

## Avaliação de Propriedades Radiativas em Meios Homogêneos Unidimensionais: Reflectância e Transmitância

S.R. CROMIANSKI<sup>1</sup>, M. CAMARGO<sup>2</sup>, P. RODRIGUES<sup>2\*</sup> e L.B. BARICHELLO<sup>3</sup>

Recebido em 12 janeiro, 2017 / Aceito em 27 agosto, 2017

**RESUMO.** Neste trabalho é derivada uma solução para a equação de transferência radiativa em meio homogêneo unidimensional, buscando avaliar propriedades como reflectância e transmitância do meio, que podem, por exemplo, estar associadas à caracterização de uma vegetação. Resultados numéricos obtidos com o método analítico de ordenadas discretas (ADO), para diferentes formulações das condições de contorno do problema, são discutidos e comparados aos de outros trabalhos disponíveis na literatura. A análise dos resultados mostra que a formulação ADO é rápida e precisa.

**Palavras-chave:** método de ordenadas discretas, reflectância, transmitância.

### 1 INTRODUÇÃO

O entendimento das formas de interação da radiação solar com vegetações é fundamental para a interpretação de dados de sensoriamento remoto, para o desenvolvimento de metodologias de análise das informações de monitoramentos quantitativos e qualitativos e para a criação de novos sensores. A parte do organismo vegetal envolvida nessas interações é denominada dossel, formado por um conjunto estruturado de folhas, caules, espigas e flores, conforme o tipo e as condições da vegetação. Um determinado dossel é caracterizado pela sua constituição, pelo comportamento espectral de seus componentes, sua estrutura interna e sua organização no espaço [13].

Estudos buscam modelar a transferência radiativa em copas de vegetações densas, utilizando a equação linear de Boltzmann particularmente para avaliação de propriedades como reflectância e transmitância nos dosséis. Especificações na elaboração dos modelos consideram formulações

---

\*Autor correspondente: Patrícia Rodrigues – E-mail: patricia@ufsm.br

<sup>1</sup> Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91509-900 Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: sol.cromianski@gmail.com

<sup>2</sup> Departamento de Engenharia e Tecnologia Ambiental, UFSM – Universidade Federal de Santa Maria, 98400-000 Frederico Westphalen, RS, Brasil. E-mail: mariza@ufsm.br

<sup>3</sup> Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91509-900 Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: lbaric@mat.ufrgs.br

em meio homogêneo, unidimensional, com espalhamento anisotrópico e com invariância rotacional do elemento de dispersão básico (folha do dossel) [7]. Outros autores consideram que no transporte de fótons em dosséis, além de se admitir que a direcionalidade do elemento de dispersão básico torna o meio inerentemente anisotrópico, também há que se procurar introduzir características especiais na definição do núcleo de espalhamento [11, 10, 12].

Partindo de conceitos fundamentais que configuram a elaboração de tais modelos matemáticos, neste trabalho, usamos a formulação unidimensional, para meio homogêneo, da equação de transferência radiativa, cuja solução é determinada pela aplicação do método analítico de ordenadas discretas (ADO) [6] e chegamos ao cálculo de densidade de radiação, além de propriedades como reflectância (razão entre a energia radiante refletida e a energia radiante incidente) e transmitância (razão entre a energia radiante transmitida e a energia radiante incidente) com interesse futuro na caracterização de vegetações.

Nas referências [2], [3] e [8] já foram testadas aplicações do método ADO na resolução da equação de transferência radiativa em meio homogêneo unidimensional, sendo que neste trabalho propomos ampliar tais abordagens incluindo o equacionamento do sistema pelo qual se obtém as constantes necessárias à composição da solução geral do problema. Em particular, apresentamos casos de reflexão especular e difusa no contorno, sendo esta a forma mais geral. A implementação da solução ADO neste trabalho está especialmente voltada ao cálculo de reflectância e transmitância, investigada preliminarmente na referência [8] mas sem sucesso para aproximações em ordenadas discretas de baixa ordem ( $N < 10$ ).

Assim, estruturamos este texto de forma a especificar primeiramente a caracterização do problema (Seção 1), e na seqüência (Seção 2) apresentamos a solução obtida mediante aplicação do método de ordenadas discretas analítico. Resultados numéricos de cálculos de densidade de radiação, reflectância e transmitância para diferentes formulações das condições de contorno do meio são discutidos na Seção 3, e as conclusões e possibilidades de continuidade do trabalho são mencionadas na Seção 4.

## 1.1 Formulação do Problema

Consideramos a formulação unidimensional da equação de transferência radiativa em meio homogêneo [3]

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu', \quad (1.1)$$

onde  $I(\tau, \mu)$  é a intensidade de radiação,  $\tau \in (0, \tau_0)$  é a variável óptica (adimensional),  $\tau_0$  é a espessura óptica do meio plano-paralelo,  $\mu \in [-1, 1]$  é o cosseno do ângulo polar medido a partir do eixo  $\tau$  positivo,  $\varpi \in [0, 1]$  é o albedo para o espalhamento simples (relação entre o coeficiente de espalhamento e o coeficiente de extinção). Os  $\beta_s$  são os coeficientes da expansão

da função de fase escrita em termos de polinômios de Legendre, e podem ser obtidos por uma fórmula recursiva [9],

$$\beta_l = \left(\frac{2l+1}{2l-1}\right) \left(\frac{L+1-l}{L+1+l}\right) \beta_{l-1},$$

para  $l = 1, 2, \dots, L$ , com  $\beta_0 = 1$ , sendo  $L$  o grau de anisotropia do problema.

