

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DE MODELOS BIFÁSICOS PARA REPRESENTAÇÃO DO
COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TENDÕES

por

Jonatas Stefanello Fagundes

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Dezembro de 2017



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

ESTUDO DE MODELOS BIFÁSICOS PARA REPRESENTAÇÃO DO
COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TENDÕES

por

Jonatas Stefanello Fagundes

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof^a. Dr^a. Thamy Cristina Hayashi
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Comissão de Avaliação:

Prof. Rogério José Marczak

Prof. Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Rodrigo Rossi

Porto Alegre, 04, Dezembro de 2017.

Fagundes, J. S. **Estudo de Modelos Bifásicos para Representação do Comportamento Mecânico de Tendões**. 2017. 20 p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

RESUMO

Recentemente se tem obtido modelos cada vez mais realísticos do comportamento mecânico dos mais variados tecidos que compõem o corpo humano. Dentre estes tecidos pode se destacar o tendão, pois por sofrer um grande esforço mecânico esta suscetível a várias formas de lesões. O desenvolvimento de modelos capazes de representar o seu comportamento mecânico ajudaria profissionais de saúde no tratamento e prevenção de lesões. Neste sentido, os modelos bifásicos têm sido usados com sucesso na simulação de tecidos hidratados, dentre o qual está incluído o tendão. Este trabalho teve como objetivo o estudo de modelos constitutivos bifásicos e sua capacidade de representação do comportamento mecânico de tendões. Foi realizado a implementação dos modelos bifásico poroelástico (BPE) e bifásico poroviscoelástico (BPVE) via elementos finitos. Testes numéricos de relaxação foram efetuados de forma a validar a implementação e melhor compreender a resposta mecânica de ambos os modelos. Para demonstrar a capacidade destes em simular o comportamento de tendões foi realizado um ensaio de tração com carga cíclica em uma amostra de tendão flexor suíno, e os resultados obtidos foram usados em um algoritmo de ajuste de parâmetros. O resultado do ajuste demonstrou a vantagem do modelo BPVE em comparação ao modelo BPE, por efeito de levar em consideração a viscosidade intrínseca da matriz sólida do tecido.

PALAVRAS-CHAVE: Poroelasticidade, Poroviscoelasticidade, Tendão, Modelos Bifásicos

Fagundes, J. S. **Study of Biphasic Models for the Representation of the Mechanical Behavior of Tendons**. 2017. 20 p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ABSTRACT

Recently, more and more realistic models of the mechanical behavior of the most varied tissues that make up the human body have been obtained. Among these tissues the tendon stands out, due to the great mechanical effort it suffers, being susceptible to various forms of injury. Thus, the development of models capable of representing their mechanical behavior would help health professionals in the treatment and prevention of injuries. In this sense, biphasic models have been used successfully in the simulation of hydrated tissues, among which the tendon is included. This work had the objective to study biphasic constitutive models and their capacity to represent the mechanical behavior of tendons. The biphasic poroelastic model (BPE) and biphasic poroviscoelastic model (BPVE) were implemented via the finite element method. Numerical relaxation tests were performed in order to validate the implementation and better understand the mechanical response of both models. To demonstrate their ability to simulate tendon behavior, a cyclic load tensile teste was performed on a sample of swine flexor tendon, and the results were used in a parameter adjustment algorithm. The result of the adjustment demonstrated the advantage of the BPVE model compared to the BPE model, by taking into account the intrinsic viscosity of the solid matrix of the tissue.

KEYWORDS: Poroelasticity, Poroviscoelasticity, Tendon, Biphasic Models.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	OBJETIVOS	1
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
3.1	MORFOLOGIA E COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TENDÕES.....	2
3.2	MODELOS BIFÁSICOS POROSOS.....	4
3.2.1	Modelo Poroelástico (BPE)	4
3.2.2	Modelo Poroviscoelástico (BPVE).....	6
3.2.3	Isotropia transversal.....	8
4	METODOLOGIA.....	8
5	RESULTADOS	10
5.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA VERSUS ANALÍTICA	10
5.2	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	10
5.2.1	Sensibilidade ao Coeficiente de Poisson.....	10
5.2.2	Diferença na resposta mecânica entre modelo BPE e BPVE	12
5.3	AJUSTE DE PARÂMETROS	13
6	CONCLUSÕES	14
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15

1 INTRODUÇÃO

Recentemente se tem obtido grandes avanços na simulação numérica de sistemas biomecânicos complexos, buscando modelar de forma cada vez mais realística o comportamento mecânico dos diversos tecidos que compõe o corpo humano. Muitos modelos matemáticos têm sido desenvolvidos para representar o comportamento de tecidos biológicos, e com auxílio de ferramentas computacionais simular casos reais, da forma mais fidedigna possível.

Entretanto a correta representação mecânica de tecidos biológicos apresenta grandes dificuldades, já que a grande maioria apresenta na sua faixa natural de operação, em maior ou menor grau, fenômenos como dependência da taxa de carregamento, não linearidade e anisotropia (Viidik, 1968). Dentre estes tecidos, pode-se destacar o tendão, que possui como principal função a transmissão de cargas do músculo para o osso, sendo sujeito a diversos tipos de lesões. Portanto, o a compreensão do seu comportamento mecânico auxiliaria profissionais da área médica no desenvolvimento de dispositivos para implantes, técnicas de reconstrução de tendão, assim como no tratamento e prevenção de lesões.

Fisiologicamente o tendão pertence a categoria de tecido conjuntivo (Junqueira e Carneiro, 2004). Este tipo de tecido apresenta como composição básica células, uma matriz extracelular sólida, e água intersticial. Essa estrutura hidratada apresenta um comportamento mecânico intrincado, mesmo para simples cargas uniaxiais. Apesar da evidente presença de líquido em sua composição, a maioria dos trabalhos encontrados em literatura, que buscam representar numericamente seu comportamento, usam modelos viscoelásticos clássicos (viscosidade intrínseca associada a um sólido). Uma alternativa a esta abordagem, é o uso de uma categoria de modelos que tem apresentado bons resultados na incorporação do fluido intersticial no comportamento mecânico de tecidos hidratados, que são os modelos bifásicos.

Modelos bifásicos poroelásticos (BPE) foram originalmente criados para o estudo de mecânica dos solos (Terzaghi, 1925). O modelo bifásico linear tem sido muito utilizado para análise de tecidos hidratados, na região de comportamento fisiológica (linear, pré-condicionada). Este modelo, apesar de sua simplicidade em termos do número de parâmetros, possui a desejável resposta viscosa proveniente da inclusão de uma fase fluida.

Uma forma de considerar o comportamento viscoso atribuído a parte sólida foi proposta com os modelos bifásicos poroviscoelásticos (BPVE), que incorporam viscosidade na fase sólida, que em teoria melhorariam a capacidade preditiva de comportamento mecânico em tecidos biológicos. A sua desvantagem é que o número de parâmetros de material cresce significativamente.

