

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Caracterizações clássicas e espectrais de cografos

por

Rodrigo Triches Panozzo

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem
Orientador

Porto Alegre, Dezembro de 2017.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Panozzo, Rodrigo Triches

Caracterizações clássicas e espectrais de cografos / Rodrigo Triches Panozzo.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2017.

103 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2017.

Orientador: Allem, Luiz Emilio

Dissertação: Teoria Espectral de grafos
Caracterizações de cografos, Espectro de cografos

Caracterizações clássicas e espectrais de cografos

por

Rodrigo Triches Panozzo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria Espectral de grafos

Orientador: Prof. Dr. Luiz Emilio Allem

Banca examinadora:

Prof. Dr. Wallace Correa de Oliveira Casaca
UNESP

Prof. Dr. Fernando Colman Tura
UFSM

Prof. Dr. Carlos Hoppen
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada
19/12/2017.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

| | |
|--|------|
| LISTA DE FIGURAS | vi |
| LISTA DE SÍMBOLOS | viii |
| RESUMO | ix |
| ABSTRACT | x |
| AGRADECIMENTOS | xi |
| | |
| 1 INTRODUÇÃO | 1 |
| | |
| 2 ALGUMAS CARACTERIZAÇÕES DE COGRAFOS | 8 |
| 2.1 Introdução | 8 |
| 2.2 Preliminares | 9 |
| 2.3 Caracterização livre de P_4 | 16 |
| 2.4 Caracterização utilizando formas recursivas: complementos e operações de união e junção | 18 |
| 2.5 Caracterização através do diâmetro | 22 |
| 2.6 Caracterização através dos vértices | 24 |
| 2.7 Caracterização através da propriedade CK (<i>clique e kernel</i>) | 27 |

| | | |
|-----|--|-----------|
| 2.8 | Caracterização recursiva através da duplicação e coduplicação | 32 |
| 2.9 | Outras caracterizações | 34 |
| 3 | ALGUMAS REPRESENTAÇÕES DE COGRAFOS | 36 |
| 3.1 | Introdução | 36 |
| 3.2 | Representação na forma normalizada | 36 |
| 3.3 | Representação através da córvore. | 40 |
| 3.4 | Representação através da matriz de adjacência | 45 |
| 4 | ALGORITMO DE LOCALIZAÇÃO DE AUTOVALORES EM COGRAFOS - DIAGONALIZE | 48 |
| 4.1 | Introdução | 48 |
| 4.2 | Congruência de matrizes e Lei da Inércia de Sylvester | 49 |
| 4.3 | Algoritmo de localização de autovalores de cografos | 58 |
| 5 | APLICAÇÕES DO ALGORITMO DIAGONALIZE | 77 |
| 5.1 | Introdução | 77 |
| 5.2 | Aplicações do algoritmo Diagonalize em resultados clássicos do espectro de um cografo | 77 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 5.3 | Aplicações do algoritmo Diagonalize para reconhecer famílias de cografos borderenergéticos | 83 |
| 5.3.1 | Aplicações do algoritmo Diagonalize para obter $E(G_r) = E(K_{3r+4})$, com $r \geq 1$, onde G_r tem ordem $3r + 4$ | 84 |
| 5.3.2 | Aplicações do algoritmo Diagonalize para $E(G) = E(K_n)$, onde $G = K_a \otimes (a - 1)(b - 1)K_b$, com $a \geq 2$ e $b \geq 2$ | 90 |
| | CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS | 97 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 100 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 - Pontes de Königsberg | 2 |
| Figura 1.2 - Grafo que representa as pontes de Königsberg..... | 3 |
| Figura 2.1 - Relacionamento das caracterizações..... | 9 |
| Figura 2.2 - Grafo G | 10 |
| Figura 2.3 - Grafo G , subgrafo G' e subgrafo induzido G'' | 11 |
| Figura 2.4 - P_4 e C_3 | 12 |
| Figura 2.5 - Grafo conexo G_1 e grafo desconexo G_2 | 12 |
| Figura 2.6 - Árvore | 13 |
| Figura 2.7 - Um grafo e seu complementar | 13 |
| Figura 2.8 - Grafos G_1 e G_2 | 14 |
| Figura 2.9 - Grafo $G' = G_1 \otimes G_2$ | 14 |
| Figura 2.10 - Subgrafos induzidos H_1 e H_2 , e $H_3 = \overline{H_2}$ | 15 |
| Figura 2.11 - Cografo G e subgrafo induzido conexo G' | 24 |
| Figura 2.12 - Um cografo e sua coárvore | 26 |
| Figura 2.13 - Cografo do exemplo 2.21 | 29 |
| Figura 2.14 - Cografo do exemplo 2.26 | 33 |

| | |
|--|----|
| Figura 3.1 - Cografo G , coárvore enraizada T_{Gr} e minimal T_G | 42 |
| Figura 3.2 - Um cografo e sua coárvore com os rótulos 0 e 1 | 43 |
| Figura 5.1 - Coárvore representando o grafo G no Lema 5.18 | 92 |
| Figura 5.2 - Cografo G , sua coárvore balanceada T_G e seu espectro .. | 95 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|----------------|---|
| $ V $ | Quantidade de vértices de um grafo. |
| $ E $ | Quantidade de arestas de um grafo. |
| P_n | Caminho com n vértices. |
| C_n | Ciclo com n vértices. |
| \overline{G} | Complementar de um grafo G . |
| \otimes | Operação junção em grafos. |
| \oplus | Operação união em grafos. |
| $G - a$ | Grafo resultante da deleção do vértice a do grafo G . |
| $diam(G)$ | Diâmetro do grafo G . |
| $\omega(G)$ | Número de clique do grafo G . |
| $\alpha(G)$ | Número de independência do grafo G . |
| T_G | Coárvore do grafo G . |
| A | Matriz de adjacência. |
| $B \cong A$ | Matriz B congruente à matriz A . |
| P^T | Transposta da matriz P . |
| $P_G(\lambda)$ | Polinômio característico do grafo G . |
| $spect(A)$ | Espectro da matriz A . |
| K_n | Grafo completo de n vértices. |
| $N(u)$ | Vizinhança aberta do vértice u . |
| $N[v]$ | Vizinhança fechada do vértice v . |
| d_k | Elemento a_{kk} de uma matriz. |

RESUMO

Cografos representam uma classe de grafos que pode ser definida e caracterizada de diversas maneiras. A estrutura de relacionamento entre seus vértices, permite que um cografo possa ser construído de forma recursiva a partir de um único vértice. Neste trabalho estudamos algumas caracterizações clássicas de cografos, dentre as quais abordamos: livre de P_4 , formas recursivas utilizando união, complemento e junção, diâmetro de todo subgrafo induzido ≤ 2 , vértices irmãos, propriedade $CK(\text{clique} - \text{Kernel})$, e formas recursivas utilizando duplicação e coduplicação de vértices. A principal contribuição foi relacionar algumas das diferentes formas de caracterizações de um cografo com a definição de grafo complementar redutível.

Apresentamos algumas formas de representar cografos, que podem ser encontradas em diversos trabalhos, como forma normalizada, cóarvore e matriz de adjacência. Estudamos um algoritmo que auxilia na localização de autovalores em cografos, como contribuição apresentamos os detalhes teóricos sobre seu funcionamento através da Lei na Inércia de Sylvester, e da obtenção de matrizes congruentes à matriz $A + xI$, onde A é a matriz de adjacência de um cografo, x é um número real e I é a matriz identidade de mesma ordem de A . Com este algoritmo, estudamos alguns resultados clássicos sobre o espectro de um cografo, que são: a multiplicidade dos autovalores -1 e 0 , e que um cografo não possui autovalores no intervalo $(-1, 0)$. Além disso, apresentaremos algumas aplicações para obter famílias de cografos com a mesma energia de grafos completos K_n .

ABSTRACT

Cographs are a class of graphs that can be defined and characterized in several ways. The structure given in terms of vertices enable a cograph to be built by recursive form from a single vertice. In this work, we study some classical characterizations of cographs, among which: P_4 - free, recursive form with union, complement and join, diameter of all induced subgraph connected ≤ 2 , siblings vertices, property $CK(\text{clique} - \text{Kernel})$, and recursive form by duplication and coduplication of vertices. As main contribution, we establish a relationship between some characterizations of cographs, which is a complement reducible graph.

We also show some ways to make a mathematical representation that can be found in various works, as normalized form, cotree and adjacency matrix. We study an algorithm that can help us to find eigenvalues in cographs, as an additional contribution we provide the theoretical details about its operation through the Sylvester Law of Inertia and how to get congruent matrices from $A + xI$, where A is the adjacency matrix of a cograph, x is a real number and I is a identity matrix with the same order of A . Using the algorithm, we study some classical results about spectral set of a cograph, as the multiplicity of eigenvalues -1 and 0 , and the statement of no cographs have eigenvalues in $(-1, 0)$. In addition, we show some applications to find cograph families with the same energy of complete graphs K_n .

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pela por sua proteção e força em todos os momentos, principalmente quando tive que ficar ausente da minha família.

Agradeço à minha esposa Silvana, pela compreensão em todos os momentos que precisei isolar-me de tudo para estudar, e por dar todo apoio e suporte aos nossos filhos Isabela e Luís Felipe. E agradeço também à todos os meus familiares, em especial minha mãe Diva.

Agradeço aos professores, colegas e amigos que fiz durante este período. Em especial ao professor Luiz Emílio Allem, por sua disponibilidade e dedicação para me atender e orientar.

Segue um pequeno trecho de uma música que representa este momento: "Veja! Não diga que a canção está perdida. Tenha fé em Deus, tenha fé na vida. Tente outra vez!"

**Dedico este trabalho à minha esposa Silvana e
aos meus filhos Isabela e Luís Felipe.**

1 INTRODUÇÃO

O trabalho escrito por Leonhard Euler sobre as sete pontes de Königsberg é reconhecido como o primeiro trabalho sobre a Teoria dos Grafos. Em agosto de 1735, Euler apresentou o trabalho chamado “A solução de um problema relacionado com geometria de posição” para a Academia de Ciências de São Petersburgo, Rússia, provando que não existe um caminho contínuo que cruza cada uma das sete pontes exatamente uma vez.

Em 1736, Euler comunicou sua solução a vários outros matemáticos, expondo sua visão sobre a natureza do problema e sobre geometria de posição. Neste mesmo ano, o trabalho foi enviado para o *Commentarii Academii Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, que foi o primeiro periódico publicado pela academia de São Petersburgo.

Euler não desenhou um Grafo para resolver o problema, mas ele reformulou o problema como uma tentativa de encontrar uma sequência de letras A,B,C e D (ilhas), onde cada par AB e AC são adjacentes duas vezes (o que corresponde a duas pontes existentes entre A e B e entre A e C), e AD, BD e CD são adjacentes somente uma vez. Mais detalhes estão em [18].

A Figura 1.1 abaixo nos mostra a disposição do problema.

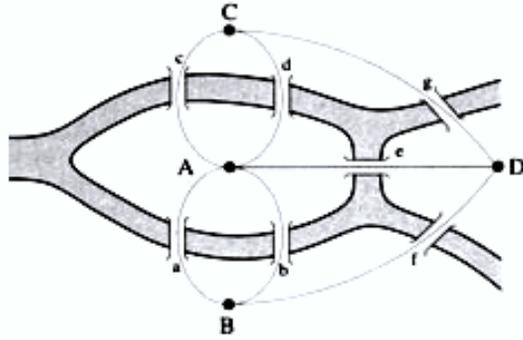


Figura 1.1: Pontes de Königsberg

Euler, através de um argumento de contagem, mostrou que não existe tal sequência, e assim o problema das sete pontes de Königsberg não possui solução. Em discussões mais gerais a respeito do problema, Euler observou que a soma do número de pontes que estava presente em cada ilha era igual a duas vezes o número de pontes, ou seja, que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual a duas vezes o número de arestas. Além de observar a relação entre vértices e arestas, Euler concluiu que:

a) Se existirem mais do que duas ilhas que contenham um número ímpar de pontes, então o problema é impossível de ser resolvido.

b) Se o número de pontes for ímpar em exatamente duas ilhas, então o problema é possível de ser resolvido se iniciarmos numa destas duas ilhas.

c) Se não existirem ilhas que contenham um número ímpar de pontes, então o problema é possível iniciando em qualquer ilha.

A conexão entre o problema das pontes de Königsberg e um diagrama de representação (diagram tracing puzzles) de grafos foi estabelecida por W.W. Rose Ball em 1892, no trabalho “Mathematical Recreations and Problems”, para mais informações ver [18].

A Figura 1.2 abaixo é a representação utilizada por Rouse Ball para o problema das sete pontes.

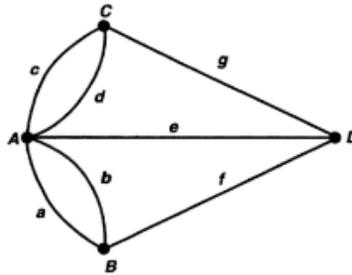


Figura 1.2: Grafo que representa as pontes de Königsberg

Ao longo do tempo muitas pessoas auxiliaram no desenvolvimento da Teoria dos Grafos, com destaque a William Rowan Hamilton que influenciou a teoria com um problema que se assemelha ao de Euler, que é o de encontrar um ciclo que passa uma única vez em cada vértice de um grafo, estes grafos que admitem tais ciclos são chamados de grafos hamiltonianos. Além de Hamilton, Gustav Kirchhoff trabalhou na Teoria dos Grafos aplicada no cálculo da corrente elétrica em malhas, e Arthur Cayley trabalhou em problemas envolvendo moléculas químicas. Mais informações e detalhes sobre estes trabalhos podem ser encontrados em [18].

Esta dissertação trata de uma estrutura que compreende uma classe de grafos, chamados de **cografos**, que foi descoberta de forma independente por diversos autores desde os anos de 1960. Entre estes autores estão Kelmans (1965 e 1966), Lerchs (1971), Seinsche (1974), Summer (1974) e Jung (1978).

Os trabalhos de Kelmans, sob o título: "The number of Trees in a Graph I" e "The number of Trees in a Graph II", abordam métodos de decomposição de grafos em grafos elementares. Já o trabalho de H. Lerchs [17], do início dos anos 70, sob o título "On cliques and Kernels", aborda propriedades estruturais e algorítmicas de cografos e faz uma enumeração da classe.

Antes do nome cografo se tornar popular, esta classe de grafos era chamada de D^* -graphs [6, 15], Hereditary Dacey graphs [12], Parity graphs [20], entre outros nomes, tendo o nome cografo popularizado em trabalhos do final da década de 70. Um dos primeiros trabalhos onde aparece o nome cografo é a dissertação de mestrado de Lorna Stewart, sob o título "Cographs: A class of tree representable graphs", apresentada na Universidade de Toronto em 1978. Durante o desenvolvimento desta dissertação, fizemos um contato com a professora Lorna Stewart para obter informações históricas sobre cografos, onde obtivemos resposta ao que foi questionado. Questionamos sobre quem sugeriu o nome cografo e por qual razão este nome, e a professora Lorna nos respondeu que acredita que a sugestão do nome foi feita por Lerchs, e que cografos é uma maneira reduzida de dizer grafo complementar redutível (complement reducible graph).

Esta classe de grafos, no caso cografos, possui uma estrutura de decomposição simples, envolvendo operações de união disjuntas e complementos (que pode ser substituído pela operação de junção), e são representadas unicamente através de

uma árvore (coárvore). Além disso, por causa desta estrutura recursiva, um cografo pode ser reduzido a um único vértice, tomando o complemento de todos os seus subgrafos induzidos conexos. Em muitos trabalhos, cografos são conhecidos por serem livres de P_4 , isto é, não possuem subgrafo induzido isomorfo a P_4 .

Além do mais, cografos são muito pesquisados pois, devido às suas propriedades estruturais e formas de construção, problemas difíceis da teoria de grafos podem ser resolvidos mais facilmente a partir do uso desta classe. Alguns destes problemas incluem número cromático, determinação de cliques, isomorfismos e muitos outros, alguns exemplos podem ser vistos em [8, 23, 24]. Utilizando cografos, algoritmos mais simples e rápidos podem ser desenvolvidos, especialmente quando é empregado sua representação via coárvore [5, 26]. Nesta dissertação abordaremos um destes algoritmos chamado de Diagonalize, que auxilia na localização de autovalores associados a um cografo. Quando mencionamos localização, nos referimos a determinar intervalos onde possamos encontrar os autovalores associados à matriz de adjacência de um cografo.

Atualmente, diversos trabalhos visam obter informações sobre o espectro de cografos, pesquisando equivalências de energia entre cografos particularmente construídos, com a energia de grafos completos K_n , alguns destes trabalhos são [5, 19]. Lembramos também que, casos especiais de cografos incluem, grafos completos, grafos bipartidos completos e grafos threshold, onde alguns exemplos podem ser encontrados em [5, 10].

A escolha de cografos deve-se ao fato que ainda há muito o que pesquisar sobre esta classe, abordando problemas que envolvem maneiras de caracterizar cografos e problemas sobre localização ou determinação do espectro. Nesta disserta-

ção, apresentaremos algumas caracterizações clássicas de cografos e algumas formas de representação, unindo pontos importantes de diversos trabalhos desde a década de 70 até os dias de hoje. Escolhemos algumas caracterizações para que possamos compreender a estrutura de formação de um cografo e relacionamento de seus vértices, e com isto auxiliar na obtenção de informações sobre o espectro. Mostraremos as equivalências entre as caracterizações escolhidas, algo que poucos trabalhos fizeram até então. Além disso, detalharemos o algoritmo Diagonalize e vamos tratar de alguns resultados clássicos sobre o espectro de cografos.

Ao longo dos últimos anos, diversos trabalhos de grafos tem se preocupado em obter informações sobre o espectro, pois é de suma importância o conhecimento dos autovalores para aplicações em diferentes áreas do conhecimento, onde podemos citar como exemplo a teoria quântica, que estuda autovalores para estabelecer propriedades dos elétrons, átomos e moléculas dentro de um estado estacionário. Para mais informações, ver [22] páginas 56 e 57. A seguir relataremos o que será feito em cada capítulo desta dissertação.

No Capítulo 2, iniciaremos com algumas definições da Teoria dos Grafos [22, 29], e após passaremos a algumas caracterizações de cografos. Na sequência deste trabalho, com base na definição de cografo dada por V. Lozin [29] de grafo complementar redutível, caracterizaremos que um cografo é livre de P_4 , resultado que é citado em [2, 7, 21, 24, 28]. A partir disto, caracterizaremos um cografo em formas recursivas com complementos, união e junção [9, 30], através do diâmetro ≤ 2 , onde todo subgrafo induzido conexo possui esta propriedade [2], através do relacionamento de seus vértices (vértices irmãos) [3, 12], da propriedade CK [2, 8, 23] e da forma recursiva dada por duplicação e coduplicação de vértices [1]. Por fim,

serão relacionadas outras formas de caracterização que podem ser encontradas em diversos trabalhos sobre cografos [2, 5, 16, 21].

No Capítulo 3, apresentaremos algumas formas de representação de cografos, primeiramente pela forma normalizada [2, 5], que utiliza operações de união, junção e complementaridade de grafos. Posteriormente abordaremos a representação através da coárvore [5, 26, 30], pela matriz de adjacência [13, 14] e seu posto.

Na continuação do trabalho, no Capítulo 4, faremos um estudo sobre o algoritmo de localização de autovalores em cografos chamado **Diagonalize**, que utiliza relações de equivalência entre linhas e colunas da matriz $A + xI$, onde A é a matriz de adjacência de um cografo, x um número real e I é a matriz identidade de mesma ordem da matriz de adjacência. Este algoritmo garante que a matriz $A + xI$ é congruente a uma matriz D diagonal, e o sinal das entradas da diagonal desta matriz darão informações sobre os autovalores do cografo, ou seja, número de autovalores maiores do que $-x$, menores do que $-x$ e de multiplicidade $-x$, detalhes em [5, 18].