Estamos considerando a solução da equação (1.1) sujeita às condições de contorno

$$I(0, \mu) = F_1(\mu) + \rho_1^s I(0, -\mu) + 2\rho_1^d \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu', \tag{1.2}$$

$$I(\tau_0, -\mu) = F_2(\mu) + \rho_2^s I(\tau_0, \mu) + 2\rho_2^d \int_0^1 I(\tau_0, \mu') \mu' d\mu', \tag{1.3}$$

para  $\mu \in (0, 1]$ ,  $F_1(\mu)$  e  $F_2(\mu)$  são conhecidas e referem-se à distribuição de radiação incidente em ambas as fronteiras do meio,  $\rho_1^s$  e  $\rho_2^s$  são os coeficientes de reflexão especular e  $\rho_1^d$  e  $\rho_2^d$  são os coeficientes de reflexão difusa.

## 2 SOLUÇÃO EM ORDENADAS DISCRETAS

De acordo com [3] e [6], para se obter uma solução mediante a aplicação do método ADO, reescrevemos o termo integral da equação (1.1) como

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) \int_0^1 P_l(\mu') [I(\tau, \mu') + (-1)^l I(\tau, -\mu')] d\mu'. \tag{2.1}$$

Assim, a versão em ordenadas discretas da equação (2.1) fica escrita como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para  $i = 1, 2, \dots, N$ , na forma

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu_i) + I(\tau, \mu_i) = \\ \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) \sum_{k=1}^N \omega_k P_l(\mu_k) [I(\tau, \mu_k) + (-1)^l I(\tau, -\mu_k)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

e

$$\begin{aligned} -\mu_i \frac{d}{d\tau} I(\tau, -\mu_i) + I(\tau, -\mu_i) = \\ \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) \sum_{k=1}^N \omega_k P_l(\mu_k) [I(\tau, -\mu_k) + (-1)^l I(\tau, \mu_k)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

sendo  $\mu_k$  e  $\omega_k$  os respectivos nós e pesos do esquema de quadratura (arbitrário), com  $N$  pontos, definido sob o intervalo  $(0, 1]$ .

Buscando resolver o sistema anterior, supomos uma solução escrita em termos de uma função exponencial

$$I(\tau, \pm\mu_i) = \phi(v, \pm\mu_i) e^{-\tau/v}. \tag{2.4}$$

Substituindo a equação (2.4) nas equações (2.2) e (2.3) obtemos

$$\left( \mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_+(v) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [\Phi_+(v) + (-1)^l \Phi_-(v)] \quad (2.5)$$

e

$$\left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_-(v) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [\Phi_-(v) + (-1)^l \Phi_+(v)], \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{I}_N$  é a matriz identidade de ordem  $N \times N$ ,  $T$  denota a operação transposta,

$$\Phi_{\pm}(v) = [\phi(v, \pm\mu_1) \phi(v, \pm\mu_2) \cdots \phi(v, \pm\mu_N)]^T,$$

$$\Pi(l) = [P_l(\mu_1) P_l(\mu_2) \cdots P_l(\mu_N)]^T,$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N\}$$

e ainda

$$\mathbf{W} = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N\}.$$

Somando as equações (2.5) e (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_+(v) + \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_-(v) = \\ & \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [\Phi_+(v) + (-1)^l \Phi_+(v) + \Phi_-(v) + (-1)^l \Phi_-(v)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definindo os vetores  $N \times 1$

$$\mathbf{U} = \Phi_+(v) + \Phi_-(v) \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{V} = \Phi_+(v) - \Phi_-(v) \quad (2.9)$$

passamos a reescrever a equação (2.7) na forma

$$\mathbf{U} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \mathbf{V} = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 + (-1)^l] \mathbf{U}$$

ou

$$\left( \mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 + (-1)^l] \right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{U} = \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \mathbf{V}. \quad (2.10)$$

A partir da equação (2.10), definimos

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{U}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{V} \quad (2.12)$$

e

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 + (-1)^l] \right) \mathbf{M}^{-1},$$

desta forma obtemos

$$\mathbf{E}\mathbf{X} = \frac{1}{\nu} \mathbf{Y}. \tag{2.13}$$

Analogamente, subtraindo as equações (2.5) de (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_+(\nu) - \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_-(\nu) = \\ & \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [\Phi_+(\nu) - (-1)^l \Phi_+(\nu) - \Phi_-(\nu) + (-1)^l \Phi_-(\nu)], \end{aligned}$$

e utilizando as equações (2.8) e (2.9) escrevemos a expressão anterior na forma

$$\mathbf{V} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M}\mathbf{U} = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 - (-1)^l] \mathbf{V}$$

ou

$$\left( \mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 - (-1)^l] \right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{V} = \frac{1}{\nu} \mathbf{M}\mathbf{U}. \tag{2.14}$$

Assim, a equação (2.14) pode ser escrita como

$$\mathbf{F}\mathbf{Y} = \frac{1}{\nu} \mathbf{X} \tag{2.15}$$

com

$$\mathbf{F} = \left( \mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 - (-1)^l] \right) \mathbf{M}^{-1}.$$

Para obter um problema de autovalores associado à solução do sistema, prosseguimos de forma a isolar  $\mathbf{Y}$  na equação (2.13), para em seguida substituí-la na equação (2.15), e desta forma

$$(\mathbf{F}\mathbf{E}) \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}, \tag{2.16}$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{\nu^2}.$$

O problema de autovalores obtido nesta formulação baseia-se apenas nos pontos positivos da quadratura, sendo assim apresenta ordem reduzida (ordem  $N/2$ ) se comparado aos problemas de autovalores obtidos nas aproximações de ordem  $N$  das metodologias usuais de emprego do método de ordenadas discretas.