Por se tratarem de modelos bifásicos, estes possuem a necessidade de acoplar matematicamente diferentes fenômenos, que em aplicações gerais, pode-se realizar através da discretização por elementos finitos. O domínio destas estruturas matemática, bem como da modelagem constitutiva dos fenômenos, permitiriam analisar geometrias mais realísticas de tendões.

2 OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é o estudo da aplicação dos modelos bifásicos para a representação do comportamento de tendões na região fisiológica, incorporando a fase fluida do tecido na sua caracterização.

Neste contexto, além de familiarizar-se com a estrutura matemática de modelos bifásicos, pretende-se avaliar a capacidade de representação do comportamento viscoelástico de um modelo bifásico simples, neste caso, o poroelástico (BPE), que considera a fase fluida. Além disto, pretende-se avaliar a necessidade do uso de um modelo poroviscoelástico (BPVE) e se ambos os modelos são capazes de representar

o comportamento de um tendão real em condições ambientais realísticas, através de um ajuste de parâmetros dos dados de um ensaio mecânico.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Morfologia e comportamento mecânico de tendões

Tendões são um tecido conjuntivo de pouca vascularização, denso e modelado que apresenta fibras de colágeno quase-paralelas umas às outras com a função de guiar o movimento articular transmitindo cargas entre o musculo e o osso com o mínimo de perda de energia e sem induzir carregamentos bruscos entre os vários componentes do sistema musculoesquelético (Cowin 2007; Fung 1994). A configuração de suas fibras é quase-paralela, a qual é formada em resposta a forças de tração exercidas em um determinado sentido de modo a oferecer máxima resistência a essas forças (Nordin et al 2004). Devido a isso, se pode considerar o tendão como sendo transversalmente isotrópico (Limbert e Taylor, 2002)

Os principais constituintes do tendão podem ser divididos em três classes fundamentais: fibras, células e substancia fundamental. O conjunto de fibras mais substância fundamental forma a matriz extracelular, sendo que a substância fundamental é um complexo viscoso altamente hidratado (hidrofílico) que atua preenchendo os espaços entre as células e as fibras do tecido conjuntivo. A maior parte do tecido é formada por essa matriz (80%), sendo que 70% desta é constituído de água (Cowin 2007).

As fibras do tendão são constituídas principalmente de colágeno tipo I. O colágeno é a proteína em maior quantidade no corpo humano representando mais de 30% da quantidade total de proteínas, sendo que existem cerca de 20 tipos diferentes de colágeno, cada um deles apresentando propriedades particulares para atender certos requisitos do tecido em que estão presentes. O colágeno tipo I é um tipo de colágeno que forma longas fibrilas, apresentando a cor esbranquiçada a qual é típica dos tendões (Junqueira e Carneiro, 2004).

Os tendões possuem uma grande variabilidade de forma e de propriedades. Os principais fatores externos ao organismo que tem influência nas suas propriedades são lesões, idade e o grau de sollicitações mecânicas a que o mesmo foi exposto (Cowin, 2007; Tipton et al., 1970). Dentre os fatores internos que os afetam o principal é o tipo de carregamento a que ele está submetido no corpo (Kannus ,2000).

Como boa parte dos tecidos biológicos eles apresentam comportamento viscoelástico, não linear e anisotrópico (Viidik, 1968b). A curva tensão-deformação que esse tecido apresenta quando ensaiado na direção das fibras com um carregamento uniaxial de velocidade constante até a falha tem geralmente a seguinte forma:

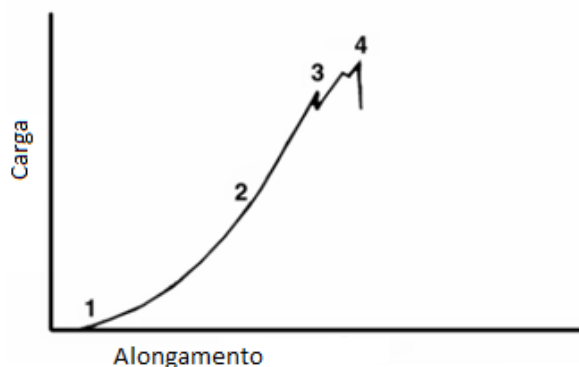


Figura 3.1 Carga-Alongamento (Adaptado de Carlstedt , 1987)

A curva acima, claramente não linear, apresenta 4 regiões distintas. Na parte inicial que corresponde a região 1 do gráfico a aplicação de pequenas forças são

suficientes para causar o alongamento do tecido, que se encontra em um padrão ondular, com a sua rigidez crescendo continuamente até cerca de 4 % de deformação. Esse comportamento não linear é devido ao estiramento contínuo das fibrilas de colágeno. Testes efetuados mostram que após aplicar em torno de 4% de deformação o padrão ondular das fibrilas desaparece (Cowin, 2007). No fim desta região todas as fibras estariam alinhadas sendo solicitadas. A segunda região da curva apresenta uma forma quase linear, onde todas as fibrilas já estão paralelas ao carregamento e o comportamento é dominado pelo deslizamento das moléculas. O tendão, quando solicitado, normalmente encontra-se nesta região. Neste trabalho irá se assumir que o tecido se encontra nesta região.

Na terceira região começa a ocorrer a ruptura das fibras de colágeno, causando pequenas quedas no valor de tensão (Cowin, 2007). Após um certo número de fibras falhar o tendão irá colapsar perdendo a capacidade de resistir a carga, correspondendo a região 4 do gráfico. O valor de tensão em que isso ocorre em tendões humanos geralmente varia entre 50-100Mpa e a deformação varia entre 10-15%, sendo que em condições normais de uso o tendão é sujeito a no máximo 1/3 desse valor de tensão (Fung, 1994).

Um aspecto importante que os tendões apresentam é a viscoelasticidade, que se caracteriza como comportamento mecânico dependente do tempo, logo a relação entre deformação e tensão irá depender do tempo de aplicação da carga. Uma das consequências mais claras da viscoelasticidade é o fenômeno de fluência e relaxação. A fluência se manifesta como o aumento na deformação sob carga constante, enquanto por sua vez a relaxação é a redução no nível de tensão sob constante tensão (Nordin et al., 2004).