No Capítulo 5, apresentaremos alguns resultados sobre o espectro de um cografo, como multiplicidade dos autovalores -1 e 0 , a não existência de autovalores no intervalo $(-1, 0)$, utilizando o algoritmo Diagonalize. Estes resultados são clássicos em cografos e já foram investigados em muitos trabalhos [1, 5, 10, 11, 25, 26, 27]. Ainda no capítulo 5, exploraremos algumas aplicações do algoritmo Diagonalize para encontrar famílias de cografos equienergéticas a grafos completos K_n , faremos isto com dois exemplos que estão apresentados em [5, 19].

2 ALGUMAS CARACTERIZAÇÕES DE COGRAFOS

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos tratar de uma classe de grafos denominada complementar redutível, ou simplesmente cografo. Abordaremos algumas caracterizações que podem ser associadas a esta classe.

Dentre as caracterizações que serão apresentadas temos: livre de P_4 , formas recursivas usando complementaridade e operações de união e junção, diâmetro de qualquer subgrafo induzido conexo ≤ 2 , relacionamento entre vértices (os quais podem ser chamados irmãos **duplicados** ou **coduplicados**), propriedade CK (*clique e kernel*) e forma recursiva com duplicação e coduplicação de vértices. Aprofundaremos o estudo nas caracterizações que visam fornecer informações sobre propriedades estruturais e a construção de um cografo, bem como o relacionamento entre seus vértices.

Por fim, será feita uma breve apresentação de outras caracterizações que podem ser associadas a cografos, tais como: grafo com largura de clique ≤ 2 , grafo de comparabilidade, grafo bem colorido hereditariamente, e outras mais. A Figura 2.1 nos auxilia a entender de que forma as caracterizações se relacionam com a definição de cografo apresentada no decorrer deste capítulo. Associado a cada seta, indicamos o Teorema ou Lema que implica a caracterização correspondente.

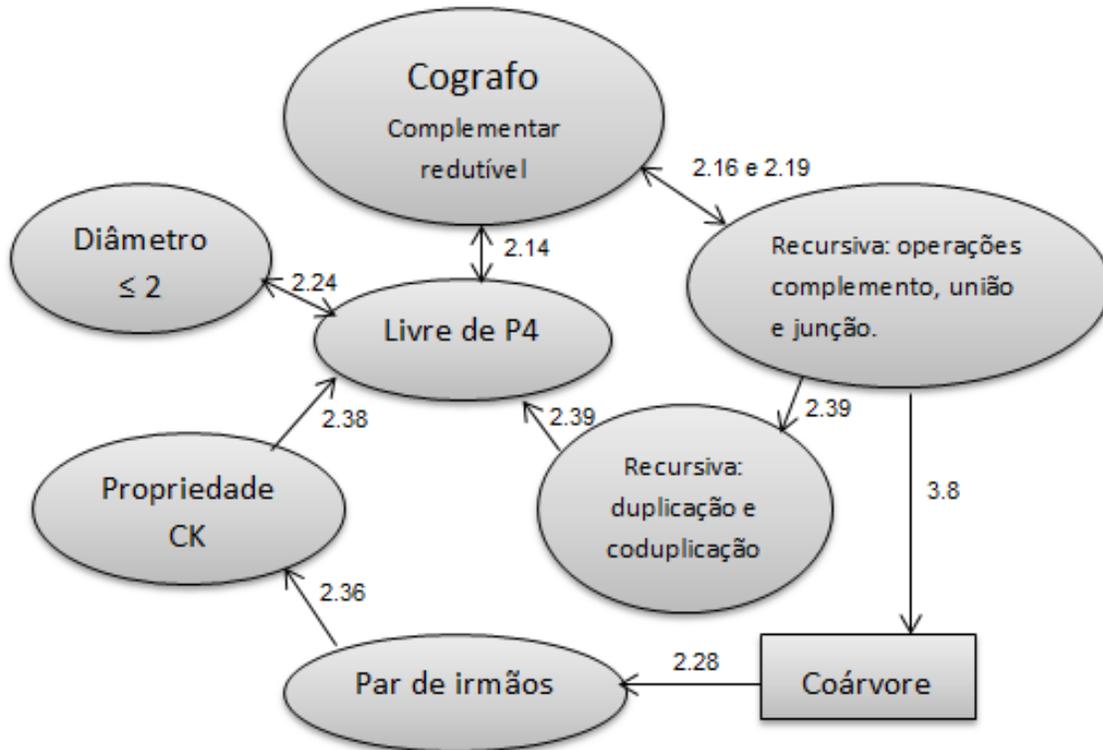


Figura 2.1: Relacionamento das caracterizações

2.2 Preliminares

Antes de iniciarmos as caracterizações, que são o tema deste capítulo, apresentaremos algumas definições gerais da teoria de grafos, as quais serão necessárias no decorrer do trabalho. Estas definições podem ser consultada em [22, 29], o leitor familiarizado pode ir diretamente para a Seção 2.3, onde começamos as caracterizações.

Definição 2.1 (Grafo). Um **grafo** é uma estrutura $G = G(V, E)$, constituída por um conjunto finito e não vazio V , cujos elementos são chamados **vértices**, e um conjunto E de subconjuntos dois a dois de elementos de V , chamados **arestas**. O número de vértices e o número de arestas de G é indicado por $|V|$ e por $|E|$ respectivamente.

Vértices ligados por arestas são chamados **vértices adjacentes**, e se $v_i, v_j \in V$ e $e_k = \{v_i, v_j\} \in E$, dizemos que a aresta e_k incide em v_i e v_j .

Exemplo 2.2. No exemplo abaixo Figura 2.2, temos um grafo G com $|V| = 5$ sendo os vértices v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 e com $|E| = 4$, sendo as arestas $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$ e $e_4 = \{v_4, v_1\}$.

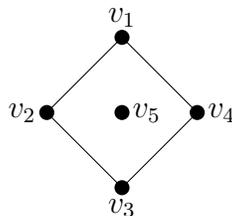


Figura 2.2: Grafo G

Neste trabalho consideraremos **grafos simples**, denominados apenas de **grafos**, isto é, grafos sem laços (arestas ligando um vértice a ele mesmo), sem arestas múltiplas (mais de uma aresta incidindo num mesmo par de vértices) e sem orientação, ou seja, não há necessidade de definir se a aresta que liga dois vértices quaisquer v_i e v_j tem o sentido de v_i para v_j , ou de v_j para v_i .

Definição 2.3 (Subgrafo e Subgrafo Induzido). Seja $G = G(V, E)$ um grafo. Quando $G' = G'(V', E')$ é um grafo satisfazendo $V' \subset V$ e $E' \subset E$, dizemos que G'

é um subgrafo de G , conseqüentemente $G' \subset G$. Quando $G' = G'(V', E')$ é um grafo satisfazendo $G' \subset G$, é tal que dois vértices são adjacentes em G' , se e somente se eles são adjacentes em G , dizemos que G' é um subgrafo induzido de G .

Na Figura 2.3, temos o grafo G , com seu conjunto de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , e também o subgrafo G' e o subgrafo induzido G'' , ambos obtidos de G , a partir dos vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 . Observe que escolhemos os mesmos vértices para obter um subgrafo G' , porém no caso do subgrafo induzido G'' as adjacências existentes nestes vértices em G , devem ser mantidas.

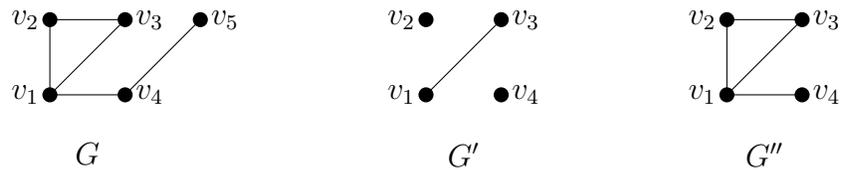


Figura 2.3: Grafo G , subgrafo G' e subgrafo induzido G''

Vamos apresentar as definições de cadeias e caminhos em um grafo.

Definição 2.4 (Cadeia). Uma sequencia finita v_1, v_2, \dots, v_k de vértices de um grafo $G(V, E)$ é dita uma cadeia de v_1 a v_k , quando $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k - 1$. Uma cadeia pode ser aberta ou fechada, ela é aberta quando $v_1 \neq v_k$, e é fechada quando $v_1 = v_k$.

Definição 2.5 (Caminho). Um caminho é uma cadeia em que todos os vértices (exceto possivelmente o primeiro e o último) são distintos, e o seu comprimento é o número de arestas que estão presentes no mesmo.

Quando todos os vértices forem distintos, chamaremos apenas de caminho, e quando primeiro e o último vértice forem iguais chamaremos de ciclo. O caminho e o ciclo com n vértices são denotados por P_n e C_n respectivamente. Assim, P_4 é um caminho com 4 vértices, e C_3 é um ciclo com 3 vértices.



Figura 2.4: P_4 e C_3 .

Definição 2.6 (Grafo conexo e desconexo). *Um grafo é conexo, quando existe um caminho ligando quaisquer dois vértices. Caso contrário, o grafo é denominado desconexo.*

A Figura 2.5 seguinte mostra um grafo G_1 conexo e um grafo G_2 desconexo.

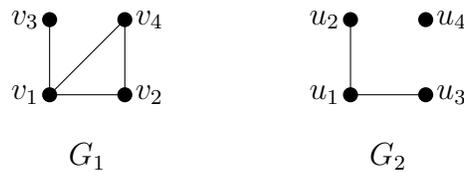


Figura 2.5: Grafo conexo G_1 e grafo desconexo G_2

Definição 2.7 (Árvore). *Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos.*

Observe que na Figura 2.6 abaixo, quaisquer dois vértices escolhidos estão conectados por um caminho, e este caminho não é fechado.

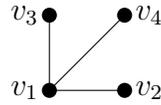


Figura 2.6: Árvore

O algoritmo que será estudado no decorrer deste trabalho é executado através da árvore que representa um cografo, chamada de **coárvore**.

Definição 2.8 (Grafo complementar). *Um grafo complementar é o grafo $\overline{G} = \overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$ obtido de $G = G(V, E)$ de tal forma que $\overline{V} = V$ e $\{v_i, v_j\} \in \overline{E}$ se, e somente se, $\{v_i, v_j\} \notin E$.*



Figura 2.7: Um grafo e seu complementar

Sejam $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ grafos, tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, a operação de união $G_1 \cup G_2$ é aquela cujo conjunto de vértices é $V_1 \cup V_2$ e o conjunto de arestas é $E_1 \cup E_2$. Este grafo é também chamado de soma de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 + G_2$. Além da operação de união, podemos ter o produto completo ou junção $G_1 \otimes G_2$ que é obtido de $G_1 \cup G_2$, unindo-se cada vértice de G_1 a todos os vértices de G_2 . Observe que $G_1 \otimes G_2 = \overline{\overline{G_1} \cup \overline{G_2}}$, os detalhes deste último resultado serão fornecidos na seção que tratará das formas recursivas com complementos e operações de união e junção.

Observação 2.9. Neste trabalho adotaremos o símbolo \otimes para expressar a operação de junção, em outros trabalhos, a mesma pode ser vista através do símbolo ∇ . E também utilizaremos \cup ou \oplus para expressar a união disjunta de dois grafos.

Exemplo 2.10. Vamos aplicar as operações de união e junção nos grafos G_1 e G_2 abaixo:

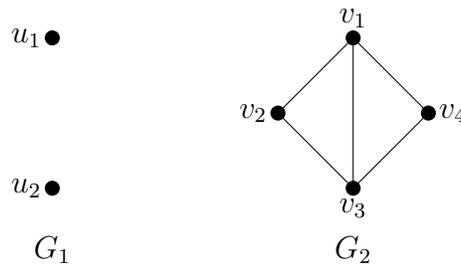


Figura 2.8: Grafos G_1 e G_2 .

Seja $G = G_1 \cup G_2$, então o grafo G é a própria representação da Figura 2.8. E seja $G' = G_1 \otimes G_2$, então o grafo G' está representado na Figura 2.9, onde podemos verificar que os vértices de G_1 foram conectados aos vértices de G_2 .

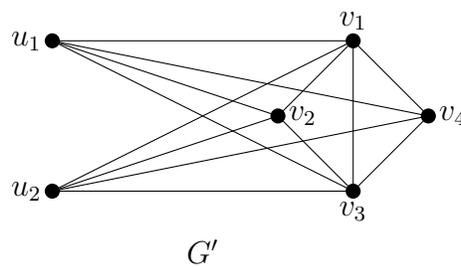


Figura 2.9: Grafo $G' = G_1 \otimes G_2$.

Neste trabalho, utilizaremos a definição dada por V. Lozin [29, página 15], de grafo complementar redutível para definir um cografo, assim sempre que for mencionado cografo, entenda-se grafo complementar redutível, e vice versa.

Definição 2.11 (Cografo). *Um grafo G é complementar redutível (cografo), se todo subgrafo induzido de G , com pelo menos dois vértices, ou é desconexo, ou é o complemento de um grafo desconexo.*

Exemplo 2.12. *Utilizaremos o grafo da Figura 2.2 para verificar que atende a Definição 2.11, ou seja, é um grafo complementar redutível (cografo). Basta perceber que quaisquer vértices v_1, v_2, v_3, v_4 ou v_5 escolhidos, temos que o subgrafo induzido, ou é desconexo, ou é o complemento de um grafo desconexo. Escolhendo v_1, v_2 e v_5 , temos um subgrafo induzido desconexo. E escolhendo os vértices v_1, v_2 e v_4 temos um subgrafo induzido conexo e seu complementar é desconexo.*

A Figura 2.10 abaixo mostra o subgrafo induzido desconexo H_1 formado por v_1, v_2 e v_5 , o subgrafo induzido conexo H_2 formado por v_1, v_2 e v_4 e $H_3 = \overline{H_2}$ desconexo, que é o grafo complementar de H_2 .

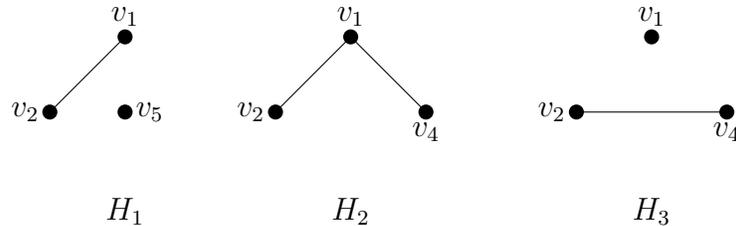


Figura 2.10: Subgrafos induzidos H_1 e H_2 , e $H_3 = \overline{H_2}$.

A partir de agora passaremos a apresentar algumas formas de caracterizar um cografo.

2.3 Caracterização livre de P_4

Nesta seção vamos mostrar que um grafo G é um cografo se, e somente se, é livre de P_4 . Esta é uma das caracterizações que aparece em diversos trabalhos, como [21, 24, 28, 29], e isto quer dizer que num cografo não podemos ter um subgrafo induzido isomorfo a um caminho P_4 . Abaixo a definição de grafos isomorfos.

Definição 2.13 (Grafos isomorfos). *Dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos, quando existe uma bijeção entre o conjunto de seus vértices, de modo que as adjacências são preservadas.*

Analisando o grafo gerado na Figura 2.9, podemos observar que para quaisquer conjuntos de vértices escolhidos, o subgrafo induzido gerado não forma um caminho isomorfo a P_4 . O Teorema seguinte é o principal resultado desta caracterização, e sua demonstração pode ser encontrada em [29], e para isto utilizaremos a Definição 2.11.

Teorema 2.14. *Um grafo G é um cografo se, e somente se, é livre de P_4 .*

Demonstração. Para a implicação de ida, recorreremos ao fato que, uma vez que nem P_4 e nem seu complemento são desconexos, pela Definição 2.11, temos que todo cografo é livre de P_4 .

Para a implicação da volta, seja G um grafo livre de P_4 , mostraremos por indução em $n = |V(G)| \geq 2$, que ou G é desconexo, ou G é o complemento de um grafo desconexo. Utilizando a base de indução $n = 2$, claramente G ou é desconexo, ou é o complemento de um grafo desconexo. Vamos supor que o resultado vale para um grafo G' de ordem $n - 1$. Sendo assim, seja $a \in V(G)$, e $G' = G - a$ um cografo de

ordem $n - 1$. Se a é um vértice isolado em G , então G é desconexo, e se a é adjacente a todo vértice de G' , então o complementar de G é desconexo. Assim supomos que esse não é o caso, então por absurdo supomos que G é livre de P_4 e tanto G , quanto \overline{G} são conexos. Pela hipótese de indução, ou G' é desconexo, ou $\overline{G'}$ é desconexo, assim examinaremos os casos abaixo:

(i) G' desconexo: neste caso G' possui pelo menos duas componentes conexas, e como supomos G conexo, teremos a adjacente a x pertencente a uma componente conexa X de G' e a adjacente a y pertencente a outra componente conexa Y de G' . Como a não é adjacente a todo vértice de G' , deve existir z pertencente a uma destas componentes conexas de G' que não é adjacente a a , assumimos que z está em X . Então existe um caminho que liga z a x na componente X , e podemos escolher z adjacente a x . Assim z, x, a, y induz um P_4 em G , o que contradiz G ser livre de P_4 .

(ii) $\overline{G'}$ desconexo: neste caso $\overline{G'}$ possui pelo menos duas componentes conexas, e como supomos \overline{G} conexo, teremos a adjacente a x pertencente a uma componente conexa X de $\overline{G'}$ e a adjacente a y pertencente a outra componente conexa Y de $\overline{G'}$. Como a não é adjacente a todo vértice de $\overline{G'}$, deve existir z pertencente a uma destas componentes conexas de $\overline{G'}$ que não é adjacente a a , assumimos que z está em X . Então existe um caminho que liga z a x na componente X , e podemos escolher z adjacente a x . Assim z, x, a, y induz um P_4 em \overline{G} , o que contradiz \overline{G} ser livre de P_4 . Observe que se \overline{G} possui um subgrafo induzido P_4 , G também possui, pois o complementar de um P_4 também é um P_4 .

As contradições em (i) e (ii) mostram que, G é um cografo. □

Observação 2.15. *Note que um caminho P_4 não é desconexo e nem é o complemento de um grafo desconexo. Perceba também, que um cografo pode admitir um subgrafo P_4 , mas não subgrafo induzido P_4 .*

Uma das consequências de cografos serem grafos livres de P_4 é que o complemento de um cografo também é um cografo. Para isto, considere \overline{G} o complemento de um cografo G , e perceba que se \overline{G} tivesse um subgrafo induzido P_4 , então G também teria um subgrafo induzido P_4 , pois o complementar de um P_4 é um P_4 .

2.4 Caracterização utilizando formas recursivas: complementos e operações de união e junção

Cografos podem ser caracterizados, ou construídos utilizando formas recursivas, com operações de união e junção, e também através da complementaridade de um grafo, de acordo com a Definição 2.8. Nos trabalhos [2, 5, 30] um grafo complementar redutível (cografo), é definido recursivamente como:

(i) grafo que consiste em um único vértice é um cografo;

(ii) Se G_1, G_2, \dots, G_k são cografos, então $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ também é um cografo, ou seja, a união finita de cografos é um cografo.

(iii) Se G é um cografo, então o complemento \overline{G} também é um cografo.

O Teorema 2.16 abaixo é o principal resultado desta caracterização envolvendo as operações união e complemento.

Teorema 2.16. *Seja κ uma classe de grafos, definida:*

(i) um único vértice pertence a κ .

(ii) se $G_1, G_2, \dots, G_k \in \kappa$, então $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k \in \kappa$

(iii) se $G \in \kappa$, então $\overline{G} \in \kappa$.

Então κ é a classe dos cografos.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar por indução em $n = |V(G)|$, que todo grafo $G \in \kappa$ é um cografo. Utilizando a base de indução $n = 1$, um grafo $G \in \kappa$ com um único vértice é um cografo. Consideremos um grafo G com $n > 1$ construído com as operações em κ , vamos mostrar que, ou G é desconexo, ou G é o complemento de um grafo desconexo. Pela hipótese de indução temos que todos os grafos de ordem $j < n$ que foram construídos com as operações em κ são cografos. Então através das operações em κ , ou $G = G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k$, isto é, a união de $k \geq 2$ cografos de ordem menor ou igual a j , e neste caso G é desconexo, ou $G = \overline{G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k}$, isto é, o complementar da união de $k \geq 2$ cografos de ordem menor ou igual a j , e neste caso \overline{G} é desconexo. Portanto todo grafo $G \in \kappa$ é um cografo.

