciona a distância entre o vértice (ponto P_5') e o foco da parábola e a distância entre o vértice e o plano diretriz do paráboloide.

Nesta abordagem, as esferas e os cubos podem ser definidos em qualquer posição do volume de trabalho. Para as esferas, deve ser conhecido o centro geométrico e o raio; já para o cubo deve ser conhecido o valor da aresta e seu respectivo centro geométrico.

No caso de cilindros, a geometria do obstáculo é delimitada por uma parábola no espaço tridimensional com altura proporcional às dimensões do objeto. Assim, a zona de colisão é delimitada por uma parábola no plano bidimensional, a qual é gerada a partir dos pontos característicos (P_1 , P_2 e P_5) e a altura do obstáculo (h), de acordo com a Figura 4.8.a. Neste objeto, as funções da parábola e do cilindro são transformadas para o espaço cartesiano $X'Y'Z$ (Figura 4.8.b). Esta abordagem, similar aos casos de esferas e cubos, considera a rotação do objeto na formulação do problema de otimização.

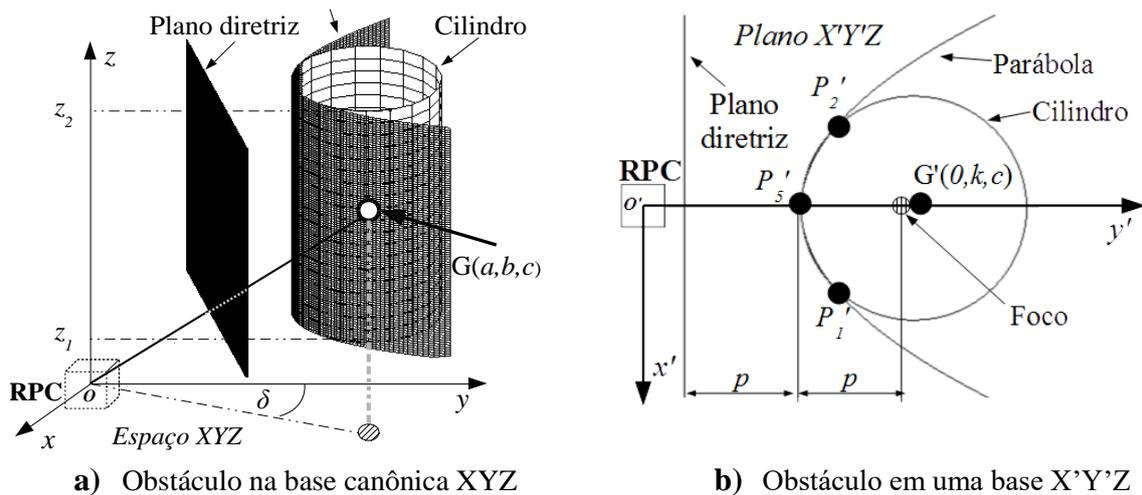


Figura 4.8 - Representação da parábola nas bases XYZ e $X'Y'Z$.

As equações da parábola no plano bidimensional, as quais são definidas no plano $X'Y'Z$, são calculadas em função dos pontos característicos (P_1' , P_2' e P_5') e da altura do objeto. Portanto, a função que delimita a geometria deste objeto é definida como:

$$\begin{cases} x^2 = 4p(y - h) \\ z \quad z_1 \leq z \leq z_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

sendo h o valor da coordenada do vértice da parábola no eixo “y”, p a constante que relaciona a distância entre o vértice (ponto P5’) e o foco da parábola, assim como a constante que relaciona a distância entre o vértice e a reta diretriz da parábola, e z_1 e z_2 os valores mínimos e máximos do objeto em relação ao eixo “z”, respectivamente.

Conhecidos os pontos característicos e as respectivas funções de acordo com a geometria do obstáculo, é possível delimitar a região em que o efetuador e os elos do RPC não devem ultrapassar para evitar a colisão. A escolha por parábolas (cilindros) e paraboloides de revolução (cubos e esferas) deve-se ao fato de tratarem-se de funções que permitem delimitar a geometria dos obstáculos, bem como facilitar os cálculos utilizados nas restrições do problema de otimização em função de suas propriedades, conforme descrito na Seção 5.1.

4.3. Modelagem Mecânica dos servoposicionadores do manipulador pneumático

A fim de compreender as restrições cinemáticas e dinâmicas propostas no planejamento de trajetórias, descritas na Seção 5.2.2.3, é necessário conhecer o princípio de funcionamento dos atuadores pneumáticos, utilizados nas juntas do RPC.

Os principais elementos de um servoposicionador pneumático translacional estão esquematizados na Figura 4.9, adaptada de Sarmanho, 2014. Este sistema, em síntese, consiste de uma servoválvula direcional, utilizada para direcionar o escoamento de ar sob pressão, e de um cilindro sem haste de dupla ação, que se desloca utilizando a energia pneumática armazenada em um vaso de pressão, onde o ar é mantido a uma pressão de suprimento p_{sup} .

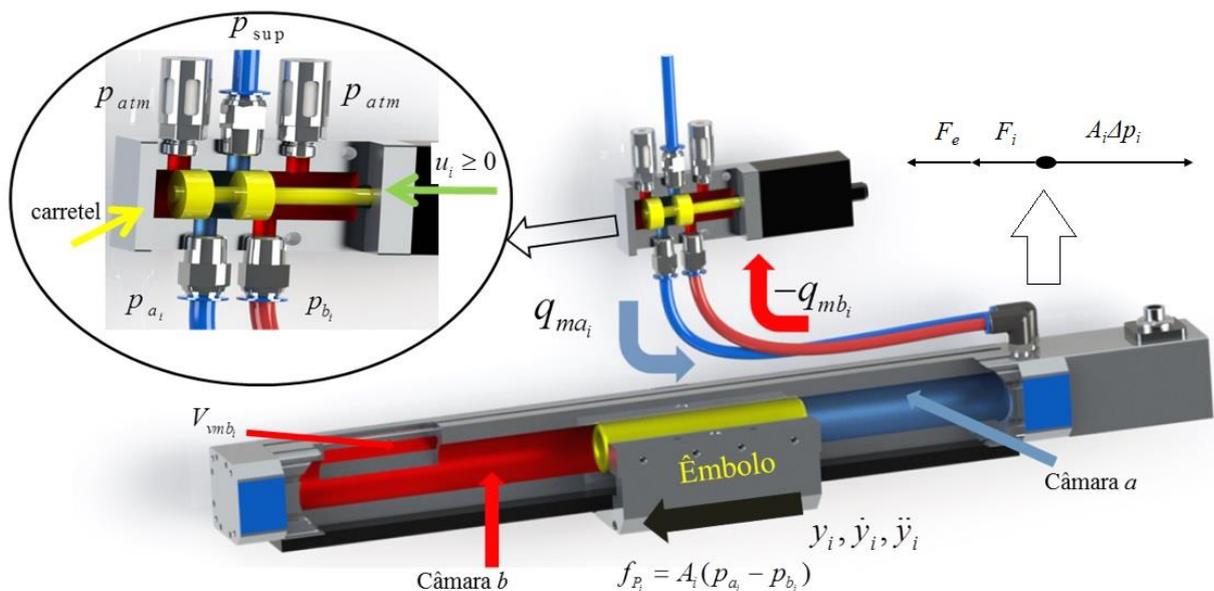


Figura 4.9 - Sistema pneumático de posicionamento.

Em síntese, a dinâmica deste sistema pode ser entendida da seguinte maneira:

- a relação entre a tensão aplicada u_i e o deslocamento do carretel (dinâmica da válvula);
- as relações entre as aberturas na válvula (ocasionadas pelo deslocamento do carretel) e as vazões mássicas de ar q_{ma} e q_{mb} que atravessam os orifícios de controle da válvula;
- as relações entre as vazões mássicas nas câmaras do cilindro e as pressões p_a e p_b que elas provocam;
- a relação entre a diferença de pressões e a área do êmbolo com a força f_p resultante.

Nesse sentido, para descrever o modelo matemático de um servoposicionador pneumático, é necessário analisar o equacionamento de duas parcelas distintas. A primeira delas, definida como a modelagem da parcela pneumática, se refere à modelagem dinâmica das pressões de ar nas câmaras dos cilindros com base na lei da conservação de massa no interior de um volume de controle [Bobrow e McDonell, 1998; McDonell, 1996; Perondi, 2002; Sobczyk, 2009; Suzuki, 2010]. Já a segunda parcela, definida pela modelagem da parcela mecânica, relaciona à força responsável pela movimentação do êmbolo e os esforços envolvidos para o equilíbrio de forças de um atuador simétrico.

Como ilustrado na Figura 4.9, o êmbolo se desloca sobre ação de uma força que relaciona à diferença de pressão entre as câmaras a e b ($p_{a_i} - p_{b_i}$) e à área do atuador i (A_i). Essa força, denominada força pneumática (f_{p_i}) do i -ésimo atuador, é definida como:

$$f_{p_i} = A_i p_{\Delta_i} = A_i (p_{a_i} - p_{b_i}) \quad (4.8)$$

O equacionamento do subsistema mecânico de um determinado atuador simétrico i , que é formulado a partir do princípio da 2ª lei de Newton, é expresso como:

$$M_i \ddot{y}_i = A_i (p_{a_i} - p_{b_i}) - F_{atr_i} - F_{grav_i} - F_{e_i} \quad (4.9)$$

onde M_i é a massa movida (soma da massa do êmbolo e possíveis cargas rigidamente acopladas ao atuador), $A_i (p_{a_i} - p_{b_i})$ é a força decorrente da diferença de pressão entre as câmaras a e b , F_{atr_i} é a força de atrito do i -ésimo atuador (descrito na Seção 4.3.2), F_{grav_i} são as forças gravitacionais na direção de movimentação do êmbolo e F_{e_i} é a força externa aplicada ao sistema.

A força gravitacional relativa ao i -ésimo atuador (F_{grav_i}) pode ser definida como:

$$F_{grav_i} = M_i g \text{sen}(\alpha_{gi}) \quad (4.10)$$

onde g é a aceleração da gravidade e α_{gi} é o ângulo formado entre o eixo de deslocamento do êmbolo do atuador i com uma reta na direção vertical.

4.3.1. Relação entre a Força Pneumática e o torque nas juntas do RPC

Um aspecto importante no planejamento da trajetória ótima proposta é definir os limites cinemáticos e dinâmicos do RPC. Quanto às restrições dinâmicas deste manipulador, é importante estabelecer uma relação entre as forças pneumáticas dos atuadores, as quais estão relacionadas com os esforços envolvidos no equilíbrio de forças de um atuador simétrico, e as forças dinâmicas do manipulador, que estão associadas à cadeia cinemática, às massas dos atuadores e aos momentos de inércia, entre outros parâmetros do RPC.

Nesse sentido, considerando o Princípio do Trabalho Virtual [Sciavicco e Siciliano, 2000], o qual define que a força líquida (F_{l_i}) fornecida por um determinado atuador a um determinado elo do robô é definida pela diferença entre a força pneumática deste atuador f_{p_i} , a força de atrito F_{atr_i} e a força externa F_{e_i} , é possível expressar o torque como:

$$\tau_i = J_i^{-1} F_{l_i} \quad (4.11)$$

onde J_i é o termo da diagonal i da matriz de relações de transmissão mecânica (ver Seção 4.1.1) e a força líquida (F_{l_i}) para cada junta i , de acordo com a Equação (4.9), é definida por intermédio da seguinte expressão:

$$F_{l_i} = [A_i(p_{a_i} - p_{b_i}) - F_{atr_i} - F_{grav_i} - F_{e_i}] \quad (4.12)$$

A relação entre as expressões (4.11) e (4.12) permite relacionar os equacionamentos relativos à dinâmica do RPC e à modelagem mecânica dos servoposicionadores por meio da força líquida (F_{l_i}), conforme apresentado na Seção 5.2.2.

4.3.2. Modelo de atrito LuGre

Diversas abordagens discutem os efeitos do atrito em atuadores no controle de servoposicionadores pneumáticos. Segundo Perondi, 2002, uma das características que dificultam o controle preciso dos sistemas pneumáticos é o atrito, visto que seu comportamento é não-linear e de difícil modelagem. A principal fonte de atrito nestes posicionadores provém do contato do anel de vedação com a camisa do cilindro. Sobczyk, 2009, afirma que o comportamento dinâmico do atrito, devido à complexa relação entre diversos parâmetros que variam com o tempo, como o estado de lubrificação, a temperatura, a direção e o módulo da velocidade do êmbolo, dentre outros, é caracterizado por fenômenos extremamente não-lineares e de difícil compensação, como o efeito de Stribeck, a histerese, a força de quebra variável, o efeito de stiction e os movimentos de pré-deslizamento.

Para representar uma parte dos fenômenos característicos do atrito de forma satisfatória, são necessários modelos matemáticos abrangentes para fins de simulação do comportamento do atrito e de compensação de seus efeitos no controle de sistemas pneumáticos. No estudo do comportamento do atrito, uma das alternativas é utilizar modelos numéricos baseados em elementos finitos, os quais consideram a teoria da elasticidade aplicada a problemas de contato [Kikuchi e Oden,1988]. Para Sobczyk, 2009, estes modelos são capazes de representar os efeitos do atrito de forma abrangente, mas requerem elevados esforços computacionais. Nesse sentido, um modelo que é utilizado com frequência é o denominado LuGre [Canudas de Wit et al.,1995].

No presente trabalho, as forças de atrito são determinadas em função do modelo de atrito (LuGre) aplicado aos atuadores do RPC. Na formulação matemática deste modelo, a força de atrito (F_{atr_i}) é composta por uma força proporcional à média das microdeformações dos elementos elásticos de duas superfícies de objetos em contato [Canudas de Wit et al.,1995], uma parcela proporcional à taxa de variação temporal das deformações e uma parcela relativa à força de atrito viscoso. A força de atrito resultante do modelo, no caso de um atuador i , é expressa pela Equação (4.13):

$$F_{atr_i} = \sigma_{0_i} z_i + \sigma_{1_i} \frac{dz_i}{dt} + \sigma_{2_i} \dot{y}_i \quad (4.13)$$

onde σ_{0_i} é o coeficiente de rigidez das deformações microscópicas entre as superfícies de contato no atuador, z_i é a média das microdeformações dos elementos elásticos do atuador, σ_{1_i} é o

coeficiente de amortecimento, σ_{2i} é o coeficiente viscoso e \dot{y}_i é a velocidade relativa do atuador. A dinâmica da média das microdeformações z_i é definida pela seguinte equação:

$$\frac{dz_i}{dt} = \dot{y}_i - \frac{|\dot{y}_i|\sigma_{0i}}{g_i(\dot{y}_i)} z_i \quad (4.14)$$

onde o termo $g_i(\dot{y}_i)$ é uma função que representa os efeitos de atrito seco e viscoso, além de fenômeno de Stribeck, que é definida como:

$$g_i(\dot{y}_i) = F_{c_i} + (F_{s_i} - F_{c_i})e^{-(\dot{y}_i/\dot{y}_{s_i})^2} \quad (4.15)$$

sendo F_{c_i} a força de atrito seco ou de Coulomb, F_{s_i} a força de atrito estático e \dot{y}_{s_i} é a velocidade de Stribeck do i -ésimo atuador.

Na implantação do modelo LuGre são necessários os valores de quatro parâmetros estáticos (σ_{2i} , F_{c_i} , F_{s_i} e \dot{y}_{s_i}) e de dois parâmetros dinâmicos (σ_{0i} e σ_{1i}) para cada atuador do RPC, os quais são descritos a seguir.

- **Parâmetros estáticos do modelo de atrito LuGre**

Na Equação (4.15), é possível verificar que, no domínio $F_{c_i} \leq g_i(\dot{y}_i) \leq F_{s_i}$, o valor de $g_i(\dot{y}_i)$ é sempre positivo. Desta forma, a função que descreve as características de regime permanente do modelo com movimentos em velocidade constante $\dot{y}_i = cte$ e $\dot{z}_i = 0$, isto é, a força de atrito em regime de velocidade constante (F_{ss_i}) pode ser definida pela Equação (4.16):

$$F_{ss_i} = \text{sgn}(\dot{y}_i) \left(F_{c_i} + (F_{s_i} - F_{c_i})e^{-\left(\frac{\dot{y}_i}{\dot{y}_{s_i}}\right)^2} \right) + \sigma_{2i}\dot{y}_i \quad (4.16)$$

A Figura 4.10, apresentada em Perondi, 2002, mostra um gráfico referente ao comportamento do modelo da força aplicando-se a Equação (4.16) para diferentes valores de velocidades constantes.

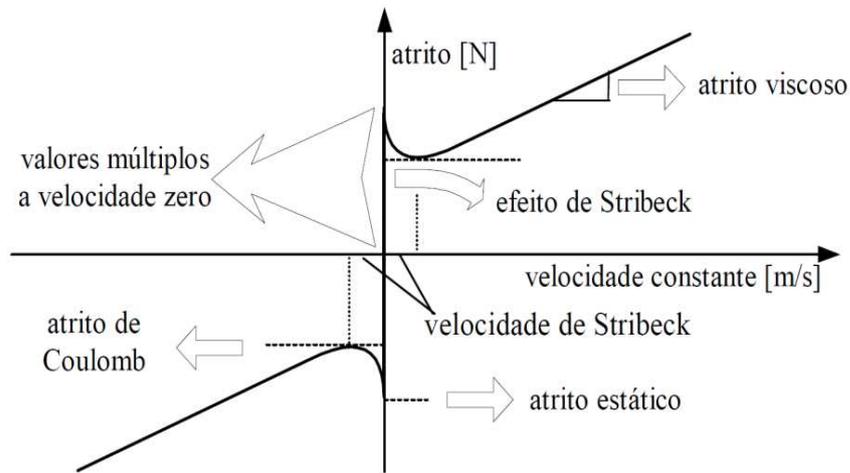


Figura 4.10 - Força de atrito versus velocidade constante.

Autores como Perondi, 2002, Perondi e Guenther, 2002, ao apresentar os estudos relativos à identificação paramétrica dos efeitos de atrito de um atuador pneumático, descrevem as técnicas de identificação para obtenção dos parâmetros estáticos do modelo de atrito LuGre por meio de diversos testes experimentais, com simulações do sistema operando em diferentes direções de movimento ($\dot{y}_i > 0$ e $\dot{y}_i < 0$). Tratando-se do RPC, os valores numéricos dos parâmetros, σ_{2i} , F_{ci} , F_{si} e \dot{y}_{si} relativos aos i atuadores são, por meio de experimentos, identificados para gerar o mapa estático atrito LuGre, como definido por Sarmanho, 2014.

- **Parâmetros dinâmicos do modelo de atrito LuGre**

O parâmetro dinâmico σ_{0i} pode ser determinado por meio de procedimentos experimentais, os quais baseiam na medição direta dos micro-deslocamentos (em regime de pré-deslizamento) através de um equipamento óptico de precisão; e as forças aplicadas ao êmbolo são determinadas em função da diferença de pressão entre as câmaras multiplicadas pela área do êmbolo (no caso de utilização de atuadores simétricos). [Perondi, 2002].

Assim o parâmetro σ_{0i} pode ser obtido através da equação:

$$\sigma_{0i} = \frac{\Delta F_i}{\Delta y_i} \quad (4.17)$$

onde, para as medições executadas no tempo t define-se a variação da força aplicada $\Delta F_i = F_i(t) - F_i(0)$ e a variação do deslocamento medido $\Delta y = y_i(t) - y(0)$.

O parâmetro dinâmico σ_{1i} , o qual baseia-se na abordagem de Armstrong e Canudas, 1996, define que as deformações na região de pré-deslizamento situam-se na faixa de 1 a 50 μm . O valor deste parâmetro proporciona um amortecimento adequado ao modelo de atrito na região de pré-deslizamento e deve ser ajustado de modo a assegurar a propriedade de passividade do modelo LuGre, que, de acordo com a condição deduzida por Barabanov e Ortega, 2000, é dada pela Equação (4.18).

$$\sigma_{1i} \leq \frac{\sigma_{2i}}{\left(\frac{F_{s_i}}{F_{c_i}}\right)} \quad (4.18)$$

4.3.3. Parâmetros do modelo LuGre aplicados ao RPC

Como mencionado, o modelo de atrito LuGre requer os valores de quatro parâmetros estáticos (σ_{2i} , F_{c_i} , F_{s_i} e \dot{y}_{s_i}) e de dois parâmetros dinâmicos (σ_{0i} e σ_{1i}). No caso do RPC, considerando experimentos utilizados por Sarmanho, 2014 para a identificação do atrito, o qual baseia-se nos estudos apresentados por Canudas de Wit, 1995, Perondi, 2002, os parâmetros do modelo LuGre foram determinados para cada atuador pneumático deste manipulador.

Para determinar o atrito em cada atuador do RPC, o procedimento experimental baseia-se o deslocamento do êmbolo do cilindro em velocidade aproximadamente constante e aceleração nula. Assim, considerando que as forças externas e gravitacionais não atuam sobre o êmbolo, as quais devem ser consideradas na modelagem da parcela pneumática dos servoposicionadores pneumáticos (ver Seção 4.3), pode-se inferir que a força pneumática se iguala à força de atrito no atuador F_{atr_i} , como representado na Equação (4.19), sendo $M_i \ddot{y}_i$:

$$\underbrace{M_i \ddot{y}_i}_{0, \text{ para } \dot{y} = cte} + F_{atr_i} = A_i(p_{a_i} - p_{b_i}) \quad (4.19)$$

Para tanto, os ensaios realizados consistem em aplicar um sinal de controle em malha aberta que corresponde à abertura constante da válvula proporcional, permitindo, assim, a passagem de vazão em situação de regime permanente. Esse procedimento acarreta no deslocamento do êmbolo do cilindro com uma velocidade aproximadamente constante e aceleração nula, que é necessário para determinar a força de atrito e os parâmetros estáticos de cada atuador do RPC.

Nesta abordagem, a força de atrito e os quatro parâmetros estáticos do atrito são determinados por meio do método de inspeção, conforme apresentado por Sarmanho, 2014, e descrito em Perondi, 2002. Nesse caso, os procedimentos experimentais são realizados para cada GDL do manipulador, mantendo os demais atuadores do sistema estáticos, ressaltando-se que, no caso dos atuadores que apresentam influência da gravidade (2°, 4° e 5° GDL), os procedimentos são realizados posicionando o manipulador de forma que o êmbolo do atuador em estudo permaneça sempre na posição horizontal, não sofrendo a influência da gravidade, tornando novamente válida a Equação (4.19) para o levantamento do mapa estático do atrito.

Uma vez aplicados e analisados os procedimentos experimentais mencionados, e levando-se em conta que os parâmetros dinâmicos (σ_{0_i} e σ_{1_i}) são determinados pelas Equações (4.17) e (4.18), respectivamente, são estabelecidos os valores dos parâmetros estáticos e dinâmicos para o modelo de atrito LuGre, conforme apresentado mais adiante na Seção 6.1.2.1.

Relacionando os parâmetros estáticos e dinâmicos com a expressão que define a força de atrito em regime de velocidade constante F_{ss_i} (Equação 4.16), é possível determinar as forças de atrito usando o modelo LuGre contrapostos aos dados experimentais de velocidade obtidos pelos experimentos aplicados aos atuadores do RPC, os quais são aplicados na Seção 5.2.2.3, no procedimento de cálculo das restrições cinemáticas (aceleração e *jerk*) e dinâmicas (torque).

4.4. Cinemática Direta do Manipulador Pneumático

Considerando as características construtivas do RPC, pode-se determinar os parâmetros de Denavit-Hartenberg (D-H), para, posteriormente, definir o equacionamento cinemático. A Tabela 4.3 [Sarmanho, 2014] apresenta os valores dos parâmetros de D-H considerando o RPC.

Tabela 4.3 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg do robô pneumático.

Elos	α [rad]	a [m]	θ [rad]	d [m]
1	0	0	θ_1	d_1
2	$-\pi/2$	0	0	d_2
3	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$d_3 + d_4$
4	$-\pi/2$	0	θ_4	0
5	0	0	θ_5	d_5

Fonte: Sarmanho, 2014.

sendo $d_1=0,263$ m, $d_4=0,1945$ m e $d_5=0,1883$ m. Os termos d_2 e d_3 são variáveis e dependem do deslocamento do 3° e 4° GDL do RPC.

Conhecendo as matrizes de transformação relacionadas com cada GDL do robô, torna-se possível descrever as equações de posição e orientação do efetuador através do produto destas matrizes, [Sarmanho, 2014], reproduzidas a seguir.

- 1° GDL:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -c\alpha_1 s\theta_1 & s\alpha_1 s\theta_1 & a_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\alpha_1 c\theta_1 & -s\alpha_1 c\theta_1 & a_1 s\theta_1 \\ 0 & s\alpha_1 & c\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

- 2° GDL:

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -c\alpha_2 s\theta_2 & s\alpha_2 s\theta_2 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\alpha_2 c\theta_2 & -s\alpha_2 c\theta_2 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & s\alpha_2 & c\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

- 3° GDL:

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -c\alpha_3 s\theta_3 & s\alpha_3 s\theta_3 & a_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\alpha_3 c\theta_3 & -s\alpha_3 c\theta_3 & a_3 s\theta_3 \\ 0 & s\alpha_3 & c\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

- 4° GDL:

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -c\alpha_4 s\theta_4 & s\alpha_4 s\theta_4 & a_4 c\theta_4 \\ s\theta_4 & c\alpha_4 c\theta_4 & -s\alpha_4 c\theta_4 & a_4 s\theta_4 \\ 0 & s\alpha_4 & c\alpha_4 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

- 5° GDL:

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -c\alpha_4 s\theta_4 & s\alpha_4 s\theta_4 & a_4 c\theta_4 \\ s\theta_4 & c\alpha_4 c\theta_4 & -s\alpha_4 c\theta_4 & a_4 s\theta_4 \\ 0 & s\alpha_4 & c\alpha_4 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

sendo que $c\theta_i$, $c\alpha_i$ representam $\cos(\theta_i)$ e $\cos(\alpha_i)$; $s\theta_i$, $s\alpha_i$ representam $\sin(\theta_i)$ e $\sin(\alpha_i)$.

Através da multiplicação das matrizes de transformação de cada GDL, que é apresentada por Sarmanho, 2014, obteve as equações de posicionamento e orientação do efetuador, conforme a Equação (4.25).

$${}^0A_5 = \begin{bmatrix} -c\theta_5s\theta_1s\theta_4 - c\theta_1s\theta_5 & s\theta_1s\theta_4s\theta_5 - c\theta_1c\theta_5 & -s\theta_1c\theta_4 & -(d_3 + d_4 + d_5c\theta_4)s\theta_1 \\ c\theta_5c\theta_1s\theta_4 - s\theta_1s\theta_5 & -c\theta_1s\theta_4s\theta_5 - c\theta_5s\theta_1 & c\theta_1c\theta_4 & (d_3 + d_4 + d_5c\theta_4)c\theta_1 \\ -c\theta_4c\theta_5 & c\theta_4s\theta_5 & s\theta_4 & d_5s\theta_4 + d_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

A importância da contribuição desta abordagem (apresentada por Sarmanho, 2014) para o presente trabalho está no fato de que é utilizada esta formulação para determinar a cinemática inversa e também para conhecer os pontos no espaço cartesiano através das coordenadas definidas no espaço de juntas.

4.5. Cinemática Inversa do Manipulador Pneumático

Neste trabalho, o equacionamento cinemático segue o método analítico empregado por Missiaggia, 2014, e Sarmanho, 2014. Este método serve para a determinação da cinemática inversa implementada no robô pneumático, onde a matriz de transformação é composta por termos de uma ou duas variáveis, como observado na Equação (4.25). Esses termos podem ser equiparados, na matriz homogênea de posição e orientação desejadas, aos termos correspondentes, como indicado na Equação (4.26):

$$\begin{bmatrix} -c\theta_5s\theta_1s\theta_4 - c\theta_1s\theta_5 & s\theta_1s\theta_4s\theta_5 - c\theta_1c\theta_5 & -s\theta_1c\theta_4 & -(d_3 + d_4 + d_5c\theta_4)s\theta_1 \\ c\theta_5c\theta_1s\theta_4 - s\theta_1s\theta_5 & -c\theta_1s\theta_4s\theta_5 - c\theta_5s\theta_1 & c\theta_1c\theta_4 & (d_3 + d_4 + d_5c\theta_4)c\theta_1 \\ -c\theta_4c\theta_5 & c\theta_4s\theta_5 & s\theta_4 & d_5s\theta_4 + d_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$= \begin{bmatrix} n_{dx} & s_{dx} & a_{dx} & p_{dx} \\ n_{dy} & s_{dy} & a_{dy} & p_{dy} \\ n_{dz} & s_{dz} & a_{dz} & p_{dz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De acordo com o método analítico, conforme Missiaggia, 2014, e Sarmanho, 2014, obtém-se a solução para o ângulo θ_4 equiparando-se os termos na posição relativa ao elemento (3,3) da matriz de transformação global e da matriz de posição e orientação desejada:

$$\theta_4 = \arcsen(a_{dz}) \quad (4.27)$$

No equacionamento, a partir da comparação dos elementos (3,4) das matrizes da Equação (4.26), pode-se obter a seguinte expressão para d_2 .

$$d_2 = p_{dz} - d_5 s\theta_4 - d_1 \quad (4.28)$$

De forma semelhante, a razão entre os elementos localizados em (1,3) e (2,3) permite se obter o ângulo θ_1 . Considerando que $\tan(-x) = -\tan(x)$, resulta na Equação (4.29).

$$\theta_1 = -\arctan\left(\frac{a_{dx}}{a_{dy}}\right) = -\arctan\left(\frac{s\theta_1}{c\theta_1}\right) \quad (4.29)$$

Com relação ao cálculo do ângulo θ_5 , utiliza-se os elementos (3,2) e (3,1), e a mesma propriedade da função tangente, resultando na Equação (4.30):

$$\theta_5 = -\arctan\left(\frac{s_{dz}}{n_{dz}}\right) = -\arctan\left(\frac{s\theta_5}{c\theta_5}\right) \quad (4.30)$$

Comparando os elementos localizados em (2,4) da matriz de transformação com os elementos da matriz de posição e orientação desejadas, pode-se também determinar d_3 :

$$d_3 = \frac{p_{dy} - d_5 c\theta_1 c\theta_4 - d_4 c\theta_1}{c\theta_1} \quad (4.31)$$

Missiaggia, 2014, e Sarmanho, 2014, alertam para o fato de que há no interior do espaço de trabalho ($\theta_1 = -\pi/2$, $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_4 = \pi/2$, $\theta_4 = \pi/2$) definido pelas Equações (4.29), (4.30), (4.31), uma região em que a cinemática inversa não pode ser solucionada analiticamente. Isso é decorrência de que há mais de uma solução para o sistema de equações que governam a cinemática, pois existem pontos de singularidades que ocorrem em função da perda de um GDL associado ao alinhamento dos eixos.

4.6. Dinâmica do Manipulador Pneumático

Com a finalidade de caracterizar os aspectos relevantes do modelo dinâmico no planejamento de trajetórias do RPC, assume-se que este robô, composto por 5 GDL, opera na ausência de forças externas aplicadas no efetuador, considerando os efeitos de atrito dinâmico associados aos sistemas pneumáticos. O modelo dinâmico proposto, baseado na formulação lagrangeana (Equação 2.1), e descrito por Sarmanho, 2014, é expresso na forma matricial compacta, de acordo com a Equação (4.32).

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + T_{atr}(\dot{q}) = \tau \quad (4.32)$$

onde q é o vetor de coordenadas generalizadas das juntas (θ para juntas rotacionais e d para juntas prismáticas); $H(q)$ é a matriz de inércia simétrica positiva definida e, geralmente, dependente da configuração do robô; $C(q, \dot{q})$ é a matriz que representa os efeitos centrífugos e de Coriolis; $G(q)$ é o vetor que representa o momento gerado em cada eixo de junta do manipulador devido à presença da gravidade; τ é o vetor de torques de atuação nas juntas e $T_{atr}(\dot{q})$ é o vetor representa os torques associados ao atrito (pelo modelo LuGre).

A matriz de inércia $H(q)$, determinada em função dos efeitos inerciais do RPC de acordo com o método Euler-Lagrange, é definida pela seguinte expressão.

$$H(q) = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ 0 & h_{22} & 0 & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & 0 & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde $h_{22} = 14,8168$; $h_{33} = 13,0570$ e $h_{55} = 1,1730e^{-4}$. Os elementos que compõem a matriz de efeitos inerciais (h_{ij}), os quais podem ser determinados na metodologia apresentada em Fu et al., 1987, e propostas por Sarmanho, 2014, os parâmetros de massas, os comprimentos dos elos, entre outros, são mostrados no Anexo A.

A matriz que considera os efeitos centrífugos e de Coriolis (giroscópicos) $C(q, \dot{q})$ é, em função das posições e velocidades das juntas do RPC, definida pela Equação (4.34):

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ 0 & 0 & 0 & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & 0 & 0 & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & 0 & 0 & 0 & C_{45} \\ C_{51} & 0 & C_{53} & C_{54} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

onde os elementos que compõem a matriz c_{ij} são fornecidos por Sarmanho, 2014, e o método para determinar esses valores pode ser encontrado em Fu et al., 1987. Os equacionamentos que definem os elementos desta matriz são apresentados no Anexo A.

O vetor $G(q)$, que representa o momento gerado das juntas do RPC devido à presença dos efeitos gravidade, depende do posicionamento de suas juntas, e é representada na Equação (4.3), para as respectivas variáveis θ_4 e θ_5 .

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \\ 0 \\ g_2 c\theta_4 - g_3 s\theta_4 + g_4 s\theta_4 c\theta_5 - g_5 s\theta_4 s\theta_5 \\ g_6 c\theta_4 c\theta_5 + g_7 c\theta_4 s\theta_5 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

onde $g_1 = 145,353$; $g_2 = 1,2782$; $g_3 = 0,0529$; $g_4 = 9,6009e^{-4}$; $g_5 = 0,0042$; $g_6 = 0,0042$ e $g_7 = 1,6620e^{-5}$.

Com relação ao equacionamento dinâmico do RPC, aplicado ao método de planejamento de trajetórias, assume-se que:

- como se trata de um robô composto por diversos corpos rígidos com componentes mecânicos que interagem entre si, é difícil determinar os parâmetros inerciais da geometria do sistema por meio de métodos analíticos. Neste trabalho, os valores dos momentos de inércia, das posições de centro de massa e das massas de cada elo, são determinados através do software *Solidworks*®, conforme apresentado por Sarmanho, 2014;
- os efeitos dos deslocamentos elásticos entre os elos são desprezados, já que os mesmos são relativamente pequenos. Assim, define-se que os elos da cadeia cinemática do RPC são representados como corpos rígidos a fim de facilitar a aplicação da formulação Lagrangeana; e
- define-se que a conexão entre eles é uma ligação ideal (sem folgas e efeitos elásticos), que é desejável para fins matemáticos e no controle preciso de posição de manipuladores.

4.7. Massas Equivalentes dos Atuadores do RPC

Neste trabalho, para estabelecer os limites cinemáticos (aceleração e *jerk*) aplicados no método de planejamento de trajetória do RPC, são utilizados os conceitos relacionados ao equacionamento do subsistema mecânico dos sistemas pneumáticos. Como pode-se observar na Equação (4.9), é necessário, além de conhecer os efeitos associados à força de atrito, à área e à pressão de suprimento (p_{sup}), dispor do valor efetivo das massas acopladas aos êmbolos dos atuadores. Tratando-se do RPC, a massa acoplada ao êmbolo do i -ésimo atuador depende dos aspectos construtivos dos elos (sistemas de transmissão, elementos de fixação, tipos de materiais, entre outros) e do momento de inércia de massa em relação ao sistema de coordenadas de cada junta (atuador). Apesar de a modelagem da massa equivalente não considerar todos os efeitos dinâmicos na movimentação do RPC, como os efeitos gravitacionais e de Coriolis, é importante mencionar que a modelagem do efeito inercial de cada GDL como uma massa equivalente acoplada ao respectivo êmbolo de cada atuador permite o uso direto da Equação (4.9) no cálculo das restrições cinemáticas máximas, como descrito na Seção 5.2.2.3. Ressalta-se, também, que os efeitos gravitacionais e de Coriolis são considerados no cálculo das equações de movimento do manipulador por meio das formulações clássicas de Euler-Lagrange.

O método proposto para o cálculo da massa equivalente de cada atuador do RPC baseia-se no método desenvolvido por Rijo, 2013, que apresenta um modelo para determinar a massa equivalente do 1º GDL. Nesse estudo, a massa equivalente acoplada ao êmbolo do atuador do 1º GDL do RPC está relacionada à massa de cada elo do manipulador, ao momento de inércia do manipulador em relação ao eixo de rotação do 1º GDL e à massa dos componentes do sistema de transmissão, como as polias, correias, *clamp* e o próprio êmbolo do atuador. Assim, o método proposto por Rijo, 2013, considera os casos em que as variações das coordenadas associadas aos GDL do robô alteram de forma significativa o momento de inércia do manipulador em relação ao eixo de rotação do 1º GDL do robô, como os efeitos das posições das juntas do 3º e 4º GDL com relação ao eixo de rotação do 1º GDL, levando em conta os valores das massas dos demais componentes do RPC. É importante destacar que os efeitos inerciais do 5º GDL não foram considerados por Rijo, 2013, uma vez que não acarretam variações significativas do momento de inércia com relação ao eixo de rotação do 1º GDL, assim como não foram considerados por Rijo, 2013, os efeitos inerciais do suporte que conduz as mangueiras de ar comprimido para os atuadores, aspectos que também não serão consideradas na estratégia aplicada.

Levando-se em conta os aspectos apresentados por Rijo, 2013, o procedimento de cálculo da massa equivalente de cada atuador do RPC é efetuado em duas etapas. A primeira delas refere-

se ao cálculo da massa equivalente do 1º GDL, cujos equacionamentos e hipóteses são apresentadas em Rijo, 2013. A segunda etapa trata-se do cálculo das massas equivalentes acopladas aos êmbolos do 2º, 3º, 4º e 5º GDL, analisando as massas dos elos do manipulador e as possíveis variações do momento de inércia do manipulador em relação ao sistema de coordenadas de cada GDL do RPC.

Para facilitar a compreensão do cálculo das massas equivalente do 2º, 3º, 4º e 5º GDL, a Figura 4.11 [Rijo, 2013] apresenta o modelo sólido do RPC cujos sistemas de coordenadas de cada elo são determinados pelo método de Denavit- Hartenberg.

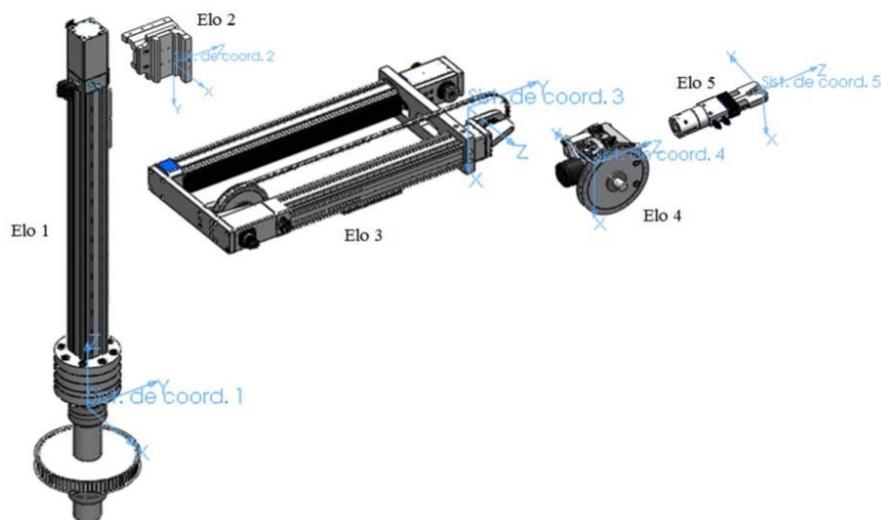


Figura 4.11 - Modelo sólido do robô com os sistemas de coordenadas de cada elo por meio do método de Denavit-Hartenberg.

Os valores das massas de cada elo do modelo sólido, representados na Figura 4.11, foram determinados através das ferramentas de análise do software *SolidWorks*® e apresentados por Rijo, 2013, conforme a

Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Relação das Massas dos elos do RPC.

Dados	Valores
Massa do 1º elo ($M_{1^\circ elo}$)	13,2380 (kg)
Massa do 2º elo ($M_{2^\circ elo}$)	2,196 (kg)
Massa do 3º elo ($M_{3^\circ elo}$)	10,7475 (kg)
Massa do 4º elo ($M_{4^\circ elo}$)	1,5207 (kg)

Massa do 5º elo ($M_{5^\circ \text{elo}}$)	0,4765 (kg)
--	-------------

Para determinar as massas equivalentes acopladas ao êmbolo do 2º, 3º, 4º e 5º GDL do RPC, primeiramente é necessário redefinir os sistemas de coordenadas junto ao êmbolo de cada atuador do RPC, com a finalidade de analisar se as massas acopladas em cada atuador (massa dos elos, dos sistemas de transmissão, dos elementos de fixação acoplados, entre outros), os quais também dependem das variações do momento de inércia em relação ao sistema de coordenadas de cada GDL do RPC. A Figura 4.12, adaptada de Rijo, 2013, ilustra o sistema de coordenadas utilizado no cálculo da massa equivalente do 2º ao 5º grau de liberdade do RPC.

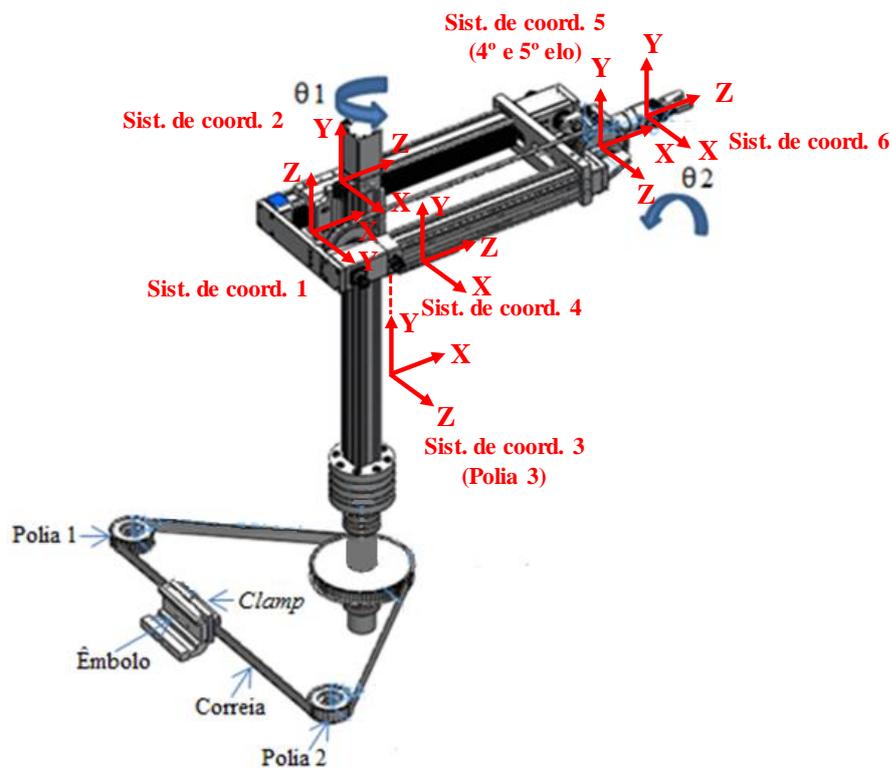


Figura 4.12 - Sistema de coordenadas utilizado no 2º ao 5º GDL do RPC.

No cálculo das massas equivalentes acopladas ao êmbolo do 2º ao 5º GDL do RPC, os sistemas de coordenadas são posicionados nos êmbolos de cada GDL, conforme apresentado na Figura 4.13. No presente trabalho, convencionou-se que o sistema de coordenadas 1 se refere ao êmbolo do 2º GDL do sistema, e assim sucessivamente no cálculo da massa equivalente das demais juntas do RPC, enquanto os sistemas de coordenadas 3 e 5 se referem à polia 3 do sistema de transmissão do 4º GDL e ao conjunto formado pelo 4º e 5º elo, respectivamente, conforme descrito a seguir.

Como o 2º GDL do RPC consiste de uma junta prismática, a massa equivalente acoplada ao êmbolo pode ser determinada considerando-se o deslocamento das massas do 2º, 3º, 4º e 5º elo em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas 1. Na Figura 4.13, é possível observar que, por se tratar de uma junta prismática, as massas acopladas ao êmbolo do 2º GDL não provocam variações no momento de inércia em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas 1, uma vez que permanecem fixas em qualquer posição sobre o eixo Z. É importante ressaltar que a variação da posição θ_2 não influencia o cálculo da massa equivalente, já que a relação de distâncias entre o centro de massa do conjunto formado pelo 4º e 5º elo e o eixo Z do sistema de coordenadas 5 é constante, independentemente do ângulo do 4º GDL. Portanto, a massa equivalente acoplada ao êmbolo do 2º GDL pode ser definida pela Equação (4.36):

$$M_{i=2} = M_{2^\circ\text{elo}} + M_{3^\circ\text{elo}} + M_{4^\circ\text{elo}} + M_{5^\circ\text{elo}} \quad (4.36)$$

onde $M_{2^\circ\text{elo}}$, $M_{3^\circ\text{elo}}$, $M_{4^\circ\text{elo}}$ e $M_{5^\circ\text{elo}}$ são as massas relacionadas ao 2º, 3º, 4º e 5º elo.

Para determinar a massa equivalente acoplada ao êmbolo do 3º GDL, considera-se que as massas do conjunto 4º e 5º elo se deslocam em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas 2, como ilustrado na Figura 4.19. Por se tratar de uma junta prismática, pode-se inferir que as massas acopladas ao êmbolo do 3º GDL (3º, 4º e 5º elo) não provocam variações no momento de inércia em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas 2, visto que os elos se movimentam no sentido de acionamento do êmbolo, e a relação de distâncias entre o centro de massa do conjunto 4º e 5º elo e o eixo Z do sistema de coordenadas 5 é constante para qualquer posição θ_2 . Assim, a massa equivalente acoplada ao êmbolo do 3º GDL é expressa como:

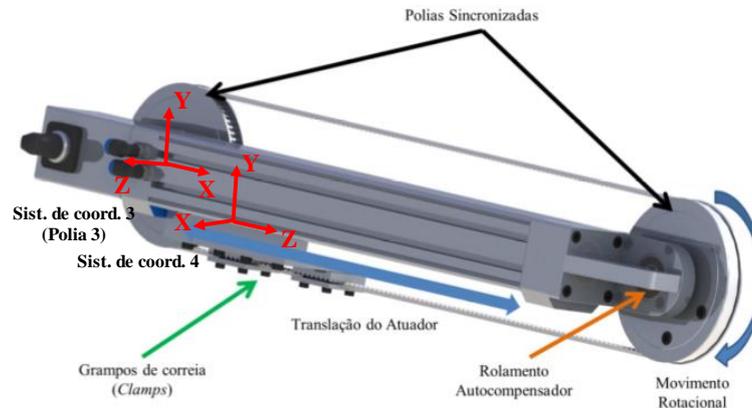
$$M_{i=3} = M_{3^\circ\text{elo}} + M_{4^\circ\text{elo}} + M_{5^\circ\text{elo}} \quad (4.37)$$

onde $M_{3^\circ\text{elo}}$, $M_{4^\circ\text{elo}}$ e $M_{5^\circ\text{elo}}$ são as massas relacionadas ao 3º, 4º e 5º elo.

O cálculo da massa equivalente acoplada ao êmbolo do 4º GDL apresenta particularidades em relação ao método proposto no cálculo da massa acoplada ao êmbolo do 2º e 3º GDL. A principal diferença é que o 4º GDL é composto por um sistema de transmissão que transforma o movimento linear do atuador em movimento rotacional. Nesse sentido, é necessário analisar se o sistema de transmissão do 4º GDL do RPC acarreta variações no momento de inércia em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas 4, influenciando, assim, os valores da massa equivalente acoplada ao êmbolo do 4º GDL. Para facilitar o entendimento das hipóteses consideradas no

cálculo da massa equivalente do 4º GDL, a Figura 4.13, que é adaptada de Sarmanho, 2014, ilustra a modelagem geométrica do 4º GDL do RPC.

Vista lateral



Mecanismo de giro do 4º GDL

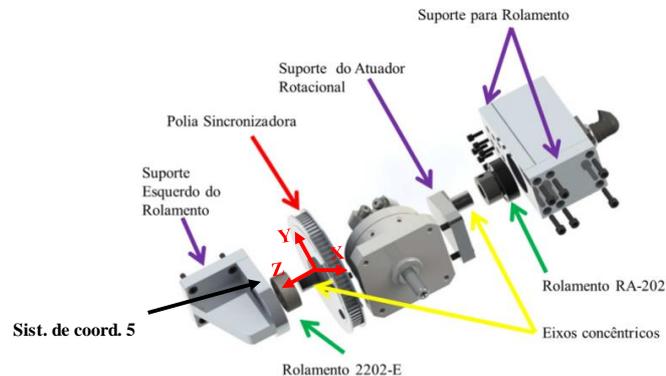


Figura 4.13 - Modelagem Geométrica do 4º GDL do RPC.

Como identificado nas figuras 4.12 e 4.13, o princípio de funcionamento do 4º GDL do RPC consiste no movimento de translação do atuador que, por meio de polias sincronizadoras, é transformado em movimento rotacional para acionar o mecanismo de giro do 4º GDL. Na Figura 4.13, a massa equivalente acoplada ao êmbolo do atuador está relacionada à massa relativa dos componentes de transmissão (correia, grampos, polias, entre outros) e à massa do conjunto formado pelo 4º e 5º elo, e é calculada com base nas seguintes hipóteses: 1) a massa do suporte do *Clamp* ($M_{CE4^\circ GDL}$) e da correia ($M_{C4^\circ GDL}$) não causam variações significativas no momento de inércia em relação ao sistema de coordenadas 4; 2) a variação no momento de inércia da polia 3 em relação ao sistema de coordenadas 3 é considerada em função do raio da polia 3, e a variação no momento de inércia do conjunto formado pelo 4º e 5º elo é determinada pela distância entre o sistema de coordenadas 5 e o centro de massa do conjunto; 3) a segunda polia do sistema de

transmissão do 4º GDL pertence ao conjunto formado pelo 4º e 5º elo, como pode-se observar nas Figuras 4.12 e 4.14; e 4) a variação da posição θ_2 não influencia o cálculo da massa equivalente, considerando-se que a relação de distâncias entre o centro de massa do 4º e 5º elo e o eixo Z do sistema de coordenadas 5 é constante, independentemente do ângulo do 4º GDL. Logo, a massa equivalente acoplada ao êmbolo do 4º GDL é dada pela Equação (4.38):

$$M_{i=4} = M_{CE4^\circ GDL} + M_{C4^\circ GDL} + M_{EP3} + M_{E4^\circ e 5^\circ elo} \quad (4.38)$$

onde $M_{CE4^\circ GDL}$ se refere à massa do suporte do *clamp* acoplado ao atuador do 4º GDL, $M_{C4^\circ GDL}$ é a massa da correia do sistema de transmissão do 4º GDL, M_{EP3} a massa equivalente da polia 3, determinada pela Equação (4.39), e $M_{E4^\circ e 5^\circ elo}$ é a massa equivalente do conjunto formado pelo 4º e 5º elo, expressa pela Equação (4.40).

$$M_{EP3} = \frac{I_{P3}}{(R_{P3})^2} \quad (4.39)$$

sendo os raio da polia (R_{P3}) e igual a 0,06 m.

$$M_{E4^\circ e 5^\circ elo} = \frac{I_{4^\circ e 5^\circ elo}}{(d_{4^\circ e 5^\circ elo})^2} \quad (4.40)$$

sendo a distância entre centro de massa do conjunto e o sistema de coordenadas 5 ($d_{4^\circ e 5^\circ elo}$) igual a 0,02951 m.

Os valores correspondentes à massa do suporte do *clamp* ($M_{CE4^\circ GDL}$), à massa da correia ($M_{C4^\circ GDL}$), ao momento de inércia da polia 3 (I_{P3}) em relação ao eixo z do sistema de coordenada 3 e ao momento de inercia do 4º e 5º elo ($I_{4^\circ e 5^\circ elo}$) em relação ao eixo z do sistema de coordenadas 5 são apresentados na Tabela 4.5.