Continuando, reescrevendo a equação (2.13) temos

$$\nu \mathbf{E} \mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (2.17)$$

agora, adicionando-se  $\mathbf{X}$  em ambos os lados da equação (2.17) obtemos

$$(\mathbf{I}_N + \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}. \quad (2.18)$$

Substituindo as equações (2.11) e (2.12) no lado direito da equação (2.18) temos

$$(\mathbf{I}_N + \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = \mathbf{M}(\mathbf{U} + \mathbf{V}),$$

e assim, através das equações (2.8) e (2.9), obtemos

$$(\mathbf{I}_N + \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(v_j) = 2\mathbf{M}\Phi_+(v_j)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\Phi_+(v_j) = \frac{1}{2} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{I}_N + \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(v_j). \quad (2.19)$$

Analogamente, subtraindo  $\mathbf{X}$  de ambos os lados da equação (2.17) temos

$$(-\mathbf{I}_N + \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = -\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \quad (2.20)$$

e substituindo as equações (2.11) e (2.12) no lado direito da equação (2.20) obtemos

$$(\mathbf{I}_N - \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = \mathbf{M}(\mathbf{U} - \mathbf{V}),$$

que, através das equações (2.8) e (2.9), pode ser escrita como

$$(\mathbf{I}_N - \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(v_j) = 2\mathbf{M}\Phi_-(v_j)$$

ou ainda

$$\Phi_-(v_j) = \frac{1}{2} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{I}_N - \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(v_j). \quad (2.21)$$

Sendo assim, tendo calculado os autovalores e autovetores, equação (2.16), e com a determinação das soluções elementares, equações (2.19) e (2.21), torna-se possível escrever, em forma matricial

$$\mathbf{I}_{\pm}(\tau) = (I(\tau, \pm\mu_1) I(\tau, \pm\mu_2) \cdots I(\tau, \pm\mu_N))^T,$$

a solução da equação (1.1) na forma

$$\mathbf{I}_{\pm}(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[ A_j \Phi_{\pm}(v_j) e^{-\tau/v_j} + B_j \Phi_{\mp}(v_j) e^{-(\tau_0 - \tau)/v_j} \right], \quad (2.22)$$

onde  $\tau_0$  é a espessura óptica do problema. Salientamos que a solução aqui obtida fica escrita explicitamente em termos da variável espacial.

Para finalizar a composição desta solução, precisamos ainda determinar as constantes  $A_j$  e  $B_j$ , para  $j = 1, \dots, N$ . Estas constantes serão obtidas mediante substituição da equação (2.22) em ambas as condições de contorno, equações (1.2) e (1.3), fato que resulta no seguinte sistema linear de ordem  $2N \times 2N$ :

$$\sum_{j=1}^N \left[ A_j \Phi_+(v_j) + B_j \Phi_-(v_j) e^{-\tau_0/v_j} \right] - \rho_1^s \sum_{j=1}^N \left[ A_j \Phi_-(v_j) + B_j \Phi_+(v_j) e^{-\tau_0/v_j} \right] - 2\rho_1^d \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_k \mu_k \left[ A_j \phi(v_j, -\mu_k) + B_j \phi(v_j, \mu_k) e^{-\tau_0/v_j} \right] = \mathbf{F}_1(\mu_i) \tag{2.23}$$

e

$$\sum_{j=1}^N \left[ A_j \Phi_-(v_j) e^{-\tau_0/v_j} + B_j \Phi_+(v_j) \right] - \rho_2^s \sum_{j=1}^N \left[ A_j \Phi_+(v_j) e^{-\tau_0/v_j} + B_j \Phi_-(v_j) \right] - 2\rho_2^d \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_k \mu_k \left[ A_j \phi(v_j, \mu_k) e^{-\tau_0/v_j} + B_j \phi(v_j, -\mu_k) \right] = \mathbf{F}_2(\mu_i), \tag{2.24}$$

para  $i = 1, \dots, N$  e  $\mu \in (0, 1]$ , sendo que nestas equações as expressões vetoriais  $\mathbf{F}_1(\mu_i)$  e  $\mathbf{F}_2(\mu_i)$  possuem seus componentes definidos em função da radiação incidente (conhecida),  $F_1(\mu)$  e  $F_2(\mu)$ , respectivamente.

A escrita das equações (2.23) e (2.24) complementa a referência [3] em termos da formulação ADO para problemas unidimensionais e homogêneos relacionados à área de transferência radiativa para condições de contorno que incluem reflexão especular e difusa.

### 3 DENSIDADE DE RADIAÇÃO, REFLECTÂNCIA E TRANSMITÂNCIA: RESULTADOS NUMÉRICOS

A partir da determinação da intensidade de radiação  $I(\tau, \mu)$ , podemos então avaliar, por exemplo, a densidade de radiação [3]

$$\rho(\tau) = \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu,$$

que em termos da solução em ordenadas discretas, dada pela equação (2.22), passa a ser escrita como

$$\rho(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[ A_j e^{-\tau/v_j} + B_j e^{-(\tau_0-\tau)/v_j} \right] \sum_{i=1}^N w_i \left[ \phi(v_j, \mu_i) + \phi(v_j, -\mu_i) \right]. \tag{3.1}$$

Segundo [7], reflectância é definida como a razão entre a energia radiante refletida e a energia radiante incidente na superfície do meio, assim

$$R = \frac{\int_0^1 \mu I(0, -\mu) d\mu}{\int_0^1 \mu I(0, \mu) d\mu},$$

que em ordenadas discretas pode ser escrita como

$$R = 2 \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \sum_{j=1}^N \left[ A_j \phi(v_j, -\mu_i) + B_j \phi(v_j, \mu_i) e^{-\tau_0/v_j} \right]. \quad (3.2)$$

Ainda, de acordo com [7], definimos transmitância como a razão entre a energia radiante que perpassa o meio e a energia radiante incidente em sua superfície, assim

$$T = \frac{\int_0^1 \mu I(\tau_0, \mu) d\mu}{\int_0^1 \mu I(0, \mu) d\mu},$$

cujas expressões equivalentes em ordenadas discretas é

$$T = 2 \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \sum_{j=1}^N \left[ A_j \phi(v_j, \mu_i) e^{-\tau_0/v_j} + B_j \phi(v_j, -\mu_i) \right]. \quad (3.3)$$

Para validação da solução obtida pelo método ADO [6], testamos problemas que se diferenciam pelas formulações de suas condições de contorno, escolhidos especificamente por já terem sido avaliados na literatura. Para testar a programação em FORTRAN formulada para este trabalho, reproduzimos casos testes com os mesmos parâmetros utilizados respectivamente nas referências [2] e [3], onde já se havia feito uso do método ADO [6] para cálculo de densidade de radiação.

