

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD FEDERAL DE RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACIÓN EN INGENIERÍA MECÁNICA

ESTUDIO DE LAS FUERZAS DE ARRASTRE DE CABLES UMBILICALES DE
ROBOTS DE INSPECCIÓN O DESOBSTRUCCIÓN DE TUBERÍAS

por

Javier Marengo

Disertación para la obtención de Título de
Maestro en Ingeniería

Porto Alegre, Mayo de 2017

ii

ESTUDIO DE LAS FUERZAS DE ARRASTRE DE CABLES UMBILICALES DE
ROBOTS DE INSPECCIÓN O DESOBSTRUCCIÓN DE TUBERÍAS

por

Javier Marengo
Ingeniero Industrial Mecánico

Disertación presentada al Programa de Pos-Graduación en Ingeniería Mecánica de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul y la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de

Maestro en Ingeniería Mecánica

Área de Atención: Procesos de Fabricación

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Perondi

Comisión de Evaluación:

Prof. Dr. Tiago Becker: PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Rafael A.C. Laranja: PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Fabiano Disconzi Wildner: PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Jaksen Manfredini Vassoler
Coordinador de PROMEC

Porto Alegre, 19 de Mayo de 2017

Dedicado a mi esposa y mis cuatro hijos.

AGRADECIMENTOS

A mi esposa y a nuestros hijos por la infinita paciencia.

A los profesores que dictaron los cursos que fueron parte de esta maestría por su buena disposición en largas jornadas de clase.

Al profesor Dr. Eduardo Perondi por su capacidad y calidez demostrada tanto en clase como durante la tutoría de esta disertación.

A la UDELAR en su conjunto y a la Facultad de Ingeniería en particular. Siempre siento que recibo educación de calidad en sus aulas.

Al Instituto de Ingeniería Mecánica y Producción Industrial de la Facultad de Ingeniería y a todos los que tuvieron que ver con el hecho de que esta maestría se concretara.

RESUMEN

El presente trabajo se dedica al estudio de fuerzas de arrastre de cables umbilicales de robot de inspección o desobstrucción de tuberías y tiene como objetivo la determinación de un modelo válido para el cálculo de las mismas. Para tal fin, se desarrollan los modelos físicos en relación a las fuerzas de rozamiento presentes para tramos rectos y curvas en todas sus configuraciones posibles, obteniéndose así, para cada caso, una ecuación diferencial que modela el fenómeno del rozamiento y que incluye las variables propias del fluido presente y las características pertinentes del cable. Mediante la resolución de esa ecuación diferencial, se obtiene una expresión explícita para el valor de la fuerza de rozamiento en cada caso. En el presente trabajo, el modelo obtenido es evaluado mediante comparación con el modelo simplificado tradicional de manera de ver los alcances del nuevo modelo. Se realiza también una presentación de la influencia que tiene la rigidez del cable y como esta rigidez a la flexión genera fuerzas normales adicionales en los extremos de las curvas que redundan finalmente en una componente adicional de las fuerzas de fricción. Mediante comparación con mediciones reales de fuerza de arrastre se valida el modelo obtenido. Dada la complejidad de los cálculos requeridos para la determinación de las fuerzas de arrastre de tuberías reales se desarrollan dos aplicaciones de software para el cálculo de las mismas, una específica para tuberías rígidas y otra para tuberías flexibles utilizando algoritmos de cálculo basados en las ecuaciones determinadas. Son presentadas también, una serie de estrategias de forma de mantener acotado el valor máximo de la tensión de cable. Dentro de las estrategias están la elección de materiales de recubrimiento de cable que presenten un bajo coeficiente de fricción con la tubería, la adopción de cables cuyo peso específico sea tal que el peso se iguale a la fuerza de empuje y la incorporación de varios dispositivos de tracción del cable de modo de mantener bajas las contra tensiones del cable utilizando un sistema distribuido de empuje.

Palabras clave: Robot de inspección de tuberías; In pipe robot; Ecuación Euler para poleas; Cable pulling forces.

ABSTRACT

The present work makes a study of the drag forces of umbilical cables of pipes inspection robots and aims to determine a valid model for their calculation. For this purpose, the physical models are developed in relation to the friction forces for the straight and curved sections in all their possible configurations, obtaining for each case a differential equation that models the friction phenomenon and that includes fluid and cable the characteristics. By solving the differential equation, an explicit expression is obtained for the value of the frictional force in each case. In the present work, the obtained model is evaluated in comparison with the traditional simplified model. It is also presented a study about the influence of the stiffness of the cable and how this characteristic generates the forces of the normal general forces at the ends of the curves that, finally, result in an additional component of the frictional forces. By comparison with actual drag force measurements, the model obtained is validated. The complexity of the calculations required for the determination of the pull forces in real pipes makes it necessary to use software tools to facilitate it. For this reason, two software applications are developed, one specific for rigid pipes and another one for flexible pipes. A series of strategies of how to keep low the maximum value of the cable tension are presented too.

Keywords: Robot pipe inspection; In pipe robot; Euler equation for pulleys; Cable tensile forces.

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	Contextualización.....	1
1.2	Motivación	5
1.3	Objetivo.....	6
1.4	Estructura de la disertación	6
2	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	8
2.1	Objetivo.....	8
2.2	Estudios de Fuerza de Fricción	8
2.2.1	Evolución Histórica del Estudio de la Fricción.....	8
2.2.2	Modelado Matemático de la Fricción.....	16
2.2.3	Estudios Previos de Fricción de Cables en Tuberías.....	27
3	ESTUDIO DE LAS FUERZAS DE FRICCIÓN	29
3.1.1	Tensiones en Tramos Rectos.....	29
3.1.2	Tramos Rectos Ascendentes.....	30
3.1.3	Tramos Rectos Descendentes.....	32
3.1.4	Tramos Rectos Horizontales	34
3.1.5	Tensiones en Tramos Curvos	34
3.1.6	Curva con Cable sin Peso.....	34
3.1.7	Curva Ascendente considerando el Peso del Cable	37
3.1.8	Curvas Descendentes considerando el Peso del Cable.....	45
3.1.9	Curvas Ascendentes Invertidas considerando el Peso del Cable	49
3.1.10	Curvas Descendentes Invertidas considerando el Peso del Cable.....	53
3.1.11	Curvas Planas considerando el Peso del Cable	56
3.1.12	Curva Ascendente Plano Inclinado considerando el Peso del Cable.....	59
3.1.13	Curva Descendente Plano Inclinado considerando el Peso del Cable.....	63
3.1.14	Curvas Asc. Invertidas Plano Inclinado considerando el Peso del Cable	63
3.1.15	Curvas Desc. Invertidas Plano Inclinado considerando el Peso del Cable.....	65
3.2	Evaluación del Modelo con Peso Versus el Modelo Tradicional	69
3.2.1	Influencia de la Tensión de Ingreso a Curva.....	69
3.2.2	Influencia del Peso Propio del Cable	70

3.2.3	Influencia del Radio de Curvatura de la Curva	72
3.2.4	Influencia del Diámetro del Cable.....	73
4	EFFECTO DE LA FLEXIÓN	75
4.1.1	Consideraciones del Modelo	76
4.1.2	Tipo de Contactos en las Curvas	77
4.1.3	Condiciones de Equilibrio en las Curvas	78
4.1.4	Modelo Simétrico de Contacto de Cable Reducido a un Punto	81
4.1.5	Modelo Simétrico de Contacto de Cable Mantenido	83
4.1.6	Validez de los Dos Modelos de Contacto	83
5	EVALUACION DEL MODELO.	87
5.1	Determinación del coeficiente de fricción	87
5.1.1	Coeficiente de fricción para Risers y tubo galvanizado	87
5.2	Sistema de Medición Experimental de Fuerzas	92
5.3	Mediciones Obtenidas	97
5.4	Análisis de Datos.....	99
6	HERRAMIENTAS DE CÁLCULO	100
6.1	Motivación de las Herramientas de Cálculo	100
6.2	Aplicación de Cálculo para Tuberías Rígidas	101
6.3	Aplicación de Cálculo para Tuberías Flexibles.....	105
7	ESTRATEGIAS PARA LA REDUCCIÓN DE FUERZAS	111
7.1	Factores de Influencia	111
7.2	Estrategias	114
8	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	117
9	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA	119

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Plataforma de exploración en Bacia De Campos.....	2
Figura 1.2 Ubicación de la Cuenca de Campos y de algunas de las plataformas petrolíferas ...	3
Figura 1.3 Arquitectura de sistemas submarinos de producción de petróleo..	3
Figura 1.4 Corte de cable umbilical..	5
Figura 2.1 Vista ampliada de una superficie de acero pulida..	10
Figura 2.2 Modelo de adhesión de Bowden y Tabor.....	12
Figura 2.3 Fricción sin desgaste producida por fonones..	15
Figura 2.4 Línea de tempo mostrando la correspondencia entre los investigadores de fricción y la tecnología del momento.....	16
Figura 2.5 Esquema de fuerzas aplicada a un bloque y su correspondiente diagrama de cuerpo libre.....	17
Figura 2.6 a) Bloque de masa m sobre un plano inclinado b) Diagrama de cuerpo libre del bloque	18
Figura 2.7 Relación lineal entre la fuerza de fricción estática y el logaritmo del tempo de permanencia en contacto.	19
Figura 2.8 Interacción entre micro-rugosidades de dos superficies..	20
Figura 2.9 a) Modelo de Coulomb b) diagrama de cuerpo libre de la masa.	20
Figura 2.10 Modelo de Prantl Tomlinson, masa puntual en un potencial periódico.....	23
Figura 2.11 Fricción entre superficies como contacto entre cerdas.	25
Figura 2.12 Solución teórica y solución numérica para fuerza de tensión en un ducto con forma de helicoide.....	28
Figura 3.1 Diagrama cuerpo libre tramo recto inclinado ascendente	30
Figura 3.2 Diagrama cuerpo libre tramo recto inclinado descendente	33
Figura 3.3 Diagrama cuerpo libre cable en curva sin peso.....	34
Figura 3.4 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical ascendente con peso propio.....	37
Figura 3.5 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical descendente con peso propio.....	45
Figura 3.6 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical invertida ascendente con peso propio	50
Figura 3.7 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical invertida descendente con peso propio.....	54

Figura 3.8 Diagrama cuerpo libre curva plana con peso propio. Vista en planta.....	56
Figura 3.9 Diagrama cuerpo libre curva plana con peso propio. Vista en corte.	57
Figura 3.10 Diagrama cuerpo libre curva vertical inclina con peso propio. Vista en corte.	60
Figura 3.11 Diagrama cuerpo libre curva vertical inclina con peso propio simplificada. Vista en corte	61
Figura 3.12 Diagrama cuerpo libre curva vertical inclina con peso propio simplificada. Vista en planta.....	62
Figura 3.13 Diagrama cuerpo libre curva vertical invertida inclina con peso propio. Vista en corte.	64
Figura 3.14 Diagrama cuerpo libre curva vertical invertida inclina con peso propio. Vista en corte.	64
Figura 3.15 Influencia de la consideración del peso vs tensión de entrada para diferentes radios de curvatura.....	69
Figura 3.16 Influencia de la consideración del peso vs peso específico del cable para distintas tensiones de entrada a curva.	71
Figura 3.17 Influencia de la consideración del peso vs radio de la curva para distintas tensiones de entrada a curva.	72
Figura 3.18 Influencia de la consideración del peso vs diámetro de cable para distintas tensiones de entrada a curva.	73
Figura 4.1 Diagrama Momento de Flexión vs curvatura.....	76
Figura 4.2 Tipos de contacto en las curvas. 3a) Contacto en un solo punto. 3b) Contacto mantenido.	78
Figura 4.3 Tipo de contacto de un solo punto, configuración simétrica..	80
Figura 4.4 Tipo de contacto mantenido, configuración simétrica..	81
Figura 4.5 Influencia de la tensión del cable y la rigidez a la flexión. a) modelo de un punto de contacto b) modelo de contacto mantenido..	85
Figura 5.1 Sistema de movimiento para determinación de coeficiente de fricción en tuberías Riser.....	89
Figura 5.2 a) Pesaje de cables. b) Obtención de valores de fuerza.....	89
Figura 5.3 Cable utilizado en las mediciones.....	90
Figura 5.4 Cable revestido con capa de aluminio.....	90
Figura 5.5 Cable con cubierta de aluminio montado carro de ruedas de acero.....	92

Figura 5.6 Instalación para la medición de fuerza de arrastre de cable, configuración en L..	93
Figura 5.7 Instalación para la medición de fuerza de arrastre de cable, configuración en U..	93
Figura 5.8 Instalación para la medición de fuerza de arrastre de cable, configuración en S....	94
Figura 5.9 Cable eléctrico utilizado para las mediciones..	94
Figura 5.10 Peso utilizado para simular la contra tensión del cable.	95
Figura 5.11 Detalle del sistema de tracción y medición de fuerza de arrastre de cable..	96
Figura 5.12 Puente de Wheatstone, la placa conversora y microcomputador utilizados para la medición de fuerzas..	96
Figura 6.1 Imagen digital de tuberías submarinas conformada por tramos rectos y curvas...	100
Figura 6.2 Tuberías flexibles en instalaciones de explotación petrolera.	101
Figura 6.3 Interfaz gráfica del programa de cálculo de fuerza de arrastre para tuberías rígidas.	102
Figura 6.4 Interfaz gráfica para el cálculo de fuerzas de arrastre. Visualización de tensión máxima y advertencia de límite alcanzado.....	103
Figura 6.5 Flujograma de aplicación para cálculos de fuerza de arrastre en tuberías rígidas.	104
Figura 6.6 Interfaz gráfica para el cálculo de fuerzas de arrastre. Visualización espacial del recorrido de la tubería.....	106
Figura 6.7 Presentación gráfica de las fuerzas de arrastre. Indicación de valor máximo de tensión y advertencia de valor límite alcanzado.....	107
Figura 6.8 Flujograma de rutina principal de aplicación para cálculos de fuerza de arrastre en tuberías flexibles.....	108
Figura 6.9 Flujograma de subrutina de cálculos de fuerza de arrastre en avance para tuberías flexibles.	109
Figura 6.10 Flujograma de subrutina de cálculos de fuerza de arrastre en avance para tuberías flexibles.	110
Figura 7.1 Influencia del término J en la tensión de salida para distintas tensiones de entrada a curva. Curva Ascendente.....	112
Figura 7.2 Influencia del término J en la tensión de salida para distintas tensiones de entrada a curva. Curva Descendente.	113
Figura 7.3 Termino exponencial de las ecuaciones de tensión de salida para curvas vs coeficiente de fricción.	114

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1 Resumen de las geometrías tratadas con sus correspondientes ecuaciones	66
Tabla 4.1 Resumen de ecuaciones de fuerzas debidas a la flexión	86
Tabla 5.1 Valores de fuerza obtenidos y coeficiente de fricción estática asociado. Cable traccionado en tubería Riser.	88
Tabla 5.2 Valores de fuerza obtenidos y coeficiente de fricción cinética asociado. Cable traccionado en tubería Riser	88
Tabla 5.3 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento estático para distintas tuberías y condiciones de lubricación. Cable eléctrico con revestimiento polimérico..	91
Tabla 5.4 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento estático para distintas tuberías y condiciones de lubricación. Cable eléctrico con revestimiento de Aluminio.....	91
Tabla 5.5 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento dinámico para distintas tuberías y condiciones de lubricación. Cable eléctrico con revestimiento de Aluminio.....	92
Tabla 5.6 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento estático y dinámico para tubería galvanizada. Cable eléctrico con revestimiento de Aluminio montado en ruedas de acero.....	92
Tabla 5.7 Valores de fuerza de arrastre obtenido para las diferentes configuraciones. Contra tensión 75N.....	97
Tabla 5.8 Valores de fuerza de arrastre obtenido para las diferentes configuraciones. Contra tensión 105N.....	97
Tabla 5.9 Tabla comparativa de valores experimentales y obtenidos mediante el modelo.....	98

LISTA DE SIGLAS Y ABREVIATURAS

PROMECA	Programa de Pos-Graduación en Ingeniería Mecánica
UFRGS	Universidad Federal de Rio Grande do Sul
UDELAR	Universidad de la República.
TS	Tensión de salida
TSP	Tensión de salida considerando peso
GUI	Interface gráfica de usuario
ASTM	Sociedad Americana para Pruebas y Materiales
m	Metros
mm	Milímetros

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área [m ²]
A_{comp}	Área de compresión [m ²]
A_{ten}	Área de tensión [m ²]
Ca	Radio de curvatura de rotura [m]
d	Diámetro de cable [m]
E	Fuerza de empuje hidrostático [N]
E	Módulo de elasticidad [N/m ²]
EI _{a, b}	Módulo de elasticidad flexional [N/m ²]
e	Diámetro interno de tubería [m]
f	Coefficiente de rozamiento
F	Fuerza en modelo de arrastre en modelo de fricción de Coulomb [N]
F_a	Fuerza de rozamiento estática para modelo de fricción Stribeck [N]
F_a	Fuerza axial en el punto de contacto A [N]
F_b	Fuerza axial en el punto de contacto B [N]
F_c	Fuerza longitudinal en el punto de contacto [N]
F_c	Fuerza de fricción de Coulomb [N]
F_i	Fuerza de fricción al ingreso de curva [N]
F_{max}	Fuerza máxima [N]
F_n	Fuerza normal [N]
F_o	Fuerza de fricción al egreso de curva [N]
F_r	Fuerza de rozamiento [N]
F_S	Fuerza de rozamiento estática [N]
F_s	Fuerza de fricción máxima en el modelo Stribeck [N]
F_v	Coefficiente de fricción viscoso
$F(v)$	Función para la fuerza de fricción en el modelo Stribeck
g	Aceleración de la gravedad [m/s ²]
I	Momento de inercia [kg.m ²]
J	Peso menos empuje por unidad de longitud del cable [N/m]
k	Número de onda para el modelo de fricción Prandtl Tomlinson
L	Longitud [m]

l	Longitud [m]
L_i	Longitud entre contactos en la entrada [m]
L_o	Longitud entre contactos en la salida [m]
m	Masa [kg]
M	Momento flector [Nm]
M_2	Momento flector aplicado al cable [N.m]
n	Cantidad de vueltas de contacto
N	Fuerza normal a la superficie [N]
N	Amplitud de la fuerza periódica en modelo de fricción Prandtl Tomlinson [N]
N_i	Fuerza axial en el cable al ingreso de curva [N]
N_{ic}	Tensión en cable en punto posterior al contacto en la entrada [N]
N_{oc}	Tensión en cable en punto anterior al contacto en la salida [N]
N_o	Fuerza axial en el cable al egreso de curva [N]
p	Presión radial [N/m ²]
P	Peso menos Empuje [N]
P_a	Fuerza de reacción radial de contacto en el punto A [N]
P_b	Fuerza de reacción radial de contacto en el punto B [N]
P_c	Fuerza de reacción radial de contacto [N]
q	Fuerza de fricción distribuida [N/m]
\dot{q}	Velocidades relativas de superficie del modelo de fricción de Lu-Gre [m/s]
r	Radio de curvatura [m]
R	Radio de curvatura [m]
\mathbf{R}	Fuerza normal en modelo de fricción de Colulomb [N]
T	Fuerza de tensión [N]
T_1	Tensión de entrada a curva [N]
T_i	Reacción normal de contacto a la entrada de curva para fricción por rigidez [N]
T_o	Reacción normal de contacto a la salida de curva para fricción por rigidez [N]
T_{in}	Tensión de entrada a curva [N]
T_o	Tensión de salida a curva [N]
TS	Tensión de salida de curva considerando modelo tradicional [N]
TSP	Tensión de salida de curva considerando peso propio [N]

v	Velocidad [m/s]
v_s	Velocidad de Stribeck [m/s]
x	Coordenada de posición para el modelo de fricción Prandtl Tomlinson [m]
z	Promedio de desviación de la cerda para el modelo de fricción de Lu-Gre [m]
α	Ángulo de contacto en curva
α	Ángulo del plano de la curva respecto del plano horizontal
β	Ángulo del cable respecto del plano de la curva
δ	Peso por unidad de longitud [N/m]
ζ	Relación entre la dureza de tracción y la dureza de compresión (σ_0/σ_c)
η	Coefficiente de amortiguamiento dinámico
θ	Ángulo de contacto en curva
θ_{max}	Ángulo máximo respecto de la horizontal
μ	Coefficiente de fricción
μ_k	Coefficiente de fricción cinético
μ_s	Coefficiente de fricción estático
ρ	Densidad del fluido [kg/m ³]
σ_c	Tensión de compresión [N/m ²]
σ_0	Dureza de penetración [N/m ²]
σ_0	Rigidez de cuerda del modelo de fricción de Lu-Gre [N/m]
σ_1	Coefficiente de amortiguamiento del modelo de fricción de Lu-Gre [Ns/m]
τ_c	Tensión de corte [N/m ²]
\emptyset	Ángulo respecto de la horizontal

1 INTRODUCCIÓN

La robótica, como conjunto de diversas ramas de la ingeniería, ha tenido objetivos varios, desde la imitación de los seres vivos y sus movimientos, el aumento de la productividad y calidad de procesos hasta la realización de tareas que, por las condiciones ambientales, (de riesgo o accesibilidad) le son nocivas o imposibles a los seres humanos. El motor principal del desarrollo de la robótica, sin embargo, parece haber sido el deseo de sintetizar algunos aspectos de la función humana mediante el uso de mecanismos, sensores, actuadores y computadoras. Con esta misma filosofía la robótica ha buscado (y encontrado) inspiración y soluciones a problemáticas específicas a través de la imitación de los animales e insectos. Unos de los tipos de robots con estas características son aquellos que se mueven dentro de tuberías. Una de las problemáticas que este tipo de robot presenta es la necesidad de contar con una conexión cableada entre el robot y sus fuentes de energía y control. Dependiendo de la distancia que el robot deba recorrer será también el largo de este cable umbilical. Como se verá más adelante, las fuerzas debidas al rozamiento cable-tubería toman gran relevancia al aumentar el largo de la tubería, siendo el factor preponderante de las componentes de las fuerzas que el robot debe desarrollar para desplazarse.