Com relação ao cálculo da massa equivalente acoplada ao êmbolo do 5º GDL, observa-se a relação de distâncias entre o centro de massa do 5º elo e o eixo Z do sistema de coordenadas 6 é constante, o que não acarreta variações no momento de inércia, de modo que a massa equivalente pode ser considerada fixa. Assim, a massa equivalente acoplada ao êmbolo do 5º GDL é dada por:

$$M_{i=5} = M_{5^\circ elo} \quad (4.41)$$

Quanto ao método proposto no cálculo da massa equivalente acoplada aos atuadores do RPC, pode-se inferir que:

- o valor da massa equivalente do i -ésimo atuador possibilita o cálculo dos equacionamentos relacionados às restrições cinemáticas de aceleração e *jerk*, os quais são apresentados na Seção 5.2.2.3;
- os trabalhos de Rijo, 2013, e Sarmanho, 2014, não consideram o cálculo da massa equivalente do 2º ao 5º GDL do RPC, tendo em vista que Rijo, 2013, apresenta um estudo para viabilidade do funcionamento do 1º GDL do RPC, e Sarmanho, 2014, aplica as equações do movimento baseadas na formulação Lagrangeana para o controle do RPC; e

As massas e o momento de inércia que são utilizados no cálculo da massa equivalente do 4º GDL são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Massas dos elementos do 4º GDL.

Elemento	Dados	Valores
Correia do 4º GDL ($M_{C4ºGDL}$)	Massa (kg)	0,05165 kg
Suporte do <i>Clamp</i> do 4º GDL ($M_{CE4ºGDL}$)	Massa (kg)	0,332 kg
Conjunto formado pelo 4º e 5º elo ($I_{4º e 5º elo}$)	Momento de inércia em relação ao eixo z do sistema de coordenadas 5 (kgm ²)	0,0095 kgm ²
Polia 3 do 4ºGDL (I_{P3})	Momento de inércia em relação ao eixo z do sistema de coordenadas 3 (kgm ²)	0,0006 kgm ²

5 METODOLOGIA PARA O PLANEJAMENTO DO CAMINHO E TRAJETÓRIA NO MOVIMENTO DO RPC

O presente trabalho propõe o planejamento de trajetória livre de colisão para o RPC aplicando três algoritmos de otimização (FMA, PSO e AG), com implementações em Matlab®, em duas etapas. A primeira etapa corresponde ao planejamento do caminho do robô, ou seja, a determinação dos pontos intermediários da trajetória no volume de trabalho, de modo que não ocorra colisão entre o efetuador e os elos do robô com obstáculos na trajetória a ser planejada para o movimento. Assim, o objetivo de otimização nesta etapa é o de minimizar a distância entre os pontos inicial e final da trajetória, cujas restrições estão relacionadas às dimensões do volume de trabalho do RPC e às distâncias entre os pontos intermediários, as quais dependem da geometria do obstáculo. Conhecidos os pontos intermediários no volume de trabalho, determinam-se as posições destes pontos no espaço de juntas do robô através da cinemática inversa. A segunda etapa consiste no estudo do planejamento da trajetória na interpolação dos pontos intermediários por meio de *b-splines* de 5° e 7° graus, procurando determinar a melhor relação entre o tempo e o torque (função multi-objetivo) para esta trajetória, levando-se em conta os efeitos de suavização do *jerk* em função do grau da *spline* utilizada (5° e 7° graus), bem como as restrições cinemáticas e dinâmicas associadas ao RPC.

5.1. Estudo do Planejamento do Caminho para o RPC

De início, é importante destacar a compreensão do conceito de “planejamento do caminho” utilizado neste trabalho. “Planejar um caminho” significa indicar o lugar geométrico dos pontos no espaço de juntas ou no espaço operacional que o manipulador precisa seguir para executar o movimento que lhe for atribuído [Siciliano et al., 2008]. Neste trabalho, para implementar os algoritmos de otimização são utilizados AG, PSO e FMA. A metodologia proposta neste trabalho para o planejamento do caminho com vistas ao movimento do RPC está sintetizada no fluxograma apresentado na Figura 5.1.

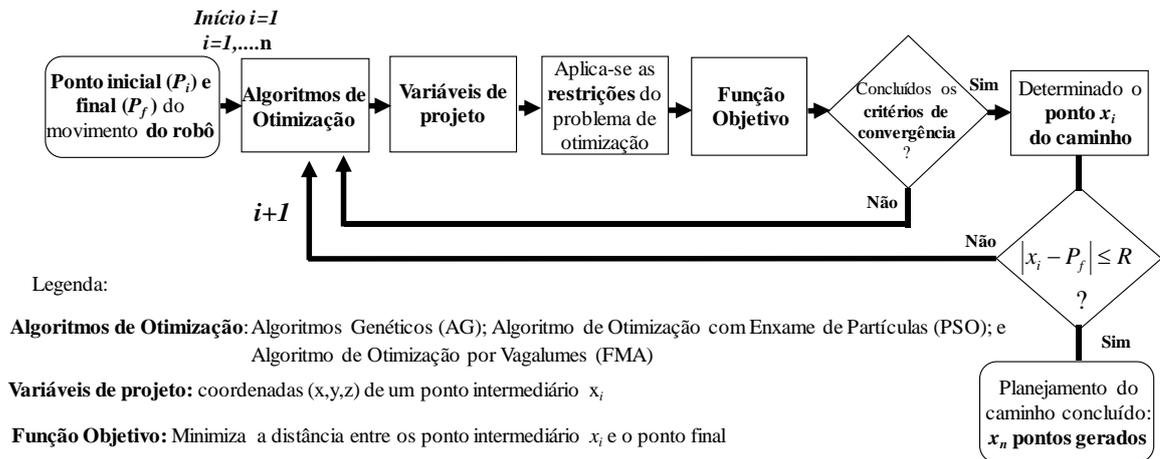


Figura 5.1 - Metodologia proposta para o planejamento do caminho.

De acordo com a metodologia proposta, para planejar o caminho a ser percorrido pelo RPC, deve-se inicialmente definir os pontos inicial (P_{in}) e final (P_f) da trajetória, que são expressos em coordenadas cartesianas (x_{in}, y_{in}, z_{in}) e (x_f, y_f, z_f), respectivamente. Desta forma, para encontrar um caminho livre de colisão, é preciso determinar um conjunto de pontos intermediários (u_i^*) que garantam que o robô não venha a colidir com o obstáculo ao longo de sua trajetória. Neste trabalho, propõe-se que cada ponto u_i^* seja determinado em uma etapa de otimização i ($i=1, \dots, n$), isto é, o algoritmo proposto é executado até que a distância entre o ponto intermediário (u_i^*) e o ponto final (P_f) seja menor que a distância do raio de uma esfera de referência (R).

O vetor de projeto $x_{caminho}$, ilustrado na Equação (5.1), é definido por um ponto intermediário (u_i^*), que é expresso pelas coordenadas cartesianas deste ponto e representado pelas variáveis de projeto do problema de otimização como:

$$x_{caminho} = (u_i^*)^T = (x_i, y_i, z_i)^T \quad (5.1)$$

Por exemplo, se a etapa de otimização é $i=1$, as variáveis de projeto estão relacionadas com as possíveis soluções das variáveis (x_i, y_i, z_i) associadas ao ponto intermediário u_1^* ; e assim sucessivamente para as outras etapas de otimização, conforme fluxograma da Figura 5.1.

A função objetivo proposta, adaptada de Abu-Dakka, 2011, Chyan e Ponnambalam, 2012, Menasri et al., 2013, Abu-Dakka, 2013, entre outros, pode ser calculada através da minimização da distância entre as coordenadas (x_i, y_i e z_i) associadas à posição intermediária (u_i^*) em cada etapa de otimização i do algoritmo e à posição final (x_f, y_f e z_f), conforme a Equação (5.2).

$$\text{Minimizar } G_{\text{caminho}} = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2} \quad (5.2)$$

Para planejar o caminho do RPC, deve-se aplicar restrições laterais à função descrita. A necessidade de se inserir restrições laterais deve-se ao fato de que é preciso atender as características do volume de trabalho do RPC, expresso em coordenadas cilíndricas, cujos limites em coordenadas cartesianas são: x_{min} , x_{max} , y_{min} , y_{max} , z_{min} e z_{max} . Assim, os limites para cada posição intermediária são definidos como restrições laterais para este problema de otimização, como apresentado nas Equações (5.3) a (5.5):

$$x_{min} \leq u_{i,1}^* \leq x_{max} \quad (5.3)$$

$$y_{min} \leq u_{i,2}^* \leq y_{max} \quad (5.4)$$

$$z_{min} \leq u_{i,3}^* \leq z_{max} \quad (5.5)$$

Os limites em coordenadas cartesianas são definidos de acordo com as dimensões de um paralelepípedo inscrito no volume de trabalho em relação ao sistema de coordenadas da base do RPC, conforme a Figura 5.2.

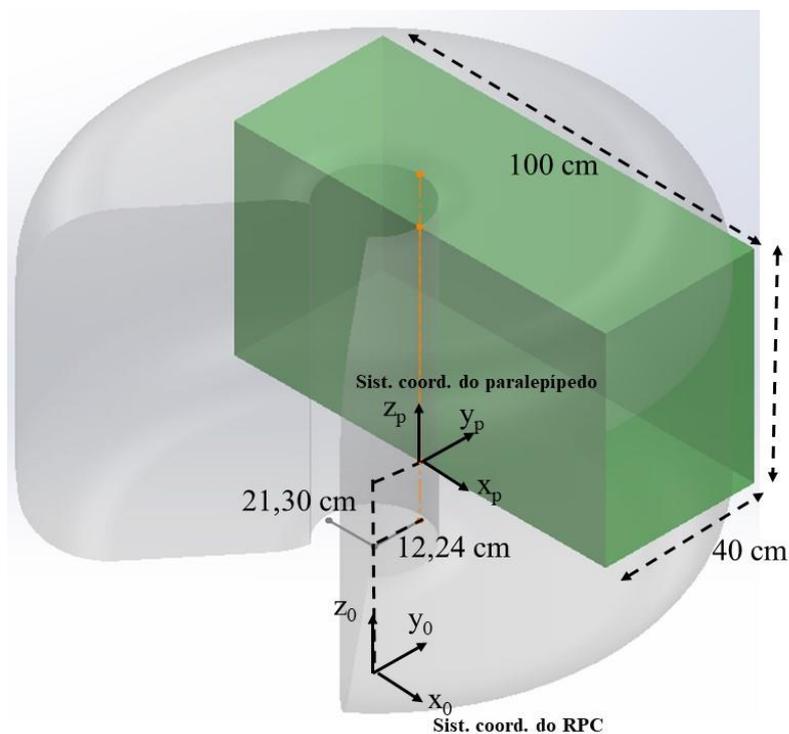


Figura 5.2 - Representação do volume de trabalho utilizado no planejamento do caminho.

Como indicado na Figura 5.2, a origem estabelecida para o sistema de coordenadas do paralelepípedo (x_p, y_p, z_p) encontra-se deslocada em relação ao sistema de coordenadas da base do RPC (x_0, y_0, z_0) . Assim, para contornar problemas no cálculo da cinemática inversa, define-se que os valores limites do paralelepípedo em coordenadas cartesianas são: $x_{min} = -50 \text{ cm}$, $x_{max} = 50 \text{ cm}$, $y_{min} = 12,24 \text{ cm}$, $y_{max} = 52,24 \text{ cm}$, $z_{min} = 21,30 \text{ cm}$ e $z_{max} = 76,30 \text{ cm}$.

Na formulação do problema de otimização, e, conseqüentemente, para que se possa garantir um caminho livre de colisão, devem-se considerar as restrições adicionais, que são: (a) definir a localização e a orientação de cada ponto intermediário (u_i^*) em relação aos pontos inicial e final da trajetória; e (b) estabelecer a distância entre esses pontos e a região de colisão, o que é apresentado a seguir.

Para gerar os pontos intermediários do caminho, as variáveis de projeto, definida pelas coordenadas (x_i, y_i, z_i) do ponto intermediário u_i^* , devem ser geradas sobre a superfície de uma esfera em relação ao ponto anterior, ou seja, o espaço de busca da variável de otimização consiste no volume de uma esfera cujo centro é definido pelo ponto obtido na etapa anterior de otimização. A Figura 5.3 ilustra a proposta para solução do problema de otimização no planejamento do caminho.

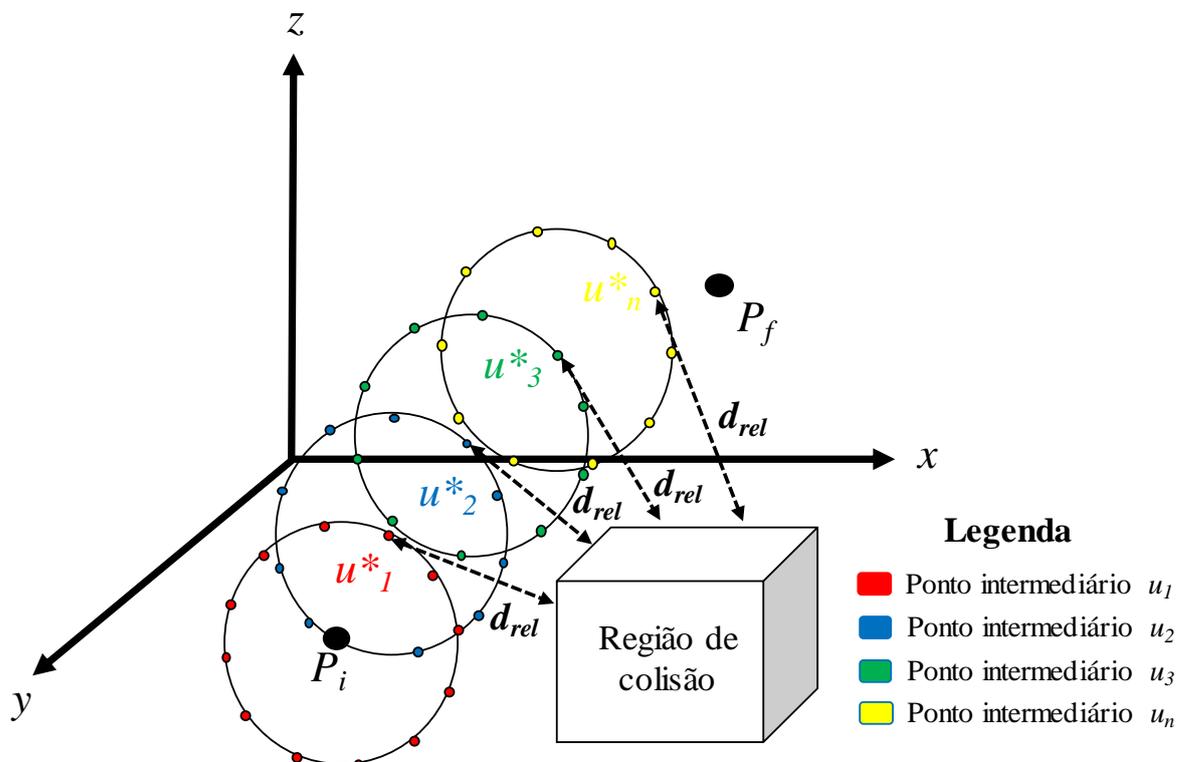


Figura 5.3 - Metodologia proposta para o planejamento do caminho.

Como ilustrado na Figura 5.3, a superfície de cada esfera é composta por pontos equidistantes, cada um desses pontos é constituído por um conjunto de variáveis de projeto, apresentadas na Equação (5.1). Essas variáveis consistem em possíveis soluções para o problema de otimização. Por exemplo, ao se tratar da primeira etapa de otimização ($i=1$), o ponto intermediário u_1^* se refere à melhor solução para essa etapa. Cumpre registrar que esse procedimento é realizado para as outras etapas de otimização, pois, para se obter a superfície de uma esfera em cada etapa de otimização, é necessário conhecer a solução obtida na etapa anterior.

Neste caso, para planejar o caminho do RPC, propõe-se a aplicação de uma estratégia de otimização da seguinte maneira:

Inicialmente, para determinar o ponto u_1^* , considera-se que o centro da esfera é definido pelo ponto inicial (P_{in}), cujas coordenadas são (x_{in}, y_{in}, z_{in}) . Assim, o ponto u_1^* otimizado consiste no ponto da esfera que apresenta a menor distância em relação ao ponto final (P_f), localizando-se a uma distância relativa (d_{rel}) da região de colisão. A seguir, assume-se que o ponto u_1^* é o centro da esfera para a próxima etapa de otimização e que a superfície desta esfera é composta por pontos, sendo cada ponto um conjunto de variáveis de projeto (soluções do problema de otimização) para determinar o ponto u_2^* . Este procedimento é realizado até que a distância entre a variável de projeto u_n e o ponto final (P_f) seja menor que o raio especificado para as esferas de referência utilizadas na representação do problema de otimização, como apresentado na Equação (5.6).

$$|u_i^* - P_f| \leq R \quad (5.6)$$

onde o ponto intermediário u_i^* é representado pelas variáveis (x_i, y_i, z_i) , e o ponto final é expresso pelas coordenadas (x_f, y_f, z_f) .

Em síntese, as restrições necessárias para o planejamento do caminho são as seguintes:

- (a) os pontos intermediários u_i^* devem ser gerados na superfície do volume de uma esfera de raio R**

É importante considerar que os pontos intermediários u_i^* são gerados em relação ao ponto obtido na etapa anterior de otimização. Assim, em cada iteração do algoritmo de otimização, os pontos intermediários u_i^* são determinados de acordo com a equação paramétrica da esfera, apresentada na Equação (5.7).

$$R^2 = (u_{i,1}^* - u_{i-1,1}^*)^2 + (u_{i,2}^* - u_{i-1,2}^*)^2 + (u_{i,3}^* - u_{i-1,3}^*)^2 \quad (5.7)$$

onde os termos $u_{i,1}^*$, $u_{i,2}^*$ e $u_{i,3}^*$, apresentados nas Equações (5.3) a (5.5), referem-se às variáveis de projeto relacionadas ao ponto u_i^* , e os termos $u_{i-1,1}^*$, $u_{i-1,2}^*$, e $u_{i-1,3}^*$ consistem nas soluções das variáveis obtidas na etapa anterior de otimização.

(b) os pontos intermediários u_i^* devem ser gerados em uma distância relativa (d_{rel}) da região de colisão

Outra restrição considerada no problema de otimização do caminho é a relação entre os pontos intermediários u_i^* e a zona de colisão. Assim, uma vez que a zona de colisão está mapeada no volume de trabalho, como descrito na Seção 4.2, a restrição (b) pode ser determinada. Utilizam-se funções parabólicas no caso de cilindros, e paraboloides de revolução no caso de esferas e cubos, tendo em vista que cada coordenada de pontos destas funções é equidistante a um ponto (foco) e a um plano de referência (diretriz). Estas propriedades são necessárias para que se possa avaliar se os pontos intermediários u_i^* se encontram dentro da região de colisão por meio de uma relação de distâncias apresentada na Equação (5.8):

$$d_2 \geq d_1 + d_{rel} \quad (5.8)$$

onde d_{rel} é a distância relativa que afasta os pontos intermediários do espaço geométrico que representa o parabolóide (esferas e cubos) e a parábola (cilindros) que envolve o obstáculo. Em outras palavras, essa distância é utilizada para manter os pontos intermediários afastados da superfície da geometria que delimita o obstáculo (paraboloides e parábolas), ou seja, se d_1 é igual a d_2 , o ponto intermediário encontra-se sob a superfície que delimita o obstáculo. No entanto, como a relação entre as distâncias d_1 e d_2 depende da geometria da parábola e do parabolóide, não é possível definir uma distância mínima do ponto intermediário u_i^* ao obstáculo. Para todas as situações, o valor de d_{rel} pode ser escolhido de acordo com a movimentação desejada.

No caso de esferas e cubos, a restrição (b) é determinada a partir das superfícies de paraboloides de revolução, de modo que, levando-se em conta os parâmetros apresentados na Equação (4.6), na Seção 4.2, é possível determinar o foco, a diretriz e a função do parabolóide, os quais são necessários para aplicar esta restrição, conforme ilustrado na Figura 5.4.

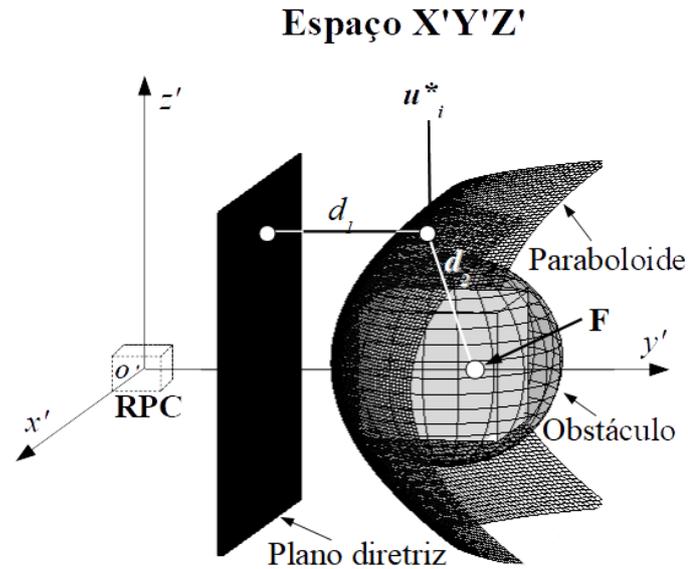
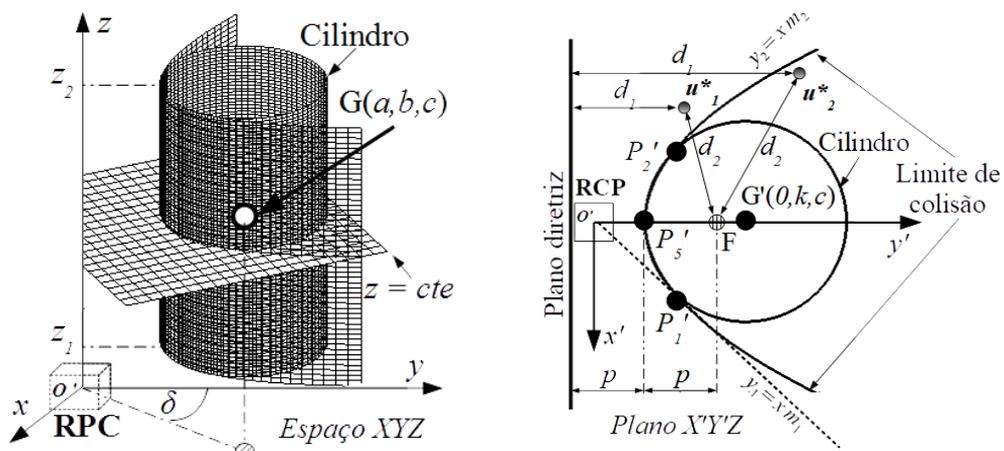


Figura 5.4 - Relação entre as distâncias d_1 e d_2 no caso de esferas e cubos.

Como ilustrado, para garantir que os pontos intermediários u_i^* fiquem fora da região de colisão, a distância d_2 , que se refere à diferença entre o foco (F) e o ponto u_i^* , deve ser maior que d_1 , que relaciona a distância entre u_i^* e o plano diretor.

Para os cilindros, considerando que a superfície que restringe o obstáculo é representada por uma parábola no plano bidimensional cuja altura é delimitada pelos valores z_1 e z_2 , vistos na Figura 5.5a, assume-se que a restrição (b) é analisada e representada no plano bidimensional, levando-se em conta as delimitações da altura desta superfície em função das dimensões do objeto.

A Figura 5.5 ilustra a representação da parábola e dos parâmetros utilizados na formulação da restrição (b) no caso de objetos representados por cilindros.



a) Cilindro no espaço tridimensional b) Cilindro no plano X'Y'Z'

Figura 5.5 - Relação entre as distâncias d_1 e d_2 no caso de cilindros.

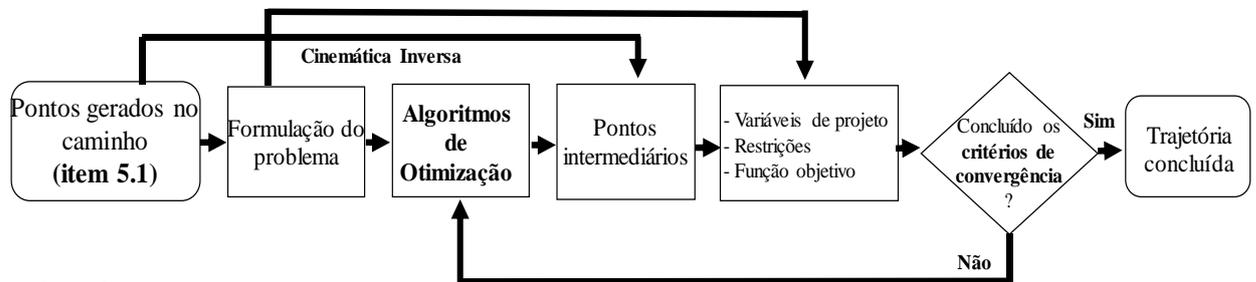
Para definir a equação parábola, utilizada para delimitar a superfície dos cilindros, são aplicadas as definições apresentadas na Seção 4.2. Neste caso, define-se que as restrições são similares ao caso de cilindros e cubos, já que as formulações diferem apenas no fato de que a restrição é válida somente dentro do intervalo de altura do cilindro, como apresentado na Equação (5.9).

$$d_2 \geq d_1 + d_{rel} \quad z_1 \leq z \leq z_2 \quad (5.9)$$

Nesta abordagem, considera-se que o cilindro possui uma altura maior que seu raio ($l_2 - l_1 > 5r$). Assim, se a altura do cilindro for maior que seu raio, essa restrição pode ser tratada como os casos de esferas e cubos, o que não é discutido no presente trabalho.

5.2. Estudo de Planejamento de Trajetória para o RPC

O planejamento de trajetória para o RPC é realizado através da interpolação dos pontos (caminho) no espaço de juntas do robô por meio de *b-splines* de 5° e 7° grau através da utilização dos algoritmos de otimização FMA, PSO e AG, conforme ilustra a metodologia apresentada no fluxograma da Figura 5.6.



Legenda:

Algoritmos de Otimização: Algoritmos Genéticos (AG); Algoritmo de Otimização com Enxame de Partículas (PSO); e Algoritmo de Otimização por Vagalumes (FMA)

Formulação do problema: Equações relativas ao problema de interpolação por *b-splines* de 5° e 7° grau

Função Objetivo: Minimiza força associada à dinâmica do RPC

Figura 5.6 - Metodologia proposta para o planejamento de trajetória.

Para implementar a trajetória do RPC, inicialmente estabelecem-se algumas características do problema, como:

- (i) transformar os pontos gerados no planejamento do caminho (Seção 5.1) em coordenadas de juntas através dos equacionamentos da cinemática inversa, apresentados na Seção 4.5.
- (ii) formular as funções *b-splines* de 5° e 7° grau que são utilizadas na interpolação dos pontos no espaço de juntas, com intuito de formular o problema de otimização.

Com relação ao item (ii), considera-se que a função utilizada na interpolação dos pontos da trajetória deve apresentar características que garantam a continuidade e a suavidade entre os pontos intermediários. Desta forma, a fim de verificar a influência desses aspectos no funcionamento do RPC, o presente trabalho propõe analisar as aplicações de *b-splines* de 5° e 7° grau, nas quais as condições de contorno associadas ao problema (velocidade, aceleração, *jerk*) nos pontos inicial e final da trajetória são definidas como zero. Isto é, levando-se em conta que os pontos gerados no planejamento do caminho estão transformados em coordenadas de juntas e que a formulação da função para interpolar os pontos está definida, propõe-se uma abordagem de otimização com base nos conceitos de interpolação por *b-splines*.

Para fins de convenção, define-se que os pontos intermediários no espaço de juntas são representados como:

$$PI = (q_{j,0}, q_{j,1}, \dots, q_{j,np}) \quad j = 1, \dots, nj \quad (5.10)$$

onde np é o número de pontos intermediários, e nj é o número de juntas do RPC ($nj=5$).

A seguir, é apresentada a metodologia utilizada para a formulação das funções *b-splines* de 5° e 7° grau e para a solução do problema de otimização proposto no planejamento de trajetória do RPC.

5.2.1. Representação da trajetória por funções b-splines de 5° e 7° grau

Considerando os conceitos de interpolação por *b-splines*, descritos na Seção 2.6.2.2, são apresentadas nesta seção as formulações utilizadas no método de otimização proposto para *b-splines* de 5° e 7° grau.

Como já mencionado, para determinar uma função *b-spline* que interpole os $np+1$ pontos intermediários, é preciso considerar os seguintes aspectos: 1) para cada ponto PI_k existe um nó u_k correspondente, o vetor de nós $U = [u_0, \dots, u_m]$ pode ser escolhido para o cálculo das funções de base; 2) a partir das propriedades de interpolação por *b-splines*, pode-se resolver um sistema de equações, onde os $n+1$ pontos de controle são as incógnitas do sistema; e, por fim, 3) uma vez

conhecidos os pontos de controle, obtém-se a curva resultante que passa por todos os pontos intermediários.

Neste trabalho, o método proposto para interpolação por *b-splines* de 5° e 7° grau baseia-se nos trabalhos de Mantovani, 2002, Gasparetto e Zanotto, 2007, e Liu et al., 2013. Essas abordagens, apesar de similares, apresentam diferenças consideráveis no contexto da presente pesquisa. Em Gasparetto e Zanotto, 2007, são propostas funções *b-splines* de 5° grau para o problema de otimização. Os autores, para atender as condições de velocidade, aceleração e *jerk* iguais a zero no início da trajetória, consideram pontos virtuais para se obter o número de parâmetros necessários à resolução do sistema de equações do problema de interpolação por *b-splines*. Já Liu et al., 2013, mesmo que apresentem um método para *b-splines* de 3° grau, 5° grau e 7° grau, consideram que os parâmetros da trajetória nos pontos iniciais e finais são controláveis (velocidade, aceleração e *jerk* iguais a zero) somente para os casos de *b-splines* de 7° grau. No caso de *b-splines* de 3° e 5° grau, consideram somente que os parâmetros de velocidade e aceleração são controláveis no início da trajetória. Nesse sentido, para gerar trajetórias de 5° e 7° grau com velocidade, aceleração e *jerk* iguais a zero no início e no fim do percurso, são apresentadas as particularidades descritas por Gasparetto e Zanotto, 2007, e Liu et al., 2013, para cada caso (5° e 7° grau), analisando-se aspectos referentes ao número de GDL do sistema, parametrização do vetor de nós, derivada de uma *b-spline* e resolução do sistemas de equações que permite determinar os pontos de controle e, conseqüentemente, a curva *b-spline* que interpola um conjunto de $np+1$ pontos intermediários.

Para que se possa abordar essas particularidades, as Equações (2.16) e (2.19), que se referem às propriedades das funções *b-splines* (número de nós, número de pontos de controle e grau da função) e à definição da curva *b-spline* na interpolação de $np+1$ pontos, são reproduzidas como Equações (5.11) e (5.12). Nessas equações, para facilitar a compreensão dos equacionamentos das curvas *b-splines* em termos de trajetórias robóticas, o número de nós (m) e os nós em função do tempo t estão representados, respectivamente, como:

$$m = p + n + 1 \quad (5.11)$$

$$q(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t)P_i \quad (5.12)$$

onde p é o grau do polinômio, n é o número de pontos de controle, $N_{i,p}(t)$ são as funções de base de grau p determinadas pelo vetor de nós de posição U , representados por uma sequência de

números reais não decrescentes ($t_j \leq t_{j+1} \mid j = 0, \dots, m + 1$), conforme apresentado na Equação (5.14), e P_i ($i = 0, \dots, n$) são os pontos de controle de posição.

Deve-se destacar que, para simplificar a análise, assume-se as formulações de Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, para o caso de uma junta. Cumpramos ressaltar que essas formulações podem ser aplicadas às demais juntas de um manipulador.

5.2.1.1. Graus de liberdade do sistema e parametrização do vetor de nós

Como citado, no caso de trajetórias de 5º grau, assume-se a formulação proposta por Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007. Essa proposta, diferentemente de outras abordagens convencionais da literatura, como Piegler e Tiller, 1997, Ferreira, 2011, entre outros, utiliza pontos virtuais para obter trajetórias de 5º grau com parâmetros controláveis (velocidade, aceleração e *jerk*) no início e no fim da trajetória.

Com vistas à interpolação dos $np+1$ pontos intermediários, observa-se na Equação (5.12) que o número de equações para resolver este sistema depende do número de pontos de controle (n) e do grau (p) da função, o qual é necessário para o cálculo das funções de base $N_{i,p}(t)$. Para trajetórias de 5º grau, o número de pontos de controle (ou número de GDL do sistema) é determinado levando-se em conta que os parâmetros (velocidade, aceleração e *jerk*) no início e no fim do percurso são controláveis (iguais a zero) e que para cada um desses parâmetros adicionais existe um respectivo ponto de controle.

Em Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, é proposto um equacionamento que, com base nas propriedades das funções *b-splines*, Equação (5.11), estabelece o número necessário de pontos de controle através de um método de interpolação, conhecido como *complete spline interpolation*⁴. Nessa abordagem, dado um intervalo $[a,b]$, para gerar uma função em que são conhecidos os $np+1$ pontos intermediários, os quais correspondem a instantes de tempo distintos τ_i , onde $i=0,\dots,np$ (com $\tau_0 = a$ e $\tau_{np} = b$), e as primeiras $r-1$ derivadas no extremos, a sequência de pontos intermediários é modificada. Ou seja, nesse caso, para impor os valores iniciais e finais de uma função de grau $p=5$ e ordem $k=6$ (onde $k=2r$, $r=3$), a sequência de pontos intermediários é modificada de modo que os valores extremos são r vezes repetidos na sequência original de pontos, obtendo-se, assim, a seguinte sequência:

⁴ Floater e Surazhsky, 2005, ao apresentarem os equacionamentos de interpolação por *splines* cúbicas, explicam que as condições finais são por vezes conhecidas como condições finais "*clamped*", e este tipo de interpolação por *spline* é às vezes chamado de *complete spline interpolation*.

$$\tau_0 = \dots = \tau_{r-1} < \tau_r < \dots < \tau_{n-r} = \dots = \tau_{n-1} \quad (5.13)$$

onde n é, por se tratar de funções de grau $p=5$ com condições de velocidade, aceleração e *jerk* nos extremos, definido pela Equação (5.20); e, para $p=7$, pela Equação (5.22).

De acordo com os autores, por analogia, o vetor de nós pode ser expresso pela Equação (5.14):

$$U = [t_0 = \dots = t_{k-1} < t_k < \dots < t_{n-r-1} < t_{n-r} = \dots = t_{n-1}] \quad (5.14)$$

sendo $t_0 = a$, $t_{n+p} = b$, e os nós correspondentes ao intervalo t_k e t_{n-r-1} definidos pela Equação (5.15).

$$t_{p+i-1} = \tau_{r-1+i} \quad i = 1, \dots, n - p - 1 \quad (5.15)$$

O vetor de nós U é definido por uma sequência de nós equidistantes, com $p+1$ valores repetidos nas extremidades (*clamped* uniforme). Exemplos com a representação desses vetores são apresentados por Gasparetto e Zanotto, 2007, onde constata-se, ao analisar suas primeiras implementações, que as trajetórias relativas ao *jerk* são descontínuas nos pontos extremos dessa função, uma vez que não são impostas as condições iniciais e finais necessárias para essa grandeza cinemática. A fim de garantir uma trajetória que cumpra com essas premissas, os autores introduzem dois pontos virtuais, os quais fornecem as condições necessárias para atribuir os valores de *jerk* nas extremidades da trajetória, posicionados no segundo e no penúltimo pontos da sequência de pontos intermediários. Portanto, no caso de funções de 5º grau, a Equação (5.10) pode ser reescrita como:

$$PIV = (q_{j,0}, q_{j,1}, \dots, q_{j,np+2}) \quad j = 1, \dots, nj \quad (5.16)$$

Destacam ainda que os valores dos pontos extras no segundo e penúltimo elemento do vetor de pontos intermediários não são fixos e pertencem à formulação utilizada no método de otimização. Estes pontos são determinados por meio da Equação (5.17):

$$q_{j,2} = \frac{q_{j,1} + q_{j,3}}{2} \quad q_{j,np+1} = \frac{q_{j,np} + q_{j,np+2}}{2} \quad (5.17)$$

Portanto, no caso de uma função de grau $p=5$, levando em conta os $np+3$ pontos intermediários e as propriedades das funções *b-splines*, os autores definem que o número de nós necessários é

$$m = (np + 2) + 2p = np + 12 \quad (5.18)$$

e que, analogamente, pode ser definido como:

$$m = n + 6 \quad (5.19)$$

Igualando as Equações (5.18) e (5.19), obtém-se que o número de pontos de controle (n) é dado por:

$$n = np + 6 \quad (5.20)$$

A formulação acima determina os GDL necessários para interpolar os pontos intermediários, impondo as condições iniciais para velocidade, aceleração e *jerk* para os casos de funções de grau $p=5$.

Para trajetórias de grau $p=7$, no presente trabalho, o número de nós e o número de pontos de controle são determinados com base no método proposto por Liu et al., 2013. Essa abordagem, que considera o caso de nós adicionais para garantir as condições controláveis nas extremidades da trajetória, define o número de nós como:

$$m = np + 2p \quad (5.21)$$

Substituindo a Equação (5.21) pela Equação (5.11), obtém-se os pontos de controle (n) de acordo com a Equação (5.22).

$$n = np + p - 1 \quad (5.22)$$

Analisando a Equação (5.12), Liu et al., 2013, inferem que são necessários n pontos de controle (P_i) para resolver o sistema de equações associado ao problema de interpolação por *b-splines*. Considerando que o número de pontos de controle (n) depende do número de pontos

intermediários (np) e do grau p da função, como se pode observar na Equação (5.22), os autores constataam que, para um dado número de pontos intermediários (np), o grau p influencia diretamente o número de GDL do sistema. Isso requer a aplicação de condições adicionais nas extremidades da trajetória, já que, dependendo da relação entre o número de pontos intermediários (np) e o grau p da função, quando aplicados à Equação (5.22), são necessárias $p-1$ equações.

Para exemplificar, Liu et al., 2013, mostram que, diferentemente do método proposto por Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, uma vez definidos os $np+1$ pontos intermediários e a função sendo de grau $p=3$, são necessárias 2 condições adicionais relativas às restrições de velocidade; já, se a função é de grau $p=5$, são necessárias 4 condições adicionais associadas às restrições de velocidade e aceleração; e, por fim, se a função é de grau $p=7$, são necessárias 6 condições adicionais relativas às restrições de velocidade, aceleração e *jerk*.

O vetor de nós para trajetórias de grau $p=7$, semelhantemente ao caso de funções de grau $p=5$, também é determinado pela Equação (5.14). Nesse caso, a principal diferença é que o vetor de nós é determinado em função do grau da *b-spline*, ou seja, se o grau é $p=7$, a ordem é $k=8$ (onde $k=2r$, $r=4$), e o número de pontos de controle (n) é definido pela Equação (5.22).

Em síntese, assumindo no presente trabalho as abordagens propostas por Gasparetto e Zanotto, 2007, para trajetórias de 5º grau, e Liu et al., 2013, para trajetórias de 7º grau, estabeleceu-se que o número de pontos de controle (GDL) para ambos os casos são definidos pelas equações (5.20) e (5.22), respectivamente. Apesar de as pesquisas de Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, e de Liu et al., 2013, tratarem de métodos que abordam funções com diferentes graus para interpolar $np+1$ pontos intermediários, o número de pontos de controle (n), que se refere ao número de equações do sistema, para ambos os casos são iguais, já que ambas as abordagens consideram as condições iniciais e finais para velocidade, aceleração e *jerk*, de modo que a única diferença entre os métodos é que a abordagem de Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, considera os pontos virtuais para atender o número de GDL do sistema.

Outro aspecto importante na interpolação por *b-splines* é a definição e a representação do vetor de nós. No presente trabalho, o número de nós é representado pelas Equação (5.19), para funções de 5º grau, e pela Equação (5.21), para funções de 7º grau, enquanto a parametrização do vetor de nós se baseia, para ambos os casos, no método *clamped* uniforme, descrito na Seção 2.6.2.2 e apresentado por Gasparetto e Zanotto, 2007.

Com a finalidade de apresentar a formulação do sistema de equações, devem-se analisar algumas propriedades das derivadas de uma curva *b-spline*, as quais são necessárias para

representar as restrições iniciais e finais de velocidade, aceleração e *jerk*, conforme descrito a seguir.

5.2.1.2. Derivada de uma curva *b-spline*

Um aspecto importante no método de interpolação com especificação das derivadas nos extremos (velocidade, aceleração e *jerk*) está associado à definição do número de equações necessárias para resolver o sistema de equações lineares e para formular as equações relativas às derivadas da *b-spline*, com o intuito de encontrar aquelas adicionais em função das condições cinemáticas.

Neste trabalho, a formulação proposta para as derivadas se baseia nos trabalhos de Mantovani, 2002, Gasparetto e Zanotto, 2007, e Liu et al., 2013, visto que nesses trabalhos foram consideradas equações adicionais para garantir que as $r-1$ derivadas da trajetória iniciem e terminem nos pontos de controle da função *b-spline*. Considerando que a trajetória em posição é expressa pela Equação (5.12), e a derivada de uma curva *b-spline* de grau p é determinada através da derivada da função de base, como mencionado na Seção 2.6.2.2, pode-se estabelecer as equações de velocidade, aceleração e *jerk* nos instantes iniciais e finais das respectivas curvas. Destaca-se também que o número de pontos de controle (n) e a ordem k utilizados nos equacionamentos apresentados a seguir dependem do grau p da função.

Para estabelecer as condições iniciais e finais de velocidade, a curva *b-spline* referente à velocidade é dada por:

$$V(t) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p-1}(t)PV_i \quad (5.23)$$

onde $N_{i,p-1}(t)$ são as funções de base de grau $p-1$ determinadas pelo vetor de nós Uv , e PV_i ($i = 0, \dots, n-1$) são os pontos de controle de velocidade.

A sequência de nós Uv é determinada excluindo o primeiro e o último elemento do vetor de nós de posição U , Equação (5.14), definindo-se, assim, uma sequência de nós do tipo *clamped* compatível com o grau $p-1$, conforme a Equação (5.24):

$$Uv = [t_0 = \dots = t_{k-2} < t_{k-1} < \dots < t_{n-r-2} < t_{n-r-1} = \dots = t_{n-3}] \quad (5.24)$$

Os pontos de controle de velocidade PV_i , cujos equacionamentos apresentados por Piegl e Tiller, 1997, Mantovani, 2002, Gasparetto e Zanotto, 2007, Liu et al., 2013, entre outros, são determinados pela Equação (5.25).

$$PV_i = \frac{p}{U_{i+p+1} - U_{i+1}} (P_{i+1} - P_i) \quad (5.25)$$

Considerando que os pontos de controle nas extremidades devem coincidir com o valor inicial e final da curva de velocidade, os autores relacionam a Equação (5.25) com a velocidade inicial e final da trajetória, de acordo com as Equações (5.26) e (5.27), respectivamente:

$$V_{in} = PV_0 = \frac{p}{U_{p+1} - U_1} (P_1 - P_0) = -\frac{p}{U_{p+1} - U_1} P_0 + \frac{p}{U_{p+1} - U_1} P_1 \quad (5.26)$$

$$V_{fim} = PV_{n-1} = \frac{p}{U_{n+p} - U_n} (P_n - P_{n-1}) = -\frac{p}{U_{n+p} - U_n} P_{n-1} + \frac{p}{U_{n+p} - U_n} P_n \quad (5.27)$$

Tratando-se das condições iniciais e finais de aceleração, a curva *b-spline* referente à aceleração é dada por:

$$A(t) = \sum_{i=0}^{n-2} N_{i,p-2}(t) PA_i \quad (5.28)$$

onde $N_{i,p-2}(t)$ são as funções de base de grau $p-2$ determinadas pelo vetor de nós Ua , e PA_i ($i = 0, \dots, n-2$) são os pontos de controle de aceleração.

A sequência de nós Ua é estabelecida eliminando-se o primeiro e o último elemento do vetor de nós de velocidade Uv , obtendo-se, assim, uma sequência de nós do tipo *clamped* compatível com o grau $p-2$, o qual se refere à curva de aceleração.

$$Ua = [t_0 = \dots = t_{k-3} < t_{k-2} < \dots < t_{n-r-3} < t_{n-r-2} = \dots = t_{n-5}] \quad (5.29)$$

Os pontos de controle de velocidade PA_i são definidos pela Equação (5.30):

$$PA_i = \frac{p-1}{Uv_{i+p} - Uv_{i+1}} (PV_{i+1} - PV_i) \quad (5.30)$$

Considerando que os pontos de controle nas extremidades devem coincidir com o valor inicial e final da curva de aceleração, relaciona-se a Equação (5.30) com a aceleração inicial e final da trajetória, de acordo com as Equações (5.31) e (5.32), respectivamente:

$$A_{in} = PA_0 = \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} (PV_1 - PV_0) \quad (5.31)$$

$$AV_{fim} = PA_{n-2} = \frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} (PV_{n-1} - PV_{n-2}) \quad (5.32)$$

Para que as equações relacionadas às condições iniciais e finais de aceleração possam ser utilizadas no sistema de equações lineares, apresentado a seguir, Seção 5.2.1.3, é necessário expressá-las em função dos pontos de controle de posição P_i , os quais são as condições necessárias para a interpolação dos pontos intermediários da trajetória. Assim, reescrevendo as Equações (5.31) e (5.32) em função das equações dos pontos de controle de velocidade (PV_0, PV_1, PV_{n-1} e PV_n), e considerando os equacionamentos apresentados no Anexo B, os autores expressam as condições iniciais e finais de aceleração em função dos pontos de controle de posição, conforme as Equações (5.33) e (5.34).

$$A_{in} = PA_0 = k_1 P_0 + k_2 P_1 + k_3 P_2 \quad (5.33)$$

$$AV_{fim} = PA_{n-1} = k_{n-2} P_{n-2} + k_{n-1} P_{n-1} + k_n P_n \quad (5.34)$$

No caso das condições iniciais e finais relativas ao *jerk*, a curva *b-spline* é definida como:

$$J(t) = \sum_{i=0}^{n-3} N_{i,p-3}(t) PJ_i \quad (5.35)$$

onde $N_{i,p-3}(t)$ são as funções de base de grau $p-3$ determinadas pelo vetor de nós U_j , e PJ_i ($i = 0, \dots, n-3$) são os pontos de controle do *jerk*.

A sequência de nós U_j é determinada eliminando-se o primeiro e o último elemento do vetor de nós de posição U_a , obtendo-se, assim, uma sequência de nós do tipo *clamped* compatível com o grau $p-3$.

$$U_j = [t_0 = \dots = t_{k-4} < t_{k-5} < \dots < t_{n-r-4} < t_{n-r-3} = \dots = t_{n-7}] \quad (5.36)$$

Os pontos de controle relativos ao *jerk* PJ_i são definidos pela Equação (5.37):

$$PJ_i = \frac{p-2}{Ua_{i+p-1} - Ua_{i+1}} (PA_{i+1} - PA_i) \quad (5.37)$$

Considerando que os pontos de controle nas extremidades devem coincidir com o valor inicial e final da curva de *jerk*, é possível relacionar a Equação (5.37) com o *jerk* inicial e final da trajetória, de acordo com as Equações (5.38) e (5.39), respectivamente:

$$J_{in} = PJ_0 = \frac{p-2}{Ua_{p-1} - Ua_1} (PA_1 - PA_0) \quad (5.38)$$

$$J_{fim} = PJ_{n-3} = \frac{p-2}{Ua_{n+p-4} - Ua_{n-2}} (PA_{n-2} - PA_{n-3}) \quad (5.39)$$

Para que as equações relacionadas às condições iniciais e finais de *jerk* possam ser utilizadas no sistema de equações lineares, apresentado a seguir, Seção, 5.2.1.3, é necessário expressá-las em função dos pontos de controle de posição P_i , os quais são condições necessárias para a interpolação dos pontos intermediários da trajetória. Assim, reescrevendo as Equações (5.38) e (5.39) em função das equações dos pontos de controle de aceleração (PA_0, PA_1, PA_{n-2} e PA_{n-3}), e considerando os equacionamentos apresentados no Anexo B, os autores expressam as condições iniciais e finais de *jerk* em função dos pontos de controle de posição, conforme as Equações (5.40) e (5.41):

$$J_{in} = PJ_0 = G_1 P_0 + G_2 P_1 + G_3 P_2 + G_4 P_3 \quad (5.40)$$

$$J_{fim} = PJ_{n-3} = G_{n-3} P_n + G_{n-2} P_{n-1} + G_{n-1} P_{n-2} + G_n P_{n-3} \quad (5.41)$$

5.2.1.3. Sistema de equações para interpolação por *b-splines*

A partir das formulações descritas nas seções anteriores, é possível resolver o sistema de equações associado ao problema de interpolação por *b-splines* e, conseqüentemente, determinar os pontos de controle, para, posteriormente, definir a curva *b-spline* que interpola os $np+1$ pontos intermediários. O sistema de equações a ser considerado no presente trabalho, apesar de reproduzir o método apresentado por Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, que utiliza equações adicionais para garantir as condições controláveis no início e no fim da trajetória (velocidade,

aceleração e *jerk*) no caso de uma trajetória de grau $p=5$, é utilizado aqui em trajetórias de 5° e 7° grau.

Aplicando-se o método proposto por Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, ao planejamento da trajetória em estudo, o sistema de equações referente às n_j juntas do RPC, cuja solução são pontos de controle $P_{j,i}$, onde $j=0, \dots, n_j$, é definido por:

$$\begin{aligned}
 -\frac{p}{U_{p+1} - U_1} \cdot \frac{p}{U_{p+1} - U_1} \cdot P_{j,1} &= V_{j,in} \\
 k_1 \cdot P_{j,0} + k_2 \cdot P_{j,1} + k_3 \cdot P_{j,2} &= A_{j,in} \\
 G_1 \cdot P_{j,0} + G_2 \cdot P_{j,1} + G_3 \cdot P_{j,2} + G_4 \cdot P_{j,3} &= J_{j,in} \\
 \sum_{k=0}^n N_{p,k}(t_i) P_{j,k} &= PI_{j,i} \\
 G_{n-3} \cdot P_n + G_{n-2} \cdot P_{n-1} + G_{n-1} \cdot P_{n-2} + G_n \cdot P_{n-3} &= J_{j,fin} \\
 k_{n-2} \cdot P_{j,n-2} + k_{n-1} \cdot P_{j,n-1} + k_n \cdot P_{j,n} &= A_{j,fin} \\
 -\frac{p}{U_{n+p} - U_n} \cdot P_{j,n-1} + \frac{p}{U_{n+p} - U_n} \cdot P_{j,n} &= V_{j,fin}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

onde p é o grau da função, $P_{j,k}$ ($i = 0, \dots, n$) são os pontos de controle de posição; t_i são os nós referentes aos pontos intermediários que, em função do grau p , são apresentados na Tabela 5.1, G_t ($t = 1, \dots, n-1, n$) são as constantes utilizadas no equacionamento das condições adicionais de aceleração e *jerk*, apresentadas no Anexo B; $N_{i,p}(t)$ são as funções de base de grau p determinadas pelo vetor de nós de posição U ; e $PI_{j,i}$ são as i posições intermediárias para cada junta do RPC.

A Equação (5.42), reescrita na forma compacta, pode ser expressa como:

$$AX_j = B_j \quad j = 1, \dots, n_j \tag{5.43}$$

onde,

$$X_j = \begin{bmatrix} P_{j,0} \\ \dots \\ P_{j,n} \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, n_j \tag{5.44}$$

Para resolver o sistema de equações, é necessário analisar os equacionamentos referentes às condições iniciais e finais de velocidade, aceleração e *jerk*, assim como a quarta equação do sistema, que é a função *b-spline* de grau p utilizada na interpolação dos pontos intermediários.