No trabalho realizado por Sarah et al., 2009 foi investigado a taxa de relaxação de tendões frente a diferentes níveis de deformação aplicados. Foi encontrado que a taxa de relaxação é uma função da deformação aplicada, com taxas de relaxação maiores correspondendo a maiores deformações aplicadas, o que significa que o comportamento viscoelástico é maior em altas deformações. Isso destoa do comportamento da maior parte dos materiais viscoelásticos, que em geral apresentam a taxa de relaxação não dependente do nível de deformação aplicada. Esse tipo de comportamento torna difícil a correta caracterização matemática. Outro efeito decorrente da viscoelasticidade é a dependência da rigidez frente a taxa de carregamento. Ensaio realizado por Michael et al., 1993 mostram que quando os tendões são submetidos a taxas de deformação crescente esses apresentam um aumento de rigidez. Por fim, a viscoelasticidade também irá ocasionar o fenômeno de histerese a qual se manifesta nos ciclos de carga-descarga. Se o material for carregado e então descarregado a curva de descarregamento não irá seguir a curva de carregamento, sendo que a diferença entre as duas curvas representa a dissipação de energia. Isso ocorre devido a estrutura interna do tendão se modificar a cada ciclo de carga-descarga executado (Fung, 1994). Um ciclo comum de histerese apresenta forma similar ao gráfico abaixo:

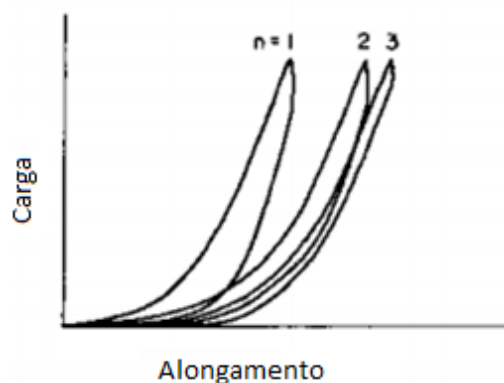


Figura 3.2 Curva de histerese (Adaptado de Fung, 1994)

Quando se repetem os ciclos eventualmente se alcança um estado de equilíbrio, não ocorrendo novas mudanças a menos que se mude a rotina do ciclo, mudando por exemplo o limite inferior ou superior do carregamento. Quando o estado de equilíbrio é alcançado o espécime é dito pré-condicionado (Fung, 1994).

Se acredita que essas propriedades viscoelásticas apresentadas pelo tendão advém da viscoelasticidade inerente da fase sólida e da interação da água com a substância fundamental. (Cowin, 2007). Devido a isso modelos de elementos finitos com diferentes relações constitutivas tem sido usado para melhor compreender a interação e efeito da água no tecido.

3.2 Modelos bifásicos porosos

A primeira teoria para meios porosos foi proposta por Terzaghi, 1923 para modelagem do adensamento de solos. A teoria foi posteriormente ampliada por Biot, 1941 formando uma teoria de consolidação generalizada que integrava a interação do solo com o fluido, descrevendo o comportamento mecânico de um meio multifásico elástico poroso, completa ou parcialmente preenchida de fluido, cunhando o termo poroelasticidade.

No campo de modelagem de tecidos biológicos Spilker et al., 1990 usaram o método de elementos finitos no modelo poroelástico para a simulação de tecidos hidratados, apresentando toda a formulação matemática e realizando testes de compressão confinada e não confinada de uma geometria cilíndrica. Segundo esse modelo o comportamento dissipativo seria devido a troca de momento difusivo entre a fase sólida porosa e a fase fluida. Desta forma o escoamento da fase fluida no interior do tecido seria a única fonte da viscosidade.

Entretanto, os constituintes de tendões e ligamentos são conhecidos por serem intrinsicamente viscoelásticos, de forma independente do escoamento da fase fluida (Viidik, 1968). Para levar essa viscoelasticidade intrínseca da fase sólida em conta Mak, 1986 incorporou um modelo viscoelástico linear do tipo integral na tensão efetiva da fase sólida. Mais tarde Suh et al., 1998 ampliaram o modelo de elementos finitos poroelástico para incluir a viscosidade por meio de um modelo de aspecto discreto, combinando vários modelos lineares de Kelvin-Voight. Em um trabalho posterior Suh et al., 1999 realizou um ensaio de compressão confinada em cartilagem articular, realizando um ajuste de parâmetros com o modelo poroviscoelástico, obtendo resultados satisfatórios.

3.2.1 Modelo Poroelástico (BPE)

Na teoria é assumido que tanto a fase sólida como a fase líquida são incompressíveis e sujeitas a pequenas deformações, enquanto que o tecido como um todo é compressível através da exsudação de fluido. Os efeitos de viscosidade são incluídos através de uma força de corpo difusiva proporcional a velocidade relativa entre o fluido e o sólido. Também é assumido que a permeabilidade e o conteúdo sólido são independentes da deformação, que a fase sólida é isotrópica linear elástica, e que todos os efeitos inerciais são desprezíveis. Nesta seção será apresentada superficialmente a estrutura matemática deste tipo de modelo. Mais informações podem ser buscadas em Spilker et al., 1990 e em Mow et al., 1980.

Considerando um domínio Ω , com fronteira Γ e um volume total V , um volume líquido V_f e um volume sólido V_s . Sendo as quantidades $(.)^s$ e $(.)^f$ representando quantidades associadas com a fase sólida e líquida, respectivamente.

Sobre essas hipóteses as equações de equilíbrio de momento da fase sólida e da fase fluida são apresentadas abaixo:

$$\nabla \cdot \sigma^s + b^s = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \sigma^f + b^f = 0 \quad (3.2)$$

onde σ^f e σ^s é a tensão da fase fluida e sólida, b^f e b^s é a força de corpo da fase fluida e sólida e $\nabla(\cdot)$ é o operador divergente.

A equação constitutiva para a fase sólida segue o modelo elástico linear de Hooke com a adição de uma pressão (p) devido ao fluido. Ela é mostrada abaixo:

$$\sigma^s = -\phi^s pI + \lambda^s e^s I + 2\mu^s \varepsilon^s \quad (3.3)$$

onde ϕ^s é a solidez ($\frac{V_s}{V}$), I é o tensor identidade, λ^s e μ^s são as constantes de Lamè, ε^s é o tensor deformação da fase sólida e e^s é o traço de ε^s .

A equação constitutiva da fase fluida se constitui apenas da pressão exercida pelas paredes dos poros da fase sólida no fluido:

$$\sigma^f = -\phi^f pI \quad (3.4)$$

onde ϕ^f é a porosidade ($\frac{V_f}{V}$), e a relação $\phi^f + \phi^s = 1$ é sempre válida.

O termo de acoplamento entra a fase sólida e fluida é proporcional a diferença de velocidade entra ambas, dado pela relação de troca de momento incluída na força de corpo:

$$b^s = -b^f = \frac{(\phi^f)^2}{\kappa} (v^f - v^s) \quad (3.5)$$

onde κ é a permeabilidade, v^f é a velocidade da fase fluida e v^s a velocidade da fase sólida.

Além da equação de equilíbrio de momento, também se deverá cumprir a equação da continuidade (conservação de massa):

$$\nabla \cdot (\phi^s v^s + \phi^f v^f) = 0 \quad (3.6)$$

As condições de contorno são:

$$u^s = \bar{u}^s \text{ em } \Gamma_{u^s}; v^f = \bar{v}^f \text{ em } \Gamma_{v^f}; t^s = \bar{t}^s \text{ em } \Gamma_{t^s}; p = \bar{p} \text{ em } \Gamma_{p^f} \quad (3.7)$$

Para a formulação de elementos finitos correspondente as equações apresentadas, pode-se usar o método dos resíduos ponderados de Galerkin, com condições de deslocamento da fase sólida (\bar{u}^s) e de velocidade da fase fluida (\bar{v}^f) como condições de contorno essenciais. Se utiliza o método de penalidade na equação de conservação de massa, de modo a eliminar a pressão como variável independente:

$$p = -\beta \nabla \cdot (\phi^s v^s + \phi^f v^f) \quad (3.8)$$

onde β é o parâmetro de penalidade, que deve ser pré-definido pelo usuário. Ele deve ser grande o suficiente para que a equação da continuidade seja satisfeita, mas não tão grande a ponto de as matrizes serem mal condicionadas. Neste trabalho se assume o valor de 10^{14} (Spike et al., 1990).