El estudio de las fuerzas de rozamiento de cables está desarrollado escasamente, limitándose a tramos rectos y curvas planas llegando, en el mejor de los casos, a contemplar el peso propio del cable en curvas planas. Las ecuaciones correspondientes a curvas desprecian la configuración geométrica de la curva en relación a la componente del peso propio del cable. Esta simplificación que presupone que la fuerza del peso es poco significativa frente a las que resultan del rozamiento deja de ser aceptable cuando, por ejemplo, los radios de curvatura son grandes y el peso del cable que recorre la curva en cuestión toma valores relevantes.

1.1 Contextualización

Este estudio se da en el marco de un proyecto el cual consiste en el desarrollo de un robot de inspección y desobstrucción de tuberías que está siendo realizado por el Laboratorio de Mecatrónica de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Instituto de informática de la misma Universidad, el instituto Senai de innovación en ingeniería de polímeros, el instituto

Senai de innovación en sistemas embarcados y el Laboratorio de Robótica de la petrolera estatal Petrobras. El proyecto plantea la creación de un robot de inspección y desobstrucción de una línea de crudo de una plataforma de extracción de petróleo situada en la plataforma continental de Brasil, más precisamente en la región denominada Bacia de Campos. En la Figura 1.1 se muestra una plataforma de exploración ubicada precisamente en Bacia De Campos.



Figura 1.1 Plataforma de exploración en Bacia De Campos [Fuente: www.petrobras.com.br]

La cuenca de Campos es considerada la mayor reserva petrolífera de la plataforma continental brasilera, tiene aproximadamente 100 mil km². Está situada en la costa norte del estado de do Rio de Janeiro extendiéndose hasta el sur del estado de Espírito Santo, entre los paralelos 21 y 23 sur. Al sur su límite es el alto del Cabo Frío y al norte con la cuenca de Espiritu Santo en el alto de Vitória [<http://offshorebrasil.blogspot.com.uy>].

En la cuenca de Campos Petrobras cuenta actualmente con 53 plataformas. En 2015, la producción mensual media de esta zona fue de 1.4 millones de barriles de petróleo y cerca de 25 millones de metros cúbicos de gas por día, representando el 70% de la producción nacional [Petrobras - Viviane Siqueira da Silva para www.clickmacae.com.br]. En la Figura 1.2 es presentada la ubicación de la cuenca de campos y algunas de las plataformas petrolíferas allí ubicadas.

De estas 53 plataformas, el 65% están en profundidades de más de 400 metros. La marca de mayor profundidad en este campo es de 1886 metros.



Figura 1.2 Ubicación de la Cuenca de Campos y de algunas de las plataformas petrolíferas [Fuente: www.cprm.gov.br]

La arquitectura de los sistemas submarinos de producción de petróleo y gas dependen de la configuración particular del sistema. Como era de esperarse y puede confirmarse con lo mostrado en la Figura 1.3, parte sustancial de la arquitectura la componen tuberías (ductos, jumpers y Risers) de ahí la necesidad de contar con dispositivos que puedan realizar tareas de inspección, desobstrucción y reparación de las mismas. En la Figura 1.3 se muestra una arquitectura típica de un campo de producción de petróleo.

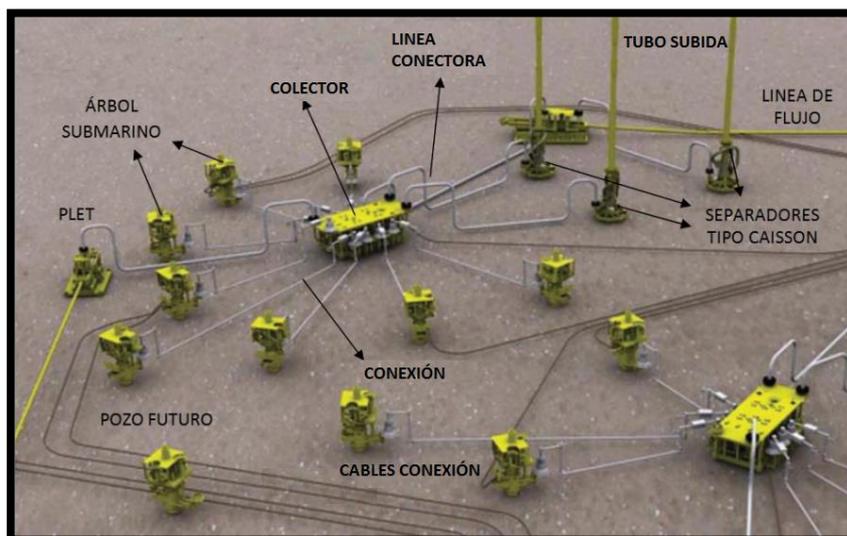


Figura 1.3 Arquitectura de sistemas submarinos de producción de petróleo. [Fuente: Adaptado de Landon y Rodríguez, 2010].

Además de las tuberías diversos equipos y dispositivos son comunes a todas las instalaciones. A saber:

Árbol submarino: el árbol submarino es un equipo instalado en la cabeza del pozo compuesto por un conjunto de válvulas tuberías conexiones y componentes de seguridad que tienen por finalidad el control y vigilancia de la producción de un pozo submarino [Tree systems Pemex Subsea Training Module, 2006].

Colector: el colector o manifold submarino es el conjunto de tuberías, válvulas e instrumentos ensamblados conjuntamente con el fin de interconectar el flujo de varios pozos y así reducir el número de líneas de producción necesarias (risers) [Landon y Rodríguez, 2010].

Plet: el plet es un equipo submarino con una entrada de flujo, una salida y una válvula. Su objetivo es servir como punto de conexión entre jumpers, líneas de flujo y líneas principales de producción [Landon y Rodríguez, 2010].

Línea conectora: la línea conectora o Jumper es una cañería rígida o flexible que se encarga de conectar el flujo de producción o inyección de diferentes equipos submarinos tales como árboles, plet, manifolds, etcétera. [Landon y Rodríguez, 2010].

Ductos: los ductos son tuberías especiales que van desde los equipamientos submarinos hasta los Risers. Los ductos se instalan sobre el lecho marino [Tree Systems Pemex Subsea Training Module, 2006].

Tubos de Subida: los tubos de subida, también conocidos como Riser, son el segmento de tubería que se encarga de transportar los hidrocarburos desde el lecho marino hasta las embarcaciones o plataformas de almacenamiento. Los Risers son las tuberías que conectan las instalaciones de superficie con las submarinas [Tree Systems Pemex Subsea Training Module, 2006].

Umbilicales: el control de todas las operaciones y monitoreo de parámetros de los equipos submarinos es de gran importancia. La interconexión entre los equipos de control de superficie y los submarinos se da mediante un cable llamado umbilical. El umbilical es el ensamble de líneas hidráulicas, líneas de inyección de químicos, cables eléctricos y de fibra óptica [Umbilical and subsea control equipment, PEMEX Subsea System Training Module,

2008]. En la Figura 1.4 se muestra en corte, un cable umbilical típico, con sus diversos componentes.

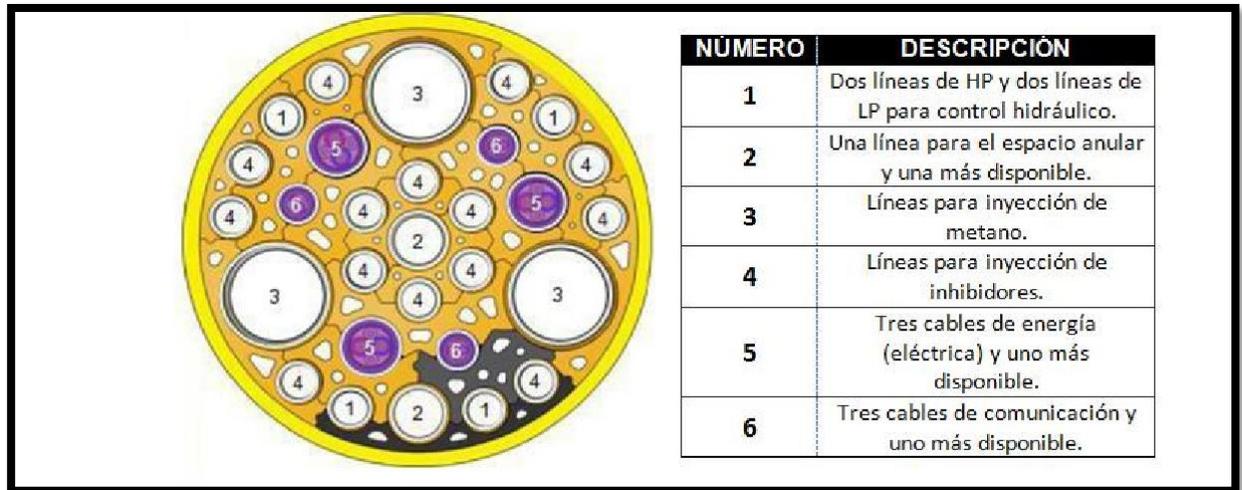


Figura 1.4 Corte de cable umbilical. [Fuente: Landon y Rodríguez, 2010].

El robot de inspección o desobstrucción de tuberías utiliza uno de estos cables como elemento de transmisión de potencia y comunicación entre la superficie y el robot.

1.2 Motivación

Los robots de inspección o desobstrucción de tuberías suelen estar resueltos mediante un módulo principal con las funciones de locomoción y equipado con los mecanismos propios del movimiento, más lo necesario para poder efectuar las tareas deseadas. La provisión de energía, tanto para el movimiento, como para el instrumental, así como la transmisión de datos desde y hacia el exterior, suele hacerse efectivo mediante un cable especial llamado umbilical. Este cable es, en general, un conjunto armado con distintos componentes de transmisión, algunos de potencia otros de datos e incluso algunos contienen tuberías para bombeo de fluidos. La ya nombrada diversidad de componentes más la necesidad de brindar protección mecánica a los elementos de ese cable hacen que el mismo sea de dimensiones importantes respecto de la tubería y del robot propiamente dicho. Por otro lado, las tuberías (en especial las dedicadas a la explotación petrolera) son de longitudes para nada despreciables, siendo lo normal, que las mismas sean de varios kilómetros de largo. Estas consideraciones resultan en un cable de

dimensiones y por ende también de peso muy considerable. La traslación del robot dentro de la tubería implica, al mismo tiempo, el desplazamiento de este cable. La determinación de las fuerzas requeridas y los factores de la que las mismas dependen son fundamentales, por un lado, para determinar los mecanismos de accionamiento (y su dimensionado), y, por el otro, para la búsqueda de estrategias para su reducción.

1.3 Objetivo

El objetivo del presente trabajo es el estudio de las fuerzas de rozamiento presentes al arrastrar un cable dentro de una tubería. También es objeto de este trabajo, la determinación numérica del valor de esta fuerza de arrastre para una tubería y cable en particular. Este valor será dato de requerimiento en el diseño y dimensionado del mecanismo de tracción de un robot de inspección o desobstrucción de tuberías.

1.4 Estructura de la disertación

La estructura de la disertación está dividida en 6 capítulos.

En el Capítulo 2 se realiza una revisión bibliográfica donde son presentados los principales conceptos relacionados a la fricción, un recorrido por la historia del estudio de este fenómeno y los principales modelos matemáticos desarrollados para este fenómeno. Se realiza también en este capítulo una revisión de los estudios previos referentes a las fuerzas existentes de fricción de cables en tuberías

En el Capítulo 3 se realiza el estudio de las fuerzas de fricción que se presentan en los cables al ser arrastrados por dentro de tuberías. Este estudio comprende el entendimiento físico del problema, la identificación de las distintas fuerzas involucradas, las consideraciones del modelo aplicado, el modelado matemático y a partir de este, la obtención de las ecuaciones que permiten predecir las fuerzas de fricción en los distintos escenarios geométricos posibles. El Capítulo 3 se cierra con una evaluación del modelo desarrollado en comparación con el modelo tradicional.

En el Capítulo 4 se estudian los efectos de la rigidez a la flexión del cable y como estos contribuyen al aumento de la fricción. Es también en este Capítulo que se presentan los supuestos del modelo y se desarrollan las ecuaciones matemáticas que modelan la contribución del fenómeno de la rigidez al aumento de las fuerzas de arrastre necesarias.

Ya en el Capítulo 5 se realiza la evaluación del modelo a través de las mediciones prácticas realizadas, presentándose los valores comparativos y análisis de datos correspondientes.

En el Capítulo 6 son presentadas las herramientas de software desarrolladas para el cálculo de la fuerza de arrastre. Se muestra y explican el funcionamiento del software para tuberías rígidas y para tuberías flexibles.

El Capítulo 7 está dedicado a exponer las estrategias que pueden ser adoptadas para reducir las fuerzas de arrastre. Son mostrados también los factores de influencia de las tensiones y la manera en cómo estos inciden.

Finalmente, en el Capítulo 8 son presentadas las conclusiones de la disertación y la posibilidad de desarrollo de trabajos futuros.

2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

2.1 Objetivo

El objetivo de este capítulo es presentar los principales conceptos relacionados al fenómeno de fricción y un recorrido por la historia del estudio de este fenómeno. También se realizará una introducción lo referente a los estudios existentes de fricción en cables dentro de tuberías.

2.2 Estudios de Fuerza de Fricción

2.2.1 Evolución Histórica del Estudio de la Fricción

Según Hutchings, 2013, los primeros estudios sistemáticos de fricción fueron realizados por Leonardo Da Vinci. Así lo demuestran notas y dibujos realizados por el propio Leonardo donde las principales leyes de la fricción son expuestas. Según este mismo autor, estas leyes fueron formalmente expresadas en documentos fechados en 1493 sin embargo los dibujos (Codex-Madrid I) datan de entre siete y doce años antes. Este entendimiento de las reglas que se cumplen cuando existe el fenómeno de la fricción, fue aplicado en diversos problemas mecánicos relacionados a sus inventos. Su trabajo sobre la fricción se originó en estudios de la resistencia a la rotación de los ejes sobre, bloques deslizando sobre superficies planas y la mecánica de los tornillos, pero también vio cómo la fricción estaba involucrada en muchas otras aplicaciones. Su trabajo fue indudablemente basado en experimentos, probablemente con contactos lubricados. Según Popov, 2010, Leonardo fue la primera persona que formuló las leyes de la fricción, él llegó a la conclusión que, dicho en lenguaje actual, son dos de las leyes fundamentales de la fricción:

1. La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal o carga.
2. La fuerza friccional es independiente del área de contacto de las superficies.

Según el mismo autor, de hecho, fue Leonardo Da Vinci quien introdujo el término coeficiente de fricción y determinó un valor experimental para el mismo (de 0.25).

Estos trabajos, poco difundidos y por ende olvidados no influyeron en el desarrollo del tema a lo largo de los siglos siguientes.

Según Bowden y Tabor, 1950, en 1699 Guillaume Amontons (físico e inventor francés) publicó sus redescubiertas leyes de fricción según consta en las Memorias de la Real Academia de Ciencia de Paris. Aunque en su momento estas leyes fueron recibidas con cierto escepticismo, las mismas fueron verificadas por Charles Coulomb en 1781. Amontons enunció tres leyes de fricción, la ley 1 y 2, que fueron las mismas ya dichas por Da Vinci y la tercera ley enunciada de la siguiente manera:

3. La fuerza de fricción cinética es independiente de la velocidad de deslizamiento.

Según García, 2009, Amontons determinó también un valor (de 0.3) para el coeficiente de fricción. También dio las primeras teorías acerca de las causas de la fricción, atribuyendo este efecto a la presencia de asperezas en la superficie de contacto y que las mismas, al encajarse unas con otras, requieren luego de cierta fuerza para, elevándose, superar el obstáculo.

Los siguientes pasos en las investigaciones de la fricción (previo a Coulomb) son atribuidos a J.T. Desaguliers (1734), quien, además de la presencia de asperezas, atribuye el fenómeno de rozamiento a las fuerzas de cohesión. Desaguliers llevó adelante experimentos sobre fricción cuyos resultados no se apartaron de los obtenidos por Amontons [Santacilia, 2015].

Conforme a lo dicho por Popov, 2010, Leonard Euler se ocupó del punto de vista matemático de la fricción, así como también del experimental. Introdujo la diferenciación entre las fuerzas de fricción estática y las fuerzas de fricción cinética, así como estableció (mediante el extendido experimento de bloque en el plano inclinado) que el coeficiente de fricción estático es mayor que el cinético [Blau, 2013] y resolvió el problema de la fricción del cable. Probablemente este fuera el primer problema de contacto que se resuelva analíticamente en la historia (1750). Él fue el primero en sentar las bases de la manera matemática de tratar con la ley de la fricción seca y de esta manera promovió el desarrollo posterior. El símbolo μ , que utilizamos en la actualidad como el coeficiente de fricción, fue introducido por él. Euler trabajó también con la idea de que la fricción se origina del entrelazamiento entre pequeñas irregularidades triangulares y que el coeficiente de fricción es igual al gradiente de estas irregularidades. Esta comprensión sobrevivió, en diferentes variaciones, durante cien años y

también se utiliza hoy en día como el "Modelo Tomlinson" en relación con la fricción a escala atómica. En la Figura 2.1 se muestra una vista ampliada de una superficie metálica pulida donde se aprecian las irregularidades previstas por Euler 200 años antes.

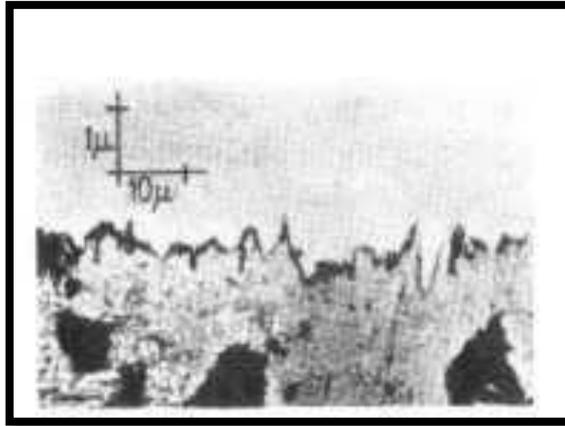


Figura 2.1 Vista ampliada de una superficie de acero pulida. [Fuente: Bowden y Tabor, 1950].