No caso de trajetórias de grau $p=5$, para determinar as três primeiras e as três últimas equações do sistema proposto, é necessário definir o vetor de nós de posição (U) e as constantes utilizadas no equacionamento das condições adicionais de aceleração e *jerk*. Nesse caso, o vetor de nós é determinado pela Equação (5.14), onde o número de pontos de controle (n) é definido pela Equação (5.20), e, para $p=5$, a ordem é $k=6$. As constantes adicionais são determinadas por meio dos pontos de controle de velocidade, aceleração e *jerk*, Equações (5.25), (5.30) e (5.37), as quais, através de simplificações matemáticas, são expressas em função dos pontos de controle de posição $P_{j,i}$, e dependem do grau da função (p) e do vetor de nós no caso em que $p=5$. Para maiores informações sobre os equacionamentos utilizados por Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, para determinar essas constantes, ver Anexo B.

Como pode-se observar na Equação (5.42), a quarta equação do sistema de equações depende do número de pontos de controle (n), dos nós t_i , os quais são utilizados no cálculo das funções de base $N_{p,k}(t_i)$ e dos pontos intermediários $PI_{j,i}$. O número de pontos de controle (n), como já apresentado nos equacionamentos das condições adicionais nos extremos da trajetória, é definido pela Equação (5.20), estabelecendo-se, assim, o número de equações necessárias para resolver o problema de interpolação por *b-splines*. O vetor de nós U , quando se trata do quarto termo do sistema de equações apresentado na Equação (5.42), é determinado apenas pelos pontos intermediários da trajetória. Isto é, levando-se em conta que as funções de 5º grau requerem pontos virtuais (PIv), apresentados na Equação (5.16), para atender as condições adicionais do *jerk* e que o número de pontos de controle (n) para funções de 5º grau considera os pontos virtuais (Equação 5.20), é necessário definir um vetor de nós correspondentes aos pontos reais, uma vez que se tratam dos pontos onde a curva deve interpolar.

Assim, tendo em conta a representação do vetor de nós apresentada na Equação (5.14), utiliza-se, para facilitar o entendimento do cálculo das funções de base, uma tabela que relaciona o vetor de nós U e os intervalos de tempos relativos aos pontos reais e virtuais, apresentada em Gasparetto e Zanotto, 2008. Na Tabela 5.1, adaptada de Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, são apresentadas as relações entre o vetor de nós (U) e o intervalo de tempo correspondente aos pontos reais e virtuais.

Tabela 5.1 - Relação entre o vetor de nós e os instantes de tempo.

Vetor de Nós (U) Eq. (5.14)	$u_0 = \dots =$ $u_{k-2} = 0$	$u_{k-1} = t_{in} = 0$	u_k	u_{k+1}	...	u_{n-r-2}	u_{n-r-1}	$u_{n-r} = t_{fim}$	$u_0 = \dots$ $= u_{n-1}$ $= t_{fim}$
Intervalo de tempo correspondente aos pontos reais	-	$t_0 = t_{in} = 0$	-	t_1	...	t_{np-2}	-	$t_{np} = t_{fim}$	-
Intervalo de tempo correspondente aos pontos virtuais	-	$t_0 = t_{in} = 0$	t_1	t_2	...	t_{np}	t_{np+1}	t_{np+2} $= t_{fim}$	-

Como pode-se observar na Tabela 5.1, o vetor de nós é representado pelos instantes de tempo relativos aos pontos intermediários e virtuais, porém a principal diferença é que, no tempo inicial e no tempo final da trajetória, o vetor de nós tem os valores repetidos $p+1$ vezes por se tratar de uma parametrização do tipo *clamped*, descrita na Seção 2.6.2.2. Assim, para calcular as funções de base para os casos de trajetórias de grau $p=5$, utiliza-se, por convenção, o intervalo de tempo relativo aos pontos reais, conforme apresentado na quarta equação do sistema.

No caso de trajetórias de grau $p=7$, para determinar as três primeiras e as três últimas equações do sistema adotado no presente trabalho, também é preciso definir o vetor de nós de posição (U) e as constantes utilizadas no equacionamento das condições adicionais de aceleração e *jerk*. No entanto, existem particularidades decorrentes do grau da função. Em relação ao vetor de nós, a principal diferença refere-se ao número de pontos de controle (n) e à ordem k , ou seja, por se tratar de uma função de grau $p=7$, o vetor de nós, também utilizando a Equação (5.14), pode ser reescrito, de modo que o número de pontos de controle (n) é definido pela Equação (5.22), e a ordem é $k=8$. Para determinar as constantes adicionais por meio dos pontos de controle de velocidade, aceleração e *jerk*, Equações (5.25) (5.30) e (5.37), são utilizadas as mesmas simplificações matemáticas que as utilizadas no caso em que $p=5$. Essas simplificações possibilitam representar as três primeiras e as três últimas equações do sistema proposto em função dos pontos de controle de posição $P_{j,i}$, porém utiliza-se o vetor de nós para o caso em que $p=7$.

No caso de trajetórias de grau $p=7$, para resolver a quarta equação do sistema de equações, também é necessário, como formulado para trajetórias de grau $p=5$, definir o número de pontos de controle (n), o vetor de nós U , que é utilizado no cálculo das funções de base $N_{p,k}(t_i)$, e os pontos intermediários $PI_{j,i}$. O número de pontos de controle (n), como já apresentado nos equacionamentos das condições adicionais nos extremos da trajetória, é definido pela Equação (5.22), estabelecendo-se o número de equações necessárias para resolver o problema de interpolação por *b-splines*. O vetor de nós U , quando se trata da quarta equação do sistema de

equações, é determinado considerando-se somente os pontos intermediários da trajetória, visto que não são necessários pontos adicionais para estabelecer o número de pontos de controle para resolver essa equação. Portanto, para as funções de base para os casos de trajetórias de grau $p=7$, utiliza-se, por convenção, o intervalo de tempo relativo aos pontos reais.

Então, para implementar a técnica de interpolação por *b-splines* no método de otimização do planejamento de trajetória para o RPC, no caso de trajetórias de grau $p=5$ e $p=7$, é necessário considerar as seguintes condições:

- 1) na Equação (5.43), a matriz A é não singular, e depende somente dos intervalos de tempo entre os pontos $t_i - t_{i-1}$, onde $i=1, \dots, np$;
- 2) para que se possa determinar a matriz A , é necessário avaliar funções de base (5° e 7° graus) nos instantes relativos aos pontos reais, apresentados na Tabela 5.1;
- 3) na quarta equação, para que se possa calcular as funções de base, utiliza-se o método da recorrência de *De-Boor*, à medida que, utilizando-se os equacionamentos descritos na Seção 2.6.2.2, é possível calcular as funções de base de grau p relacionadas aos nós t_i , onde $i=0, \dots, np$, para $p=5$, e $i=0, \dots, np+2$, para $p=7$, apresentados na Tabela 5.1;
- 4) os instantes associados aos pontos virtuais, no caso de trajetórias de grau $p=5$, são utilizados somente para se estabelecer o número de GDL, ou pontos de controle, necessários às condições adicionais de *jerk*, não sendo utilizados na quarta equação do sistema de equações; e, para que se possa determinar as equações cinemáticas adicionais (velocidade, aceleração e *jerk*), o vetor de nós deve ser considerado; e
- 5) utilizando-se os equacionamentos apresentados nesta seção, é possível relacionar o problema de otimização de trajetórias e o método de interpolação por *b-splines* de 5° e 7° graus. Ou seja, o vetor de nós U , Equação (5.14), é utilizado na parametrização das variáveis de projeto do problema de otimização de trajetória, Equação (5.46), possibilitando assim a determinação da curva *b-spline* (5° e 7° graus) que interpola os np pontos intermediários a cada iteração, uma vez que o número de pontos de controle (n), a resolução do sistema de equações e os demais parâmetros do problema por *b-splines* são determinados em função do grau p da trajetória, como descrito na presente seção.

Essas informações permitem obter as variáveis necessárias para se determinar as expressões das restrições (cinemáticas e dinâmicas) e a função objetivo do problema de otimização, conforme descrito a seguir.

5.2.2. Formulação do problema de otimização para o planejamento de trajetórias

O método proposto, que se baseia nas pesquisas de Saramago e Steffen Jr., 2000, Gasparetto e Zanotto, 2007, Abu-Dakka, 2011, entre outros, considera uma abordagem que relaciona os efeitos dinâmicos no movimento do RPC. Com o intuito de elucidar os conceitos aplicados ao problema de otimização imposto pelo planejamento da trajetória do RPC, convencionou-se que, daqui em diante, o termo ‘força’ aplica-se apenas ao espaço dos atuadores, enquanto o termo ‘torque’ é aplicado ao espaço de juntas. A transformação do espaço dos atuadores para o espaço de juntas é feita por meio da matriz de relação geométrica (J), conforme os conceitos apresentados na Seção 4.3.1.

A formulação do problema de otimização é definida como:

$$\text{minimizar } G_{\text{trajetória}} = \int_0^T \sum_{i=1}^{nj} (F_i(t))^2 dt \quad (5.45)$$

onde T é o tempo total do movimento, F_i é a força do i -ésimo atuador associada à dinâmica do RPC, sujeito a restrições cinemáticas, dinâmicas e de posição.

As restrições cinemáticas relacionam-se com os valores mínimos e máximos de velocidade (\dot{q}_{\min_i} e \dot{q}_{\max_i}), de aceleração (\ddot{q}_{\min_i} e \ddot{q}_{\max_i}) e de *jerk* (\dddot{q}_{\min_i} e \dddot{q}_{\max_i}) de todas as juntas. As restrições dinâmicas estão associadas ao valor máximo de torque admissível na i -ésima junta (τ_{\max_i}), e as restrições de posição relacionam-se ao posicionamento de cada junta com respeito às zonas de colisão. As restrições cinemáticas e dinâmicas são determinadas em função dos equacionamentos dos servoposicionadores pneumáticos, do modelo de atrito LuGre para os atuadores pneumáticos do robô e de procedimentos experimentais, conforme descrito a seguir.

O vetor que representa as variáveis de projeto é definido como:

$$x_{\text{trajetória}} = (h_1, \dots, h_p)^T \quad (5.46)$$

Na Equação (5.46), cada elemento do vetor de projeto h_i é definido como o intervalo de tempo entre dois pontos sucessivos ($t_{i+1} - t_i$), onde o tamanho deste vetor varia de acordo com o número de posições intermediárias (p).

Tratando-se de um robô pneumático, para definir as parcelas relativas à força associada à dinâmica do RPC (função objetivo), deve-se estabelecer uma relação matemática entre o

equacionamento dinâmico baseado na formulação lagrangeana e as forças pneumáticas dos atuadores. A fim de apresentar esses conceitos, os equacionamentos referentes ao Princípio do Trabalho Virtual, à força líquida pneumática (F_l) e ao equacionamento dinâmico baseado na formulação lagrangeana, Equações (4.12), (4.13) e (4.33), respectivamente, são aqui reproduzidos na forma matricial.

$$F_l = [A(p_a - p_b) - F_{atr} - F_{grav} - F_e] \quad (5.47)$$

$$\tau = J^{-1}F_l \quad (5.48)$$

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (5.49)$$

onde, pelo fato do RPC ser composto por 5 GDL, $A = diag[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5]$ é uma matriz de áreas efetivas dos êmbolos dos atuadores, $F_{atr} = [F_{atr_1}, F_{atr_2}, F_{atr_3}, F_{atr_4}, F_{atr_5}]^T$ é o vetor de forças de atrito internas nos atuadores, $F_e = [F_{e_1}, F_{e_2}, F_{e_3}, F_{e_4}, F_{e_5}]^T$ representa o vetor de possíveis forças externas e $F_{grav} = [F_{grav_1}, F_{grav_2}, F_{grav_3}, F_{grav_4}, F_{grav_5}]^T$ é o vetor que representa as forças gravitacionais na direção de movimentação do êmbolo, $q \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de coordenadas generalizadas das juntas e J , conforme já descrito, é a matriz de transferência do espaço dos robô para o espaço dos atuadores.

Levando em conta que a Equação (5.48) relaciona o torque nas juntas e a força líquida pneumática por meio do Princípio do Trabalho Virtual e que a Equação (5.49) se refere ao torque desejado em função da dinâmica do manipulador, o qual considera os efeitos inerciais, de Coriolis e gravitacionais, define-se que a força necessária para que o i -ésimo atuador para o acione cada uma das juntas do RPC é dada pela Equação (5.50):

$$(H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q))J = F_l \quad (5.50)$$

Desta forma, como o objetivo deste trabalho é gerar trajetórias que possibilitem melhorar o desempenho do controlador baseado na lei do torque computado [Sarmanho, 2014] aplicado ao RPC, define-se que a função objetivo, Equação (5.45), está relacionada à força do i -ésimo atuador associada à dinâmica deste manipulador, de acordo com a Equação (5.50). O objetivo desta abordagem é obter os menores esforços em cada atuador do RPC, facilitando a resposta do algoritmo de controle durante a execução da trajetória, de modo a não ultrapassar os limites físicos de operação de cada atuador, que constituem as restrições dinâmicas do problema de otimização em estudo. É importante ressaltar que a parcela referente ao atrito é considerada na dinâmica do

sistema, já que os equacionamentos do atrito são utilizados nas equações que delimitam a força máxima que pode ser aplicada por cada atuador, conforme pode-se observar no equacionamento das restrições dinâmicas, apresentadas a seguir.

Para atender as condições operacionais do RPC, devem ser estabelecidas restrições para cada junta do robô, pois, como se trata de um manipulador pneumático, cada atuador possui característica operacional diferente, como, por exemplo, curso de operação, sistema de transmissão, atrito, etc. Ou seja, quando se considera uma trajetória no espaço de trabalho do RPC, esta trajetória deve corresponder a 5 trajetórias específicas, que, no espaço de juntas, variam para cada GDL do robô. O objetivo é, portanto, o de planejar uma interpolação da trajetória minimizando os parâmetros apresentados na Equação (5.45), de maneira que as restrições de colisão, cinemáticas e dinâmicas aplicadas às juntas sejam definidas conforme as características específicas de cada junta do RPC. Assim, buscando alcançar o objetivo de garantir a trajetória ótima do RPC, são adotadas as restrições associadas ao problema de otimização apresentadas nas Seções 5.2.2.1, 5.2.2.2 e 5.2.2.3, que seguem.

5.2.2.1. Restrições laterais do problema de otimização de trajetórias

No presente trabalho, as restrições laterais são utilizadas para limitar o intervalo de tempo entre duas posições sucessivas da trajetória, conforme o método apresentado por Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007. Tratando-se das restrições laterais inferiores (L_b), considera-se os valores máximos de velocidade de cada junta (\dot{q}_{max_i}) e o deslocamento do manipulador em função dos pontos intermediários da trajetória. Em outras palavras, como os limites máximos de velocidade e a posição dos pontos intermediários podem ser diferentes para cada junta, o intervalo mínimo entre os pontos é definido para o caso da junta mais crítica ou restritiva, ou seja, aquela que percorre os pontos intermediários no maior tempo possível em função da sua máxima velocidade permitida, conforme a Equação (5.51):

$$h_i = \max_{j=1, \dots, n_j} \left\{ \frac{|q_{j,i+1} - q_{j,i}|}{\dot{q}_{max_i}} \right\} \quad (5.51)$$

Já as laterais superiores são arbitradas de acordo com as posições dos pontos intermediários no espaço de juntas, visto que as mesmas influenciam significativamente a dinâmica do RPC, como pode-se observar na Equação (5.50). Os valores das restrições laterais inferiores e superiores aplicados ao problema de otimização de trajetórias são apresentados no capítulo 6.

5.2.2.2. Restrições de colisão no espaço de juntas

Mesmo que a Seção 5.1 apresente uma proposta de relação entre distâncias (d_1 e d_2) para assegurar que os pontos intermediários (u_i^*) fiquem fora da zona de colisão, não é possível, somente com essa abordagem, garantir que a trajetória interpolada no espaço de juntas execute um movimento livre de colisão, visto que, dependendo da distância entre os pontos intermediários e o grau da função interpolada, possíveis oscilações decorrentes da aplicação desta função podem ocasionar colisões no movimento do RPC. A Figura 5.7 representa um caso em que os pontos intermediários não se encontram na região de colisão, mas a função que interpola estes pontos atinge essa região.

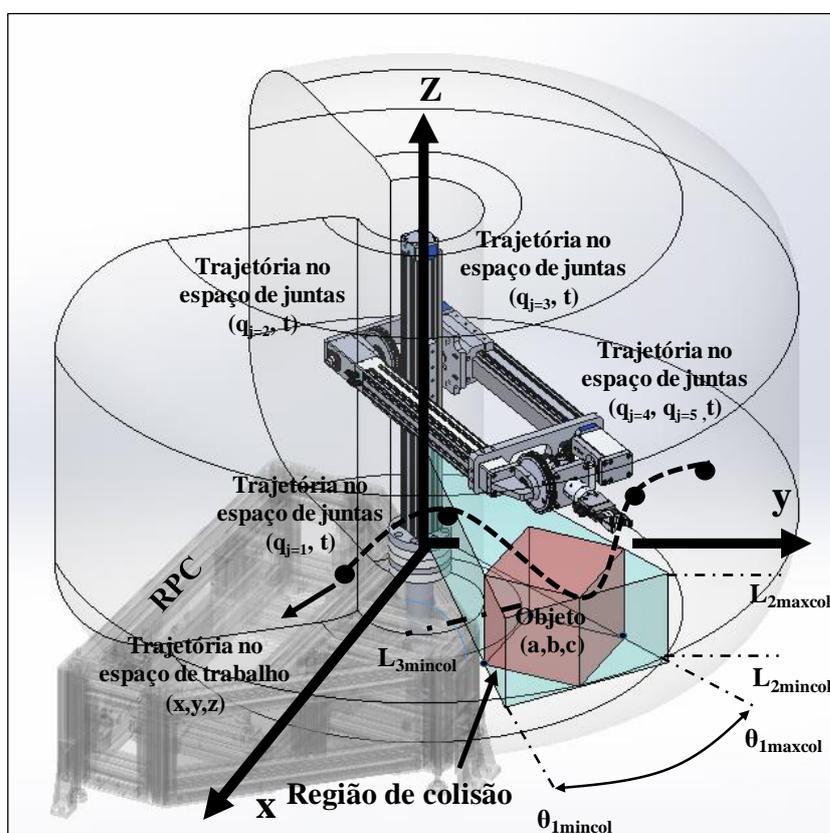


Figura 5.7 - Caso de colisão da trajetória interpolada no espaço de juntas.

A fim de garantir que a trajetória gerada seja livre de colisão, propõe-se, no espaço de juntas, uma relação geométrica que relaciona a curva de posição de cada junta com as regiões de colisão, que são estabelecidas devido à posição do obstáculo e à configuração geométrica do manipulador em estudo. Aplicando a cinemática inversa do RPC, estabelece-se uma faixa de operação para cada junta que garanta um movimento livre de colisão, já que é possível relacionar a região de colisão, mapeada no espaço de trabalho do robô, com o espaço de juntas do RPC. Ou

seja, levando em conta que um obstáculo qualquer, representado por um cubo na Figura 5.7, cujo centro de coordenadas encontra-se na posição (a,b,c) no volume de trabalho do RPC, pode-se inferir que existem faixas de atuação das juntas do 1º ao 3º GDL durante o movimento deste robô, as quais, combinadas, podem acarretar movimentos que interceptariam obstáculos.

Considerando a região de colisão do objeto ilustrada na Figura 5.7, observa-se que, por se tratar de um robô cilíndrico, existem combinações específicas das juntas que provocam movimentos que ocasionariam choques dos elos e do efetuator com obstáculos. Nesse sentido, são estabelecidas condições para a análise da trajetória no espaço de juntas do RPC, conforme as representações ilustradas nas Figuras 5.7 e 5.8.

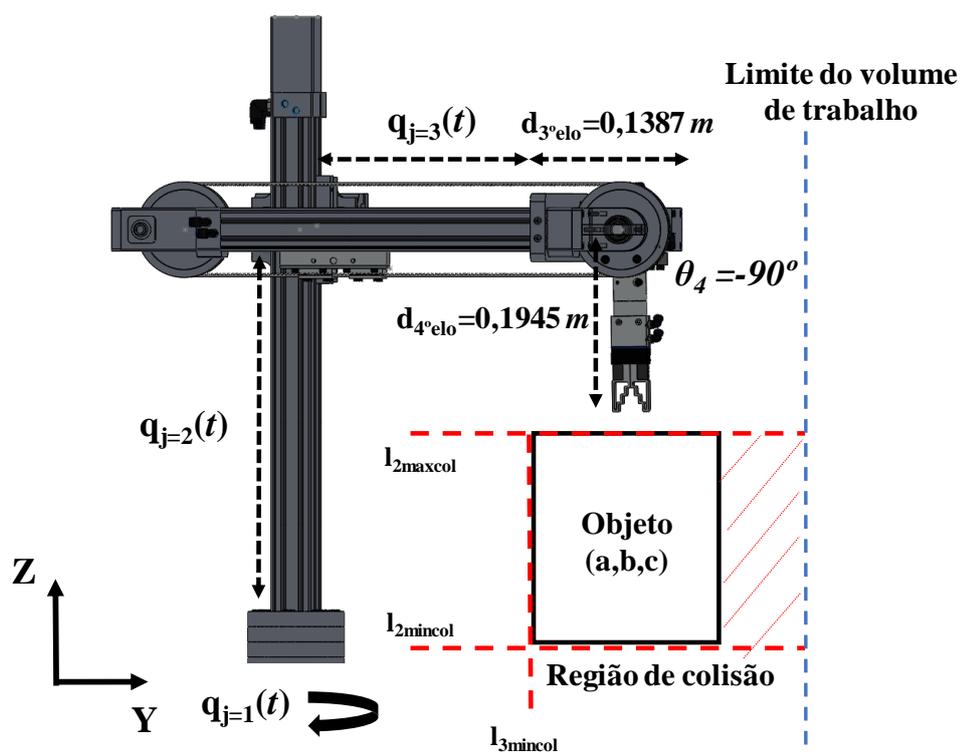


Figura 5.8 – Representação do RPC e dos limites da região de colisão.

A possibilidade de colisão do RPC ocorre pela sobreposição dos valores das posições de cada junta $q_j(t)$ e da região de colisão, definida pelos limites das três juntas, representadas por $\theta_{1mincol}$ e $\theta_{1maxcol}$, para a junta 1; por $l_{2mincol}$ e $l_{2maxcol}$, tratando-se da junta 2; e por $l_{3mincol}$, no caso da junta 3. Isto é, colisões podem ocorrer diante das seguintes condições:

Condição 1: a posição da junta 1 ($q_{j=1}(t)$) encontra-se entre $\theta_{1mincol}$ e $\theta_{1maxcol}$ (ver Figura 5.7);

Condição 2: a posição da junta 2 ($q_{j=2}(t)$), subtraída da distância $d_{4^\circ elo}$, encontra-se entre $l_{2mincol}$ e $l_{2maxcol}$, que dependem da altura e da posição do obstáculo;

Condição 3: a posição da junta 3 ($q_{j=3}(t)$), somada à distância $d_{3^\circ elo}$, encontra-se a partir de $l_{3mincol}$, a qual depende da posição do obstáculo e do volume de trabalho;

Condição 4: o orientação do efetuador (4º GDL) é definida em -90° , considerando-se que essa é uma orientação que permite a execução de tarefas do tipo *pick and place*, consensualmente adequadas às características do RPC.

A orientação do 5º GDL não será considerada na formulação das restrições de colisão do RPC, pois essa é uma orientação que não afeta a posição do RPC junto ao obstáculo.

Assim, para garantir que a trajetória gerada no espaço de juntas apresente um movimento livre de colisão para o RPC, aplica-se as seguintes restrições.

$$\theta_{1mincol} \leq q_j(t) \leq \theta_{1maxcol} \quad | j = 1 \quad (5.52)$$

$$L_{2mincol} \leq q_j(t) - d_{4^\circ elo} \leq L_{2maxcol} \quad | j = 2 \quad (5.53)$$

$$L_{3mincol} \leq q_j(t) + d_{3^\circ elo} \quad | j = 3 \quad (5.54)$$

onde $t = 1, \dots, tf$. Para atender aos requisitos de uma trajetória livre de colisão, é necessário que os valores de posição ao longo do percurso do RPC, definido no intervalo t , estejam fora da área de colisão das três juntas de forma simultânea, isto é, quando ao menos uma das três restrições (Equações 5.52 a 5.54) não for violada. Caso contrário, a colisão é detectada quando todas as restrições forem violadas concomitantemente.

Nesse sentido, define-se que a relação entre a posição das juntas e a área de colisão permite avaliar se o RPC colide ou não. Isto é, se o valor da posição estiver, simultaneamente para todas as juntas do RPC, dentro da área de colisão no mesmo intervalo de tempo t , a colisão irá ocorrer. Caso contrário, o movimento do RPC pode ser considerado livre de colisão. A Figura 5.9 exemplifica a relação entre a função de posição e as áreas de colisão que originam os casos de colisão do RPC, no intervalo de tempo t_3 e t_4 , para o método proposto.

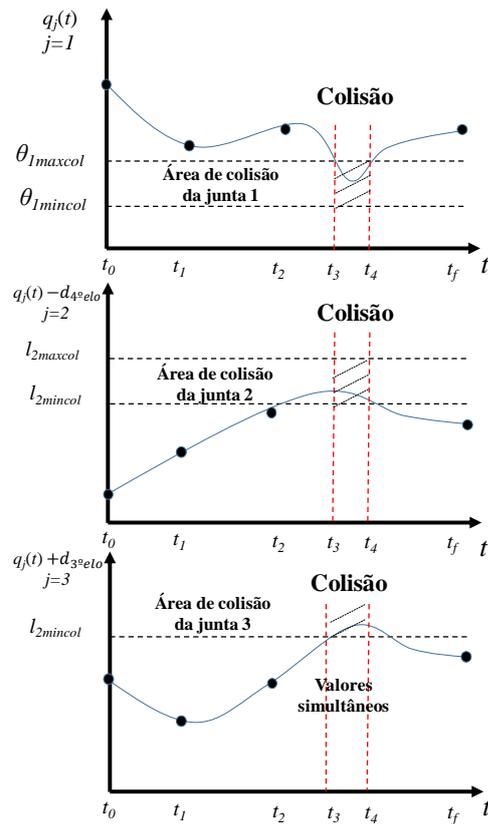


Figura 5.9 - Representação de um caso de colisão no espaço de juntas do RPC.

5.2.2.3. Restrições cinemáticas e dinâmicas do RPC

Dependendo da demanda de força necessária para seguir determinadas trajetórias, no controle de atuadores pneumáticos pode ocorrer a saturação do sinal de controle (associado a uma ação de controle que procura compensar a impossibilidade de fornecer a força desejada). Considerando o equacionamento do subsistema mecânico, apresentado na Seção 4.3, é possível inferir que a diferença de pressão entre as câmaras p_{Δ} influencia de forma significativa o funcionamento do RPC, visto que os valores da pressão de suprimento (P_{sup}) estão limitados por questões normativas, visando à segurança dos sistemas. Nesse sentido, a fim de garantir que a trajetória ótima atenda os limites físicos do RPC, levando em conta os aspectos de cinemática e de dinâmica deste robô, propõe-se restrições associadas às características dos servoposicionadores de cada GDL do mesmo e ao equacionamento do sistema mecânico destes sistemas, conforme descrito a seguir. São, inicialmente, descritos os critérios associados aos limites cinemáticos (velocidade, aceleração e *jerk*). Posteriormente, também são discutidos os critérios relativos aos limites dinâmicos. Os valores das velocidades, acelerações, *jerk* e torque mínimos e máximos utilizados no problema de otimização da trajetória a ser executada pelo robô em estudo são apresentados no Capítulo 6.

Restrições Cinemáticas

i) Velocidade

No que corresponde às restrições de velocidade, os valores mínimos são determinados considerando-se os efeitos do atrito de cada atuador do RPC, e os valores máximos são obtidos por meio de procedimentos experimentais, nos quais são levadas em conta hipóteses de movimentação do RPC que são descritas no item (ii.a) das restrições de aceleração. Em ambos os casos, os valores mínimos e máximos de velocidade são, primeiramente, determinados no espaço dos atuadores (\dot{y}_{min_i} e \dot{y}_{max_i}) e, em seguida, transformados para o espaço de juntas (\dot{q}_{min} e \dot{q}_{max}), a fim de que possam ser aplicados como restrições de velocidade do método de otimização de trajetórias do RPC por meio da matriz que transforma as variáveis do espaço dos atuadores para o espaço de juntas (ver Seção 4.1.1).

Em razão da trajetória proposta considerar a velocidade inicial e final do RPC igual a zero, define-se que a restrição de velocidade da j -ésima junta do RPC é expressa como:

$$\begin{aligned} \dot{q}_j(t) &\leq \dot{q}_{max_j}, & t \in [t_0, t_1] \\ \dot{q}_{min_j} &\leq \dot{q}_j(t) \leq \dot{q}_{max_j}, & t \in [t_1, t_2] \\ \dot{q}_j(t) &\leq \dot{q}_{max_j}, & t \in [t_2, t_f] \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde \dot{q}_{min_i} e \dot{q}_{max_i} são as velocidades mínimas e máximas da j -ésima junta, respectivamente, t_0 é o tempo inicial da trajetória, t_f é o tempo final da trajetória, e t_1 e t_2 são os tempos estimados para o manipulador operar com velocidades superiores à velocidade relacionada ao efeito de Stribeck, segundo o qual os efeitos dominantes das forças de atrito são viscosas. Neste trabalho, os tempos t_1 e t_2 correspondem ao instante de tempo em que o manipulador atinge a velocidade de Stribeck no início e no fim da trajetória.

Como pode-se observar na Equação (5.55), a velocidade de cada junta, nos intervalos de tempo $[t_0, t_1]$ e $[t_2, t_f]$, é restrita apenas pela velocidade máxima de cada junta, já que o manipulador começa e termina com velocidades iguais a zero, atingindo valores inferiores à velocidade mínima nestes intervalos. No intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, define-se que a trajetória de cada junta obrigatoriamente deve estar entre os limites máximos e mínimos de velocidade, procurando minimizar os efeitos associados ao atrito que dificultam o controle e os limites operacionais de cada atuador.

Outro caso importante é aquele em que, no planejamento das restrições de velocidade, especificamente no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, há situações em que ocorre a troca do sentido de movimento nas juntas do RPC. Quer dizer, como a inversão do movimento do j -ésima junta pode acarretar em velocidades iguais a zero ao longo da trajetória, existem situações em que a restrição no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ não pode ser aplicada, uma vez que não é possível atender os limites mínimos de velocidade em determinados intervalos da trajetória. Para exemplificar as hipóteses consideradas na formulação das restrições de velocidade no espaço de juntas, a Figura 5.10 apresenta a representação da função $\dot{q}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{2}$, a qual é definida entre o tempo inicial $t_0=0$ s e o tempo final $t_f=10$ s, pelo intervalo de tempo entre $t_1=0,8$ s e $t_2=8,8$ s, e limitada pela velocidade máxima (\dot{q}_{max}) e mínima (\dot{q}_{min}) de 0,55 m/s e 0,15 m/s, respectivamente.

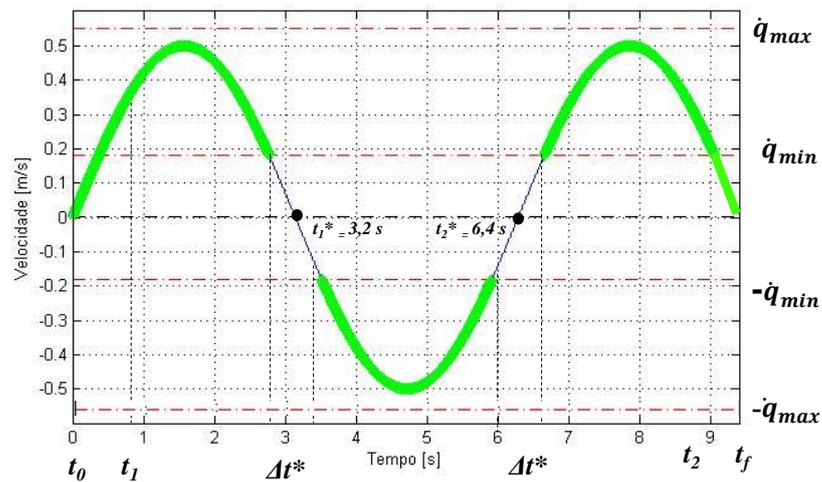
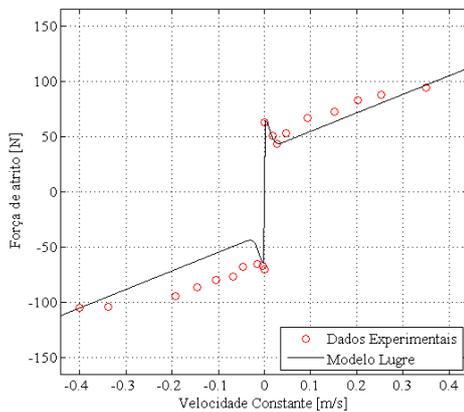


Figura 5.10 - Análise das restrições de velocidade.

Como nota-se na Figura 5.10, os pontos que estabelecem a troca de sentido de movimento, representados pelos instantes de tempo $t_1^*=3.2$ s e $t_2^*=6.4$ s, respectivamente, e os valores de velocidade mínima (\dot{q}_{min}), constituem as regiões em que as restrições descritas na Equação (5.56) não podem ser aplicadas ao problema de otimização em estudo. Isto é, levando-se em conta que no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ a trajetória ótima deve apresentar valores de velocidade superiores à velocidade mínima (\dot{q}_{min}) e que a mudança no sentido de movimento implica em intervalos de tempo Δt^* cujos valores de velocidade são menores que a velocidade mínima (\dot{q}_{min}), é possível inferir que nesta condição a trajetória ótima não atende as restrições de velocidade propostas. Nesse sentido, para que esta condição não interfira na solução do problema de otimização, ou seja, penalizando soluções que não devem ser penalizadas, são consideradas as formulações

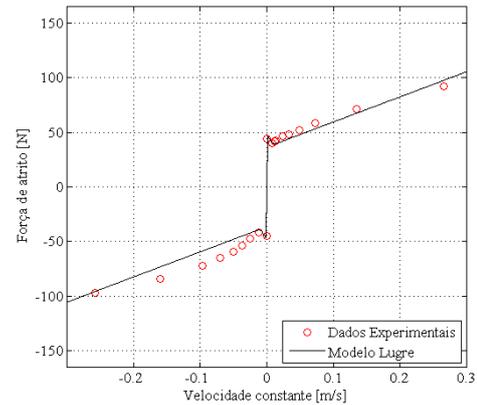
apresentadas na Equação (5.55). No intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, os casos em que a trajetória estiver contida fora dos intervalos de tempo Δt^* não serão penalizados, conforme pode-se observar na Figura 5.10. Os critérios utilizados para determinar as velocidades máximas e mínimas são apresentados a seguir.

Como mencionado na Seção 4.3, os servoposicionadores pneumáticos caracterizam-se por apresentar diversas não-linearidades, como o atrito. Um dos fenômenos do atrito mais analisados em sistemas pneumáticos são os movimentos tipo adere-desliza (*stick-slip*), que dificultam o controle desses sistemas. Analisando os mapas estáticos do atrito de cada atuador do RPC, os quais são apresentados por Sarmanho, 2014, é possível observar que, em baixas velocidades de cada atuador, a força de atrito (F_{atr}) apresenta valores elevados com comportamento altamente não-linear, associados ao atrito estático e ao efeito de Stribeck, como pode-se observar na Figura 5.11 [Sarmanho, 2014].



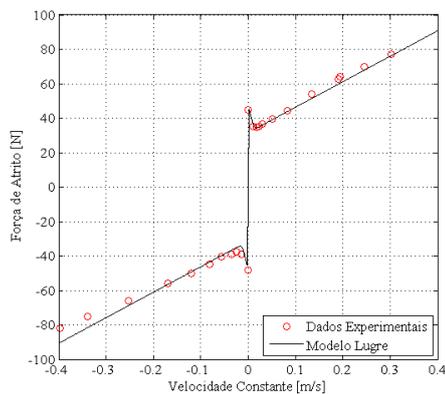
(a) Mapa estático do atrito no atuador do 1 °

GDL



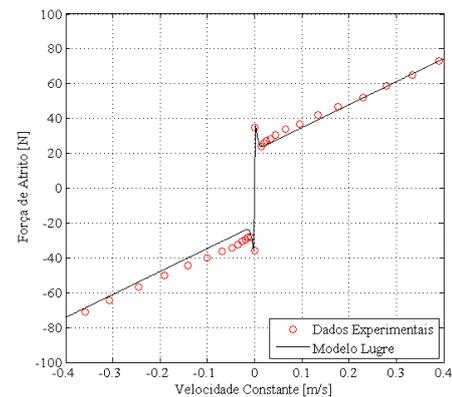
(b) Mapa estático do atrito no atuador do 2 °

GDL



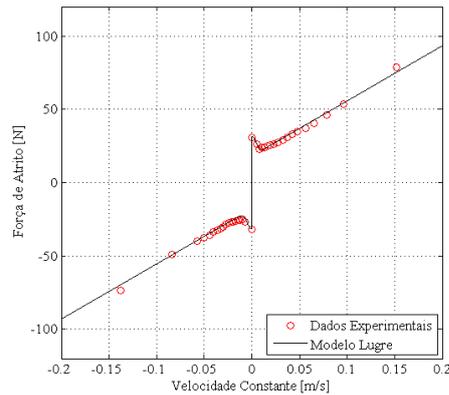
(c) Mapa estático do atrito no atuador do 3 °

GDL



(d) Mapa estático do atrito no atuador do 4 °

GDL



(e) Mapa estático do atrito no atuador do 5º GDL

Figura 5.11 - Curvas experimentais da força de atrito dos atuadores do RPC em regime de velocidade constante.

Para compensar esses efeitos na trajetória ótima do RPC, os quais relacionam-se com o fenômeno adere-desliza (*stick-slip*), estabelece-se que a velocidade mínima de cada atuador deve ser superior à faixa de velocidade relacionada ao efeito de Stribeck (ver Figura 4.11). Dessa forma, a velocidade mínima do atuador está associada somente aos efeitos de atrito decorrentes das forças viscosas, as quais apresentam uma relação proporcional à velocidade relativa dos atuadores, facilitando o controle desses sistemas. Com a finalidade de apresentar os critérios utilizados para determinar as velocidades mínimas aplicadas às restrições de velocidade, é analisado o mapa estático do atrito no atuador do 1º GDL, de modo que as hipóteses aqui consideradas podem ser aplicadas aos demais GDL do RPC. Como se vê na Figura 5.11a, a força de atrito caracteriza-se por um comportamento não-linear até o instante em que a velocidade do atuador atinge, aproximadamente, 0,02 m/s. Assim, para evitar esses efeitos na trajetória proposta, define-se que a velocidade mínima do atuador (\dot{y}_{min}) deve ser superior a 0,03 m/s, uma vez que os efeitos da força de atrito são proporcionais à velocidade do atuador, o que facilita a ação do algoritmo de controle do RPC.

Os valores máximos de velocidade são obtidos através da curva experimental de posição, e o método utilizado para obter esses dados relaciona o posicionamento de cada atuador em relação ao RPC, o procedimento de abertura das válvulas e as hipóteses de movimentação, conforme descrito no item (ii.a) das restrições de aceleração. Neste procedimento, os dados de posição e de velocidade, por meio da 1ª derivada, são determinados no espaço dos atuadores, sendo necessário transformá-los para o espaço de juntas para aplicar as restrições do problema de otimização.

ii) Aceleração

Para estabelecer os limites de aceleração de cada atuador do RPC, propõe-se um método baseado no equacionamento do subsistema mecânico dos servoposicionadores pneumáticos, o qual, por meio da 2ª Lei de Newton, define o equilíbrio de forças para esses sistemas. A Equação (4.9), que expressa esse princípio, é, por conveniência, aqui reproduzida:

$$M_i \ddot{y}_i = A_i(p_{a_i} - p_{b_i}) - F_{atr_i} - F_{grav_i} - F_{e_i} \quad (5.56)$$

Considerando que não existem forças externas atuando sobre o êmbolo, como proposto na formulação de Sarmanho, 2014, obtém-se:

$$M_i \ddot{y}_i = A_i(p_{a_i} - p_{b_i}) - F_{atr_i} - F_{grav_i} \quad (5.57)$$

Isolando os termos da Equação (5.57) em função da aceleração (\ddot{y}_i) e reescrevendo o termo relacionado à diferença de pressão como sendo p_{Δ_i} , define-se que a aceleração máxima do i -ésimo atuador é dada por:

$$\ddot{y}_{max_i} = \max \left(\frac{A_i(p_{\Delta_i}) - F_{atr_i} - F_{grav_i}}{M_i} \right) \quad (5.58)$$

Neste trabalho, com relação às restrições de aceleração, cada um dos termos apresentados na Equação (5.58) é determinado em função das particularidades de cada GDL do RPC. Os critérios utilizados para estabelecer a curva de aceleração do i -ésimo atuador do RPC consideram aspectos como a diferença de pressão entre as câmaras (p_{Δ_i}) (item *ii.a*) e os valores de velocidade utilizados no modelo da força de atrito (item *ii.b*). As informações referentes ao cálculo da massa equivalente acoplada ao êmbolo de cada atuador (M_i) são apresentadas na Seção 4.7, os efeitos inerciais associados à massa equivalente de cada GDL são considerados invariantes no tempo, e as informações relacionadas às áreas dos atuadores são mostradas na Seção 6.1.2.1.

ii.a) Diferença de pressão do i -ésimo atuador (p_{Δ_i})

Para determinar a diferença de pressão entre as câmaras de cada atuador do RPC, são utilizadas curvas experimentais que relacionam a aceleração e o tempo de deslocamento do êmbolo, possibilitando, assim, que se calcule a diferença de pressão do i -ésimo atuador (p_{Δ_i}) por meio da Equação (5.59) para o 2º GDL e por meio da Equação (5.60) para o 1º, 3º, 4º e 5º GDL.

$$p_{\Delta_i} = \frac{(M_i \ddot{y}_{exp_i} + F_{atr_i} + F_{grav_i})}{A_i} \quad | \quad i = 2 \quad (5.59)$$

$$p_{\Delta_i} = \frac{(M_i \ddot{y}_{exp_i} + F_{atr_i})}{A_i} \quad | \quad i = 1, 3, 4 \text{ e } 5 \quad (5.60)$$

onde \ddot{y}_{exp_i} é a aceleração do i -ésimo atuador obtida por meio de procedimentos experimentais.

A Equação (5.59) considera o efeito gravitacional da massa do conjunto formado pelo 3º, 4º e 5º GDL acoplado ao êmbolo do 2º GDL do RPC. A Equação (5.60) não considera efeitos gravitacionais acoplados a nenhum êmbolo. O cálculo da diferença de pressão por meio dessas equações é realizado de maneira indireta, uma vez que não é possível implantar sensores de pressão próximos ao êmbolo de cada atuador do RPC.

Para determinar as curvas de aceleração (\ddot{y}_{exp_i}), considerando o êmbolo posicionado em uma de suas extremidades, o procedimento utilizado consiste em abrir a válvula a partir da aplicação, na sua entrada, de um sinal caracterizado por uma função passo, para que se possa obter as curvas de posição, e por meio de sua 2ª derivada de aceleração. É importante ressaltar que este procedimento é realizado para cada GDL do RPC, de modo que, enquanto o i -ésimo atuador está se movimentando, os demais permanecem parados. Os procedimentos e as condições utilizados para determinar a diferença de pressão das câmaras de cada atuador são exemplificadas através de um caso referente ao 1º GDL do RPC, conforme ilustrado na Figura 5.12.

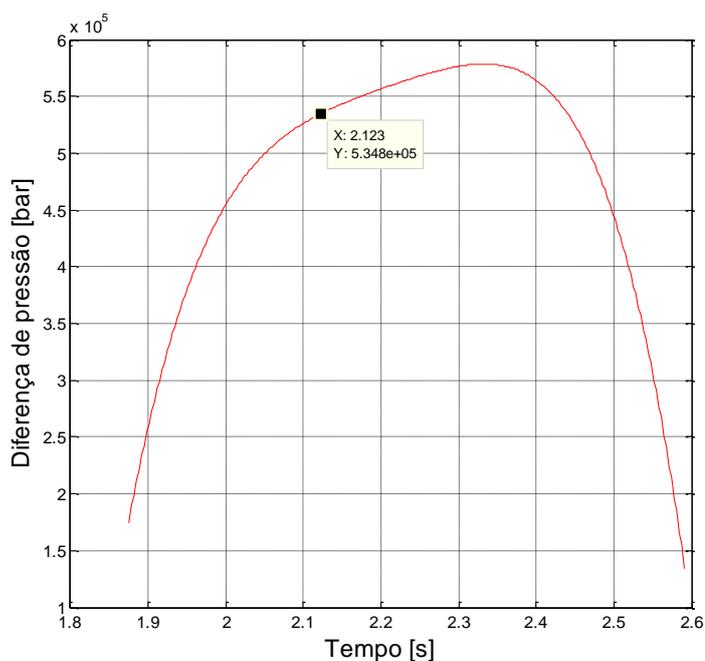


Figura 5.12 - Curva da diferença de pressão calculada para o 1º GDL do RPC.

Como ilustrado, o cálculo da diferença de pressão entre as câmaras compreende ao intervalo de tempo entre $t=1,8$ s e $t=2,6$ s, aproximadamente, que é o instante durante o qual o manipulador está em movimento, e a diferença de pressão é calculada por meio do sinal de posição obtido experimentalmente, conforme Equações (5.59) e (5.60). Assim, define-se que o cálculo da diferença de pressão do i -ésimo atuador compreende ao intervalo antes do êmbolo atingir o fim de curso do cilindro, visto que, nesse instante, a diferença de pressão entre as câmaras é, aproximadamente, igual à diferença entre a pressão de suprimento (P_{sup}) e a pressão atmosférica (P_{atm}) do sistema. Na Figura 5.12, por exemplo, a diferença de pressão entre as câmaras do 1º GDL, que é utilizada no cálculo da aceleração máxima do i -ésimo atuador, ocorre no instante de tempo $t = 2,123$ s, uma vez que o êmbolo atinge o fim de curso no instante de tempo $t = 2,6$ s, e a aceleração máxima ocorre nesse instante, conforme apresentado na Seção 6.2.1.3. É importante ressaltar que os dados relacionados ao êmbolo nas posições de repouso (início e fim do movimento) não são considerados nesta análise.

Outro procedimento a ser considerado no cálculo dos valores da diferença de pressão entre as câmaras é o de definir o posicionamento inicial de cada GDL do RPC, visto que os efeitos inerciais influenciam significativamente os valores de aceleração e pressão. Assim, considerando os sistemas de transmissão do 1º GDL e 4º GDL e os posicionamentos dos atuadores pneumáticos em cada GDL do RPC, estabelecem-se critérios para determinar os dados experimentais de posição/aceleração, que são utilizados no cálculo das diferenças de pressão entre as câmaras em

cada GDL do RPC, e para definir a convenção utilizada na definição das máximas diferenças de pressão em cada atuador, como discutido a seguir.

➤ *Posicionamento do 1º e 2º GDL no cálculo da diferença de pressão*

A Figura 5.13, adaptada de Rijo, 2013, ilustra o sistema de transmissão do 1º GDL e as hipóteses consideradas para determinar a máxima diferença de pressão entre as câmaras do 1º e 2º GDL do RPC.

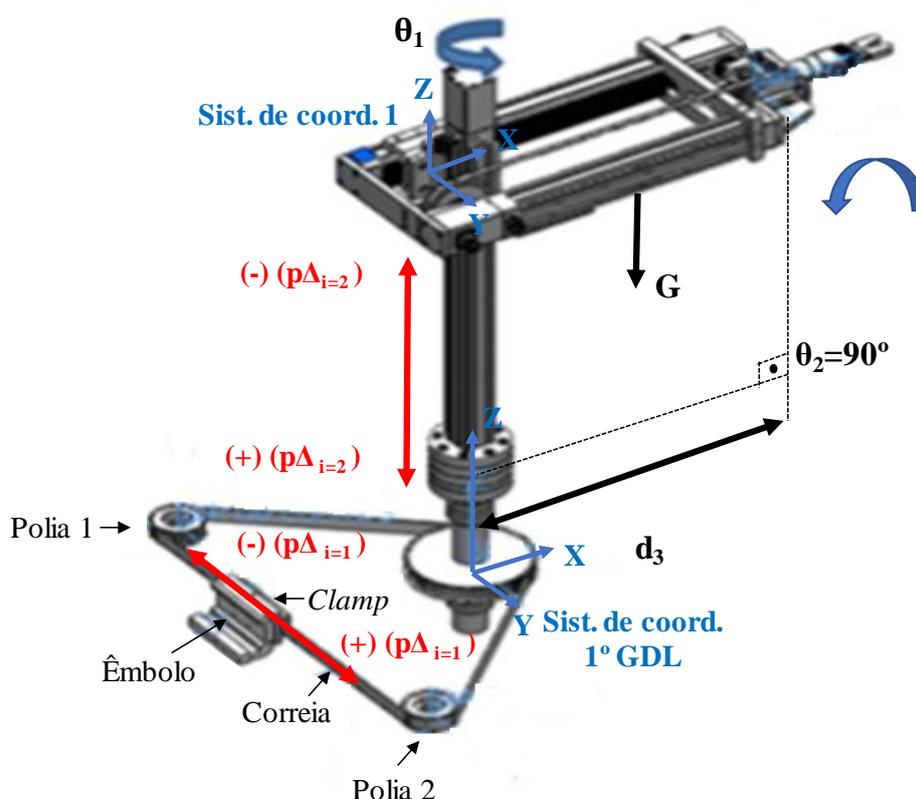


Figura 5.13 - Sistema de transmissão do 1º GDL e as hipóteses consideradas para determinar a diferença de pressão do 1º e 2º GDL do RPC.

Tendo em vista a configuração cinemática do RPC, constata-se que o 3º e 4º GDL influenciam significativamente a variação do momento de inércia em relação ao sistema de coordenadas do 1º GDL. Para determinar a curva experimental de posição, são consideradas apenas as posições das juntas do 3º e 4º GDL, visto que o 5º GDL não causa variação significativa no momento de inércia do 1º GDL [Rijo, 2013]. Valendo-se da Figura 5.13, as curvas

experimentais são obtidas de acordo com os procedimentos apresentados a seguir: o conjunto relativo ao 3º GDL deve ser posicionado a uma distância máxima d_3 em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas do 1º GDL; e o conjunto formado pelo 4º e 5º GDL deve ser orientado a 0° (ângulo θ_2), de modo que a posição d_3 e o ângulo θ_2 permitam determinar os dados experimentais de posição em função da máxima variação do momento de inércia com relação ao eixo de rotação do 1º GDL. Considerando também que o sentido de giro θ_1 não influencia no momento de inércia em relação ao eixo de rotação do 1º GDL, assume-se que o sentido positivo $p_{\Delta_{i=1}}(+)$ e o sentido negativo $p_{\Delta_{i=1}}(-)$ do movimento do êmbolo não interferem no cálculo diferença de pressão entre as câmaras e que os limites máximos e mínimos da aceleração (Equação 5.62) do 1º GDL são os mesmos.

As massas acopladas ao êmbolo do atuador do 2º GDL (3º, 4º e 5º GDL), como mencionado na Seção 4.7, não provocam variações no momento de inércia em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas 1, uma vez que permanecem constantes no deslocamento ao longo do eixo Z. Portanto, para determinar a curva experimental de posição do 2º GDL do RPC, considera-se somente o efeito gravitacional da massa acoplada ao êmbolo do atuador do conjunto. Como a força exercida pelo êmbolo na “subida” e na “descida” deve compensar o efeito gravitacional gerado pelas massas dos 2º, 3º, 4º e 5º elos, define-se que a diferença de pressão entre as câmaras no 2º GDL está relacionada ao sentido de movimento do êmbolo, considerando-se a seguinte convenção:

- Movimento de subida: corresponde à diferença de pressão no sentido negativo $p_{\Delta_{i=2}}(-)$, e o êmbolo se desloca para cima, movendo as massas dos 2º, 3º, 4º e 5º elos;
- Movimento de descida: corresponde à diferença de pressão no sentido positivo $p_{\Delta_{i=2}}(+)$, e o êmbolo se desloca para baixo, movendo as massas dos 2º, 3º, 4º e 5º elos.