Mostraremos que um cografo arbitrário de ordem n pode ser construído com as operações em κ . Vamos proceder por indução em $n = |V(G)|$. Utilizando a base de indução $n = 1$, um cografo com um único vértice é construído com a operação (i). Consideremos um cografo G de ordem $n > 1$. Vamos assumir pela hipótese de indução que todos os cografos de ordem $j < n$ foram construídos com as operações em κ . Como G é cografo, ou G é desconexo, ou G é o complemento de um grafo desconexo. Assim, se G for desconexo, $G = G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k$, isto é, a união de $k \geq 2$ grafos de ordem menor ou igual a j . Estes grafos de ordem menor ou igual a j são cografos, pois algum deles não fosse, teríamos uma contradição em G ser cografo. E

como os cografos de ordem menor ou igual a j foram construídos com as operações em κ , segue que G também. Se \overline{G} é desconexo, $\overline{G} = G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k$, isto é, a união de $k \geq 2$ grafos de ordem menor ou igual a j . E como o complementar de um cografo é um cografo, segue pelo mesmo fato descrito anteriormente que \overline{G} foi obtido a partir das operações em κ . E como $G = \overline{\overline{G}}$, segue que G foi construído com as operações em κ . Portanto concluímos que todo cografo pode ser construído com as operações em κ .

Pelo que foi apresentado, κ é a classe de cografos. □

Observação 2.17. *Cografos são a menor classe de grafos que contém K_1 , e que é fechada em relação a união e o complemento.*

Nos trabalhos [14, 26], a forma recursiva apresentada aparece substituindo o conceito de complementaridade apresentado no Teorema 2.16, pelo conceito de junção, ou seja, um grafo complementar redutível (cografo), pode ser definido recursivamente como:

(i) um único vértice é um cografo;

(ii) Se G_1, G_2, \dots, G_k são cografos, então $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ também é um cografo. A união finita de cografos é um cografo.

(iii) Se G_1, G_2, \dots, G_k são cografos, então $G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k$ também é um cografo. A junção finita de cografos é um cografo.

O lema abaixo mostra a equivalência entre as formas recursivas que usam complemento de um grafo e a operação junção. Assim poderemos reescrever o Teorema 2.16 de outra forma equivalente.

Lema 2.18. *Sejam G_1, G_2, \dots, G_k grafos disjuntos, então $\overline{\overline{G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k}} = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k$.*

Demonstração. Mostraremos por indução em k que o resultado vale para $k+1$ grafos. Com base de indução $k = 2$, mostraremos que o resultado vale para os grafos G_1 e G_2 . Pela definição de complementar de um grafo, temos que $G = \overline{\overline{G}}$, e conseqüentemente $\overline{\overline{G_1 \cup G_2}} = \overline{\overline{G_1}} \otimes \overline{\overline{G_2}}$. Logo, $\overline{\overline{G_1 \cup G_2}} = G_1 \otimes G_2$.

Seguindo a demonstração, pela hipótese de indução o resultado vale para k grafos, então $\overline{\overline{G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k}} = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k$. Vamos mostrar que o resultado vale para $k+1$ grafos. Para isto considere $G' = \overline{\overline{G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k}}$, e tomando um grafo G_{k+1} qualquer, teremos $\overline{\overline{G' \cup G_{k+1}}} = G' \otimes G_{k+1}$, o que implica $\overline{\overline{G_1 \cup G_2 \dots \cup G_{k+1}}} = \overline{\overline{(\overline{\overline{G_1 \cup G_2 \dots \cup G_k}}) \cup G_{k+1}}} = \overline{\overline{G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k \cup G_{k+1}}} = (G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k) \otimes G_{k+1} = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k \otimes G_{k+1}$. Assim, segue o resultado. \square

Vamos agora enunciar o Teorema 2.19, que é equivalente ao Teorema 2.16, trocando a operação complemento por junção. É importante o entendimento desta forma recursiva com união e junção, pois na continuidade deste trabalho, utilizaremos a representação de coárvore com estas operações. Além disso, com as operações união e junção compreenderemos melhor o relacionamento de adjacências entre os vértices de um cografo.

Teorema 2.19. *Seja κ uma classe de grafos, definida:*

(i) *um único vértice pertence a κ .*

(ii) *se $G_1, G_2, \dots, G_k \in \kappa$, então $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k \in \kappa$*

(iii) *se $G_1, G_2, \dots, G_k \in \kappa$, então $G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k \in \kappa$*

Então κ é a classe dos cografos.

Demonstração. O resultado segue do Lema 2.18 e do Teorema 2.16. □

Observação 2.20. *Cografos são a menor classe de grafos que contém K_1 , e que é fechada em relação às operações união e junção.*

Cografos caracterizados recursivamente nos Teoremas 2.16 e 2.19, podem ser representados através dos seus vértices e das operações união e complemento, ou união e junção. Esta representação é chamada de forma normalizada, e abordaremos com mais detalhes no Capítulo 3. O exemplo abaixo mostra as representações na forma normalizada do grafo (cografo) da Figura 2.6.

Exemplo 2.21. *De acordo com as operações definidas no Teorema 2.16 o cografo da Figura 2.6 pode ser representado $\overline{\cup}(v_1, \overline{\cup}(v_2, v_3, v_4))$, onde é feita a união dos vértices que estão dentro do parênteses, e o símbolo $\overline{\cup}$ indica que é feito o complemento. E com as operações definidas no Teorema 2.19, temos a representação $\otimes(v_1, \oplus(v_2, v_3, v_4))$, onde \otimes representa a operação junção, e \oplus representa a união dos vértices dentro do parênteses. Assim, temos a união de v_2 , v_3 e v_4 e em seguida a junção com v_1 .*

2.5 Caracterização através do diâmetro

Iniciaremos esta caracterização com a definição de diâmetro de um grafo, e após mostraremos que um cografo conexo tem diâmetro ≤ 2 . E mais, um cografo é um grafo em que todo subgrafo induzido conexo tem diâmetro ≤ 2 .

Definição 2.22 (Distância). *Seja G um grafo conexo. Se v_i e v_j são vértices de G , chamamos a distância de v_i a v_j e denotamos por $d(v_i, v_j)$, ao mínimo dos comprimentos dos caminhos que ligam v_i a v_j .*

Definição 2.23 (Diâmetro). *O diâmetro de G , é a maior das distâncias entre dois vértices quaisquer de G , e denotamos por $\text{diam}(G)$. Quando G é um grafo desconexo, $\text{diam}(G) = \infty$.*

O resultado que será apresentado para esta caracterização terá equivalência com a caracterização livre de P_4 .

Teorema 2.24. *Um grafo G é um cografo se, e somente se, qualquer subgrafo induzido conexo tem diâmetro ≤ 2 .*

Demonstração. Para a implicação de ida considere H um subgrafo induzido conexo de G . Sejam $u, v \in V(H)$ e P um caminho mínimo entre u e v . A minimalidade de P , implica que P é um caminho induzido em H . Como H é livre de P_4 , concluímos que $|E(P)| \leq 2$, isto é, $d(u, v) \leq 2$.

Para a implicação de volta, vamos raciocinar por contraposição, ou seja, se G não é um cografo, então G possui subgrafo induzido conexo com diâmetro > 2 . Do fato que G não é um cografo, temos que G não é livre de P_4 , e portanto G possui subgrafo induzido isomorfo a P_4 . Desta forma, concluímos que G possui subgrafo induzido conexo com diâmetro > 2 .

Assim, segue o resultado.

□

Observação 2.25. *O subgrafo induzido conexo é chamado de grafo com distância hereditária (entre os vértices), se ele possui as mesmas distâncias que o grafo original.*

Na Figura 2.11 podemos observar um cografo G com vértices (a, b, c, d, e) e um subgrafo induzido G' a partir dos vértices a, b, c, d . Podemos verificar que as distâncias entre os vértices do subgrafo induzido conexo G' , são as mesmas do que no cografo G , ou seja, menores ou iguais a 2.

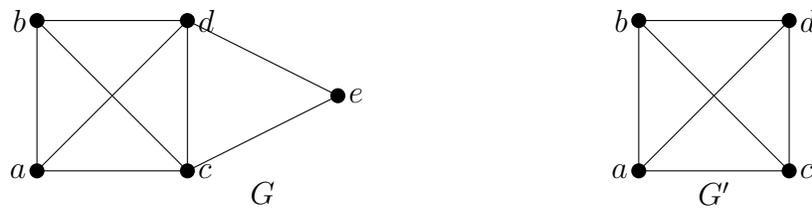


Figura 2.11 - Cografo G e subgrafo induzido conexo G' .

2.6 Caracterização através dos vértices

Para caracterizar um cografo através de seus vértices, é necessário entender como eles se relacionam, isto é, suas adjacências. Começaremos esta seção com uma definição que trata da vizinhança dos vértices de um cografo, com o objetivo de estabelecer que um cografo com ordem $n \geq 2$ possui pelo menos um par de vértices com a mesma relação de adjacência.

Definição 2.26 (Vizinhança). *Seja $G = (V, E)$ um grafo, com V seu conjunto de vértices e E seu conjunto de arestas. Para $v \in V$, $N(v)$ denota a vizinhança aberta de v , isto é, $\{w \mid (v, w) \in E\}$. A vizinhança fechada é definida por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.*

Dois vértices u, v são ditos **duplicados**, se a vizinhança aberta deles for a mesma, neste caso $N(v) = N(u)$. E são ditos **coduplicados**, se a vizinhança fechada deles for a mesma, neste caso $N[v] = N[u]$. Os vértices que são duplicados ou coduplicados são chamados de **irmãos**. Em alguns artigos, por exemplo em [12, 30], os vértices duplicados são chamados de gêmeos falsos e os vértices coduplicados são chamados de gêmeos verdadeiros. Já em [2] os vértices duplicados são chamados de irmãos fracos e os vértices coduplicados de irmãos fortes.

Exemplo 2.27. *Na Figura 2.9, temos o cografo G' , e podemos verificar que os vértices u_1 e u_2 são duplicados, ou seja, ambos são adjacentes aos vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 , e não são adjacentes entre si, $N(u_1) = N(u_2)$. Note também que $N(v_2) = N(v_4)$. Na mesma figura, verificamos que os vértices v_1 e v_3 são coduplicados, pois ambos são adjacentes aos vértices u_1, u_2, v_2 e v_4 , e são adjacentes entre si, logo $N[v_1] = N[v_3]$.*

Para mostrar o principal resultado desta caracterização, será necessário apresentar a córvore, que é uma forma de representação de um cografo. Desta forma, faremos uma breve apresentação da córvore sem formalidades. No capítulo 3, mais detalhes serão fornecidos sobre esta representação.

A árvore com raiz que representa um cografo é chamada de córvore. As folhas representam os vértices, e os nodos internos representam as operações união e junção entre os vértices. Na córvore, os vértices irmãos duplicados são filhos de nodos internos \oplus , e os vértices coduplicados são filhos de nodos internos \otimes . Assim, as operações de união e complemento (Teorema 2.16), ou união e junção (Teorema 2.19), implicam na forma de construção da córvore.

A córvore é representada em níveis, onde cada nível possui nodos internos que representam as operações união \oplus e junção \otimes de forma alternada. Se o

cografo for conexo a raiz será \otimes , e se for desconexo a raiz será \oplus . A profundidade da coárvore é o número de arestas que estão no maior caminho entre a raiz e as folhas, e os níveis de profundidade são definidos a partir da raiz no sentido das folhas, onde a cada alternância entre as operações \otimes e \oplus temos um novo nível constituído. Um resultado importante, é que a representação de umografo através de uma coárvore é única, a menos de permutações entre filhos de um nodo interno.

Na Figura 2.12 abaixo, temos umografo (o mesmo da Figura 2.6) e sua representação através da coárvore. Note que esta coárvore possui dois níveis, onde a raiz é \otimes , pois oografo é conexo. Também podemos verificar os vértices irmãos duplicados $N(v_2) = N(v_3) = N(v_4)$. Esta coárvore é chamada de coárvore minimal, e para construí-la utilizamos a representação da forma normalizada de acordo com o Teorema 2.19, a qual aparece no Exemplo 2.21.

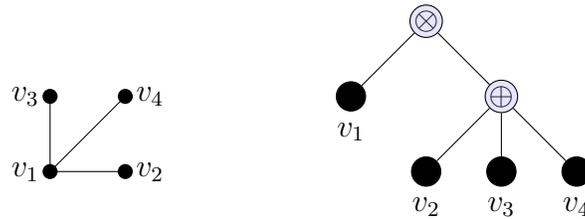


Figura 2.12: Umografo e sua coárvore.

O Teorema 2.28 abaixo é o principal resultado desta caracterização, e sua demonstração está baseada no relacionamento entre os vértices de umografo e sua representação na forma de coárvore. Esta demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 2.28. *Umografo G com ordem $n \geq 2$ tem um par de irmãos.*

Demonstração. Vamos examinar as folhas da coárvore T , de um cografo arbitrário G . Observamos que nesta representação, quaisquer duas folhas tendo como pai o nodo interno \otimes são vértices coduplicados e quaisquer duas folhas tendo como pai o nodo interno \oplus são vértices duplicados. Como a coárvore deve ter pelo menos duas folhas associadas a raiz ou a um nodo interno, segue o resultado. \square

Observação 2.29. *A existência de vértices duplicados e coduplicados trazem consequências no formato da matriz de adjacência associada ao cografo, e no espectro do mesmo. Estas consequências serão exploradas nos próximos capítulos.*

2.7 Caracterização através da propriedade CK (clique e kernel)

Começaremos esta caracterização com as definições de *clique* e *kernel*, para posteriormente concluir que um cografo possui a propriedade CK , de acordo com os trabalhos [2, 3]

Definição 2.30 (Clique). *Um clique é um subconjunto de vértices de um grafo G , tal que o subgrafo induzido por estes vértices é completo. Isto significa que quaisquer dois vértices num clique são adjacentes.*

Definição 2.31 (Clique maximal e clique máximo). *Um clique maximal é um clique que não pode ser estendido pela inclusão de mais um vértice adjacente, isto é, um clique que não existe exclusivamente dentro de um conjunto de vértices de um clique maior. Já um clique máximo de um grafo G , é um clique tal que não existe outro clique com mais vértices.*

O número de *clique* $\omega(G)$ de um grafo G , é o número de vértices em um *clique* máximo. Muitos outros aspectos sobre *clique* podem ser verificados em [23].

Definição 2.32 (Conjunto independente). *Um conjunto independente, ou conjunto estável, é um conjunto de vértices de um grafo, onde quaisquer dois vértices não são adjacentes, isto é, não há arestas os conectando.*

Definição 2.33 (Conjunto independente maximal (*kernel*) e conjunto independente máximo). *Um conjunto independente maximal, ou *kernel* como é chamado em [2], é ou um conjunto independente tal que adicionando um outro vértice no conjunto ele passa a ter alguma aresta, ou é o conjunto de todos os vértices de um grafo vazio (sem arestas). Também temos que um conjunto independente máximo, é um conjunto independente com tamanho maior possível (maior quantidade de vértices).*

Este tamanho é chamado de número de independência $\alpha(G)$. Muitos outros aspectos sobre conjuntos independentes podem ser verificados em [6]. Em [2], temos que um grafo G é dito ter a propriedade CK se, e somente se, todo *clique* maximal de G tem um vértice em comum com todo conjunto independente maximal (*kernel*) de G , isto é, $\forall C$, conjunto dos *cliques* maximais de G e $\forall K$, conjunto dos independentes maximais (*kernels*) de G , temos que $|C \cap K| = 1$. Vamos verificar como isto funciona com um exemplo.

Exemplo 2.34. *Vamos considerar o cografo da Figura 2.13 abaixo, note que K (independentes maximais - *kernel*) de G são: $K = \{\{a, f\}, \{a, e\}, \{c, f\}, \{c, e\}, \{b, d\}\}$ e o número de independência $\alpha(G) = 2$, e também que C (*clique maximais*) de G são: $C = \{\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}, \{d, e, f\}\}$ e o número de *clique* $\omega(G) = 3$.*

Agora, note que escolhendo quaisquer dois elementos, sendo um elemento do conjunto C e outro do conjunto K , temos que $|C \cap K| = 1$.

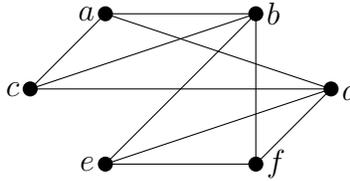


Figura 2.13: cografo do exemplo 2.34.

Antes de seguir com o resultado que relaciona um cografo com a propriedade CK , vamos precisar mostrar que todo subgrafo induzido de um cografo também é um cografo. Para isto usaremos o fato de um cografo ser livre de P_4 , conforme já foi mostrado anteriormente. O resultado do Lema 2.35 abaixo será necessário para a demonstração do Teorema 2.36.

Lema 2.35. *Todo subgrafo induzido de um cografo é um cografo.*

Demonstração. Seja G um cografo e H um subgrafo induzido de G . Se H tivesse um subgrafo induzido isomorfo a P_4 , então G também teria, e logo G não seria um cografo. Mas isto contraria a hipótese de G ser cografo. Assim, segue o resultado. \square

Outra demonstração do resultado que acabamos de ver aparece em [2], a qual usa a representação de um cografo através de sua córvore. A demonstração do próximo teorema utiliza o resultado do Lema 2.35 e a caracterização da seção anterior, onde todo cografo com dois vértices ou mais possui um par de irmãos. A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [2].

Teorema 2.36. *Seja G um cografo, então qualquer subgrafo induzido de G possui a propriedade CK .*

Demonstração. Vamos proceder por indução em p , a ordem de um subgrafo induzido de G . Como base de indução utilizamos $p = 1$, um subgrafo com um único vértice trivialmente tem a propriedade CK . Mostraremos agora que todo subgrafo induzido de ordem p em G tem a propriedade CK . Seja H um subgrafo induzido de G de ordem $p+1$, e sejam x e x' irmãos em H (pelo Lema 2.35 H é cografo, e pelo Teorema 2.28 H possui um par de irmãos). Consideremos um subgrafo induzido $H' = H - x'$ de ordem p . Os *cliques* e *Kernels* de H podem ser expressos em termos dos *cliques* e *kernels* de H' como segue:

(i) x e x' são coduplicados. Qualquer *clique* de H' não contendo x continua sendo um *clique* em H (denotaremos por $C_{H'a}$) e qualquer *clique* em H' contendo x , se tornará um *clique* em H quando aumentado com x' (denotaremos por $C_{H'b}$). Similarmente, qualquer *kernel* de H' continua sendo um *kernel* em H (denotaremos por $K_{H'a}$) e qualquer *kernel* de H' contendo x , um novo *kernel* é obtido em H substituindo x , por x' (denotaremos por $K_{H'b}$).

Vamos examinar as interseções do conjunto dos *cliques* de H , que são $C \in C_{H'a} \cup C_{H'b}$ com o conjunto dos *kernel* de H , que são $K \in K_{H'a} \cup K_{H'b}$. Pela hipótese de indução, H' possui a propriedade CK . Examinando $C_{H'a} \cap K_{H'a}$, temos que todo *clique* de H' que não contém x tem um único elemento em comum a todo *kernel* de H' , observamos que este elemento não será x . Examinando $C_{H'a} \cap K_{H'b}$, temos que todo *clique* de H' que não contém x tem um único elemento em comum com todo *kernel* de H' quando trocamos x por x' , observamos que este elemento não será x' . Examinando $C_{H'b} \cap K_{H'a}$, temos que todo *clique* de H' aumentado

pela inclusão de x' , tem um único elemento em comum com todo *kernel* de H' , se o *kernel* de H' contém x , ele será o elemento da intersecção. E por fim, examinando $C_{H'b} \cap K_{H'b}$, temos que que todo *clique* de H' aumentado pela inclusão de x' , tem um único elemento em comum com todo *kernel* de H' quando trocamos x por x' , se o *kernel* de H' contém x' , ele será o elemento da intersecção. Assim, segue que $|C \cap K| = 1$.