El ingeniero francés Charles Agustín Coulomb logró una contribución destacada y todavía relevante para el estudio de la fricción en seco estableciendo las leyes de fricción que llevan su nombre. Coulomb confirmó los resultados de Amontons [Popov, 2010] y estableció que la fricción de deslizamiento es independiente de la velocidad de deslizamiento. Realizó un examen cuantitativo muy exacto de la fricción en seco. Los trabajos fueron experimentales y son recopilados en 1781 en el libro *Théorie des machines simples*, con el cual Coulomb gana el gran premio de la academia de ciencias en el mismo año. Las investigaciones se desarrollaron tanto para la fricción estática como dinámica de las superficies de deslizamiento y la fricción en la flexión de los cables y en la laminación. Coulomb utilizó la misma idea del origen de la fricción como Euler, pero añadió otra contribución a la fricción que ahora llamaríamos contribución de adhesión. Fue también Coulomb quien estableció desviaciones de la conocida ley simple de fricción. Él descubrió, por ejemplo, que la fuerza estática crece con la cantidad de tiempo que el objeto ha permanecido inmóvil. Su libro contenía prácticamente todo lo que eventualmente se convirtió en las ramas originales de la tribología.

El Rev. Samuel Vince desarrolló una visión de la naturaleza de la fricción independientemente de Coulomb, y en 1784 presentó un trabajo donde atribuyó el fenómeno de la fricción estática a la cohesión y adhesión. Más tarde, John Leslie, profesor de física en la Universidad de Edimburgo, escribió ampliamente sobre la fricción de los sólidos, cuestionando

conceptos anteriores basados en la relación de la fricción con la energía. Leslie entendió que la energía de fricción no podría explicarse adecuadamente mediante el modelo de asperezas triangulares entrelazadas debido a que la energía potencial de este tipo de sistema se recuperaría cuando las asperezas se deslizaran por el lado descendente [Blau, 2013].

Según Haug y Rebstock, 2003, por los mismo años que Vince trabajaba en la cohesión y la adhesión, Sir Benjamin Thompson estudió la naturaleza del calor generado en la fricción, sentando las primeras bases de la disipación de energía en la fricción, hecho que sigue siendo muy importante para entender como el calentamiento afecta los materiales en la interfase de contacto y al hacerlo no solo afecta el desgaste que se produce sino también las variaciones posteriores en la fricción que la temperatura provoca.

Según lo expresado por Blau, 2013, durante la revolución industrial muchos problemas prácticos de fricción emergieron. Problemas vinculados a cojinetes de molinos de cereales, fricción en frenos, en molinos de agua, etcétera., fueron el motor de los estudios de rodadura iniciados en esa época. Con seguridad debido a que la fricción de rodadura es de mucha menor magnitud que la fricción de deslizamiento, los estudios de este tipo de fricción han pasado más desapercibidos. Los estudios más destacados de fricción en esta época fueron realizados por Morin y Dupuit entre los años 1841-42 mostrando que la naturaleza de la fricción era muy dependiente del material y los parámetros de carga. Sin embargo, las primeras ideas de la naturaleza de la fricción de rodadura para cuerpos plásticamente deformables fueron expuestas por el físico Robert Hook mucho antes (1685) que los trabajos de Morin y Dupuit. Los elementos más importantes de las ideas expuestas por Hook todavía se consideran correctos.

Según Popov, 2010, fue el científico Osborne Reynolds, reconocido fundamentalmente por sus trabajos en el área de fluidos y transferencia térmica, el primero en examinar experimentalmente los fenómenos que tienen lugar en el área de contacto durante la fricción de rodadura, determinando que, en una rueda motriz siempre hay áreas en las que los dos cuerpos están en contacto sin deslizamiento y áreas donde se produce el deslizamiento. Debido a esto determinó el final de la estricta diferenciación entre fricción estática y fricción cinética.

Otro de los científicos de destacado aporte en esta área fue Heinrich Hertz que estableció los fundamentos de la mecánica de contacto sobre finales del 1800. También sobre finales de 1800 Richard Stribeck publicó importantes trabajos relacionados a la fricción,

principalmente la vinculada a la fricción en presencia de lubricantes líquidos, La curva de Stribeck es un concepto básico de lubricación que sigue siendo muy utilizado hasta la actualidad.

Según Popov, 2010, un salto en los avances dentro de la comprensión de mecánica de contacto entre cuerpos y la fricción en seco fue dado por Bowden y Tabor a mediados del siglo XX. Estos científicos fueron los primeros en observar la importancia de la rugosidad de las superficies de los cuerpos en contacto y notar que, debida a esta rugosidad, el área de contacto real entre los dos cuerpos es normalmente de órdenes de magnitud menor que el área de contacto aparente. Estos estudios, por un lado, descartan la rugosidad superficial (en el sentido que le dio Coulomb) como el mecanismo que explica la fricción, pero por otro, hacen que, la vieja idea de la adhesión de Coulomb, fuera un posible mecanismo de fricción. En 1949, Bowden y Tabor propusieron un concepto que sugería que el origen de la fricción deslizante entre las superficies limpias y metálicas se explica a través de la formación y el corte de las uniones de soldadura en frío. Según este entendimiento, el coeficiente de fricción es aproximadamente igual a la relación entre la tensión de cizallamiento crítica y la dureza y debe ser de $1/6$ aproximadamente en materiales plásticos isotrópicos. Para muchos pares metálicos no lubricados (por ejemplo, acero con acero, acero con bronce, acero con hierro, etc.), el coeficiente de fricción realmente tiene un valor del orden de 0,16. En la Figura 2.2 se muestra una visión ampliada de 2 superficies en contacto donde se observa el área real de contacto y las formaciones de micro soldaduras frías.

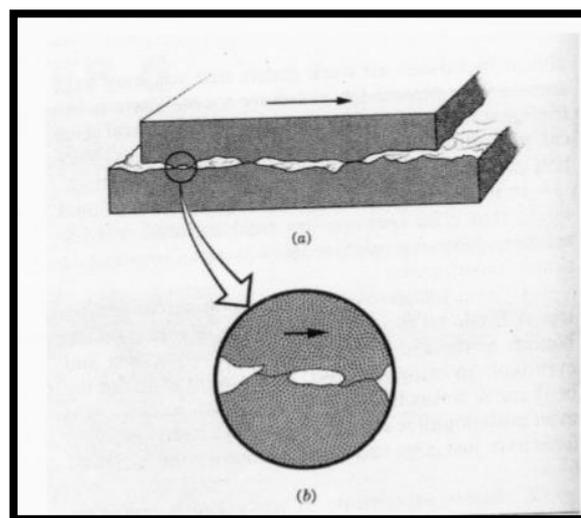


Figura 2.2 Modelo de adhesión de Bowden y Tabor. [Fuente: Bowden y Tabor, 1950].

Los trabajos de Bowden y Tabor iniciaron una línea nueva de la teoría de la mecánica de contacto con respecto a las superficies rugosas. Otros de los trabajos destacables en esta área es el realizado por Archard en 1957 que concluyó que el área de contacto entre las superficies elásticas rugosas es aproximadamente proporcional a la fuerza normal. Otras contribuciones importantes fueron hechas por Igor Viktorovich en Rusia (prácticamente en paralelo a los trabajos de Tabor y Bowden en Inglaterra), Greenwood y Williamson en 1966, Bush en 1975 y más recientemente Persson en 2002. El resultado principal de estos exámenes es que las áreas de contacto reales de las superficies rugosas son aproximadamente proporcionales a la fuerza normal, mientras que las condiciones en los micro-contactos individuales (presión, tamaño del micro contacto) dependen sólo débilmente de la fuerza normal. Estos resultados dan una explicación satisfactoria a la primera ley de fricción.

Debido a el desarrollo de la industria del automóvil, la fricción de los materiales involucrados en los neumáticos adquirió una importancia técnica relevante. Nuevamente se encuentran trabajos realizados por Tabor en este sentido donde es estudiada la fricción en polímeros. Según Tabor, 1953, la fricción de los polímeros se explica bastante adecuadamente en términos de la teoría de adhesión. Sin embargo, hay tres diferencias importantes respecto al comportamiento de los metales. En primer lugar, las leyes de Amontons no se obedecen con exactitud; El coeficiente de fricción tiende a disminuir con el aumento de la carga, también tiende a disminuir si se reduce el área geométrica de contacto. En segundo lugar, si las superficies se dejan en contacto bajo carga, el área de contacto verdadero puede aumentar con el tiempo debido a la fluencia y la fricción inicial puede ser correspondientemente mayor. En tercer lugar, la fricción puede mostrar cambios con la velocidad que reflejan las propiedades visco elásticas del polímero, pero los cambios más marcados ocurren como resultado del calentamiento por fricción. Incluso a velocidades de sólo unos pocos metros por segundo, la fricción de los polímeros no lubricados puede, como resultado del ablandamiento térmico, llegar a valores muy elevados. Por otra parte, a velocidades extremadamente altas, la fricción puede caer de nuevo debido a la formación de una película lubricante fundida.

En los años 60 los trabajos sobre fricción se centraron en el entendimiento de los mecanismos de contacto, en este sentido los científicos Greenwood y Williamson, 1966, proponen una alternativa a la teoría existente y asumida de que el área real de contacto era determinada por la deformación plástica de las asperezas más altas, dando paso a una teoría del

contacto elástico, más aproximada a lo que sucede en superficies reales, según las propias palabras de los autores. Esta teoría, muestra como la deformación por contacto depende de la topografía de la superficie y establece el criterio para distinguir entre superficies que se tocan elásticamente de aquellas que lo hacen plásticamente. Según J Krim, 2002, Greenwood y Williamson estudiaron el comportamiento de dos diferentes distribuciones de alturas de asperezas, distribución gaussiana y exponencial. El estudio ha sido extendido para otros tipos de distribuciones (aquellas llamadas superficies fractales, otra distribución Gaussiana que describe muchas superficies físicas) obteniéndose relaciones lineales entre el área efectiva de contacto entre superficies y la fuerza normal aplicada en la misma. Esta relación lineal explica, debido a que la fuerza de fricción es modelada como proporcional al área de contacto, la proporcionalidad de la fuerza de fricción respecto de la fuerza normal. Es preciso notar que las fuerzas de fricción permanecen presentes aún bajo cargas normales nulas, fenómeno no contemplado bajo este modelo, estas fuerzas son explicadas por las adhesiones moleculares que sufren los materiales en contacto.

Por estos años el grupo de investigación encabezado por Tabor y Bowden exploró la posibilidad de que la fricción surgiera de una unión suficientemente fuerte en los verdaderos puntos de contacto para producir el desgarramiento continuo de pequeños fragmentos de material. A través de instrumental desarrollado por sus propios colaboradores en la década de los setenta, se descubrieron superficies las cuales presentaban fricción de forma definitiva en ausencia total de desgaste, con lo cual, la teoría de desgarramiento quedaba descartada.

Según Singer y Pollock, 1992, Tabor en una conferencia plenaria, concluiría que la fricción en ausencia de desgaste debe ser debida a tensiones que se acumulan en el contacto deslizante que se estaban liberando en forma de vibraciones atómicas. Según J Krim, 2002, tales vibraciones, llamadas fonones, fueron sugeridos por primera vez por Tomlinson en 1929 e independiente y subsecuentemente por otros investigadores luego. La fricción que surge de los fonones se produce cuando los átomos cercanos a una superficie son puestos en movimiento por la acción deslizante de los átomos en la superficie opuesta. La Figura 2.3 muestra un esquema de la fricción sin desgaste. Una capa sólida (a) se desliza más fácilmente sobre una superficie sólida que una capa líquida equivalente. Esto se debe a que los átomos de los sólidos están más estrechamente unidos que los átomos de los líquidos. Los átomos líquidos tienden a caer entre los átomos de la superficie debajo de ellos, obstaculizando su movimiento lateral.

Los átomos sólidos se deslizan a través de la superficie como una lámina cohesiva. A nivel atómico (b), una capa doble de átomos es más difícil de deslizar sobre una superficie sólida que una sola capa porque las dos capas de átomos se empujan mutuamente, produciendo calor extra. El calor extra crea más fricción, y eso significa que se necesita más esfuerzo para deslizar la doble capa de átomos. Bajo este modelo de la fricción fonónica, la fricción estática debe desaparecer para casi cada par de superficies limpias que se deforman elásticamente hecho que a nivel macroscópico no se presenta. La respuesta a esto viene dada por el llamado efecto de tercer cuerpo en donde moléculas absorbidas entre las dos superficies actúan como pernos de fijación entre ambas.

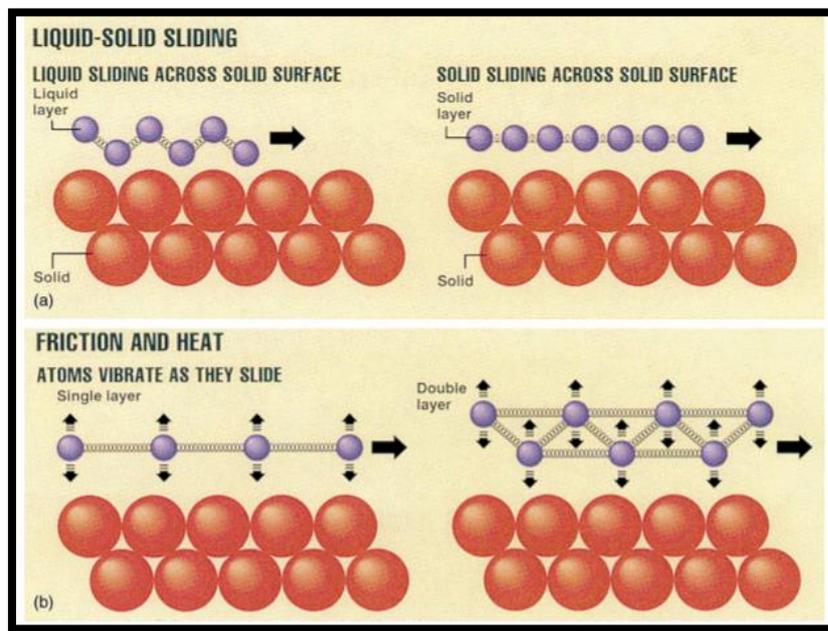


Figura 2.3 Fricción sin desgaste producida por fonones. [Fuente: Daly y Krim, 1995].

La Figura 2.4 resume la historia de la investigación de fricción asociándola al desarrollo de la tecnología. El desarrollo de nuevas técnicas experimentales como la microscopía de fuerza atómica y la microscopía de fuerza superficial cambian la percepción de las estructuras de las superficies sólidas y de las interfaces entre ellas, haciendo repensar los conceptos de fricción [Blau, 2013].

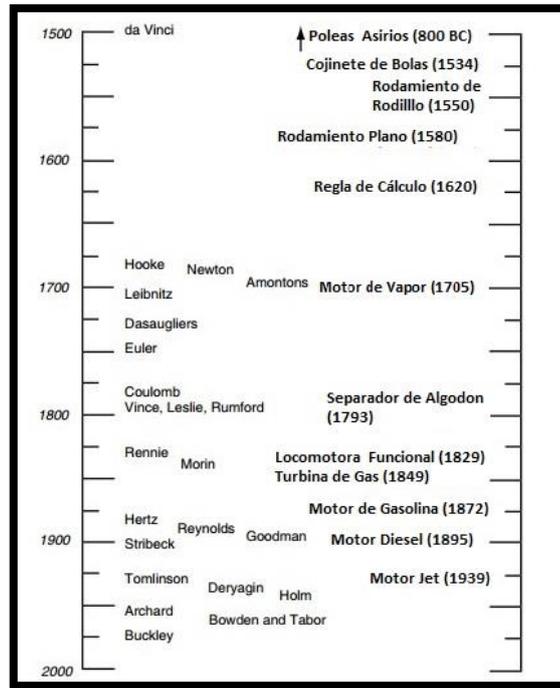


Figura 2.4 Línea de tiempo mostrando la correspondencia entre los investigadores de fricción y la tecnología del momento. [Fuente: Adaptado de Blau, 2013]

2.2.2 Modelado Matemático de la Fricción

Es claro que la fricción es un fenómeno complejo que surge en el contacto entre superficies y varía dependiendo de muchos y diversos parámetros como ser la carga, la preparación superficial, la velocidad relativa de deslizamiento, etcétera. El grado de acercamiento que se pueda tener en la predicción de resultados experimentales, es fundamentalmente debido al modelo utilizado para caracterizar la fricción.

2.2.2.1 Fricción seca o de Coulomb

La fricción entre cuerpos sólidos es un fenómeno físico complejo. Este fenómeno, a su vez, comprende un conjunto de otros hechos asociados como ser la deformación elástica y plástica de las capas superficiales de los cuerpos en contacto, las interacciones con las partículas de desgaste, las micro fracturas y la restauración de la continuidad de los materiales, la excitación de electrones y fonones, las reacciones químicas y la transferencia de partículas de un cuerpo a otro [Popov, 2010]. A pesar de esta complejidad es posible formular una ley muy simple para la fricción en seco. Esta aproximación, de primer orden, modela el comportamiento

con suficiente precisión para muchas aplicaciones de ingeniería. La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal e independiente de la velocidad. Otra propiedad de la fricción seca reside en el hecho de que, en una aproximación de primer orden, no depende del área de contacto. Esta propiedad permite utilizar el concepto de coeficiente de fricción.

Coulomb determinó que la fuerza de fricción F_r entre dos cuerpos que se presionan con una fuerza normal F_n presenta las siguientes propiedades simples:

- 1) Fricción Estática: Para poner en movimiento un cuerpo situado sobre una superficie plana en un estado de reposo, se debe superar una fuerza crítica, la fuerza de fricción estática F_s . Esta fuerza es aproximadamente proporcional a la fuerza normal F_n . El coeficiente de proporcionalidad es el llamado coeficiente de fricción estática μ_s .

$$F_s = \mu_s F_n \quad . \quad (2.1)$$

En la Figura 2.5 se muestra un bloque donde se le ejerce una fuerza normal y una fuerza tangencial, el diagrama de cuerpo libre de este bloque muestra las reacciones generadas para mantener el bloque en reposo

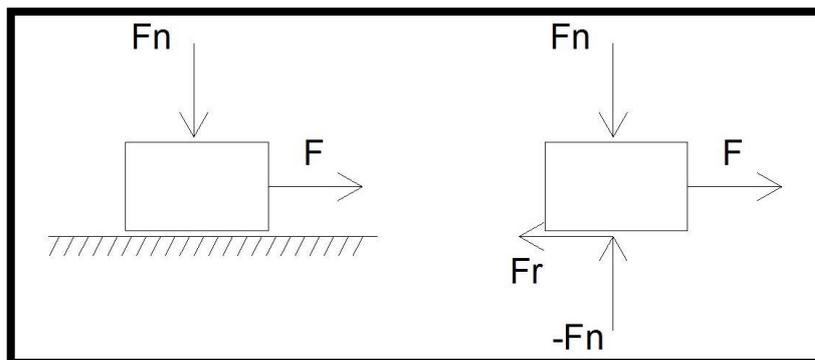


Figura 2.5 Esquema de fuerzas aplicada a un bloque y su correspondiente diagrama de cuerpo libre.