Na sequência, buscamos ampliar a proposta apresentada em [2] e [3], sendo que além de assumirmos valores diferenciados para as radiações incidentes  $F_1(\mu)$  e  $F_2(\mu)$ , também passamos a considerar os casos de reflexão especular e difusa nas especificações das condições de contorno do problema analisado. Esta consideração, justamente faz com que as condições de contorno, equações (1.2) e (1.3), sejam definidas de forma completa, com todos os seus termos no decorrer da formulação, fato que interfere diretamente na composição do sistema linear de equações (2.23) e (2.24).

Também, consideramos neste trabalho cálculos de reflectância e transmitância para problemas unidimensionais em meio homogêneo via aplicação do método ADO, contemplando assim o objetivo principal deste artigo. Utilizamos o esquema de quadratura de Gauss-Legendre, o qual foi mapeado sobre o intervalo (0, 1], uma vez que a solução ADO baseia-se em um esquema de  $N$  pontos de quadratura definidos no semi-intervalo. Os autovalores e autovetores que compõem a solução apresentada foram obtidos mediante uso do pacote de subrotinas LAPACK [1].

A implementação da solução (em FORTRAN) foi realizada em um notebook com processador Intel Core i3, com 2.3 GHz e 4096 MB, sendo que o tempo computacional necessário na obtenção dos resultados numéricos se manteve menor do que dois segundos em todos os casos tratados, incluindo a geração de pontos e pesos para uso do esquema de quadratura de Gauss-Legendre.

### 3.1 Avaliação de Densidade de Radiação

Na tentativa de validação da programação FORTRAN, correspondente à implementação da solução em ordenadas discretas voltada a problemas de transferência radiativa em meio ho-



mogêneo unidimensional, realizamos inicialmente cálculos de densidade de radiação, equação (3.1), considerando dois problemas testes definidos a partir de diferentes condições de contorno.

### 3.1.1 Problema 1

Na referência [2] constam resultados numéricos de valores correspondentes à densidade de radiação, calculados a partir da equação (3.1), considerando o parâmetro  $L = 11$  (caso anisotrópico), espessura óptica  $\tau_0 = 1$ , albedo  $\varpi = 0.99$ ,  $\rho_1^s = \rho_1^d = \rho_2^s = \rho_2^d = 0$ , com radiações incidentes

$$F_1(\mu) = P_0(\mu) + P_2(\mu) + P_4(\mu) + P_6(\mu) + P_8(\mu) + P_{10}(\mu)$$

e

$$F_2(\mu) = 0,$$

onde  $P_k(\mu)$  denota um polinômio de Legendre de grau  $k$ .

Como esperado, resultados numéricos para densidade de radiação provenientes deste trabalho são exatamente iguais aos resultados obtidos em [2]. Na Tabela 1 reproduzimos os resultados relativos ao Problema 1 apresentados em [2], gerados a partir de  $N = 10, 20$  e  $30$ . Pela referida tabela é possível constatar que mediante adoção de pequenos incrementos no número de pontos de quadratura utilizados na avaliação da solução ADO há rápida resposta na convergência dos resultados.

Tabela 1: Densidade de Radiação – Problema 1.

$\tau$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 30$	$N = 40$	$N = 100$
0.0	1.2081160	1.2081150	1.2081150	1.2081150	1.2081150
0.1	1.1723743	1.1723600	1.1723600	1.1723601	1.1723601
0.2	1.1435433	1.1435409	1.1435409	1.1435409	1.1435409
0.3	1.1168696	1.1168718	1.1168718	1.1168718	1.1168718
0.4	1.0907610	1.0907650	1.0907650	1.0907650	1.0907650
0.5	1.0641431	1.0641483	1.0641483	1.0641483	1.0641483
0.6	1.0360793	1.0360794	1.0360795	1.0360795	1.0360795
0.7	1.0054944	1.0054777	1.0054777	1.0054777	1.0054777
0.8	0.9707019	0.9706901	0.9706899	0.9706899	0.9706899
0.9	0.9280365	0.9281328	0.9281331	0.9281330	0.9281330
1.0	0.8574546	0.8574546	0.8574546	0.8574546	0.8574546

Ainda, considerando o Problema 1, neste trabalho avaliamos a solução ADO utilizando ordens de quadratura mais elevadas do que em trabalhos anteriores ( $10 \leq N \leq 800$ ), e constatamos que a partir de  $N = 40$  os resultados para densidade de radiação permanecem inalterados.

Uma das questões pertinentes em processos de radiação é a relação entre a radiação incidente e refletida, caracterizada por exemplo através do parâmetro albedo, que pode indicar um meio mais

ou menos absorvedor ou espalhador. Desta forma, para discutirmos, por exemplo, a influência do albedo neste caso específico de avaliação de densidade de radiação em meio homogêneo, avaliamos para as mesmas configurações do Problema 1, valores diferenciados de albedo:  $\varpi = 0.2, 0.5, 0.8$  e  $0.99$ . Os gráficos correspondentes aos valores obtidos pela solução ADO usando  $N = 30$  para cálculo de densidade de radiação, equação (3.1), com quatro diferentes valores de albedo estão conjuntamente esboçados na Figura 1.