A discretização em elementos finitos reescreve o sistema de equações para cada instante de tempo como (Spilker et al., 1990):

$$Cv(t) + Kd(t) = F(t) \quad (3.9)$$

Os vetores de força, deslocamento e de velocidade compreendendo a fase sólida e fluida são:

$$F(t) = \begin{bmatrix} F^s(t) \\ F^f(t) \end{bmatrix}; v(t) = \begin{bmatrix} v^s(t) \\ v^f(t) \end{bmatrix}; d(t) = \begin{bmatrix} d^s(t) \\ d^f(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Os vetores de força serão dados por interpolação:

$$F^s(t) = \int_{\Gamma_{t^s}} N^T \bar{t}^s d\Gamma; F^f(t) = \int_{\Gamma_{p^f}} N^T \phi^f \bar{p} n d\Gamma \quad (3.11)$$

Sendo N composto pelas funções de interpolação escolhidas. Os termos ligados a matriz de rigidez são dados por:

$$K = \begin{pmatrix} k_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$k_n = \int_{\Omega_n} (\lambda_s B^T D_1 B + \mu_s B^T D_2 B) d\Omega \quad (3.13)$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

As matrizes D_1 e D_2 são usadas de forma a possibilitar o cálculo da lei de Hooke de forma matricial, facilitando a implementação computacional. A matriz B é dada pela aplicação do operador de derivação do tensor de pequenos deslocamentos ε em N. Vale notar que a matriz de rigidez K irá multiplicar apenas d^s , eliminando os deslocamentos d^f como incógnitas na resolução do sistemas de equações.

Os termos ligados a velocidade da fase sólida e fluida são dados por:

$$C = [\beta c_n^1 + c_n^2] \quad (3.15)$$

$$c_n^1 = \begin{pmatrix} (\phi^s)^2 c^3 & \phi^f \phi^s c^3 \\ \phi^f \phi^s c^3 & (\phi^f)^2 c^3 \end{pmatrix}; \quad c_n^2 = \begin{pmatrix} c^4 & -c^4 \\ -c^4 & c^4 \end{pmatrix}; \quad (3.16)$$

$$c^3 = \int_{\Omega_n} B^T D_1 B d\Omega; \quad c^4 = \int_{\Omega_n} \frac{(\phi^f)^2}{\kappa} N^T N d\Omega \quad (3.17)$$

Esta formulação pode ainda ser particularizada para o estudo do caso axissimétrico usando elementos retangulares com funções de interpolação lineares. Um tratamento especial é dado ao termo ligado a penalização de forma a evitar “travamento” (locking) numérico. Para este termo se usa a técnica de integração reduzida e também uma generalização da formulação de dilatação média, dado por Nagtegaal et al., 1974. Desta forma, o cálculo de c^3 na equação 20 se torna:

$$c^3 = \frac{B^{*T} D_1 B^*}{V_n}; \quad B^* = \int_{\Omega_n} B d\Omega; \quad V_n = \int_{\Omega_n} d\Omega \quad (3.18)$$

Deve-se notar que no conjunto de equações apresentado, se tem como incógnita deslocamentos e velocidades para cada instante de tempo: $v(t)$ e $d(t)$. Em vista disso, utiliza-se uma regra trapezoidal de discretização no tempo, onde se encontra primeiro o vetor de velocidades $v(t + \Delta t)$, e a partir deste se encontra o deslocamento $d(t + \Delta t)$:

$$[C + \xi \Delta t K] v(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) - K [d(t) + \Delta t (1 - \xi) v(t)] \quad (3.19)$$

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \Delta t [(1 - \xi) v(t) + \xi v(t + \Delta t)] \quad (3.20)$$

O parâmetro ξ será uma função do esquema trapezoidal usado. Neste trabalho se usa o valor $\xi = 0.5$, recaindo no esquema de Crank-Nicolson (Hughes, 2000).

3.2.2 Modelo Poroviscoelástico (BPVE)

A teoria poroviscoelástica (BPVE) foi introduzida por Mak, 1986 através de uma forma integral linear incorporada na tensão efetiva sólida:

$$\sigma^s = \lambda^s \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} tr(\varepsilon^s) Id\tau + 2\mu^s \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{\partial(\varepsilon^s)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.21)$$

onde $G(t)$ e a função de relaxação.

De forma a evitar o custo computacional devido ao cálculo da integral de convolução, se prefere o uso de modelos discretos de funções de relaxação. Para isto, pode-se utilizar o modelo (Suh et al., 1998):

$$G(t) = 1 + \bar{G} \sum_{i=1}^{Nd} e^{\frac{-t}{\tau_i}} \quad (3.22)$$

onde Nd é o número de termos discretos usados, τ_i é a taxa de relaxação e \bar{G} é o modulo discreto.

Adotando a proposta dada por Suh et al., 1999 para reduzir a quantidade de parâmetros de material, se usa $Nd = 3$ e uma distribuição em escala logarítmica de base decimal para τ_i . Devido a isso se denota $\tau_1 = \tau_s$, sendo a taxa de relaxação em curto tempo, e $\tau_3 = \tau_l$ a taxa de relaxação em longo tempo. A taxa de relaxação intermediária é dada por:

$$\log(\tau_2) = \frac{\log(\tau_s) + \log(\tau_l)}{2} \quad (3.23)$$

Realizando um processo similar ao usado no modelo poroelástico, a formulação de elementos finitos para o modelo BPVE é dado por:

$$Cv(t) + K\eta(t) = F(t) \quad (3.24)$$

Sendo $\eta(t)$ o pseudo-deslocamento viscoelástico da fase sólida:

$$\eta(t) = \int_0^t G(t-\tau)v(\tau)d\tau \quad (3.25)$$

Usando o modelo de relaxação discreto da equação 3.22, pode-se obter uma forma recursiva no domínio do tempo (Suh et al., 1998). Assim, o sistema de equações é reescrito para cada instante de tempo como:

$$[C + KG_o\xi\Delta t]\Delta v = F(t + \Delta t) - Cv(t) - K\eta(t + \Delta t) \quad (3.26)$$

onde ξ é o parâmetro do esquema trapezoidal usado, no valor de 0.5 para ser equivalente ao esquema usado para o modelo BPE. Neste sistema de equações, a incógnita é o incremento de velocidade Δv . Os restantes dos termos presentes são dados por:

$$\eta(t + \Delta t) = [d(t) + \Delta tv(t)] + \sum_{i=1}^3 \bar{G} \left[e^{\frac{-\Delta t}{\tau_i}} \eta_i(t) + \Delta tv(t) \left((1 - \xi)e^{\frac{-\Delta t}{\tau_i}} + \xi \right) \right] \quad (3.27)$$

$$G_o = 1 + Nd\bar{G} \quad (3.28)$$

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \Delta t [(1 - \xi)v(t) + \xi v(t + \Delta t)] \quad (3.29)$$

$$\eta_i(t + \Delta t) = \eta_i(t) e^{\frac{-\Delta t}{\tau_i}} + \Delta tv(t) \left((1 - \xi)e^{\frac{-\Delta t}{\tau_i}} + \xi \right) + \xi \Delta t \Delta v \quad (3.30)$$