(ii) x e x' são duplicados. A demonstração é idêntica ao caso (i) onde as noções de clique e kernel são trocadas. \square

O exemplo abaixo, com base no cografo representado na Figura 2.13, auxilia a entender o Teorema 2.36.

Exemplo 2.37. *Podemos perceber que os vértices $\{e, f\}$ são irmãos coduplicados, procedendo conforme o Teorema 2.36 atribuindo de $x = e$ e $x' = f$, temos $C_{H'a} = \{\{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$ e $C_{H'b} = \{\{b, e, f\}, \{d, e, f\}\}$. E temos também $K_{H'a} = \{\{a, e\}, \{c, e\}, \{b, d\}\}$ e $K_{H'b} = \{\{a, f\}, \{c, f\}\}$.*

Como último resultado desta seção, mostraremos que se um grafo G possui a propriedade CK , então é livre de P_4 .

Teorema 2.38. *Se um grafo G possui a propriedade CK , então é livre de P_4 .*

Demonstração. A cadeia $P_4 (a, b, c, d)$ não pode ser um subgrafo em G , porque P_4 não possui a propriedade CK , já que o *clique* (b, c) não intercepta o *kernel* (a, d) . \square

Com os resultados dos Teorema 2.36 e 2.38, temos que um grafo G é um cografo se, e somente se G possui a propriedade CK .

2.8 Caracterização recursiva através da duplicação e coduplicação

No trabalho [1], uma classe de grafos é definida recursivamente utilizando a duplicação e a coduplicação de vértices. O Teorema 2.39 abaixo, define as operações desta forma recursiva, e sua demonstração resulta que esta classe de grafos é a formada por cografos. A demonstração deste resultado está em [1].

Teorema 2.39. *Seja κ uma classe de grafos definida recursivamente como:*

(i) *Um grafo com um único vértice pertence a κ .*

(ii) *Para qualquer grafo $G \in \kappa$ e qualquer vértice v de G , os grafos resultantes de G por duplicação e coduplicação de v pertencem a κ .*

Então κ é precisamente a classe de cografos.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que todo cografo está contido em κ . Pela definição de κ , um único vértice pertence a κ . Em vista do apresentado no Teorema 2.13, é suficiente mostrar que κ é fechada nas operações união disjunta e junção. Por simplicidade denotaremos o grafo com o conjunto de vértices v por \bullet^v .

Sejam $G_1, G_2 \in \kappa$, então existem duas sequências de operações com duplicações ou coduplicações A_1, A_2, \dots, A_r e B_1, B_2, \dots, B_s tal que $G_1 = A_r \circ \dots \circ A_1 \bullet^{v_1}$ e $G_2 = B_s \circ \dots \circ B_1 \bullet^{v_2}$. Consequentemente, começando por \bullet^{v_1} e então duplicando e coduplicando o vértice v_1 , obteremos respectivamente os grafos $\bullet^{v_1} \oplus \bullet^{v_2}$ e $\bullet^{v_1} \otimes \bullet^{v_2}$. Seja $\Psi = A_r \circ \dots \circ A_1 \circ B_s \circ \dots \circ B_1$, teremos $G_1 \oplus G_2 = \Psi(\bullet^{v_1} \oplus \bullet^{v_2})$ e $G_1 \otimes G_2 = \Psi(\bullet^{v_1} \otimes \bullet^{v_2})$. Isto mostra que $G_1 \oplus G_2$ e $G_1 \otimes G_2 \in \kappa$, e segue do Teorema 2.19 que κ deve conter todos os cografos.

Agora mostraremos que cada elemento de κ é um cografo. Suponha o contrário. Um único vértice é um cografo, e de acordo com a definição de κ , deve existir um cografo $H \in \kappa$ com um vértice $v \in H$, onde um grafo G é o resultado obtido a partir de H por duplicações ou coduplicações de v . E vamos supor que G contém um caminho $P = P_4$. Seja v' um vértice de $G - H$, como H é um cografo, deduzimos que v' pertence a P , mas também v pertence a P , pois v' foi duplicado, ou coduplicado a partir de v . Mas isto é uma contradição, visto que P é um subgrafo induzido de G e P não possui vértices duplicados ou coduplicados.

A prova do Teorema está completa. □

Exemplo 2.40. *Vamos aplicar o Teorema 2.39 para gerar o cografo da Figura 2.14 abaixo: (1) vértice único v_1 , (2) coduplicar v_1 para obter v_2 , (3) coduplicar v_1 para obter v_3 , (4) duplicar v_1 para obter v_4 , (5) duplicar v_4 para obter v_5 .*

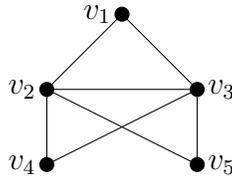


Figura 2.14: cografo do exemplo 2.40.

Neste exemplo partimos de um único vértice v_1 , e após coduplicamos v_1 , obtendo v_2 . Em seguida coduplicamos v_1 para obter v_3 , depois duplicamos v_1 , obtendo v_4 , e por fim duplicamos v_4 para obter v_5 . Assim temos os irmãos duplicados $\{v_1, v_4, v_5\}$ e coduplicados $\{v_2, v_3\}$.

O trabalho de E. Ghorbani [10], define que vértices duplicados e coduplicados encontram-se em classes de equivalência, e que qualquer classe de duplicação

não possui elemento em comum com qualquer classe de coduplicação. Na coárvore podemos verificar estas classes de equivalência no conjunto de folhas ligadas a um mesmo nodo interno \otimes ou \oplus . O Lema 2.41 demonstra que não há intersecção entres as classes de duplicação e as classes de coduplicação, este resultado está em [10].

Lema 2.41. *Em cografos, qualquer classe de duplicação não possui intersecção com qualquer classe de coduplicação.*

Demonstração. Seja G um cografo, e D e C classes de duplicação e coduplicação de G respectivamente, onde temos $v \in C \cap D$. Então existe $u \in C$ e existe $w \in D$ tal que $N[u] = N[v]$ e $N(w) = N(v)$. Como $u \neq v$ e $u \in N(v) = N(w)$, significa que u é adjacente a w e então v é adjacente a w , o que é uma contradição. \square

Exemplo 2.42. *No cografo da Figura 2.14 temos a classe de duplicação $\{v_1, v_4, v_5\}$ e a classe de coduplicação $\{v_2, v_3\}$. Podemos observar que não possuem elementos em comum.*

Estas classes de duplicação e coduplicação ficam bem representadas na coárvore e têm papel importante na multiplicidade dos autovalores -1 e 0 de um cografo.

2.9 Outras caracterizações

Ao longo das leituras, outras maneiras de caracterizar cografos foram surgindo, e nesta seção deixaremos algumas delas registradas.

Apenas enunciaremos as caracterizações indicando alguma fonte de consulta, sem adicionar maiores comentários.

1. Um cografo é um grafo com largura de clique ≤ 2 , ver [30].
2. Um cografo, é um grafo de comparabilidade de uma ordem parcial (paralelo - série), ver [9, 12, 21]
3. Um cografo é um grafo hereditariamente bem colorido, ou seja, um grafo tal que cada coloração adquirida por um subgrafo induzido, usa um número ótimo de cores, ver [7].
4. Cografos satisfazem a conjectura de Ulam, ver [2].
5. Cografos são equi-estáveis, ver [2].

Além das formas apresentadas para caracterizar um cografo, podemos encontrar muitas outras descritas em diversos trabalhos da área. No próximo capítulo verificaremos algumas formas de representar um cografo, em especial a forma de coárvore.

3 ALGUMAS REPRESENTAÇÕES DE COGRAFOS

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos tratar de algumas formas de representar cografos, a qual caracterizamos de diversas maneiras no capítulo anterior. Dentre as representações de um cografo, abordaremos a forma normalizada, a estrutura de árvore, denominada **coárvore** e a matriz de adjacência, apresentando um resultado em relação ao posto da mesma.

As representações escolhidas são aquelas que nos auxiliarão a entender alguns dos resultados que trataremos no próximo capítulo, quando será abordado um algoritmo para localização de autovalores em cografos.

3.2 Representação na forma normalizada

Um cografo possui um tipo de representação, que é chamado de forma normalizada, a qual está ligada às operações união e complemento, ou união e junção. Nos trabalhos [2, 5], um cografo encontra-se na forma normalizada quando satisfaz a definição abaixo.

Definição 3.1 (Forma normalizada). *A forma normalizada de um cografo é definida como:*

(i) Se G é um cografo conexo, então sua forma normalizada é expressa como sendo um único vértice, ou a união complementada de $k \geq 2$ cografos conexos G_i na forma normalizada, isto é:

$$G = \overline{G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k}$$

(ii) Se G é um cografo desconexo, então sua forma normalizada é o complemento de um cografo conexo na forma normalizada.

O próximo resultado mostra que todo cografo pode ser representado na forma normalizada.

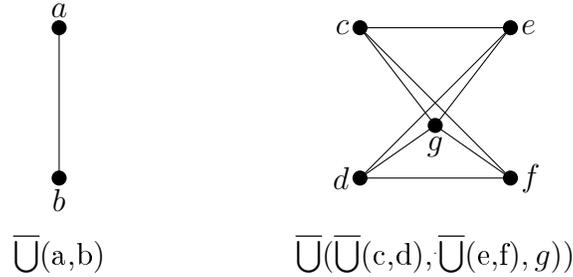
Teorema 3.2. *Todo cografo G pode ser representado na forma normalizada.*

Demonstração. Vamos considerar primeiramente G conexo e proceder por indução em n , a ordem de G . Utilizando a base de indução $n = 1$, temos que um único vértice é um cografo, e está na forma normalizada. Seja G de ordem $n > 1$ e vamos assumir, pela hipótese de indução, que todos os cografos conexos de ordem $j < n$ podem ser representados na forma normalizada. De acordo com as caracterizações recursivas, G é obtido através de uniões e complementos, e podemos assumir que todas as uniões envolvem $k \geq 2$ cografos. Sendo G conexo, a última operação deve ser um complemento, digamos:

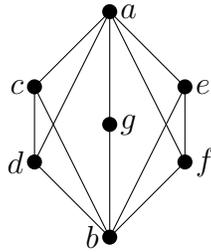
$$G = \overline{G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k} \quad (1)$$

Podemos assumir que nenhum G_i em (1), é expresso como uma união de grafos, caso contrário, poderíamos incluir os grafos que unidos formam G_i de forma

Unindo os grafos acima $\overline{U}(c,d)$, $\overline{U}(e,f)$ e g , e logo após tomando a união complementada, obtemos parcialmente o cografo e sua forma normalizada $\overline{U}(\overline{U}(c,d), \overline{U}(e,f), g)$.



Agora tomamos a união complementada de $G_1 = \overline{U}(a,b)$, com $G_2 = \overline{U}(\overline{U}(c,d), \overline{U}(e,f), g)$, ou seja, $G = \overline{G_1 \cup G_2}$, obtemos cografo abaixo.



Observação 3.4. *Se dois cografos possuem a mesma forma normalizada, então eles são isomorfos, e além disso a forma normalizada de um cografo é única.*

A árvore com raiz representando a estrutura de um cografo na forma normalizada é chamada de coárvore, onde as folhas desta coárvore são os vértices e os nodos internos representam as operações união e complemento, ou união e junção. Detalharemos a estrutura da coárvore na próxima representação.

3.3 Representação através da coárvore.

Um cografo pode ser representado na forma de uma árvore, denominada coárvore. A importância de conhecermos a representação de um cografo nesta forma, é porque muitos algoritmos utilizam a coárvore como base de seu processamento, podemos citar o algoritmo abordado em [5], que auxilia na obtenção de informações a respeito do espectro de um cografo. De acordo com [26], podemos definir dois tipos de coárvores, que denotaremos por T_{Gr} e T_G .

Definição 3.5 (Coárvore enraizada). *A coárvore do tipo T_{Gr} de um cografo G , é chamada de árvore enraizada (com r sendo a raiz) e com vértices interiores w (chamados de nodos internos). Estes vértices interiores podem ser do tipo \oplus , que correspondem a operação de união, ou do tipo \otimes , que correspondem a operação de junção nos vértices do cografo. Os vértices terminais (também chamados de folhas), representam os vértices de G . Além disso, se o cografo for conexo a raiz será \otimes , e se for desconexo a raiz será \oplus .*

Neste tipo de coárvore, qualquer vértice interior w representa um subgrafo induzido G_w de G , que ocorre a partir de w e dos seus sucessores até os vértices terminais. Temos também que todos os vértices terminais estão á mesma distância da raiz, e todos os vértices interiores que estão a mesma distância da raiz são do mesmo tipo, ou seja, representam a mesma operação.

Desta forma, há uma alternância entre os tipos \otimes e \oplus nos vértices interiores. Os sucessores diretos de w , denotados por w_1, w_2, \dots, w_q , representam os subgrafos $G_{w_1}, G_{w_2}, \dots, G_{w_q}$. Se w é do tipo \oplus , então $G_w = \sum_{i=1}^q G_{w_i}$. E se w é do tipo \otimes , então $G_w = \prod_{i=1}^q G_{w_i}$. É claro que $G = G_r$, lembrando que r é a raiz.

Definição 3.6 (Coárvore minimal). *A coárvore do tipo T_G , é chamada de coárvore minimal, ela é obtida excluindo os vértices interiores de T_{Gr} , que possuem exatamente um sucessor direto (filho). Neste caso, esta relação sucessor e antecessor (ou pai e filho) de vértices permanecem identificadas e a alternância entre os tipos \otimes e \oplus nos vértices interiores é mantida a cada nível da coárvore.*

Podemos observar uma representação mais resumida na coárvore minimal em relação a coárvore enraizada, e é este tipo de coárvore (minimal) que é obtida através da representação de um cografo na forma normalizada. Todas as representações de cografos feitas neste trabalho que utilizam a coárvore, são feitas através da coárvore minimal.

Como já mencionado no capítulo anterior, a coárvore é representada em níveis, onde cada nível possui nodos internos que representam as operações união \oplus e junção \otimes de forma alternada. A profundidade da coárvore é o número de arestas que estão no maior caminho entre a raiz e as folhas, e os níveis de profundidade são definidos a partir da raiz no sentido das folhas, onde a cada alternância entre as operações \otimes e \oplus temos um novo nível constituído.

A Figura 3.1 mostra um cografo G e as suas representações através dos tipos de coárvores T_{Gr} e T_G .

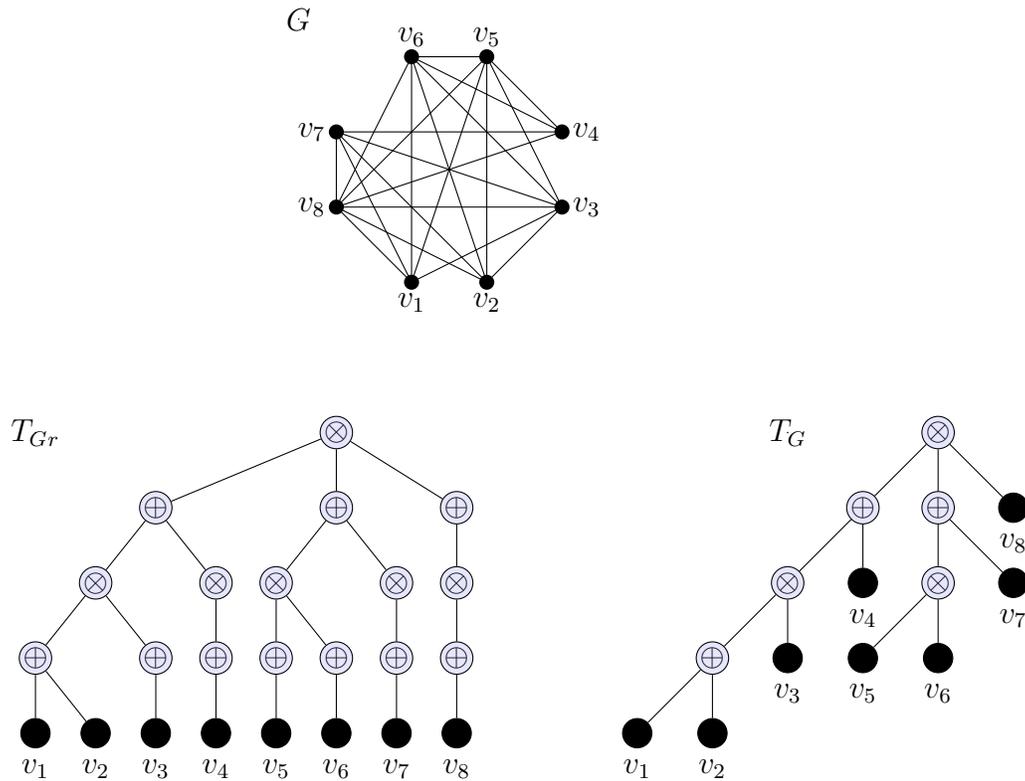


Figura 3.1: cografo G , coárvore enraizada T_{Gr} e coárvore minimal T_G .

Outra forma de representar a coárvore de um cografo pode ser vista em [12, 30], onde a coárvore pode ser construída através de operações envolvendo uniões disjuntas (chamada de composição paralela), e através de operações de complemento (chamada de composição em série). As folhas da coárvore são os vértices do cografo e os nodos internos são rotulados por 0 (composição paralela), se o subgrafo induzido deste nodo até as folhas é desconexo, ou rotulado por 1 (composição em série), se o subgrafo induzido deste nodo até as folhas é conexo. A coárvore neste formato é apresentada na forma minimal, e os caminhos que vão das folhas para a raiz alternam-se com os rótulos 0 e 1, anteriormente a alternância era com \oplus e \otimes . A próxima figura

mostra um cografo e sua representação de coárvore em composições em paralelo e em série.

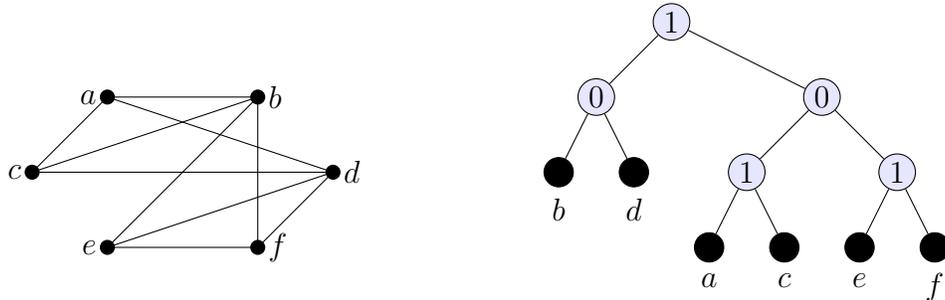
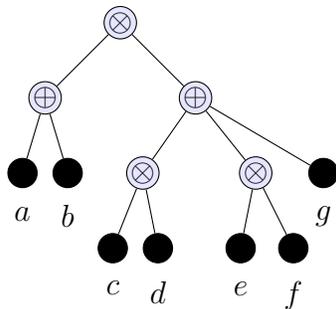


Figura 3.2: Um cografo e sua coárvore com os rótulos 0 e 1

Exemplo 3.7. Retomando a forma normalizada representada do Exemplo 3.3, e escrevendo a mesma com as operações união e junção temos: $\otimes(\oplus(a, b), \oplus(\otimes(c, d), \otimes(e, f), g))$. Assim constituímos a coárvore.



Um resultado importante a respeito da coárvore, é a unicidade de sua representação, assim segue o próximo resultado. Utilizaremos apenas o termo coárvore para o tipo de coárvore minimal.

Teorema 3.8. A representação de um cografo através de sua coárvore T é única, a menos de permutações de filhos nos nodos internos de T .