A convenção aqui apresentada permite estabelecer a diferença de pressão no sentido positivo (descida) e negativo (subida) entre as câmaras. Essa diferença aplicada à Equação (5.58) define os limites máximos e mínimos de aceleração referentes ao 2º GDL do RPC. Neste trabalho, define-se que os dados experimentais de posição, e consequentemente os valores de máximos e mínimos de aceleração do 2º GDL, são determinados considerando somente o movimento de subida, visto que se trata da condição que exige os maiores esforços na movimentação do 2º GDL do RPC.

➤ *Posicionamento do 3º e 4º GDL no cálculo da diferença de pressão*

A Figura 5.14, adaptada de Sarmanho, 2014, ilustra o conjunto formado pelo 2º, 3º, 4º e 5º GDL e as condições consideradas para determinar a máxima diferença de pressão entre as câmaras dos 3º e 4º GDL do RPC.

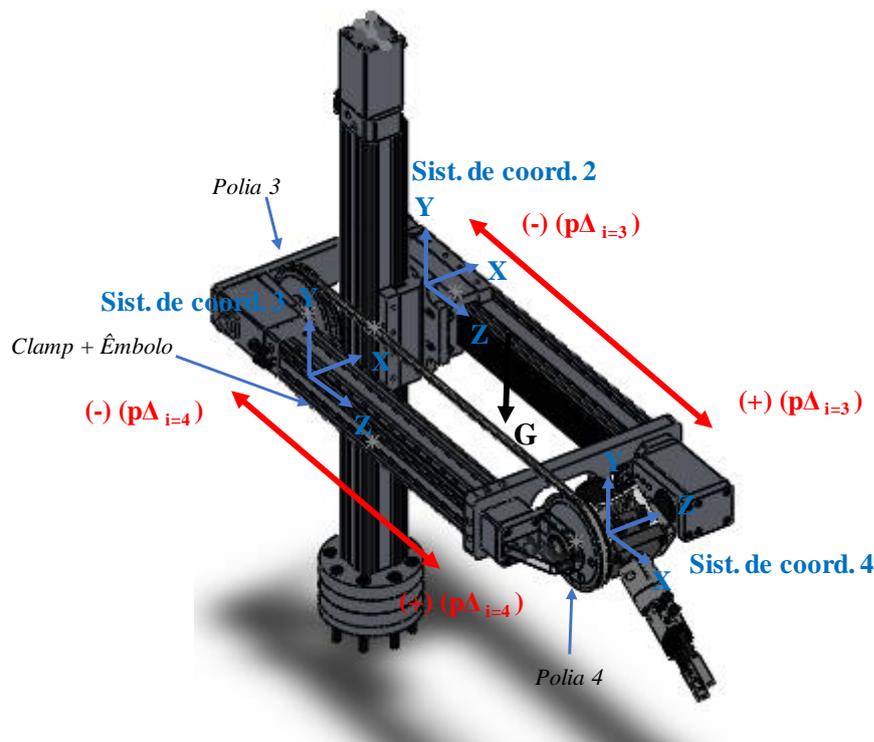


Figura 5.14 - Conjunto formado pelo 2º, 3º, 4º e 5º GDL e as condições consideradas para determinar a diferença de pressão do 3º e 4º GDL do RPC.

Diferentemente do procedimento proposto para o 2º GDL do RPC, a força exercida pelo êmbolo do 3º GDL não considera o efeito gravitacional da massa acoplada ao êmbolo do atuador do conjunto (4º e 5º GDL), já que a parcela da força gravitacional em relação ao centro de massa do conjunto é perpendicular ao sentido de movimento (eixo Z do sistema de coordenadas 2). Assim, considerando que neste conjunto não existem variações no momento de inércia, conforme as hipóteses descritas na Seção 4.7, estabelece-se que a máxima diferença de pressão entre as câmaras do 3º GDL independe do posicionamento do atuador e do sentido de movimento do êmbolo. Portanto, no caso do 3º GDL, convencionou-se que o cálculo da diferença de pressão entre as câmaras é igual no sentido de “avanço” e “retorno” do conjunto, de maneira que, quando

aplicado na Equação (5.62), determinam os limites máximos e mínimos de aceleração do 3º GDL do RPC.

A fim de estabelecer a máxima diferença de pressão entre as câmaras do 4º GDL, entende-se que os principais elementos deste conjunto, como o *Clamp*, o Êmbolo (M_{CE}), a correia (M_C) e as polias 3 e 4, não ocasionam variações significativas no momento de inércia em relação ao sistema de referência do 4º GDL (Sistema de coordenadas 3) e, no caso do conjunto do 5º elo, ao eixo Z do sistema de coordenadas 4. Desse modo, valendo-se das condições descritas na Seção 4.7, e considerando que os efeitos gravitacionais deste conjunto não interferem na força exercida pelo êmbolo do 4º GDL, define-se que a máxima diferença de pressão entre as câmaras no 4º GDL independe do sentido de “avanço” e “retorno” do atuador. Desta forma, assume-se que o cálculo diferença de pressão entre as câmaras, quando aplicado à Equação (5.62), determina os limites máximos e mínimos de aceleração do 3º GDL do RPC, cujos valores são os mesmos nos dois sentidos de movimento deste GDL.

➤ *Posicionamento do 5º GDL no cálculo da diferença de pressão*

A Figura 5.15, adaptada de Sarmanho, 2014, ilustra o conjunto formado pelo 5º GDL e as condições consideradas para determinar a máxima diferença de pressão deste conjunto.

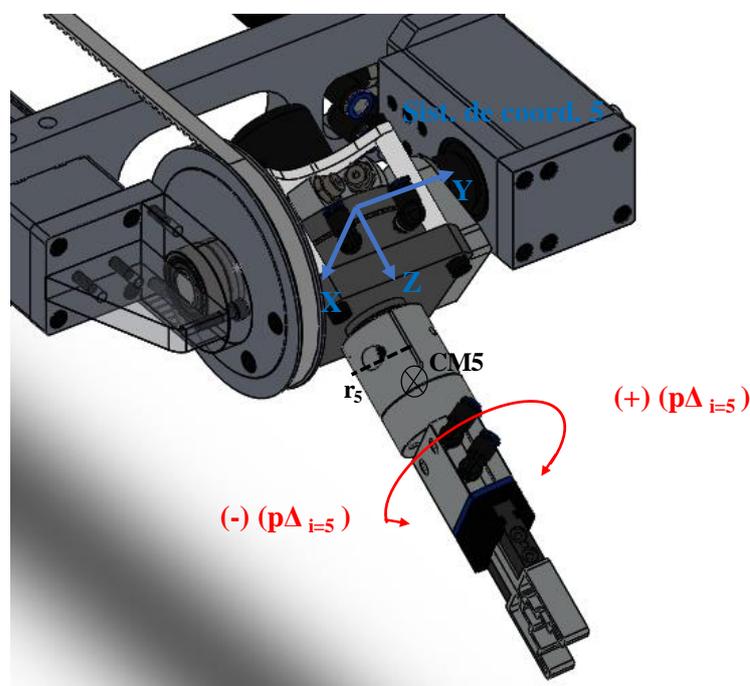


Figura 5.15 - Conjunto formado do 4º ao 5º GDL e as condições consideradas para determinar a diferença de pressão do 5º GDL do RPC.

No caso do 5º GDL, por se tratar de um atuador rotacional que não utiliza elementos e/ou sistemas de transmissão acoplados ao êmbolo, e não apresenta variações no momento de inércia devido às distâncias entre o centro de massa do 5º elo (CM5) e o eixo Z do sistema de coordenadas 5, define-se que a máxima diferença de pressão entre as câmaras do 5º GDL independe do sentido de “avanço” e “retorno” do atuador. Portanto, a diferença de pressão calculada entre as câmaras, quando aplicadas na Equação (5.62), determina os limites máximos e mínimos de aceleração do 5º GDL do RPC, cujos valores são os mesmos nos dois sentidos de movimento deste GDL.

ii.b) Definição dos valores de velocidade utilizados no modelo de força de atrito (LuGre)

Como já mencionado, Seção 4.3.3, para determinar a força de atrito do i -ésimo atuador pelo modelo de atrito LuGre, são necessários quatro parâmetros estáticos (σ_{2i} , F_{ci} , F_{si} e \dot{y}_{si}) e dois parâmetros dinâmicos (σ_{0i} e σ_{1i}), os quais são determinados por meio de experimentos apresentados por Sarmanho, 2014. O modelo de atrito utilizado no presente trabalho baseia-se na expressão que define a força de atrito em regime de velocidade constante (F_{ssi}). Com a finalidade de apresentar os procedimentos utilizados para determinar a parcela da força de atrito utilizada no cálculo da aceleração máxima do i -ésimo atuador, a Equação 4.17 é aqui reproduzida como Equação (5.61).

$$F_{ssi} = \text{sgn}(\dot{y}_{exp_i}) \left(F_{ci} + (F_{si} - F_{ci}) e^{-\left(\frac{\dot{y}_{exp_i}}{\dot{y}_{si}}\right)^2} \right) + \sigma_{2i} \dot{y}_{exp_i} \quad (5.61)$$

onde \dot{y}_{exp_i} é a velocidade do i -ésimo atuador obtida por meio de procedimentos experimentais.

Analisando-se a Equação (5.61), é possível inferir que, se conhecidos os parâmetros estáticos e dinâmicos do modelo de atrito do i -ésimo atuador, a força de atrito pode ser efetivamente calculada se os seus respectivos valores de velocidade são conhecidos. Assim, com o intuito de determinar a influência da parcela de atrito no cálculo da aceleração máxima do i -ésimo atuador, são calculadas as curvas de velocidade (derivando as curvas experimentais de posição) no espaço dos atuadores do RPC. Para demonstrar os procedimentos e as hipóteses utilizadas no levantamento das curvas de velocidade de cada atuador, é apresentado o estudo de caso referente ao 1º GDL do RPC, conforme ilustrado na Figura 5.16.

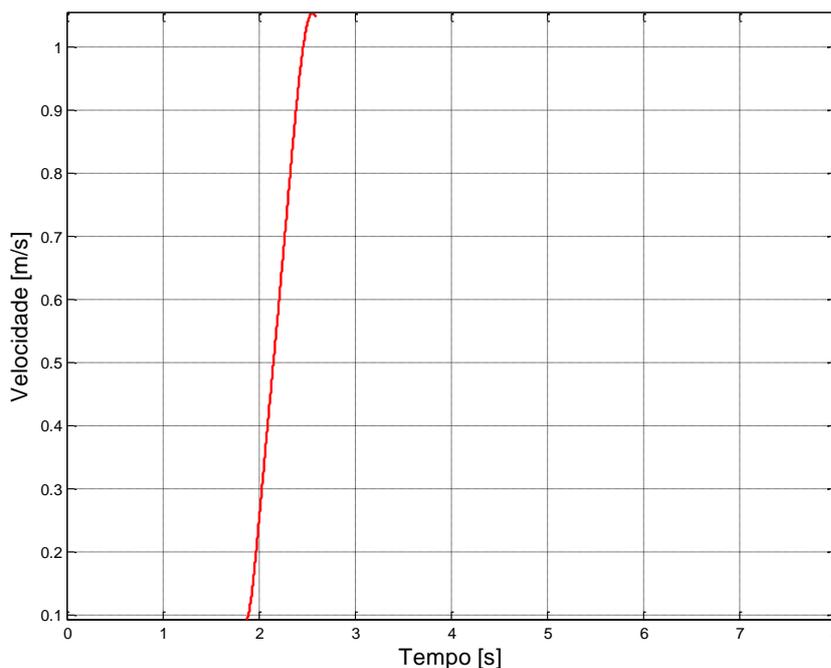


Figura 5.16 - Curva experimental de velocidade no 1º GDL do RPC.

Como pode-se observar nas Figuras 5.12 e 5.16, existem diferenças de tempo entre os máximos dos valores na curva experimental de velocidade e de diferença de pressão. Isto se deve ao fato de que: 1) na modelagem da parcela pneumática baseada na lei da conservação de massa no interior de um volume de controle [Bobrow e McDonell, 1998; McDonell, 1996; Perondi, 2002; Sobczyk, 2009; Suzuki, 2010], a relação entre a diferença de pressão e a velocidade nas câmaras depende de outros fatores, como a vazão e a taxa da variação de pressão nas câmaras, entre outros; e 2) os efeitos do atrito começam a influenciar significativamente o comportamento da aceleração na medida em que a velocidade do êmbolo aumenta. Nesta perspectiva, assume-se que os valores de velocidade utilizados no cálculo da força de atrito do i -ésimo atuador (Equação 5.61) correspondem ao instante de tempo associado à máxima aceleração do i -ésimo atuador ($t=2,123$ s na Figura 5.16).

Em síntese, para determinar os valores mínimos e máximos de aceleração no espaço de juntas (\ddot{q}_{min_j} e \ddot{q}_{max_j}), os quais são aplicados nas restrições cinemáticas do problema de otimização, são consideradas as seguintes hipóteses:

- 1) os dados utilizados no cálculo dos limites de aceleração são analisados no espaço dos atuadores do RPC, de modo que os valores do cálculo de aceleração (\ddot{y}) devem ser transformados para o espaço de juntas (\ddot{q});
- 2) os valores das áreas dos atuadores (A_i) são constantes (Seção 6.1.2.1);

- 3) os efeitos inerciais associados à massa equivalente do i -ésimo atuador (M_i) são considerados invariantes no tempo. Os valores da massa equivalente acoplada ao êmbolo de cada GDL do RPC são apresentados na Seção 6.1.2.1;
- 4) para calcular a diferença de pressão do i -ésimo atuador p_{Δ_i} , considera-se o procedimento utilizado para gerar as curvas experimentais de posição, utilizadas para definir os dados de experimentais aceleração do manipulador (\ddot{y}_{exp_i}), o posicionamento de cada GDL do RPC e, conseqüentemente, o sentido de movimento de suas câmaras;
- 5) o procedimento para determinar a força de atrito do i -ésimo atuador (F_{atr_i}) baseia-se na aplicação dos valores de velocidade (\dot{y}_{exp_i}), obtidos pela derivada dos dados experimentais de posição, no modelo de atrito (LuGre);
- 6) como os casos do 1º, 3º, 4º e 5º GDL não consideram os efeitos gravitacionais, já que as forças gravitacionais são perpendiculares aos sistemas de coordenadas de cada GDL, define-se que a aceleração máxima nestes casos é definida pela Equação (5.62):

$$\ddot{y}_{max_i} = \max \left(\frac{A_i(p_{\Delta_i}) - F_{atr_i}}{M_i} \right) \quad (5.62)$$

- 7) a expressão que determina as acelerações mínimas e máximas do 2º GDL, por considerar a parcela relacionada à força gravitacional do conjunto formado pelo 3º, 4º e 5º GDL, é definida pela Equação (5.58) e considera somente o movimento de subida deste conjunto.

A restrição relativa à aceleração do i -ésimo atuador no espaço dos atuadores pode ser descrita por:

$$\ddot{y}_{min_i} \leq \ddot{y}(t) \leq \ddot{y}_{max_i} \quad (5.63)$$

Finalmente, a restrição relativa à aceleração do j -ésima junta é, aplicando-se a matriz de relação geométrica J , descrita na Equação 4.4, definida como:

$$\ddot{q}_{min_j} \leq \ddot{q}_j(t) \leq \ddot{q}_{max_j} \quad (5.64)$$

iii) Jerk

Como na formulação apresentada para o caso das restrições de aceleração, o valor do *jerk* também está relacionado com a variação de pressão do sistema. Isto é, em razão de se tratar da

primeira derivada da aceleração no tempo, o *jerk* do i -ésimo atuador depende da taxa de variação da diferença de pressão ao longo do movimento do êmbolo, da massa equivalente acoplada ao êmbolo, da área do i -ésimo atuador e da variação da força de atrito em função da velocidade do atuador ao longo do tempo, conforme descrito a seguir.

O valor máximo do *jerk* do i -ésimo atuador é obtido derivando a Equação (5.58):

$$\ddot{y}_{max_i} = \max \left(\frac{1}{M_i} \left(A_i \dot{P}_i - \left(\frac{\Delta F_{atr_i}}{\Delta \dot{y}_i} \frac{\Delta \dot{y}_i}{\Delta t} \right) \right) \right) \quad (5.65)$$

onde M_i é a massa equivalente acoplada ao êmbolo do i -ésimo atuador, A_i é a área do i -ésimo atuador, \dot{P}_i consiste na variação da diferença de pressão no tempo entre as câmaras do i -ésimo atuador (Equação 5.66), e $\left(\frac{\Delta F_{atr_i}}{\Delta \dot{y}_i} \frac{\Delta \dot{y}_i}{\Delta t} \right)$ refere-se à variação da força de atrito do i -ésimo atuador em função do modelo de atrito LuGre, que, por considerar a velocidade como variável de entrada $\left(\frac{\Delta F_{atr_i}}{\Delta \dot{y}_i} \right)$, cujos valores também dependem do tempo $\left(\frac{\Delta \dot{y}_i}{\Delta t} \right)$, relaciona as parcelas do atrito e da velocidade ao longo do tempo.

Neste trabalho, no que se refere às restrições de *jerk*, os termos descritos na Equação (5.65) são definidos com base nos conceitos mostrados na formulação das restrições de aceleração. A principal diferença é que, como o *jerk* consiste na primeira derivada da aceleração no tempo, existem parcelas deste equacionamento que variam dinamicamente ao longo do percurso do manipulador. Assim, os critérios utilizados para estabelecer o máximo *jerk* do i -ésimo atuador do RPC são: a variação da diferença de pressão entre as câmaras \dot{P}_i (item *iii.a*) e a derivada da força de atrito $\left(\frac{\Delta F_{atr_i}}{\Delta \dot{y}_i} \frac{\Delta \dot{y}_i}{\Delta t} \right)$ (item *iii.b*). As informações referentes ao cálculo da massa equivalente acoplada ao êmbolo de cada atuador (M_i) são apresentadas na Seção 4.7.

iii.a) Variação da diferença de pressão do i -ésimo atuador (\dot{P}_i)

Para determinar a variação da diferença de pressão do i -ésimo atuador, utiliza-se o conceito da razão incremental, considerando as hipóteses de movimentação descritas na definição das restrições de aceleração (item *ii.a*) e as curvas da diferença de pressão calculadas em função do tempo de deslocamento do êmbolo. Levando em conta que os dados da diferença de pressão,

adquiridos com um período de amostragem $2,2 \text{ ms}$ (Δt), são discretos, a taxa de variação da diferença de pressão é definida pela Equação (5.66):

$$\dot{p}_i(j) = \left(\frac{p_{\Delta_i}(j+1) - p_{\Delta_i}(j)}{\Delta t} \right) \quad (5.66)$$

onde $j=1, \dots, H-1$, e H é o tamanho da amostra de dados da diferença de pressão do i -ésimo atuador (p_{Δ_i}).

A seguir, para demonstrar a validade das hipóteses utilizadas na definição de \dot{P}_i no cálculo do *jerk* (Equação 5.65), é apresentado o estudo de caso referente ao 1º GDL do RPC, conforme ilustrado na Figura 5.17.

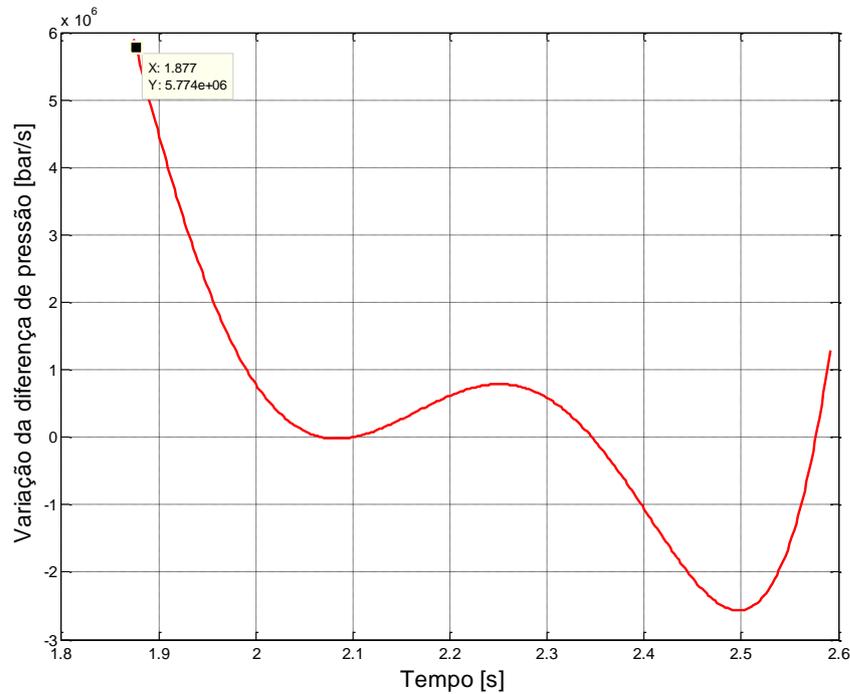


Figura 5.17 - Variação da diferença de pressão no 1º GDL do RPC.

Como se pode observar na Figura 5.17, a variação da diferença de pressão do 1º GDL ocorre no intervalo de tempo entre $t=1,8 \text{ s}$ e $t=2,6 \text{ s}$, aproximadamente, que é o instante durante o qual o manipulador está em movimento. Neste período, define-se que o valor da variação da diferença de pressão utilizada nos cálculos de *jerk* corresponde ao momento em que os valores de *jerk* são máximos durante o movimento de cada atuador. Na Figura 5.17, por exemplo, a variação da diferença de pressão entre as câmaras do 1º GDL ocorre no instante de tempo $t = 1,877 \text{ s}$, visto

que o valor máximo de *jerk* ocorre nesse instante, conforme apresentado na Seção 6.2.1.4. É importante registrar que este procedimento considera as hipóteses de movimentação descritas no item (ii.a) das restrições de aceleração, e é aplicado para cada GDL do RPC, de maneira que as curvas de \dot{P}_i (variação da diferença de pressão entre as câmaras no tempo de movimentação do atuador de cada GDL) são diferentes para cada caso.

iii.b) Variação da força de atrito pelo modelo LuGre

Considerando que o cálculo da força de atrito é realizado utilizando a Equação 5.61, e que os procedimentos de cálculo são aqueles descritos para os casos da variação da diferença de pressão, define-se que variação da força de atrito do *i*-ésimo atuador é dada pela Equação (5.67).

$$\dot{F}_{atr_i}(j) = \left(\frac{\Delta F_{atr_i}}{\Delta \dot{y}_i} \frac{\Delta \dot{y}_i}{\Delta t} \right) (j) = \left(\frac{F_{ss_i}(j+1) - F_{ss_i}(j)}{\dot{y}_i(j+1) - \dot{y}_i(j)} \right) \left(\frac{\dot{y}_i(j+1) - \dot{y}_i(j)}{\Delta t} \right) \quad (5.67)$$

onde os dados da força de atrito F_{ss_i} são discretos, sendo $j=1, \dots, H-1$; Δt , o período de amostragem é de 2,2 ms, e $\Delta \dot{y}_i$ é a taxa de variação de posição.

Como o modelo de atrito LuGre considera a velocidade como variável de entrada (ver Equação 5.61), a qual depende do tempo, é possível reescrever a Equação (5.67) da seguinte maneira:

$$\dot{F}_{atr_i}(j) = \left(\frac{F_{ss_i}(j+1) - F_{ss_i}(j)}{\Delta t} \right) \quad (5.68)$$

Para selecionar o valor de \dot{F}_{atr_i} utilizado no cálculo do *jerk* do *i*-ésimo atuador, assume-se que o valor da variação da força de atrito corresponde ao instante de tempo em que os valores de *jerk* são máximos durante o movimento de cada atuador. Por exemplo, ao se tratar do 1º GDL, a variação de atrito é calculada em função da velocidade correspondente ao instante de tempo do máximo valor de *jerk*, que, como apresentado na Seção 6.2.1.4, ocorre no instante $t=1,877$ s, aproximadamente.

Em síntese, para determinar os valores mínimos e máximos de *jerk* do *i*-ésimo atuador no espaço de juntas (\ddot{q}_{min_j} e \ddot{q}_{max_j}), os quais são aplicados às restrições cinemáticas de *jerk* do problema de otimização, são consideradas as seguintes condições:

- 1) os dados utilizados no cálculo dos limites de *jerk* são aplicados no espaço dos atuadores do RPC, de modo que os valores do cálculo de *jerk* (\ddot{y}) devem ser transformados para o espaço de juntas (\ddot{q});
- 2) os valores das áreas dos atuadores (A_i) (os valores utilizados no problema de otimização em estudo estão apresentados na Seção 6.1.2.1);
- 3) os valores das massas equivalentes do i -ésimo atuador (M_i), cujos procedimentos de cálculo estão descritos na Seção 4.7 (os valores utilizados no problema de otimização em estudo estão apresentados na Seção 6.1.2.1);
- 4) os procedimentos descritos no item (iii.a) determinam a variação no tempo da diferença de pressão do i -ésimo atuador (\dot{P}_i), levando em conta o cálculo da derivada da curva de pressão calculada, o posicionamento de cada GDL do RPC e, conseqüentemente, o sentido de movimento de suas câmaras;
- 5) como descrito no item (iii.b), o procedimento para determinar a derivada da força de atrito do i -ésimo atuador $\left(\frac{\Delta F_{atr_i}}{\Delta y_i} \frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)$ baseia-se na variação da força de atrito do i -ésimo atuador resultante da aplicação do modelo LuGre (Equação 5.67);
- 6) do 1° ao 5° GDL do RPC, estabelece-se que o *jerk* máximo é definido pela Equação (5.65).

Assim, a restrição relacionada ao *jerk* no espaço dos atuadores é dada como:

$$\ddot{y}_{min_i} \leq \ddot{y}_i(t) \leq \ddot{y}_{max_i} \quad (5.69)$$

Por fim, aplicando a matriz de relação geométrica J (Equação 4.4), a restrição relativa ao *jerk* do j -ésima junta é definida como:

$$\ddot{q}_{min_j} \leq \ddot{q}_j(t) \leq \ddot{q}_{max_j} \quad (5.70)$$

Restrições Dinâmicas

Com a finalidade de restringir o torque em cada junta do RPC, que, no caso de valores elevados decorrentes dos efeitos dinâmicos e operacionais do RPC, pode saturar o sinal calculado pelo algoritmo de controle, estabelece-se que o limite de torque de cada atuador depende das características dos sistemas pneumáticos. Nesta abordagem, considerando que a força efetiva de cada atuador depende somente das características inerentes ao sistema pneumático, como a área

do i -ésimo atuador (A_i), a pressão de suprimento (P_{sup}) e a matriz de relação geométrica (J) de cada atuador, como descrito na formulação apresentada nas Equações (5.47) e (5.48), o torque da j -ésima junta é definido da seguinte maneira:

$$\tau_{max_j} = J_i^{-1}(A_i \Delta p_i - F_{atr_i}) \quad (5.71)$$

onde J é a matriz que transforma as variáveis do espaço dos atuadores para o espaço de juntas, A_i é a área do i -ésimo atuador, F_{atr_i} é a força de atrito do i -ésimo atuador, e Δp_i é a diferença de pressão calculada de cada atuador, conforme o procedimento descrito no item (ii.a) das restrições de aceleração.

No presente trabalho, a restrição dinâmica proposta na Equação (5.71) é aplicada para estabelecer os limites máximos de torque utilizados na trajetória do RPC (considerando os aspectos relacionados às características operacionais dos atuadores, pressão de suprimento (P_{sup}), entre outros), de maneira que a minimização dos esforços em cada junta do RPC são determinadas por meio da formulação lagrangeana.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com a finalidade de analisar a metodologia proposta para o planejamento de trajetórias do RPC, neste trabalho os resultados são apresentados e analisados por meio de simulações e experimentos. Para analisar os aspectos relacionados à geração dos pontos intermediários (planejamento do caminho), são utilizadas apenas simulações, visto que se entende que as mesmas conseguem representar as condições de funcionamento do RPC na presença de obstáculos. Referente ao planejamento de trajetória, são propostas simulações para avaliar a restrição de colisão no espaço de juntas e bem como experimentos para analisar o desempenho do RPC no erro de segmento de trajetória. Nesses experimentos, as trajetórias de referência são determinadas por diferentes algoritmos metaheurísticos de otimização (FMA, AG, PSO) e interpoladas por *b-splines* de 5° e 7° grau, conforme descrito a seguir.

Este capítulo está constituído da seguinte maneira: a Seção 6.1 apresenta os parâmetros necessários às simulações (planejamento do caminho) – como o posicionamento dos pontos intermediários e do obstáculo, as dimensões dos obstáculos e o volume de trabalho do RPC – e aos experimentos (planejamento de trajetória) – como os resultados para a validação das restrições cinemáticas e dinâmicas utilizadas no problema de otimização, os valores dos parâmetros dos atuadores pneumáticos de cada GDL, entre outros; a Seção 6.2 apresenta os resultados das simulações realizadas para estabelecer os pontos intermediários (planejamento do caminho) na presença de obstáculos, os quais são representados por diferentes geometrias e posições no volume de trabalho do manipulador; e, por fim, a Seção 6.3 apresenta os resultados associados à metodologia proposta no presente trabalho para o planejamento de trajetória do RPC através de dois procedimentos: (i) analisam-se as restrições de colisão (Seção 5.2.2.3); e (ii) analisa-se o erro de seguimento de trajetória, comparando as trajetórias de referência (trajetórias de 5° e 7° grau geradas por meio da metodologia proposta e a trajetória gerada pelo método apresentado em Missiaggia, 2014) com as respectivas trajetórias executadas. A Figura 6.1, apresentada por Sarmanho, 2014, ilustra o protótipo do RPC.



Figura 6.1 - Imagem do protótipo do RPC.

6.1. Identificação dos Parâmetros do RPC para simulação e experimento

Esta seção apresenta os parâmetros utilizados na metodologia proposta (Seção 5.1), para o planejamento do caminho e da trajetória do RPC. Quanto ao planejamento do caminho, são especificados os dados necessários para se estabelecer os pontos intermediários da trajetória. Os dados considerados baseiam-se no posicionamento e nas dimensões dos obstáculos, nos pontos iniciais e finais da trajetória, no volume de trabalho do RPC, entre outros. Em relação ao planejamento da trajetória, os dados especificados referem-se aos parâmetros utilizados no cálculo das restrições cinemáticas e dinâmicas aplicadas ao problema de otimização, como os dados relacionados à área, ao atrito, à massa e à pressão dos atuadores pneumáticos de cada GDL do manipulador.

6.1.1. Parâmetros associados ao Planejamento do Caminho no RPC

Considerando a configuração cinemática e as características construtivas do RPC, foram estabelecidas três situações representativas das possíveis tarefas de manipulação de peças na presença de obstáculos (cilindros, esferas e cubos). Essas situações são daqui em diante denominadas “casos”. Para demonstrar a metodologia utilizada na geração dos pontos intermediários (planejamento do caminho), são analisados os três casos seguintes:

1º caso: o robô deve manipular objetos de baixo para cima, na presença de obstáculos;
2º caso: o robô deve manipular objetos em uma mesma altura na presença de obstáculos; e
3º caso: o robô deve manipular objetos em uma mesma altura sem a presença de obstáculos).
 Esses casos são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Casos utilizados no estudo do Planejamento do Caminho.

	Obstáculos	Coordenadas do ponto inicial (cm)	Coordenadas do ponto final (cm)	Coordenadas do centro do obstáculo (cm)
1º caso	cilindros, esferas e cubos	(-10; 32,24; 21,30)	(20; 32,24; 51,30)	(0; 37,24; 36,30)
2º caso	cilindros, esferas e cubos	(-20; 32,24; 36,30)	(20; 32,24; 36,30)	(0; 37,24; 36,30)
3º caso	cilindros, esferas e cubos	(-30; 22,24; 36,30)	(10; 22,24; 36,30)	(0; 37,24; 36,30)

Em todos os casos, os pontos iniciais e finais são definidos em diferentes posições no volume de trabalho do RPC, e a geometria dos obstáculos é representada por cilindros, cubos e esferas. Nas análises, as seguintes hipóteses são consideradas:

- as dimensões do volume de trabalho do RPC são 100, 40, 55 cm, porém, como o centro de coordenadas do obstáculo está deslocado em relação ao centro de coordenadas (ver Seção 5.1), convencionou-se que os pontos iniciais, os pontos finais e o centro dos obstáculos são definidos de acordo com a representação que consta na Figura 5.2;
- os pontos intermediários são determinados por meio dos algoritmos FMA, AG e PSO;
- os pontos iniciais e finais são previamente definidos, conforme os casos apresentados na Tabela 6.1;
- o raio da esfera de referência (R) é definido como 10 cm para os três casos;
- a distância relativa (d_{rel}) é definida como 10 cm para todos os casos;
- nos três casos, os cilindros são representados pela altura de 30 cm e raio de 7 cm; os cubos, por arestas de comprimento 10 cm; e as esferas, pelo raio de 7 cm. As dimensões dos obstáculos são utilizadas para determinar a região de colisão e, conseqüentemente, as distâncias d_1 e d_2 (ver Seção 5.1) que são utilizadas na restrição (b) do método proposto;
- os obstáculos encontram-se dentro do volume de trabalho do RPC, não se movimentam e têm posições e tamanhos fixos e previamente definidos; e para os três casos, o centro de coordenadas dos obstáculos é representado pelo mesmo ponto, de acordo com a Tabela 6.1.

6.1.2. Parâmetros associados ao Planejamento de Trajetória no RPC

Para analisar a metodologia proposta para o planejamento de trajetória do RPC, primeiramente é necessário verificar se o cálculo das restrições cinemáticas e dinâmicas (Seção 5.2.2.3) e seus limites máximos atendem os requisitos funcionais e físicos de cada GDL deste manipulador. Como dito, esta seção apresenta os resultados e os procedimentos utilizados para estabelecer os valores máximos das restrições cinemáticas e dinâmicas, os quais são aplicados ao problema de planejamento de trajetória. Os resultados relacionados ao cálculo do torque por meio da formulação lagrangeana (Equação 5.50) não são discutidos no presente trabalho, visto que o modelo utilizado já foi validado e encontra-se disponível em Sarmanho, 2014.

Para os procedimentos experimentais utilizados no cálculo das restrições cinemáticas e dinâmicas, apresentados a seguir, Seção 6.1.2.2 a 6.1.2.5, são levados em conta os seguintes critérios:

- o experimento considera o posicionamento do êmbolo quanto ao curso do cilindro, o posicionamento de cada atuador em relação ao movimento dos demais GDL do RPC e o procedimento para a abertura da válvula;
- a transformação dos dados no espaço dos atuadores para o espaço de juntas é feita por meio da matriz de relação geométrica (J), apresentada na Seção 4.3.1;
- os dados experimentais de posição são interpolados com polinômios de 7ª ordem;
- a expressão “dados experimentais de velocidade, de aceleração e de *jerk*”, quando mencionadas no texto, se refere à derivada dos dados experimentais de posição;
- no 1º GDL, o manipulador é posicionado a uma distância máxima d_3 em relação ao eixo Z do sistema de coordenadas do 1º GDL, e o conjunto formado pelo 4º e 5º GDL deve ser orientado a 0º (ângulo θ_2), permitindo, assim, que se determine os dados experimentais de posição em função da máxima variação do momento de inércia com relação ao eixo de rotação do 1º GDL (ver Figura 5.11);
- no 2º GDL, os dados experimentais são determinados considerando-se somente o movimento de subida, visto que se trata da condição que exige os maiores esforços na movimentação do 2º GDL do RPC (ver Figura 5.11);
- ao se tratar do 3º ao 5º GDL, os dados experimentais de posição independem do posicionamento do atuador e do sentido de movimento do êmbolo, já que os efeitos gravitacionais do manipulador não interferem na força exercida pelos seus respectivos êmbolos;

- Para cada GDL, os dados experimentais de posição e de suas derivadas são apresentados e analisados em intervalos distintos de tempo. Isto ocorre porque, no RPC, o procedimento para coleta de dados é feito em ensaios distintos para cada GDL utilizando o conversor de linguagem Grafcet desenvolvido por Leonardelli, 2015.

6.1.2.1. Parâmetros do manipulador e seus atuadores pneumáticos

Esta seção apresenta os parâmetros dos atuadores pneumáticos que constituem o sistema de acionamento de cada GDL do RPC. Essas informações são necessárias para que se possa implementar os modelos das restrições cinemáticas (velocidade, aceleração e *jerk*) e dinâmicas (torque) utilizadas no planejamento de trajetória, como, por exemplo, os dados da massa equivalente, a área de cada atuador, os parâmetros do modelo de atrito, entre outros.

O cálculo da massa equivalente é determinado de acordo com os procedimentos descritos na Seção 4.7, os quais consideram os efeitos inerciais decorrentes da variação da massa equivalente acoplada ao êmbolo do *i*-ésimo atuador em função do movimento. Neste trabalho, a dinâmica da massa equivalente não é considerada, uma vez que o objetivo da metodologia proposta é estabelecer os valores das massas equivalentes que correspondem às condições operacionais críticas do manipulador. As informações relacionadas à área de cada atuador também não são discutidas neste trabalho, já que podem ser facilmente encontradas em catálogos dos fabricantes e são apresentadas em Sarmanho, 2014. A Tabela 6.2 apresenta os valores da área (A_i) e da massa equivalente (M_i) do *i*-ésimo atuador.

Tabela 6.2 - Parâmetros utilizados no planejamento de trajetória do RPC.

GDL	A_i	M_i
1°	$0,8042e-3 \text{ m}^2$	180,50 kg
2°	$0,8042e-3 \text{ m}^2$	14,95 kg
3°	$0,8042e-3 \text{ m}^2$	12,75 kg
4°	$0,8042e-3 \text{ m}^2$	3,18 kg
5°	$0,4909e-3 \text{ m}^2$	0,48 kg

A força de atrito nos atuadores é calculada em função da velocidade do êmbolo do *i*-ésimo atuador e dos parâmetros estáticos e dinâmicos do modelo LuGre, que se relacionam com uma força proporcional à média das microdeformações dos elementos elásticos, com uma parcela proporcional à taxa de variação temporal das deformações e com uma parcela relativa à força de

atrito viscoso. Esses parâmetros foram determinados por meio do procedimento experimental realizado por Sarmanho, 2014, descrito na Seção 4.3.3, e apresentados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 - Parâmetros estáticos e dinâmicos para o atrito.

GDL	σ_{0_i} [N/m]	σ_{1_i} [Ns/m]	σ_{2_i} [Ns/m]	\dot{y}_{s_i} [m/s]	F_{c_i} [N]	F_{s_i} [N]
1°	4e4	229	168	0,0168	38,0	64,5
2°	3e4	798	230	0,0063	36,5	46,5
3°	2e4	283	132,5	0,0089	31,5	45,5
4°	4e4	186	132	0,0072	21,5	36,0
5°	14e4	476	376	0,0062	18,0	31,5

Fonte: Sarmanho, 2014.

Como já mencionado, esses parâmetros são utilizados no cálculo das forças de atrito usando o modelo LuGre (Equação 5.61), as quais são aplicadas ao cálculo das restrições cinemáticas (aceleração e *jerk*) e dinâmicas (torque), como descrito na Seção 5.2.

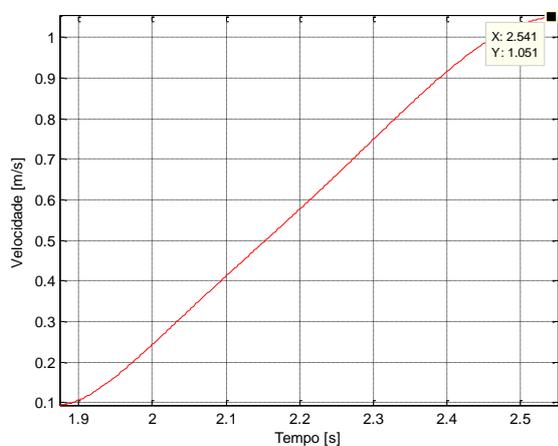
Para determinar a máxima diferença de pressão entre as câmaras do *i*-ésimo atuador, é necessário estabelecer os parâmetros de pressão que limitam este sistema. Nesta abordagem, a pressão de suprimento das válvulas é $p_{\text{sup}} = 7,46 \cdot 10^5$ Pa, e a pressão atmosférica é $p_{\text{atm}} = 1 \cdot 10^5$ Pa. Demais parâmetros destes atuadores, como as constantes das relações de calores específicos, a temperatura do ar de suprimento para as válvulas, a constante universal dos gases, entre outros, não são discutidos neste trabalho, pois são parâmetros associados à modelagem dinâmica das pressões de ar nas câmaras dos cilindros com base na lei da conservação de massa no interior do volume de controle, que são discutidos em Perondi, 2002, Sobczyk, 2009, Sarmanho, 2014, entre outros.

6.1.2.2. Definição das restrições de Velocidade

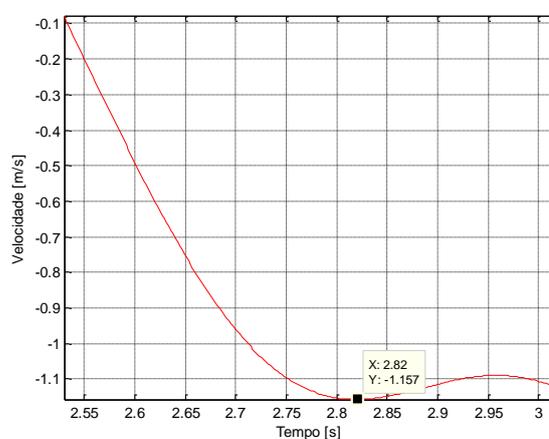
Neste trabalho, os valores mínimos e máximos de velocidade do *i*-ésimo atuador são, respectivamente, definidos por meio do mapa estático do atrito [Sarmanho, 2014] e obtidos através dos procedimentos experimentais descritos na Seção 5.2.2.3.

No caso dos valores máximos de velocidade, primeiramente são realizados experimentos para se obter os dados experimentais de posição, determinados por sensores acoplados em cada atuador. Com esses dados, determina-se o valor de velocidade por meio da 1ª derivada de posição. Para determinar os valores máximos de velocidade do *i*-ésimo atuador, ilustrados na Figura 6.2, considera-se o percurso de seus respectivos êmbolos. Por exemplo, como pode-se observar na Figura 6.2 (a), a velocidade máxima no 1° GDL ocorre no instante de tempo $t=2,541$ s, uma vez

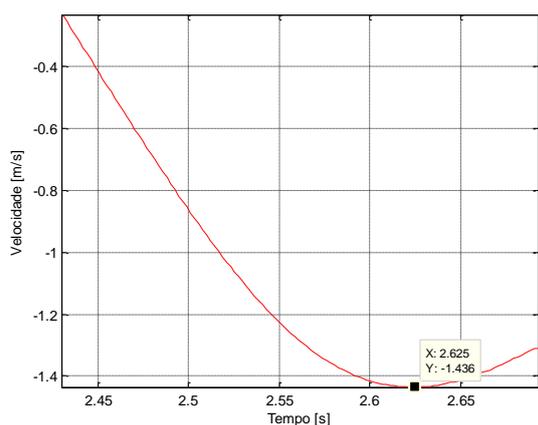
que o êmbolo atinge o fim de curso do cilindro no instante de tempo $t=2,6$ s. Os procedimentos para determinar as velocidades máximas do 2º ao 5º GDL do RPC são os mesmos aqui descritos, porém são considerados os dados ilustrados na Figura 6.2 (b) a (e).



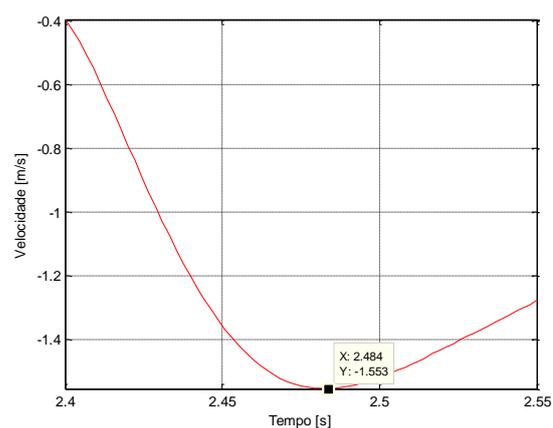
(a) Velocidade obtida experimentalmente (1º GDL)



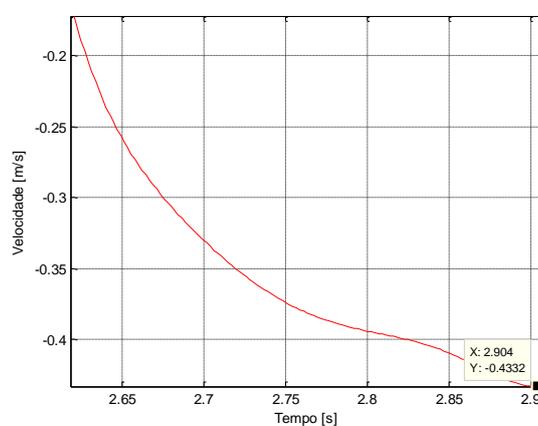
(b) Velocidade obtida experimentalmente (2º GDL subindo)



(c) Velocidade obtida experimentalmente (3º GDL)



(d) Velocidade obtida experimentalmente (4º GDL)



(e) Velocidade obtida experimentalmente (5º GDL)

Figura 6.2 - Curvas de velocidade obtidas experimentalmente.

Os valores mínimos de velocidade são determinados levando-se em conta o fenômeno adere-desliza (*stick-slip*). Quer dizer, como em baixas velocidades a força de atrito (F_{atr}) caracteriza-se por um comportamento altamente não-linear, associado ao atrito estático e ao efeito de Stribeck, define-se que a velocidade mínima do i -ésimo atuador deve ser superior à faixa de velocidade relacionada ao efeito de Stribeck, obtendo-se, assim, trajetórias nas quais os efeitos de atrito são associados às forças viscosas, facilitando o controle desses sistemas. Desta forma, analisando o mapa estático do atrito de cada atuador do RPC (Figura 5.11), assume-se que as velocidades mínimas do i -ésimo atuador aplicadas às restrições do problema de otimização são: 0,03 m/s, 0,02 m/s, 0,015 m/s, 0,018 m/s e 0,010 m/s.

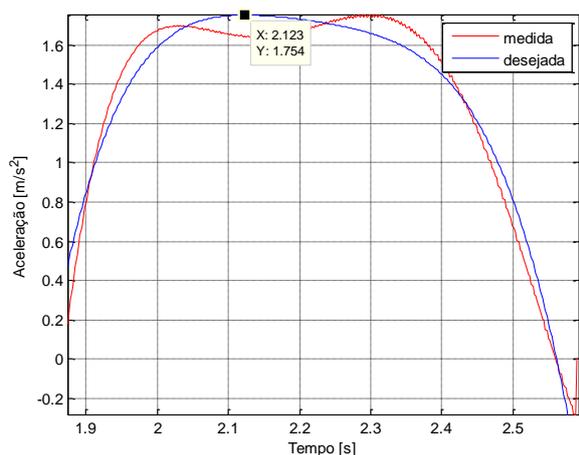
As informações sobre as velocidades máximas e mínimas aplicadas às restrições de velocidade do problema de otimização são, no espaço de juntas e de atuadores, representadas na Figura 6.2 e transcritas na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 - Velocidades máximas e mínimas aplicadas às restrições de velocidade.

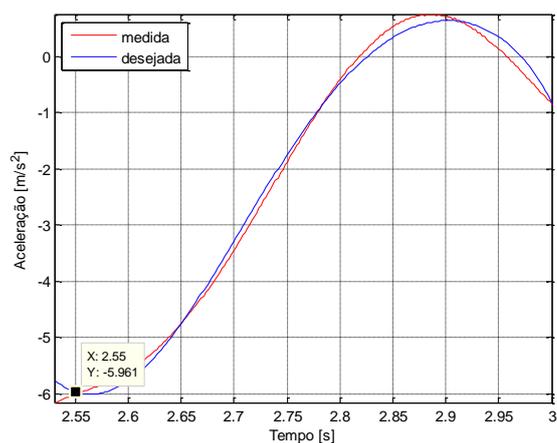
	1° GDL	2° GDL	3° GDL	4° GDL	5° GDL
Velocidade mínima (V_{min}) e máxima (V_{max}) no espaço de atuadores	0,03 e 1,05 m/s	0,02 e 1,157 m/s	0,015 e 1,436 m/s	0,018 e 1,553 m/s	0,010 e 0,4332 m/s
Velocidade mínima (\dot{q}_{min}) e máxima (\dot{q}_{max}) no espaço de juntas	0,3272 e 11,4535 rad/s	0,02 e 1,157 m/s	0,015 e 1,436 m/s	0,3158 e 27,24 rad/s	0,4444 e 19,25 rad/s

6.1.2.3. Definição das restrições de aceleração

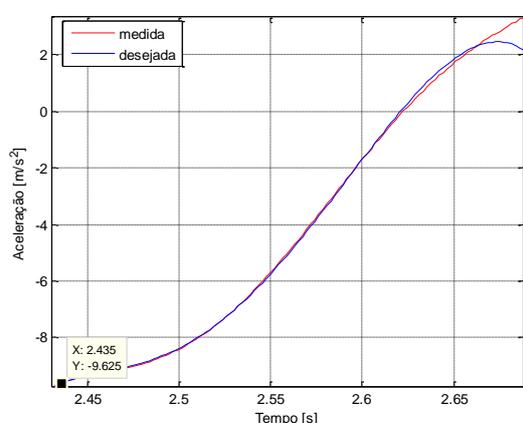
Com a finalidade de analisar o modelo de aceleração, esta seção apresenta um comparativo entre os respectivos dados experimentais e os valores do modelo das restrições cinemáticas propostas. Esse modelo é calculado através das Equações (5.58) e (5.61), cujas variáveis são: diferença de pressão calculada entre as câmaras (p_{Δ_i}), que utiliza os dados experimentais de aceleração; força de atrito (F_{atr_i}), que utiliza os dados experimentais de velocidade; massa equivalente (M_i) e área (A_i). Essas duas últimas, como já mencionado, são consideradas invariantes no tempo. Já os dados experimentais de aceleração do i -ésimo atuador são obtidos por meio da derivada dos dados de posição, adquiridos por meio de sensores acoplados em cada atuador do RPC. A Figura 6.3 ilustra as curvas de aceleração obtidas pela aplicação do modelo proposto (aceleração desejada) e obtidas experimentalmente (aceleração medida).



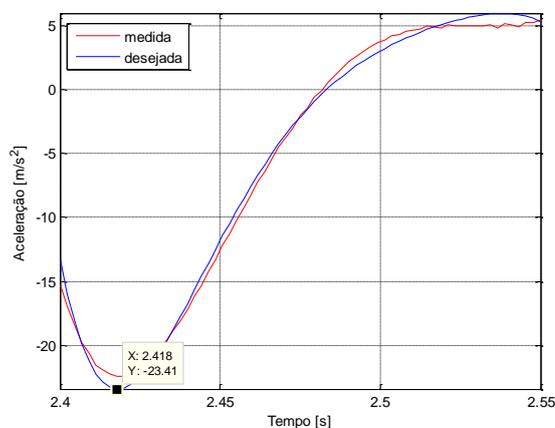
(a) Aceleração obtida experimentalmente e pelo modelo proposto (1 ° GDL)



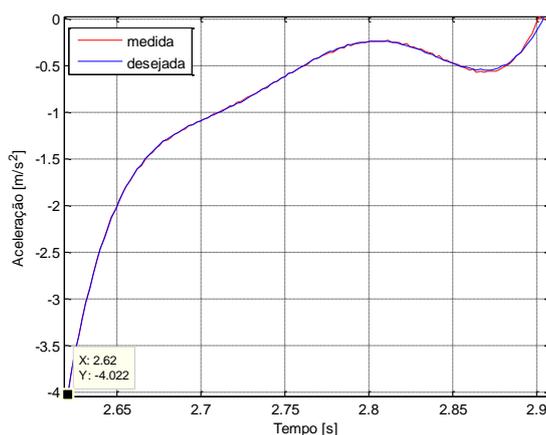
(b) Aceleração obtida experimentalmente e pelo modelo proposto (2 ° GDL subindo)



(c) Aceleração obtida experimentalmente e pelo modelo proposto (3 ° GDL)



(d) Aceleração obtida experimentalmente e pelo modelo proposto (3 ° GDL)



(f) Aceleração obtida experimentalmente e pelo modelo proposto (5 ° GDL)

Figura 6.3 - Curvas de aceleração obtidas pelo modelo proposto e experimentalmente.