Após obter o incremento de velocidade Δv , a velocidade $v(t + \Delta t)$ e o pseudo-deslocamento viscoelástico $\eta(t + \Delta t)$ no tempo atual são obtidos:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v \quad (3.31)$$

$$\eta(t + \Delta t) = \eta + G_o \xi \Delta t \Delta v \quad (3.32)$$

3.2.3 Isotropia transversal

Visto que tendões não são isotrópicos, uma adaptação se faz necessária na relação tensão-deformação originalmente proposta nos modelos bifásicos. Para um material que é transversalmente isotrópico, como o tendão em estudo, a relação entre tensão e deformação para axissimetria pode ser escrita na forma compacta, por meio de uma matriz de rigidez 4x4 com 5 componentes independentes (Cohen et al., 1988):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zr} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{zr} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

As 5 componentes independentes da matriz de rigidez podem ser escritas em termos dos módulos de Young e coeficientes de Poisson no plano transversal (E_1 e $\nu_{21} = \nu_{12}$) e fora do plano (E_3 e $\nu_{31} = \nu_{13} \frac{E_3}{E_1}$), além do módulo de cisalhamento G_{31} :

$$C_{11} = E_1 \left(1 - \nu_{31}^2 \frac{E_1}{E_3} \right) / [(1 + \nu_{21})\Delta_1]; \quad C_{12} = E_1 \left(\nu_{21} + \nu_{31}^2 \frac{E_1}{E_3} \right) / [(1 + \nu_{21})\Delta_1]; \quad (3.34)$$

$$C_{13} = E_1 \nu_{31} / \Delta_1; \quad C_{33} = E_{33} \left[1 + 2\nu_{31}^2 \left(\frac{E_1}{E_3} \right) / \Delta_1 \right]; \quad C_{44} = G_{31} \quad (3.35)$$

onde $\Delta_1 = 1 - \nu_{21} - 2\nu_{31}^2 \frac{E_1}{E_3}$.

4 METODOLOGIA

Para alcançar os objetivos deste trabalho, este estudo é subdividido em três partes: implementação de modelos de literatura e verificação; realização de testes numéricos para conhecer a capacidade dos modelos realizando um estudo de sensibilidade aos parâmetros de material; e uma identificação de parâmetros usando dados experimentais. De forma a facilitar um primeiro estudo dos modelos e reduzir o número de parâmetros de interesse, nas etapas de verificação da implementação e estudo da resposta viscosa, foi usado o caso isotrópico (equação 3.13), uma vez que não era necessário especificar parâmetros de um material real. Já na identificação de parâmetros de um teste experimental, de forma a ter consistência na representação do tendão, o modelo original foi modificado de forma a utilizar a hipótese de isotropia transversal do material, alinhando as fibras na direção longitudinal.

Assim, os modelos poroelástico e poroviscoelástico foram implementados em *Matlab*, usando o método de elementos finitos. A implementação do modelo poroelástico isotrópico é verificada usando a solução analítica para o caso de compressão confinada (Mow et al., 1980; Spilker et al. 1990).

Para a compreensão da capacidade de representar comportamentos viscosos, testes numéricos de relaxação foram realizados, também usando a poroelásticidade isotrópica. Nestes testes os parâmetros de material foram modificados e a suas respostas frente a amplitude de relaxação foram analisadas.

Para a obtenção de dados que fossem úteis na identificação de parâmetros, foi realizado um teste de tração com carregamento cíclico. Uma amostra de tendão flexor de uma pata dianteira suína, com seção transversal homogênea ao longo do comprimento foi escolhida. A geometria da amostra se aproxima de um cilindro, com dimensões de comprimento no valor de 47,5 mm, e diâmetro de 3 mm. Visto que se trata de material mole e hidratado, foram realizadas suturas em ambas as extremidades,

de forma a prover rigidez na região e evitar o escorregamento nas garras da máquina de tração. Após a preparação, a amostra foi fixada na máquina de tração e submersa em água mantida na temperatura controlada de 32°C. O banho é utilizado para simular as condições no qual o tendão se encontra in vivo e manter a coerência com o teste numérico escolhido, que tem como hipótese que o material se encontra hidratado e o fluido está livre para se mover com o ambiente externo (teste não confinado).

A figura 4.1 apresenta a amostra preparada e fixada na máquina de tração:

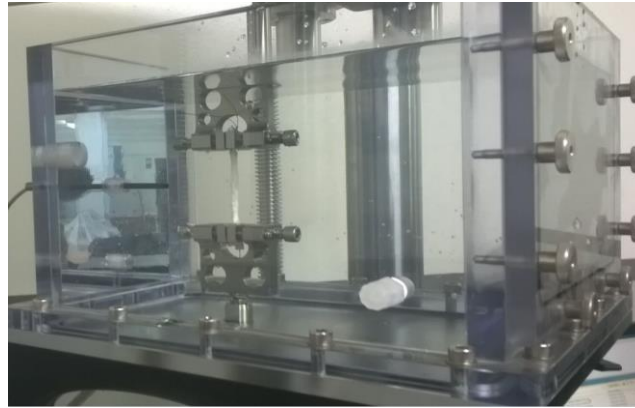


Figura 4.1 Amostra pronta para o ensaio

Foi imposto uma pré-carga de 50 N durante 100 segundos, de forma a evitar a região 1 da figura 3.1. Após a carga é levada até 100 N e dois ciclos de carga-descarga são efetuados, com pico máximo de 180 N. A figura 4.2 mostra o carregamento aplicado, sendo os dados deste ensaio usados no posterior ajuste de parâmetros.

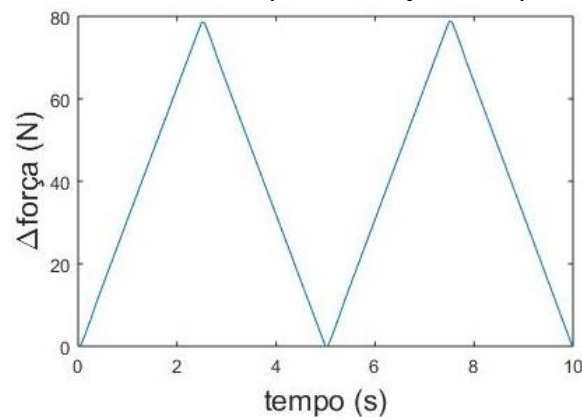


Figura 4.2 Força aplicada.