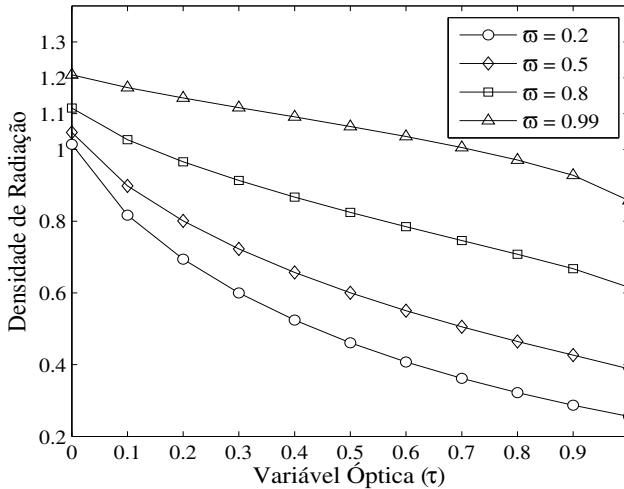


Figura 1: Densidade de Radiação – Problema 1 com  $N = 30$ ,  $\tau_0 = 1$ .

Analisando a Figura 1 podemos constatar que um meio homogêneo, modelado segundo as condições de formulação do Problema 1, que apresenta um valor alto de albedo (meio mais espalhador) terá valores mais acentuados de densidade de radiação ao longo de toda sua espessura se comparado a um meio mais absorvedor (com baixo valor de albedo). Por outro lado, ao analisarmos individualmente cada representação gráfica da densidade de radiação com os diferentes valores de albedo, podemos concluir que um meio mais absorvedor apresenta um decaimento mais expressivo da radiação incidente sobre sua superfície. Este comportamento é mais evidente a medida que se considera meios de maior espessura ótica, tal como podemos observar na Figura 2.

### 3.1.2 Problema 2

Para compor este outro caso teste, em que também avaliamos densidade de radiação, equação (3.1), passamos a considerar as condições de contorno completas, ou seja, com inclusão de reflexão especular e difusa. Tal como em [4] adotamos o parâmetro  $L = 99$  (caso anisotrópico), comprimento ótico  $\tau_0 = 10$ , albedo  $\varpi = 0.99$ ,  $\rho_1^s = 0.1$ ,  $\rho_1^d = 0.2$ ,  $\rho_2^s = 0.3$ ,  $\rho_2^d = 0.4$ , com radiações incidentes:

$$F_1(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2} + \frac{1}{1 + \mu^2} + \mu \log(\mu) e^{-\mu}$$

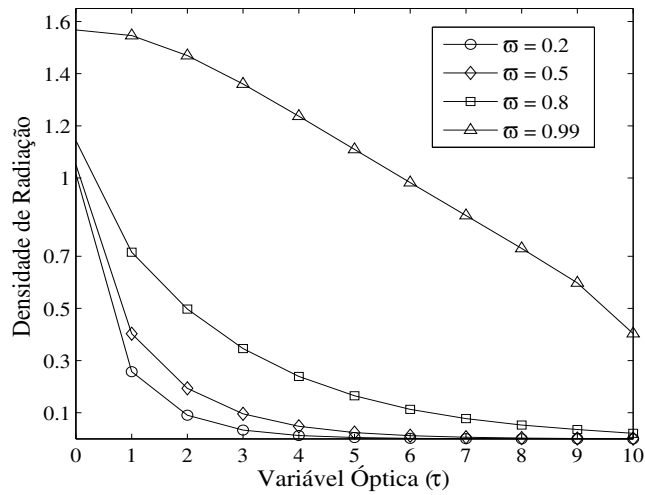


Figura 2: Densidade de Radiação – Problema 1 com  $N = 30$ ,  $\tau_0 = 10$ .

e

$$F_2(\mu) = 0.$$

Em [4] os autores utilizaram o método dos Harmônicos Esféricos –  $P_N$ , caracterizado por uma expansão em polinômios associados de Legendre, cujos valores para a densidade de radiação lá expostos com  $N = 199$  puderam ser reproduzidos via método ADO a partir de  $N = 30$ , com poucas discrepâncias na última casa decimal.

Na referência [5] foi mostrada a equivalência entre o método  $P_{N+1}$  e o clássico método de Ordenadas Discretas –  $S_N$ , quando o esquema de quadratura para o  $S_N$  é definido pelos zeros das funções de Legendre, cujo domínio abrange todo intervalo  $[-1, 1]$ . Uma vez que nesse caso resolvemos o problema com aplicação do método ADO, e assim usamos a quadratura com domínio estabelecido somente no semi-intervalo  $(0, 1]$ , esperávamos obter o mesmo número de dígitos significativos obtidos com o método  $P_N$  quando neste trabalho adotássemos  $N = 100$ , contudo esta expectativa já se confirmou pelo uso do método ADO com  $N = 30$ .

Na Tabela 2 estão os resultados para  $N = 10, 20, 30$  e  $80$ , que demonstram gradativamente a convergência dos resultados obtidos pela aplicação do método ADO na resolução do Problema 2.

Na comparação destes resultados para diferentes valores de  $N$ , colunas 2 a 5 da Tabela 2, podemos perceber que já com  $N = 10$  obtemos três casas decimais coincidentes com as obtidas com ordem de quadratura superior.