Analisando a Figura 6.3, observam-se variações entre os dados obtidos experimentalmente e os valores do modelo proposto. Quanto a essas diferenças, entende-se que as mesmas estão

relacionadas às características de funcionamento do RPC, como, por exemplo, o ruído dos sensores de posição acoplados em cada atuador, a temperatura, que influencia o comportamento do atrito, entre outros. Essas particularidades acarretam oscilações significativas nos dados de posição e, conseqüentemente, no cálculo da diferença de pressão: esses dados aplicados ao modelo de aceleração proposto implicam variações em cada GDL do manipulador. Nesse sentido, levando em conta que as diferenças apresentadas na Figura 6.3 não influenciam os limites físicos do RPC, assume-se que os dados do modelo (desejado) podem ser considerados para que se possa estabelecer os valores limites das restrições de aceleração do problema de otimização, de modo que os modelos da massa equivalente e do atrito estão adequados às características deste manipulador.

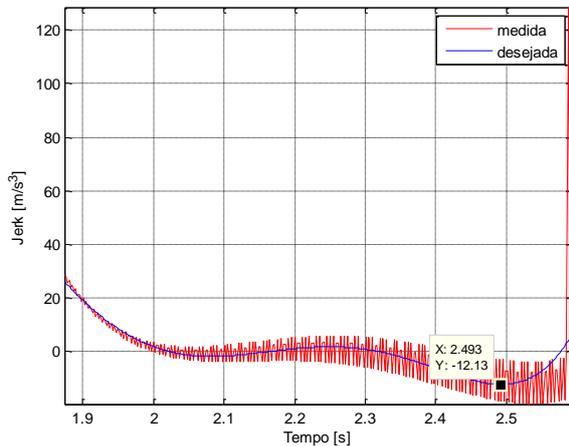
Os valores máximos de aceleração do i -ésimo atuador são determinados analisando-se as variações do modelo ao longo do percurso de seus respectivos êmbolos. No caso do 1º GDL, por exemplo, como se observa na Figura 6.3 (a), o valor máximo de aceleração é definido no instante de tempo $t = 2,123$ s, uma vez que se trata da máxima aceleração durante o movimento do manipulador, e o êmbolo atinge o fim de curso do cilindro no instante de tempo $t = 2,6$ s. Para determinar as acelerações máximas dos demais GDL do RPC, são utilizados os mesmos procedimentos, porém considera-se os dados ilustrados na Figura 6.3 (b) a (e). Já em relação aos valores mínimos de aceleração, define-se que os limites máximos são iguais aos limites mínimos de aceleração, uma vez que a metodologia proposta considera somente as condições críticas de movimentação do 1º e 2º GDL, como descrito na Seção 5.2.2.3, e os esforços aplicados aos atuadores do 3º, 4º e 5º GDL não interferem no sentido de movimento de seus êmbolos. A Tabela 6.5 apresenta os valores máximos e mínimos de aceleração do i -ésimo atuador que são aplicados às restrições de aceleração do problema de otimização, cujos valores são transcritos da Figura 6.3.

Tabela 6.5 - Acelerações máximas e mínimas aplicadas às restrições de aceleração.

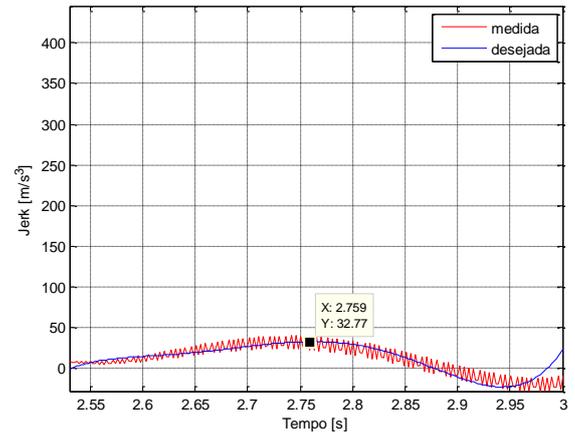
	1º GDL	2º GDL	3º GDL	4º GDL	5º GDL
Aceleração mínima (A_{\min}) e máxima (A_{\max}) no espaço de atuadores	$\pm 2,123$ m/s ²	$\pm 5,961$ m/s ²	$\pm 9,625$ m/s ²	$\pm 23,41$ m/s ²	$\pm 4,022$ m/s ²
Aceleração mínima (\ddot{q}_{\min}) e máxima (\ddot{q}_{\max}) no espaço de juntas	$\pm 23,15$ rad/s ²	$\pm 5,961$ m/s ²	$\pm 9,625$ m/s ²	$\pm 410,70$ rad/s ²	$\pm 178,76$ rad/s ²

6.1.2.4. Definição das restrições de *jerk*

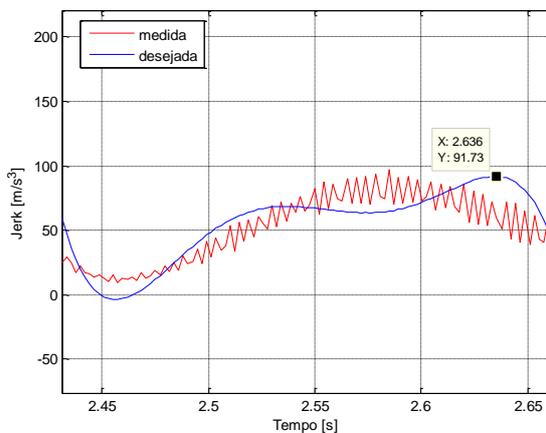
Para validar o modelo de *jerk* aplicado às restrições do problema de otimização, apresenta-se um comparativo entre os dados experimentais de *jerk* e os valores do modelo proposto. Os valores desse modelo são determinados pela Equação (5.63), e as variáveis aplicadas ao modelo do i -ésimo atuador são: variação da diferença de pressão experimental entre as câmaras (\dot{P}_i); variação da força de atrito ($\frac{\Delta F_{atr_i} \Delta y_i}{\Delta t}$), que utiliza os dados experimentais de velocidade; massa equivalente (M_i) e área (A_i). Massa equivalente e área, como já mencionado, são consideradas invariantes no tempo. Já os dados experimentais de *jerk* do i -ésimo atuador são obtidos por meio da 3ª derivada dos dados de posição. É importante ressaltar que os experimentos realizados consideram os mesmos procedimentos descritos anteriormente. A Figura 6.4 ilustra as curvas de *jerk* obtidas pelo modelo proposto (desejada) e experimentalmente (medida).



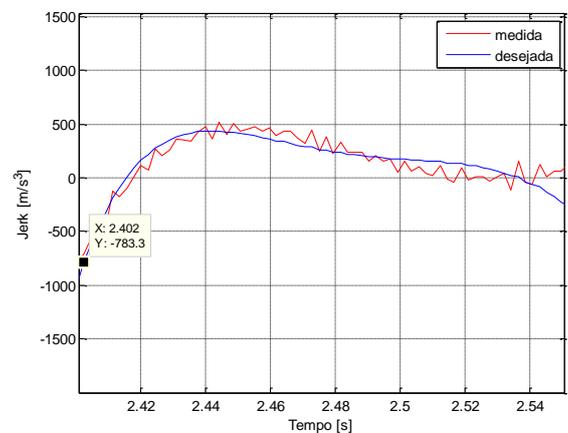
(a) *Jerk* obtido experimentalmente e pelo modelo proposto (1º GDL)



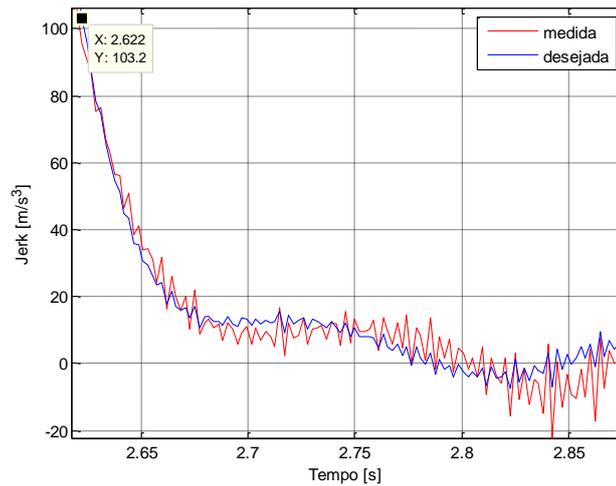
(b) *Jerk* obtido experimentalmente e pelo modelo proposto (2º GDL subindo)



(c) *Jerk* obtido experimentalmente e pelo modelo proposto (3º GDL)



(d) *Jerk* obtido experimentalmente e pelo modelo proposto (4º GDL)



(e) *Jerk* obtido experimentalmente e pelo modelo proposto (5° GDL)

Figura 6.4 - Curvas de *Jerk* obtidas pelo modelo proposto e experimentalmente.

Como pode-se observar na Figura 6.4, existem variações entre os dados obtidos experimentalmente e os valores obtidos através do modelo proposto. Como já mencionado, essas diferenças, devido ao ruído dos sensores de posição acoplados ao i -ésimo atuador, à temperatura, etc. acarretam em oscilações significativas nos dados da variação da diferença de pressão calculada entre as câmaras (\dot{P}_i) e nos dados da variação da força de atrito $\left(\frac{\Delta F_{atr_i}}{\Delta y_i} \frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)$ e, por consequência, no modelo de *jerk* proposto. Assim, considerando que as diferenças apresentadas na Figura 6.4 não influenciam nos limites físicos do RPC, assume-se que os dados do modelo (desejado) podem ser considerados para estabelecer os valores limites das restrições de *jerk* do problema de otimização.

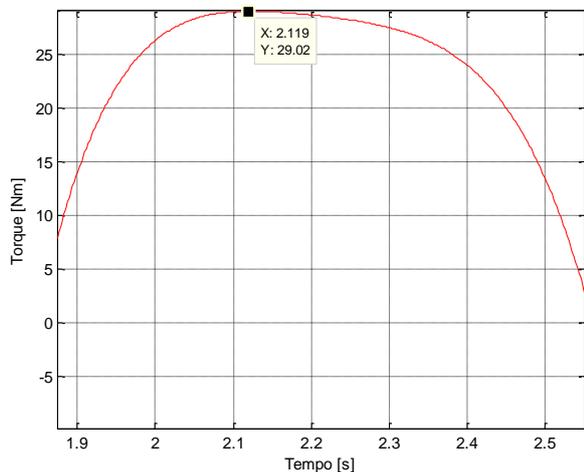
Os valores máximos de *jerk* do i -ésimo atuador são determinados analisando-se as variações do modelo ao longo do percurso de seus respectivos êmbolos. No caso do 1° GDL, Figura 6.4 (a), o *jerk* máximo ocorre no instante de tempo $t = 2,493$ s, já que se refere ao maior valor de *jerk* até o êmbolo atingir o fim de curso do cilindro ($t = 2,6$ s). Para determinar o *jerk* máximo dos demais GDL do RPC, são utilizados os mesmos procedimentos, porém considerando os dados ilustrados na Figura 6.4 (b) a (e). Quanto aos valores mínimos de *jerk*, assume-se que os limites máximos são iguais aos limites mínimos para todos os GDL do RPC, pois, derivando as equações relativas ao modelo de aceleração, Equação (5.58), as forças gravitacionais não interferem nos esforços e no sentido de movimento de seus êmbolos. A Tabela 6.6 apresenta os valores máximos e mínimos de *jerk* do i -ésimo atuador que são utilizados nas restrições de *jerk* do problema de otimização, os quais são transcritos da Figura 6.4.

Tabela 6.6 - *Jerk* máximo e mínimo aplicado às restrições de *jerk*.

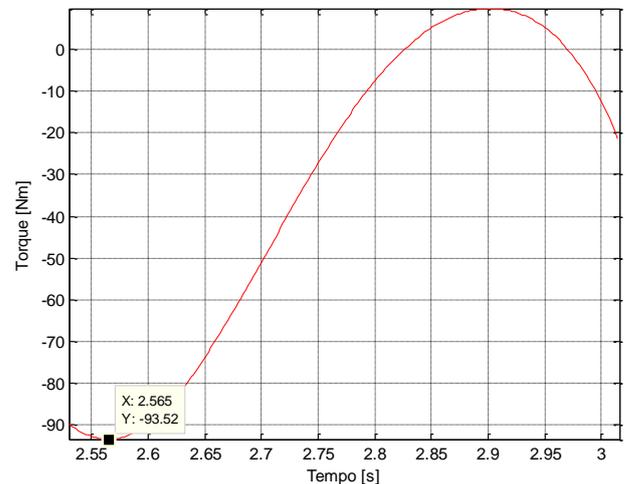
	1° GDL	2° GDL	3° GDL	4° GDL	5° GDL
<i>Jerk</i> mínimo (J_{\min}) e máximo (J_{\max}) no espaço de atuadores	$\pm 12,13 \text{ m/s}^3$	$\pm 32,77 \text{ m/s}^3$	$\pm 91,73 \text{ m/s}^3$	$\pm 783,3 \text{ m/s}^3$	$\pm 103,2 \text{ m/s}^3$
<i>Jerk</i> mínimo (\ddot{q}_{\min}) e máximo (\ddot{q}_{\max}) no espaço de juntas	$\pm 132,31 \text{ rad/s}^2$	$\pm 32,77 \text{ m/s}^2$	$\pm 91,73 \text{ m/s}^2$	$\pm 1.3742\text{e}+04 \text{ rad/s}^2$	$\pm 4.5867\text{e}+03 \text{ rad/s}^2$

6.1.2.5. Definição das restrições de torque

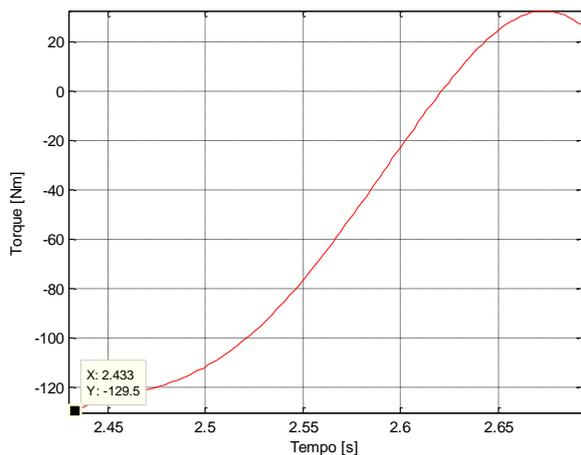
Os valores de torque aplicados às restrições dinâmicas do problema de otimização são determinados por meio da Equação (5.69). Os dados aplicados ao cálculo dessas restrições em cada junta são: diferença de pressão calculada entre as câmaras (p_{Δ_i}); força de atrito (F_{atr_i}); área (A_i); e a matriz de transformação mecânica (J) (ver Seção 4.1.1). Os experimentos realizados para calcular a diferença de pressão entre as câmaras (p_{Δ_i}) e os procedimentos para o posicionamento do manipulador são os mesmos descritos anteriormente, Seção 5.2.2.3. Os valores mínimos e máximos de torque do i -ésimo atuador são, diferentemente dos casos das restrições cinemáticas (aceleração e *jerk*), determinados somente em função dos valores do modelo proposto, como pode-se observar na Figura 6.5.



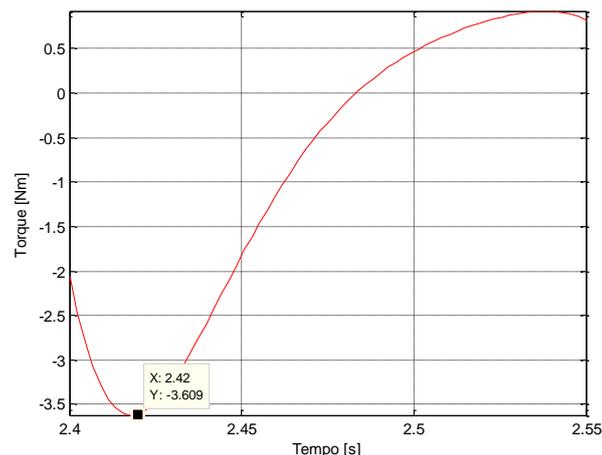
(a) Torque obtido pelo modelo proposto (1° GDL)



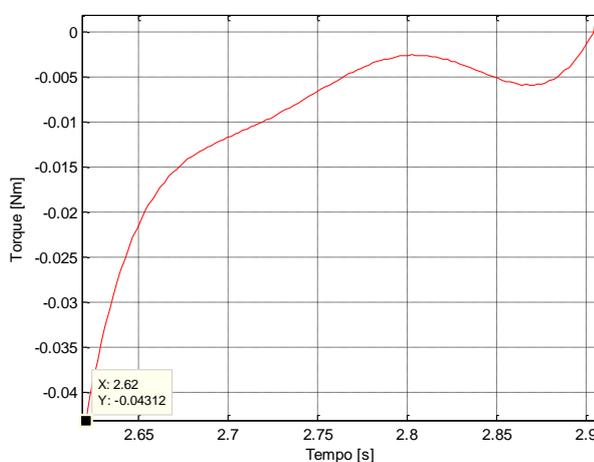
(b) Torque obtido pelo modelo proposto (2° GDL subindo)



(c) Torque obtido pelo modelo proposto (3° GDL)



(d) Torque obtido pelo modelo proposto (4° GDL)



(e) Torque obtido pelo modelo proposto (5° GDL)

Figura 6.5 - Curvas de Torque obtidas pelo modelo proposto

Os valores mínimos e máximos de torque do i -ésimo atuador são determinados por meio dos dados obtidos pelo modelo ao longo do percurso de seus respectivos êmbolos. Analisando o 1° GDL, Figura 6.5 (a), o torque máximo ocorre no instante de tempo $t = 2,119 s$, visto que o êmbolo atinge o fim de curso no instante $t = 2,6 s$, valor máximo de torque neste período. Os procedimentos para determinar o torque máximo dos demais GDL do RPC são os mesmos estabelecidos para o 1° GDL, porém considerando os dados ilustrados nas Figuras 6.4 (b) a (f). Quanto aos valores mínimos de torque, assume-se que os limites máximos são iguais aos limites mínimos para todos os GDL do RPC, visto que esta abordagem considera somente as condições críticas de movimentação do 1° e 2° GDL, como descrito na Seção 5.2.2.3. Os esforços aplicados aos atuadores do 3°, 4° e 5° GDL não interferem no sentido de movimento de seus êmbolos. A

Tabela 6.7 apresenta os valores máximos e mínimos de torque, os quais são aplicados como restrições dinâmicas do problema de otimização de trajetórias.

Tabela 6.7 - Torque máximo e mínimo aplicado às restrições de torque

	1° GDL	2° GDL	3° GDL	4° GDL	5° GDL
Torque mínimo (τ_{\min}) e máximo (τ_{\max}) no espaço de juntas	$\pm 29,02$ N.m	$\pm 231,5$ N	$\pm 129,5$ N	$\pm 3,609$ N.m	$\pm 0,0431$ N.m

6.2. Planejamento do Caminho do RPC na presença de obstáculos

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos em relação ao estudo do planejamento do caminho do RPC (Seção 5.1). Para cada um dos casos, esses resultados serão analisados no que diz respeito à geração dos pontos intermediários da trajetória. Essa análise será realizada por meio dos algoritmos FMA, PSO e AG de acordo com as informações descritas na Seção 6.1.1. Os valores obtidos na solução de cada algoritmo são apresentados nas Tabelas 6.8 a 6.10.

No 1° caso, procura-se analisar as situações em que o robô deve manipular objetos de baixo para cima, considerando a presença de obstáculos entre os pontos iniciais e finais estabelecidos. Nesta abordagem, os pontos iniciais e finais são representados pelos pontos (-10, 32.24, 21.30) e (20, 32.24, 51.30), respectivamente, e o centro de coordenadas pelo ponto (0, 37.24, 36.30), conforme apresentado na Tabela 6.1. A Figura 6.6 mostra os resultados obtidos através da aplicação do método de otimização proposto para o 1° caso, considerando os obstáculos representados por cilindros (a), esferas (b) e cubos (c) e utilizando o algoritmo de otimização FMA⁵.

⁵ Considerando que a aplicação dos algoritmos AG e PSO também obtiveram resultados satisfatórios, ilustra-se aqui somente a aplicação do algoritmo FMA. Os resultados associados à implementação dos algoritmos AG e PSO serão apresentados na Seção 6.2.1.

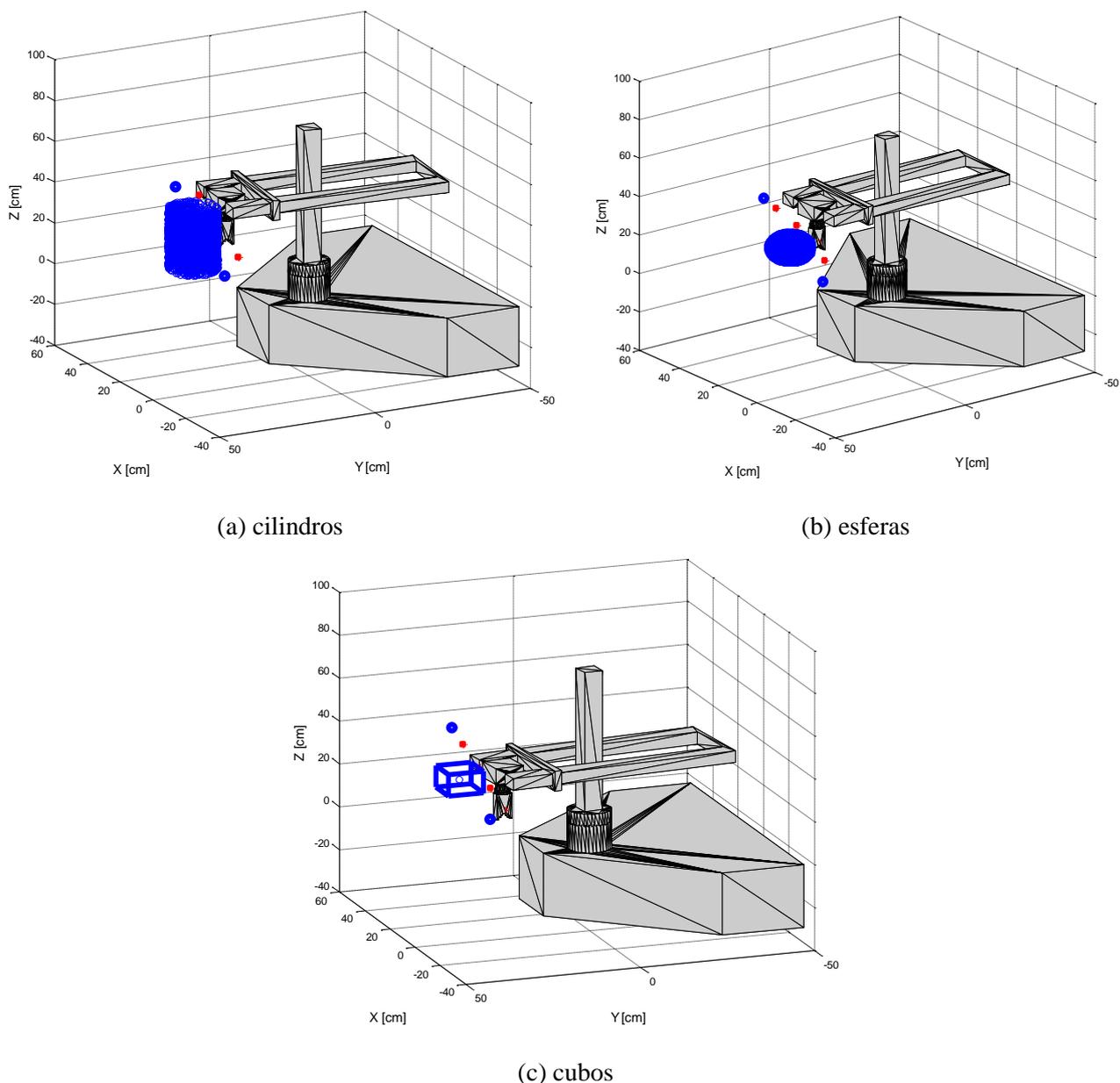


Figura 6.6 - Pontos intermediários no caso de cilindros (a), esferas (b) e cubos (c) (1º caso)

Como se observa na Figura 6.6, os pontos intermediários encontram-se fora da zona de colisão nos casos de cilindros (a), esferas (b) e cubos (c). Isto pode ser comprovado porque, na solução do problema de otimização, todos os pontos intermediários (variáveis de projeto) cumprem com os requisitos estabelecidos na função objetivo (Equação 5.2) e com as restrições do problema de otimização (Seção 5.1), que são: 1) a distância entre cada ponto intermediário e os obstáculos (região de colisão) é definida por meio da relação entre as distâncias d_1 e d_2 e a distância relativa (d_{rel}). Essa relação é estabelecida na Equação 5.8 para cubos e esferas e na Equação 5.9 para cilindros; 2) os pontos intermediários encontram-se dentro do volume de trabalho do RPC; e

3) a distância entre cada ponto intermediário é igual ao raio da esfera de referência (R), conforme descrito a seguir.

Para verificar a eficácia da solução proposta para o 1º caso, analisa-se a situação em que os obstáculos são representados por cilindros, esferas e cubos (Figura 6.6.a). Considerando que para cada ponto intermediário há uma função objetivo associada e que as restrições do problema de otimização não foram violadas, é possível verificar a efetividade do algoritmo de otimização proposto (ver Seção 5.1) da seguinte maneira:

- o número de pontos intermediários (u_i^*) está condizente com a metodologia proposta, uma vez que, analisando os n pontos intermediários em relação ao ponto final (P_f) (Equação 5.6), somente a distância do último ponto intermediário (u_n^*) é menor que a esfera de referência de raio (R), o que valida o método ilustrado na Figura 5.3. Esta condição pode ser verificada analisando-se o valor da função objetivo relativo ao último ponto intermediário, mostrado na Tabela 6.8, onde se observa que o valor é menor que a esfera de raio (R);
- quanto às restrições laterais (Equação 5.3 a 5.5), verifica-se que todos os pontos intermediários encontram-se dentro dos limites em coordenadas x , y e z do volume de trabalho do RPC;
- com relação à restrição a , constata-se que, do primeiro (u_i^*) até o último ponto intermediário (u_n^*), todos os pontos encontram-se dentro de uma superfície de uma esfera de raio (R) em relação ao ponto anterior (u_{i-1}^*). Isso pode ser verificado na Tabela 6.8, a qual apresenta os valores de R^2 , que se refere à condição estabelecida na Equação 5.7 por meio da equação paramétrica da esfera;
- no caso da restrição b , todos os pontos intermediários (u_i^*) encontram-se a uma distância relativa (d_{rel}) de 10 *cm* da região de colisão. Essa condição pode ser verificada relacionando, para cada ponto intermediário (u_i^*), as distâncias d_1 e d_2 (Tabela 6.8) com a distância d_{rel} por meio da Equação 5.8 e da Equação 5.9;
- a solução obtida mostra-se adequada porque os pontos intermediários (solução do problema de otimização) apresentam valores próximos aos limites estabelecidos para restrições (a) e (b), considerando que a função objetivo busca minimizar a distância entre o ponto intermediário (u_i^*) e o ponto final.

O 2º caso refere-se às situações em que o robô deve manipular objetos em uma mesma altura com a presença de obstáculos entre os pontos iniciais e finais estabelecidos. Nessa abordagem, os pontos iniciais e finais são representados pelos pontos (-20, 32.24, 36.30) e (20,

32.24, 36.30), respectivamente, e o centro de coordenadas pelo ponto (0, 37.24, 36.30), de acordo com a Tabela 6.1. A Figura 6.7 ilustra as simulações do método de otimização proposto para o 2º caso, utilizando o algoritmo de otimização FMA e levando em conta que os obstáculos são representados por cilindros (a), esferas (b) e cubos (c).

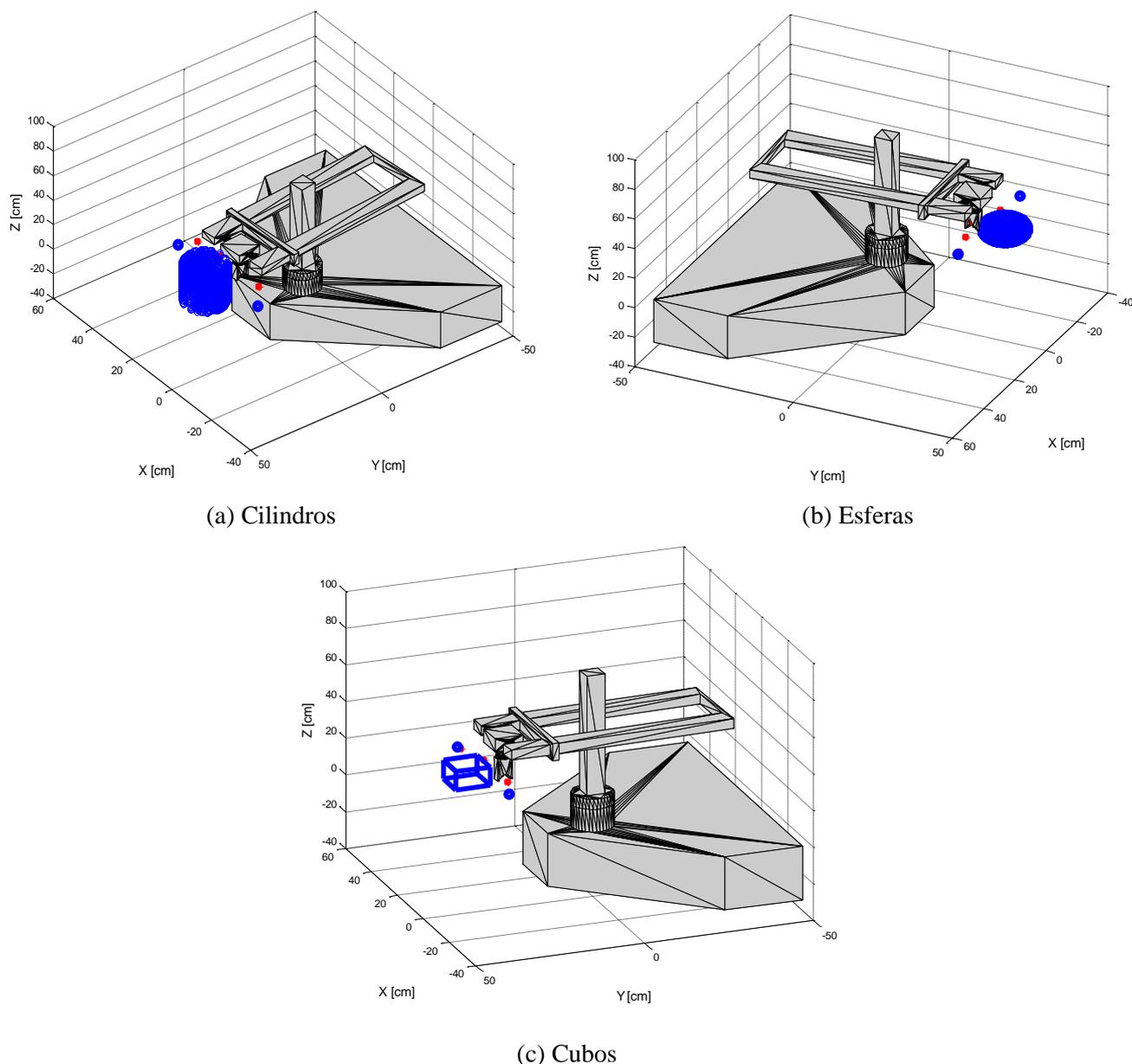
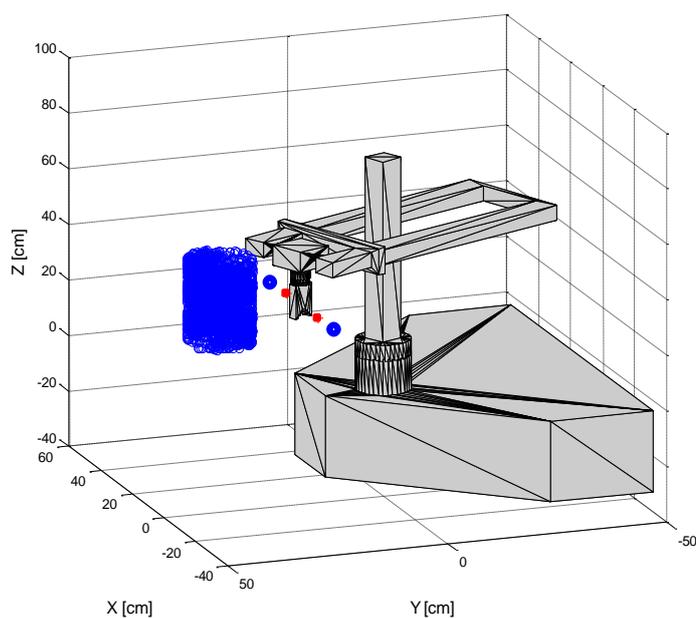


Figura 6.7 - Pontos intermediários no caso de cilindros (a), esferas (b) e cubos (c) (2º caso)

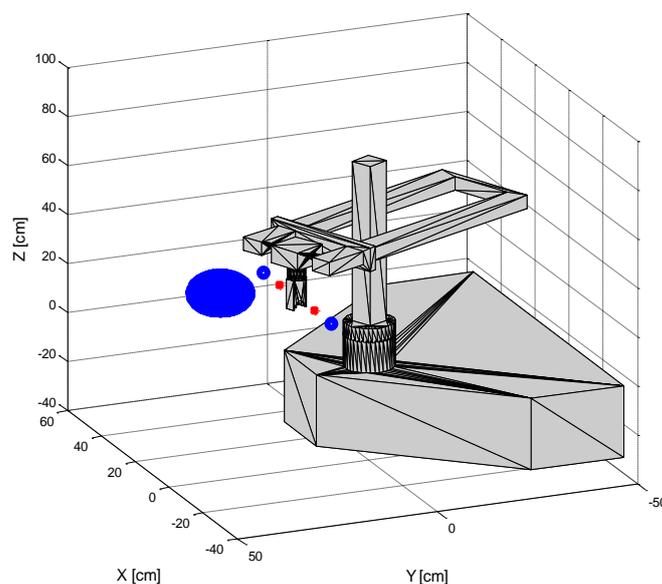
Na Figura 6.7, observa-se que os pontos intermediários (u_i^*) estão localizados fora da região de colisão independente da geometria do obstáculo. Isso ocorre porque, como discutido no 1º caso, os pontos intermediários (variáveis de projeto) atendem os requisitos estabelecidos na função objetivo (Equação 5.2) e as restrições do problema de otimização. Para analisar esses aspectos, a

efetividade do algoritmo proposto (Seção 5.1) para o 2º caso é definida com base nos conceitos discutidos no 1º caso. Ou seja, nessa abordagem percebe-se que, de um lado, considerando que as restrições (a) e (b) e as restrições laterais não foram violadas, conforme se constata na Tabela 6.9, e que, de outro, somente a distância do último ponto intermediário (u_n^*) é menor que o raio da esfera (R) – o que valida o método ilustrado na Figura 5.3. Assim, a solução obtida mostra-se adequada para este tipo de movimentação.

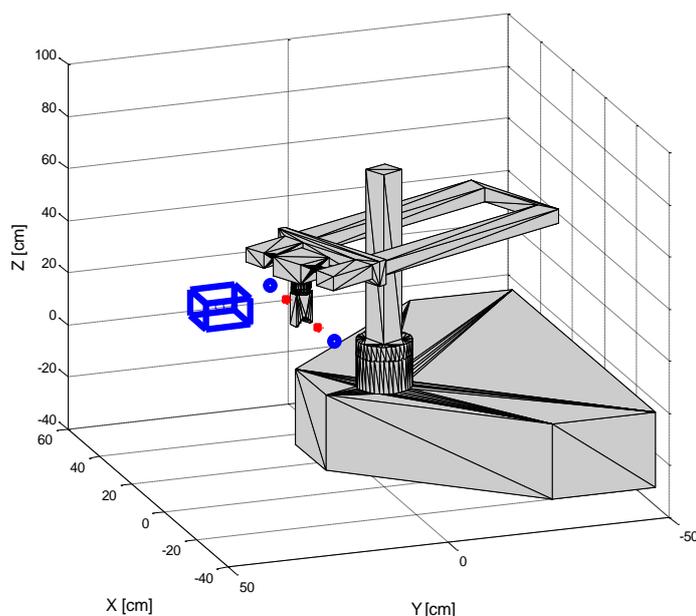
O 3º caso, diferentemente do 1º e do 2º casos, analisa a situação em que o robô deve manipular objetos em uma mesma altura, porém sem a presença de obstáculos entre os pontos iniciais e finais estabelecidos. O objetivo desta análise é, considerando a hipótese de que os pontos intermediários encontram-se afastados do obstáculo, verificar o comportamento do método proposto para esta situação. Nessa abordagem, os pontos iniciais e finais são representados pelos pontos $(-30, 22.24, 36.30)$ e $(10, 22.24, 36.30)$, respectivamente, e o centro de coordenadas dos obstáculos pelo ponto $(0, 37.24, 36.30)$, de acordo com a Tabela 6.1. A Figura 6.8 apresenta os resultados obtidos através da aplicação do método de otimização proposto para o 3º caso, considerando que os obstáculos são representados por cilindros (a), esferas (b) e cubos (c).



(a) cilindros



(b) esferas



(c) cubos

Figura 6.8 - Pontos intermediários no caso de cilindros (a), esferas (b) e cubos (c) (3º caso).

Analisando a Figura 6.8, observa-se que os pontos intermediários estão dispostos em uma linha reta entre o ponto inicial e final. Isso ocorre porque as soluções em cada etapa do método de otimização (pontos intermediários) encontram-se afastadas da região de colisão. Tratando-se do 3º caso, a efetividade do método proposto é definida com base nos conceitos discutidos no 1º e 2º casos, porém existem particularidades à medida que as soluções do método proposto se encontram afastadas da região de colisão ou obstáculo. Isto é, considerando que as restrições laterais e as restrições (a) e (b) não foram violadas (ver Tabela 6.10) e que a distância do último ponto intermediário (u_n^*) é menor que a esfera de raio (R), como descrito no 1º e no 2º casos, a distância entre os pontos inicial e final é constituída por pontos intermediários que formam uma linha reta tendo em vista que a região de colisão se encontra a uma distância superior à d_{rel} , fazendo com que a restrição (b) não seja violada para qualquer uma das infinitas soluções de pontos intermediários. Assim, obtém-se que, para cada etapa do método de otimização, a melhor solução consiste no ponto intermediário (variável de projeto) que apresenta a menor distância em relação ao ponto final, como pode ser comprovado no resultado obtido para 3º caso.

Nessa perspectiva, levando-se em conta que, em todos os casos, as restrições do problema não foram violadas e que a distância entre cada ponto intermediário e o ponto final é a menor possível, conforme o equacionamento proposto na função objetivo (Equação 5.2), entende-se que o método de otimização apresentado está adequado para as movimentações propostas, podendo ser aplicado a qualquer outro tipo de movimentação, desde que, considerando a função objetivo

(minimização da distância entre cada ponto intermediário e o ponto final), as restrições discutidas nesta seção não sejam violadas e que existam soluções viáveis.

6.2.1. Análise comparativa entre as técnicas de otimização no Planejamento do Caminho

Esta seção apresenta os resultados das soluções obtidas com a aplicação dos algoritmos metaheurísticos FMA, PSO e AG para os três casos apresentados na seção anterior e os parâmetros utilizados na implementação de cada um desses algoritmos, com a finalidade de comparar a aplicação desses três algoritmos em cada um dos casos propostos.

Para avaliar o desempenho dos algoritmos FMA, PSO e AG no estudo do planejamento do caminho, são analisados os valores da função objetivo e das restrições (a) e (b) para cada ponto intermediário (u_i^*) da seguinte maneira:

- com relação à função objetivo, os valores apresentados nas Tabelas 6.8 a 6.10 se referem à distância entre cada ponto intermediário (u_i^*) e o ponto final da trajetória;
- a restrição a é analisada com base nos valores de R^2 que, comparando a solução obtida em cada etapa do algoritmo de otimização (u_i^*) com a solução obtida na etapa anterior (u_{i-1}^*), define que os pontos intermediários, em coordenadas x , y e z , encontram-se dentro de uma superfície de uma esfera de raio (R) através da equação paramétrica da esfera;
- a restrição b é verificada analisando-se as distâncias d_1 , d_2 e d_{rel} , de modo que, para que essa restrição não seja violada, a distância d_2 deve ser maior ou igual à soma entre a distância d_1 e d_{rel} , como definido nas Equações 5.8 e 5.9; e
- as restrições laterais (Equação 5.3 a 5.5) não são aqui discutidas, pois são parâmetros de entrada para todos os algoritmos de otimização, e não foram violadas em nenhum dos casos.

Assim, neste trabalho infere-se que o melhor algoritmo é aquele em que a soma de todas as funções objetivo apresenta os menores valores, correspondendo ao menor deslocamento entre os pontos inicial e final, não violando as restrições (a) e (b). Esses resultados são apresentados para o 1º, 2º e 3º casos, considerando os obstáculos representados por cilindros, cubos e esferas, conforme as Tabelas 6.8 a 6.10, respectivamente.

Tabela 6.8 - Resultado dos algoritmos FMA, PSO e AG para o 1º caso do planejamento do caminho

Ponto intermediário (u_i)	Obstáculo	Função Objetivo (FMA)	R^2	d_1	d_2	Função Objetivo (PSO)	R^2	d_1	d_2	Função Objetivo (AG)	R^2	d_1	d_2
1	cilindros	+3.675856e+01	10.094725	55.122216	65.145279	+3.925655e+01	10.099989	55.060731	65.060821	+3.67363e+01	10.100003	55.121418	65.12142
	cubos	+3.409143e+01	10.108528	1.138611	11.170669	+3.408216e+01	10.100078	1.134963	11.134983	+3.40934e+01	10.100016	1.019745	11.019754
	esferas	+3.562777e+01	10.071731	0.022193	10.025142	+3.558808e+01	10.100048	0.000742	10.000800	+3.55880e+01	10.100266	0.000015	10.000023
2	cilindros	+2.694713e+01	10.108125	55.044631	65.054541	+2.938261e+01	10.100103	55.075217	65.075344	+2.70443e+01	10.100013	55.073829	65.073833
	cubos	+2.455889e+01	10.082201	4.520944	14.578243	+2.453634e+01	10.100000	4.451509	14.451527	+2.45792e+01	10.100001	4.265708	14.265725
	esferas	+2.697656e+01	10.118606	0.402085	10.454370	+2.693568e+01	10.100167	0.690543	10.690661	+2.69192e+01	10.099999	0.517815	10.517828
3	cilindros	+1.732515e+01	10.089547	55.373202	65.398251	+1.965228e+01	10.100241	55.369760	65.370422	+1.73997e+01	10.099999	55.438062	65.438067
	cubos	+1.448612e+01	10.123000	10.909549	20.988484	+1.444998e+01	10.100000	10.856900	20.856907	+1.44941e+01	10.100024	10.752402	20.755891
	esferas	+1.685683e+01	10.112022	6.425775	18.282653	+1.683562e+01	10.100012	6.640042	18.337287	+1.68354e+01	10.100010	6.279379	18.176919
4	cilindros	+8.673671e+00	10.088795	56.120072	66.167343	+1.051772e+01	10.099998	55.983903	65.983909	+9.0689e+00	10.100018	56.330090	66.330093
	cubos	+4.361669e+00	10.098502	17.661266	31.812783	+4.350074e+00	10.099991	17.784955	31.674002	+4.3999e+00	10.100001	17.604364	31.725525
	esferas	+6.743247e+00	10.099848	12.516496	30.514195	+6.735860e+00	10.099976	12.529257	30.536539	+6.7361e+00	10.099999	12.458753	30.386515

Tabela 6.9 - Resultado dos algoritmos FMA, PSO e AG para o 2º caso do planejamento do caminho

Ponto intermediário (u_i)	Obstáculo	Função Objetivo (FMA)	R^2	d_1	d_2	Função Objetivo (PSO)	R^2	d_1	d_2	Função Objetivo (AG)	R^2	d_1	d_2
1	cilindros	+3.387289e+01	10.108510	55.577824	65.635751	+3.384378e+01	10.100146	55.605877	65.605891	+3.38437e+01	10.100027	55.605892	65.605900
	cubos	+3.158758e+01	10.105885	6.950947	17.007017	+3.157304e+01	10.100100	7.032306	17.032530	+3.15787e+01	10.100016	7.181349	17.181350
	esferas	+3.103895e+01	10.101030	4.263147	14.381656	+3.102152e+01	10.100000	4.437653	14.437697	+3.10639e+01	10.099922	5.123569	15.123648
2	cilindros	+2.424549e+01	10.135477	55.020278	65.079658	+2.419973e+01	10.100133	55.050212	65.050277	+2.41998e+01	10.100042	55.050240	65.050256
	cubos	+2.257198e+01	10.129252	4.323437	14.371741	+2.255778e+01	10.100054	4.488110	14.488135	+2.25770e+01	10.099998	4.550138	14.550155
	esferas	+2.280771e+01	10.134128	0.381824	10.389780	+2.282884e+01	10.100009	0.302583	10.302584	+2.30702e+01	10.100027	0.889584	10.889735
3	cilindros	+1.480879e+01	10.113939	55.267458	65.288644	+1.479463e+01	10.100067	55.277215	65.277379	+1.47941e+01	10.100037	55.277307	65.277310
	cubos	+1.248006e+01	10.120939	6.406709	16.437281	+1.249308e+01	10.099994	6.376829	16.376927	+1.15121e+01	10.100024	6.401017	16.401028
	esferas	+1.266959e+01	10.094409	2.515726	14.068010	+1.272897e+01	10.099923	2.638295	13.916404	+1.29703e+01	10.100000	2.920177	14.307398
4	cilindros	+7.126390e+00	10.008262	56.269310	66.269440	+7.081670e+00	10.099983	56.281590	66.281609	+7.0814e+00	10.100001	56.281669	66.281684
	cubos	+2.354780e+00	10.098245	9.286663	22.654496	+2.393097e+00	10.100003	9.208457	22.670024	+2.4126e+00	10.100003	9.232009	22.629942
	esferas	+2.570634e+00	10.099840	5.029619	22.287269	+2.628998e+00	10.099996	5.027833	22.169599	+2.8710e+00	10.100000	4.983077	22.112398

Tabela 6.10 - Resultado dos algoritmos FMA, PSO e AG para o 3º caso do planejamento do caminho

Ponto intermediário (u_i)	Obstáculo	Função Objetivo (FMA)	R^2	d_1	d_2	Função Objetivo (PSO)	R^2	d_1	d_2	Função Objetivo (AG)	R^2	d_1	d_2
1	cilindros	+3.090174e+01	10.103285	52.042567	70.873525	+3.090023e+01	10.100057	52.069953	70.848082	+3.090000e+01	10.100005	52.032936	70.883580
	cubos	+3.090219e+01	10.099529	2.571247	32.748477	+3.090002e+01	10.100046	2.447506	32.700725	+3.090000e+01	10.100080	2.442060	32.707643
	esferas	+3.090122e+01	10.102252	1.720229	31.098808	+3.090015e+01	10.099980	1.723904	31.200535	+3.090000e+01	10.100023	1.755631	31.177867
2	cilindros	+2.080022e+01	10.097011	52.038116	68.729978	+2.080023e+01	10.100082	52.032281	68.735749	+2.080000e+01	10.100066	52.032882	68.735130
	cubos	+2.080500e+01	10.098628	2.420297	24.587574	+2.080002e+01	10.099995	2.442872	24.443178	+2.07999e+01	10.100007	2.442103	24.417936
	esferas	+2.080154e+01	10.098435	1.685135	21.591378	+2.080018e+01	10.100004	1.743602	21.852823	+2.080000e+01	10.099947	1.755754	21.820985
3	cilindros	+1.070207e+01	10.103518	51.997748	68.068738	+1.070032e+01	10.100443	52.012953	68.053521	+1.06999e+01	10.100009	52.032872	68.033601
	cubos	+1.070831e+01	10.097948	2.319728	20.598238	+1.070006e+01	10.100017	2.437654	20.401346	+1.06999e+01	10.100049	2.442103	20.399377
	esferas	+1.070370e+01	10.105109	1.737542	16.139212	+1.070018e+01	10.100001	1.746447	16.218198	+1.070000e+01	10.100012	1.755694	16.204916
4	cilindros	+1.205215e+00	9.896217	52.045638	68.780541	+1.200285e+00	9.900000	52.033216	68.793022	+1.2001e+00	9.900002	52.032911	68.793294
	cubos	+1.193270e+00	9.896964	2.449147	24.698102	+1.199967e+00	9.899998	2.442382	24.701598	+1.2001e+00	9.899998	2.442087	24.701885
	esferas	+1.214803e+00	9.887361	1.805331	22.176480	+1.199822e+00	9.900000	1.756013	22.167207	+1.200000e+00	9.900000	1.755710	22.167833

No 1º caso, como se observa na Tabela 6.8, os algoritmos FMA, PSO e AG apresentam resultados similares considerando que os valores da função objetivo são próximos e que as restrições a e b não foram violadas para nenhum dos algoritmos. Ou seja, tratando-se da restrição a , observa-se que todos os pontos intermediários (u_i^*) são determinados sob uma esfera com raio (R) entre 9.85 e 10.15 cm, que são os valores estabelecidos para R^2 neste caso. Já com relação à restrição b , constata-se que a distância d_2 é maior ou igual à soma entre a distância d_1 e d_{rel} .

Analisando a Tabela 6.9, percebe-se que os resultados obtidos pelos algoritmos FMA, PSO e AG para o 2º caso também são similares, já que são pequenas as variações dos valores da função objetivo nas situações em que as restrições a e b também não foram violadas.

Como no 1º e 2º casos, os resultados obtidos através da aplicação dos algoritmos FMA, PSO e AG também são similares para o 3º caso, conforme se observa na Tabela 6.10. Neste caso, os valores da função objetivo apresentam diferenças ainda menores, e as restrições não foram violadas.

Essas discussões mostram que o método proposto para o planejamento do caminho é adequado para os três casos aqui considerados, uma vez que os resultados obtidos por meio dos algoritmos FMA, PSO e AG foram similares, e as restrições a e b não foram violadas em nenhum dos casos analisados. É importante ressaltar que esses resultados foram determinados através dos parâmetros de calibração de cada algoritmo e do fator de penalização (FP) atribuído à função objetivo em cada caso estudado. Neste trabalho, os parâmetros dos algoritmos FMA, PSO e AG, utilizados no problema de otimização do planejamento do caminho, são apresentados nas Tabelas 6.11, 6.12 e 6.13, respectivamente.

Tabela 6.11 - Parâmetros de calibração do Algoritmo FMA

Nº vagalumes	α	β_0	tol.cov	tol.FP	Nº máximo de iterações
40	0,02	1.0	1×10^{-3}	1×10^{-1}	300

Tabela 6.12 - Parâmetros de calibração do Algoritmo PSO

Nº partículas	ω	c_1	c_2	tol.cov	tol.FP	Nº máximo de iterações
20	0,7	2,03	2,03	1×10^{-3}	1×10^{-1}	300

Tabela 6.13 - Parâmetros de calibração do Algoritmo AG

Tamanho da população	<i>Elite count</i>	Critérios de seleção	Taxa de mutação	Taxa de crossover	Nº máximo de iterações (gerações)
30	0,1	Método da roleta	0,1	0,85	300

6.3. Planejamento de Trajetória do RPC

Para apresentar os resultados obtidos em relação ao estudo do planejamento de trajetória do RPC, nesta seção serão analisados os seguintes aspectos: (i) a restrição de colisão no espaço de juntas (Seção 5.2.2.2), a qual busca garantir que a trajetória gerada no espaço de juntas não provoque movimentos impedidos por obstáculos no espaço de trabalho do RPC; (ii) o erro de seguimento de trajetória, que compara trajetórias de referência (as trajetórias de 5° e 7° graus geradas pelo método proposto e as trajetórias geradas pelo método de Simon, apresentadas por Missiaggia, 2014) com a trajetória executada pelo RPC, a fim de avaliar o erro máximo e o erro médio entre essas trajetórias; e, por último, (iii) o comportamento do estudo proposto no planejamento de trajetória do RPC aplicando os algoritmos FMA, PSO e AG.