Para o procedimento de ajuste de parâmetros foi usada a técnica de otimização de mínimos quadráticos, utilizando o MATLAB. O deslocamento obtido no ensaio é imposto no modelo numérico, e os parâmetros do material são ajustados até que a força resultante apresente a mínima diferença em relação a carga aplicada no ensaio, como mostrado na equação 4.1:

$$\psi = \sum_{l=1}^{l=n} (F^l(X) - R^l)^2 \quad (4.1)$$

onde ψ é o erro quadrático, n é o número de pontos adquiridos e X é o conjunto de parâmetros a ser ajustado. Para o ajuste se usou a relação transversalmente isotrópica, de modo a melhor representar o comportamento do tecido.

5 RESULTADOS

5.1 Solução numérica versus analítica

Como forma de verificação do código desenvolvido para o modelo de poroelasticidade, foi escolhido o caso de compressão confinada de coluna bifásica isotrópica, uma vez que esse problema possui solução analítica, disponível em Spilker et al., 1990 e Mow et al., 1980. Os parâmetros e condições de contorno foram obtidos do referido estudo.

A geometria usada para o modelo possui $d=6,35$ mm e $h=1,78$ mm. Os parâmetros do material são $\Phi^s=0,17$, $\kappa=0,76e-14$ $\left[\frac{m^4}{N.s}\right]$, $\lambda_s=0,1$ [MPa], $\mu_s=0,3$ [MPa].

O carregamento consiste de um deslocamento linearmente crescente até se obter uma deformação de $\varepsilon=5\%$ em $t_o=500$ [s], mantendo o carregamento constante até $t=2000$ [s]. Os gráficos a) e b) da figura 5.1 comparam a solução numérica e analítica para a velocidade relativa, definida como $(v^s - v^f)$, em 4% de profundidade e para a pressão ao longo da profundidade da coluna, em $t=300$ [s]. Nota-se que a implementação realizada no MATLAB corresponde com os resultados de literatura, verificando que esta é coerente, permitindo assim ter maior segurança na implementação e nas análises dos modelos para diferentes condições de contorno.

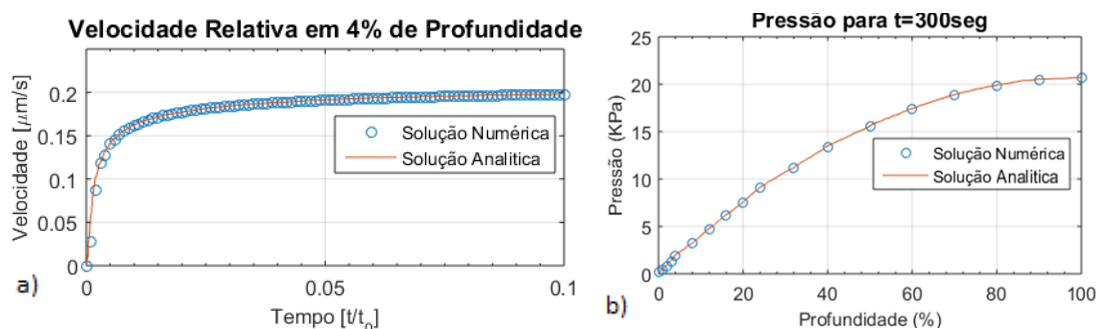


Figura 5.1 a) Comparação velocidade relativa com solução analítica; b) Comparação pressão com solução analítica

5.2 Exemplos numéricos

Com o objetivo de compreender a capacidade do modelo BPE frente a representação de fenômenos viscosos, estes foram estudados frente ao teste de relaxação. Dos 4 parâmetros deste modelo, o que demonstra maior sensibilidade a relaxação, e consequentemente a viscosidade, é o Coeficiente de Poisson, como já indicado em Suh et al. (1999).

5.2.1 Sensibilidade ao Coeficiente de Poisson

No trabalho realizado por Suh et al., 1999, é discutido o efeito que o coeficiente de Poisson da matriz sólida " ν " teria sobre o modelo BPE isotrópico, sendo afirmado que o mesmo teria influência considerável na viscoelasticidade ocasionada pela interação com o fluido. A geometria usada nos testes consistiu de uma coluna de $d=3$ mm e $h=1,22$ mm. A carga consiste de um deslocamento linearmente crescente até se obter uma deformação de $\varepsilon=10\%$ em $t_o=15$ [s], mantendo o carregamento constante até $t=300$ [s]. Os parâmetros do material usados foram:

Tabela 5.1 Parâmetros do material

E^s	0,46 [MPa]
ν^s	[0,01; 0,098; 0,186; 0,274; 0,362; 0,45]
Φ^s	0,2
κ	$0,76e-14 \left[\frac{m^4}{Ns} \right]$

O resultado para a força de reação ao longo do tempo para os diferentes valores do coeficiente de Poisson é mostrado na figura 5.2:

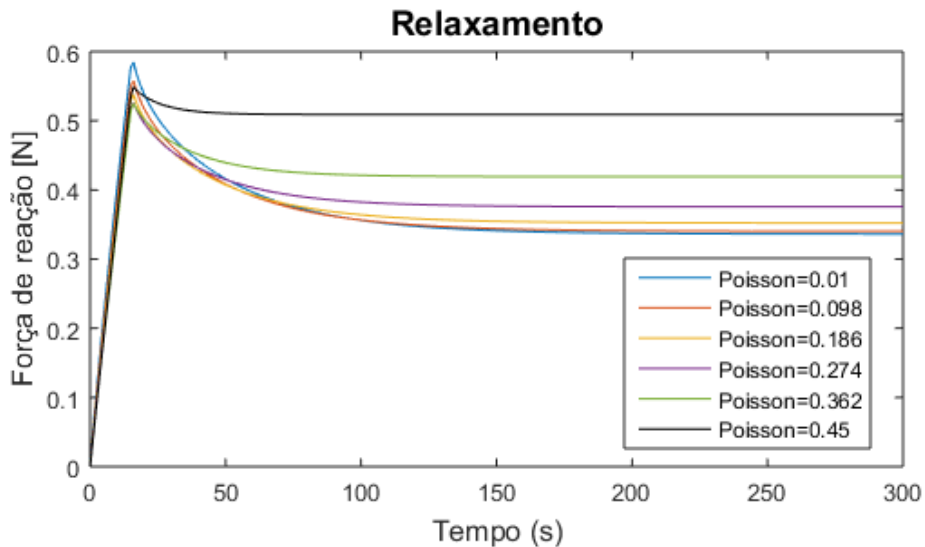


Figura 5.2 Força de reação ao longo do tempo para diferentes coeficientes de Poisson

Na figura 5.3 é mostrado o valor absoluto de velocidade relativa ($v^s - v^f$) no nó em que a mesma possui maior valor, em $t = t_o$ para diferentes valores de Poisson.