- 2) Fricción Cinética: La fuerza de resistencia que actúa sobre un cuerpo después de superar la fuerza de fricción estática es la fuerza de fricción cinética F_s . La fricción

cinética es proporcional a la fuerza normal F_n . El coeficiente de proporcionalidad es el llamado coeficiente de fricción dinámica μ_k .

$$F_r = \mu_k F_n . \quad (2.2)$$

El método experimental más sencillo para determinar el coeficiente de fricción, prácticamente siempre factible, es la medida del ángulo de inclinación en el que un cuerpo situado sobre un plano inclinado empieza a deslizarse. Este ángulo es llamado ángulo de fricción. Considerando un cuerpo de masa m apoyado en un plano con inclinación φ respecto del plano horizontal las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo se muestran en la Figura 2.6 y son el peso del cuerpo (mg), la fuerza normal que ejerce el plano inclinado sobre el cuerpo (F_n) y la fuerza de rozamiento (F_r)

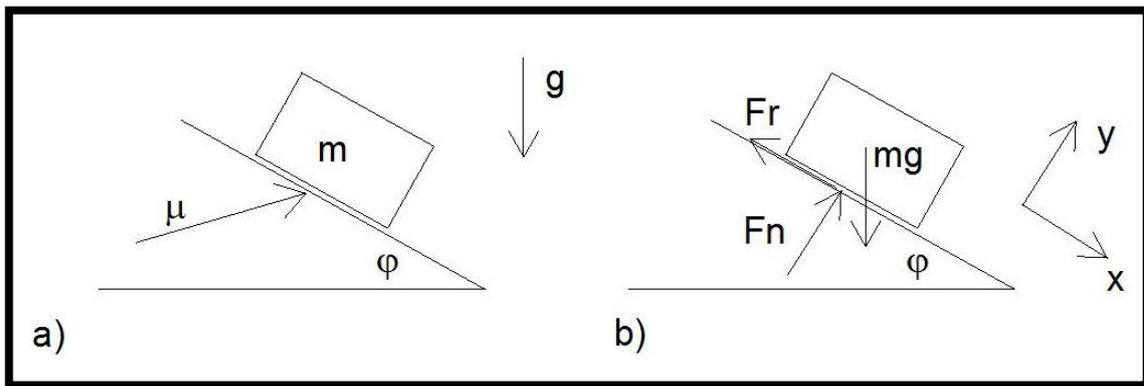


Figura 2.6 a) Bloque de masa m sobre un plano inclinado b) Diagrama de cuerpo libre del bloque

Una vez alcanzado el ángulo de fricción, la fuerza estática alcanza su máximo valor $F_s = \mu_s F_n$. El equilibrio de fuerzas en este estado límite implica equilibrio en ambos ejes coordenados (según Figura 2.6 b).

$$mg \sin \varphi = F_r = \mu_s F_n , \quad (2.3)$$

$$mg \cos \varphi = F_n , \quad (2.4)$$

$$\text{Por tanto} \quad \mu_s = \tan \varphi . \quad (2.5)$$

De acuerdo a la ecuación (2.5) el coeficiente estático (μ_s) es igual a la tangente del ángulo límite de equilibrio (φ).

El comportamiento real tiene algunas desviaciones respecto de la ley de la fricción. La fuerza de fricción estática aumenta con la cantidad de tiempo que un objeto está en reposo. De hecho, existe una correlación logarítmica de la fuerza de fricción estática con el tiempo. En la Figura 2.7 se representa esta correlación logarítmica de la fuerza de fricción con el tiempo.

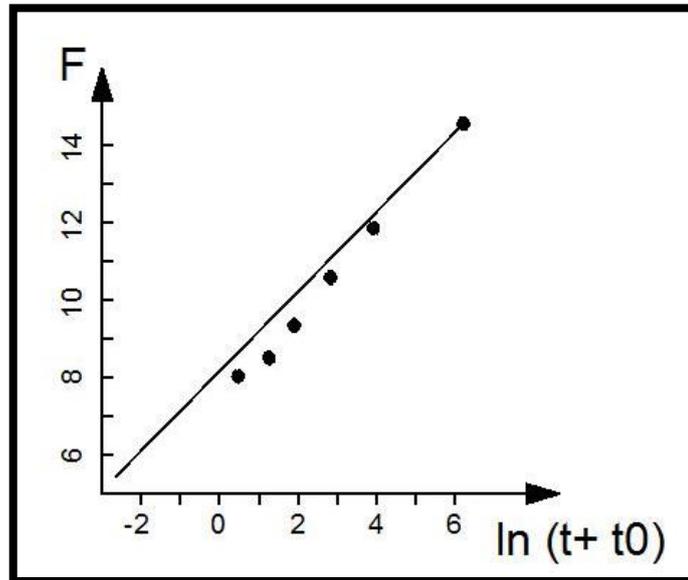


Figura 2.7 Relación lineal entre la fuerza de fricción estática y el logaritmo del tiempo de permanencia en contacto. [Fuente: Popov, 2010]

Según Popov, 2010, las razones de esta dependencia con el tiempo son diversas, para los metales el área de contacto real en los micro-contactos aumenta con el tiempo debido a los procesos de fluencia a la vez que cuando el área de contacto aumenta, este proceso se ralentiza, dando lugar a una dependencia logarítmica del área de contacto y, por lo tanto, una dependencia logarítmica de la fuerza de fricción estática.

Otro de las desviaciones respecto de la ley es la independencia del coeficiente de fricción respecto de la velocidad que, solo es válida, para velocidades no muy altas ni muy bajas.

La tercera desviación viene del hecho que, si bien, la fuerza de rozamiento es independiente de la rugosidad de la superficie, nuevamente esto es válido para cierto rango, de hecho, para superficies metálicas lisas la fuerza de fricción puede llegar a ser mucho más grande que para superficies con cierta rugosidad.

2.2.2.1.1 Teoría de Coulomb para la fricción seca

Coulomb propuso el primer modelo para el origen físico de la fricción, que explicó algunas de las propiedades importantes de la fricción seca de una manera simple. Según su punto de vista, la interacción entre las micro rugosidades de ambas superficies en contacto es responsable de la fuerza de fricción. La Figura 2.8 muestra la interacción de las micro rugosidades propuesta por Coulomb.

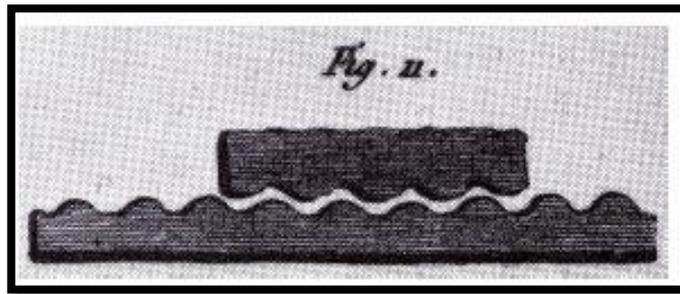


Figura 2.8 Interacción entre micro-rugosidades de dos superficies. [Fuente: J Krim, 2002].

El fenómeno de la fricción a nivel microscópico no obedece este concepto, sino que, en realidad, es mucho más complicado. Sin embargo, un análisis moderno más detallado continúa conduciendo a esta visión más simple ya sugerida por Coulomb.

De acuerdo al modelo de Coulomb, consideramos un cuerpo que se presiona sobre una superficie corrugada como un modelo para la fricción seca. Se supone el cuerpo como una sola masa puntual. La Figura 2.9 muestra el modelo así simplificado.

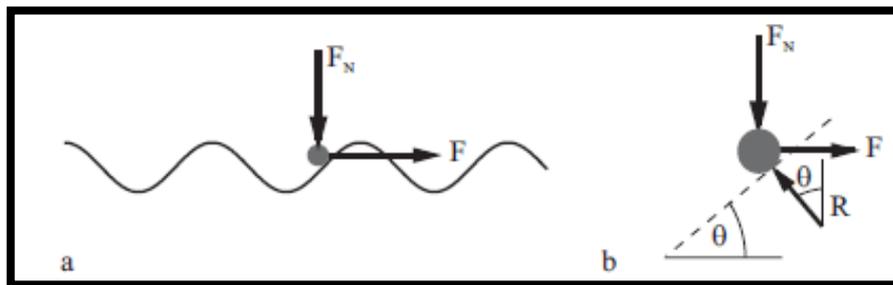


Figura 2.9 a) Modelo de Coulomb b) diagrama de cuerpo libre de la masa. [Fuente: Popov, 2010]

Planteando condiciones de equilibrio:

$$Fn = R \cos \theta, \quad (2.6)$$

$$F = R \sin \theta, \quad (2.7)$$

con lo cual,
$$F = Fn \tan \theta . \quad (2.8)$$

Como la fuerza de fricción estática es la máxima fuerza que permite que permanezca el equilibrio entonces:

$$Fs = F_{max} = Fn \tan \theta_{max}. \quad (2.9)$$

El coeficiente de fricción estático como cociente de la fuerza máxima y la fuerza normal resulta:

$$\mu = \tan \theta_{max} . \quad (2.10)$$

Este modelo explica, de manera simple, una de las propiedades más importantes de la fricción en seco (proporcionalidad a la fuerza normal) y da una explicación geométrica sencilla para el coeficiente de fricción.

2.2.2.1.2 Teoría de Bowden y Tabor para la fricción seca

Según Bowden y Tabor, 1950, una teoría simple, que explica el origen de la fricción entre superficies metálicas puras, es la formación entre las superficies de contacto de soldaduras en frío. Bajo esta teoría, si dos cuerpos se presionan juntos, entonces en algunos lugares las superficies estarán tan cerca unos de otros que los átomos de uno de los cuerpos entran en contacto con los átomos del otro cuerpo, mientras que existen extensas regiones en las que la distancia entre los cuerpos es tan grande que cualquier interacción atómica puede ser despreciada. El nombre dado por los autores para estas áreas de contacto fue puentes. El área total de todos los puentes es el área de contacto real A . El área restante es generalmente mucho más grande que el área de contacto real, pero casi no tiene ninguna contribución a la fuerza de fricción. Según Popov, 2010, para los metales, el área de contacto real se puede aproximar bastante en la mayoría de los casos. Suponiendo que todos los micro contactos están deformados plásticamente y la tensión es igual a la dureza de penetración σ_0 del material, esta asunción determina entonces un área real de contacto A ,

$$A \approx \frac{Fn}{\sigma_0}, \quad (2.11)$$

donde Fn es la fuerza normal y σ_0 es igual a la dureza de penetración del material.

Si la tensión tangencial necesaria para cortar una unión de soldadura fría es τ_c , entonces la máxima fuerza de fricción estática FS es igual a

$$FS = Fn \frac{\tau_c}{\sigma_0}. \quad (2.12)$$

Debido a que la resistencia al corte de un cuerpo de plástico isotrópico es alrededor de $1/\sqrt{3}$ de la resistencia a la tracción y ésta, a su vez, es alrededor de $1/3$ de la dureza de penetración [Popov, 2010], entonces utilizando la ecuación 2.12, resulta $FS \approx \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right] Fn$, con lo cual, $\mu = [0,16 - 0,2]$. Para muchos metales no lubricados este coeficiente es efectivamente muy parecido al que indican las mediciones prácticas.

Para diferentes materiales en contacto es, de todas formas, posible formular consideraciones acerca del coeficiente de fricción utilizando las mismas ideas de Bowden y Tabor. Según Popov, 2010, para áreas en fuerte contacto existen tantos contactos a compresión como a tracción. La tensión en las zonas de compresión es aproximadamente igual a la dureza, $\sigma_0 \approx 3 \sigma_c$, por otro lado, en las zonas sometidas a la tracción, $\sigma_0 \approx \zeta \sigma_c$, donde ζ es precisamente la relación entre la tensión de tracción y compresión y en general es menor a 3. Por tanto, la fuerza normal es:

$$Fn = \sigma_c(3A_{comp} - \zeta A_{ten}). \quad (2.13)$$

En las soldaduras de los puentes se cumple:

$$FS \approx \tau_c(A_{comp} + A_{ten}). \quad (2.14)$$

De acuerdo a estas ecuaciones previas resulta un coeficiente de fricción aproximado a:

$$\mu \approx \frac{\tau_c(A_{comp} + A_{ten})}{\sigma_c(3A_{comp} - \zeta A_{ten})}. \quad (2.15)$$

Asumiendo válido que $\tau_c \approx \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}$ es válido para sustancias isotrópicas plásticas se obtiene la aproximación:

$$\mu \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{A_{comp} + A_{ten}}{3A_{comp} - \zeta A_{ten}} \right). \quad (2.16)$$

2.2.2.1.3 Modelo de Prandtl-Tomilson para fricción seca

El modelo de fricción seca de Prandtl-Tomilson considera el movimiento unidimensional de una masa puntual en un potencial periódico con el número de onda k siendo accionado por una fuerza externa y con una amortiguación proporcional a la velocidad. La Figura 2.10 muestra esta masa puntual moviéndose sobre las irregularidades periódicas de la superficie.

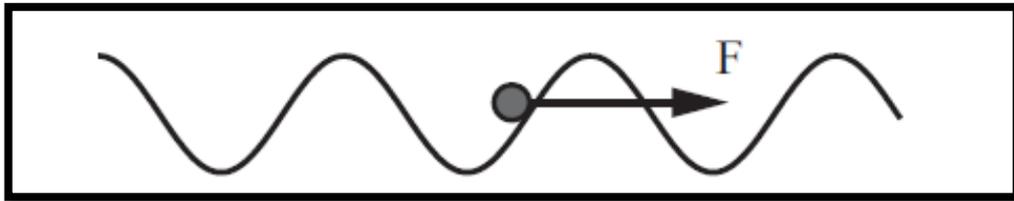


Figura 2.10 Modelo de Prandtl Tomlinson, masa puntual en un potencial periódico.

[Fuente: Popov, 2010]

Siendo la masa puntual de valor m , la coordenada de posición de la masa puntual x , el coeficiente de amortiguamiento dinámico η , la amplitud periódica de la fuerza N , F la fuerza externa actuando sobre m y k el número de onda, entonces se puede plantear la siguiente ecuación diferencial del movimiento:

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - N \sin kx. \quad (2.17)$$

El modelo de Prandtl-Tomlinson describe muchas propiedades fundamentales de la fricción en seco. Según este modelo debemos aplicar una fuerza mínima al cuerpo para que incluso un movimiento macroscópico pueda comenzar. Esta fuerza mínima no es otra que la fuerza macroscópica de la fricción estática. También el modelo explica que, si el cuerpo está en movimiento, entonces continuará moviéndose, incluso con una fuerza menor que la fuerza de fricción estática, porque ya posee una parte de la energía necesaria debido a su inercia. Macroscópicamente, esto significa que la fricción cinética puede ser menor que la fricción estática, que es una característica frecuentemente recurrente de la fricción seca. Lo más

destacable de este modelo es que es simple y explica dos de las propiedades fundamentales más importantes de la fricción seca.

Si un cuerpo está en reposo y una fuerza F se aplica a él, entonces su posición de equilibrio se mueve al punto x , que satisface la ecuación:

$$F = N \sin kx. \quad (2.18)$$

Esta ecuación solo tiene solución si $F \leq N$, entonces la fuerza estática de fricción es igual a:

$$Fs = N. \quad (2.19)$$

Según Popov, 2013, para una fuerza más grande, no es posible el equilibrio y el cuerpo entra en el movimiento macroscópico. En este modelo, cada movimiento macroscópico del cuerpo, desde un punto de vista microscópico, es una superposición de una velocidad constante y una oscilación periódica. Después de alcanzar la fuerza crítica, el cuerpo empieza a moverse con una velocidad finita. Si la fuerza disminuye, el cuerpo puede continuar moviéndose cuando es actuado por fuerzas menores que la fuerza de fricción estática. A una velocidad crítica específica, el movimiento macroscópico se detiene, el cuerpo oscila alrededor de un mínimo potencial y luego se detiene.

En la escala macroscópica, no percibimos las oscilaciones microscópicas. El movimiento descrito anteriormente se describe desde un punto de vista macroscópico como un proceso de fricción cuasi-estacionario. La dependencia de la velocidad media sobre la fuerza aplicada se percibe como la ley macroscópica de fricción a un observador macroscópico.

2.2.2.2 Modelo de Stribeck

Ya fuera del campo de la fricción seca, Richard Stribeck observó que la fuerza de fricción no se comporta como en los anteriores modelos, sino que demuestra que la fuerza depende de la velocidad. El fenómeno anterior es el llamado efecto Stribeck. Stribeck propuso la siguiente ecuación para modelar la fricción:

$$\begin{aligned} F &= F(v) \text{ si } v \neq 0, \\ F &= Fa \text{ si } v = 0 \text{ y } |Fa| < Fs, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Donde $F(v)$ es una función arbitraria.

Según Gajate et al, 2013, esta función ha sido parametrizada por varios autores observándose una forma bastante extendida de $F(v)$:

$$F(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} + F_v v, \quad (2.21)$$

donde: F_c es la fricción de Coulomb, F_s es la fuerza de desprendimiento, F_v es el coeficiente de fricción viscosa, v es la velocidad y v_s es la velocidad de Stribeck.

2.2.2.3 Modelo de Lu-Gre

El modelo de Lund-Grenoble más conocido como modelo Lu-Gre, utiliza la representación física de cerdas en movimiento para el modelado de la fricción. Cuando una fuerza tangencial es aplicada a las cerdas estas se desvían como cuerdas. Si la desviación es bastante larga la cerda comienza a deslizarse. En la Figura 2.11 se muestra la representación del contacto entre cerdas utilizado en el modelo Lu-Gre.

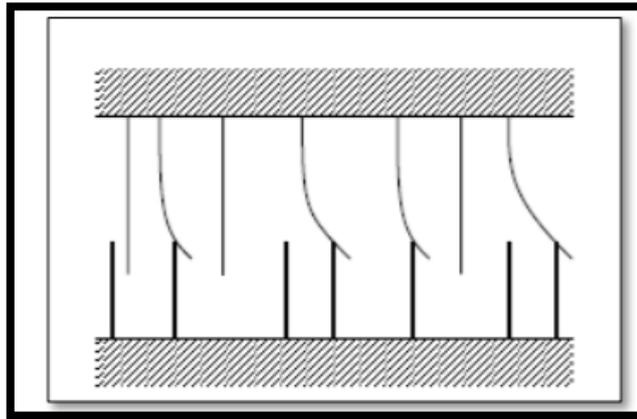


Figura 2.11 Fricción entre superficies como contacto entre cerdas. [Fuente: Olsson, 1998]

El promedio de desviación de la cuerda, para un estado estable, es determinado por la velocidad. Este es menor a bajas velocidades lo que implica que la desviación en estado estable disminuye al aumentar la velocidad. Este modelo contempla el fenómeno donde las superficies se alejan debido a la lubricación y también explica el efecto Stribeck (disminución de la fricción a medida que aumenta la velocidad). El modelo también incluye el fenómeno de la variación

de la fuerza de frenado y el retraso de la fricción. El modelo se expresa matemáticamente de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z, \\ g(v) &= F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} / \sigma_0, \\ F &= \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt},\end{aligned}\tag{2.22}$$

Donde z es el promedio de la desviación de la cuerda. El parámetro σ_0 es la rigidez de la cuerda y σ_1 el coeficiente de amortiguamiento. La función $g(v)$ modela el efecto Stribeck. El parámetro F_c corresponde a la fuerza de fricción de Coulomb y F_s es la fricción estática.

La expresión $F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt}$ modelo de la fuerza de fricción, muestra como la fuerza puede ser representada como proporcional a la desviación de la cuerda ($\sigma_0 z$) más un término de amortiguamiento viscoso respecto de la velocidad de desviación de la cuerda ($\sigma_1 \frac{dz}{dt}$). Luego esta velocidad de desviación de la cuerda ($\frac{dz}{dt}$) es a su vez modelada como función de la velocidad de las superficies, rigidez de la cuerda, desviación de la misma y una variable más (función $g(v)$) que contempla el efecto Stribeck.

2.2.2.4 Modelo Lu Gre Modificado

Según Martínez Rosas et al, 2006, el nuevo modelo es una extensión del modelo Lu-Gre y presenta la siguiente formulación para la fuerza de fricción:

$$F = \sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{q} - \sigma_0 \sigma_1 |\dot{q}| z + \sigma_2 \dot{q} + \sigma_0 (F_s - F_c) y + \alpha \left[-y + \frac{1}{\sigma_0} \text{sgn}(\dot{q}) e^{|\dot{q}|^\beta} \right].\tag{2.23}$$

Donde $F_c > 0$ es el parámetro correspondiente a la fricción de Coulomb, $F > 0$ es el parámetro de fricción estática y $\sigma_i > 0$; $i = 0, 1, 2$ son constantes que pueden ser interpretadas como parámetros de amortiguamiento y rigidez. En este modelo z e y son los estados de fricción, z está relacionado a la fricción de Coulomb y al efecto Stribeck. \dot{q} es la velocidad relativa de las superficies en contacto, β y $\alpha > 0$ son constantes conocidas.

2.2.3 Estudios Previos de Fricción de Cables en Tuberías

Thomas Alba Edison instaló los primeros cables para alumbrado público en los comienzos de 1882 en la ciudad de New York EE.UU. Los mismos fueron pre instalados en conductos de hierro en fábrica para, luego, ser montados en campo. Al poco tiempo, la *American Bell Telephone Company* fue la primera compañía en instalar los primeros cables flexibles de comunicación donde los mismos fueron jalados a los conductos en sitio. Troncos de árboles ahuecados, cortados en ángulo para formar las esquinas y tratados con un producto químico llamado creostata, fueron los comienzos de los ductos para conductores eléctricos [Thue, 2012].