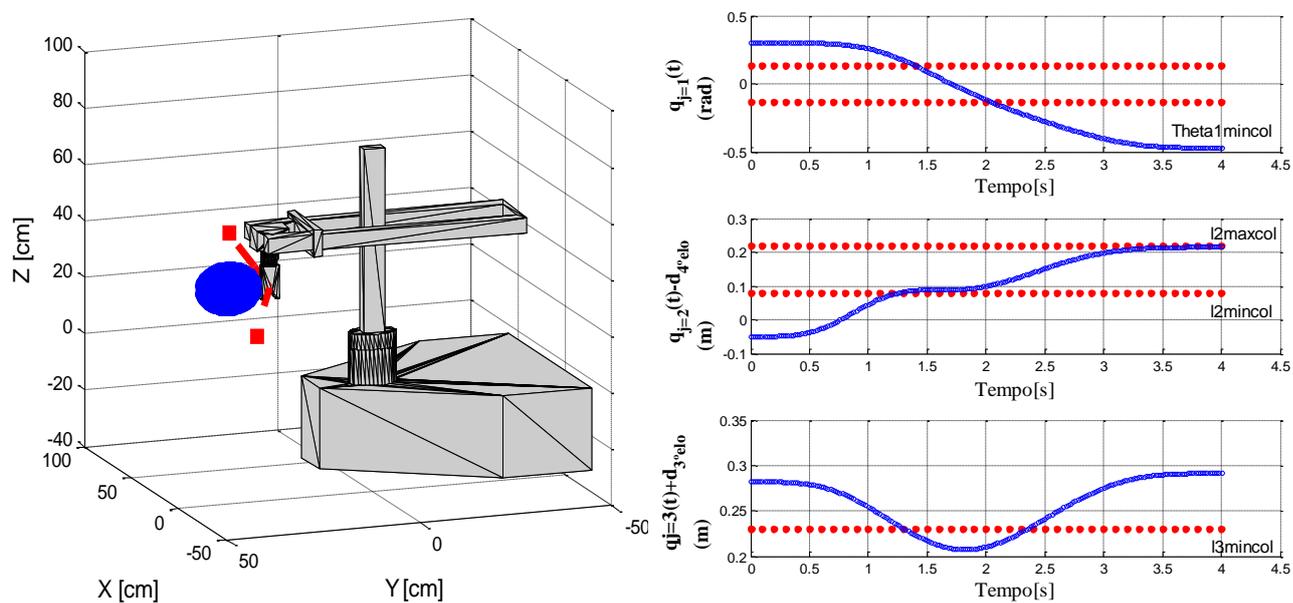
6.3.1. Análise das restrições de colisão no espaço de juntas do RPC

Como mencionado na Seção 5.2.2.3, não é possível garantir que, mesmo que os pontos intermediários (u_i^*) estejam fora da região de colisão, a trajetória interpolada no espaço de juntas execute um movimento livre de colisão. Nesse sentido, são propostas restrições de colisão (Equação 5.54 a 5.56) no espaço de juntas que garantam um movimento sem a presença de obstáculos. Para analisar o comportamento destas restrições nas trajetórias ótimas propostas para o RPC, discute-se uma situação que possibilita avaliar se essas restrições são violadas quando as restrições cinemáticas e dinâmicas também são consideradas. Nesta análise, as restrições de colisão são aplicadas de acordo com as Condições 1 a 5, apresentadas na Seção 5.2.2.2. Os parâmetros estabelecidos para a trajetória são os seguintes:

- os pontos iniciais, finais, intermediários e o centro de coordenada dos obstáculos são definidos de acordo com a solução obtida no 1° caso (cubos) do planejamento do caminho;
- os pontos intermediários são interpolados por funções *b-splines* de 5° grau;

- os limites das restrições cinemáticas de velocidade (\dot{q}_{min} e \dot{q}_{max}), aceleração (\ddot{q}_{min} e \ddot{q}_{max}) e *jerk* (\dddot{q}_{min} e \dddot{q}_{max}) são definidos nas Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6, respectivamente;
- as restrições dinâmicas (τ_{max}) são determinadas pela Equação (5.69), cujos valores são apresentados na Tabela 6.7;
- a função objetivo busca minimizar a força associada à dinâmica do RPC, conforme a Equação (5.45);
- as variáveis de projeto ($x_{trajetória}$) são representadas por meio do intervalo de tempo entre dois sucessivos ($t_{i+1}-t_i$), de acordo com a Equação (5.46);
- as trajetórias são otimizadas somente com o algoritmo FMA, visto que o desempenho dos algoritmos metaheurísticos utilizados neste trabalho são similares, conforme apresentado a seguir.

Os resultados da trajetória no espaço de trabalho e no espaço de juntas do RPC são apresentados na Figura 6.9.



(a) trajetória no espaço de trabalho do RPC

(b) trajetória no espaço de juntas do RPC

Figura 6.9 - Trajetória no espaço de trabalho (a) e de juntas (b) do RPC

Como se observa na Figura 6.9, a trajetória no espaço de trabalho do RPC mostra que o movimento executado pelo manipulador não acarreta em colisões com o obstáculo, ao passo que esta condição pode ser comprovada por meio da verificação das restrições de colisão

apresentadas na Seção 5.2.2.3. Quer dizer, relacionando as regiões de colisão em cada junta, $\theta_{1mincol}$ e $\theta_{1maxcol}$, para a junta 1; $l_{2mincol}$ e $l_{2maxcol}$, tratando-se da junta 2; e $l_{3mincol}$, no caso da junta 3, constata-se que ao longo do percurso do RPC as restrições estabelecidas nas Equações 5.51 a 5.53 não foram violadas concomitantemente, conforme pode-se observar na Figura 6.9 (a). Como mencionado anteriormente (Seção 5.2.2.2), essa condição busca garantir que a trajetória ótima obtida no espaço de juntas não permita que movimentos impedidos por obstáculos sejam realizados.

Com relação às restrições cinemáticas e dinâmicas, observa-se que o manipulador executou a trajetória dentro dos valores limites determinados experimentalmente, conforme apresentado na Tabela 6.14.

Tabela 6.14 – Dados da trajetória e os limites cinemáticos e dinâmicos experimentais.

	Velocidade	Aceleração	Jerk	Torque
1° GDL	0,439 rad/s	0,630 rad/s ²	1,574 rad/s ³	19,328 N.m
2° GDL	0,199 m/s	0,431 m/s ²	2,471 m/s ³	145,852 N
3° GDL	0,081 m/s	0,192 m/s ²	0,437 m/s ³	128,466 N
4° GDL	0,0 rad/s	0,0 rad/s ²	0,0 rad/s ³	0,0 N.m
5° GDL	0,0 rad/s	0,0 rad/s ²	0,0 rad/s ³	0,0 N.m

Constata-se assim que as restrições de colisão propostas garantem um movimento livre de obstáculos para o RPC, e a trajetória, em termos de velocidade, aceleração, *jerk* e torque, não viola as restrições cinemáticas e dinâmicas consideradas. Nesta abordagem, o valor da função objetivo foi de $6,956385e+04$ N e o tempo para o movimento do manipulador foi de 4,004 s. Como se observa na Tabela 6.14, existem diferenças significativas entre a trajetória ótima e suas derivadas e os valores das restrições cinemáticas obtidos experimentalmente. Essas diferenças serão discutidas na Seção 6.3.3.

6.3.2. Análise do erro de seguimento de trajetória no RPC

A fim de demonstrar os resultados obtidos com o método de planejamento de trajetórias (Seção 5.2) proposto para o RPC, nesta seção serão analisadas as duas trajetórias geradas com a metodologia desenvolvida, utilizando-se *b-splines* de 5° e 7° grau, e a trajetória gerada pelo método apresentado por Missiaggia, 2014, (*splines* de 7° grau). Assim, dado um conjunto de

pontos intermediários no espaço de juntas e considerando que as trajetórias de referência são geradas por ambos os métodos, são comparados os erros de seguimento de trajetória (erro entre a trajetória executada pelo manipulador e a trajetória de referência) para ambos os casos. O objetivo desta análise é verificar se as restrições cinemáticas (velocidade, aceleração e *jerk*) e dinâmicas (torque) e a função objetivo na trajetória otimizada podem ser aplicadas ao controlador baseado na lei do torque computado proposto por Sarmanho, 2014.

No presente trabalho, as trajetórias analisadas são obtidas com base nos seguintes aspectos:

- 1) as três trajetórias são geradas no espaço de juntas do RPC;
- 2) no método apresentado por Missiaggia, 2014, os pontos intermediários são aproximados por *splines* de 7º grau, conforme o método proposto por Simon, 2004;
- 3) as trajetórias propostas são interpoladas com *b-splines* de 5º e 7º grau. Quanto à otimização, as mesmas são otimizadas com o algoritmo FMA, as restrições cinemáticas e dinâmicas utilizadas são apresentadas nas Tabelas 6.4 a 6.7, e a função objetivo e as variáveis de projeto são definidas pelas Equações (5.45) e (5.46), respectivamente;
- 4) para facilitar a compreensão das análises, as trajetórias ótimas de 5º e 7º grau são denominadas T5 e T7, respectivamente, e a trajetória proposta por Missiaggia, 2014, denominada T7M;
- 5) informações relativas ao controlador por Torque Calculado com Compensação de Atrito (TCCA) implementado no RPC são apresentadas detalhadamente em Sarmanho, 2014;
- 6) no experimento realizado para cada uma das trajetórias, os ganhos utilizados no controlador TCCA são apresentados na Tabela 6.15.

Tabela 6.15 – Ganhos do controlador por torque computado utilizado nos experimentos

	Ka	Kt	λ	Kd
1º GDL	2	150	30	30
2º GDL	300	1000	30	200
3º GDL	40	1000	30	190
4º GDL	30	20	30	0,5
5º GDL	70	6	70	0,088

7) no experimento realizado para cada uma das trajetórias, considera-se a necessidade de o efetuador percorrer um trajeto composto por sete pontos dispostos em uma linha reta no espaço tridimensional no sentido de “ida” e “volta”. A escolha por esse conjunto de pontos justifica-se porque que esses pontos acarretam em movimentação significativa nas variáveis de juntas, o que se entende ser adequado na análise da efetividade do estudo proposto. As coordenadas dos pontos intermediários para a geração da trajetória estão apresentadas na Tabela 6.16, enquanto a Figura 6.10 ilustra os pontos, dispostos em uma linha reta, no espaço de trabalho do RPC.

Tabela 6.16 - Coordenadas dos pontos intermediários no espaço de juntas.

Ponto	θ_1 (rad)	d_2 (m)	d_3 (m)	θ_4 (rad)	θ_5 (rad)
P ₀	-0,7854	0,3831	0,2380	-0,7854	$-\pi/2$
P ₁	-0,5880	0,3441	0,1232	-0,5236	$-\pi/4$
P ₂	-0,3218	0,2987	0,0453	-0,2618	$-\pi/6$
P ₃	0	0,2500	0,0172	0	0
P ₄	0,3218	0,2013	0,0453	0,2618	$\pi/6$
P ₅	0,5880	0,1559	0,1232	0,5236	$\pi/4$
P ₆	0,7854	0,1169	0,2380	0,7854	$\pi/2$

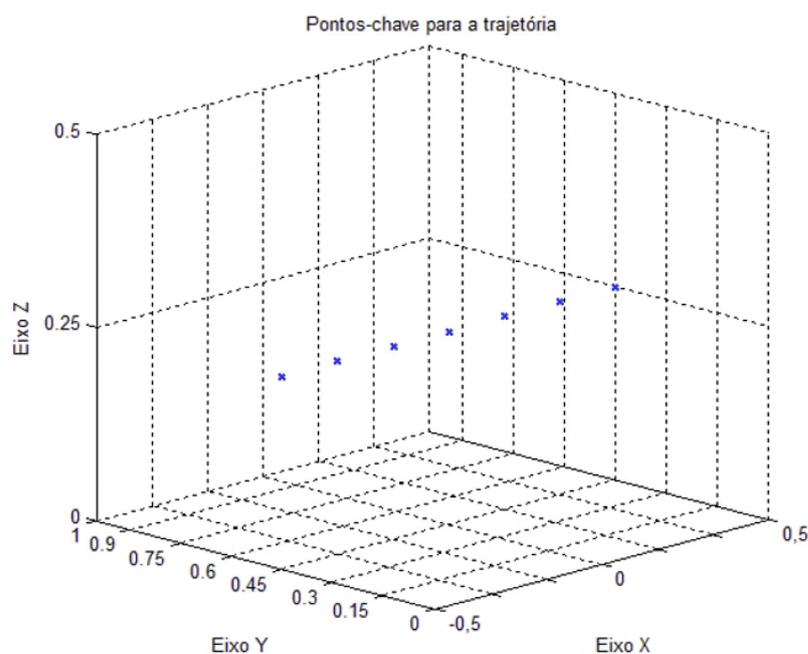
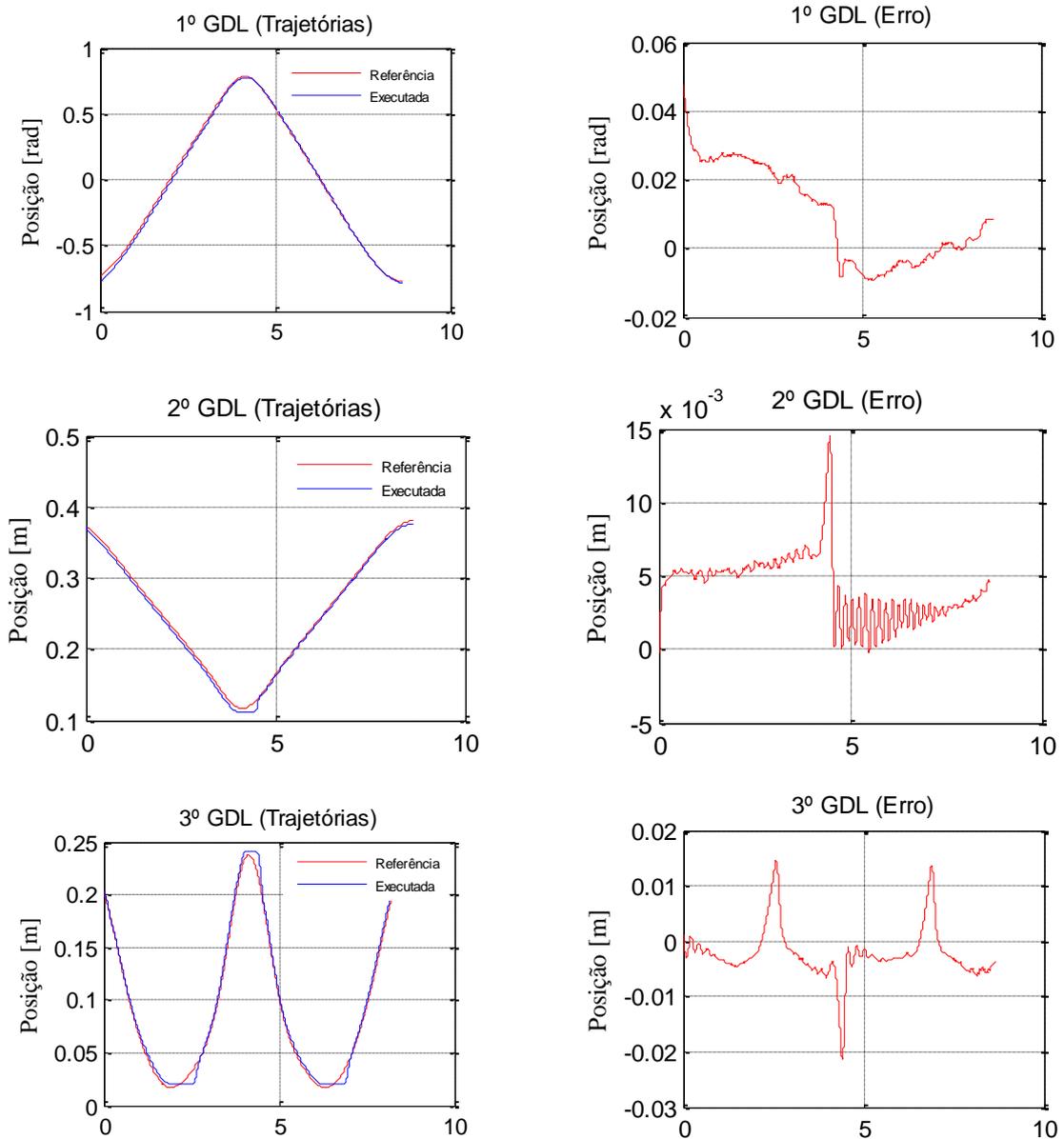


Figura 6.10 – Pontos-chave utilizados para a obtenção da trajetória.

Para determinar o erro de seguimento de trajetória para ambos os métodos, primeiramente determinam-se as trajetórias de referência por meio da interpolação dos pontos-chave da trajetória (Tabela 6.16) no espaço de juntas, para, posteriormente, calcular o erro de seguimento de trajetória entre a trajetória executada pelo RPC e a de referência. As Figura 6.11 a 6.13 ilustram as trajetórias de referência (T5, T7 e T7M), as trajetórias executadas pelo RPC e os erros de seguimento de trajetória para cada caso.



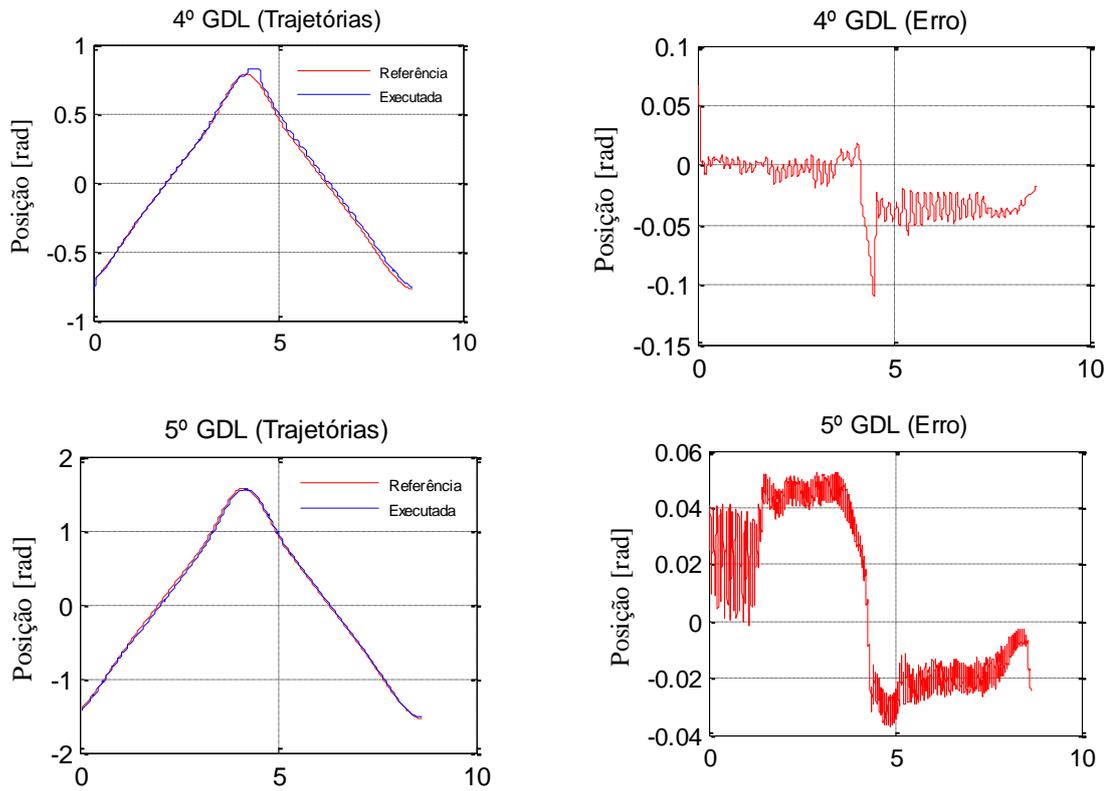
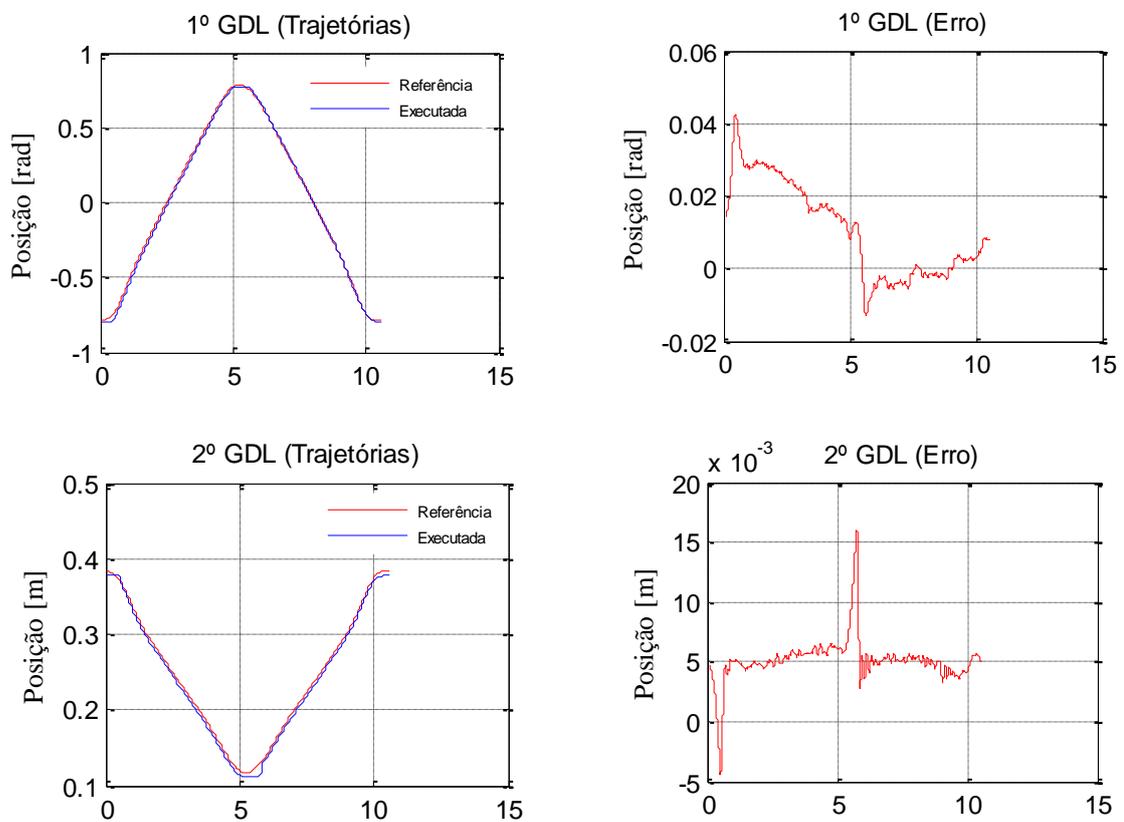


Figura 6.11 – T5, trajetória executada e seu respectivo erro.



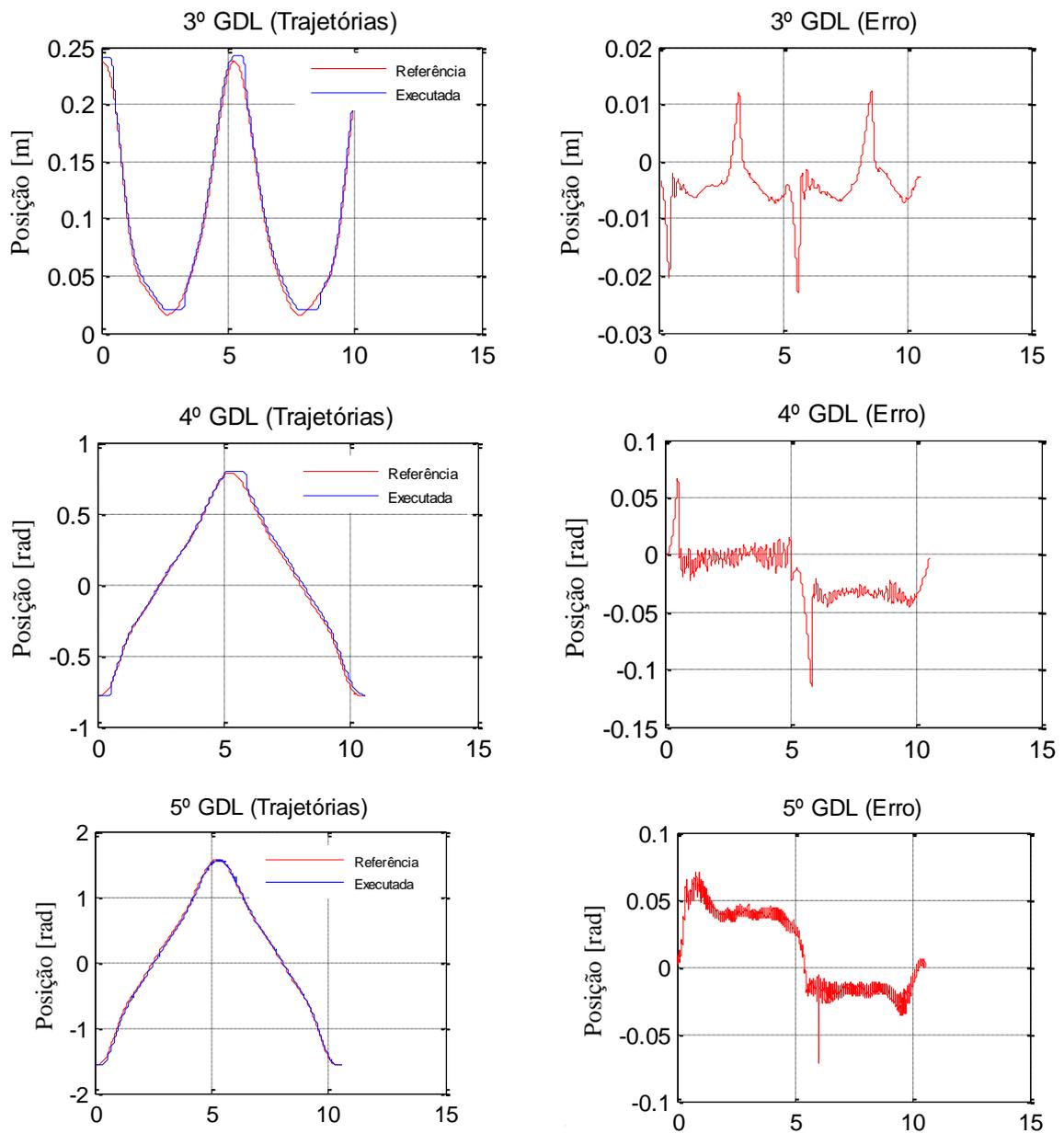
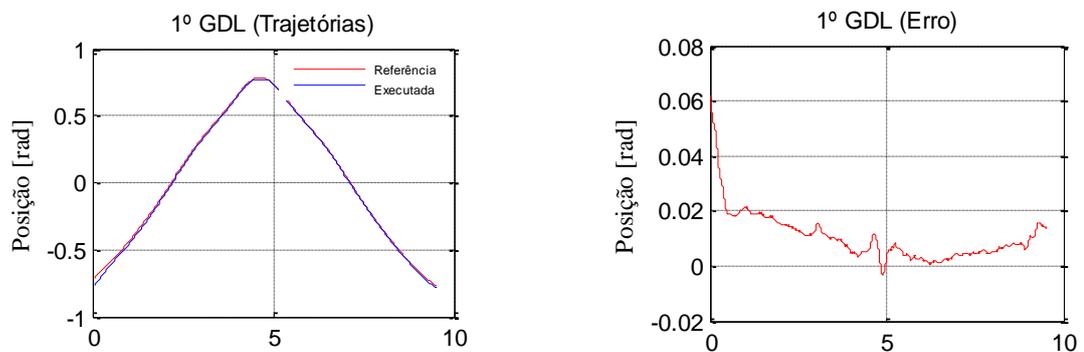


Figura 6.12 – T7, trajetória executada e seu respectivo erro



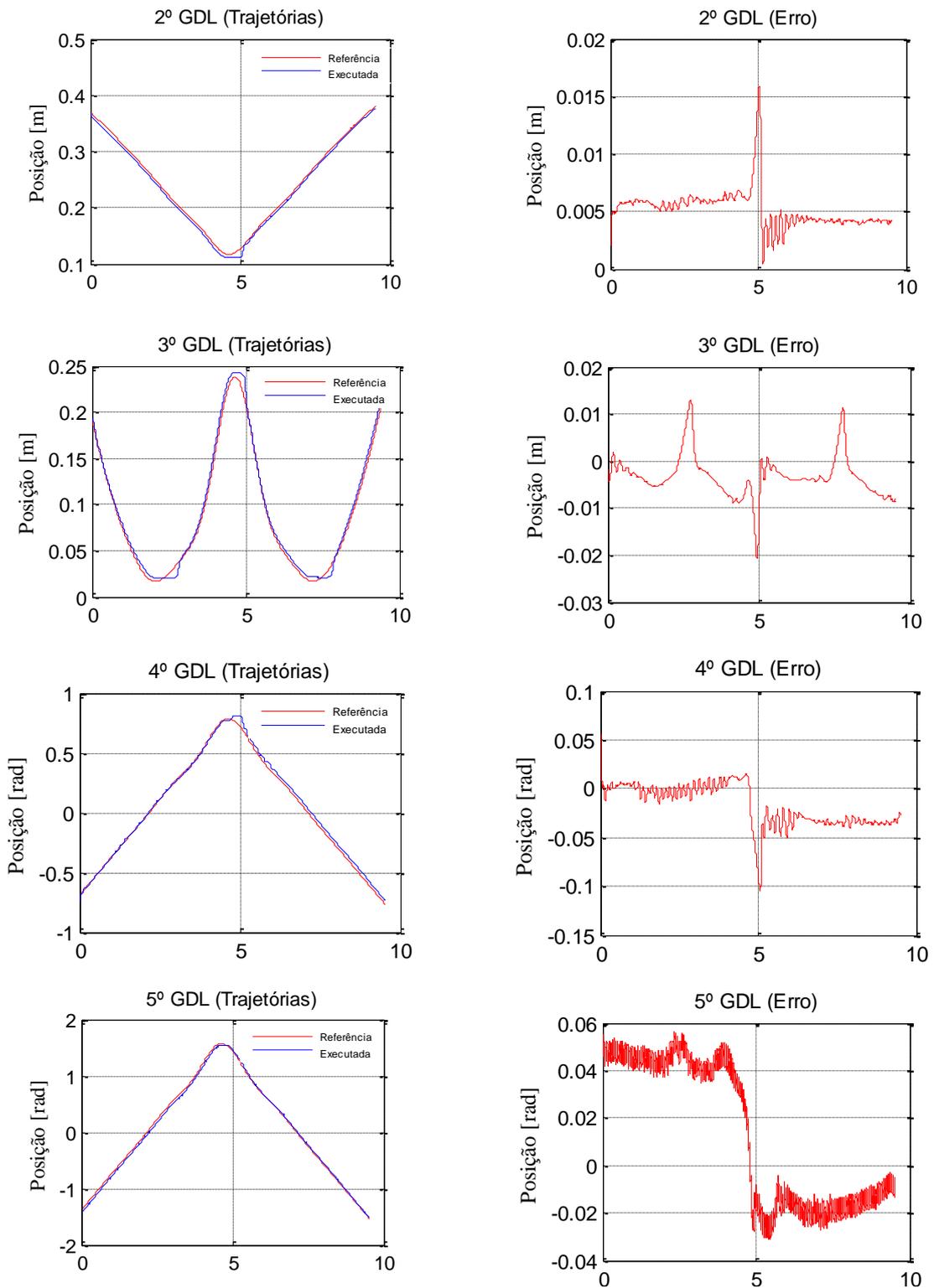


Figura 6.13 – T7M, trajetória executada e seu respectivo erro

No presente trabalho, o critério utilizado para avaliar o desempenho das trajetórias geradas consiste em comparar o erro máximo e o erro médio obtidos, em módulo, entre as

trajetórias de referência (T5, T7 e T7M) e as respectivas trajetórias executadas. Essa escolha se justifica porque os erros máximos indicam os limites de desvio da trajetória executada com relação à desejada, ou seja, as situações que poderiam, por exemplo, ocasionar um choque contra um obstáculo, apesar de a trajetória planejada, se seguida, garantir o movimento livre de colisão. Além disso, o erro médio indica o comportamento do manipulador ao longo da movimentação proposta para o RPC. Essa informação é útil, por exemplo, para auxiliar na comparação entre o desempenho das trajetórias visando a facilitar o controle. Em situações práticas, pode, por exemplo, caracterizar uma medida da precisão do seguimento de trajetória na execução de uma tarefa de manipulação de uma ferramenta de manufatura (manipulação de uma fresa pneumática, de uma tocha de solda, de bico pulverizador de pintura, etc).

Os erros máximos obtidos para cada uma das trajetórias analisadas são apresentados na Tabela 6.17.

Tabela 6.17 – Erro máximo entre T5, T7 e T7M e a trajetória executada pelo RPC.

	1° GDL	2° GDL	3° GDL	4° GDL	5° GDL
T5	0,0478 rad	0,0146 m	0,0214 m	0,1101 rad	0,0524 rad
T7	0,0426 rad	0,0161 m	0,0229 m	0,1140 rad	0,0713 rad
T7M	0,0618 rad	0,0159 m	0,0208 m	0,1053 rad	0,0561 rad

Analisando a Tabela 6.17, constata-se que os menores valores de erro foram obtidos na T5 (no caso do 1°, 2° e 5° GDL) e na T7M (tratando-se do 3° e 4° GDL). No entanto, apesar de existirem diferenças entre as trajetórias analisadas, é difícil determinar qual das trajetórias obteve os melhores resultados em relação ao erro máximo, porque: (i) não foram observadas diferenças significativas entre os três casos; (ii) nenhuma das trajetórias obteve os melhores resultados em todos os GDL; e (iii) os valores de erros máximos ocorreram na troca do sentido de direção das juntas. Nesse último, é preciso assinalar que, além dos aspectos inerentes à trajetória que interferem no erro associado à troca do sentido de direção das juntas, há questões de controle, como, por exemplo, ajustes dos ganhos do controlador, etc., que podem contribuir para esse tipo de erro.

Quanto à análise comparativa do erro médio entre T5, T7 e T7M e a trajetória executada pelo RPC, observam-se comportamentos similares em todos os casos, conforme ilustrado na Tabela 6.18.

Tabela 6.18 - Erro médio entre T5, T7 e T7M e a trajetória executada pelo RPC.

	1° GDL	2° GDL	3° GDL	4° GDL	5° GDL
T5	0,0136 rad	0,0043 m	0,0040 m	0,0228 rad	0,0278 rad
T7	0,0130 rad	0,0052 m	0,0053 m	0,0216 rad	0,0287 rad
T7M	0,0107 rad	0,0052 m	0,0046 m	0,0211 rad	0,0306 rad

Como se observa na Tabela 6.18, os menores valores de erro (médio) foram obtidos na T5 (no caso do 2°, 3° e 5° GDL) e na T7M (tratando-se do 1° e 4° GDL), porém constata-se que foram pequenas as diferenças de erro entre as três trajetórias. Levando em conta os resultados apresentados nesta seção, conclui-se que as trajetórias T5, T7 e T7M apresentaram comportamentos similares em relação ao erro máximo e médio, de modo que ambos os métodos podem ser utilizados como trajetórias de referência para o RPC. No entanto, ressalta-se que a trajetória T5 apresentou menores valores de erro médio em relação à T7 e à T7M.

Em síntese, considerando que ambos os métodos apresentam resultados similares com relação ao erro máximo e médio, conclui-se que, além dos aspectos relacionados à trajetória (a suavidade entre os pontos intermediários, os parâmetros da trajetória a serem otimizados e os valores das restrições cinemáticas e dinâmicas em relação aos limites físicos do RPC), os quais foram discutidos no presente trabalho, ainda existem questões associadas à ação do controlador que também podem ser exploradas para melhorar os resultados do erro máximo e médio no seguimento de trajetória do RPC, como, por exemplo, a sintonização dos ganhos do controlador, entre outros. É importante ressaltar que as características do controlador por torque computado não foram discutidas aqui, tendo em vista que o presente trabalho considera apenas o estudo do planejamento de trajetórias para manipuladores.

6.3.3. Análise comparativa entre as técnicas de otimização no Planejamento de Trajetória

Esta seção apresenta os resultados das soluções obtidas com a aplicação dos métodos FMA, PSO e AG considerando os pontos-chave e os parâmetros de otimização relacionados à trajetória T5, descritos na seção anterior, assim como discute os resultados obtidos na aplicação do método de otimização para o planejamento de trajetória do RPC proposto no presente trabalho, como apresentado na Seção 5.2.

Para avaliar o desempenho dos algoritmos FMA, PSO e AG no estudo do planejamento de trajetória, são analisados os valores da função objetivo (força associada à dinâmica do RPC) em cada um dos algoritmos, a fim de verificar se as restrições cinemáticas e dinâmicas foram violadas. Os resultados obtidos para os algoritmos FMA, PSO e AG são apresentados na Tabela 6.19.

Tabela 6.19 - Resultados dos algoritmos FMA, PSO e AG no Planejamento de Trajetórias.

	Função objetivo		Velocidade	Aceleração	Jerk	Torque
FMA	6,674e+04 N	1° GDL	0,4376 rad/s	0,9066 rad/s ²	1,4947 rad/s ³	28,5910 N.m
		2° GDL	0,0775 m/s	0,1868 m/s ²	0,3487 m/s ³	143,4064 N
		3° GDL	0,2107 m/s	0,6143 m/s ²	1,4620 m/s ³	126,7672 N
		4° GDL	0,4993 rad/s	1,3092 rad/s ²	2,7051 rad/s ³	0,0409 N.m
		5° GDL	0,9987 rad/s	2,6184 rad/s ²	5,4101 rad/s ³	0,0362 N.m
PSO	6,653e+04 N	1° GDL	0,4435 rad/s	0,9020 rad/s ²	1,4685 rad/s ³	28,4339 N.m
		2° GDL	0,0776 m/s	0,1860 m/s ²	0,3446 m/s ³	143,4183 N
		3° GDL	0,2108 m/s	0,6132 m/s ²	1,4621 m/s ³	126,7692 N
		4° GDL	0,4999 rad/s	1,3044 rad/s ²	2,6884 rad/s ³	0,0408 N.m
		5° GDL	0,9998 rad/s	2,6087 rad/s ²	5,3769 rad/s ³	0,0359 N.m
AG	6,650e+04 N	1° GDL	0,4364rad/s	0,9022 rad/s ²	1,4579 rad/s ³	28,4369 N.m
		2° GDL	0,0777m/s	0,1862 m/s ²	0,3429 m/s ³	143,4659 N
		3° GDL	0,2110m/s	0,6139 m/s ²	1,4581m/s ³	126,8262 N
		4° GDL	0,5001rad/s	1,3068rad/s ²	2,6754rad/s ³	0,0407 N.m
		5° GDL	1.0001rad/s	2.6135rad/s ²	5,3507 rad/s ³	0,0358 N.m

Como se observa na Tabela 6.19, os algoritmos FMA, PSO e AG apresentaram resultados similares, visto que os valores da função objetivo foram: 6.673684e+04 N, para o FMA; 6.652708e+04 N, para o PSO; e 6.6496e+04, para o AG. O valores máximos de velocidade, aceleração, *jerk* e torque para todos algoritmos não violaram as restrições cinemáticas e dinâmicas determinadas na Seção 5.2 e ilustradas as Tabelas 6.4 a 6.7. As trajetórias obtidas (velocidade, aceleração, *jerk* e torque) para cada um dos algoritmos são apresentados no Anexo C deste trabalho. Cumpre ressaltar que o tempo para o movimento do manipulador no caso dos algoritmos FMA, PSO e AG foram de 9.9434 s, 10.2128 s e 10.1264

s, respectivamente. Portanto, levando em conta os resultados obtidos, conclui-se que os algoritmos FMA, PSO e AG podem ser aplicados à metodologia em estudo para o planejamento de trajetórias, reforçando o entendimento de que diferentes algoritmos metaheurísticos apresentam desempenho similar em problemas de otimização.

No entanto, ao comparar a solução obtida em termos de velocidade, aceleração, *jerk* e torque com as restrições cinemáticas e dinâmicas adotadas no presente trabalho e apresentadas nas Tabelas 6.4 a 6.7, percebe-se que existem diferenças significativas entre os valores da solução obtida e os valores das restrições cinemáticas e dinâmicas. Essas diferenças precisam ser analisadas porque, em problemas de otimização, os resultados devem ter valores próximos às fronteiras delimitadas pelas restrições, caracterizando a solução ótima do problema por meio da minimização ou maximização da função objetivo.

No presente trabalho, entende-se que essas diferenças estão associadas ao fato de que as restrições cinemáticas e dinâmicas foram determinadas para condições operacionais críticas do RPC, ou seja, foram calculadas para cada junta utilizando-se dados experimentais que consideraram o posicionamento do êmbolo quanto ao curso do cilindro, o posicionamento de cada atuador em relação ao movimento dos demais GDL do RPC e o procedimento para a abertura da válvula através de uma função pulso, conforme descrito na Seção 5.2.2.3. Portanto, levando em conta que as restrições cinemáticas e dinâmicas calculadas se referem aos limites máximos admissíveis para cada atuador, e que as soluções obtidas apresentaram, para alguns GDL, valores de torque próximos aos valores estabelecidos para as restrições dinâmicas, conclui-se que a solução obtida para as trajetórias em estudo, considerando os pontos-chave utilizados, não correspondem às condições críticas operacionais dos atuadores, de maneira que não existem soluções para o problema de otimização próximas às fronteiras das restrições consideradas neste trabalho.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos por meio dos parâmetros de calibração de cada algoritmo e do fator de penalização (*FP*) atribuído à função objetivo. Neste trabalho, os parâmetros dos algoritmos FMA, PSO e AG utilizados no problema de otimização do planejamento de trajetória são apresentados nas Tabelas 6.19, 6.20 e 6.21, respectivamente.

Tabela 6.20 - Parâmetros de calibração do Algoritmo FMA no Planejamento de Trajetórias.

Nº vagalumes	α	β_0	tol.cov	tol.FP	Nº máximo de iterações
40	0,02	1.0	1×10^{-3}	1×10^{-1}	300

Tabela 6.21 - Parâmetros de calibração do Algoritmo PSO no Planejamento de Trajetórias.

Nº partículas	ω	c_1	c_2	tol.cov	tol.FP	Nº máximo de iterações
30	0,7	2,03	2,03	1×10^{-3}	1×10^{-1}	300

Tabela 6.22 - Parâmetros de calibração do Algoritmo AG no Planejamento de Trajetórias.

Tamanho da população	<i>Elite count</i>	Crítérios de seleção	Taxa de mutação	Taxa de crossover	Nº máximo de iterações (gerações)
30	0,1	Método da roleta	0,1	0,85	300

6.4. Contribuições do presente trabalho para outros estudos de trajetória de manipuladores

Como discutido no estado da arte deste trabalho (Capítulo 3), o planejamento de trajetórias livres de colisão por meio de técnicas de otimização é um assunto amplamente estudado na literatura. No entanto, no que diz respeito às particularidades dos manipuladores acionados pneumáticamente, entende-se que existem contribuições que ainda podem ser exploradas, como as que foram propostas no presente. Com base nessa premissa, esta seção apresenta as principais contribuições deste trabalho quanto ao estudo do planejamento do caminho e de trajetória e as particularidades na implementação de cada parâmetro de otimização aqui considerados. Objetiva-se assim apresentar os requisitos necessários para futuras aplicações em manipuladores com diferentes tipos de acionamento.

6.4.1. Contribuições do método de otimização para o planejamento do caminho

Para gerar os pontos intermediários na presença de obstáculos, os seguintes aspectos foram considerados na formulação do problema de otimização aplicado ao planejamento do caminho, os quais podem ser levados em conta na implementação do método proposto em outros tipos de robôs manipuladores.

- **Variáveis de projeto:** se referem às respectivas coordenadas x_i , y_i , z_i da i -ésima etapa de otimização. As variáveis de projeto devem assumir valores dentro dos limites estabelecidos nas restrições laterais, apresentadas abaixo, de modo que essa é a única condição para a implementação em outros manipuladores. No trabalho desenvolvido, a representação das variáveis de projeto seguiu a proposta de Abu-dakka, 2011, entre outros, como descrito na Seção 5.1.

- **Função objetivo:** consiste na minimização da distância entre cada ponto intermediário (u_i^*), na i -ésima etapa de otimização, e o ponto final. Apesar de o equacionamento da função objetivo ser apresentado por outros autores, como descrito na Seção 5.1, a contribuição do presente trabalho está na aplicação deste equacionamento em diferentes etapas de otimização, conforme o fluxograma ilustrado na Figura 5.1.
- **Restrições laterais:** para que as possíveis soluções (variáveis de projeto) em cada etapa de otimização pudessem ser geradas dentro do volume de trabalho do RPC, estabeleceu-se que o volume de trabalho deveria ser limitado por um paralelepípedo inscrito do espaço de trabalho do manipulador. Assim, a fim de aplicar estas restrições a outros tipos de manipuladores, é necessário conhecer o espaço de trabalho e verificar a distância do centro de coordenadas do paralelepípedo em relação ao centro de coordenadas da base do manipulador em estudo, para que se possa aplicar a cinemática inversa e, conseqüentemente, analisar a trajetória no espaço de juntas na segunda etapa de otimização (planejamento de trajetórias).
- **Restrição (a):** além dos pontos intermediários serem gerados dentro do volume de trabalho do RPC, considerou-se que os mesmos, em cada etapa de otimização, devem ser gerados sob a superfície de uma esfera de referência de raio R . O objetivo desta abordagem é garantir que as possíveis soluções (pontos intermediários) sejam geradas com distâncias aproximadamente iguais ao término de todas as etapas de otimização. Para que essa restrição possa ser implementada a outros tipos de manipuladores, deve-se aplicar a equação paramétrica da esfera levando em conta as demais restrições em cada etapa de otimização.
- **Restrição (b):** Para garantir que os pontos intermediários fiquem fora da região de colisão em cada etapa de otimização, definiu-se uma relação de distâncias (d_1 , d_2 , d_{rel}) de acordo com a geometria dos obstáculos (cilindros, esferas e cubos). Nesse sentido, a fim de aplicar essa restrição no caso do planejamento do caminho para outros tipos de manipuladores, é necessário mapear o obstáculo no volume de trabalho do robô, considerando as dimensões dos obstáculos e os equacionamentos apresentados nas Seções 4.2 e 5.1. É importante destacar que a técnica de mapeamento dos obstáculos para robôs cilíndricos é uma das importantes contribuições do presente trabalho.

Enfim, a principal contribuição do presente estudo é propor um método para geração de pontos intermediários por meio de diferentes etapas de otimização. Apesar de o presente trabalho considerar equacionamentos e representações das variáveis de projeto e da função objetivo propostos por outros autores (ver Seção 5.1), entende-se que a aplicação desses conceitos em etapas de otimização, apresentadas no fluxograma da Figura 5.1, acrescida da técnica de mapeamento dos obstáculos e da relação de distâncias, aqui implementadas por meio de parábolas e paraboloides, contribuem com os estudos desenvolvidos para a geração de pontos intermediários na presença de obstáculos.

6.4.2. Contribuições do método de otimização para o planejamento de trajetórias

A fim de se obter as trajetórias ótimas através da interpolação dos pontos intermediários (planejamento do caminho) no espaço de juntas, os seguintes aspectos foram considerados na formulação do problema de otimização aplicado ao planejamento de trajetórias, os quais podem ser levados em conta na implementação do método proposto em outros tipos de robôs manipuladores.

- **Variáveis de projeto:** seguindo a proposta de Gasparetto e Zanotto, 2007, entre outros, as variáveis de projeto utilizadas no planejamento de trajetórias se referem ao intervalo de tempo entre dois pontos sucessivos ($t_i - t_{i-1}$). Para a implementação em outros manipuladores, essas variáveis devem assumir valores dentro dos limites estabelecidos nas restrições laterais, apresentadas a seguir, e variar de acordo com o número de pontos intermediários, que podem ser definidos de acordo com a etapa anterior (planejamento do caminho) ou arbitradas aleatoriamente.
- **Função objetivo:** consiste na minimização da força associada à dinâmica do RPC, a qual está diretamente relacionada à equação Lagrangeana de robôs manipuladores. Esse equacionamento é apresentado por outros autores, como mencionado na Seção 5.2, e a sua implementação a outros manipuladores deve levar em conta o tipo de acionamento das juntas (rotacional ou prismática). Ou seja, se o manipulador em estudo for composto por juntas prismáticas, como o caso do RPC, é preciso definir uma matriz de transformação do espaço de juntas para o espaço dos atuadores, possibilitando, assim, que a função objetivo seja calculada (ver Equação 5.50); caso contrário, a função objetivo pode ser calculada pela aplicação direta da Equação

Lagrangeana. É importante ressaltar que no presente trabalho a matriz de relação geométrica é apresentada na Seção 4.1.1.

- **Restrições laterais:** como mencionado na Seção 5.2.2.1, as restrições laterais inferiores, que foram aqui implementadas com base no método de Gasparetto e Zanutto, 2007, são aplicadas com intuito de se obter o intervalo de tempo referente à junta mais ‘lenta’, considerando as posições dos pontos intermediários e a velocidade máxima de cada junta. Já as restrições laterais superiores são arbitradas de acordo com as posições dos pontos intermediários, uma vez que as mesmas influenciam no comportamento dinâmico do RPC. Portanto, para implementar as restrições laterais utilizadas na presente tese em outros tipos de manipuladores, necessita-se conhecer a posição dos pontos intermediários e aplicar o equacionamento descrito na Seção 5.2.2.1, no caso das restrições laterais inferiores, e arbitrar os valores máximos de tempo de acordo com as posições intermediárias fornecidas, tratando-se das restrições laterais superiores.
- **Restrições de colisão:** Para garantir que a trajetória interpolada no espaço de juntas não provoque movimentos impedidos por obstáculos, no presente trabalho foram propostas restrições que consideraram a posição do obstáculo e a configuração geométrica do manipulador em estudo. Assim, estabeleceram-se faixas de operação para cada junta que relacionam a região de colisão (mapeada no espaço de trabalho do robô) com o espaço de juntas do RPC. As condições e os equacionamentos utilizados nas restrições de colisão são apresentados na Seção 5.2.2.2. Com a finalidade de implementar as restrições de colisão em outros tipos de robôs manipuladores, é necessário definir regiões que, também levando em conta o tipo de movimento (rotacional ou prismática) e o curso máximo de cada junta, as dimensões dos elos de cada GDL do robô em estudo e a orientação desejada para o efetuador, garantam que todos os elos, ao longo do movimento de suas respectivas juntas, estejam simultaneamente fora da região de colisão ao longo da trajetória. É importante mencionar que o estudo e a implementação das restrições de colisão são uma das importantes contribuições do presente trabalho para o RPC que está sendo desenvolvido no LAMECC/UFRGS.

- **Restrições cinemáticas e dinâmicas:** com o intuito de definir os limites físicos do RPC, no presente trabalho foram realizados experimentos e aplicados modelos (com base no equacionamento do subsistema mecânico de um atuador pneumático) para determinar os valores máximos de velocidade, aceleração, *jerk* e torque. É importante destacar que os procedimentos utilizados e modelos aplicados para determinar os valores máximos e mínimos para cada uma das restrições é uma das importantes contribuições do presente trabalho específicas para o manipulador estudado. No caso de outros tipos de manipuladores, entende-se que as restrições cinemáticas e dinâmicas devem ser estabelecidas conforme as especificidades do tipo de manipulador. Isto é, dependendo da configuração do robô e do tipo de acionamento (hidráulico, elétrico ou pneumático) de suas juntas, os experimentos para determinar os limites destas restrições devem ser realizados considerando o procedimento para o acionamento das juntas e os posicionamentos das juntas do robô em estudo, conforme o procedimento descrito na Seção 5.2.2.3 (item *ii.a*).

Em síntese, o presente estudo propõe um método para geração de trajetórias no espaço de juntas do RPC. A principal contribuição deste estudo está na elaboração de procedimentos e métodos para determinar os valores máximos das restrições aplicadas ao problema de otimização de trajetórias, levando em conta as particularidades de um sistema acionado pneumaticamente. Nesse sentido, mesmo que o presente trabalho considere equacionamentos e representações das variáveis de projeto e da função objetivo propostos por outros autores (ver Seção 5.2), entende-se que a aplicação desses conceitos, acrescidos dos métodos e procedimentos utilizados para determinar as restrições do problema de otimização (de colisão, cinemáticas e dinâmicas), contribuem com os estudos desenvolvidos na área de planejamento de trajetórias de robôs.