Ao adotarmos incrementos ao valor de  $N$  (testados valores  $10 \leq N \leq 800$ ) há uma rápida convergência, e a partir de  $N = 80$  passamos a ter uma precisão de cinco casas decimais, no sentido que os resultados da 5ª coluna da Tabela 2 permanecem inalterados mesmo para  $N = 800$ .

Por outro lado, ao compararmos os resultados obtidos neste trabalho com os resultados da referência [4] (reproduzidos aqui na 6ª coluna da Tabela 2) podemos observar uma coincidência de até quatro casas decimais.

Tabela 2: Densidade de Radiação – Problema 2.

$\tau$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 30$	$N = 80$	Ref. [4]
0.0	2.51889	2.51824	2.51821	2.51819	2.51815
1.0	2.23130	2.23105	2.23102	2.23101	2.23102
2.0	2.11367	2.11352	2.11349	2.11348	2.11349
3.0	2.02859	2.02841	2.02838	2.02837	2.02838
4.0	1.96122	1.96099	1.96096	1.96095	1.96096
5.0	1.90566	1.90541	1.90537	1.90536	1.90537
6.0	1.85879	1.85852	1.85849	1.85848	1.85848
7.0	1.81861	1.81833	1.81830	1.81828	1.81829
8.0	1.78348	1.78319	1.78316	1.78314	1.78315
9.0	1.75120	1.75092	1.75088	1.75087	1.75087
10.0	1.70448	1.70425	1.70422	1.70420	1.70421

Contudo, neste caso teste temos um adicional na formulação do problema, pois estamos considerando condições de contorno com inclusão de reflexão especular e difusa em um meio homogêneo. Assim, tal como procedemos no Problema 1, vamos analisar o comportamento dos valores para densidade de radiação mediante emprego de quatro valores de albedo ( $\varpi = 0.2, 0.5, 0.8$  e  $0.99$ ).

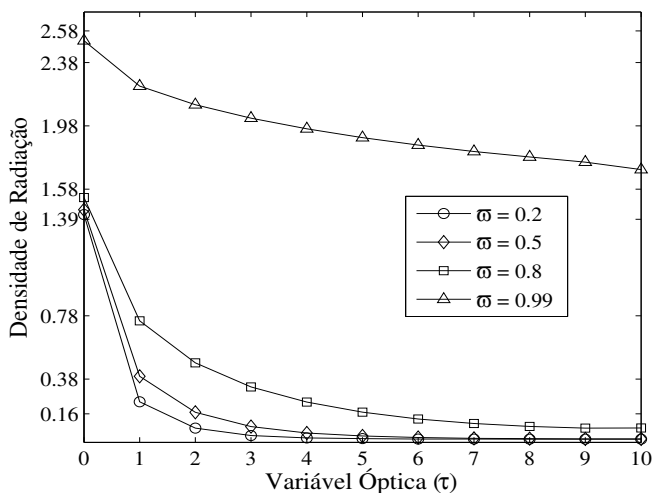


Figura 3: Densidade de Radiação – Problema 2 com  $N=80$ ,  $\tau_0 = 10$ .

Na Figura 3 apresentamos os valores correspondentes à densidade de radiação calculada via método ADO para o Problema 2, com uso de diferentes valores de albedo, considerando  $N =$

80. De acordo com a análise gráfica, constatamos que um meio mais espalhador (alto valor de albedo) manifesta um decaimento suave (quase linear) da densidade de radiação ao longo de sua espessura. Por outro lado, um meio mais absorvedor revela um decaimento mais acentuado na região do contorno de incidência desta radiação, e à proporção que a radiação é transportada por toda extensão do meio este declínio da densidade de radiação se suaviza, e tais valores tendem a se anular.

### 3.2 Avaliação de Reflectância e Transmitância

Na formulação de testes que nos possibilitem avaliar casos de reflectância, equação (3.2), e transmitância, equação (3.3), pelo método ADO, consideramos diferentes valores para o albedo ( $\varpi = 0.2, 0.8$  e  $0.995$ ), assumindo  $L = 0$  (caso isotrópico),  $\rho_1^s = \rho_1^d = \rho_2^s = \rho_2^d = 0$ , com radiações incidentes  $F_1(\mu) = 1$  e  $F_2(\mu) = 0$ .

Os resultados obtidos via ADO considerando seis valores para a espessura óptica ( $\tau_0 = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$  e  $10.0$ ), foram comparados aos da referência [7] onde foi usado o método aproximado  $F_n$  (baseado na solução de equações integrais singulares) para cálculos de reflectância e transmitância. Apesar de fornecer resultados usualmente precisos para problemas mais complexos, a aplicação do método  $F_n$  condiciona-se à escolha de pontos de colocação, o que dificulta a utilização do referido método.

Em [7], é observada uma precisão de quatro a cinco casas decimais obtidas pela aproximação  $F_7$ , cuja ordem não tem relação direta com a ordem de quadratura em ordenadas discretas.

Neste trabalho, usando o método ADO, conseguimos reproduzir estes mesmos valores a partir de  $N \geq 12$ , a menos dos resultados para  $\tau_0 = 0.1$  e  $\tau_0 = 0.5$ , cujas discrepâncias nas comparações com a referência [7] ocorrem apenas em algumas das últimas casas decimais apresentadas nos resultados correspondentes a estes dois comprimentos ópticos específicos. Variações de resultados para  $\tau_0 = 0.1$  também foram observadas por Clements e Özişik [7] quando os autores compararam os resultados que obtiveram com outros trabalhos de abordagens exatas.