Ya con las primeras experiencias de tendido de cable mediante tracción del mismo se establece que sería necesario investigar los efectos nocivos de la tensión de tracción en el aislamiento del cable. A la vez que, se dan ciertas recomendaciones acerca del coeficiente de fricción a utilizar, (entre 0.40 y 0.75) y de la tensión total máxima permitida (10.000 libras) [Sinclair, 1931].

En Buller, F. H, 1949, se realizan estudios sobre la fuerza de tracción en cables dentro de ductos, estos estudios aportan avances significativos en la comprensión de las fuerzas involucradas. Es en este trabajo que se proporcionan las primeras fórmulas para los cálculos de tracción en cables y estimación de los límites de resistencia de los mismos.

En Rifenberg, 1953, se proporcionan las fórmulas básicas que permiten calcular las tensiones para las situaciones usuales de campo. Esto es, las ecuaciones para tramos rectos, rectos inclinados y curvas. Posteriores publicaciones como Thue, 2012, en su capítulo correspondiente a instalación de cables siguen utilizando las ecuaciones basadas en Rifenberg. La ecuación correspondiente al caso de cables en tramos rectos fue expresada como

$$T = \delta L f. \quad (2.24)$$

donde T es la tensión [N] al final del tramo recto horizontal, δ [N/m] es el peso de un tramo de un metro de longitud de cable, L es la longitud [m] del tramo en cuestión y f es el coeficiente de fricción entre el cable y el ducto.

La ecuación correspondiente al caso de cables en curvas horizontales fue expresada como

$$T_o = T_{in} e^{f\alpha} . \quad (2.25)$$

Donde T_o [N] es la tensión de salida de la curva, T_{in} [N] es la tensión de ingreso a la curva, f es el coeficiente de fricción entre el cable y el tubo y α es el ángulo de la curva del ducto.

En recientes estudios realizados por Yang et al, 2013, se desarrolla un algoritmo computacional utilizando un modelo de cuerpo múltiple para el cable y el conducto. Como ventaja, este modelo puede trabajar con cualquier geometría de ducto y no solo limitarse a los casos de curvas y tramos rectos. Los autores reportan que los resultados obtenidos por este método son congruentes con los obtenidos con los métodos tradicionales. En la Figura 2.28 se muestra los valores obtenidos de tensión de tracción de un cable mediante, la solución numérica versus, la solución aplicando la fórmula tradicional.

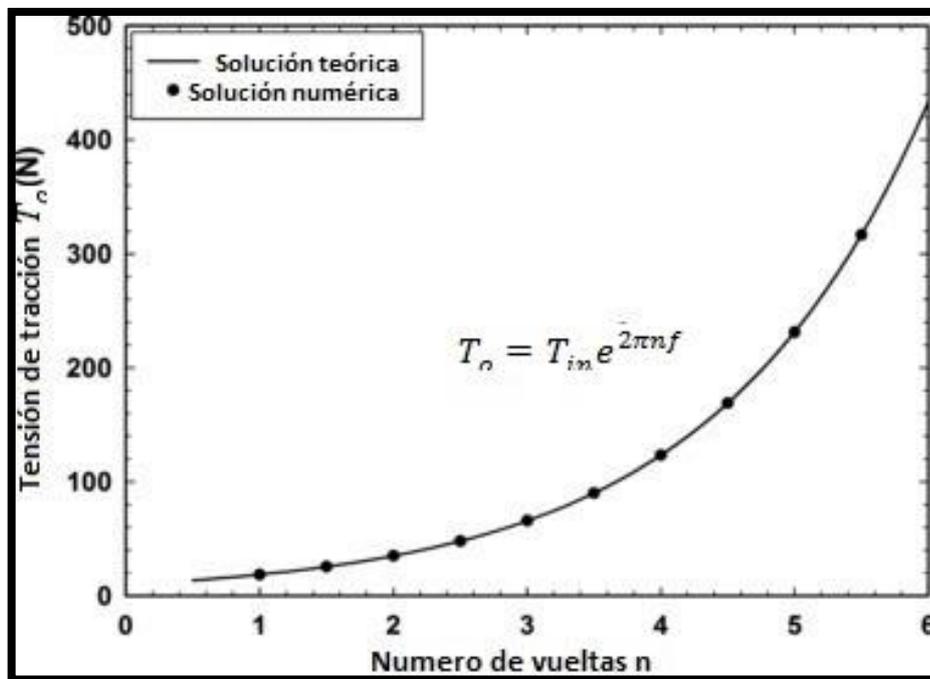


Figura 2.12 Solución teórica y solución numérica para fuerza de tensión en un ducto con forma de helicoides. [Fuente: Adaptado de Yang, 2013].

3 ESTUDIO DE LAS FUERZAS DE FRICCIÓN

El objetivo de este capítulo es presentar un estudio de las fuerzas que actúan sobre cables dentro de tuberías, en particular de tuberías que presentan algún medio líquido en ellas. Mediante este estudio se pretende obtener un modelo matemático que permita determinar la fuerza necesaria para el arrastre de un cable en una tubería.

Se obtendrán los modelos matemáticos de tensiones de cable para tramos rectos inclinados, horizontales y curvos en sus diferentes configuraciones geométricas.

El modelo a desarrollar contempla las siguientes consideraciones y aproximaciones.

- a) Se desprecian todos los efectos dinámicos en el cable.
- b) Se considera a el cable como un elemento infinitamente flexible a la flexión.
- c) Se considera el modelo de fricción estándar, esto es la fuerza resultante de la fricción del cable contra las paredes de la tubería responde a la ecuación:

$$Fr = fN , \quad (3.1)$$

donde f es el coeficiente de fricción y N es la normal.

3.1.1 Tensiones en Tramos Rectos

Para este caso, se estudiarán las fuerzas en tramos rectos inclinados ascendentes, descendentes y tramo recto horizontal. El análisis en todos los casos será realizado mediante el estudio de una porción diferencial del cable, estableciendo las fuerzas actuantes en cada caso. A partir de este análisis diferencial se obtendrán las expresiones del incremento de la tensión en las distintas configuraciones.

3.1.2 Tramos Rectos Ascendentes

Considerando una porción diferencial de cable de longitud dL deslizando en una tubería inclinada en forma ascendente y las correspondientes fuerzas actuantes en el mismo, se obtiene el siguiente diagrama de cuerpo libre presentado en la Figura 3.1.

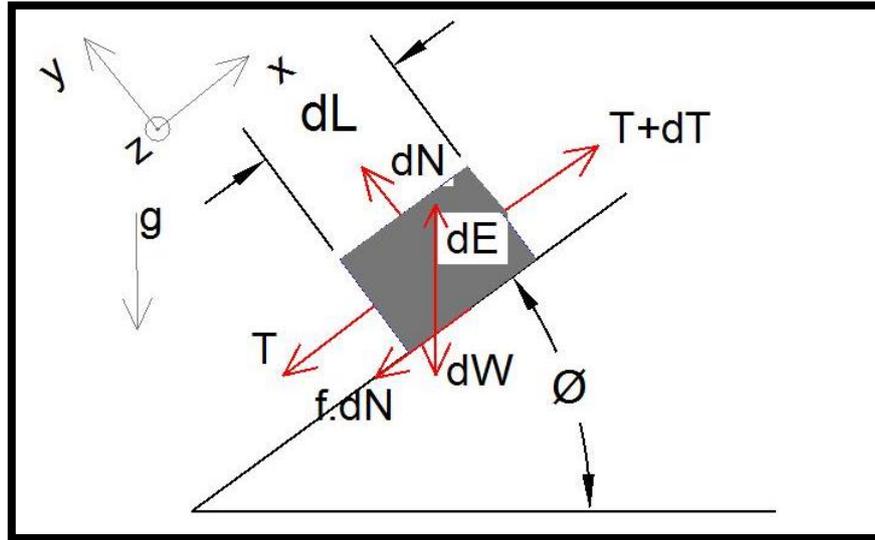


Figura 3.1 Diagrama cuerpo libre tramo recto inclinado ascendente

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las siguientes:

- La fuerza de tensión (T) presente en la sección izquierda de la porción diferencial del cable.
- La fuerza de tensión ($T + dT$) presente en la sección derecha de la porción diferencial del cable.
- La fuerza correspondiente al peso propio de la porción diferencial del cable (dW).
- La fuerza correspondiente al empuje del fluido sobre el cable debido a que el mismo se encuentra inmerso en el mismo (dE).
- La fuerza normal a la superficie de la tubería (dN).
- La fuerza de rozamiento entre la tubería y el cable (dFr), que, la modelaremos según la ecuación $dFr = f dN$.

Siendo dL la longitud de la porción diferencial de cable, g el vector de aceleración de la gravedad y f el coeficiente de rozamiento entre el cable y la tubería.

Considerando un cable uniforme cuyo peso por unidad de longitud es por ende constante de valor δ entonces el peso de la porción diferencial de cable puede ser expresada como:

$$dW = \delta dL. \quad (3.2)$$

El empuje del fluido, cuyo valor es igual al peso del fluido desplazado, puede ser expresado en términos del área de la sección del cable (A), de la densidad del fluido (ρ) y de la longitud del diferencial del cable (dL) según la siguiente ecuación:

$$dE = \rho g A dL. \quad (3.3)$$

Dado que, el peso y el empuje son fuerzas de igual dirección y sentidos opuestos se considerará un solo término (P), igual a la suma vectorial de ambas fuerzas.

Entonces resulta:

$$d = dW - dE = (\delta - \rho g A) dL. \quad (3.4)$$

Llamando j al término

$$j = \delta - \rho g A. \quad (3.5)$$

Entonces resulta:

$$dP = j dL. \quad (3.6)$$

Consideraremos en este estudio, que las aceleraciones presentes son lo suficientemente pequeñas para que las fuerzas de inercia asociadas sean despreciables. El análisis pues, es válido también para situaciones estáticas.

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x , se obtiene:

$$T + dT = T + f dN + dP \sin\phi, \quad (3.7)$$

$$dT = f dN + dP \sin\phi. \quad (3.8)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y , se obtiene:

$$dP \cos\phi = dN. \quad (3.9)$$

Sustituyendo dN (Ecuación (3.9)) en la Ecuación (3.8), se obtiene:

$$dT = fdP \cos\phi + dP \sin\phi = dP(f \cos\phi + \sin\phi) \quad (3.10)$$

Sustituyendo dP (Ecuación (3.6)) en la Ecuación (3.10) se obtiene:

$$dT = j(f \cos\phi + \sin\phi)dL. \quad (3.11)$$

Esta ecuación es del tipo explícita de primer orden [Varona,1996], respondiendo a la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3.12)$$

En particular, la Ecuación (3.11) es del tipo de variables separables que responden a la forma:

$$g(x)dx = h(y)dy. \quad (3.13)$$

Este tipo de ecuación se resuelve por integración directa de ambos lados de la misma [Varona, 1996]. Integrando ambos lados de la Ecuación (3.11), se obtiene:

$$\int_{T1}^{T2} dT = \int_0^l j(f \cos\phi + \sin\phi)dL. \quad (3.14)$$

Resolviendo la Ecuación (3.14), se obtiene:

$$T2 - T1 = j(f \cos\phi + \sin\phi)l, \quad (3.15)$$

con lo cual, resulta la ecuación de tensiones para tramos rectos inclinados ascendentes.

$$T2 = T1 + jl(f \cos\phi + \sin\phi), \quad (3.16)$$

donde $T1$ es la tensión al comienzo del tramo, $T2$ es la tensión al final del tramo, ϕ es el ángulo entre el plano inclinado y la horizontal, y l es la longitud del tramo.

3.1.3 Tramos Rectos Descendentes

Considerando el mismo análisis para una porción diferencial de cable que en el caso de tramo recto ascendente, pero, para este caso en un tramo descendente, se obtiene el siguiente diagrama de cuerpo libre representado en la Figura 3.2.

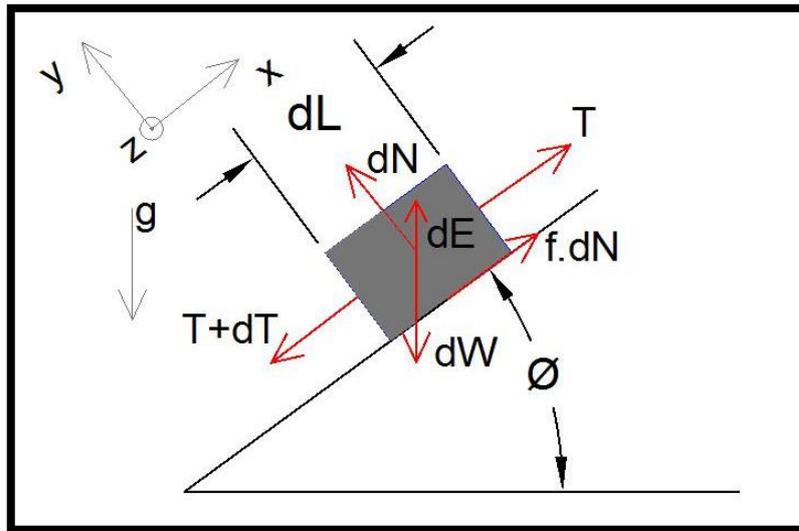


Figura 3.2 Diagrama cuerpo libre tramo recto inclinado descendente

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x, se obtiene:

$$T + dT + dP \sin \phi = T + f dN, \quad (3.17)$$

$$dT + dP \sin \phi = f dN. \quad (3.18)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y, se obtiene:

$$dP \cos \phi = dN. \quad (3.19)$$

Operando de igual forma que para el caso ascendente, se obtiene:

$$dT = j(f \cos \phi - \sin \phi) dL. \quad (3.20)$$

Esta ecuación diferencial, al igual que la Ecuación (3.11), es del tipo explícita de primer orden de variables separables que se resuelven por integración directa de ambos lados de la igualdad, [Varona,1996].

Integrando ambos lados de la Ecuación (3.20), se obtiene:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_0^l j(f \cos \phi - \sin \phi) dL. \quad (3.21)$$

Resolviendo la Ecuación (3.21), resulta la ecuación de tensiones para tramos rectos inclinados descendentes:

$$T_2 = T_1 + j l (f \cos \phi - \sin \phi). \quad (3.22)$$

3.1.4 Tramos Rectos Horizontales

Los tramos rectos planos son un caso particular de tramo inclinado donde el ángulo de inclinación ϕ es igual a cero. Para este caso, la Ecuación (3.22) con $\phi=0$ resulta en la expresión de la tensión para tramos rectos horizontales.

$$T_2 = T_1 + jfl. \quad (3.23)$$

3.1.5 Tensiones en Tramos Curvos

Para el caso de tramos curvos se estudiarán las fuerzas de tensión resultantes en las configuraciones usuales de curvas. Al igual que en los tramos rectos, el análisis de las tensiones se hará partiendo de una porción diferencial de cable y sus correspondientes fuerzas actuantes para luego obtener las expresiones extendidas a todo el tramo.

3.1.6 Curva con Cable sin Peso

Conforme a lo presentado en la Figura 3.3, consideraremos un primer caso simplificado donde el peso del cable es despreciado.

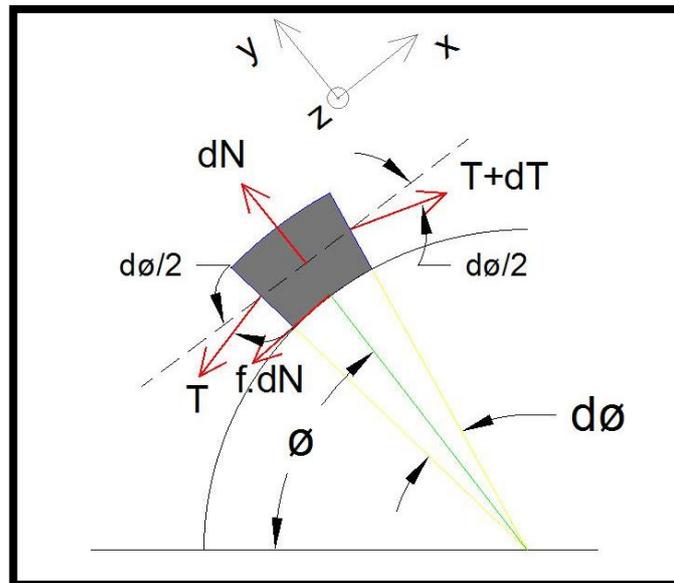


Figura 3.3 Diagrama cuerpo libre cable en curva sin peso

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las siguientes:

- La fuerza de tensión (T) presente en la sección izquierda de la porción diferencial del cable. Esta fuerza es normal a la superficie del cable.

- b) La fuerza de tensión ($T + dT$) presente en la sección derecha de la porción diferencial del cable. Esta fuerza es normal a la superficie del cable.
- c) La fuerza normal a la superficie de la tubería (dN).
- d) La fuerza de rozamiento entre la tubería y el cable (dFr), la cual, se modelará según la ecuación $dFr = f dN$.

Al igual que para los tramos rectos, consideraremos que las aceleraciones presentes son de lo suficientemente pequeñas para que las fuerzas de inercia asociadas sean despreciables. El análisis pues, es válido también para situaciones estáticas.

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x, se obtiene:

$$(T + dT)\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = T\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + fdN. \quad (3.24)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y, se obtiene:

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = dN. \quad (3.25)$$

Tomando limite cuando $d\phi \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{d\phi \rightarrow 0} \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 1, \quad (3.26)$$

$$d\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \sim \left(\frac{d\phi}{2}\right). \quad (3.27)$$

Utilizando la Ecuación (3.26) en la Ecuación (3.24), se obtiene:

$$(T + dT) = T + fdN, \quad (3.28)$$

por tanto

$$dN = \frac{dT}{f}. \quad (3.29)$$

Utilizando la Ecuación (3.27) en la Ecuación (3.25), se obtiene:

$$(T + dT)\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\left(\frac{d\phi}{2}\right) = dN. \quad (3.30)$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$T \left(\frac{d\phi}{2} \right) + T \left(\frac{d\phi}{2} \right) + dT \frac{d\phi}{2} = dN, \quad (3.31)$$

y ordenando:

$$Td\phi + dT \frac{d\phi}{2} = dN. \quad (3.32)$$

Despreciando el término $dTd\phi$, se obtiene:

$$Td\phi = dN. \quad (3.33)$$

Utilizando la Ecuación (3.29) en la Ecuación (3.33), resulta:

$$Td\phi = \frac{dT}{f}, \quad (3.34)$$

$$fd\phi = \frac{dT}{T}. \quad (3.35)$$

La Ecuación (3.35), es la ecuación diferencial que modela las tensiones de un cable sin peso en una curva.

Nuevamente, esta ecuación diferencial es del tipo explícita de primer orden de variables separables. [Varona,1996].

Integrando ambos lados de Ecuación (3.35), se obtiene:

$$\int_0^\alpha f d\phi = \int_{T1}^{T2} \frac{dT}{T}. \quad (3.36)$$

Integrando,

$$f(\alpha - 0) = \log T2 - \log T1. \quad (3.37)$$

Aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\alpha f = \log \frac{T2}{T1}. \quad (3.38)$$

Aplicando exponencial a ambos lados de la Ecuación (3.38), se obtiene:

$$e^{\alpha f} = \frac{T2}{T1}, \quad (3.39)$$

con lo que resulta:

$$T2 = T1 e^{\alpha f}. \quad (3.40)$$

La Ecuación (3.40), es la expresión de las tensiones para un cable sin peso en una curva.

Esta expresión es la llamada ecuación de *Euler* para poleas.

3.1.7 Curva Ascendente considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva que se desarrolla en un plano vertical. El sentido de movimiento del cable es ascendente. A las fuerzas ya mencionadas para el caso de curva con cable sin peso se agregan a este análisis la fuerza correspondiente al peso propio de la porción diferencial del cable (dW) y la fuerza correspondiente al empuje del fluido sobre el cable debido a que el mismo se encuentra inmerso en el mismo (dE).

Nuevamente, se considera una porción diferencial de cable de longitud dL para el análisis. Se obtiene pues, el diagrama de cuerpo libre presentado en la Figura 3.4.