7 CONCLUSÕES

A presente pesquisa propôs aplicar o planejamento de trajetória livre de colisão para o RPC, um robô cilíndrico acionado pneumaticamente, em duas etapas distintas de otimização.

A primeira delas está diretamente relacionada ao planejamento do caminho. Nesta etapa, os pontos intermediários da trajetória foram gerados considerando a menor distância em relação ao ponto final da trajetória e a presença de obstáculos (cilindros, esferas e cubos) no volume de trabalho do RPC. Para tanto, estabeleceu-se uma região de colisão (em função das características do manipulador) para delimitar a zona utilizada na penalização das soluções (pontos intermediários), ou seja, se o ponto intermediário estiver dentro da região delimitada, a solução é penalizada; se estiver fora, é uma possível solução para o problema de otimização do caminho, pois impede a colisão do robô com o obstáculo.

A segunda etapa, relacionada ao planejamento de trajetória propriamente dito, consistiu na otimização da força associada à dinâmica do RPC, considerando as restrições cinemáticas (velocidade, aceleração, *jerk*) e dinâmicas (torque) do manipulador, de acordo com a formulação apresentada nos trabalhos de Tangpattanakul e Artrit, 2009, Abu-Dakka, 2011, entre outros. Para tanto, adotou-se a estratégia de interpolação por *b-splines* de 5º e 7º grau, pois, como descrito na Seção 2.5.2.1, estas funções podem reduzir a natureza oscilatória apresentada em polinômios de alto grau na interpolação polinomial.

Em linhas gerais, os objetivos deste trabalho, listados na introdução e aqui reproduzidos por conveniência, foram os seguintes:

1. Propor um método de otimização para obtenção dos pontos-chave na presença de obstáculos, por meio de regiões de colisão;
2. Utilizar *b-splines* de 5º e 7º grau na interpolação (espaço de juntas), levando em conta as pesquisas de Gasparetto e Zanotto, 2007, e Liu et al., 2013;
3. Propor um método de otimização para obtenção de trajetória com a mínima força associada à dinâmica do RPC;
4. Determinar as restrições cinemáticas e dinâmicas do manipulador por meio de procedimentos experimentais;
5. Viabilizar que no espaço de juntas o RPC não execute movimentos impedidos por obstáculos;

6. Aplicar os algoritmos metaheurísticos FMA, PSO e AG aos estudos do planejamento de caminho e trajetória e verificar, comparativamente, a eficiência de cada um deles; e
7. Realizar simulações e experimentos para analisar o método de otimização proposto aqui para o planejamento do caminho e da trajetória.

Com relação ao primeiro objetivo, entende-se que o método de otimização proposto para o planejamento do caminho permitiu definir os pontos-chave na presença de obstáculos (cilindros, cubos e esferas), uma vez que os resultados obtidos para os três casos propostos (**1º caso**: o RPC deveria manipular objetos de baixo para cima, na presença de obstáculos; **2º caso**: o RPC deveria manipular objetos em uma mesma altura na presença de obstáculos; e **3º caso**: o RPC deveria manipular objetos em uma mesma altura sem a presença de obstáculos) mostraram que os pontos intermediários foram obtidos fora do volume que delimita cada um dos obstáculos (região de colisão), respeitando os requisitos estabelecidos na função objetivo (menor distância entre cada ponto intermediário e o ponto final) e nas restrições, definidas pelas distâncias d_1 , d_2 e d_{rel} no caso de esferas e de cubos (Equação 5.8) e no caso de cilindros (Equação 5.9). Com relação à distância relativa (d_{rel}), observou-se que, apesar de garantir uma distância afastada entre os pontos-chave e os obstáculos, ela não garante que todos os pontos intermediários fiquem afastados na mesma distância em relação ao obstáculo. Nesse sentido, conclui-se que a distância d_{rel} deve ser analisada levando em conta as particularidades do tipo de movimentação desejado.

No que diz respeito ao segundo objetivo, considerando que o controlador do RPC, desenvolvido por Sarmanho, 2014, teve como base a estratégia por torque calculado, que, segundo Slotine e Li, 1988, requer que a trajetória a ser utilizada tenha continuidade na função de posição e de suas três primeiras derivadas, optou-se nesse trabalho por trabalhar com trajetórias de 5º e 7º grau. Tendo essa situação como condição, obteve-se os equacionamentos das *b-splines* de 5º e 7º grau, os quais foram utilizados para interpolar os pontos intermediários no espaço de juntas do RPC. Esses equacionamentos, apresentados por Gasparetto e Zanotto, 2007, e Liu et al., 2013, permitiram verificar o desempenho das trajetórias de 5º e 7º grau no controlador do RPC.

O terceiro objetivo foi alcançado com a proposição de um método de otimização para obtenção de trajetórias (5º e 7º grau) com a mínima força associada à dinâmica do RPC, considerando os efeitos dinâmicos do manipulador – restrições cinemáticas e dinâmicas,

obtidas por procedimentos de cálculo e validadas experimentalmente – e as restrições de colisão nas juntas, que garantem um movimento livre de colisão para o manipulador. No presente estudo, os resultados foram analisados por meio de uma trajetória representada por pontos-chave dispostos em uma linha reta no espaço de trabalho do RPC, propiciando a movimentação de todas as juntas, o que se entende ser adequado na análise da efetividade do estudo proposto. As soluções encontradas na análise apresentada na Seção 6.3.2 mostraram que nenhuma das restrições propostas foram violadas e que os maiores esforços ocorreram no 1º, 2º e 3º GDL, atingindo valores próximos aos limites estabelecidos nas restrições dinâmicas. Essa resposta era esperada considerando que esforços associados ao 4º e 5º GDL (punho e efetuador do RPC) são significativamente menores que os demais GDL deste manipulador. Ademais, a fim de verificar a efetividade do método de planejamento de trajetória proposto, foram analisadas as trajetórias de 5º (T5) e 7º (T7) grau e as de Missiaggia, 2014, (T7M), por meio de experimentos. Os resultados obtidos foram avaliados através do erro máximo e do erro médio, considerando que esses erros representam o comportamento do robô em relação às trajetórias de referência. Os valores encontrados mostram que as três trajetórias apresentaram comportamentos similares em relação ao erro de seguimento de trajetória, pois pequenas diferenças entre as trajetórias de referência (T5, T7 e T7M) e as respectivas trajetórias executadas pelo RPC foram encontradas. No que diz respeito às trajetórias de 5º. e 7º. grau propostas neste trabalho (T5 e T7) , observou-se que T5 apresentou resultados levemente superiores à T7, por isso conclui-se que ambas as trajetórias podem ser aplicadas ao RPC nas tarefas de manipulação de peças.

Quanto ao quarto objetivo, restrições cinemáticas e dinâmicas foram calculadas com base no procedimento descrito na Seção 5.2.2.3. O procedimento de cálculo aplicou dados experimentais, de posição, que foram utilizados para determinar os valores máximos de aceleração, *jerk* e torque para cada GDL, por meio dos equacionamentos dos subsistemas mecânicos de servoposicionadores pneumáticos. Já os valores de velocidade foram determinados pela derivada dos dados experimentais de posição. A realização desse procedimento de cálculo procurou definir os limites operacionais de cada GDL, levando em conta os aspectos construtivos e funcionais do RPC, a fim de, posteriormente, aplicar os resultados do procedimento como restrições no método de otimização de trajetórias. Nesse sentido, dois aspectos importantes em relação aos resultados obtidos neste trabalho devem ser considerados:

- a) os valores calculados para as restrições de aceleração e *jerk* foram validados experimentalmente. Nesse sentido, conclui-se que o cálculo da massa equivalente (apresentado na Seção 4.7) e o modelo de atrito LuGre, proposto por Sarmanho, 2014, são adequados ao funcionamento do RPC; e
- b) verificou-se que houve diferenças significativas entre as soluções (trajetórias) obtidas em termos de velocidade, aceleração, *jerk* e torque e as restrições cinemáticas e dinâmicas propostas (Tabelas 6.4 a 6.7). Essas diferenças, apesar de serem importantes do ponto de vista do conceito de otimização, uma vez que as soluções se caracterizam por valores próximos às fronteiras delimitadas pelas restrições na minimização ou maximização da função objetivo, foram determinadas considerando-se as condições operacionais críticas para cada junta do RPC por meio de procedimentos experimentais. Nesta perspectiva, conclui-se que é possível que existam casos em que, dependendo da combinação de pontos-chave, a trajetória ótima não atinja os valores estabelecidos para as restrições cinemáticas e dinâmicas. Para esses casos, soluções para o problema de otimização poderão ser encontradas, mas os valores da trajetória (velocidade, aceleração, *jerk* e torque) possivelmente serão afastados das fronteiras de otimização propostas para o RPC.

Ainda tratando do estudo do planejamento de trajetória, o quinto objetivo do trabalho se refere às restrições de colisão. Tais restrições foram definidas com o intuito de evitar movimentos nas juntas que provoquem, concomitantemente, colisões do efetuador e/ou elos do RPC com os obstáculos (cilindros, cubos e esferas), os quais foram definidos por distâncias que delimitam a região de colisão ($\theta_{1mincol}$ e $\theta_{1maxcol}$, para a junta 1; $l_{2mincol}$ e $l_{2maxcol}$, tratando-se da junta 2; e por $l_{3mincol}$). Considerando os dados apresentados na Seção 6.3.1, os resultados obtidos mostraram que a trajetória ótima garante um movimento livre de colisão para o RPC, visto que as restrições estabelecidas nas Equações 5.51 a 5.53 não foram violadas concomitantemente. Além disso, é importante mencionar que as restrições de colisão foram desenvolvidas para o caso em que o 4º GDL está posicionado a -90° em relação ao sistema de coordenadas da base do manipulador. Essa escolha baseia-se no fato de que, tratando-se do RPC, se entende ser uma orientação adequada para tarefas de manipulação do tipo *pick-and-place*, as quais são consensualmente consideradas pelos pesquisadores do LAMECC. Portanto, com relação às restrições de colisão, entende-se que os equacionamentos propostos nas Equações 5.51 a 5.53

são adequados levando-se em conta às dimensões dos elos do RPC, as dimensões do volume de trabalho e o mapeamento dos obstáculos.

Atendendo ao sexto objetivo proposto, a aplicação dos algoritmos FMA, PSO e AG no planejamento de trajetória livre de colisão do RPC (planejamento de caminho e de trajetória), a fim de verificar se há diferenças significativas entre o comportamento desses algoritmos metaheurísticos. A escolha desses algoritmos justifica-se em função de que os mesmos possibilitam, como os demais algoritmos estocásticos de otimização, que a busca por uma solução do problema de otimização não fique presa a um ótimo local, aumentando a probabilidade de se encontrar um ótimo global, em função de apresentarem um procedimento de busca aleatória. A partir da análise aqui realizada, conclui-se que os três algoritmos apresentaram resultados similares no estudo do planejamento da trajetória e do caminho, o que reforça o entendimento de que os algoritmos metaheurísticos apresentam desempenho similares em problemas de otimização [Yang, 2010].

Por fim, com relação ao sétimo objetivo deste trabalho, foram realizadas simulações e experimentos para avaliar o método de otimização proposto para o planejamento do caminho e da trajetória do RPC. Quanto ao planejamento do caminho, optou-se pelo uso de simulações na análise dos resultados porque se entende que essa é uma forma adequada para verificar as possíveis movimentações do RPC na presença de obstáculos. Como mencionado quando se tratou do segundo objetivo desta tese, os resultados obtidos por meio de simulação mostraram que o método de planejamento do caminho é adequado para as tarefas de manipulação de peças na presença de obstáculos. Com relação ao planejamento da trajetória, foram realizadas simulações para avaliar o método proposto para as restrições de colisão nas juntas do RPC. A escolha por simulações se deu porque se entende que essa é uma forma adequada para avaliar situações de colisão do RPC ao longo da trajetória, uma vez que as dimensões dos elos e dos componentes do RPC são conhecidas e são considerados equacionamentos para avaliar as condições de colisão. Ainda para o planejamento de trajetórias, foram realizados experimentos que permitiram avaliar o erro de seguimento de trajetória. Esses experimentos foram realizados porque se entende que eles conduzem a uma análise que possibilita avaliar a influência das trajetórias geradas (referência) na movimentação do RPC.

Em síntese, nesse trabalho, ao se propor um método de otimização para o planejamento do caminho e da trajetória para o RPC, buscou-se acrescentar uma importante contribuição às pesquisas desenvolvidas no LAMECC para esse manipulador (Allgayer, 2011; Rijo, 2013;

Sarmanho, 2014; Missiaggia, 2014; Medina, 2015; Leonardelli, 2015 e Montecinos, 2017). No âmbito desses estudos, entende-se que esta tese contribui com a aplicação de uma metodologia para a movimentação do RPC na presença de obstáculos, além de apresentar um método de planejamento de trajetória estabelecendo os limites operacionais desse manipulador. Os resultados obtidos aqui poderão, entre outros possíveis, gerar trajetórias do tipo *online* na presença de obstáculos, considerando o mapeamento dos objetos em tempo real, com base nos conceitos discutidos em Medina, 2015 e Montecinos, 2017. Além disso, permite-se, a partir dos resultados da presente tese, analisar a influência da minimização da força associada à dinâmica do RPC, comparando a força com outros parâmetros de otimização que possibilitem avaliar os erros de seguimento de trajetórias.

7.1. Sugestões de trabalhos futuros

- Aprimorar a técnica de geração dos pontos intermediários (planejamento do caminho), utilizando técnicas de visão computacional para o reconhecimento dos objetos;
- Aplicar o método de planejamento de trajetórias proposto para trajetórias do tipo *online*, considerando as restrições cinemáticas e dinâmicas estabelecidas experimentalmente para definir os limites operacionais ao longo da movimentação do RPC; e
- Aplicar técnicas de controle adaptativo, considerando as trajetórias de 5° e 7° grau para minimizar o erro de seguimento de trajetória na movimentação do RPC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abou-Fayssal, H. **Design, Analysis, and Control of a Pneumatic Cartesian Robot**, Departament of Mechanical Engineering, Queen's University, Master thesis, Canada, 1997.

Abu-Dakka, F.J. **Trajectory planning for industrial robot using genetic algorithms**. Tese de Doutorado, 245.p., Universidad Politecnica de Valencia, 2011.

Abu-Dakka, F.J.; Assad, I.F.; Valero, F.; Mata, V. Parallel-Populations Genetic Algorithm for the Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots. **Intelligent Robotics and Applications**. p.83-92, 2011.

Abardeh, M.E.; Akbarzadeh, A. Online Trajectory Generation of a 2 Link Robot in Presence of Obstacle. **Advanced Materials Research**. p.1772-1776, 2012.

Abu-Dakka, F.J.; Rubio, F.; Valero, F.; Mata, V. Evolutionary indirect approach to solving trajectory planning problem for industrial robots operating in workspaces with obstacles. **European Journal of Mechanics A/Solids**. p.210-218, 2013.

Allgayer, R. S., **Desenvolvimento de um Manipulador Robótico Cilíndrico Acionado Pneumaticamente**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

Argoud, A.R.T.T.; Gonçalves Filho, E.V.; Tiberti, A.J. Algoritmo genético de agrupamento para formação de módulos de arranjo físico. **Gest. Prod. [online]**. 2008, vol.15, n.2, pp. 393-405. ISSN 0104-530X.

Armstrong, B.; Canudas de Wit, C. **Friction modeling and compensation**. In: The control handbook. CRC Press, pp. 1369-1382. Cap. 77, 1996.

Arora, J.S. **Introduction to Optimum Design**. Elsevier Academic Press, 2nd edition, 2004.

Ávila, S.L. **Algoritmos Genéticos aplicados na otimização de antenas parabólicas**, Dissertação de mestrado, 98.p, UFSC, 2002.

Ata, A.A.; Myo, T.R. Collision-Free Trajectory Planning for Manipulators using Generalized Pattern Search. **International Journal of Simulation Modelling**, p 145-154, 2006.

Baba, N.; Kubota, N. Collision avoidance planning of a robot manipulator by using genetic algorithm. A consideration for the problem in which moving obstacles and/or several robots are included in the workspace. **IEEE World Congress on Computational Intelligence**., p 714 – 719, 1994.

Barabanov, N.; Ortega, R. **Necessary And Sufficient Conditions for Passivity of the LuGre Friction Model**, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, pp. 830-832, 2000.

Barrientos, A. Peñin, L.F. Balaguer, C. Aracil, R., **Fundamentos de Robótica**. McGraw-Hill, 2ª ed., 1997.

Basturk, B.; Karaboga, D. An Artificial Bee Colony (ABC) Algorithm for Numeric Function Optimization. **IEEE Swarm Intelligence Symposium**, V.8, No. 1, pp. 687-697, 2006.

Biagiotti, L.; Melchiorri, C., **Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots**, Springer-Verlag, 2008.

Bergh, F.; Engelbrecht, A.P. A Study of Particle Swarm Optimization Particle Trajectories, **Information Sciences**, v.176(8), p 122-129, 2006.

Bobrow, J. E.; McDonell, B. W. **Modelling, Identification and Control of a Pneumatically Actuated, Force Controllable Robot** IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 14, N. 15, pp 732-742, 1998.

Borges, S.K. **Resolução de Timetabling utilizando Algoritmos Genéticos e Evolução Cooperativa.**, Dissertação de mestrado, 104.p, UFPR, 2003.

Burden, R.L.; Faires, J.D. **Análisis numérico**. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.

Cao, B., Doods, G.I., Irwin, G.W. Time-Optimal and Smooth Path Planning for Robot Manipulators. pp.1853-1858, 1994.

Canudas de Wit, C.; Olsson, H.; Astrom, K.J.; Lischinsky, P., **A New Model for Control Systems with Friction** IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, n. 3, pp.419-425, 1995.

Çakir, M.; Butun, E.; Kayman, Y. Effects of genetic algorithm parameters on trajectory planning for 6-DOF industrial robots. **Industrial Robot**, Volume 33, issue 3, 2006, p 205-215.

Ceccarelli M., **Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation**, Kluwer/Springer, Dordrecht, 2004.

Chapra, S.C.; Canale, R.P., **Métodos numéricos para ingenieros**, Mc Graw Hill, 5ª ed, 2006.

Chettibi, T.; Lehtihet, H.E.; Haddad, M.; Hanchi, S. Minimum cost trajectory planning for industrial robots. **European Journal of Mechanics A/Solids**. pp. 703-715, 2004.

Chong, J.W.S.; Ong, S.K.; Nee, A.Y.C.N.; Youcef-youmi, K. Robot Programming using augmented reality: An interactive method for planning collision-free paths. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, p 689 – 701, 2009.

Chyan, G.S; Ponnambalam, S.G; Obstacle avoidance control of redundant Robots using variants of particle swarm optimization. **Robotics and Computer-integrated Manufacturing**. p. 147-153. 2012.

Clerc, M. The Swarm and the Queen: Towards a Deterministic and Adaptive Particle Swarm Optimization, **International Conference on Evolutionary Computation**, v.3, p. 1951-1957, 1999.

Craig, J. J, **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**, Prentice Hall; 3^a ed., 2005.

Cupido, A.; Milanese.S.; Sala.R., **Sistemi ed Automazione Industriale** 3^a ed., Cupido, 60025 Loreto (AN) – Zona Ind.le Brodlini 12, 1996.

Cukla, A. R. **Arquitetura Microcontrolada Programável Aplicada ao Controle de um Servoposicionador Pneumático** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS,2012.

Day, J.C. **An Introduction to Fireflies and Glowworms**, available at <http://www.firefliesandglow-worms.co.uk/index.html> (acessado em 15 de Janeiro), 2010.

Dorigo, M.; Maniezzo, V.; Colorni, A.. Ant system: optimization by a colony of cooperating agents. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics**, V.26, No.1, pp.29-41, 1996.

De Boor, C. **A Pratical Guide to Spline**. 1.ed. N.Y: Springer, 2000. 241 p.

Eberhart, R. C.; Kennedy, J. A new optimizer using particle swarm theory, **Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science**, p 39-43, 1995.

Esposito, A., **Programação Paralela e Sequencial aplicada à Otimização de Estruturas metálicas com o Algoritmo PSO**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

Esposito, A., **Otimização do risco de estruturas redundantes considerando os efeitos das não linearidades e múltiplos modos de falha**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016

Farmer, D., Packard, N., Perelson, A. The immune system, adaptation and machine learning. **Physica D**, V.2, pp. 187–204, 1986.

Feo, T. A., Resende, M.G.C. Greedy randomized adaptive search procedures. **Journal of Global Optimization**, Vol. 6, No. 2, p. 109–133, 1995.

Ferreira, W.R.B. **Planejamento de Trajetórias Robóticas utilizando B-splines**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.

Floater, M.S.; Surazhsky, T. Parameterization for curve interpolation, **Studies in Computational Mathematics**, pp.415-416, 2005.

Fritzsche, H. **Programação Não-Linear: Análise e Métodos**. São Paulo: Edgard Blucher. Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

Fu, K.S.; Gonzales, R.C.; Lee, C.S.G.; **Robotica: Control, Deteccion, Vision e Inteligencia**. McGraw-Hill Book Inc., International Edition, 1 ed., New York, 1987.

Gasparetto, A.; Zanutto, V. A new method for smooth trajectory planning of robot manipulators. **Mechanism and Machine Theory**. pp.455-471, 2007.

Gasparetto, A.; Zanutto, V. A Technique for Time-jerk optimal planning of robot trajectories. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**. pp.415-416, 2008.

Gasparetto, A.; Zanutto, V. Optimal trajectory planning for industrial robots. **Advances in Engineering Software**. pp.548-556, 2010.

Gasparetto, A.; Boscarior, P.; Lanzutti, A.; Vidoni, R. Trajectory Planning in Robotics. **Mathematics in Computer Science**. pp.269-279, 2012.

Geem, Z.W.; Kim, J.H.; Loganathan, G.V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. **Simulation**, Vol. 76 No. 2 pp. 60–68, 2001.

Goldberg, D. E. **Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning**. Addison Wesley. pp. 41, 1989.

Gomes, H.M. A firefly metaheuristic algorithm for structural size and shape optimization with dynamic constraints. **Mecânica Computacional**. p.2059-2074, 2011.

Gomes, H.M. Truss Optimization with Dynamic Constraints Using a Particle Swarm Optimization. **Expert Systems with Application**. V.38, p.957-968, 2011a.

Glover, F., Kochenberger, Gary A. **Handbook of Metaheuristics**, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA., 2002.

Grossmann, S. I, **Álgebra Lineal** Mc Graw Hill Interamericana, 6ª ed., 2008.

Guerra, C. **Otimização Paramétrica de estruturas treliçadas por Algoritmos Genéticos**. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2008

Haftka, R.; Gurdal, Z. **Elements of Structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 1991.

ISO 8373-1994, Manipulating Industrial Robots – Vocabulary, 1st Edition, 1994.

Izquierdo, R.C. **Projeto de Formação de Células de Manufatura através da utilização de Algoritmos Genéticos**, Dissertação de Mestrado, 91.p, UFRGS, 2013.

Jazar, R.N. **Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control**. Springer, 1ªed., pp.695, 2007.

Kennedy, J.; Eberhart, R.. Particle Swarm Optimization. **Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks**, V.4, No.4, pp. 1942–1948, 1995.

Khatib, O. Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. **International Journal of Robotics Research**. pp.90-98, 1986.

Kikuchi, N., Oden, J.T. **Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Filadélfia, USA, 1988.

Kirkpatrick, S.; Gelatt, D.C.; Vecchi, M.P. Optimization by simulated annealing. **Science** V.220, No.4598, pp. 671–680, 1983.

Laguna, M. A guide to implementing tabu search. **Investigación Operativa**, V.4, No.1, pp 5-25, 1994.

Latombe, J.C.: **Robot Motion Planning**. Kluwer, Norwell, 1991.

Leonardelli, P. **Metodologia de Programação baseada em Grafset para programação de Robôs**, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2015.

Lewis, F.L.; Dawson, D.M.; Abdallah, C.T. **Robot Manipulators Control**. 2ªed. 2006

Lin, C-S.; Chang, P-R.; Luh, J.Y.S. Formulation and Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots. **IEEE Transactions on Automatic Control**. p.1066-1074, 1983.

Lin, H-I., Liu, Y-C. Minimum-Jerk Robot Joint Trajectory Using Particle Swarm Optimization. **International Conference on Robot, Vision and Signal Processing**. pp.118-121, 2011.

Liu, H.; Xiaobo, L.; Wenxiang, W. Time-optimal and jerk-continuous trajectory planning for robot manipulators with kinematic constraints. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, p. 309-317, 2013.

Lo Bianco, C.G.; Piazzì, A. Minimum-time trajectory planning of mechanical manipulator under dynamic constraints. **International Journal of Control**. pp.967-980, 2002.

Machmudah, A., Parman, S., Zainuddin, A., Chacko, S. Polynomial joint angle arm robot motion planning in complex geometrical obstacles. **Applied Soft Computing**. p.1099-1109, 2013.

MATLAB® version 7.11.0. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2011.

McDonnell, B. W. **Modeling, Identification, and Control of a Pneumatically Actuated Robotic Manipulator**. PhD. Thesis, University of California, Irvine, 1996.

Medina, B.V.O., **Sistema de Visão Computacional aplicado a um Robô Cilíndrico acionado Pneumaticamente**, Dissertação de Mestrado, 132. p, UFRGS, 2015.

Menasri, R., Nakib, A., Oulhadj, H., Daachi, B., Siarry, P., Hains, G. Path Planning for redundant manipulators using metaheuristic for bilevel optimization and maximum of manipulability. **Proceeding of the IEEE. International Conference on Robotics and Biomimetics** . p.145-150, 2013.

Menasri, R., Nakib, A., Daachi, B., Oulhadj, H., Siarry, P. A trajectory planning of redundant manipulator based on bilevel optimization. **Applied Mathematics and Computation**. p.934-947, 2015.

Meligy, R.E.; Bassiuny, A.M.; Bakr, E.M.; Tantawy, A.A. A Feasible Minimum-time Trajectory of Robot Manipulator. **Proceedings of the 9th International Symposium on Mechatronics and its Applications**. pp. ISMA13-1 – ISMA 13-5, 2013.

Montecinos, D.R. **Sistema de Visión Computacional Estereoscópico aplicado a um Robot Cilíndrico acionado neumáticamente**, Dissertação de Mestrado, 83. p, UFRGS, 2017.

Monteiro, D.C. **Planejamento e Rastreamento de Trajetórias e Controle de Posição através de Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Artificiais**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2003.

Mitchell, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**. A Bradford book, Massachusetts, 1999

Mantovani, C. **Pianificazione di Traiettorie per Manipolatori Robotici**. Dissertação de Mestrado, 163. p, Università Degli Studi di Udine, 2002.

Missiaggia, L. **Planejamento Otimizado de Trajetória para um Robô Cilíndrico Acionado Pneumaticamente**, Dissertação de Mestrado, 106. p, UFRGS, 2014.

Niku, S.B, **Introdução à robótica: Análise, Controle e Aplicações**, Editora LTC, 2ªed, 2013.

Ozaki, H., Lin, C.J. Optimal B-Spline Trajectory Generation for Collision-Free Movements of a Manipulator under Dynamic Constraints. **International Conference on Robotics and Automation**. p. 3592-3597. 1996.

Paul, R.P., **Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control**. The MIT Press, Massachusetts, 1981.

Perondi, E.A. **Controle Não-linear em Cascata de um Servoposicionador Pneumático com Compensação do Atrito**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

Perondi, E. A.; Guenther, R. Modelagem de um servoposicionador pneumático com atrito. **II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM/2002**, João Pessoa, PB, Brasil, 2002

Pérez, S.P.O. **Otimização Simultânea de Posições e Forças de Amortecedores de Vibração por Atrito para Controle de Vibrações de Estruturas**, Dissertação de Mestrado, 143. p, UFRGS, 2014.

Piazzi, A.; Visioli, A. Global Minimum-jerk Trajectory Planning of Robot Manipulators **IEEE Transactions on Industrial Electronics**. p.140-149, 2000.

Piegl, L; Tiller, W., **The NURBS Book**. 2.ed. N.Y: Springer, 1997. 641 p.

Rao, S.S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**, John Wiley and Sons, v.4, Hoboken, New Jersey, 2009.

Ramshaw, L. **Blossoming: A connect-the-dots approach to splines**, Systems Research Center, Palo Alto, California, 1987.

Rashedi, E.; Nezamabadi-pour, H.; Saryazdi, S. GSA: a gravitational search algorithm. **Information Science**, Vol. 179, No.13, pp. 2232–2248, 2009.

Rendón, R.A.G.; Zuluaga, A.E.; Ocampo, E.M.T. **Técnicas Metaheurísticas de Optimización**. 2ª ed. Textos universitários, Colombia, Pereira, 2008.

Romano, V. F. **Robótica Industrial: Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processos** 1 ed. São Paulo: Edgard Blücher, pp. 280, 2002.

RIA - Robotics Industries Association. **American National Standard for Industrial Robots and Robot Systems – Safety Requirements**.ANSI/RIA 1999.

Rijo, M.G.Q., **Desenvolvimento da Base e Controle do Grau de Liberdade Rotacional de um Robô Cilíndrico com Acionamento Pneumático**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

Rubio, F.; Valero, F.; Sunyer, J.; Cuadrado, J. Optimal time trajectories for industrial Robots with torque, power, jerk and energy consumed constraints, **Industrial Robot: An International Journal**, pp 92-100, 2012.

Saramago, S.F.P, **Otimização de trajetórias de robôs manipuladores, na presença de obstáculos**, Tese de Doutorado, UFU, 1998.

Saramago, S.F.P.; Steffen.Jr, V. Optimization of the Trajectory Planning of Robot Manipulators taking into account the dynamics of the system, **Mechanism and Machine Theory**. pp. 883-894, 1998.

Saramago, S.F.P.; Steffen.Jr, V. Optimal Trajectory planning of robot manipulators in the presence of moving obstacles, **Mechanism and Machine Theory**. pp. 1079-1094, 2000.

Saramago, S.F.P. Algoritmos Genéticos aplicados ao planejamento da trajetória ótima de Robôs Manipuladores. **2º Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM.**, 2002.

Sarmanho, C.A.C. Desenvolvimento de um Robô Pneumático com 5 Graus de Liberdade com **Controlador Não Linear com Compensação de Atrito**. Tese de Doutorado, 245.p., UFRGS, 2014.

Sayadi, M.K.; Ashkan, H.; Naini, S.G.J. Firefly- inspired algorithm for discrete optimization problems: An application to manufacturing cell formation. **Journal of Manufacturing Systems**, p 78-84, 2013.

Schirmer, L. **Modelagem do Robothron – Um Manipulador de Barras Paralelas**. Dissertação de Mestrado, 141.p., UDESC, 2005.

Sciavicco, L.; Siciliano, B. **Modelling and Control of Robot Manipulators** 2nd ed., London, Springer, 2000.

Siciliano, B; Sciavicco, L.; Villani, L.; Oriolo, G. **Robotics – Modeling, Planning e Control**. Springer-Verlag, London, 2008.

Sengupta, A., Chakraborti, T., Konar, A., Nagar, A. Energy Efficient Trajectory Planning by a Robot Arm using Invasive Weed Optimization Technique. **Third World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing**. p. 311-316, 2011.

Severin, S. Rossmann, J. A Comparison of Different Metaheuristic Algorithms for Optimizing Blended PTP Movements for Industrial Robots. **Intelligent Robotics and Applications**. p. 321-330. 2012.

Shi, Y.; Eberhart, R.C. A Modified PartPart Swarm Optimizer, **Proceedings Conference on Evolutionary Computation**, pp 69-73, 1998.

Siegwart, R.; Nourbakhsh, I.R. **Introduction to Autonomous Mobile Robots**. MIT Press, 2004.

Silva, A.J.M. **Implementação de um Algoritmo Genético utilizando o modelo de ilhas**. Dissertação de Mestrado, 73.p, COPPE/UFRJ, 2005

Silva, N.R.S. **Detecção de dano estrutural por Algoritmos Genéticos e Sensibilidade Modal**. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2006

Simon, D. Data Smoothing and Interpolation using Eighth-order Algebraic Splines. **IEEE Transactions on Signal Processing**. 2004.

Sobczyk S., M. R. **Controle em cascata e a estrutura variável com adaptação de parâmetros e compensação de atrito de um servoposicionador pneumático**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, 2009.

Sousa, S.K.A. **Planejamento de Movimento para Robôs Móveis baseada em uma representação compacta da Rapidly-Exploring Random Tree (RRT)**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Sergipe, 2017.

Souza, S.A. **Algoritmos Genéticos Aplicados à Proteção e Estimação de Harmônicos em Sistemas Elétricos de Potência**. Tese de Doutorado. 259.p.,USP, 2008.

Slotine, J-J, E.; Li, W. Putting Physics in Control – The example of Robotics. **IEEE Control and System Magazine**. p.12-17, 1988.

Spong, M.W.; Vidyasagar, M., **Robot Dynamics and Control**, John Wiley & Sons, Inc., 1989.

Spong, M.W, Hutchinson, S, Vidyasagar, M. **Robot Modeling and Control**, Kluwer/Springer, Dordrecht, 2004.

Suzuki, R. M., **Controle baseado em linearização por realimentação dos estados aplicado a um servoposicionador pneumático**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

Tangpattanakul, P., Artrit, P. Minimum-time trajectory of robot manipulator using Harmony Search Algorithm. **In: 6th International Conference on Electrical Engineering /Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology**, pp. 354–357, 2009.

Tian, L.; Collins, C. An effective robot trajectory planning method using a genetic algorithm. **Original Research Article Mechatronics**, p. 455-470, 2004.

Todorov, E.; Chunyan, H.; Simpkins, A.; Movellan, J. **Identification and control of a pneumatic robot** 3rd IEEE RAS and EMBS International Conference on , pp. 373-380, 2010.

Wang, C-H., Horng, J-G. Constrained Minimum-time Path Planning for Robot Manipulators Via Virtual Knots of the Cubic B-splines Functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**. pp.573-577, 1990.

Wittman, **Linear Robot W 620 Series**, Disponível em: <http://www.wittmann.com.mx/pdfs/620_e.pdf>, Acesso em: jul, 2017

Xi, L.-P.; Chen, Z.-L.; Sun, S.-J. Obstacle Avoiding Research on the Manipulator based on Genetic Algorithm. **International Conference on Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control**. pp. 865–867, 2011.

Xu, H.; Zhuang, J.; Wang, S.; Zhu, Z. Global Time-Energy Optimal Planning of Robot Trajectories. **Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation** pp. 4034–4039, 2009.

Yang, X.-S. **Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms**, 1 ed. Luniver Press, 115p, 2008.

Yang, X.-S. **Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms**. 2 ed. Luniver Press. 2010.

Yang, X.-S. **Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications**, John Wiley and Sons, 343p, 2010b.

Yang, J., Wang, H., Chen, W. Time-jerk Optimal Trajectory Planning for Robotic Manipulators. **Proceeding of the IEEE. International Conference on Robotics and Biomimetics**. pp. 2257–2262, 2013.

Yano, F.; Tooda, Y. Preferable movement of a multi-joint robot arm using genetic algorithm. **SPIE Conf. on Intelligent Robots and Computer Vision**, V. 3837, pp. 80-8, 1999.

ANEXO A – EQUACIONAMENTOS UTILIZADOS NO CÁLCULO DO MODELO DINÂMICO DO RPC

Neste anexo são apresentados os equacionamentos de cálculo das matrizes dos efeitos inerciais, dos efeitos centrífugos e de Coriolis do RPC, utilizados no modelo dinâmico do RPC (Equação 4.32).

Os elementos que compõem a matriz dos efeitos inerciais do RPC (Equação 4.33) podem ser obtidos em Sarmanho, 2014, e são definidos como:

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= 7,8597d_3 - 4,9932e^{-4}c\theta_4s\theta_4 + 0,0245(c\theta_4)^2 + 0,2606d_3c\theta_4 - 0,0108d_3s\theta_4 \\
 &- 2,6734e^{-5}(c\theta_4)^2(c\theta_5)^2 + 13,057d_3^2 + 1,2977e^{-7}(c\theta_4)^2s\theta_5c\theta_5 + 1,9574e^{-4}d_3s\theta_4c\theta_5 \\
 &- 8,4819e^{-4}d_3s\theta_4s\theta_5 + 7,6202e^{-6}s\theta_4c\theta_4c\theta_5 - 2,3235e^{-4}s\theta_4c\theta_4c\theta_5 + 3,4969 \\
 h_{13} = h_{31} &= -4,2410e^{-4}c\theta_5 - 9,7868e^{-5}s\theta_5 - 0,4291 \\
 h_{14} = h_{41} &= 1,1618e^{-4}s\theta_4c\theta_5 - 5,5348e^{-5}s\theta_4 - 4,4134e^{-6}c\theta_4 \\
 &+ 3,8101e^{-6}s\theta_4c\theta_5 - 1,2977e^{-7}c\theta_4(c\theta_5)^2 - 2,6734e^{-7}c\theta_4s\theta_5c\theta_5 \\
 h_{15} = h_{51} &= 1,1730e^{-4}s\theta_4 + 3,8101e^{-6}c\theta_4c\theta_5 - 1,1618e^{-4}c\theta_4s\theta_5 + 9,7868e^{-5}d_3c\theta_5 \\
 &- 4,2410e^{-4}d_3s\theta_5 \\
 h_{24} = h_{42} &= 0,1303c\theta_4 - 0,0054s\theta_4 + 9,7868e^{-5}s\theta_4c\theta_5 - 4,2410s\theta_4c\theta_5 \\
 h_{25} = h_{52} &= 4,2410e^{-4}c\theta_4c\theta_5 + 9,7869e^{-5}c\theta_4s\theta_5 \\
 h_{34} = h_{43} &= 9,7868e^{-5}c\theta_4c\theta_5 - 0,1303s\theta_4 - 0,0054c\theta_4 - 4,2410e^{-4}c\theta_4s\theta_5
 \end{aligned}$$

Os elementos que compõem a matriz dos efeitos centrífugos e de Coriolis (Equação 4.34) podem ser obtidos em Sarmanho, 2014, e são definidos como:

$$\begin{aligned}
 c_{13} &= \dot{\theta}_1(26,1141d_3 + 0,2606c\theta_4 - 0,0108c\theta_4 + 1,9574e^{-4}s\theta_4c\theta_5 - 8,4819e^{-4}s\theta_4s\theta_5 \\
 &+ 7,8597) \\
 c_{14} &= -\dot{\theta}_1(7,6202e^{-6}c\theta_5 - 2,3235e^{-4}s\theta_5 + 0,049s\theta_4c\theta_4 + 9,9568e^{-4}(c\theta_4)^2 \\
 &- 1,5240e^{-5}(c\theta_4)^2c\theta_5 + 4,6471e^{-4}(c\theta_4)^2s\theta_5 + 0,0108d_3c\theta_4 \\
 &- 5,3468e^{-5}c\theta_4(c\theta_5)^2s\theta_4) - 1,9574e^{-4}d_3c\theta_4c\theta_5 + 8,4819e^{-4}d_3c\theta_4c\theta_5 \\
 &+ 2,5955e^{-7}s\theta_4c\theta_4c\theta_5 - 2,5955e^{-4}) + \dot{\theta}_4(4,4134e^{-6}s\theta_4 - 5,5348e^{-5}c\theta_4 \\
 &+ 1,1618e^{-4}c\theta_4c\theta_5 + 3,8101e^{-6}c\theta_4c\theta_5 + 1,2977e^{-7}(c\theta_5)^2s\theta_5 \\
 &+ 2,6734e^{-5}s\theta_4s\theta_5c\theta_5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{15} &= 1,4403e^{-4}\dot{\theta}_4 c\theta_4 - 2,2977e^{-7}\dot{\theta}_1 (c\theta_4)^2 - 4,2410e^{-4}d_3\dot{\theta}_5 c\theta_5 - 9,7868e^{-5}d_3\dot{\theta}_5 s\theta_5 \\
&\quad + 2,5955e^{-7}\dot{\theta}_1 (c\theta_4)^2 (c\theta_5)^2 - 1,1618e^{-4}\theta_5 c\theta_4 c\theta_5 - 3,8101e^{-6}\theta_5 c\theta_4 s\theta_5 \\
&\quad - 5,3468e^{-4}\theta_4 c\theta_4 (c\theta_5)^2 - 1,9574e^{-4}d_3\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 \\
&\quad - 2,3235e^{-4}\theta_1 s\theta_4 c\theta_4 c\theta_5 + 2,5955e^{-7}\theta_4 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_5 - 7,6202e^{-6}\theta_1 c\theta_4 s\theta_5 \\
&\quad + 5,3468e^{-5}\dot{\theta}_1 (c\theta_4)^2 c\theta_5 s\theta_5 - 8,4819e^{-4}d_3\theta_1 s\theta_4 c\theta_5) \\
c_{24} &= -\dot{\theta}_4 (0,0054c\theta_4 + 0,1303s\theta_4 - 9,7868e^{-5}c\theta_4 c\theta_5 + 4,2410e^{-4}c\theta_4 s\theta_5) \\
c_{25} &= 9,7868e^{-5}\dot{\theta}_5 c\theta_4 c\theta_5 - 8,4819e^{-4}\theta_4 s\theta_4 c\theta_5 - 4,2410e^{-4}\theta_5 c\theta_4 s\theta_5 \\
&\quad - 1,9574e^{-4}\theta_4 s\theta_4 s\theta_5 \\
c_{31} &= -\dot{\theta}_1 (13,057d_3 + 0,1303c\theta_4 - 0,0054s\theta_4 + 9,7868e^{-5}s\theta_4 c\theta_5 - 4,2410e^{-4}s\theta_4 s\theta_5 \\
&\quad + 3,9298) \\
c_{34} &= -\dot{\theta}_4 (0,1303c\theta_4 - 0,0054s\theta_4 + 9,7868e^{-5}s\theta_4 c\theta_5 - 4,2410e^{-4}s\theta_4 s\theta_5) \\
c_{35} &= 8,4819e^{-4}\theta_1 s\theta_5 - 1,9574e^{-4}\theta_1 c\theta_5 - 8,4819e^{-4}\theta_4 c\theta_4 c\theta_5 - 1,9574e^{-4}\theta_4 c\theta_4 s\theta_5 - \\
&\quad 9,7868e^{-5}\dot{\theta}_5 s\theta_4 c\theta_5 + 4,2410e^{-4}\theta_5 s\theta_4 s\theta_5 \\
c_{41} &= \dot{\theta}_1 (3,8101e^{-6}c\theta_5 - 1,1618e^{-4}c\theta_5 + 0,0245s\theta_4 c\theta_4 + 4,9932e^{-4}(c\theta_4)^2 - \\
&\quad 7,6202e^{-6}(c\theta_4)^2 c\theta_5 + 2,3535e^{-4}(c\theta_4)^2 s\theta_5 + 0,0054d_3 c\theta_4 + 0,1303d_3 c\theta_4 - \\
&\quad 2,6734e^{-5}s\theta_4 s\theta_4 (c\theta_5)^2 - 9,7868e^{-5}d_3 c\theta_4 c\theta_5 + 4,2410e^{-4}d_3 c\theta_4 c\theta_5 + \\
&\quad 1,2977e^{-7}s\theta_4 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_5 - 2,4966e^{-4} \\
c_{45} &= \dot{\theta}_5 (3,8101e^{-6}c\theta_5 - 1,1618e^{-4}s\theta_5) - \dot{\theta}_1 (9,0562e^{-5}c\theta_4 - 7,6202e^{-6}s\theta_4 c\theta_5 + \\
&\quad 2,3235e^{-4}s\theta_4 s\theta_5 + 5,3468e^{-5}c\theta_4 (c\theta_5)^2 - 2,5955e^{-7}c\theta_4 s\theta_5 c\theta_5) - \dot{\theta}_4 (1,2977e^{-7}c(2\theta_5) + \\
&\quad 5,3468e^{-5}s\theta_5 c\theta_5) \\
c_{51} &= \dot{\theta}_1 (-1,2977e^{-7}(c\theta_4)^2 (c\theta_5)^2 - 2,6734e^{-5}(c\theta_4)^2 s\theta_5 c\theta_5 + 6,4887e^{-8}(c\theta_4)^2 \\
&\quad + 1,16618e^{-4}s\theta_4 c\theta_4 c\theta_5 + 3,8101e^{-6}s\theta_4 c\theta_4 s\theta_5 + 4,2410e^{-4}d_3 s\theta_4 c\theta_5 \\
&\quad + 9,7868e^{-5}d_3 s\theta_4 s\theta_5) \\
c_{53} &= 1,9574e^{-4}\dot{\theta}_1 c\theta_5 - 8,4819e^{-4}\dot{\theta}_1 s\theta_5 \\
c_{54} &= 1,2977e^{-7}\dot{\theta}_4 (c\theta_5)^2 - 6,4887e^{-8}\dot{\theta}_4 + 9,0562e^{-5}\theta_1 c\theta_4 - 7,6202e^{-6}\theta_1 s\theta_4 c\theta_5 \\
&\quad + 2,6734e^{-5}\theta_4 c\theta_5 s\theta_5 + 2,3235e^{-4}\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + 5,3468e^{-5}\theta_1 c\theta_4 (c\theta_5)^2 \\
&\quad - 2,5955e^{-7}\theta_1 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_5
\end{aligned}$$

ANEXO B – CÁLCULO DAS CONSTANTES UTILIZADAS NO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA INTERPOLAÇÃO POR B-SPLINES

Este Anexo reúne os equacionamentos apresentados por Mantovani, 2002 e Gasparetto e Zanotto, 2007, para o cálculo das constantes utilizadas no sistema de equações do problema de interpolação por *b-splines*, descrito na Equação (5.42). Esses equacionamentos são utilizados para expressar as equações relacionadas às condições iniciais e finais de aceleração e *jerk* em termos dos pontos de controle de posição P_i , possibilitando, assim, resolver o problema de interpolação por *b-splines*.

Para determinar as constantes relativas às condições iniciais de aceleração, a Equação (5.31) é, por conveniência, aqui reproduzida.

$$A_{in} = PA_0 = \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} (PV_1 - PV_0) \quad (\text{B.1})$$

Levando-se em conta que os termos PV_1 e PV_0 são determinados pela Equação (5.25), cujos subíndices são $i=1$ e $i=0$, respectivamente, e substituindo esses termos na Equação (B.1) em função dos pontos de controle de posição, pode-se obter:

$$A_{in} = PA_0 = \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} \left(\frac{p}{U_{p+2} - U_2} (P_2 - P_1) - \frac{p}{U_{p+1} - U_1} (P_1 - P_0) \right) \quad (\text{B.2})$$

Multiplicando os termos da Equação (A.2), obtém-se a Equação (B.3).

$$A_{in} = PA_0 = \frac{(p-1)p}{(Uv_p - Uv_1)(U_{p+1} - U_1)} P_0 - \frac{(p-1)p}{(Uv_p - Uv_1)(U_{p+1} - U_1)} P_1 - \frac{(p-1)p}{(Uv_p - Uv_1)(U_{p+2} - U_2)} P_1 + \frac{(p-1)p}{(Uv_p - Uv_1)(U_{p+2} - U_2)} P_2 \quad (\text{B.3})$$

Assim, a equação associada à condição inicial de aceleração é definida como:

$$k_1 P_0 - k_2 P_1 + k_3 P_2 = A_{in} \quad (\text{B.4})$$

sendo k_1 , k_2 e k_3 as expressões apresentadas nas Equações A.5, A.6 e A.7, respectivamente.

$$k_1 = \frac{(p-1)p}{(Uv_p - Uv_1)(U_{p+1} - U_1)} \quad (\text{B.5})$$

$$k_2 = \frac{(p-1)p}{(Uv_p - Uv_1)(U_{p+1} - U_1)} + \frac{(p-1)p}{(Uv_{p+1} - Uv_2)(U_{p+2} - U_2)} \quad (\text{B.6})$$

$$k_3 = \frac{(p-1)p}{(Uv_p - Uv_1)(U_{p+2} - U_2)} \quad (\text{B.7})$$

Para determinar as constantes relativas à condição final de aceleração, a Equação (5.32) é, por conveniência, também aqui reproduzida.

$$AV_{fim} = PA_{n-2} = \frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} (PV_{n-1} - PV_{n-2}) \quad (\text{B.8})$$

Considerando que os termos PV_{n-1} e PV_{n-2} são determinados pela Equação (5.25), cujos subíndices são $i=n-1$ e $i=n-2$, respectivamente, e substituindo esses termos na equação (B.8) em função dos pontos de controle de posição, obtém-se.

$$AV_{fim} = PA_{n-2} = \alpha \left(\frac{p}{U_{n+p} - U_n} (P_n - P_{n-1}) - \frac{p}{U_{n+p-1} - U_{n-1}} (P_{n-1} - P_{n-2}) \right) \quad (\text{B.9})$$

onde α é uma constante definida pela Equação (B.10).

$$\alpha = \frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} \quad (\text{B.10})$$

Multiplicando os termos da Equação (B.9) e considerando a constante α , obtém-se a Equação (B.11).

$$\begin{aligned} AV_{fim} &= PA_{n-2} \\ &= \alpha \frac{p}{U_{n+p-1} - U_{n-1}} P_{n-2} - \alpha \frac{p}{U_{n+p-1} - U_{n-1}} P_{n-1} \\ &\quad - \alpha \frac{p}{U_{n+p} - U_n} P_{n-1} + \alpha \frac{p}{U_{n+p} - U_n} P_n \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A equação associada à condição final de aceleração pode, portanto, ser expressa como:

$$k_{n-2}P_{n-2} - k_{n-1}P_{n-1} + k_nP_n = A_{fim} \quad (\text{B.12})$$

onde k_{n-2} , k_{n-1} e k_n são as expressões apresentadas nas Equações B.13, B.14 e B.15, respectivamente.

$$k_{n-2} = \alpha \frac{p}{Uq_{n+p} - Uq_n} \quad (\text{B.13})$$

$$k_{n-1} = \alpha \frac{p}{Uq_{n+p+1} - Uq_{n+1}} + \alpha \frac{p}{Uq_{n+p} - Uq_n} \quad (\text{B.14})$$

$$k_n = \alpha \frac{p}{Uq_{n+p+1} - Uq_{n+1}} \quad (\text{B.15})$$

Com a finalidade de descrever os equacionamentos relacionados às condições iniciais de *jerk*, a Equação (5.38) é, por conveniência, aqui reproduzida.

$$J_{in} = PJ_0 = \frac{p-2}{Ua_{p-1} - Ua_1} (PA_1 - PA_0) \quad (\text{B.16})$$

Sabendo-se que os termos PA_1 e PA_0 são determinados por meio da Equação (5.30), cujos subíndices são $i=1$ e $i=0$, respectivamente, e substituindo esses termos na Equação (B.16) em função dos pontos de controle de velocidade, pode-se obter:

$$J_{in} = PJ_0 = a1 \left(\frac{p-1}{Uv_{p+1} - Uv_2} (PV_2 - PV_1) - \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} (PV_1 - PV_0) \right) \quad (\text{B.17})$$

onde $a1$ é uma constante definida pela Equação (B.18):

$$a1 = \frac{p-2}{Ua_{p-1} - Ua_1} \quad (\text{B.18})$$

Multiplicando os termos da Equação (B.17) e considerando a constante $a1$, obtém-se a Equação (B.19).

$$J_{in} = PJ_0 = a1 \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} PV_0 - \left(a1 \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} + a1 \frac{p-1}{Uv_{p+1} - Uv_2} \right) PV_1 + a1 \frac{p-1}{Uv_{p+1} - Uv_2} PV_2 \quad (\text{B.19})$$

Isolando os termos que multiplicam os pontos de controle de velocidade (PV_0 , PV_1 e PV_2), pode-se determinar as constantes $a2$, $a3$ e $a4$, conforme as Equações B20 a B22.

$$a2 = a1 \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} \quad (\text{B.20})$$

$$a3 = a1 \frac{p-1}{Uv_p - Uv_1} + a1 \frac{p-1}{Uv_{p+1} - Uv_2} \quad (\text{B.21})$$

$$a4 = a1 \frac{p-1}{Uv_{p+1} - Uv_2} \quad (\text{B.22})$$

Reescrevendo os termos PV_0 , PV_1 e PV_2 em função dos pontos de controle de posição, os quais são determinados pela Equação (B.25), e das constantes $a2$, $a3$ e $a4$, a Equação (B.19) pode ser reescrita como segue.

$$J_{in} = PJ_0 = -a2 \frac{p}{U_{p+1} - U_1} P_0 + \left(a2 \frac{p}{U_{p+1} - U_1} + a3 \frac{p}{U_{p+2} - U_2} \right) P_1 - \left(a3 \frac{p}{U_{p+2} - U_2} + a4 \frac{p}{U_{p+3} - U_3} \right) P_2 + a4 \frac{p}{U_{p+3} - U_3} P_3 \quad (\text{B.23})$$

Portanto, a equação associada à condição inicial de *jerk* pode ser definida como:

$$J_{in} = PJ_0 = -G_1 P_0 + G_2 P_1 - G_3 P_2 + G_4 P_3 \quad (\text{B.24})$$

sendo G_1 , G_2 , G_3 e G_4 as expressões apresentadas nas Equações B.25, B.26, B.27 e B.28, respectivamente.

$$G_1 = a2 \frac{p}{U_{p+1} - U_1} \quad (\text{B.25})$$

$$G_2 = a2 \frac{p}{U_{p+1} - U_1} + a3 \frac{p}{U_{p+2} - U_2} \quad (\text{B.26})$$

$$G_3 = a3 \frac{p}{U_{p+2} - U_2} + a4 \frac{p}{U_{p+3} - U_3} \quad (\text{B.27})$$

$$G_4 = a4 \frac{p}{U_{p+3} - U_3} \quad (\text{B.28})$$

Com a finalidade de descrever os equacionamentos relacionados às condições finais de *jerk*, a Equação (5.39) é, por conveniência, aqui reproduzida.

$$J_{fim} = PJ_{n-3} = \frac{p-2}{Ua_{n+p-4} - Ua_{n-2}} (PA_{n-2} - PA_{n-3}) \quad (\text{B.29})$$

Levando em conta que os termos PA_{n-2} e PA_{n-3} são determinados pela Equação (5.37), cujos subíndices são $i=n-2$ e $i=n-3$, respectivamente, e substituindo esses termos na Equação (B.29) em função dos pontos de controle de velocidade, obtém-se.

$$\begin{aligned} J_{fim} = PJ_{n-3} &= \\ &= b1 \left(\frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} (PV_{n-1} - PV_{n-2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{p-1}{Uv_{n+p-3} - Uv_{n-2}} (PV_{n-2} - PV_{n-3}) \right) \end{aligned} \quad (B.30)$$

onde $b1$ é uma constante definida pela Equação (B.31):

$$b1 = \frac{p-2}{Ua_{n+p-4} - Ua_{n-2}} \quad (B.31)$$

Multiplicando os termos da Equação (A.30) e considerando a constante $b1$, obtém-se a Equação (B.32):

$$\begin{aligned} J_{fim} = PJ_{n-3} &= b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-3} - Uv_{n-2}} PV_{n-3} - b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} \\ &\quad - b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-3} - Uv_{n-2}} PV_{n-2} + b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} PV_{n-1} \end{aligned} \quad (B.32)$$

Isolando os termos que multiplicam os pontos de controle de velocidade (PV_{n-3} , PV_{n-2} e PV_{n-1}), pode-se determinar as constantes $b2$, $b3$ e $b4$, conforme as Equações A33 a A35.

$$b2 = b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-3} - Uv_{n-2}} \quad (B.33)$$

$$b3 = b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} + b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-3} - Uv_{n-2}} \quad (B.34)$$

$$b4 = b1 \frac{p-1}{Uv_{n+p-2} - Uv_{n-1}} \quad (B.35)$$

Reescrevendo os termos PV_{n-1} , PV_{n-2} e PV_{n-3} em função dos pontos de controle de posição, os quais são determinados pela Equação (5.26), e das constantes $b2$, $b3$ e $b4$, a Equação (A.32) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
J_{fim} = PJ_{n-3} = & b4 \frac{p}{U_{n+p} - U_n} P_n - b3 \frac{p}{U_{n+p-1} - U_{n-1}} P_{n-1} \\
& - b4 \frac{p}{U_{n+p} - U_n} P_{n-1} + b3 \frac{p}{U_{n+p-1} - U_{n-1}} P_{n-2} \\
& + b2 \frac{p}{U_{n+p-2} - U_{n-1}} P_{n-2} - b2 \frac{p}{U_{n+p-2} - U_{n-2}} P_{n-3}
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Assim, a equação associada à condição final de *jerk* pode ser definida como:

$$J_{fim} = PJ_{n-3} = G_{n-3}P_n - G_{n-2}P_{n-1} + G_{n-1}P_{n-2} - G_nP_{n-3} \tag{B.37}$$

sendo G_n, G_{n-1}, G_{n-2} e G_{n-3} as expressões apresentadas nas Equações B.38, B.39, B.40 e B.41, respectivamente.

$$G_{n-3} = b4 \frac{p}{U_{n+p} - U_n} \tag{B.38}$$

$$G_{n-2} = b3 \frac{p}{U_{n+p-1} - U_{n-1}} + b4 \frac{p}{U_{n+p} - U_n} \tag{B.39}$$

$$G_{n-1} = b3 \frac{p}{U_{n+p-1} - U_{n-1}} + b2 \frac{p}{U_{n+p-2} - U_{n-2}} \tag{B.40}$$

$$G_n = b2 \frac{p}{U_{n+p-2} - U_{n-2}} \tag{B.41}$$

ANEXO C – RESULTADO DA TRAJETÓRIA T5 COM OS ALGORITMOS FMA, PSO E AG

Este Anexo apresenta os resultados para T5 por meio dos algoritmos FMA, PSO e AG, conforme discutido na Seção 6.3.3.