#### 3.2.1 Reflectância

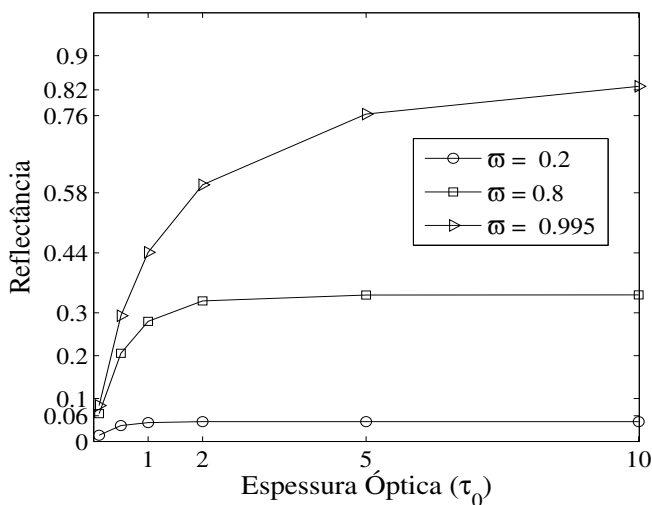
Na Tabela 3 constam os resultados obtidos para reflectância, equação (3.2), com aplicação do método ADO. Tais resultados podem ser comparados aos da Tabela 4, que foram calculados na referência [7], com a aproximação  $F_7$ .

Tabela 3: Reflectância (ADO,  $N = 12$ ).

$\varpi$	$\tau_0 = 0.1$	$\tau_0 = 0.5$	$\tau_0 = 1.0$	$\tau_0 = 2.0$	$\tau_0 = 5.0$	$\tau_0 = 10.0$
0.2	0.01460	0.03715	0.04393	0.04607	0.04626	0.04626
0.8	0.06493	0.20562	0.28015	0.32795	0.34168	0.34187
0.995	0.08379	0.29324	0.44124	0.59880	0.76360	0.82841

Tabela 4: Reflectância (Ref. [7],  $F_7$ ).

$\varpi$	$\tau_0 = 0.1$	$\tau_0 = 0.5$	$\tau_0 = 1.0$	$\tau_0 = 2.0$	$\tau_0 = 5.0$	$\tau_0 = 10.0$
0.2	0.01462	0.03715	0.04393	0.04607	0.04626	0.04626
0.8	0.06498	0.20560	0.28015	0.32795	0.34168	0.34187
0.995	0.08389	0.29323	0.44124	0.59880	0.76360	0.82841

Figura 4: Reflectância (ADO,  $N = 12$ ).

Ao analisarmos graficamente os resultados numéricos para reflectância, Figura 4, adotando diferentes valores para o albedo ( $\varpi = 0.2, 0.8$  e  $0.995$ ) podemos constatar que um meio homogêneo, isotrópico, com condições de contorno de fluxo incidente conhecido, que apresenta um maior valor de albedo terá ocorrência de valores mais acentuados de reflectância, fato que independe se o meio possui uma espessura óptica menor ou maior.

### 3.2.2 Transmitância

Os resultados calculados pelo método ADO para transmitância, equação (3.3), estão na Tabela 5, enquanto que na Tabela 6 foram incluídos os resultados de transmitância determinados por Clements e Özişik em [7], com aplicação da aproximação  $F_7$ .

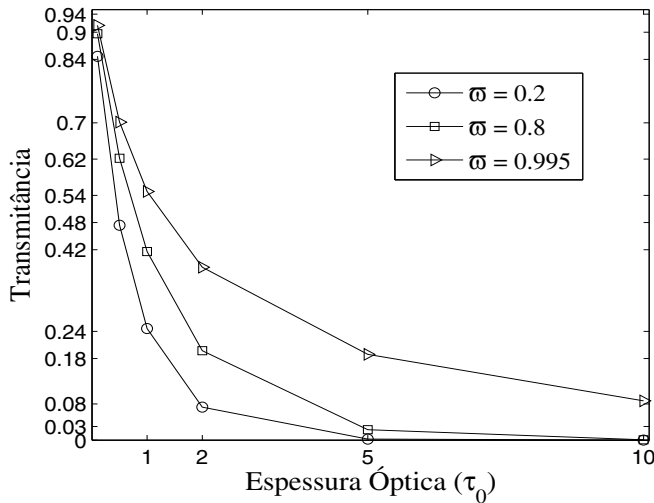
Tabela 5: Transmitância (ADO,  $N = 12$ ).

$\varpi$	$\tau_0 = 0.1$	$\tau_0 = 0.5$	$\tau_0 = 1.0$	$\tau_0 = 2.0$	$\tau_0 = 5.0$	$\tau_0 = 10.0$
0.2	0.84696	0.47432	0.24627	0.07274	0.00245	0.00001
0.8	0.89657	0.62197	0.41624	0.19727	0.02292	0.00065
0.995	0.91521	0.70178	0.54884	0.38154	0.18923	0.08667

Tabela 6: Transmitância (Ref. [7],  $F_7$ ).

$\varpi$	$\tau_0 = 0.1$	$\tau_0 = 0.5$	$\tau_0 = 1.0$	$\tau_0 = 2.0$	$\tau_0 = 5.0$	$\tau_0 = 10.0$
0.2	0.84684	0.47435	0.24627	0.07274	0.00245	0.00001
0.8	0.89651	0.62199	0.41624	0.19727	0.02292	0.00065
0.995	0.91517	0.70179	0.54884	0.38154	0.18923	0.08667

Na Figura 5 estão esboçados os resultados numéricos obtidos pela aplicação do método ADO (com  $N = 12$ ) na avaliação de propriedades de transmitância (valores especificados na Tabela 5), levados em conta diferentes valores de albedo ( $\varpi = 0.2, 0.8$  e  $0.995$ ) na composição do meio homogêneo considerado (caso isotrópico, condições de contorno simples). Através do comportamento gráfico dos resultados para transmitância podemos concluir que, neste caso, um meio que apresenta um maior valor de albedo terá a ocorrência de valores maiores de transmitância, independentemente do valor adotado para a espessura óptica (testados  $\tau_0 = 0.1$  até  $\tau_0 = 10$ ). Em termos da relação entre espessura óptica e valores de transmitância, para qualquer um dos três valores de albedo, podemos constatar uma correspondência decrescente, ou seja, quanto maior for o valor da espessura óptica menor será o valor da transmitância.