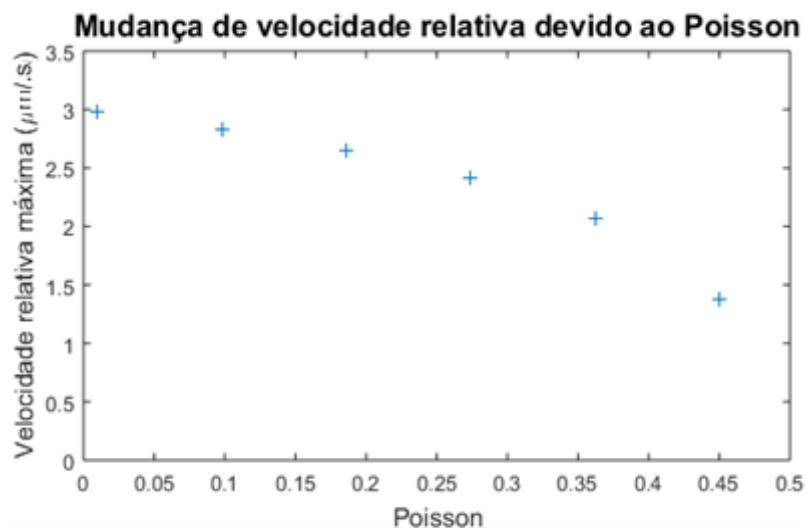


Figura 5.3 Velocidade relativa máxima para diferentes coeficientes de Poisson

A partir dos resultados mostrados, se pode argumentar que conforme “ ν ” se aproxima de 0,5, menor seria a mudança do volume aparente da matriz sólida, levando a um menor movimento de fluido intersticial (e conseqüente menor velocidade relativa), o que de acordo com a equação 3.5 diminuiria a dissipação de momento devido ao movimento do fluido, explicando a diferença na força de reação apresentada na figura.

5.2. Visto que o tendão normalmente é considerado incompressível, em vias práticas, ter-se-ia uma limitação frente a representação do fenômeno.

5.2.2 Diferença na resposta mecânica entre modelo BPE e BPVE

Como forma de melhor compreender as diferenças na resposta mecânica entre os modelos BPE e BPVE foi realizado um teste numérico de relaxamentos de tensões usando ambos os modelos na sua formulação isotrópica. A geometria e o carregamento imposto são o mesmo usado no caso anterior. A fim de comparação, os parâmetros poroelásticos usados no modelo BPE e BPVE foram os mesmos:

Tabela 5.1 Parâmetros poroelásticos

μ^s	0,09 [MPa]
λ^s	0,01 [MPa]
Φ^s	0,2
κ	$0,5e-14 \left[\frac{m^4}{Ns} \right]$

Os parâmetros adicionais usados no modelo BPVE são mostrados na tabela 5.3:

Tabela 5.2 Parâmetros viscoelásticos

τ_1	0,02 [s]
τ_2	13 [s]
\bar{G}	2,8

A força de reação apresentado por ambos os modelos ao longo do tempo é mostrada na figura 5.4:

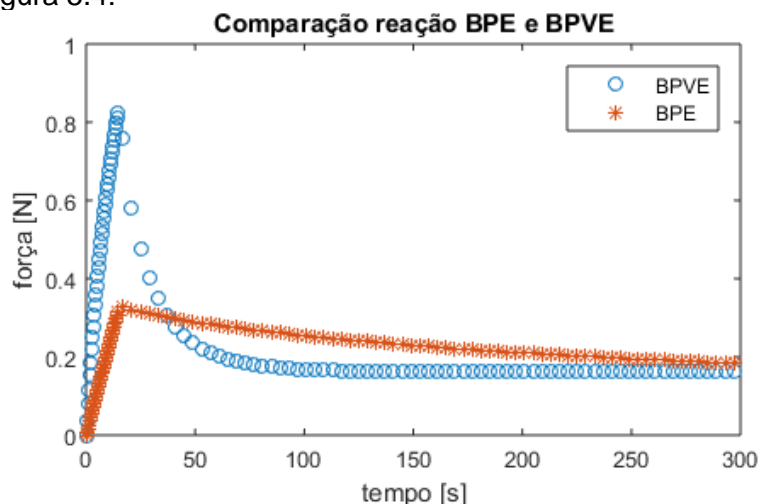


Figura 5.4 Comparação dos modelos BPE e BPVE para relaxação de tensões não confinada

Pode-se perceber que o modelo BPVE possui um pico de reação muito mais elevado que o apresentado pelo modelo BPE, e que em tempos longos ambos tendem ao mesmo resultado de equilíbrio. Isso já era esperado em razão da formulação usada, que adiciona uma rigidez devido a função de relaxação (equação 3.22), sendo que a mesma tende a zero em tempos longos, restando apenas a rigidez dada pela parcela poroelástica. Isso indica que o modelo BPVE tem uma flexibilidade maior de

representação para tempos curtos, embora neste caso possua 3 parâmetros adicionais a serem identificados.

5.3 Ajuste de parâmetros

O ajuste de parâmetros para o modelo BPE e BPVE com isotropia transversal foi realizado usando os dados experimentais adquiridos com o carregamento mostrado na figura 4.2. Foram usadas como condições de contorno nas extremidades da amostra as condições de impermeabilidade e de que o agarre é perfeitamente adesivo. A condição de impermeabilidade foi imposta por se supor que o agarre feito pelas garras da máquina de tração impede que o fluido escoe por essa região, enquanto que a condição de agarre perfeitamente adesivo impõe um deslocamento lateral nulo em ambas extremidades, se considerando que o atrito devido ao agarre seja suficiente para impedir o escorregamento da amostra.

Foi efetuado diversas tentativas de ajuste utilizando o modelo BPE, mas não se alcançou resultados satisfatórios. O melhor ajuste obtido é mostrado abaixo:

Tabela 5.3 Parâmetros obtidos no ajuste para o modelo BPE

κ	$0,39e-14 \left[\frac{m^4}{Ns} \right]$
E_1	4,102 [MPa]
E_3	0,205 [MPa]
ν_{21}	0,910
ν_{13}	0,001
G_{31}	2,567 [MPa]

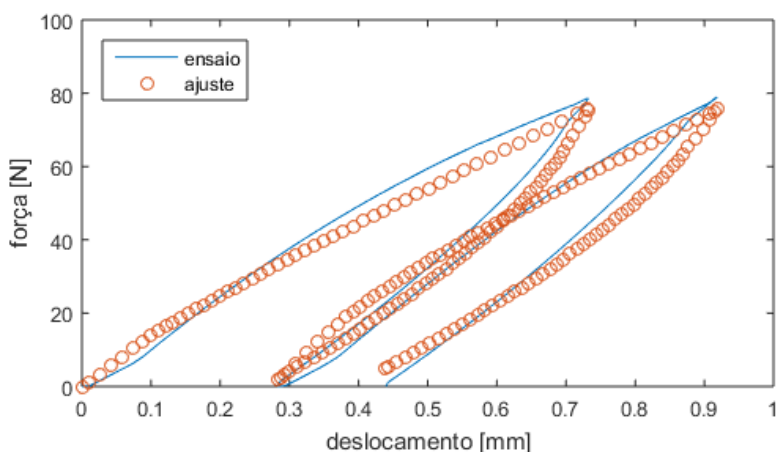


Figura 5.5 Ajuste de parâmetros dos dados experimentais com o modelo BPE

Para o modelo BPVE se obteve melhores resultados. Os parâmetros obtidos pelo ajuste são mostrados na tabela 5.4:

Tabela 5.4 Parâmetros obtidos no ajuste para o modelo BPVE

κ	$2,363e-12 \left[\frac{m^4}{Ns} \right]$
\bar{G}	0,750
τ_1	2,065 [s]

τ_2	2,221
E_1	0,320 [MPa]
E_3	3,846 [MPa]
ν_{21}	0,269
ν_{13}	0,247
G_{31}	3,392 [MPa]

A resposta alcançada com os parâmetros mostrados na tabela 5.4 em comparação com os dados experimentais é mostrado na figura 5.6:

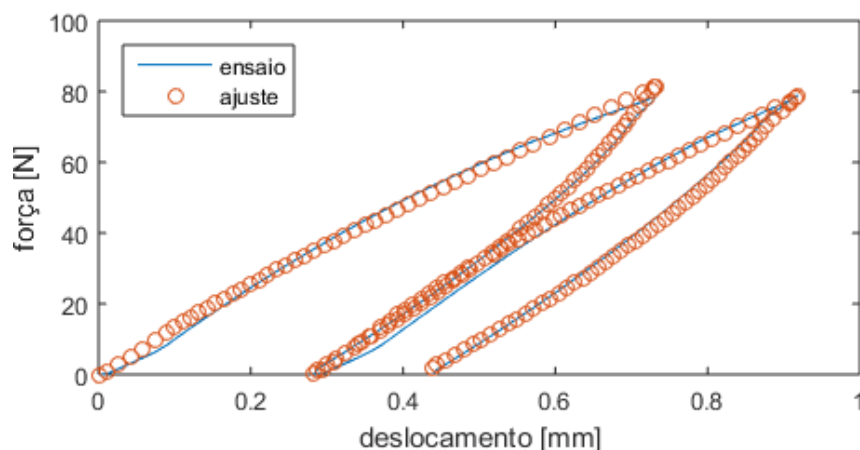


Figura 5.6 Ajuste de parâmetros dos dados experimentais com o modelo BPVE

Comparando-se o resultado numérico com o experimental, pode-se afirmar que o modelo consegue representar de forma satisfatória a maior parte dos dados do ensaio.

6 CONCLUSÕES

Com este estudo foi possível compreender o uso de modelos bifásicos para simular o comportamento mecânico de tendões. Foi implementado os modelos poroelástico e poroviscoelástico, com o método de elementos finitos, e através de testes numéricos foi possível avaliar a capacidade de reproduzir fenômenos mecânicos viscosos, e suas principais diferenças.

Nos testes numéricos foi verificado que o valor do coeficiente de Poisson tem grande influência no escoamento do fluido intersticial no modelo BPE, afetando em decorrência a troca de momento entre a matriz porosa sólida e o fluido. Também se constatou que embora ambos os modelos levem a mesma resposta de equilíbrio em tempos longos, o modelo BPVE apresenta uma maior capacidade de representar a resposta de curto tempo do material.

Um teste experimental foi realizado, e os modelo BPVE e BPE foram utilizados para um procedimento de ajuste de parâmetros, sendo que apenas o modelo BPVE produziu resultados satisfatórios, assim demonstrando a sua capacidade em representar o comportamento mecânico de tendões no regime de pequenas deformações. O modelo BPE não foi capaz de reproduzir os dados experimentais.

Como sugestão de trabalhos futuros, é proposto a inclusão de não linearidades devido a grandes deformações, e devido a permeabilidade dependente da taxa de deformação. Estas melhorias visam aproximar a capacidade de representação do modelo com o comportamento real do tendão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Biot, M. A. **General theory of three-dimensional consolidation**. Journal of Applied Physics, AIP, v.12, n.2, pag.155-164, 1941.
- B. Cohen; W. M. Lai ; V. C. Mow. **A transversely Isotropic Biphasic Model for Unconfined Compression of Growth Plate and Chondroepiphysis**. *Departments of Mechanical Engineering and Orthopaedic Surgery, Columbia University, New York.*
- Carlstedt, C. A. **Mechanical and chemical factors in tendon healing**. *Karolinska Institute Department of Orthopedics at Huddinge, 1987.*
- Cowin, S.; Doty, S. B. **Tissue Mechanics**. [S.1.]: Springer, 2007.
- Fung, Y. C. **Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues**. New York: Springer-Verlag, 1994.
- Kannus P. **Structure of the tendon connective tissue**. Scandinavian Journal of Medicine and Science in Sports, 2000.
- J. C. Nagtegaal; D. M. Parks; J. R. Rice. **On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range**. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering vol.4, pag. 153-177, 1974
- Luiz C. Junqueira; José Carneiro. **Histologia Básica 10^o ed., 2004.**
- Limbert, G.; Taylor, M.; **On the constitutive modeling of biological soft connective tissues. A general theoretical framework and explicit forms of the tensors of elasticity for strongly anisotropic continuum fiber-reinforced composites at finite strains**. Int. J. Solids Struct., 39, pag. 2343-2358, 2002.
- Mak, A. F. **The apparent viscoelastic behavior of articular cartilage-the contributions from the intrinsic matrix viscoelasticity and interstitial fluid flows**. Journal of Biomechanical Engineering, v.108, n.2, pag.123-130, 1986.
- Michael I. Danto; Savio Y. Woo. **The mechanical properties of skeletally mature rabbit anterior cruciate ligament and patellar tendon over a range of strain rates**. Journal of Orthopaedic Research, 1993.
- Nordin, V. H; Frankel, M. **Biomecánica básica del sistema musculoesquelético**. McGraw-Hill. Interamericana, 2004.
- Sarah E. D.; Ray V. Jr.; Roderic S. L. **Viscoelastic relaxation and recovery of tendon**. Annals of Biomedical Engineering, v. 37, n.6, pag. 1131-1140, 2009.
- Spielker, R. L.; Suh, J. -K. **Formulation and evaluation of a finite element model for the biphasic model of hydrated tissues**. Computers and Structures, v.35, n.4, pag. 435-439, 1990. ISSN 0045-7949. Special Issue: Frontiers in Computational Mechanics.
- Suh, J. -K.; Bai, S. **Finite element formulation of biphasic poroviscoelastic model for articular cartilage**. Journal of Biomechanical Engineering, ASME, v.120, n.2, pag.195-201, 1998.
- Suh, J. -K.; Disilvestro, M. R. **Biphasic poroviscoelastic behavior of hydrated biological soft tissue**. Journal of Applied Mechanic, ASME, v.66, n.2, pag.528-535, 1999.
- Terzaghi, K. **Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer grundlage**. Franz Deuticke, Leipzig, 1925.
- Thomas J. R. Hughes. **The finite element method: Linear static and Dynamic finite element analysis**. Dover Publication, 2000.
- Tipton C. M.; Schild R. J.; Tomanek R. J. **Influence of knee ligaments in rats**. pag. 894-904, 1967.
- V. C. Mow; S. C. Kuei; W. M. Lai; C. G. Armstrong. **Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experimental**. Journal of Biomechanics, Vol. 102, 1980, pag. 73-84.
- Viidik A. **A rheological model for uncalcified parallel-fibred collagenous tissue**. Journal of Biomechanic, v.1, pag.3-11. 1968.