Demonstração. Vamos mostrar por indução em $n = |V(G)|$, número de vértices de um cografo G . Como base de indução, vamos considerar $n = 2$, onde um cografo formado por dois vértices ou é conexo, ou é desconexo. No caso conexo, a córvore possui duas folhas ligadas diretamente à raiz \otimes , e no caso desconexo, a córvore possui duas folhas ligadas diretamente à raiz \oplus . E portanto, a representação de córvore é dada de forma única.

Vamos supor que todo cografo de ordem $j < n$ possui uma única representação de córvore. Como G é cografo, ou G é desconexo, ou G é o complemento de um grafo desconexo. No caso de G desconexo, podemos escrever $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, ou seja, a união de $K \geq 2$ cografos, cada qual com ordem menor ou igual a j . Assim, pela hipótese de indução, cada G_i possui representação de córvore de forma única. Neste caso, a raiz da córvore de G é representada por \oplus , e cada G_i na sua representação de córvore fica ligado à raiz \oplus . A unicidade de representação de cada G_i garante a unicidade da representação de G . No caso de G ser o complemento de um grafo desconexo, observe que $\overline{G} = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, ou seja, a união de $K \geq 2$ cografos, cada qual com ordem menor ou igual a j . Tomando o complementar de \overline{G} , temos que $G = \overline{G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k}$, e consequentemente $G = \overline{G_1} \otimes \overline{G_2} \otimes \dots \otimes \overline{G_k}$, ou seja, G é a junção de $K \geq 2$ cografos, cada qual com ordem menor ou igual a j . Neste caso, a raiz da córvore de G é representada por \otimes , e cada G_i na sua representação de córvore fica ligado à raiz \otimes . A unicidade de representação de cada G_i garante a unicidade da representação de G . Note que trocas de posições de filhos de nodos internos ou da raiz não modificam a córvore e nem a construção do cografo. \square

Na estrutura de córvore, vários algoritmos possuem sua base de processamento, como exemplo temos o algoritmo que vamos estudar no capítulo 4.

3.4 Representação através da matriz de adjacência

Um grafo pode ser representado por uma matriz A chamada matriz de adjacência. Esta matriz é formada por zeros e uns, é simétrica, e possui todos os autovalores reais, para maiores detalhes ver [22]. A diagonal principal é formada por zeros e conseqüentemente, o traço de A é zero, e a soma dos autovalores associados a A vale zero. No caso de cografos, temos algumas particularidades em alguns blocos desta matriz devido ao relacionamento dos vértices (duplicados ou coduplicados).

Definição 3.9 (Matriz de adjacência). *Se $|V| = n$, a matriz de adjacência $A = [a_{ij}]$ de um grafo $G(V, E)$, é a matriz $n \times n$ composta de zeros e uns, onde $a_{ij} = 1$, se e somente se v_i e v_j são adjacentes.*

Uma consequência no formato da matriz de adjacência em cografos é que vértices irmãos duplicados, digamos v_k e v_l , implicam que as linhas e colunas k e l da matriz de adjacência A são iguais. Por outro lado, se v_k e v_l são irmãos coduplicados, então as linhas e colunas k e l da matriz de adjacência A são iguais, exceto em duas posições $A[k, k] = A[l, l] = 0$ e $A[k, l] = A[l, k] = 1$. Vamos agora verificar alguns resultados sobre o posto da matriz de adjacência de um cografo, iniciaremos com a definição de posto de uma matriz.

Definição 3.10 (Posto). *O posto de uma matriz, é a quantidade de linhas ou colunas linearmente independentes.*

Seja A a matriz de adjacência de um grafo G , o posto de G é definido como o posto da matriz de adjacência que o representa. No caso de cografos, temos que o posto é o número linhas distintas não nulas da matriz de adjacência. O Teorema 3.11 e o Corolário 3.12 estabelecem este resultado.

Teorema 3.11. *Seja G um cografo, onde temos que todas linhas da matriz de adjacência de G são distintas e não nulas, então G possui posto máximo, isto é, o posto é igual ao número de vértices de G .*

A demonstração do Teorema 3.11 pode ser vista em [13], onde Royle utiliza que, para um cografo ter posto máximo, ou seja, igual ao seu número de vértices, ele não deve possuir zero como um autovalor. A prova segue baseada no polinômio característico de G , e requer uma série de resultados preliminares sobre o impacto das operações de união e junção de vértices no polinômio característico de um cografo. Desta forma, optamos por não apresentar estes detalhes neste trabalho e o leitor interessado poderá conferir em [13] como já mencionado. Como consequência do Teorema 3.11, temos o Corolário 3.12 abaixo, que é um resultado importante desta representação. A demonstração do mesmo aparece em [13].

Corolário 3.12. *O posto de um cografo G é o número de linhas distintas não nulas da matriz de adjacência de G .*

Demonstração. Provaremos por indução no número de vértices de G . É verdadeiro, se o cografo possuir apenas um vértice. Se a matriz de adjacência de G não possuir linhas repetidas ou nulas, o resultado segue do Teorema 3.11. Se a matriz de adjacência de G possuir linhas repetidas, então existem dois vértices, digamos u e v , com a mesma vizinhança. Logo o grafo $G - u$ é um cografo, e possui posto igual à matriz de adjacência de $G - u$. Desta forma, fica claro que o posto de $G - u$ é igual ao posto de G , e a matriz de adjacência de G possui o mesmo número de linhas distintas não nulas da matriz de adjacência de $G - u$. Se a matriz de adjacência de G possuir linhas nulas, então existem vértices isolados em G , digamos que u seja um vértice isolado em G . Logo o grafo $G - u$ é um cografo, e possui posto igual à matriz de

adjacência de $G - u$. E o posto de $G - u$ é igual ao posto de G . Portanto, segue o resultado. \square

Observação 3.13. *Uma outra demonstração do Corolário 3.12, pode ser consultada em [14]. Neste caso, um algoritmo semelhante ao de escalonamento é processado nas linhas e colunas da matriz de adjacência de um cografo com o objetivo de tentar anular as mesmas, e com isto permanecer apenas com as linhas e colunas linearmente independentes.*

Exemplo 3.14. *O cografo da Figura 3.2 possui posto 5, pelo fato de possuir as linhas 2 e 4 iguais e as demais distintas e não nulas. Abaixo segue a matriz de adjacência.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E com estas formas de representações finalizamos este capítulo, passando agora a detalhar o processamento de um algoritmo de localização de autovalores em cografos, o qual tem como base de processamento a representação de um cografo através da coárvore, provocando uma diagonalização da matriz $A + xI$, onde A é a matriz de adjacência e x é um número real.

4 ALGORITMO DE LOCALIZAÇÃO DE AUTOVALORES EM COGRAFOS - DIAGONALIZE

4.1 Introdução

Há diversos trabalhos que trazem aplicações de algoritmos na classe dos cografos, por exemplo nos trabalhos [5, 9, 30, 31]. Em [5], o algoritmo estudado auxilia a localizar os autovalores associados a matriz de adjacência de um cografo. O objetivo deste capítulo é explorar o funcionamento deste algoritmo de localização de autovalores. Desta forma, abordaremos a metodologia de processamento do algoritmo, onde a partir de um certo valor x real, obtemos uma matriz diagonal D congruente a $A + xI$, onde A é a matriz de adjacência do cografo.

Observamos também que este algoritmo tem início no nível mais profundo da cóarvore associada ao cografo, impactando em operações efetuadas nas linhas e colunas de $A + xI$, e tem como objetivo anular todas entradas desta matriz que não estão na diagonal principal, e isto garantirá que a matriz D possui a mesma inércia que a matriz $A + xI$. Através da diagonal da matriz D , poderemos determinar a quantidade de autovalores acima do valor $-x$, abaixo do valor $-x$, e com a multiplicidade de $-x$.

4.2 Congruência de matrizes e Lei da Inércia de Sylvester

Nesta seção abordaremos alguns resultados acerca da congruência de matrizes e do significado de inércia de uma matriz. Estes resultados fornecerão o suporte teórico para o funcionamento do algoritmo de localização de autovalores em cografos. Antes disso, vamos recapitular algumas definições sobre polinômio característico e o conjunto dos autovalores associados a uma matriz. Em particular estamos interessados nos resultados associados à matriz de adjacência de um cografo.

Definição 4.1 (Polinômio característico e autovalor). *Seja a matriz de adjacência A de um grafo G , então $\det(\lambda I - A)$ é denominado polinômio característico de G e é denotado por $P_G(\lambda)$. Assim, λ é dito um autovalor do grafo G , quando é raiz de $P_G(\lambda)$.*

Passaremos agora à definição de espectro, considerando os autovalores distintos associados a matriz A : $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$, e as respectivas multiplicidades $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$.

Definição 4.2 (Espectro). *O espectro do grafo G , $spect(G)$, é definido por uma matriz $2 \times s$, onde a primeira linha é formada pelos autovalores de A dispostos em ordem decrescente e a segunda linha pelas respectivas multiplicidades algébricas. Escrevemos:*

$$spect(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdots \lambda_s \\ m(\lambda_1) \cdots m(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.3. *Seja o cografo da Figura 3.2, sua matriz de adjacência aparece no Exemplo 3.14:*

O polinômio característico é: $P_G(\lambda) = \lambda^6 - 10\lambda^4 - 8\lambda^3 + 9\lambda^2 + 8\lambda$.

E seu espectro:

$$\text{spect}(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}) & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que as somas das entradas de cada linha da matriz de adjacência correspondem ao grau de cada vértice, ou seja, ao número de arestas que incide em cada vértice. Além disso, note também que seja G um grafo com n vértices, então o polinômio característico tem a forma geral: $P_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$. A partir de agora vamos apresentar alguns resultados sobre inércia e congruência de matrizes.

Definição 4.4 (Congruência de matrizes). *Uma matriz quadrada B é dita congruente a uma matriz quadrada A , e denotamos $A \cong B$ se, e somente se existe uma matriz não singular P , tal que $B = P^T A P$.*

Observamos que a congruência de matrizes é uma relação de equivalência, ou seja, valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 4.5 (Operações cogredientes). *Uma operação elementar aplicada na linha k de uma matriz quadrada, seguida da mesma operação aplicada na coluna k correspondente é chamada de operação **cogrediente** elementar na matriz.*

As operações elementares aplicadas nas linhas (colunas) podem ser:

- (1) troca de linhas (colunas) j por k .
- (2) multiplicação de uma linha (coluna) por um escalar $c \neq 0$.

(3) adição de a vezes uma linha (coluna) j , com outra linha (coluna) k , com $j \neq k$.

Assim se A e B são matrizes $m \times n$, então nos dizemos que A é equivalente por linhas (colunas) a B , se e somente se, B é obtida de A por sucessivas aplicações finitas das operações elementares. A equivalência por linhas (colunas) de matrizes é reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema 4.6. *Se A e B são matrizes $n \times n$, então $A \cong B$, se e somente se, B é obtida de A por uma sequência finita de operações **cogredientes** elementares.*

Demonstração. Para a implicação de ida supomos $B \cong A$, e então $B = P^T A P$, onde P^T é não singular.

Logo $P^T = E_1 E_2 \cdots E_k$, onde E_i são matrizes elementares.

Assim $B = E_1 E_2 \cdots E_k A E_k^T \cdots E_2^T E_1^T$ e portanto B é obtida de A a partir de uma sequência de k operações cogredientes elementares.

Para a implicação de volta, basta observar que o produto das matrizes elementares, ou cogredientes elementares é a matriz P^T e que a transposta do produto das matrizes elementares é P . □

Exemplo 4.7. *Vamos mostrar uma aplicação do Teorema 4.6, obtendo uma matriz B congruente a uma matriz A .*

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos obter uma matriz diagonal congruente a A , fazendo as seguintes operações nas linhas de A :

$$1. \ l_2 = l_2 - 2l_1$$

$$2. \ l_3 = l_3 - l_1$$

$$3. \ l_3 = l_3 - 2l_2$$

Para entender como aparecem as matrizes E_i , com $i = 1, 2, \dots, k$, tomamos a matriz A aumentada de uma matriz identidade de mesma ordem conforme abaixo:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Fazendo a operação 1, modificamos a matriz A e modificamos a matriz identidade associada, obtendo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

E com isto obtemos E_3 :

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Repetimos o processo com a matriz A modificada aumentada com uma nova matriz identidade, fazendo a operação 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

O que resulta em:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

E a matriz E_2 será:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E da mesma forma como realizado anteriormente, obtemos E_1 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim a matriz P^T será o produto $E_1E_2E_3$, e portanto:

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz B é o resultado do produto P^TAP , onde P é a transposta da matriz P^T .

E portanto a matriz B será:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Observação 4.8. *Podemos obter a matriz P^T fazendo todas as operações na matriz A e simultaneamente na matriz identidade aumentada, ou seja, a cada operação, podemos manter o resultado obtido da matriz identidade aumentada e acumular nela o resultado da próxima operação, o resultado no final do processo será a matriz P^T . Preferimos fazer desta forma, passo a passo, para apresentar as matrizes E_i .*

Agora mostraremos alguns resultados que envolvem a definição de inércia de matrizes.

Definição 4.9 (Inércia de uma matriz). *O terno de inteiros não negativos (p, j, s) é dito ser a inércia da matriz A , quando A possui p autovalores positivos, j autovalores negativos e 0 é autovalor com multiplicidade s .*

Ao final desta série de resultados, teremos que é possível obter, a partir de uma matriz simétrica A , uma matriz diagonal congruente a A , onde os sinais dos

valores na diagonal representam a inércia de A . A demonstração do lema abaixo pode ser vista em [22].

Lema 4.10. *Se A tem inércia (p, j, s) , então $A \cong E$, onde:*

$$E = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_j & \\ & & O_{s \times s} \end{bmatrix}$$

A matriz E é composta pelo bloco I_p , que é a matriz identidade de ordem p , pelo bloco $-I_j$, que é a matriz identidade de ordem j com sinal negativo e a matriz nula de ordem s .

Demonstração. Se $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, -\lambda_{p+1}, \dots, -\lambda_{p+j}, 0, \dots, 0\}$ é o multiconjunto dos autovalores de A (incluindo as multiplicidades), onde cada $\lambda_i > 0$, então existe uma matriz ortogonal P tal que:

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, -\lambda_{p+1}, \dots, -\lambda_{p+j}, 0, \dots, 0).$$

Tomando $C = PS$, onde $S = \text{diag}(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_p^{-\frac{1}{2}}, 1, \dots, 1)$, então S é matriz não singular e

$$\begin{aligned} C^T A C &= (PS)^T A (PS) = S^T (P^T A P) S \\ &= S^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, -\lambda_{p+1}, \dots, -\lambda_{p+j}, 0, \dots, 0) S \\ &= \text{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_p^{\frac{1}{2}}, -\lambda_{p+1}^{\frac{1}{2}}, \dots, -\lambda_{p+j}^{\frac{1}{2}}, 0, \dots, 0) S = E \end{aligned}$$

□

O resultado abaixo é a Lei da Inércia de Sylvester, a qual garante que matrizes congruentes possuem a mesma inércia. Este resultado pode ser visto também em [22].

Teorema 4.11. (*Lei da Inércia de Sylvester*) $A \cong B$ se, e somente se A e B possuem a mesma inércia.

Demonstração. Suponha $B \cong A$ e seja (q, k, t) a inércia de B .

Pelo Lema 4.10 $B \cong F$, onde:

$$F = \begin{bmatrix} I_q & & \\ & -I_k & \\ & & O_{t \times t} \end{bmatrix}$$

Agora, usando o Lema 4.10 para a matriz A , temos $A \cong E$, sendo E definida como no Lema, então $F \cong E$. Logo, F e E possuem o mesmo posto e daí, $s = t$. Para concluir que $p = q$ vamos raciocinar indiretamente, para isto, suponhamos por absurdo que $p > q$.

Seja K uma matriz $n \times n$ não singular tal que:

$$F = K^T E K$$

Podemos escrever $K = [X_{n \times q} | Y_{n \times (n-q)}]$.

Sejam $\omega = \text{Im}(Y)$ o subespaço de R^n gerado pelas colunas de Y , ν um subespaço de R^n gerado pelos vetores canônicos e_1, e_2, \dots, e_p , onde ω e ν geram o R^n , então:

$$\dim(\omega \cap \nu) = \dim\omega + \dim\nu - \dim(\omega + \nu) = (n - q) + p - n = p - q > 0.$$

Logo existe vetor não nulo $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T \in \omega \cap \nu$. Ora, como $x \in \omega$, então existe $y = [y_1 y_2 \cdots y_{n-q}]^T \in R^{n-q}$ tal que $Yy = x$.

Portanto,

$$x = Yy = K \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

Daí temos que:

$$x^T E x = [0^T y^T] K^T E K \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = [0^T y^T] F \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1^2 \\ -y_2^2 \\ \vdots \\ -y_k^2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0.$$

Por outro lado, como $x \in \nu$, então $x = [x_1 x_2 \cdots x_p 0 \cdots 0]^T$.

Logo,

$$x^T E x = [x_1 x_2 \cdots x_p 0 \cdots 0]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} > 0.$$

Assim, não pode ocorrer $p > q$. Um argumento análogo mostra que também não é possível que seja $p < q$. Portanto $p = q$. Fica provado que, se $A \cong B$, então A e B possuem a mesma inércia.

Reciprocamente, supondo que A e B possuem a mesma inércia, temos pelo Lema 4.10 que $A \cong E \cong B$.

□

Exemplo 4.12. *No Exemplo 4.6, obtivemos uma matriz congruente B a partir da matriz A . Calculando os autovalores associados a B temos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -6$. Os autovalores da matriz A são $\mu_1 = 11,1583$, $\mu_2 = 0,6086$ e $\mu_3 = -1,7669$.*

Podemos perceber que existe, tanto em B quanto em A , dois autovalores positivos e um autovalor negativo, indicando que B e A possuem a mesma inércia. Com base nos fundamentos teóricos apresentados, vamos verificar o funcionamento do algoritmo Diagonalize.

4.3 Algoritmo de localização de autovalores de cografos

O processamento do algoritmo depende do relacionamento dos vértices do cografo, e divide-se em **caso 1**, para vértices coduplicados ($w = \otimes$) e em **caso 2**, para vértices duplicados ($w = \oplus$). Sejam $\{v_k, v_l\}$ irmãos na coárvore de G e sejam os valores d_k e d_l os valores da diagonal nas linhas k e l da matriz $A + xI$, onde A é a matriz de adjacência de um cografo, então teremos:

caso 1 ($w = \otimes$) $\{v_k, v_l\}$ são coduplicados e a matriz $A + xI$ nas linhas e colunas k e l tem a forma:

$$\begin{bmatrix} & & & a_1 & a_1 & & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ a_1 & \dots & d_k & 1 & \dots & a_n & \\ a_1 & \dots & 1 & d_l & \dots & a_n & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & & & a_n & a_n & & \end{bmatrix}$$

Onde as entradas da matriz são iguais a 0 ou 1, exceto possivelmente em d_k e d_l . Então as operações:

$$L_k \leftarrow L_k - L_l$$

$$C_k \leftarrow C_k - C_l$$

Modificam a matriz para:

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & a_1 & & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & d_k + d_l - 2 & 1 - d_l & \dots & 0 & \\ a_1 & \dots & 1 - d_l & d_l & \dots & a_n & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & & & 0 & a_n & & \end{bmatrix}$$

Com isto, a linha e a coluna k encontram-se praticamente nulas, exceto na diagonal e nas posições onde ela vale $1 - d_l$.