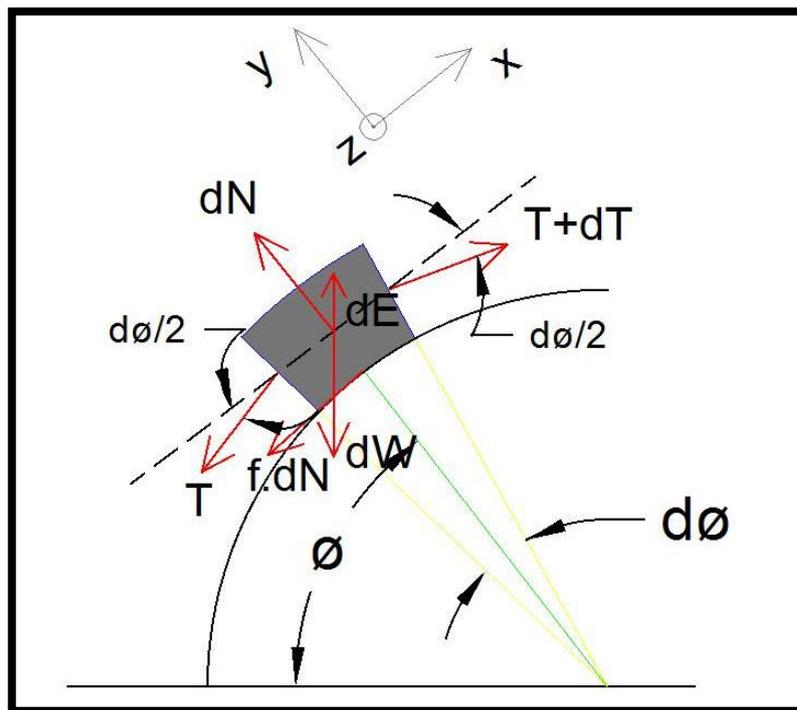


Figura 3.4 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical ascendente con peso propio

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las siguientes:

- La fuerza de tensión (T) presente en la sección izquierda de la porción diferencial del cable. Esta fuerza es normal a la superficie del cable.
- La fuerza de tensión ($T + dT$) presente en la sección derecha de la porción diferencial del cable. Esta fuerza es normal a la superficie del cable.
- La fuerza correspondiente al peso propio de la porción diferencial del cable (dW).

- d) La fuerza correspondiente al empuje del fluido sobre el cable debido a que el mismo se encuentra inmerso en el mismo (dE).
- e) La fuerza normal a la superficie de la tubería (dN).
- f) La fuerza de rozamiento entre la tubería y el cable (dFr), que, la modelaremos según la ecuación $dFr = fdN$

Las consideraciones realizadas en 3.1.2 respecto del peso del cable y el empuje, son válidas también en estos casos. De la misma forma, son válidas la Ecuación (3.1) a la Ecuación (3.6).

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x, se obtiene:

$$(T + dT)\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = T\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP \cos \phi + fdN . \quad (3.41)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y, se obtiene:

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP \sin \phi = dN . \quad (3.42)$$

Tomando limite cuando $d\phi \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{d\phi \rightarrow 0} \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 1, \quad (3.43)$$

$$d\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \sim \left(\frac{d\phi}{2}\right). \quad (3.44)$$

Utilizando la Ecuación (3.44) en la Ecuación (3.41), se obtiene:

$$Td\phi + dT \frac{d\phi}{2} + dP \sin \phi = dN. \quad (3.45)$$

Despreciando el término $dTd\phi$, se obtiene:

$$Td\phi + dP \sin \phi = dN. \quad (3.46)$$

Por otro lado,

$$dP = jdL, \quad (3.47)$$

y dL puede ser expresado como:

$$dL = rd\phi, \quad (3.48)$$

donde r es el radio de curvatura de la curva.

La Ecuación (3.46) resulta en:

$$(T + jr \sin \phi) d\phi = dN. \quad (3.49)$$

Utilizando la Ecuación (3.45) en la Ecuación (3.42), se obtiene:

$$dT = dP \cos \phi + f dN . \quad (3.50)$$

Utilizando la Ecuación (3.49) en la Ecuación (3.50), se obtiene:

$$dT = jr d\phi \cos \phi + f(T + jr \sin \phi) d\phi . \quad (3.51)$$

Ordenando:

$$dT = (jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi) d\phi . \quad (3.52)$$

La Ecuación (3.52), es la ecuación diferencial que modela las tensiones de un cable con peso en una curva ascendente con un fluido presente.

Al igual que en los casos anteriores, esta ecuación diferencial es del tipo explícita de primer orden, sin embargo, esta ya no es de variables separables y por tanto no es posible su resolución por integración directa. [Varona, 1996]. La forma de la ecuación diferencial a resolver es del tipo:

$$S(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (3.53)$$

Un caso particular de este tipo de ecuaciones diferenciales son las llamadas *Ecuaciones diferenciales Exactas*, que son las que cumplen:

$$\frac{dS}{dy} = \frac{dQ}{dx} . \quad (3.54)$$

Para este tipo de ecuaciones diferenciales existe un procedimiento de resolución de las mismas. [Varona, 1996].

En nuestro caso, la Ecuación (3.52) no es tampoco exacta, ya que:

$$dT = (jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi) d\phi , \quad (3.55)$$

$$S(T, \phi) = -1 , \quad (3.56)$$

$$Q(T, \phi) = jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi , \quad (3.57)$$

$$\frac{dS}{d\phi} = 0 , \frac{dQ}{dT} = f \rightarrow \frac{dS}{d\phi} \neq \frac{dQ}{dT} . \quad (3.58)$$

Sin embargo, para este tipo de casos es posible transformar la ecuación diferencial a un tipo de ecuación exacta mediante lo que se llama *Factores Integrantes*. La idea de este método es tratar de encontrar alguna función $\Gamma(x, y)$ no idénticamente nula, tal que:

$$\Gamma(x, y)S(x, y)dx + \Gamma(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (3.59)$$

sea exacta. Como esta ecuación es equivalente a la de partida, sus soluciones y las de

$$S(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (3.60)$$

serán las mismas.

No habiendo un procedimiento general para la obtención de factores integrantes, si es posible encontrarlos en ciertos casos, tales como en los que existe un factor integrante de la forma $\Gamma(y)$, tal que:

$$\Gamma(y)S(x,y)dx + \Gamma(y)Q(x,y)dy = 0 \quad (3.61)$$

sea exacta.

Operando, resulta:

$$\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} = \frac{\frac{dQ}{dx} \frac{dS}{dy}}{S(x,y)} = h(y), \quad (3.62)$$

la cual tiene que resultar ser una función que dependa exclusivamente de y , que denotamos $h(y)$. Cuando este es el caso, es claro que la función C que satisface la relación anterior es:

$$\Gamma(y) = e^{\int h(y)dy}, \quad (3.63)$$

con lo cual, se encuentra el factor integrante buscado. [Varona, 1996].

Para nuestro caso,

$$dT = (jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi) d\phi, \quad (3.64)$$

$$S(T, \phi) = -1, \quad (3.65)$$

$$Q(T, \phi) = jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi, \quad (3.66)$$

$$\frac{dS}{d\phi} = 0, \frac{dQ}{dT} = f, \quad (3.67)$$

$$h(y) = \frac{\frac{dQ}{dT} \frac{dS}{d\phi}}{S(T,\phi)} = -f, \quad (3.68)$$

Con lo cual, aplicando Ecuación (3.59) a la expresión de la Ecuación (3.68), se obtiene:

$$\Gamma(\phi) = e^{-f\phi}. \quad (3.69)$$

Verifiquemos entonces que la ecuación diferencial

$$\Gamma(y)S(x, y)dx + \Gamma(y)Q(x, y)dy = 0 \quad (3.70)$$

sea exacta,

$$-e^{-f\phi}dT + e^{-f\phi}(jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi) d\phi = 0, \quad (3.71)$$

$$\frac{dS}{d\phi} = fe^{-f\phi}, \frac{dQ}{dT} = fe^{-f\phi} \rightarrow \frac{dS}{d\phi} = \frac{dQ}{dT},$$

con lo cual, la Ecuación (3.71) es exacta.

La Ecuación (3.71) tiene las mismas soluciones que la Ecuación (3.52), donde ahora

$$S(T, \phi) = -e^{-f\phi}, \quad (3.72)$$

$$Q(T, \phi) = e^{-f\phi}(jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi). \quad (3.73)$$

Este tipo de ecuación diferencial se resuelve buscando una función $F(T, \phi)$, tal que:

$$\frac{dF}{dT} = S, \frac{dF}{d\phi} = Q. \quad (3.74)$$

Como F es exacta, entonces $dF = 0$, por tanto $F(T, \phi) = C$ con C una constante arbitraria.

De esta manera, es posible encontrar F integrando $F(T, \phi)$ respecto a T mientras se mantiene ϕ constante, es decir:

$$F(T, \phi) = \int S dT + \varphi(\phi), \quad (3.75)$$

donde $\varphi(\phi)$ es la constante de integración.

Para nuestro caso,

$$F(T, \phi) = \int -e^{-f\phi} dT + \varphi(\phi), \quad (3.76)$$

con lo cual,

$$F(T, \phi) = -Te^{-f\phi} + \varphi(\phi). \quad (3.77)$$

Recordando que $\frac{dF}{d\phi} = Q$, entonces:

$$e^{-f\phi}(jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi) - fTe^{-f\phi} = \varphi'(\phi), \quad (3.78)$$

$$\varphi'(\varnothing) = jr e^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing). \quad (3.79)$$

Se debe, entonces, hallar ahora $\varphi(\varnothing)$ tal que cumpla la Ecuación (3.79):

$$\varphi(\varnothing) = \int jre^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing) d\varnothing + C. \quad (3.80)$$

Para hallar $\varphi(\varnothing)$, utilizaremos la propiedad de la integral (integral por partes):

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx. \quad (3.81)$$

Aplicando la Ecuación (3.81) a:

$$\int jr e^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing) d\varnothing, \quad (3.82)$$

con

$$u(\varnothing) = jr e^{-f\varnothing}, v'(\varnothing) = \cos \varnothing + f \sin \varnothing, \quad (3.83)$$

$$u'(\varnothing) = -jrf e^{-f\varnothing}, v(\varnothing) = \sin \varnothing - f \cos \varnothing, \quad (3.84)$$

resulta:

$$\int jre^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing) d\varnothing = jre^{-f\varnothing}(\sin \varnothing - f \cos \varnothing) + \int jrf e^{-f\varnothing}(\sin \varnothing - f \cos \varnothing) d\varnothing. \quad (3.85)$$

Aplicando nuevamente integración por partes al término de la Ecuación (3.85)

$$\int jrf e^{-f\varnothing}(\sin \varnothing - f \cos \varnothing) d\varnothing, \quad (3.86)$$

se obtiene:

$$\int jrf e^{-f\varnothing}(\sin \varnothing - f \cos \varnothing) d\varnothing = -jrf e^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing) - \int jrf^2 e^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing) d\varnothing. \quad (3.87)$$

Utilizando la Ecuación (3.87) en la Ecuación (3.67), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int jre^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing) d\varnothing &= jre^{-f\varnothing}(\sin \varnothing - f \cos \varnothing) - jrf e^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + \\ & f \sin \varnothing) - \int jrf^2 e^{-f\varnothing}(\cos \varnothing + f \sin \varnothing) d\varnothing, \end{aligned} \quad (3.88)$$

por tanto,

$$\int jre^{-f\phi}(\cos \phi + f \sin \phi) d\phi = \frac{jre^{-f\phi}(\sin \phi - 2f \cos \phi - f^2 \sin \phi)}{1+f^2}, \quad (3.89)$$

Con lo cual volviendo a la Ecuación (3.80), se obtiene:

$$\varphi(\phi) = \frac{jre^{-f\phi}}{1+f^2}(\sin \phi - 2f \cos \phi - f^2 \sin \phi) + C. \quad (3.90)$$

Derivando la Ecuación (3.90), se verifica que la misma cumple la igualdad dada en la Ecuación (3.79):

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{jr}{(1+f^2)}[-fe^{-f\phi}(\sin \phi - 2f \cos \phi - f^2 \sin \phi) + e^{-f\phi}(\cos \phi + 2f \sin \phi - f^2 \cos \phi)], \quad (3.91)$$

$$\varphi'(\phi) = \frac{jre^{-f\phi}}{(1+f^2)}(-f \sin \phi + 2f^2 \cos \phi + f^3 \sin \phi + \cos \phi + 2f \sin \phi - f^2 \cos \phi), \quad (3.92)$$

$$\varphi'(\phi) = \frac{jre^{-f\phi}}{(1+f^2)}[\cos \phi(1+f^2) + f \sin \phi(1+f^2)], \quad (3.93)$$

$$\varphi'(\phi) = jr e^{-f\phi}(\cos \phi + f \sin \phi), \quad (3.94)$$

que resulta ser igual a la Ecuación (3.79), con lo cual, la Ecuación (3.90) es correcta.

Por otro lado, recordando que

$$F(T, \phi) = -Te^{-f\phi} + \varphi(\phi) = Cte \quad (3.95)$$

es solución de la ecuación diferencial para las tensiones

$$dT = (jr \cos \phi + fT + fjr \sin \phi) d\phi, \quad (3.96)$$

entonces, de Ecuación (3.95):

$$-Te^{-f\phi} + \varphi(\phi) = C, \quad (3.97)$$

$$T(\phi) = e^{f\phi}(\varphi(\phi) - C), \quad (3.98)$$

por tanto,

$$T(\varnothing) = e^{f\varnothing} \left[\frac{jre^{-f\varnothing}}{1+f^2} (\sin\varnothing - 2f\cos\varnothing - f^2\sin\varnothing) + C1 \right]. \quad (3.99)$$

Verifiquemos que la Ecuación (3.99), es efectivamente solución de la Ecuación (3.52):

$$T(\varnothing) = e^{f\varnothing} (\varphi(\varnothing) - C). \quad (3.100)$$

Derivando esta expresión respecto de \varnothing , se obtiene:

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = f e^{f\varnothing} (\varphi(\varnothing) - C) + e^{f\varnothing} \varphi'(\varnothing). \quad (3.101)$$

Como,

$$T(\varnothing) = e^{f\varnothing} (\varphi(\varnothing) - C), \quad \varphi'(\varnothing) = jr e^{-f\varnothing} (\cos\varnothing + f \sin\varnothing), \quad (3.102)$$

entonces:

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = fT(\varnothing) + e^{f\varnothing} jr e^{-f\varnothing} (\cos\varnothing + f \sin\varnothing), \quad (3.103)$$

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = fT(\varnothing) + jr(\cos\varnothing + f \sin\varnothing), \quad (3.104)$$

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = fT(\varnothing) + jr(\cos\varnothing + f \sin\varnothing), \quad (3.105)$$

$$dT = (jr \cos\varnothing + fT + fjr \sin\varnothing) d\varnothing. \quad (3.106)$$

Esta ecuación resulta ser igual a la Ecuación (3.52), con lo cual, la solución expresada en la Ecuación (3.99) es correcta.

Imponiendo las condiciones de borde a la Ecuación (3.99), se determina el valor de la constante C . Usando la expresión:

$$T(\varnothing) = \frac{jr}{1+f^2} (\sin\varnothing - 2f\cos\varnothing - f^2\sin\varnothing) + e^{f\varnothing} C1. \quad (3.107)$$

En $\varnothing = \varnothing_1$, la tensión es la previa al ingreso a la curva, $T(\varnothing_1) = T1$.

Evaluando la expresión en $\varnothing = \varnothing_1$, se obtiene:

$$T(\varnothing_1) = \frac{jr}{1+f^2} (\sin\varnothing_1 - 2f\cos\varnothing_1 - f^2\sin\varnothing_1) + e^{f\varnothing_1} C1 = T1, \quad (3.108)$$

por tanto,

$$C1 = e^{-f\phi_1} \left[T1 + \frac{jr}{1+f^2} (\sin\phi_1 - 2f\cos\phi_1 - f^2\sin\phi_1) \right]. \quad (3.109)$$

Sustituyendo el valor $C1$ en la Ecuación (3.108), se obtiene la ecuación de tensiones para curvas verticales ascendentes:

$$T(\phi) = \frac{jr}{1+f^2} (\sin\phi - 2f\cos\phi - f^2\sin\phi) + e^{f(\phi-\phi_1)} \left(T1 - \frac{jr}{1+f^2} (\sin\phi_1 - 2f\cos\phi_1 - f^2\sin\phi_1) \right). \quad (3.110)$$

3.1.8 Curvas Descendentes considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva que se desarrolla en un plano vertical. El sentido de movimiento del cable es descendente. Nuevamente, se considera una porción diferencial de cable de longitud dL , para el análisis. Se obtiene pues el siguiente diagrama de cuerpo libre presentado en la Figura 3.5.

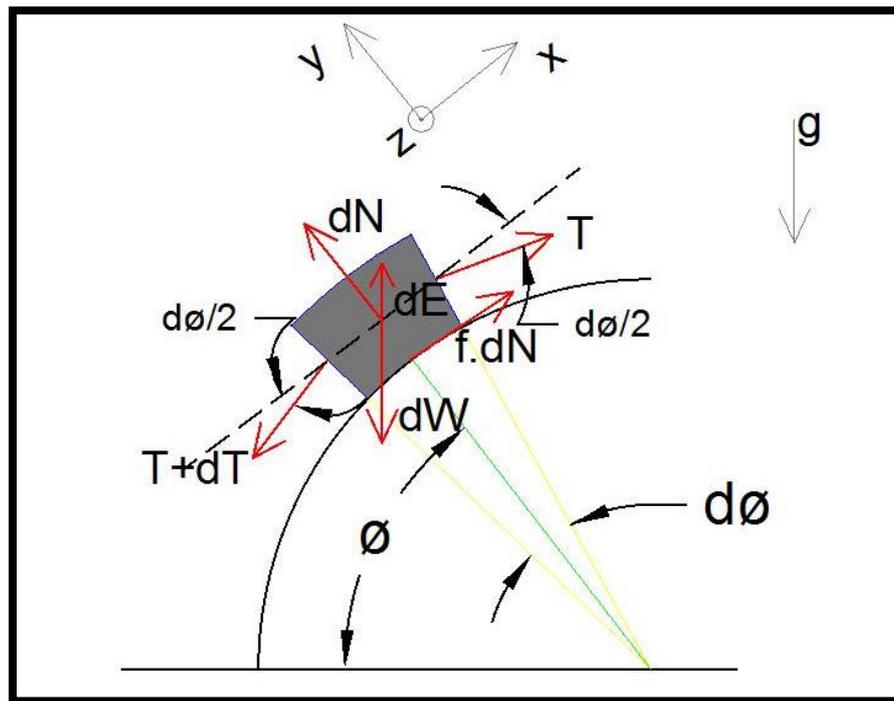


Figura 3.5 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical descendente con peso propio

En la Figura están representadas todas las fuerzas actuantes, como ser las tensiones, peso del cable, empuje del fluido y fuerza de rozamiento.

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las mismas que para el caso ascendente con peso propio del cable, solo cambian el sentido de las tensiones debido al cambio de movimiento de ascendente a descendente.

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x, se obtiene:

$$(T + dT)\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP \cos \phi = T\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + fdN . \quad (3.111)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y, se obtiene:

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP \sin \phi = dN . \quad (3.112)$$

Tomando limite cuando $d\phi \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{d\phi \rightarrow 0} \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 1, \quad (3.113)$$

$$d\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \sim \left(\frac{d\phi}{2}\right). \quad (3.114)$$

Utilizando la Ecuación (3.78) en la Ecuación (3.76), se obtiene:

$$Td\phi + dT \frac{d\phi}{2} + dP \sin \phi = dN. \quad (3.115)$$

Despreciando el término $dTd\phi$, se obtiene:

$$Td\phi + dP \sin \phi = dN. \quad (3.116)$$

Por otro lado,

$$dP = jdL , dL = rd\phi, \quad (3.117)$$

la Ecuación (3.116) resulta en:

$$(T + jr \sin \phi) d\phi = dN. \quad (3.118)$$

Utilizando la Ecuación (3.113) en la Ecuación (3.111), se obtiene:

$$dT + dP \cos \phi = fdN. \quad (3.119)$$

Utilizando la Ecuación (3.118) en la Ecuación (3.119), se obtiene:

$$dT = f \cdot (T + jr \sin \phi) d\phi - jrd\phi \cos \phi . \quad (3.120)$$

Ordenando los términos de la Ecuación (3.120), se obtiene:

$$dT = (fT + fjr \sin \phi - jr \cos \phi) d\phi . \quad (3.121)$$

La Ecuación (3.121) es la ecuación diferencial que modela las tensiones de un cable con peso en una curva descendente con un fluido presente.