Figura 5: Transmitância (ADO,  $N = 12$ ).

Ressaltamos que mesmo aumentando o valor de  $N$ , testados  $6 \leq N \leq 800$ , não ocorrem alterações nos resultados para reflectância e transmitância obtidos via método ADO, o que confirma a precisão de cinco casas decimais dos resultados mostrados nas Tabelas 3 e 5, alcançados já a partir de  $N = 12$ .

## 4 CONCLUSÕES

Os casos testados em [2] e [3] e os demais problemas abordados neste trabalho já haviam sido analisados através do método ADO em [8]. Contudo, os resultados para reflectância e transmitância com  $N < 10$  da referência [8] não se equivalem aos valores obtidos aqui, onde a convergência de pelo menos três casas decimais já é assegurada a partir de  $N = 6$ . Há um comentário na referência [8] que revela possibilidade de erro de implementação da solução ADO tendo em vista a inconsistência de valores obtidos naquele trabalho para  $N < 10$ , fato que agora ficou comprovado.

Como a intenção é aplicar este modelo no entendimento das propriedades de vegetações, procuramos analisar através de gráficos a influência de diferentes parâmetros nas propriedades de reflectância e transmitância. Assim, em função dos bons resultados alcançados na resolução dos diferentes casos investigados neste trabalho, pretendemos prosseguir estudando a aplicabilidade do método ADO [6] na solução de problemas de transferência radiativa.

Em trabalhos futuros, consideraremos problemas unidimensionais com termos de fonte (não homogêneos), fato que trará a associação de soluções particulares à solução aqui apresentada e acertadamente implementada. Tais modificações devem tornar possível o cálculo de reflectância especificamente para vegetações, bem como absorção da radiação (transmitância) pelo solo [12]. A formulação básica aqui desenvolvida é fundamental e necessária na abordagem (via ADO) destes modelos mais específicos de transporte de fótons em copas de vegetações (nos dosséis), acrescida do tratamento de termos de fonte e da variável azimutal.

Com base nesta perspectiva, no presente texto, procuramos especificar detalhadamente todo o equacionamento decorrente da aplicação do método ADO na resolução da equação unidimensional de transferência radiativa em meio homogêneo, o que nos possibilitará referenciar em outros trabalhos a solução homogênea aqui já estabelecida.

**ABSTRACT.** In this work, a solution for the radiative transfer equation in one-dimensional homogeneous medium is derived, seeking to evaluate properties such as reflectance and transmittance of the medium, which may, for example, be associated with the characterization of a vegetation. Numerical results obtained with the analytical discrete ordinates (ADO) method for different formulations of the boundary conditions of the problem are discussed and compared to other studies available in the literature. Analysis of the results shows that the ADO formulation is accurate and computationally efficient.

**Keywords:** Discrete-ordinates method, reflectance, transmittance.

## REFERÊNCIAS

- [1] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. Mc-Kenney & D. Sorensen. LAPACK Users' guide. SIAM, Philadelphia, (1999).



- [2] L.B. Barichello. Discrete Ordinates Solutions for Thermal Radiation Problems. *METTI IV – Thermal Measurements and Inverse Techniques*. Rio de Janeiro, (2009).
- [3] L.B. Barichello. Explicit Formulations for Radiative Transfer Problems. In: H.R.B. Orlande, O. Fudyin, D. Maillat & R.M. Cotta (Org.). “Thermal Measurements and Inverse Techniques”. Boca Raton: CRC Press, (2011), 541–562.
- [4] L.B. Barichello, R.D.M. Garcia & C.E. Siewert. On Inverse Boundary-Condition Problems in Radiative Transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **57** (1997), 405–410.
- [5] L.B. Barichello & C.E. Siewert. On the Equivalence Between the Discrete-Ordinates and the Spherical-Harmonics Methods in Radiative Transfer. *Nuclear Science and Engineering*, **130** (1998), 79–84.
- [6] L.B. Barichello & C.E. Siewert. A Discrete-Ordinates Solution for a Non-Grey Model with Complete Frequency Redistribution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **62** (1999), 665–675.
- [7] T.B. Clements & M.N. Özişik. Effects of Stepwise Variation of Albedo on Reflectivity and Transmissivity of an Isotropically Scattering Slab. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **26** (1983), 1419–1426.
- [8] L.R. Godinho. “Modelagem de Transferência Radiativa em Vegetações”. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, (2012).
- [9] N.J. McCormick & R. Sanchez. Inverse Problem Transport Calculations for Anisotropic Scattering Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, **22** (1981), 199–208.
- [10] P. Picca & R. Furfaro. Analytical Discrete Ordinate Method for Radiative Transfer in Dense Vegetation Canopies. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **118** (2013), 60–69.
- [11] P. Picca, R. Furfaro & B.D. Ganapol. On Radiative Transfer in Dense Vegetation Canopies. *Transport Theory and Statistical Physics*, **41** (2012), 223–244, DOI: 10.1080/00411450.2012.671218.
- [12] J.K. Shultis & R.B. Myneni. Radiative Transfer in Vegetation Canopies with Anisotropic Scattering. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **39** (1988), 115–129.
- [13] M.M. Valeriano. Reflectância Espectral de Culturas Agrícolas Anuais (I): Espectrorradiometria. *Espaço & Geografia*, **6** (2003), 1–22, ISSN: 1516-9375.