Para anular estas posições, três casos poderão ocorrer:

Subcaso 1a: quando $d_k + d_l - 2 \neq 0$, então efetuaremos as operações:

$$L_l \leftarrow L_l - \frac{1-d_l}{d_k+d_l-2} L_k$$

$$C_l \leftarrow C_l - \frac{1-d_l}{d_k+d_l-2} C_k$$

E obteremos:

$$d_k \leftarrow d_k + d_l - 2 \qquad d_l \leftarrow \frac{d_k d_l - 1}{d_k + d_l - 2}$$

Com a linha e a coluna k diagonalizadas, o valor d_k fica inalterado e o vértice v_k é removido da coárvore, isto é, $T_G \leftarrow T_G - v_k$

Subcaso 1b: quando $d_k + d_l = 2$ e $d_l = 1$, então já está pronto. A matriz terá o formato abaixo:

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & a_1 & & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ a_1 & \dots & 0 & 1 & \dots & a_n & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & & & 0 & a_n & & \end{bmatrix}$$

E obteremos:

$$d_k \leftarrow 0 \qquad d_l \leftarrow 1$$

E o vértice v_k é removido da coárvore $T_G \leftarrow T_G - v_k$.

Subcaso 1c: quando $d_k + d_l = 2$ e $d_l \neq 1$, então a matriz tem o formato:

$$\begin{bmatrix} & & 0 & a_1 & & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 - d_l & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & 1 - d_l & d_l & \dots & a_n \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & 0 & a_n & & \end{bmatrix}$$

Note que $a_1, \dots, a_n \in \{v_k, v_l\}$ e já que $1 - d_l \neq 0$, para cada $i \neq k, l$ onde $a_{il} = 1$ fazemos:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{1}{1-d_l} L_k$$

$$C_i \leftarrow C_i - \frac{1}{1-d_l} C_k$$

As operações acima zeram a linha e a coluna l sem alterar qualquer outro valor. Assim ficamos com a matriz na forma:

$$\begin{bmatrix} & & 0 & 0 & & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 - d_l & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 - d_l & d_l & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Agora fazendo a sequência de operações:

$$L_l \leftarrow L_l + \frac{1}{2} L_k$$

$$C_l \leftarrow C_l + \frac{1}{2} C_k$$

$$d_k \leftarrow d_k + d_l \qquad d_l \leftarrow \frac{d_k d_l}{d_k + d_l}$$

E removemos o vértice v_k da coárvore $T_G \leftarrow T_G - v_k$.

Subcaso 2b: quando $d_k + d_l = 0$ e $d_l = 0$. Similarmente ao subcaso 1b, a matriz está na forma diagonal.

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & a_1 & & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_n & \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ & & & 0 & a_n & & \end{bmatrix}$$

Onde:

$$d_k \leftarrow 0 \qquad d_l \leftarrow 0$$

E o vértice v_k é removido da coárvore $T_G \leftarrow T_G - v_k$.

Subcaso 2c: quando $d_k + d_l = 0$ e $d_l \neq 0$. Note que $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ e desde que $d_l \neq 0$, para cada $i \neq k, l$ onde $a_{il} = 1$ fazemos:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{1}{d_l} L_k$$

$$C_i \leftarrow C_i - \frac{1}{d_l} C_k$$

Assim obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} & & 0 & 0 & & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & -d_l & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -d_l & d_l & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

E com isto, prosseguimos fazendo:

$$L_k \leftarrow L_k + L_l$$

$$C_k \leftarrow C_k + C_l$$

Obtendo:

$$\begin{bmatrix} & & 0 & 0 & & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & -d_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_l & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Assim:

$$d_k \leftarrow -d_l \qquad d_l \leftarrow d_l$$

E removemos os vértices v_k e v_l da coárvore $T_G \leftarrow T_G - \{v_k, v_l\}$

O algoritmo então se divide em casos 1 e 2 e subcasos a , b e c . Apresentaremos agora a descrição do algoritmo.

| |
|-----------------------|
| Algoritmo Diagonalize |
|-----------------------|

INPUT: Coárvore T_G , escalar x .

OUTPUT: matriz diagonal $D = [d_1, d_2, \dots, d_n]$ congruente a $A(G) + xI$.

Algoritmo Diagonalize (T_G, x)

inicializar $d_i := x$, para $1 \leq i \leq n$

quando T_G possuir ≥ 2 folhas

selecionar irmãos $\{v_k, v_l\}$ com maior profundidade com pai w

$\alpha \leftarrow d_k$ $\beta \leftarrow d_l$

se $w = \otimes$

se $\alpha + \beta \neq 2$ // subcaso 1a

$d_k \leftarrow \alpha + \beta - 2$; $d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2}$; $T_G = T_G - v_k$.

senão, se $\beta = 1$ // subcaso 1b

$d_k \leftarrow 0$; $d_l \leftarrow 1$; $T_G = T_G - v_k$

senão // subcaso 1c

$d_k \leftarrow -(1 - \beta)^2$; $d_l \leftarrow 1$; $T_G = T_G - v_k$; $T_G = T_G - v_l$

senão, se $w = \oplus$

se $\alpha + \beta \neq 0$ //subcaso 2a

$d_k \leftarrow \alpha + \beta$; $d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$; $T_G = T_G - v_k$

senão, se $\beta = 0$ //subcaso 2b

$d_k \leftarrow 0$; $d_l \leftarrow 0$; $T_G = T_G - v_k$

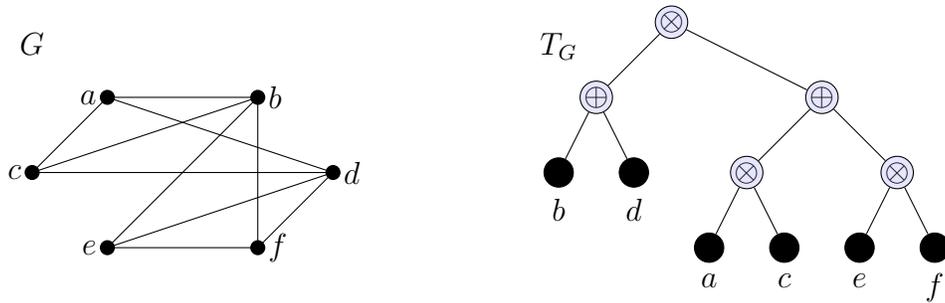
senão //subcaso 2c

$d_k \leftarrow -\beta$; $d_l \leftarrow \beta$; $T_G = T_G - v_k$; $T_G = T_G - v_l$

retorna T_G

Faremos em um exemplo aplicado num cografo G , verificando as implicações que ocorrerão na coárvore e na matriz $A + xI$ associadas.

Exemplo 4.13. *Segue abaixo o cografo G , com sua matriz de adjacência A , sua coárvore T_G e seu espectro $\text{spect}(A)$. Escolheremos $x = 0$ para esta aplicação, e com isto vamos obter a matriz $A + xI = A$. Ao final verificaremos quantos autovalores são menores, iguais ou maiores do que zero. A cada passo deste processo "eliminamos" um vértice da coárvore T_G e uma linha e coluna na matriz $A + xI$.*



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}) & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que a profundidade da coárvore é o número de arestas que estão no maior caminho entre a raiz e as folhas, e os níveis de profundidade são definidos

a partir da raiz no sentido das folhas, onde a cada alternância entre as operações \otimes e \oplus temos um novo nível constituído. Podemos observar que a coárvore T_G possui três níveis, o primeiro é a raiz \otimes , pois o cografo é conexo, o segundo nível é \oplus , onde estão os vértices b e d , e o terceiro nível alterna novamente para \otimes com os vértices a, c, e e f .

Com algumas operações efetuadas na matriz $A + xI$ e baseado na estrutura da coárvore T_G , encontraremos uma matriz diagonal D congruente a $A + xI$, onde na diagonal de D é possível verificar a quantidade de elementos maiores, iguais ou menores que zero. Esta quantidade de elementos maiores, iguais ou menores do que zero indica quantos autovalores existem acima, iguais ou abaixo de $-x$.

Subcaso 1a - sequência de operações em A com base nos vértices (a, c) de T_G

$$L_1 = L_1 - L_3$$

$$C_1 = C_1 - C_3$$

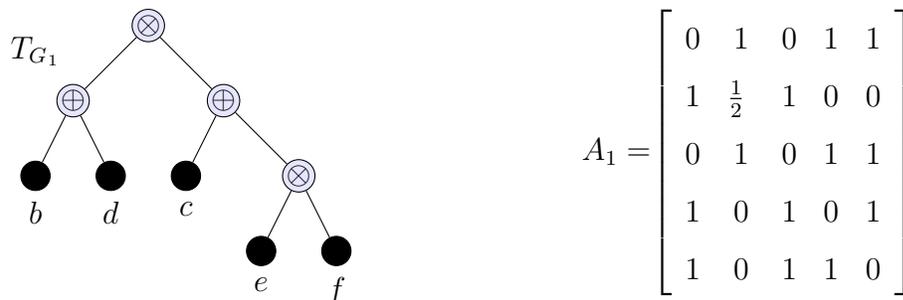
$$L_3 = L_3 + \frac{1}{2} L_1$$

$$C_3 = C_3 + \frac{1}{2} C_1$$

Após estas operações, a matriz A torna-se:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isto eliminamos o vértice **a** da coárvore T_G , e a primeira linha e primeira coluna da matriz A , obtendo $\mathbf{a} = -\mathbf{2}$ e uma nova matriz A_1 e coárvore T_{G_1} :



Note que o vértice **c** sobe um nível na coárvore, ocupando a posição da operação \otimes que tinha juntamente com o vértice **a**.

Subcaso 1a - sequência de operações em A_1 com base nos vértices (e, f) de T_{G_1}

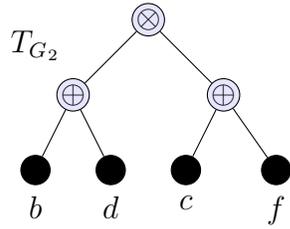
$$L_4 = L_4 - L_5 \qquad C_4 = C_4 - C_5$$

$$L_5 = L_5 + \frac{1}{2} L_4 \qquad C_5 = C_5 + \frac{1}{2} C_4$$

Após estas operações, a matriz A_1 torna-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Com isto eliminamos o vértice **e** da coárvore T_{G_1} , e a quarta linha e quarta coluna da matriz A_1 , obtendo $\mathbf{e} = -\mathbf{2}$ e uma nova matriz A_2 e coárvore T_{G_2} :



$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Note que, da mesma forma que ocorreu antes com o vértice **a**, o vértice **f** sobe um nível na coárvore, ocupando a posição da operação \otimes que tinha juntamente com o vértice **e**.

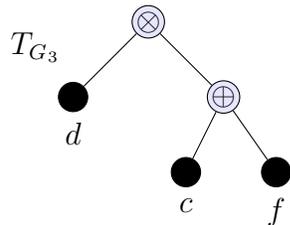
Subcaso 2b - sequência de operações em A_2 com base nos vértices (b, d) de T_{G_2}

$$L_1 = L_1 - L_3 \qquad C_1 = C_1 - C_3$$

Após estas operações, a matriz A_2 torna-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora eliminamos o vértice **b** da coárvore T_{G_2} , e a primeira linha e primeira coluna da matriz A_2 , obtendo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e uma nova matriz A_3 e coárvore T_{G_3} :



$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora o vértice **d** sobe um nível na coárvore, ocupando a posição da operação \oplus que tinha com o vértice **b**.

Subcaso 2a - sequência de operações em A_3 com base nos vértices (c, f) de T_{G_3}

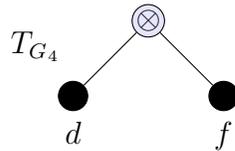
$$L_1 = L_1 - L_3 \qquad C_1 = C_1 - C_3$$

$$L_3 = L_3 + \frac{1}{2} L_1 \qquad C_3 = C_3 + \frac{1}{2} C_1$$

Após estas operações, a matriz A_3 torna-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Com isto eliminamos o vértice **c** da coárvore T_{G_3} , e a primeira linha e primeira coluna da matriz A_3 , obtendo $\mathbf{c} = \mathbf{1}$ e uma nova matriz A_4 e coárvore T_{G_4} :



$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Subcaso 1a - sequência de operações em A_4 com base nos vértices (d, f) de T_{G_4}

$$L_1 = L_1 - L_2 \qquad C_1 = C_1 - C_2$$

$$L_2 = L_2 + \frac{3}{7} L_1 \qquad C_2 = C_2 + \frac{3}{7} C_1$$

Após estas operações, a matriz A_4 torna-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{-7}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

E por fim, temos $\mathbf{d} = \frac{-7}{4}$ e $\mathbf{f} = \frac{4}{7}$. Obtendo os valores a, b, c, d, e, f , temos os elementos da diagonal da matriz D :

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Temos ainda que a matriz D é congruente a matriz A e como utilizamos $x = 0$, podemos concluir que o cografo G possui dois autovalores maiores do que 0 por causa do sinal positivo de \mathbf{c} e \mathbf{f} , um autovalor igual a 0 por $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e três autovalores menores do que 0, por causa do sinal negativo de \mathbf{a} , \mathbf{d} e \mathbf{e} .

A partir de agora apresentaremos algumas justificativas e resultados do funcionamento do algoritmo apresentado no Exemplo 4.13.

As entradas do algoritmo são a coárvore T_G e x , a partir daí um par de vértices irmãos $\{v_k, v_l\}$, no nível mais profundo de T_G , são selecionados, e ocorre uma iteração nas linhas e colunas k e l da matriz $A + xI$ (operações cogredientes elementares). Esta iteração torna nula uma ou duas linhas (colunas), atualizando o elemento da diagonal. Note que, sendo G um cografo com matriz de adjacência A , coárvore T_G e $\{v_k, v_l\}$ vértices irmãos com pai w . Se $w = \oplus$ (duplicados), então as linhas (colunas) k e l em A são iguais. Se $w = \otimes$ (coduplicados), então as

linhas (colunas) k e l são iguais exceto em duas posições $A[k, k] = A[l, l] = 0$ e $A[k, l] = A[l, k] = 1$.

Uma vez que cada linha (coluna) é diagonalizada, ela não participa mais do processo e seu valor permanece inalterado. Quando uma linha (coluna) correspondente a um vértice v tiver sido diagonalizada a coárvore é reconstruída a partir dos vértices irmãos que estão na maior profundidade da coárvore da seguinte forma:

Sejam $\{u, v\}$ vértices irmãos com pai w , e consideremos que w possui k filhos, então:

(1) Se $k > 2$ obtemos $T - v$ removendo v .

(2) Se $k = 2$ e w não for a raiz, obtemos $T - v$ movendo u para o lugar de w , e removendo v e w .

(3) Se $k = 2$ e w for a raiz, a coárvore é u .

O algoritmo termina quando todas as linhas e colunas da matriz $A + xI$ forem diagonalizadas.

Teorema 4.14. *Dados T_G e x , onde T_G é a coárvore de um cografo G tendo matriz de adjacência A , o algoritmo **Diagonalize** encontra uma matriz diagonal D , que é congruente a $A + xI$.*

Demonstração. Basta observar que um cografo possui uma única representação na forma de coárvore e matricial, e que o algoritmo **Diagonalize**, através dos casos 1 e 2 e seus subcasos, produz uma matriz D (diagonal) efetuando operações cogredientes

elementares finitas na matriz $A + xI$. Assim pelo Teorema 4.6 $A + xI$ é congruente a D . \square

O algoritmo permite que façamos o cálculo para qualquer x real, então se quisermos verificar quantos autovalores de um cografo G encontram-se num determinado intervalo, basta processar o algoritmo nos extremos do intervalo que queremos e fazer a conta conforme a inércia obtida. O próximo teorema fornece as garantias deste processo.

Teorema 4.15. *Seja $D = [d_1, d_2, \dots, d_n]$ uma matriz diagonal resultado do algoritmo **Diagonalize** (T_G, x), e D possui k_+ valores positivos, k_- valores negativos e k_0 zeros, então:*

- i) o número de autovalores de G maiores do que $-x$ é exatamente k_+ .*
- ii) o número de autovalores de G menores do que $-x$ é exatamente k_- .*
- iii) a multiplicidade de $-x$ como autovalor é k_0 .*

Demonstração. Seja G um cografo, A a matriz de adjacência de G e T_G a coárvore de G .

A demonstração vem do fato que o algoritmo **Diagonalize** efetua operações cogredientes elementares em $A + xI$, e com estas operações a matriz D é congruente a $A + xI$.

Logo, pelo Lema 4.10 e pelo Teorema 4.11 (Lei da Inércia de Sylvester), segue o resultado. \square

Observação 4.16. *A ordem dos elementos da diagonal de D depende dos vértices mais profundos na coárvore do cografo e de sua seleção. Não está claro se os resultados obtidos, através do algoritmo, na diagonal da matriz D serão sempre os mesmos (invariantes), mas os sinais certamente são.*

Exemplo 4.17. *Vamos processar o algoritmo para $x = 1$, e assim poderemos confrontar o resultado de acordo com o espectro calculado no Exemplo 4.13.*

Além disso, com o resultado do algoritmo calculado para ($x = 0$) no Exemplo 4.13, determinaremos quantos autovalores existem no intervalo $(-1, 0)$. Assim, após o processamento do algoritmo para $x = 1$ obtemos: $a = 0, b = 2, c = 2, d = -1, e = 0, f = \frac{3}{4}$. Produzindo então uma matriz diagonal D congruente a $A + I$. Note que a matriz D depende do parâmetro x , assim a cada x escolhido uma matriz D_x é produzida. Abaixo segue a matriz D obtida a partir de $x = 1$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Observando o espectro do cografo, notamos que o autovalor -1 tem multiplicidade 2, o que é confirmado por $a = e = 0$, tem um autovalor menor do que -1 , o que é confirmado por $d = -1$ e possui três autovalores maiores do que -1 , o que é confirmado por $b = 2, c = 2, f = \frac{3}{4}$. Além disso comparando estes resultado com o resultado do algoritmo em $x = 0$, notamos que não existem autovalores no

intervalo $(-1, 0)$, pois o algoritmo em $x = 0$ nos diz que existem dois autovalores maiores do que zero e um autovalor com multiplicidade zero, já o algoritmo em $x = 1$, mostra que existem três autovalores maiores do que -1 , ou seja, os dois que já eram maiores do que zero e o próprio zero. Note que este processo permite refinar um intervalo para continuar na localização dos autovalores, e após algumas iterações podemos obter uma aproximação com o valor do mesmo.

No próximo capítulo serão apresentadas algumas aplicações do algoritmo Diagonalize na obtenção de resultados espectrais clássicos em cografos e também para reconhecer famílias de cografos equienergéticas a grafos completos.

5 APLICAÇÕES DO ALGORITMO DIAGONALIZE

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados clássicos a respeito do espectro de um cografo, os quais são: a não existência de autovalores no intervalo $(-1, 0)$ e a forma de obter as multiplicidades dos autovalores -1 e 0 . Além disso, apresentaremos resultados encontrados nos trabalhos [5, 19], os quais comparam e energia de algumas famílias de cografos com a energia de grafos completos K_n . Estes resultados são demonstrados através do algoritmo Diagonalize.

5.2 Aplicações do algoritmo Diagonalize em resultados clássicos do espectro de um cografo

Os trabalhos [5, 19, 27] trazem diversos resultados à respeito do espectro de um cografo, os quais serão explorados nesta seção. Destacamos também o trabalho [26], que deu os primeiros passos na obtenção de resultados sobre o espectro de um cografo, por exemplo as multiplicidades dos autovalores -1 e 0 . Aplicaremos o algoritmo Diagonalize para a verificação de alguns resultados clássicos sobre o espectro de um cografo, como já mencionado, é não possuir autovalores no intervalo $(-1, 0)$ e como determinar as multiplicidades dos autovalores -1 e 0 . Iniciaremos com alguns resultados prévios e consequências do algoritmo Diagonalize. Estes resultados são apresentados em [5, 19].

Lema 5.1. *Suponha que $0 \leq \alpha, \beta < 1$, então:*

$$(a) \ 0 < \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2} < 1$$

$$(b) \ 0 \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < 1, \text{ com } \alpha + \beta \neq 0.$$

Demonstração. O resultado (a) segue do fato que $(\alpha\beta - 1) - (\alpha + \beta - 2) = (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$, e que tanto $(\alpha\beta - 1)$, quanto $(\alpha + \beta - 2)$ são menores do que 0. Para (b) temos que $\alpha\beta - (\alpha + \beta) = (\alpha - 1)(\beta - 1) - 1 \leq 0$ com $\alpha + \beta \neq 0$. \square

Os Lemas 5.2 e 5.3 relacionam o que ocorre com a diagonal da matriz de adjacência $A + xI$ em função do relacionamento dos vértices irmãos e do processamento do algoritmo Diagonalize. Estes resultados estão em [5, 19].