- **Algoritmo FMA:**

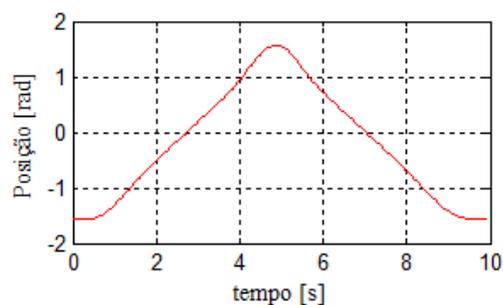
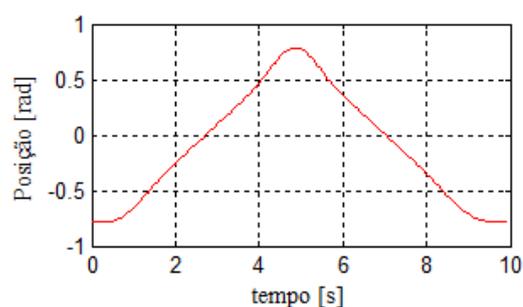
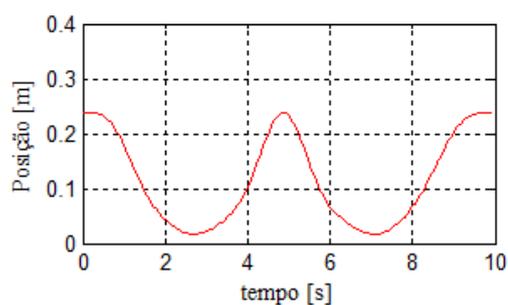
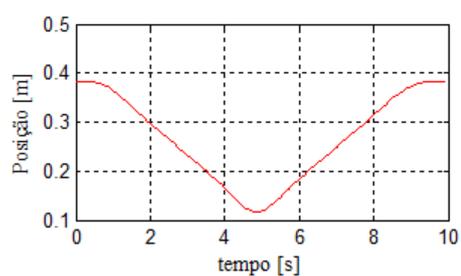
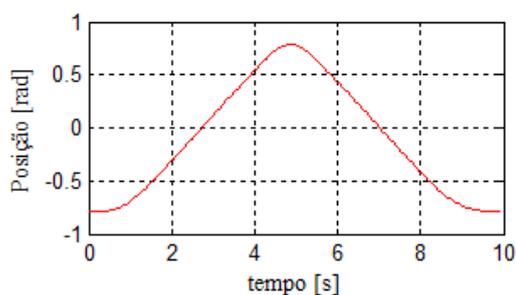
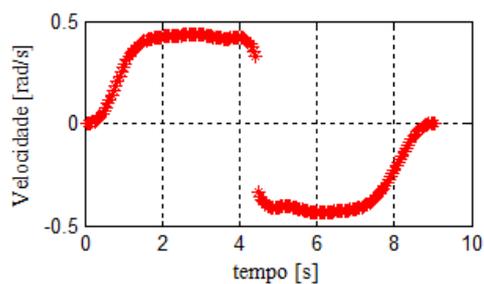
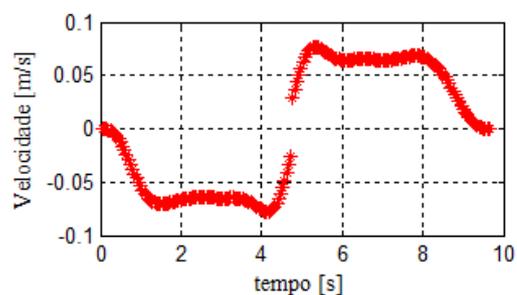


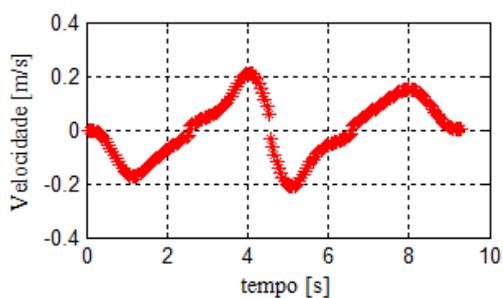
Figura C.1 – Trajetória T5 (posição) obtida com o algoritmo FMA



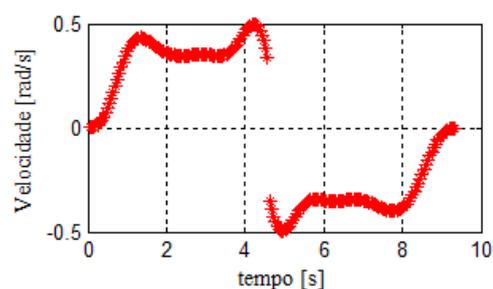
1° GDL



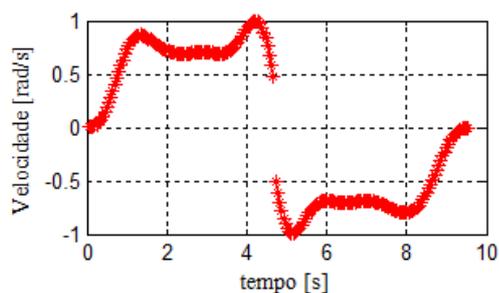
2° GDL



3° GDL

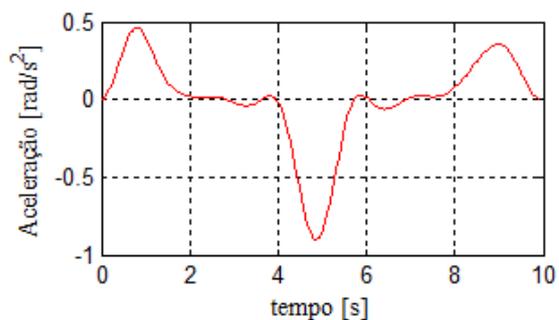


4° GDL

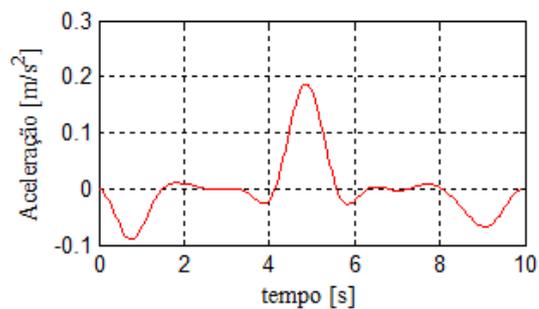


5° GDL

Figura C.2 - Trajetória T5 (velocidade) obtida com o algoritmo FMA



1° GDL



2° GDL

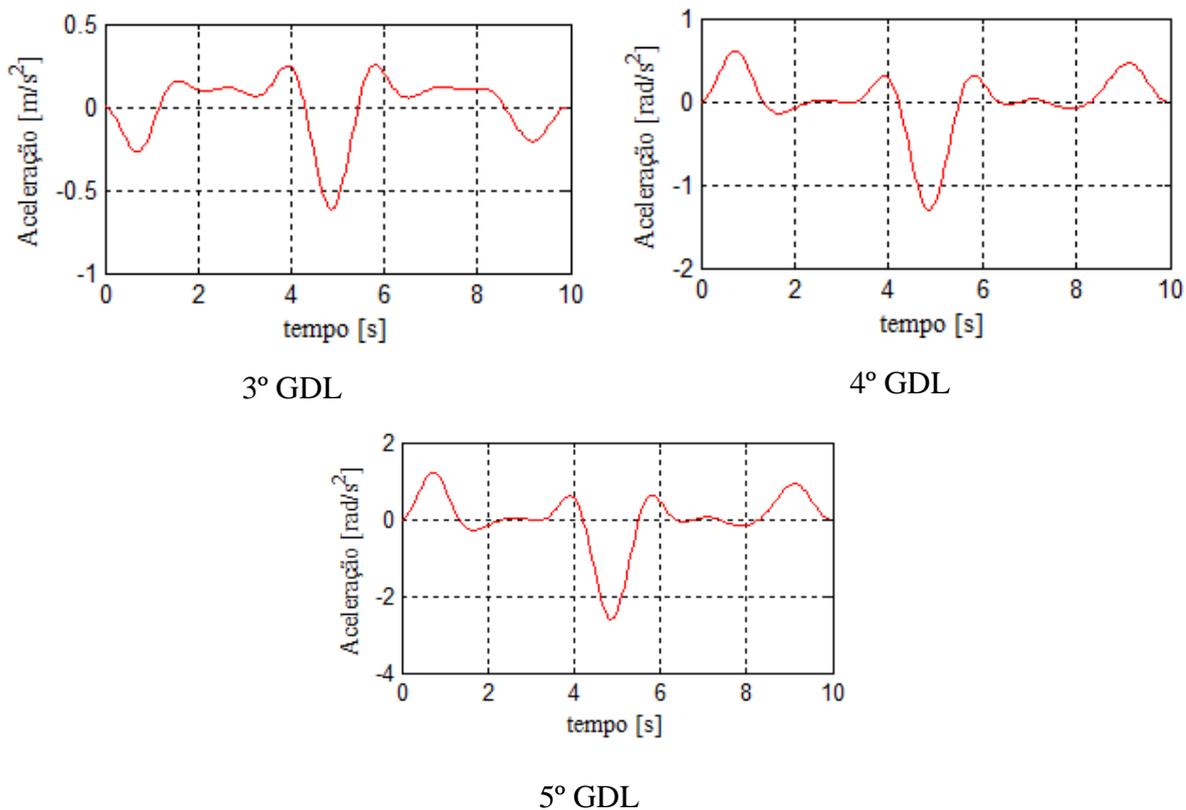
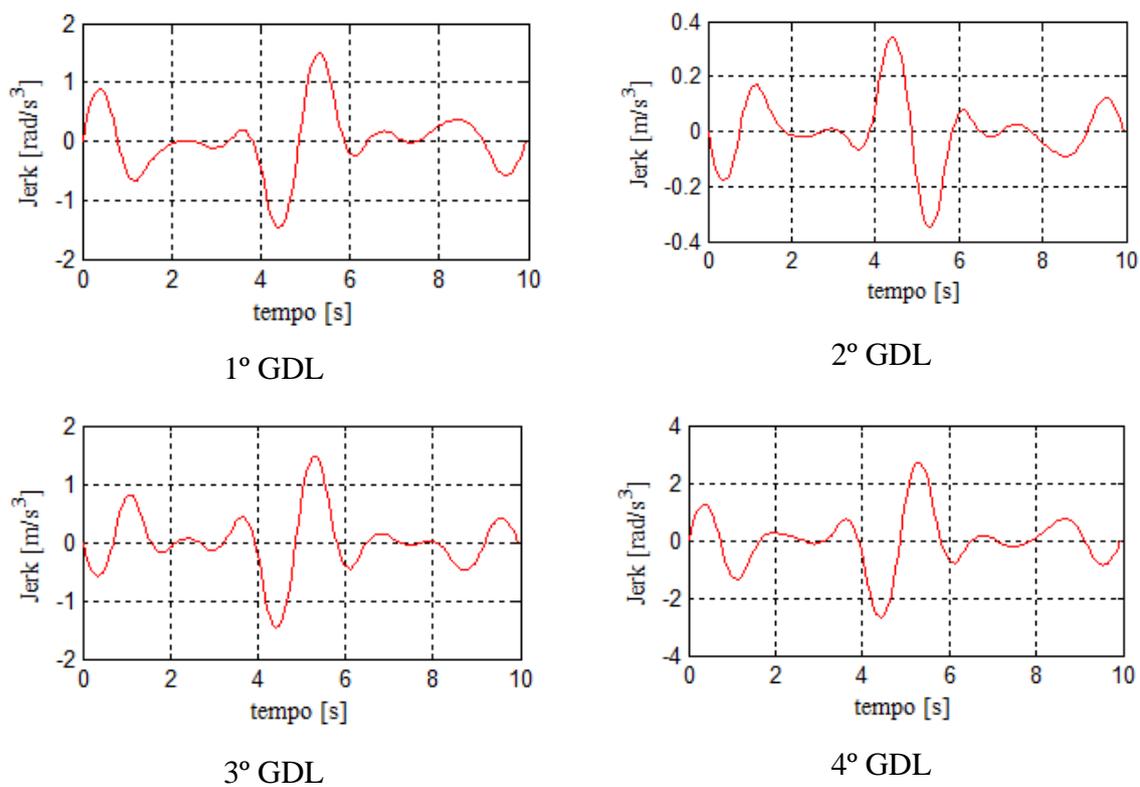
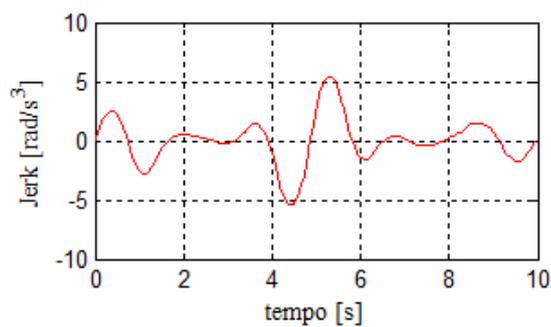
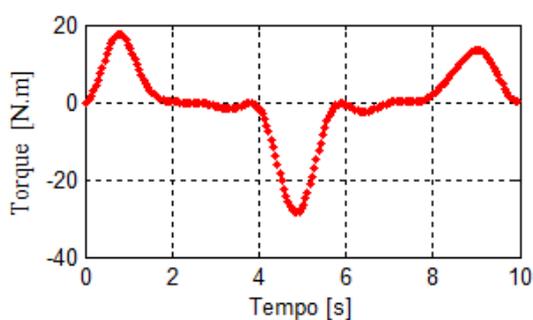


Figura C.3 - Trajetória T5 (aceleração) obtida com o algoritmo FMA

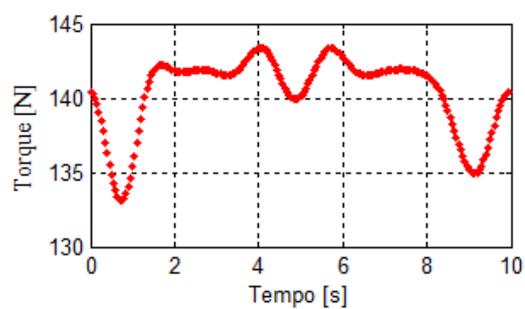




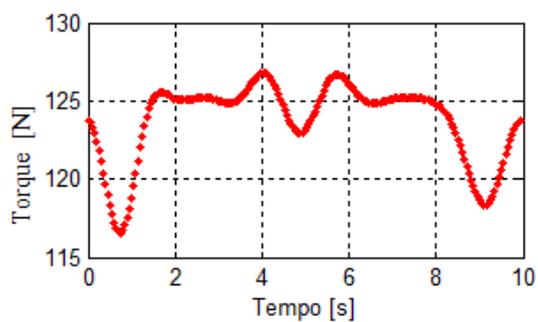
5° GDL

Figura C.4 - Trajetória T5 (*jerk*) obtida com o algoritmo FMA

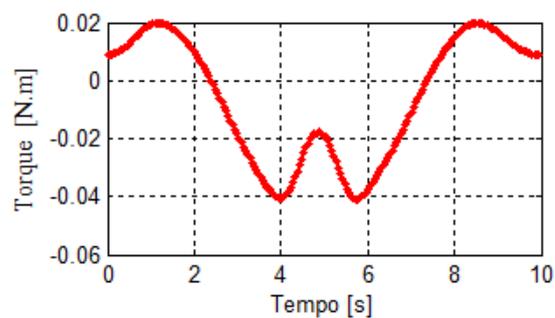
1° GDL



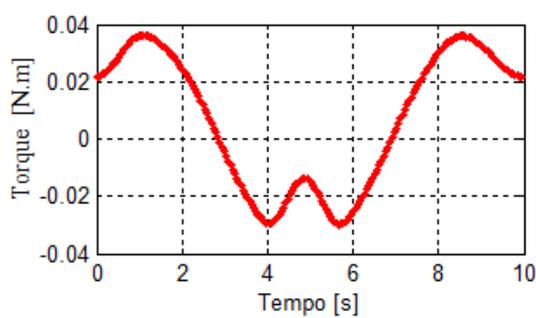
2° GDL



3° GDL



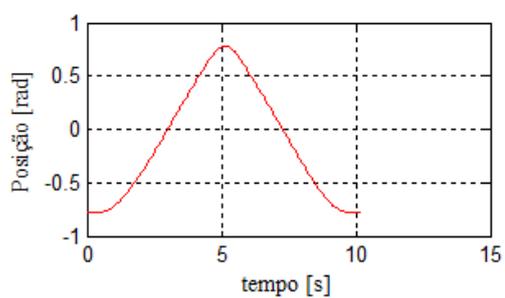
4° GDL



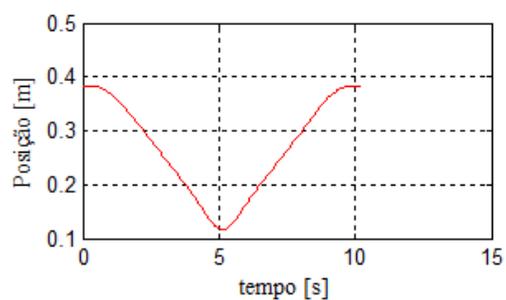
5° GDL

Figura C.5 - Trajetória T5 (torque) obtida com o algoritmo FMA

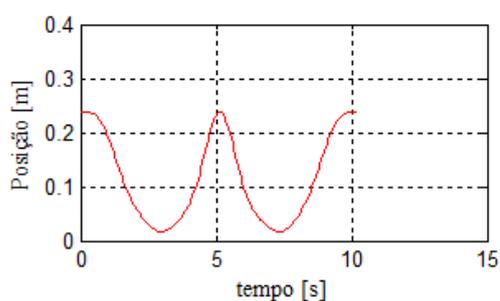
- **Algoritmo PSO:**



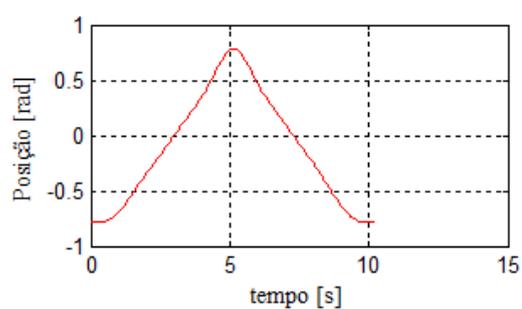
1° GDL



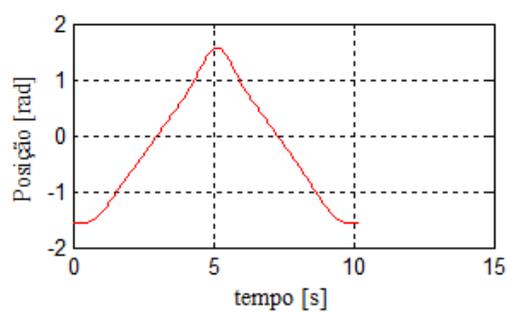
2° GDL



3° GDL

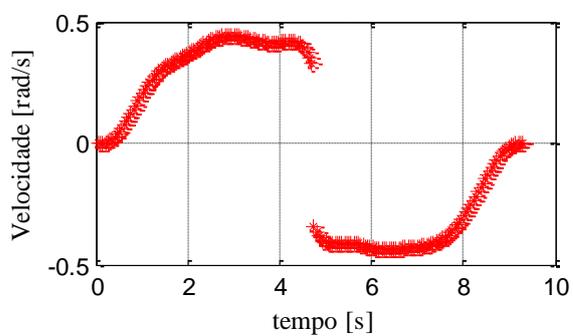


4° GDL

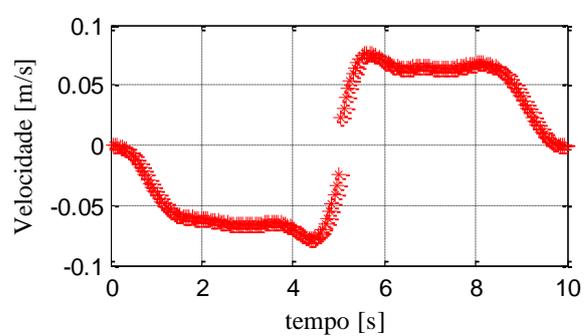


5° GDL

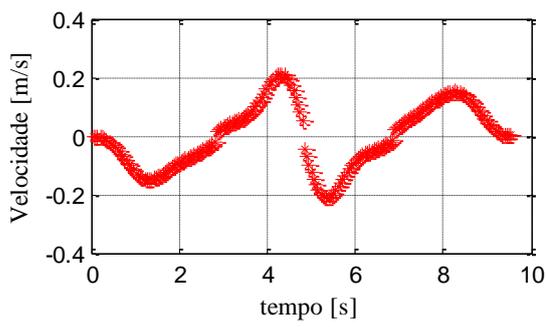
Figura C.6 - Trajetória T5 (posição) obtida com o algoritmo PSO



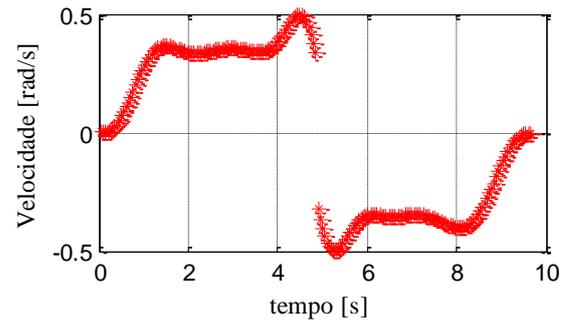
1° GDL



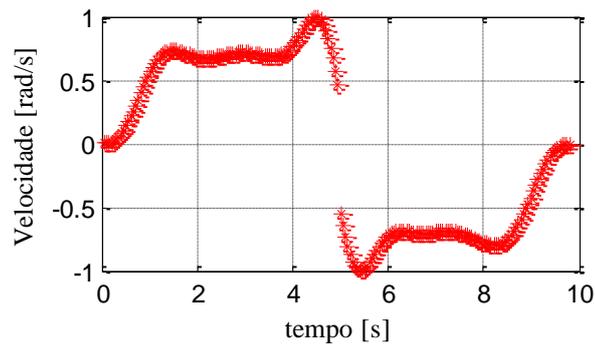
2° GDL



3° GDL

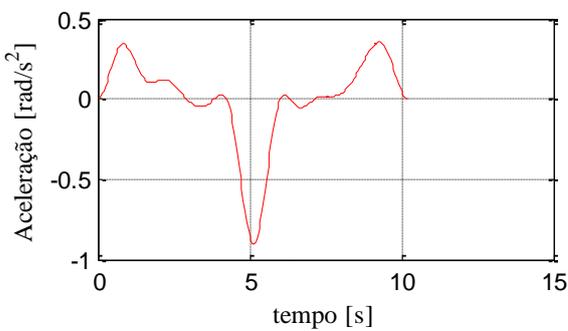


4° GDL

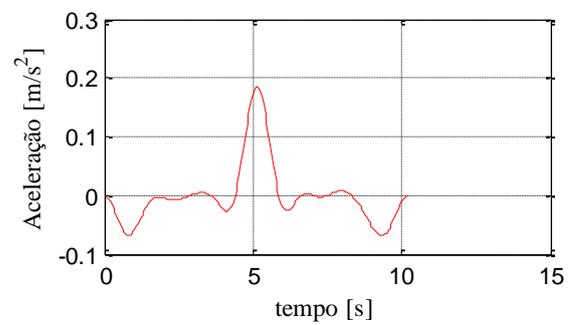


5° GDL

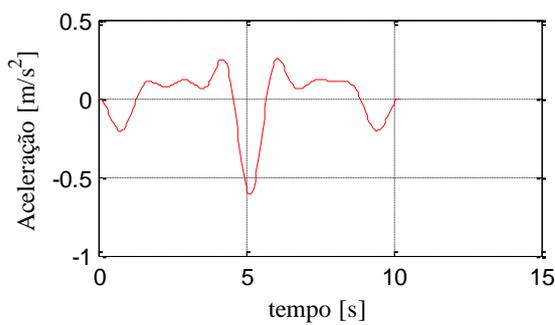
Figura C.7 - Trajetória T5 (velocidade) obtida com o algoritmo PSO



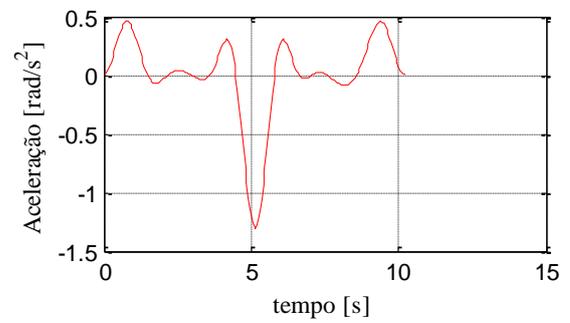
1° GDL



2° GDL



3° GDL



4° GDL

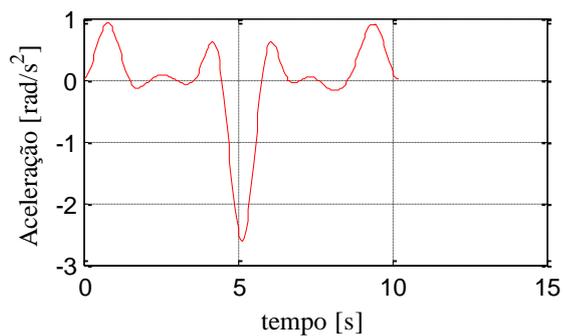


Figura C.8 - Trajetória T5 (aceleração) obtida com o algoritmo PSO

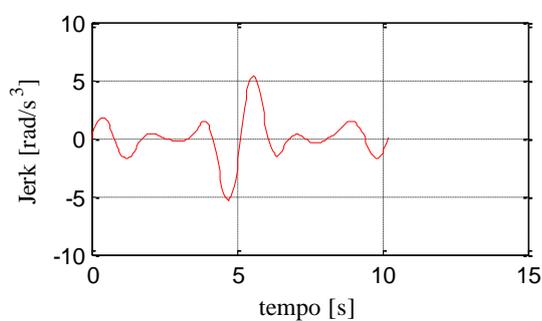
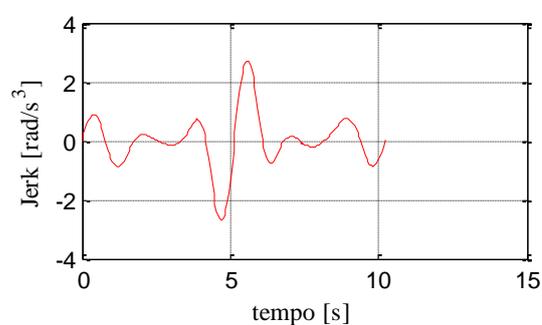
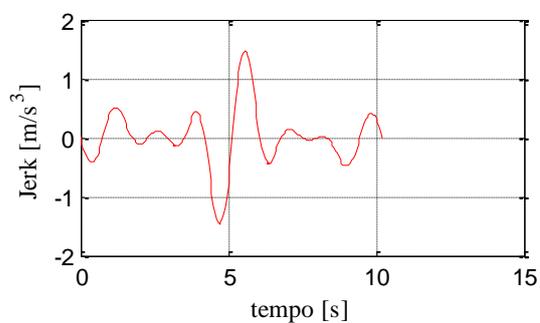
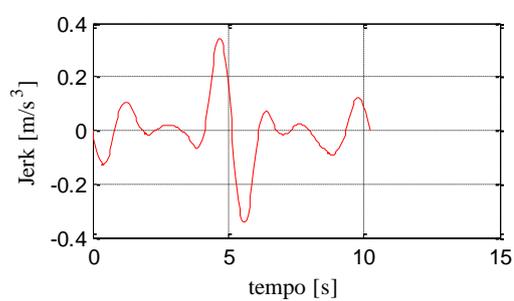
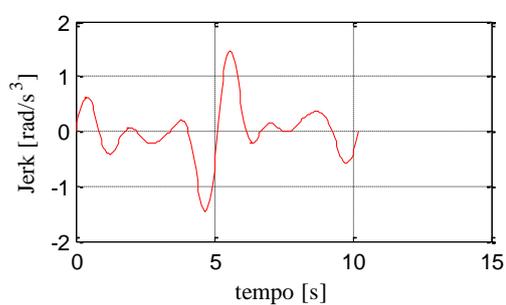
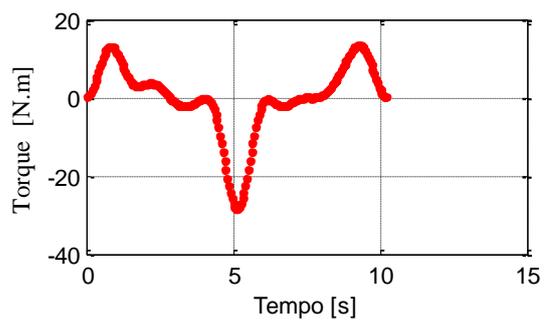
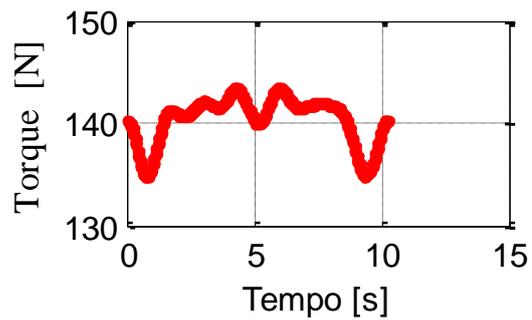


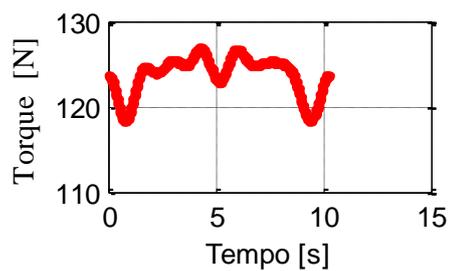
Figura C.9 - Trajetória T5 (*jerk*) obtida com o algoritmo PSO



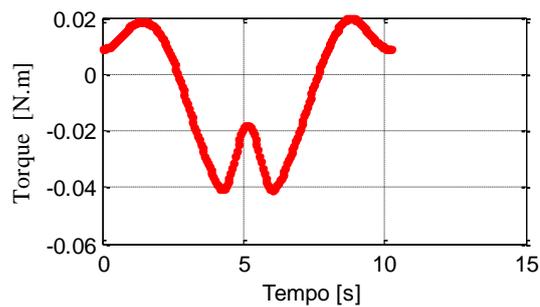
1° GDL



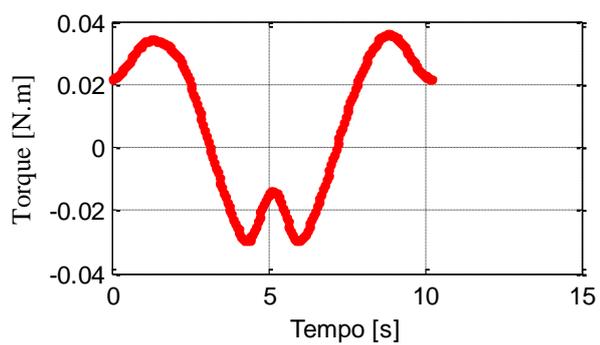
2° GDL



3° GDL



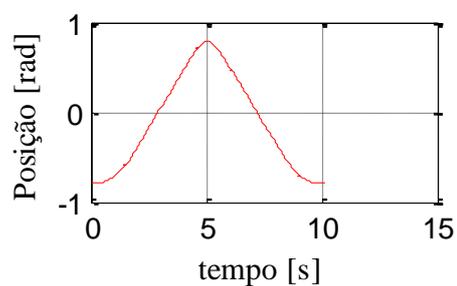
4° GDL



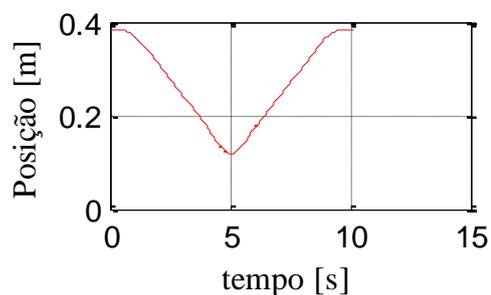
5° GDL

Figura C.10 - Trajetória T5 (torque) obtida com o algoritmo PSO

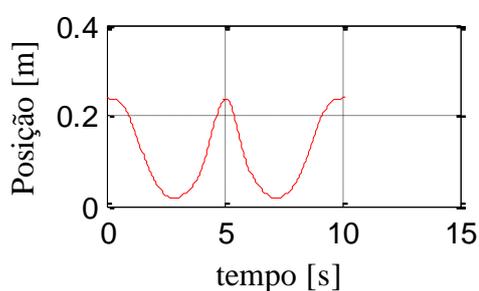
- **Algoritmo AG:**



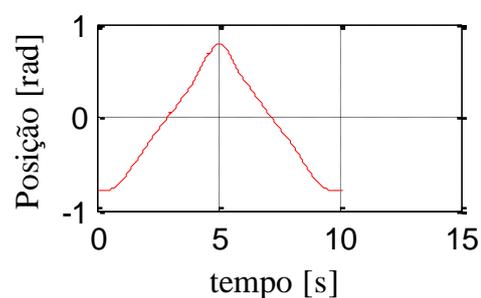
1° GDL



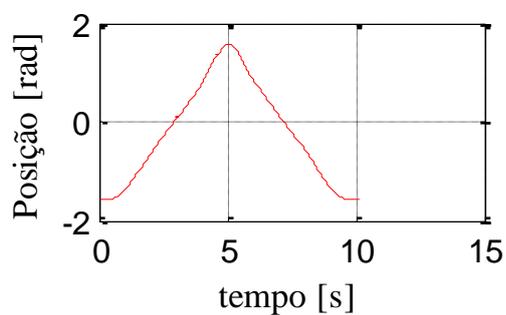
2° GDL



3° GDL

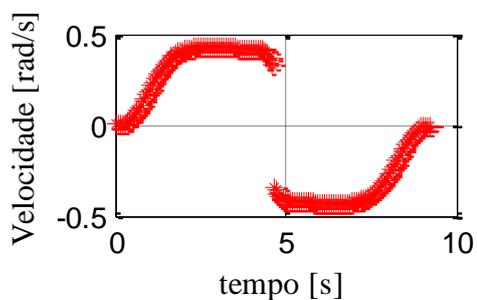


4° GDL

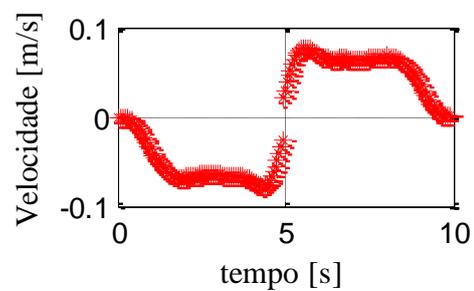


5° GDL

Figura C.11 - Trajetória T5 (posição) obtida com o algoritmo AG



1° GDL



2° GDL

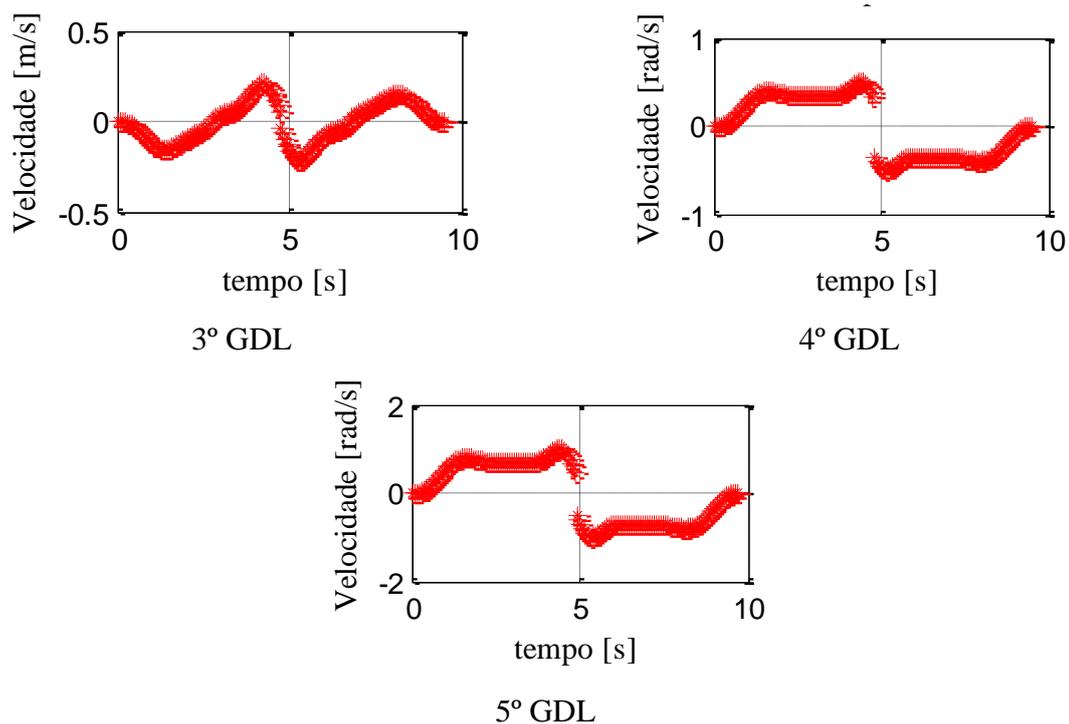
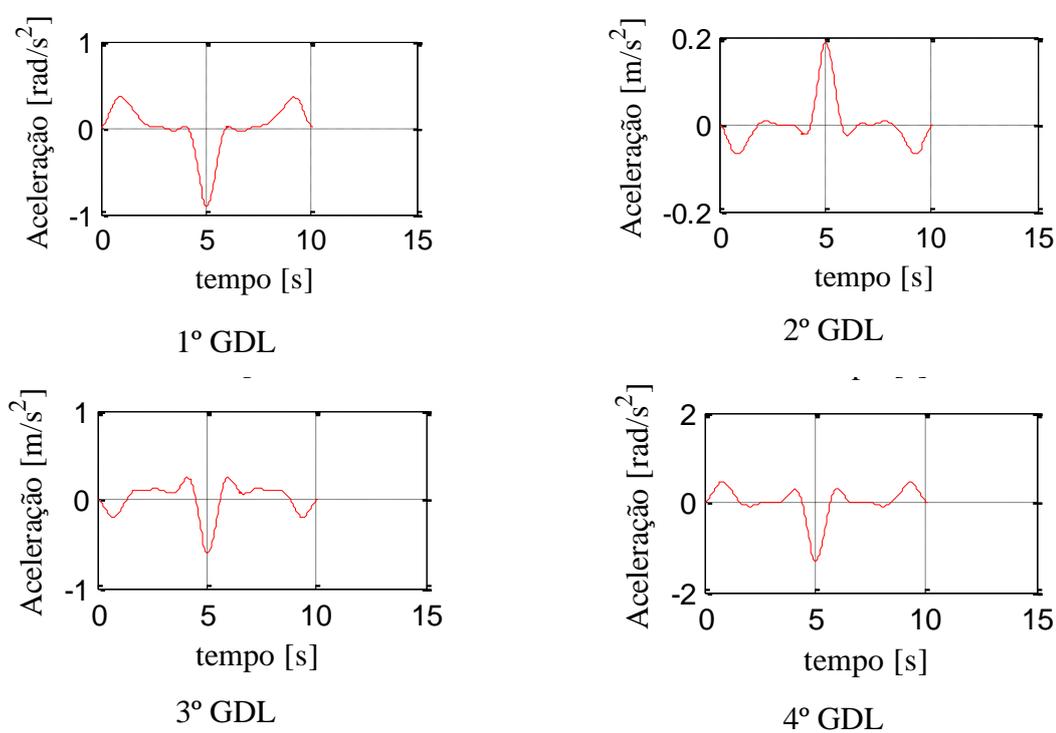
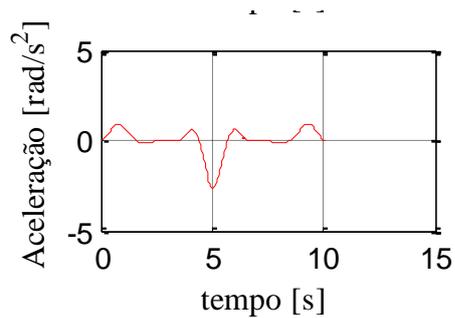


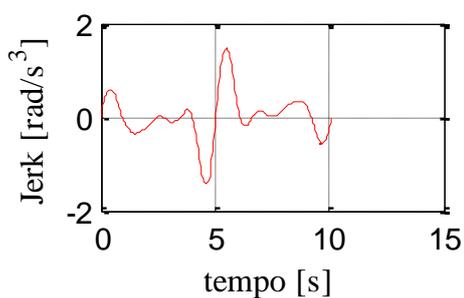
Figura C.12 - Trajetória T5 (velocidade) obtida com o algoritmo AG



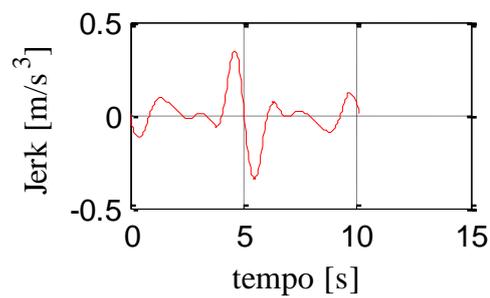


5° GDL

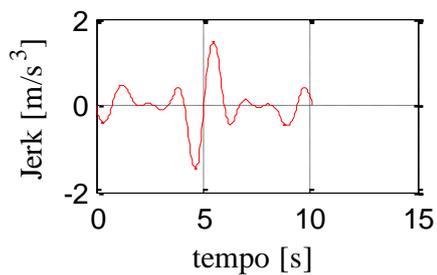
Figura C.13 - Trajetória T5 (aceleração) obtida com o algoritmo AG



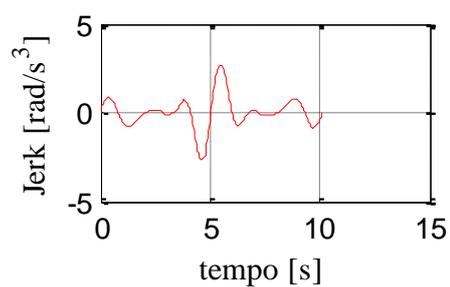
1° GDL



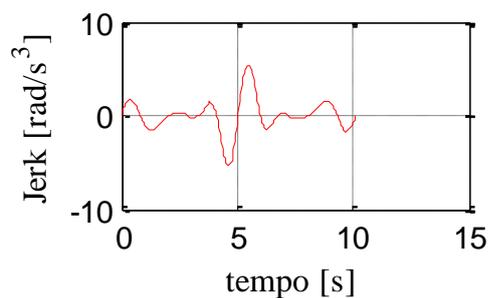
2° GDL



3° GDL



4° GDL



5° GDL

Figura C.14 - Trajetória T5 (*jerk*) obtida com o algoritmo AG

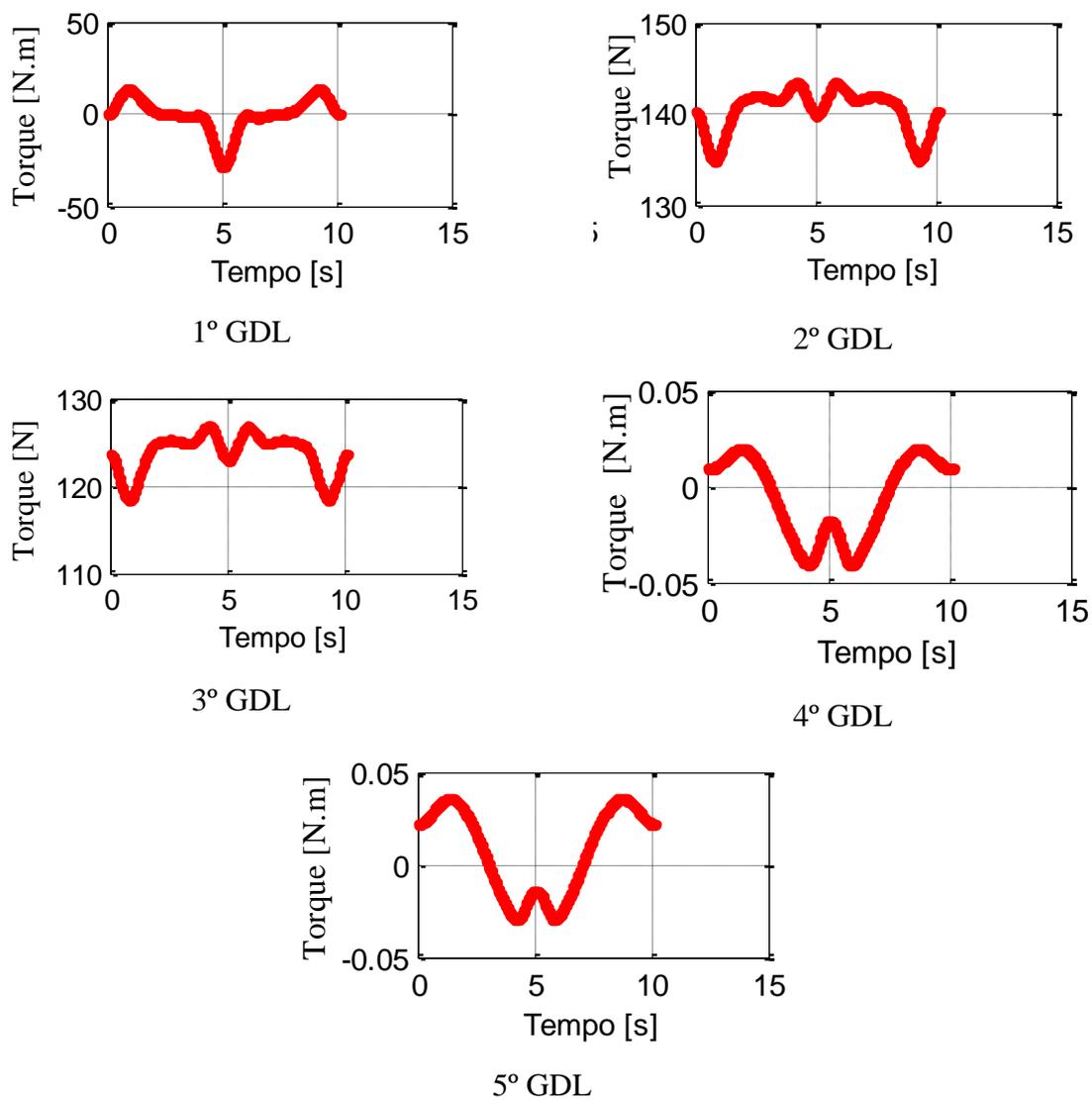


Figura C.15 - Trajetória T5 (torque) obtida com o algoritmo AG