Al igual que para el caso de curvas ascendentes, la ecuación diferencial (3.121) es de la forma:

$$S(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3.122)$$

con:

$$S(T, \phi) = -1, \quad (3.123)$$

$$Q(T, \phi) = fT + fjrsin\phi - jr \cos \phi. \quad (3.124)$$

De la misma manera, buscaremos soluciones para:

$$\Gamma(x, y)S(x, y)dx + \Gamma(x, y)Q(x, y)dy = 0, \quad (3.125)$$

obteniendo, con igual procedimiento que en el caso ascendente:

$$\Gamma(\phi) = e^{f\phi}, \quad (3.126)$$

con lo cual, la ecuación diferencial:

$$-e^{-f\phi}dT + e^{-f\phi}(fT + fjrsin\phi - jr \cos \phi)d\phi, \quad (3.127)$$

tiene las mismas soluciones que la Ecuación (3.121). La solución de esta ecuación diferencial es una función $F(T, \phi)$ tal que:

$$\frac{dF}{dT} = S, \frac{dF}{d\phi} = Q, \quad (3.128)$$

$$F(T, \phi) = C, \quad (3.129)$$

con C una constante arbitraria.

Para el caso actual:

$$S(T, \phi) = -e^{-f\phi}, \quad (3.130)$$

$$Q(T, \phi) = e^{-f\phi}(fT + fjrsin\phi - jr \cos \phi). \quad (3.131)$$

Recordando que:

$$F(T, \phi) = \int S dT + \varphi(\phi), \quad (3.132)$$

donde $\varphi(\phi)$ es la constante de integración, para nuestro caso:

$$F(T, \varnothing) = \int -e^{-f\varnothing} dT + \varphi(\varnothing), \quad (3.133)$$

con lo cual,

$$F(T, \varnothing) = -Te^{-f\varnothing} + \varphi(\varnothing). \quad (3.134)$$

Recordando que $\frac{dF}{d\varnothing} = Q$, entonces:

$$e^{-f\varnothing}(fT + fjrsin\varnothing - jr cos \varnothing) - fTe^{-f\varnothing} = \varphi'(\varnothing), \quad (3.135)$$

$$\varphi'(\varnothing) = jr e^{-f\varnothing}(f sin\varnothing - cos \varnothing). \quad (3.136)$$

Hallamos ahora $\varphi(\varnothing)$, tal que, cumpla la Ecuación (3.136):

$$\varphi(\varnothing) = \int jr e^{-f\varnothing}(f sin\varnothing - cos \varnothing) d\varnothing + C. \quad (3.137)$$

Al igual que, para el caso ascendente, se utiliza la integración por partes de manera sucesiva, y así obtener una expresión para la integral de la Ecuación (3.137), resultando:

$$\varphi(\varnothing) = -jr e^{-f\varnothing} sin\varnothing + C. \quad (3.138)$$

Recordando que:

$$F(T, \varnothing) = -Te^{-f\varnothing} + \varphi(\varnothing), \quad (3.139)$$

resulta,

$$T(\varnothing) = e^{f\varnothing} (\varphi(\varnothing) - C), \quad (3.140)$$

$$T(\varnothing) = -e^{f\varnothing} (jre^{-f\varnothing} sin\varnothing + C), \quad (3.141)$$

$$T(\varnothing) = -jr sin\varnothing - e^{f\varnothing} C. \quad (3.142)$$

Verifiquemos que la Ecuación (3.89) es solución de la Ecuación (3.121). Así, derivando la ecuación

$$T(\varnothing) = e^{f\varnothing} (\varphi(\varnothing) - C), \quad (3.143)$$

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = fe^{f\varnothing} (\varphi(\varnothing) - C) + e^{f\varnothing} \varphi'(\varnothing), \quad (3.144)$$

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = fT(\varnothing) + e^{f\varnothing} \varphi'(\varnothing). \quad (3.145)$$

Recordando que:

$$\varphi'(\varnothing) = jre^{-f\varnothing}(f \sin\varnothing - \cos\varnothing), \quad (3.146)$$

entonces:

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = fT(\varnothing) + e^{f\varnothing} jr e^{-f\varnothing}(f \sin\varnothing - \cos\varnothing), \quad (3.147)$$

$$\frac{dT(\varnothing)}{d\varnothing} = fT(\varnothing) + fjr \sin\varnothing - jr \cos\varnothing, \quad (3.148)$$

$$dT = (fT + fjr \sin\varnothing - jr \cos\varnothing) d\varnothing, \quad (3.149)$$

que resulta ser igual a la Ecuación (3.121), con lo cual, la Ecuación (3.142) es correcta.

Imponiendo las condiciones de borde a la Ecuación (3.142) se determina el valor de la constante C .

$$T(\varnothing) = -jr \sin\varnothing - e^{f\varnothing} C. \quad (3.150)$$

En $\varnothing = \varnothing_1$, la tensión es la previa al ingreso a la curva, $T(\varnothing_1) = T_1$. Evaluando la expresión en $\varnothing = \varnothing_1$, se obtiene:

$$T(\varnothing_1) = -jr \sin\varnothing_1 - e^{f\varnothing_1} C = T_1, \quad (3.151)$$

por tanto,

$$C = (-T_1 - jr \sin\varnothing_1)e^{-f\varnothing_1}. \quad (3.152)$$

Sustituyendo el valor C en la Ecuación (3.142), se obtiene la ecuación de tensiones para curvas verticales descendentes:

$$T(\varnothing) = -jr \sin\varnothing + e^{f(\varnothing_1 - \varnothing)}(T_1 + jr \sin\varnothing_1). \quad (3.153)$$

3.1.9 Curvas Ascendentes Invertidas considerando el Peso del Cable

En este caso se considerará un cable con peso en una curva invertida que se desarrolla en un plano vertical. El sentido de movimiento del cable es ascendente. Nuevamente, se considera una porción diferencial de cable de longitud dL para el análisis. Se obtiene pues el siguiente diagrama de cuerpo libre presentado en la Figura 3.6.

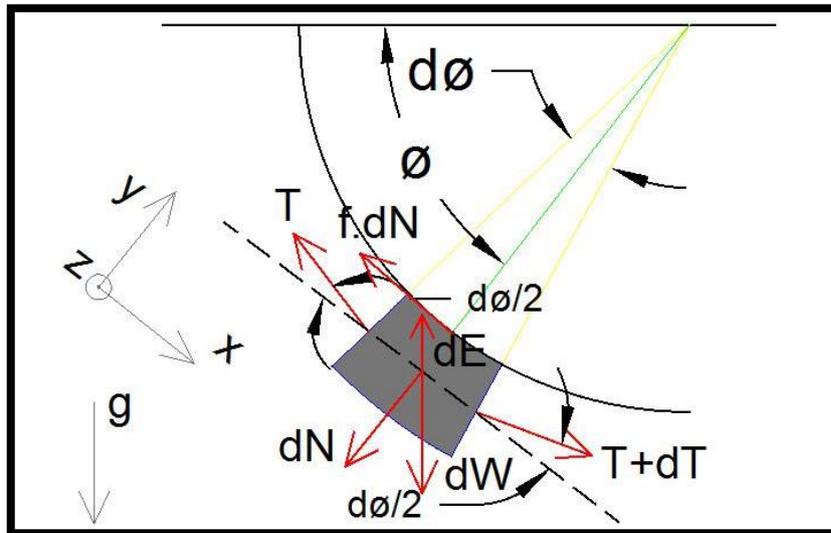


Figura 3.6 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical invertida ascendente con peso propio

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las mismas que para el caso ascendente con peso propio del cable, solo cambian el sentido de las tensiones debido al cambio de movimiento de ascendente a descendente.

Las consideraciones realizadas en la sección 3.1.2 respecto del peso del cable y el empuje, son válidas también en estos casos. De la misma forma, son válidas la Ecuación (3.1) a (3.6). Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x, se obtiene:

$$(T + dT)\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = T\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP\cos\phi + fdN . \quad (3.154)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y, se obtiene:

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = dN + dP\sin\phi . \quad (3.155)$$

Tomando limite cuando $d\phi \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{d\phi \rightarrow 0} \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 1, \quad (3.156)$$

$$d\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \sim \left(\frac{d\phi}{2}\right). \quad (3.157)$$

De la misma forma que se operó en los casos anteriores, se obtiene la ecuación diferencial correspondiente a este caso:

$$dT = (fT - fjr \sin \phi + jr \cos \phi) d\phi. \quad (3.158)$$

La Ecuación (3.158), es la ecuación diferencial que modela las tensiones de un cable con peso en una curva ascendente invertida con un fluido presente. Al igual que los casos anteriores, la ecuación diferencial (3.158) es de la forma

$$S(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3.159)$$

con:

$$S(T, \phi) = -1, \quad (3.160)$$

$$Q(T, \phi) = fT - fjr \sin \phi + jr \cos \phi. \quad (3.161)$$

De la misma manera, se buscan soluciones para:

$$\Gamma(x, y)S(x, y)dx + \Gamma(x, y)Q(x, y)dy = 0, \quad (3.162)$$

obteniendo, con igual procedimiento que para los casos anteriores:

$$\Gamma(\phi) = e^{-f\phi}, \quad (3.163)$$

con lo cual, la ecuación diferencial:

$$-e^{-f\phi}dT + e^{-f\phi}(fT - fjr \sin \phi + jr \cos \phi) d\phi, \quad (3.164)$$

tiene las mismas soluciones que la Ecuación (3.121). La solución de esta ecuación diferencial es una función $F(T, \phi)$ tal que,

$$\frac{dF}{dT} = S, \frac{dF}{d\phi} = Q, \quad (3.165)$$

$$F(T, \phi) = C, \quad (3.166)$$

con C, una constante arbitraria. Para el caso actual:

$$S(T, \phi) = -e^{-f\phi}, \quad (3.167)$$

$$Q(T, \phi) = e^{-f\phi}(fT - fjr \sin \phi + jr \cos \phi). \quad (3.168)$$

Nuevamente,

$$F(T, \phi) = -Te^{-f\phi} + \phi(\phi). \quad (3.169)$$

Igualando $\frac{dF}{d\phi} = Q$, entonces:

$$\phi'(\phi) = jr e^{-f\phi} (\cos \phi - f \sin \phi). \quad (3.170)$$

La Ecuación (3.170), resulta ser solo de signo opuesto a la Ecuación (3.136), ya resuelta, con lo cual utilizamos este resultado previo para determinar $\phi(\phi)$:

$$\phi(\phi) = jr e^{-f\phi} \sin \phi. \quad (3.171)$$

Se verifica, derivando la Ecuación (3.171), respecto de ϕ ,

$$\phi'(\phi) = jr e^{-f\phi} (\cos \phi - f \sin \phi), \quad (3.172)$$

que resulta ser igual a la Ecuación (3.170), con lo cual es solución correcta. Resulta, entonces:

$$T(\phi) = jr \sin \phi + Ce^{f\phi}. \quad (3.173)$$

Verifiquemos que la Ecuación (3.173), es efectivamente solución de la Ecuación (3.158):

$$T(\phi) = e^{f\phi} (\phi(\phi) - C), \quad (3.174)$$

Derivando esta expresión respecto de ϕ , se obtiene:

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = fe^{f\phi} (\phi(\phi) - C) + e^{f\phi} \phi'(\phi), \quad (3.175)$$

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = fT(\phi) + e^{f\phi} \phi'(\phi). \quad (3.176)$$

Recordando que,

$$\phi'(\phi) = jr e^{-f\phi} (\cos \phi - f \sin \phi), \quad (3.177)$$

entonces,

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = fT(\phi) + e^{f\phi} jre^{-f\phi}(\cos \phi - f \sin \phi), \quad (3.178)$$

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = fT(\phi) - fjr \sin \phi + jr \cos \phi, \quad (3.179)$$

$$dT = (fT - fjr \sin \phi + jr \cos \phi) d\phi, \quad (3.180)$$

esta ecuación es igual a la Ecuación (3.158), con lo cual se verifica que la solución a la ecuación diferencial es correcta.

Imponiendo las condiciones de borde a la Ecuación (3.173), se determina el valor de la constante C . Usando la expresión:

$$T(\phi) = jr \sin \phi + e^{f\phi} C. \quad (3.181)$$

En $\phi = \phi_1$, la tensión es la previa al ingreso a la curva, $T(\phi_1) = T_1$. Evaluando la expresión en $\phi = \phi_1$, se obtiene:

$$T(\phi_1) = jr \sin \phi_1 + e^{f\phi_1} C = T_1, \quad (3.182)$$

por tanto,

$$C = (T_1 - jr \sin \phi_1) e^{-f\phi_1}. \quad (3.183)$$

Sustituyendo el valor C en la Ecuación (3.181), se obtiene la ecuación de tensiones para curvas verticales ascendentes invertidas:

$$T(\phi) = jr \sin \phi + (T_1 - jr \sin \phi_1) e^{f(\phi - \phi_1)}. \quad (3.184)$$

3.1.10 Curvas Descendentes Invertidas considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva invertida que se desarrolla en un plano vertical. El sentido de movimiento del cable es descendente. Nuevamente, se considera una porción diferencial de cable de longitud dL , para el análisis. Se obtiene pues, el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 3.7.

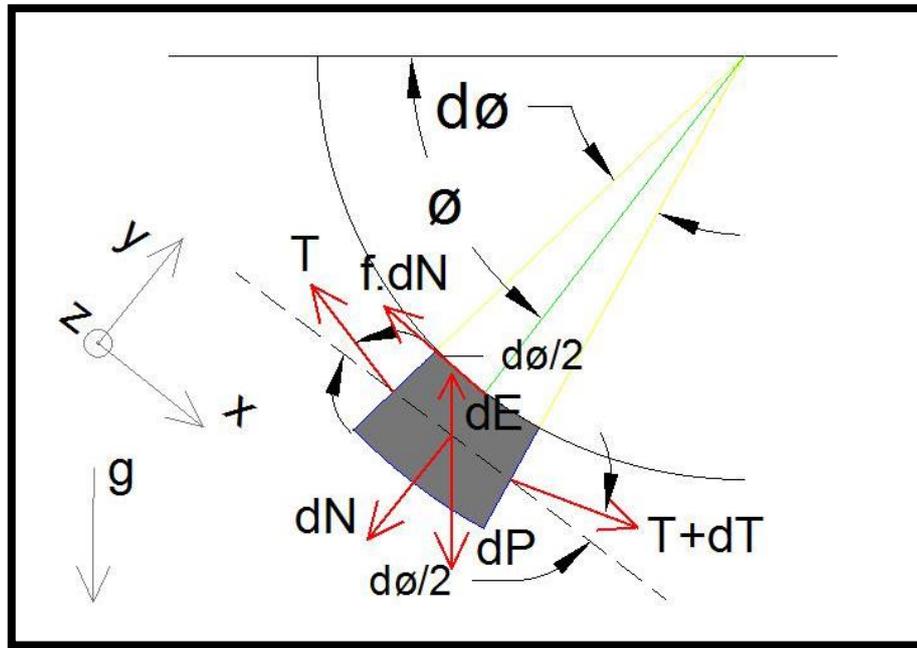


Figura 3.7 Diagrama cuerpo libre cable en curva vertical invertida descendente con peso propio

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las mismas que para los casos anteriores, solo cambian el sentido de las tensiones debido al cambio de movimiento. Las consideraciones realizadas en la sección 3.1.2 respecto del peso del cable y el empuje, son válidas también en estos casos. De la misma forma, son válidas la Ecuación (3.1) a la Ecuación (3.6).

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x , se obtiene:

$$(T + dT) \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP \cos \phi = T \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + f dN . \quad (3.185)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y , se obtiene:

$$(T + dT) \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = dN + dP \sin \phi . \quad (3.186)$$

Tomando límite cuando $d\phi \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{d\phi \rightarrow 0} \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 1, \quad (3.187)$$

$$d\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \sim \left(\frac{d\phi}{2}\right). \quad (3.188)$$

De la misma forma que se operó en los casos anteriores, se obtiene la ecuación diferencial:

$$dT = (fT - fjr \sin \phi - jr \cos \phi) d\phi . \quad (3.189)$$

La Ecuación (3.189), es la ecuación diferencial que modela las tensiones de un cable con peso en una curva descendente invertida con un fluido presente. De la misma forma que en los casos anteriores, se determina la solución:

$$T(\phi) = e^{f\phi}C - jr \sin\phi. \quad (3.190)$$

Verifiquemos que la Ecuación (3.190), es efectivamente solución de la Ecuación (3.189):

Derivando la solución respecto de ϕ , se obtiene:

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = fCe^{f\phi} - jr \cos\phi. \quad (3.191)$$

A la expresión anterior se suma y resta el término: $fjr \sin\phi$, con lo cual resulta,

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = fCe^{f\phi} - jr \cos\phi + fjr \sin\phi - fjr \sin\phi. \quad (3.192)$$

Agrupando los términos resulta:

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = f(Ce^{f\phi} + jr \sin\phi) - jr \cos\phi - fjr \sin\phi. \quad (3.193)$$

Recordando que,

$$T(\phi) = e^{f\phi}C - jr \sin\phi, \quad (3.194)$$

entonces:

$$\frac{dT(\phi)}{d\phi} = fT(\phi) - fjr \sin\phi - jr \cos\phi, \quad (3.195)$$

$$dT = (fT - fjr \sin\phi - jr \cos\phi) d\phi. \quad (3.196)$$

Esta ecuación resulta ser igual a la Ecuación (3.189), con lo cual, la solución expresada en la Ecuación (3.190) es correcta. De la misma manera que en casos anteriores, imponiendo las condiciones de borde a la ecuación se determina la constante C y en consecuencia la expresión completa de la tensión,

$$T(\phi) = e^{f(\phi-\phi_1)}(T_1 + jr \sin\phi_1) - jr \sin\phi, \quad (3.197)$$

es la ecuación de tensiones para curvas verticales descendentes invertidas.

3.1.11 Curvas Planas considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva que se desarrolla en un plano horizontal. A diferencia de los casos anteriores, en esta situación el peso del cable no está en el mismo plano que las tensiones del cable y las normales correspondientes.

Nuevamente, se considera una porción diferencial de cable de longitud dL para el análisis. Se obtiene pues, los siguientes diagramas de cuerpo libre presentados en las Figuras 3.8 y 3.9.

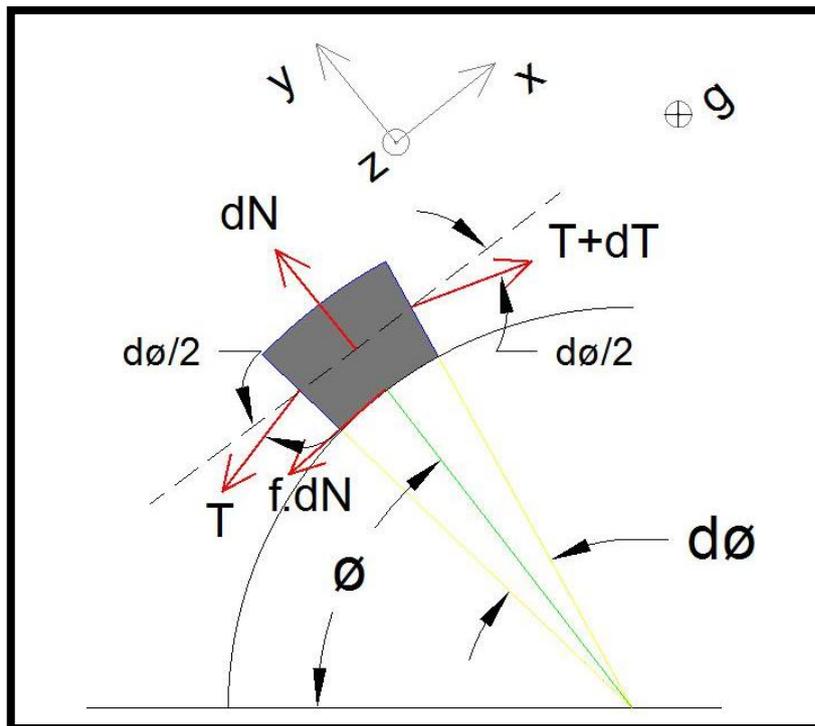


Figura 3.8 Diagrama cuerpo libre curva plana con peso propio. Vista en planta.