Lema 5.2. *Sejam $\{v_k, v_l\}$ vértices irmãos coduplicados processados por Diagonalize com valores $0 \leq d_k, d_l < 1$, então d_k se tornará permanentemente negativo e d_l será um valor em $(0, 1)$.*

Demonstração. Nas condições do Lema, estamos no subcaso 1a.

Logo,

$$d_k \leftarrow \alpha + \beta - 2$$

$$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2}$$

Onde α, β são os valores anteriores de d_k, d_l . Verificamos através do algoritmo que $d_k < 0$. E pelo Lema 5.1(a), temos que $d_l \in (0, 1)$. \square

Lema 5.3. *Sejam $\{v_k, v_l\}$ vértices irmãos duplicados processados por Diagonalize com valores $0 < d_k, d_l \leq 1$, então d_k se tornará permanentemente positivo e d_l será um valor em $(0, 1)$.*

Demonstração. Nas condições do Lema estamos no subcaso 2a.

Logo,

$$d_k \leftarrow \alpha + \beta$$

$$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

Onde α, β são os valores anteriores de d_k, d_l . Como verificamos através do algoritmo, $d_k > 0$. E pelo Lema 5.1(b), $d_l \in (0, 1)$, quando $0 < \alpha, \beta < 1$. Falta verificar quando $\alpha = \beta = 1$, e neste caso $d_l = \frac{1}{2}$. E quando ou $\alpha = 1$, ou $\beta = 1$ (não ambos) temos que: sendo $\beta = 1$, $d_l = \frac{\alpha}{\alpha+1}$, e sendo $\alpha = 1$, $d_l = \frac{\beta}{\beta+1}$, ou seja, $d_l < 1$. □

O Lema 5.4 abaixo, mostra que quando processamos o algoritmo escolhendo $x \in (0, 1)$, todos os valores da diagonal de $A + xI$ dos vértices remanescentes na coárvore estão em $(0, 1)$. Este resultado pode ser visto em [5, 19].

Lema 5.4. *Durante o processamento do algoritmo Diagonalize (T_G, x) , com $x \in (0, 1)$, todos os valores diagonais dos vértices remanescentes na coárvore estão em $(0, 1)$. Além disso, se d_k corresponde ao valor permanente do vértice removido em $T_G - v_k$, então $d_k \neq 0$.*

Demonstração. Seja G um cografo e T_G sua coárvore. Inicialmente todos os vértices em T_G estão em $(0, 1)$. Suponha que após m iterações de Diagonalize todos os valores

da diagonais da coárvore estão em $(0, 1)$. Agora consideremos a iteração $m + 1$ com o par $\{v_k, v_l\}$ com pai w . Se $w = \otimes$, então pelo Lema 5.2 $d_k < 0$ permanentemente e $d_l \in (0, 1)$. E por outro lado, se $w = \oplus$, então pelo Lema 5.3 $d_k > 0$ permanentemente e $d_l \in (0, 1)$.

Assim segue o resultado. □

O Teorema 5.5 é um dos resultados importantes e clássicos a respeito do espectro de um cografo, e pode ser visto nos trabalhos [1, 5, 19]. No trabalho [19] a demonstração apresentada segue diretamente do Lema 5.4.

Teorema 5.5. *Nenhum cografo possui autovalores no intervalo $(-1, 0)$.*

Demonstração. A demonstração deste Teorema utilizando o algoritmo Diagonalize decorre que, escolhendo um valor x para seu processamento, a cada valor diagonal igual a 0 encontrado, corresponderá a multiplicidade de $-x$ como autovalor do cografo. Pelo Lema 5.4, para qualquer $x \in (0, 1)$, o algoritmo produzirá valores diagonais em $(0, 1)$. Portanto segue o resultado. □

Exemplo 5.6. *Vamos aplicar os últimos resultados no grafo do Exemplo 4.13, onde já processamos o algoritmo para $x = 0$ e $x = 1$. Agora processaremos o algoritmo para $x = \frac{1}{2}$. Com base na coárvore do Exemplo 4.13, o algoritmo inicia o processo com os vértices a e c , onde ocorre o subcaso 1a, com $d_k = -1$ e $d_l = \frac{3}{4}$ conforme Lema 5.2. Assim o vértice a é desconectado da coárvore e seu valor diagonal permanecerá inalterado, $a = -1$. O mesmo ocorre com os vértices e e f no próximo estágio do processamento do algoritmo, e o vértice e é desconectado da coárvore e seu valor diagonal permanecerá inalterado, $e = -1$.*

Agora o processo chega aos vértices b e d , onde ocorre o subcaso 2a, com $d_k = 1$ e $d_l = \frac{1}{4}$ conforme Lema 5.3. O vértice b é desconectado da coárvore e seu valor diagonal ficará inalterado $b = 1$. E o mesmo ocorre com os vértices c e f no próximo estágio do processamento do algoritmo, e o vértice c é desconectado e seu valor permanecerá inalterado $c = \frac{3}{2}$.

Por fim o processo chega nos vértices d e f , onde ocorre o subcaso 1a, com $d_k = \frac{-11}{8}$ e $d_l = \frac{29}{44}$ conforme Lema 5.2. Chegamos ao final do processo com o vértice $d = \frac{-11}{8}$ e o vértice $f = \frac{29}{44}$. Note que nenhum dos vértices assumiu valor 0, o que indica que $\frac{-1}{2}$ não é autovalor do cografo deste exemplo (Lema 5.4 e Teorema 5.5).

Outro resultado clássico que apresentaremos agora com o algoritmo Diagonalize, são as multiplicidades de -1 e 0 como autovalores de cografos. O trabalho [19] apresenta uma expressão para calcular estas multiplicidades, e aqui apresentamos como o Teorema 5.6.

Teorema 5.7. *Seja G um cografo com coárvore T_G tendo:*

(i) \otimes - nodos $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, onde w_i possui $t_i \geq 1$ filhos terminais (folhas). Então:

$$m(-1; G) = \sum_{i=1}^m (t_i - 1).$$

(ii) \oplus - nodos $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, onde w_i possui $t_i \geq 1$ filhos terminais (folhas). Então se G possui j vértices isolados,

$$m(0; G) = j + \sum_{i=1}^m (t_i - 1).$$

Demonstração. Para a parte (i) vamos examinar o processamento do algoritmo Diagonalize $(T_G, 1)$. Seja w_i um nodo interno do tipo \otimes com s_i nodos internos como filhos e t_i folhas. Quando w_i estiver pronto para que o algoritmo efetue seu processamento, teremos $s_i \in (0, 1)$ e t_i valores iguais a um. Assim, pelo subcaso 1b, teremos $t_i - 1$ zeros permanentes. Seguindo o processamento, pelo subcaso 1a nos valores de s_i , teremos $s_i - 1$ valores negativos. No último processamento em w_i , teremos o subcaso 1a novamente, produzindo um valor negativo, e outro valor igual um, que passará para o próximo nível da coárvore. E como nenhum zero pode ser obtido no processamento do algoritmo quando o nodo interno for do tipo \oplus , segue que os zeros obtidos são oriundos das $t_i - 1$ folhas ligadas a nodos internos do tipo \otimes .

Para a parte (ii) vamos examinar o processamento do algoritmo Diagonalize $(T_G, 0)$ e consideraremos inicialmente a quantidade de vértices isolados $j = 0$. Seja w_i um nodo interno do tipo \oplus com s_i nodos internos como filhos e t_i folhas. Quando w_i estiver pronto para que o algoritmo efetue seu processamento, teremos $s_i \in (0, 1)$ e t_i valores iguais a zero. Assim, pelo subcaso 2b, teremos $t_i - 1$ zeros permanentes. Seguindo o processamento, pelo subcaso 2a nos valores de s_i , teremos $s_i - 1$ valores positivos. No último processamento em w_i , teremos o subcaso 2b novamente, produzindo um valor positivo, e um valor igual a zero, que passará para o próximo nível da coárvore. E como nenhum zero pode ser obtido no processamento do algoritmo quando o nodo interno for do tipo \otimes , segue que os zeros obtidos são oriundos das $t_i - 1$ folhas ligadas a nodos internos do tipo \oplus .

Ao que acabamos de argumentar, no caso (ii), se G possui $j > 0$ vértices isolados, então a raiz de T_G é do tipo \oplus com j filhos, onde $(j - 1)$ zeros são resultantes

do processamento do subcaso 2b, e a última iteração, ou subcaso 2a, ou subcaso 2b resulta no j -ésimo zero. \square

Exemplo 5.8. *Observe que o cografo do exemplo 4.13 possui $m(-1, G) = 2$ por causa do \otimes - nodos que possuem os filhos a, c e e, f . E que $m(0, G) = 1$ por causa do \oplus - nodos que possuem os filhos b, d .*

Observação 5.9. *De acordo com os últimos resultados apresentados, o polinômio característico de um cografo pode ser escrito:*

$$P_G(x) = x^{m(0;G)}(x+1)^{m(-1;G)}D_G(x)$$

Onde $m(0; G)$ e $m(-1; G)$ são obtidos pelas expressões do Teorema 5.6 e $D_G(x)$ é um polinômio divisor de $P_G(x)$, que pode ser utilizado para obter os demais autovalores do cografo G , para mais detalhes ver [26].

5.3 Aplicações do algoritmo Diagonalize para reconhecer famílias de cografos borderenergéticos

Vamos apresentar algumas aplicações do algoritmo Diagonalize, em que são encontradas famílias de cografos borderenergéticos, isto é, cografos que são equienergéticos (possuem a mesma energia) a grafos completos. Antes de expor os resultados, segue a definição de energia de um grafo.

Definição 5.10 (Energia de um grafo). *A energia de um grafo G é definida por $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de G .*

Observamos que a energia de um grafo completo K_n é igual a $2(n-1)$. Para maiores detalhes ver [22].

5.3.1 Aplicações do algoritmo Diagonalize para obter $E(G_r) = E(K_{3r+4})$, com $r \geq 1$, onde G_r tem ordem $3r+4$

Em [5], os autores estabelecem a classe infinita de cografos dada por $\eta = \{G_1, G_2, \dots, G_r, \dots\}$, onde G_r tem ordem $3r+4$, sendo definida da seguinte forma: para cada $r \geq 1$ temos que $G_r = \underbrace{(K_2 \cup K_2 \cup \dots \cup K_2)}_{r+1} \otimes K_{r+2}$, ou seja, a união de $r+1$ grafos K_2 disjuntos, e após é feita junção com K_{r+2} . Em [5], mostra-se que $E(G_r) = E(K_{3r+4})$ são equienergéticos, ou seja, possuem a mesma energia.

Através de resultados obtidos pelo algoritmo Diagonalize aplicado em $(T_G, r+1)$, vamos concluir que um cografo G_r tem maior autovalor $\lambda_1 = 2r+3$, e menor autovalor $\lambda_n = -(r+1)$. E além disso, os demais autovalores de G_r são: 1 com multiplicidade r , e -1 com multiplicidade $2(r+1)$, obtidos através do algoritmo Diagonalize em $(T_G, -1)$ e $(T_G, 1)$ respectivamente.

Para estabelecer o resultado da equivalência $E(G_r) = E(K_{3r+4})$, precisaremos de alguns resultados prévios que estabeleceremos a partir de agora, eles podem ser vistos em [5].

Lema 5.11. *Sejam v_1, \dots, v_m vértices de um cografo, onde na representação de cóarvore possuem pai $w = \otimes$, com valor inicial $y > 1$ no algoritmo Diagonalize (T_G, y) , então o algoritmo processa $m-1$ iterações do subcaso 1a atribuindo, durante j iterações:*

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(y-1) \quad (1)$$

$$d_l \leftarrow \frac{y+j}{j+1} \quad (2)$$

Demonstração. É fácil verificar quando $j = 1$, pois sendo $\alpha = \beta = y > 1$ através do subcaso 1a, temos que $d_k = 2y - 2 = 2(y - 1)$, o que corresponde a (1) com $j = 1$.

E temos que $d_l = \frac{y^2-1}{2y-2} = \frac{y+1}{2}$, o que corresponde a (2) com $j = 1$.

Agora vamos supor que j iterações produzem os resultados (1) e (2), então por indução durante a iteração $j + 1$ teremos $\alpha = \frac{y+j}{j+1} > 1$ e $\beta = y > 1$. Como $\alpha + \beta \neq 2$ o subcaso 1a é executado novamente obtendo:

$$d_k \leftarrow \alpha + \beta - 2 = \frac{y+j}{j+1} + y - 2 = \frac{j+2}{j+1}(y - 1)$$

$$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2} = \left(\frac{y^2+jy}{j+1} - 1\right) \frac{j+1}{(j+2)(y-1)} = \frac{j+y+1}{j+2}$$

E assim, a indução é satisfeita. \square

Lema 5.12. *Sejam v_1, \dots, v_m vértices de um cografo, onde na representação de cóarvore possuem pai $w = \oplus$, com valor inicial $y > 0$ no algoritmo *Diagonalize* (T_G, y), então o algoritmo processa $m - 1$ iterações do subcaso 2a atribuindo, durante j iterações:*

$$d_k \leftarrow \frac{(j+1)y}{j} \quad (3)$$

$$d_l \leftarrow \frac{y}{j+1} \quad (4)$$

Demonstração. É fácil verificar para $j = 1$, pois sendo $\alpha = \beta = y > 0$ através do subcaso 2a, temos que $d_k = 2y$, o que corresponde a (3) com $j = 1$.

E $d_l = \frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2}$, o que corresponde a (4) com $j = 1$.

Agora vamos supor que j iterações produzem os resultados (3) e (4), então por indução durante a iteração $j + 1$ teremos $\alpha = \frac{y}{j+1} > 0$ e $\beta = y > 0$. Como $\alpha + \beta \neq 0$ o subcaso 2a é executado novamente obtendo:

$$d_k \leftarrow \alpha + \beta = \frac{y}{j+1} + y = \frac{(j+2)y}{j+1}$$

$$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{y}{j+1} y \frac{j+1}{(j+2)y} = \frac{y}{j+2}$$

E assim, a indução é satisfeita. □

Os Lemas 5.11 e 5.12 descrevem o algoritmo Diagonalize quando múltiplas folhas que possuem o mesmo pai tem o mesmo elemento diagonal $d_i = y$, então o algoritmo efetua $m - 1$ iterações do subcaso 1a ou 2a dependendo do pai \otimes ou \oplus . Agora vamos verificar a multiplicidade do autovalor -1 de G_r com o Lema 5.13 que está em [5].

Lema 5.13. G_r possui $m(-1, G_r) = 2(r + 1)$

Demonstração. Basta observar que pelo Teorema 5.7, em G_r cada K_2 produz um autovalor -1 , e como temos $r + 1$ grafos K_2 , temos a multiplicidade de -1 igual a $r + 1$. Já em K_{r+2} , também pelo Teorema 5.7, temos que a multiplicidade de -1 é igual a $r + 1$.

Assim G_r possui $m(-1, G_r) = (r + 1) + (r + 1) = 2(r + 1)$ □

Outro resultado que verificaremos agora é a multiplicidade de 1 como autovalor de G_r , conforme pode ser visto em [5].

Lema 5.14. O autovalor 1 em G_r possui multiplicidade r .

Demonstração. É suficiente mostrar que o algoritmo Diagonalize em $(T_{G_r}, -1)$ produz exatamente r zeros. Inicializando o algoritmo com $x = -1$, ocorre o subcaso 1a em cada um dos $r + 1$ pares de irmãos $\{v_k, v_l\}$ no nível três da coárvore. Cada operação produz $d_k \leftarrow -4$ e $d_l \leftarrow 0$, e deixa um zero no nível dois da coárvore (nível onde estava \otimes). Depois que o algoritmo processou em todo o nível três, o subcaso 2b é aplicado a todo r par de irmãos $\{v_k, v_l\}$ onde $d_k = d_l = 0$. Este processo cria r zeros permanentes, e temos que $m(1, G_r) \geq r$.

Vamos agora para o nível um da coárvore, onde temos $r + 2$ vértices irmãos e um vértice 0 vindo do nível inferior. Note que, pelo Lema 5.13 G_r possui $2(r + 1)$ autovalores -1 , assim no nível um da coárvore $r + 1$ iterações devem produzir d_{k_s} negativos correspondentes a multiplicidade de -1 . A última iteração deverá produzir um valor positivo, pois caso contrário teríamos uma contradição no fato de que o maior autovalor de um grafo é simples, ou seja, possui multiplicidade um.

Portanto segue o resultado G_r possui multiplicidade r . □

Após obtermos os resultados das multiplicidades de -1 e 1 como autovalores de G_r , vamos em busca dos demais resultados do espectro. Segue o Lema 5.15 que fornecerá o que buscamos. Note que buscamos apenas dois autovalores, pois até então temos $3r + 2$, que são as multiplicidades de -1 e 1 . O resultado abaixo está em [5].

Lema 5.15. *O maior e o menor autovalor de G_r são:*

$$\lambda_1 = 2r + 3$$

$$\lambda_n = -(r + 1)$$

Demonstração. Demonstraremos que $\lambda_n = -(r + 1)$, e $\lambda_1 = 2r + 3$ seguirá do resultado que a soma dos autovalores de um grafo é igual a zero.

Vamos aplicar o algoritmo Diagonalize em $(T_G, r + 1)$ e verificaremos que serão obtidos elementos d_{i_s} não negativos com um único zero.

Consideremos os $r + 1$ pares de irmãos na profundidade três da coárvore e sejam $\alpha = \beta = r + 1$, para cada par o subcaso 1a é executado, obtendo:

$$d_k \leftarrow 2r$$

$$d_l \leftarrow \frac{r+2}{2}$$

Assim teremos $r + 1$ vértices com valor permanente positivo $2r$.

Na profundidade dois, existem $r + 1$ folhas com valor positivo $y = \frac{r+2}{2}$, e r iterações são efetuadas. Pelo Lema 5.12 cada iteração gera valores diagonais permanentes e positivos (3) e na iteração r , obtemos (4), assim:

$$d_l \leftarrow \frac{y}{j+1} = \frac{r+2}{2(r+1)}$$

O resultado acima é movido para o nível superior abaixo da raiz da coárvore. Na profundidade um, teremos $r + 3$ folhas, onde $r + 2$ com valor diagonal $r + 1$ e uma folha simples com valor diagonal $\frac{r+2}{2(r+1)}$.

Assumimos agora que o algoritmo efetue seu processamento nas folhas de mesmo valor $y = r + 1$. Então pelo Lema 5.11 em cada $r + 1$ iterações o algoritmo produz valores diagonais permanentemente positivos (1). Deixando $j = r + 1$ em (2), vemos que a última iteração da coárvore resulta no valor $\frac{2(r+1)}{r+2}$.

Assim no último processamento do algoritmo teremos os valores $\alpha = \frac{2(r+1)}{r+2}$ e $\beta = \frac{r+2}{2(r+1)}$, tendo $\alpha + \beta > 2$, na última iteração o subcaso 1a produz:

$$d_k \leftarrow \alpha + \beta - 2$$

$$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2} = 0$$

E assim teremos um valor positivo e um valor zero nas duas últimas entradas diagonais. E portanto temos que $\lambda_n = -(r+1)$, possui multiplicidade 1.

Agora, falta apenas obtermos o último autovalor de multiplicidade um, e como a soma dos autovalores de um grafo é igual a zero, temos que:

$$\lambda_1 - 2(r+1) + r - (r+1) = 0 \text{ e conseqüentemente } \lambda_1 = 2r+3.$$

E assim a demonstração fica concluída. \square

O teorema abaixo agrega todos os resultados obtidos dos lemas anteriores, e estabelece a equivalência da energia.

Teorema 5.16. *Para cada $r \geq 1$, G_r e K_{3r+4} são equienergéticos.*

Demonstração. Segue dos Lemas 5.13, Lema 5.14 e Lema 5.15. \square

E assim temos: $E(G_r) = 2(r+1) + r + (2r+3) + (r+1) = 2(3r+4) - 2 = 2n - 2 = 2(n-1)$, com $n = 3r+4$.

Observação 5.17. *Note que G_r e K_{3r+4} são não coespectrais, isto é, não possuem o mesmo espectro. E note também que os autovalores são todos inteiros.*

O exemplo 5.18 aplica o que acabamos de concluir pelo Teorema 5.16.

Exemplo 5.18. *Vamos verificar que para $r = 1$, $E(G_1) = E(K_7)$.*

Temos que $G_1 = (K_2 \cup K_2) \otimes K_3$ e que o espectro de G_1 é:

$$\text{spect}(G_1) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o espectro de K_7 é:

$$\text{spect}(K_7) = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim, com este exemplo segue que $E(G_1) = E(K_7) = 12$.

5.3.2 Aplicações do algoritmo Diagonalize para $E(G) = E(K_n)$, onde $G = K_a \otimes (a-1)(b-1)K_b$, com $a \geq 2$ e $b \geq 2$

No trabalho [19], são apresentadas algumas famílias de cografos não co-espectrais e borderenergéticos a grafos completos K_n . Uma das famílias que aparece neste trabalho, é a família dos cografos gerados por $G = K_a \otimes (a-1)(b-1)K_b$, que tem ordem $n = a + b(a-1)(b-1)$. Este tipo de cografo possui uma coárvore balanceada $T_G(1, (a-1)(b-1), 0|a, 0, b)$, onde este tipo de coárvore possui a característica de que todo nodo interno com a mesma profundidade na coárvore possui o mesmo número de nodos internos e o mesmo número de folhas como sucessores diretos. A Figura 5.1 abaixo mostra um exemplo de coárvore balanceada.

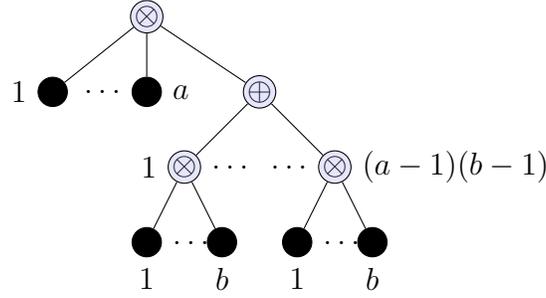


Figura 5.1: Coárvore balanceada.

A notação utilizada é $T_G(a_1, \dots, a_r | b_1, \dots, b_r)$, onde T_G é uma coárvore de profundidade r , a raiz de T_G possui exatamente a_1 nodos internos e b_1 folhas. Um nodo interno sucessor da raiz possui exatamente a_2 nodos internos e b_2 folhas, e assim sucessivamente. Conseqüentemente a_1, a_2, \dots, a_{r-1} assumem valores inteiros positivos e $a_r = 0$. E temos também que b_1, b_2, \dots, b_{r-1} assumem valores inteiros não negativos e $b_r \geq 2$.

O trabalho [19] também mostra que esta família de cografos, com $a \geq 2$ e $b \geq 2$, possui espectro conforme o Lema 5.19 apresentado abaixo. Mais detalhes podem ser encontrados em [19].

Lema 5.19. *Seja $G = K_a \otimes (a-1)(b-1)K_b$, de ordem $n = a + b(a-1)(b-1)$, para valores fixos $a \geq 2$ e $b \geq 2$. O espectro de G é:*

$$\begin{bmatrix} -(a-1)(b-1) & -1 & b-1 & ab-1 \\ 1 & (a-1)[(b-1)^2+1] & (a-1)(b-1)-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demonstração. Vamos iniciar a demonstração para verificar a existência e multiplicidade do autovalor -1 . Pelo Teorema 5.6 e observando a Figura 5.1, note que

ligado a raiz \otimes temos $m(-1, G) = a - 1$ e a cada \otimes no nível $(a - 1)b - 1$, teremos $m(-1) = (b - 1)$, assim $m(-1) = (a - 1)(b - 1)^2 + (a - 1) = (a - 1)[(b - 1) + 1]$

Para verificar a existência e multiplicidade do autovalor $b - 1$, vamos aplicar o algoritmo Diagonalize na coárvore da Figura 5.1 (T_G, x) , com $x = -b + 1$. Pelo Lema 5.11, no nível \otimes mais profundo da coárvore teremos:

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(-b + 1 - 1) = \frac{j+1}{j}(-b) < 0, j = 1, 2, 3, \dots, b - 1 \text{ iterações.}$$

$$d_l \leftarrow \frac{-b+1+j}{j+1} = \frac{-b+1+b-1}{b-1+1} = 0, \text{ depois de } b - 1 \text{ iterações.}$$

Assim teremos $(a - 1)(b - 1)$ zeros no nível \oplus da coárvore da Figura 5.1.

Logo o subcaso 2b do algoritmo Diagonalize efetua seu processamento obtendo $(a - 1)(b - 1) - 1$ zeros e movendo um zero para o nível acima da coárvore (raiz). Neste nível teremos a vezes o termo $-b + 1$ e uma vez o elemento zero. Processando o algoritmo nos elementos $-b + 1$, novamente pelo Lema 5.11 na raiz \otimes da coárvore, teremos:

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(-b + 1 - 1) = \frac{j+1}{j}(-b) < 0, j = 1, 2, 3, \dots, a - 1 \text{ iterações.}$$

$$d_l \leftarrow \frac{-b+1+j}{j+1} = \frac{-b+1+b-1}{b-1+1} = 0, \text{ depois de } a - 1 \text{ iterações.}$$

Ao final termos os últimos dois elementos com valor nulo, e com pai \otimes , onde pelo subcaso 1a do algoritmo Diagonalize, teremos:

$$d_k \leftarrow -2$$

$$d_l \leftarrow \frac{-1}{2}$$

E portanto $b - 1$ é autovalor de G com multiplicidade $(a - 1)(b - 1) - 1$.

Para verificar a existência e multiplicidade do autovalor $ab - 1$, vamos aplicar o algoritmo Diagonalize na coárvore da Figura 5.1 com (T_G, x) , com $x = -ab + 1$, e verificaremos que um único zero será gerado.

Pelo Lema 5.11, no nível \otimes mais profundo da coárvore, teremos:

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(-ab) < 0, j = 1, 2, 3, \dots, b-1;$$

$$d_l \leftarrow -a + 1$$

Assim teremos o elemento $-a + 1$ em cada $(a-1)(b-1)$ nodo \oplus da coárvore da Figura 5.1. Pelo Lema 5.12, teremos:

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(-a+1) < 0, j = 1, 2, 3, \dots, (a-1)(b-1) - 1;$$

$$d_l \leftarrow \frac{-1}{b-1}$$

Assim, na raiz da coárvore \otimes , teremos a vezes o elemento $-ab + 1$ e uma vez o elemento $\frac{-1}{b-1}$. Processando o algoritmo nos elementos $-ab + 1$, novamente pelo Lema 5.11 na raiz \otimes da coárvore, teremos:

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(-ab) < 0, j = 1, 2, 3, \dots, a-1;$$

$$d_l \leftarrow -b + 1$$

Ao final termos os últimos dois elementos $\alpha = -b + 1$ e $\beta = \frac{-1}{b-1}$, e com pai \otimes , onde pelo subcaso 1a do algoritmo Diagonalize, teremos:

$$d_k \leftarrow \frac{-b^2}{b-1}$$

$$d_l \leftarrow 0$$

E portanto $ab - 1$ é autovalor de G com multiplicidade 1. Para finalizar a demonstração utilizaremos o fato de que a soma dos autovalores de um grafo deve ser igual a zero, assim:

$$\lambda_n + (a - 1)[(b - 1)^2 + 1](-1) + (b - 1)[(a - 1)(b - 1) - 1] + ab - 1 = 0,$$

o que implica, $\lambda_n = (a - 1) + (b - 1) - ab + 1 = -(a - 1)(b - 1)$.

O fato de λ_n ter multiplicidade 1, é porque temos computados até então $b(a - 1)(b - 1) + a - 1$ autovalores, e com λ_n , teremos $n = a + b(a - 1)(b - 1)$ autovalores. Portanto segue o resultado. \square

Observação 5.20. *Note que os autovalores dos cografos obtidos através do Lema 5.19 possui autovalores inteiros.*

O teorema abaixo, encontrado em [19], consolida os resultados desta família de cografos em relação a grafos completos K_n .

Teorema 5.21. *Seja $G = K_a \otimes (a - 1)(b - 1)K_b$, de ordem $n = a + b(a - 1)(b - 1)$, para valores fixos $a \geq 2$ e $b \geq 2$ representado pela coárvore na Figura 5.1. Então G é um cografo não coespectral e borderenergético a K_n .*

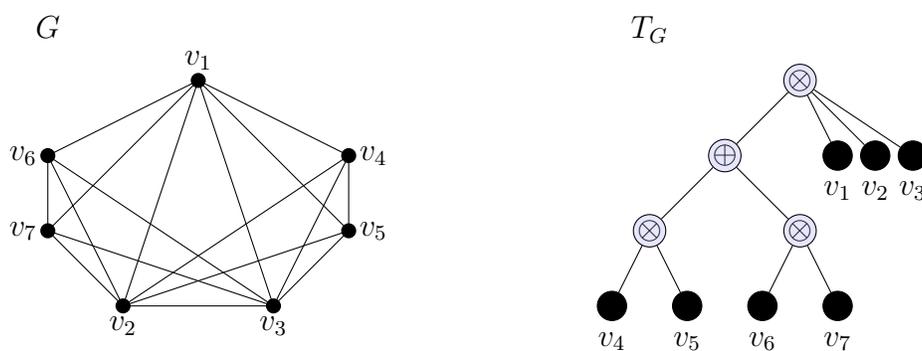
Demonstração. A energia de grafos completos é dada por $E(K_n) = 2n - 1$, onde n é o número de vértices. Assim usando o Lema 5.19, podemos computar a energia de G como:

$$\begin{aligned} E(G) &= (a - 1)(b - 1) + (a - 1)[(b - 1)^2 + 1] + (b - 1)[(a - 1)(b - 1) - 1] + (ab - 1) \\ &= (a - 1)(b - 1) + (a - 1)(b - 1)^2 + (a - 1) + (a - 1)(b - 1)^2 - (b - 1) + (ab - 1) \\ &= 2b(a - 1)(b - 1) - (a - 1)(b - 1) + a - b + ab - 1 = 2b(a - 1)(b - 1) + 2a - 2 = 2(n - 1) \end{aligned}$$

□

Vamos verificar com um exemplo os resultados do Teorema 5.21.

Exemplo 5.22. *Seja G o cografo construído utilizando $G = K_a \otimes (a-1)(b-1)K_b$, com $a = 3$ e $b = 2$, então teremos $G = K_3 \otimes 2K_2$, com a coárvore balanceada $T_G(1, 2, 0|3, 0, 2)$ e com $n = 7$. A Figura abaixo 5.2 apresenta o cografo G , a coárvore T_G e o $spect(G)$.*



$$spect(G) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 5.2: Cografo G , sua coárvore balanceada T_G e seu espectro.

Já o espectro de K_7 é:

$$spect(K_7) = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Então conforme o exemplo, temos que $E(G) = E(K_7)$ e também são não coespectrais.

E com estas aplicações do algoritmo Diagonalize encerramos este capítulo, verificando que o algoritmo é de simples aplicação, mas constutui uma ferramenta útil para obtermos informações sobre os autovalores de um cografo e também para compararmos a energia de famílias de cografos com grafos completos.

CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação foram apresentadas algumas caracterizações de cografos, unindo algumas das diversas formas que podem ser encontradas em trabalhos anteriores sobre este tema. As caracterizações escolhidas tiveram por objetivo auxiliar no entendimento desta estrutura no que diz respeito ao relacionamento de seus vértices e formas recursivas de construção, utilizando as operações união e junção de grafos e o complemento de um grafo. Algumas formas de representação de cografos foram apresentadas, com o intuito de auxiliar no entendimento e na aplicação do algoritmo de localização de autovalores em cografos (Diagonalize).

O algoritmo Diagonalize auxilia a encontrar autovalores associados a cografos através da córvore, efetuando operações na matriz $A + xI$, onde A é a matriz adjacência. Neste trabalho, justificamos o seu funcionamento com base na teoria de congruência de matrizes e Lei da Inércia.

Por fim, foi reservado um capítulo para explorar aplicações do algoritmo Diagonalize em resultados clássicos sobre o espectro de cografos, e aplicações para construir cografos que são não coespectrais e equienergéticos a grafos completos.

O estudo dirigido para cografos, deve-se ao fato de ser uma classe de agrafos ainda com vários problemas em aberto, por exemplo o que pode ser visto em [10], onde E. Ghorbani faz a conjectura que para qualquer cografo G , a multiplicidade de qualquer autovalor diferente de 0 e -1 , não excede o número mínimo de cadeias com respeito a uma ordem parcial definida em seu trabalho.

Além disso, cografos são uma estrutura mais simples sob o ponto de vista de construção, a qual permite que algoritmos possam ser desenvolvidos, e executados de forma mais eficiente. As contribuições feitas neste trabalho foram:

1. mostrar a equivalência das caracterizações apresentadas;
2. explicar os detalhes da relação de congruência entre matrizes, que é a base teórica para o funcionamento do algoritmo Diagonalize;
3. estudar resultados importantes sobre o espectro de cografos utilizando o algoritmo Diagonalize, tais como: multiplicidade dos autovalores -1 e 0 e não existência de autovalores no intervalo $(-1, 0)$.

Com o estudo de cografos podemos perceber que há muito ainda por explorar no que diz respeito a esta estrutura, tanto para obter uma forma geral para definir ou caracterizar, quanto na parte espectral. Além do que foi apresentado sobre o espectro de cografos, temos também pela teoria de grafos, que o maior autovalor de um grafo é limitado superiormente por $\lambda_1 \leq \sqrt{2m(1 - \frac{1}{n})}$, onde m é o número de arestas e n é o número de vértices de um grafo [22]. E para cografos, será que este limite pode ser outro? Não foi encontrado trabalho que trata deste tema.

Outro resultado sobre o espectro de cografos, é que existe uma classe de cografos, cujo segundo maior autovalor tem limite superior $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou seja, $\lambda_2(G) < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Os cografos desta classe são chamados σ^- grafos. No trabalho [25], são apresentados os resultados que levam a esta conclusão, onde os σ^- grafos são descritos através de subgrafos contendo grafos completos K_n e grafos partidos K_{n_1, \dots, n_k} . Será que podemos encontrar limites superiores para os outros autovalores de um cografo?

Além disso, outros trabalhos investigam cografos construídos a partir de grafos completos, para procurar cografos equienergéticos a grafos completos K_n [5, 19]. Podemos generalizar os casos já encontrados? E quanto a energia de um cografo, existe alguma família com maior energia? E menor energia? Temos como comparar a energia entre dois ou mais cografos a partir de alguma característica?

E o que falar a respeito dos autovetores associados? Existe algum padrão sobre os sinais das componentes dos autovetores associados? E também, a respeito das outras matrizes que associadas a grafos, como por exemplo a matriz laplaciana, o que se tem até o momento sobre esta matriz obtida através de um cografo?

Além do que já foi citado, outra oportunidade de pesquisa, é desenvolver algoritmos mais eficientes para tratar diversas questões a respeito de cografos, como por exemplo a obtenção do espectro.

Enfim, há muitas questões a serem respondidas e investigadas sobre cografos, gerando então um grande campo para pesquisa e futuros trabalhos.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Mohammadian, V. Trevisan, "Some Spectral Properties of Cographs", *Discrete Mathematics* 339 (2016), 1261-1264.
- [2] D. G. Corneil, H. Lerchs, L.S. Burlingham, "Complement reducible graphs", *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981), 163-174.
- [3] D. G. Corneil, M. Habib, J. Lanlignel, B. Reed, U. Rotics, "Polynomial-Time Recognition of clique-width ≤ 3 graphs", *Discrete Applied Mathematics* 160 (2012), 834-865.
- [4] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs Theory and Application*, Academic Press Inc., New York, 1980.
- [5] D. P. Jacobs, V. Trevisan, F. C. Tura, "Eigenvalue Location in Cographs", *Discrete Applied Mathematics*, arXiv: 1609.04477, (2017).
- [6] D. P. Sumner, "Dacey Graphs", *J. Australian Math. Soc.* 18 (4) (1974), 492-502.
- [7] D. Seince, "On a Property of the Class of n-Colorable Graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 16 (1974), 191-193.
- [8] D. Wood, "On the number of maximal independent sets in a graph", *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 13 (2011), 17-19.
- [9] E. Dahlhaus, "Efficient parallel recognition algorithm for cographs and distance hereditary graphs", *Discrete Applied Mathematics* 57 (1995), 29-44.

- [10] E. Ghorbani, "Spectral properties of cographs", AMS Mathematics, arXiv: 1602.02069, (2010).
- [11] E. S. Wolk, "The comparability graph of a tree", Proc. AMS 13 (1962) 789-795.
- [12] G. Damiand, M. Habib, C. Paul, "A simple paradigm for graph recognition: application to cographs and distance hereditary graphs", Theoretical Computer Science 263 (2001), 99-111.
- [13] G. F. Royle, "The Rank of Cograph", The Electronic Journal of Combinatorics 10 (2003), note N 11.
- [14] G. J. Chang, L. Huang, H. Yeh, "On the rank of a cograph", Linear Algebra Appl. 429 (2008), 601-605.
- [15] H. A. Jung, "On a Class of Posets and the Corresponding Comparability Graphs", Journal of Combinatorial Theory, Series B 24 (1978), 125-133.
- [16] H. Eves, *Elementary Matrix Theory*, Dover Publications Inc., New York, 1980.
- [17] H. Lerchs, *On cliques and kernels*, Technical Report, Department of Computer Science, University of Toronto, 1971.
- [18] J. L. Gross, J. Yellen, *Handbook of Graph Theory*, CRC Press, New York, 2004.
- [19] L. E. Allem, F. Tura, "Multiplicity of eigenvalues of cographs", arXiv: submit/1990103, (2017).

- [20] M. Burlet, J. P. Uhry, Parity graphs, in "Topics on perfect graphs", Ann. Discrete Maths 21 (1984), 253-277.
- [21] M. Habib, C. Paul, "A simple linear time algorithm for cograph recognition", Discrete Applied Mathematics 145 (2005), 183-197.
- [22] N. Abreu, R. Del-Vecchio, V. Trevisan, C. Vinagre, *Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução*, III Colóquio de Matemática da Região Sul, Florianópolis, 2014.
- [23] R. D. Alba, "A Graph-Theoretic Definition of a Sociometric Clique", Journal of Mathematical Sociology 3 (1973), 113-126.
- [24] R. Lin, S. Olariu, G. Pruesse, "An Optimal Path Cover Algorithm for Cographs", Computer and Mathematics with Applications 30 (1995), 75-83.
- [25] S. K. Simic, "Some notes on graphs whose second largest eigenvalue is less than $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ", Linear and Multilinear Algebra 39:1-2 (2007), 59-71.
- [26] T. Bıyıkođlu, S. K. Simić, Z. Stanić, "Some notes on spectra of cographs", Ars Combin. 100 (2011), 421-434.
- [27] T. Sander, "On Certain Eigenspaces of Cographs", The Electronics Journal, of Combinatorics 15 (2008), R140.
- [28] V. B. Le, "A Good Characterization os Cograph Contractions", Journal of Graph Theory 30 (1999), 309-318.
- [29] V. Lozin, *Graph Theory Notes*, United Kingdom, 2015. Disponível em <https://homepages.warwick.ac.uk/.../Graph-Theory-notes.pdf>.

- [30] X. He, "Parallel algorithms for cograph recognition with applications", *Journal of Algorithms* 15 (1993), 284-313.
- [31] Y. Liu, J. Wang, J. Guo, J. Chen, "Complexity and parameterized algorithms for Cograph Editing", *Theoretical Computer Science* 461 (2012), 45â54.