A diferencia de las posiciones verticales, la presencia del peso desplaza la posición del cable un ángulo α respecto de la horizontal.

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las mismas que en anteriores casos. Las consideraciones realizadas en la sección 3.1.2 respecto del peso del cable y el empuje son válidas también en estos casos. De la misma forma son válidas la Ecuación (3.1) a (3.6).

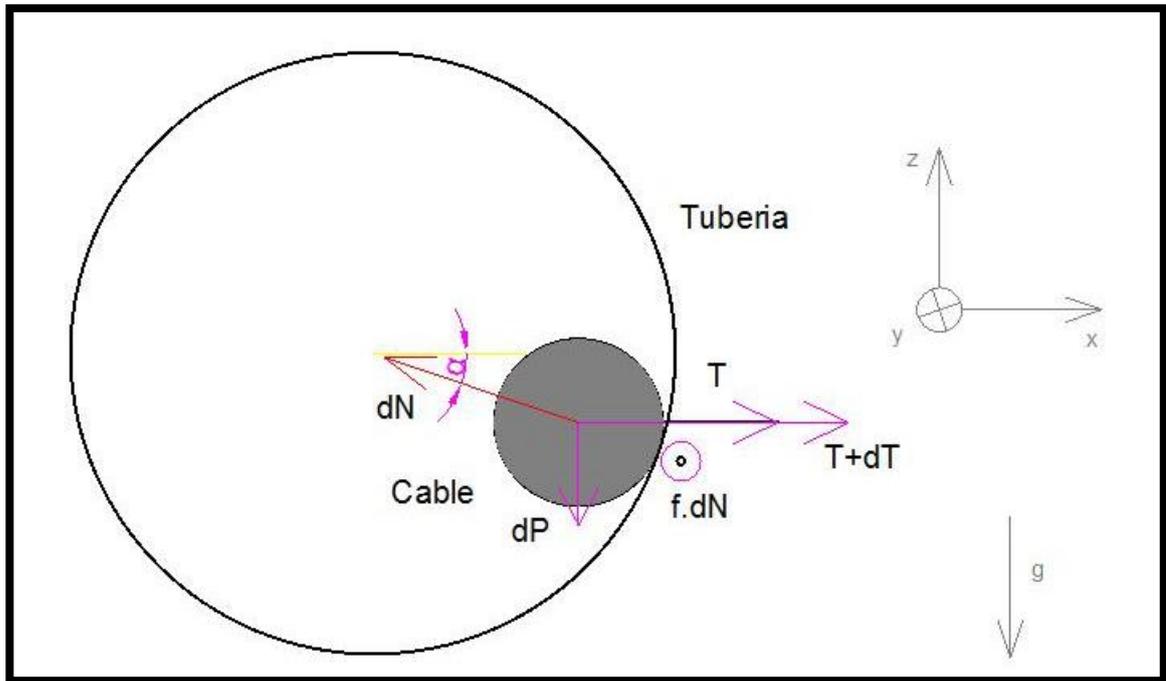


Figura 3.9 Diagrama cuerpo libre curva plana con peso propio. Vista en corte.

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y , se obtiene:

$$(T + dT) \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = T \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + f dN. \quad (3.198)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x , se obtiene:

$$(T + dT) \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = dN \cos \alpha. \quad (3.199)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje z , se obtiene:

$$dP = dN \sin \alpha. \quad (3.200)$$

Tomando límite cuando $d\phi \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{d\phi \rightarrow 0} \cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 1, \quad (3.201)$$

$$d\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \sim \left(\frac{d\phi}{2}\right), \quad (3.202)$$

Despreciado el término $dT d\phi$, se obtiene:

$$dT = f dN, \quad (3.203)$$

$$T d\phi = dN \cos \alpha. \quad (3.204)$$

Operando con la Ecuación (3.200) y Ecuación (3.204), se obtiene:

$$\frac{dP}{d\phi} = \frac{dN \sin \alpha}{dN \cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{fr}{T}. \quad (3.205)$$

Operando con la Ecuación (3.203) y la Ecuación (3.204), se obtiene:

$$T d\phi = \frac{dT}{f} \cos \alpha, \quad (3.206)$$

$$f d\phi = \frac{dT}{T} \cos \alpha. \quad (3.207)$$

Por otro lado,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{jr}{T}, \quad (3.208)$$

resulta,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{j^2 r^2}{T^2}}}. \quad (3.209)$$

Sustituyendo esta expresión en la Ecuación (3.207), se obtiene:

$$f d\phi = \frac{dT}{T \sqrt{1+\frac{j^2 r^2}{T^2}}}. \quad (3.210)$$

La Ecuación (3.210), es la ecuación diferencial que modela las tensiones de un cable con peso en una curva plana con un fluido presente.

Nuevamente, esta ecuación diferencial es del tipo explícita de primer orden de variables separables con lo cual se resuelve por integración directa de ambos lados de la ecuación [Varona, 1996].

Para resolver la parte derecha de la ecuación realizamos el cambio de variable:

$$x = \frac{jr}{T}, \quad \frac{dx}{dT} = -\frac{jr}{T^2}, \quad (3.211)$$

con lo cual la Ecuación (3.210), se transforma en:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} f d\phi = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T \sqrt{1+\frac{j^2 r^2}{T^2}}} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}. \quad (3.212)$$

Resolviendo,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}, \quad (3.213)$$

deshaciendo el cambio de variable resulta:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T \sqrt{1+\frac{j^2 r^2}{T^2}}} = \ln \frac{T}{jr} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T^2}} \right) \Big|_{T_1}^{T_2}. \quad (3.214)$$

Aplicando propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T^2}}} = \ln \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_2^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_1^2}}} \right). \quad (3.215)$$

Por otro lado, integrando la parte izquierda de la Ecuación (3.210), se obtiene:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} f d\phi = f\theta, \text{ con } \theta = \phi_2 - \phi_1, \quad (3.216)$$

Con lo cual, resulta:

$$f\theta = \ln \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_2^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_1^2}}} \right). \quad (3.217)$$

Realizando la exponencial en base e de ambos lados de la Ecuación (3.217), se obtiene:

$$e^{f\theta} = \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_2^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_1^2}}} \right), \quad (3.218)$$

con lo cual:

$$T_2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_2^2}} \right) = e^{f\theta} T_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_1^2}} \right) = C, \quad (3.219)$$

operando se obtiene:

$$T_2 = \frac{C^2 - j^2 r^2}{2C} \text{ con } C = e^{f\theta} T_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_1^2}} \right), \quad (3.220)$$

Que es la ecuación de tensiones para curvas planas con peso propio.

3.1.12 Curva Ascendente Plano Inclinado considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva que se desarrolla en un plano inclinado respecto de la vertical. El sentido de movimiento del cable es ascendente. Nuevamente, se considera una porción diferencial de cable de longitud dL para el análisis. Se obtiene pues, el siguiente diagrama de cuerpo libre presentado en la Figura 3.10:

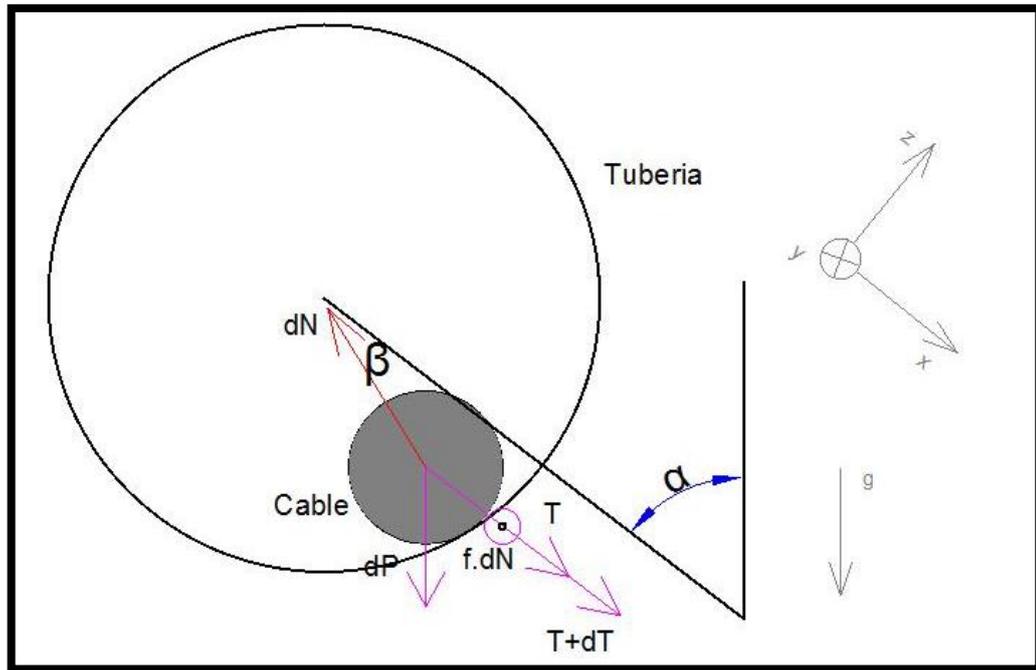


Figura 3.10 Diagrama cuerpo libre curva vertical inclina con peso propio. Vista en corte.

Consideramos en este caso, que el plano donde se desarrolla la curva de la tubería forma un ángulo cualquiera α respecto de la vertical.

Consideremos ahora, que la posición del cable respecto del plano de la curva forma un ángulo β respecto de la misma.

Las fuerzas actuantes en la porción de cable son las mismas que para los anteriores casos. Las consideraciones realizadas en 3.1.2 respecto del peso del cable y el empuje, son válidas también en estos casos. De la misma forma, son válidas la Ecuación (3.1) a la Ecuación (3.6).

Ambas fuerzas, T y $T+dT$, tienen la dirección del plano de la curva.

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x , se obtiene:

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP\cos\alpha = dN\cos\beta. \quad (3.221)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje z , se obtiene:

$$dP\sin\alpha = dN\sin\beta. \quad (3.222)$$

Tomando límite cuando $d\phi \rightarrow 0$, entonces:

$$d\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \sim \left(\frac{d\phi}{2}\right). \quad (3.223)$$

Despreciado el término $dT d\phi$, se obtiene:

$$Td\phi + dP \cos \alpha = dN \cos \beta . \quad (3.224)$$

Realizando el cociente entre la Ecuación (3.222) y la Ecuación (3.224), se obtiene:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dP \sin \alpha}{Td\theta + dP \cos \alpha} , \quad (3.225)$$

como $dP = jr d\theta$, entonces:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{jr \sin \alpha}{T + jr \cos \alpha} . \quad (3.226)$$

Los valores de tensiones T , involucrados son significativamente mayores al producto de jr , es decir, $T \gg jr$, con lo cual, es posible realizar la aproximación $\beta \cong 0$. Con esta aproximación realizada, el diagrama de cuerpo libre resultante es el presentado en las Figuras 3.11 y 3.12.

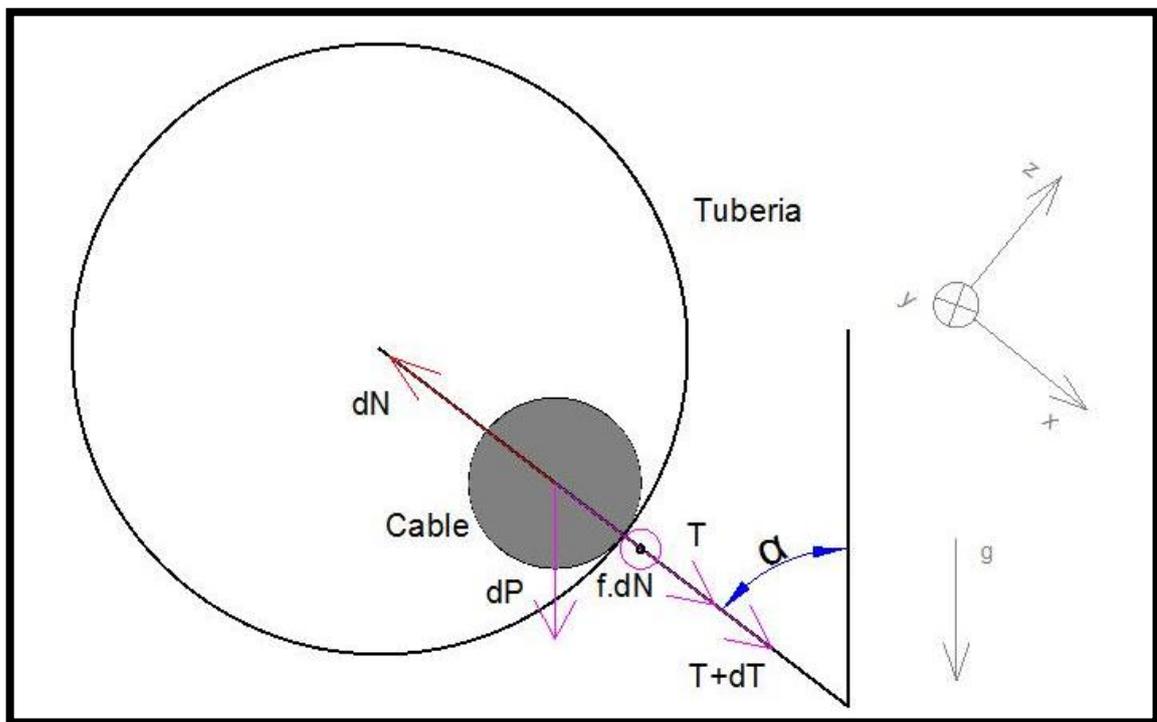


Figura 3.11 Diagrama cuerpo libre curva vertical inclina con peso propio simplificada. Vista en corte

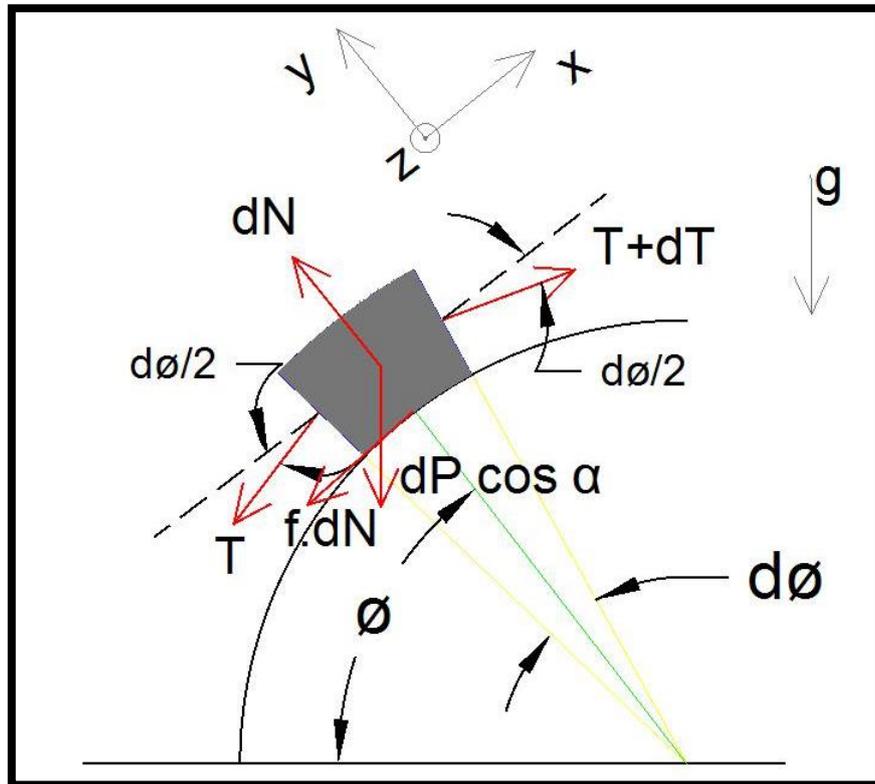


Figura 3.12 Diagrama cuerpo libre curva vertical inclina con peso propio simplificada. Vista en planta

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y, se obtiene:

$$(T + dT)\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = T\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP\cos\alpha\cos\phi + fdN. \quad (3.227)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje x, se obtiene:

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP\cos\alpha\sin\phi = dN. \quad (3.228)$$

La Ecuación (3.227) y Ecuación (3.228), son las mismas ecuaciones que las correspondientes al caso de curva vertical ascendente, donde el factor correspondiente al peso del cable esta multiplicado por un factor constante ($\cos\alpha$) que contempla la inclinación de la curva (α) respecto de la horizontal.

La solución pues, será la misma solución que para el caso de curva vertical ascendente con el correspondiente factor:

$$T(\phi) = \frac{jr\cos\alpha}{1+f^2}(\sin\phi - 2f\cos\phi - f^2\sin\phi) + e^{f(\phi-\phi_1)}\left(T_1 - \frac{jr\cos\alpha}{1+f^2}(\sin\phi_1 - 2f\cos\phi_1 - f^2\sin\phi_1)\right), \quad (3.229)$$

Que es la ecuación de tensiones para una curva vertical con movimiento ascendente inclinada un ángulo α respecto de la vertical.

3.1.13 Curva Descendente Plano Inclinado considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva que se desarrolla en un plano inclinado de la vertical. El sentido de movimiento del cable es descendente. Las consideraciones realizadas para el caso de curva ascendente vertical inclinada son igualmente válidas para este caso también.

De igual manera que en el caso anterior, son las mismas ecuaciones que las correspondientes al caso de curva vertical descendente, donde el factor correspondiente al peso del cable esta multiplicado por un factor constante ($\cos \alpha$) que contempla la inclinación de la curva (α) respecto de la horizontal. Consecuentemente, la ecuación solución es la correspondiente a la del caso de curva descendente con el factor de corrección:

$$T(\phi) = -jr \cos \alpha \sin \phi + e^{f(\phi_1 - \phi)}(T_1 + jr \cos \alpha \sin \phi_1), \quad (3.230)$$

Que es la ecuación de tensiones para una curva vertical con movimiento descendente, inclinada un ángulo α respecto de la vertical.

3.1.14 Curvas Ascendentes Invertidas Plano Inclinado considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva que se desarrolla en un plano inclinado de la vertical. La curva es invertida y el sentido de movimiento del cable es descendente. Nuevamente, se considera una porción diferencial de cable de longitud dL para el análisis. Se obtiene entonces el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 3.13.

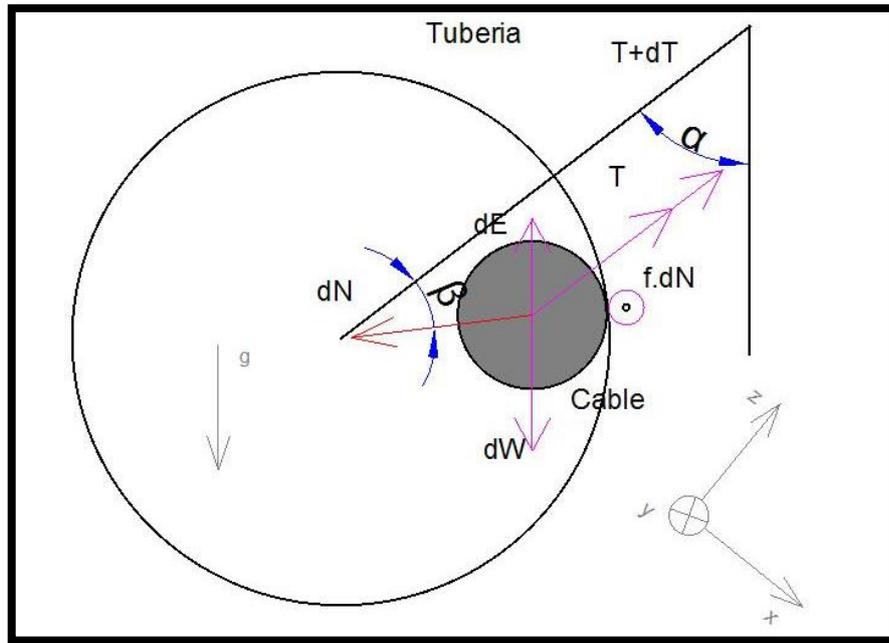


Figura 3.13 Diagrama cuerpo libre curva vertical invertida inclina con peso propio. Vista en corte.

Las mismas consideraciones realizadas en la sección 3.3.7, respecto del ángulo β , son también válidas para esta situación. Por tanto, despreciando el ángulo β se obtiene el diagrama de cuerpo libre simplificado presentado en la Figura 3.14:

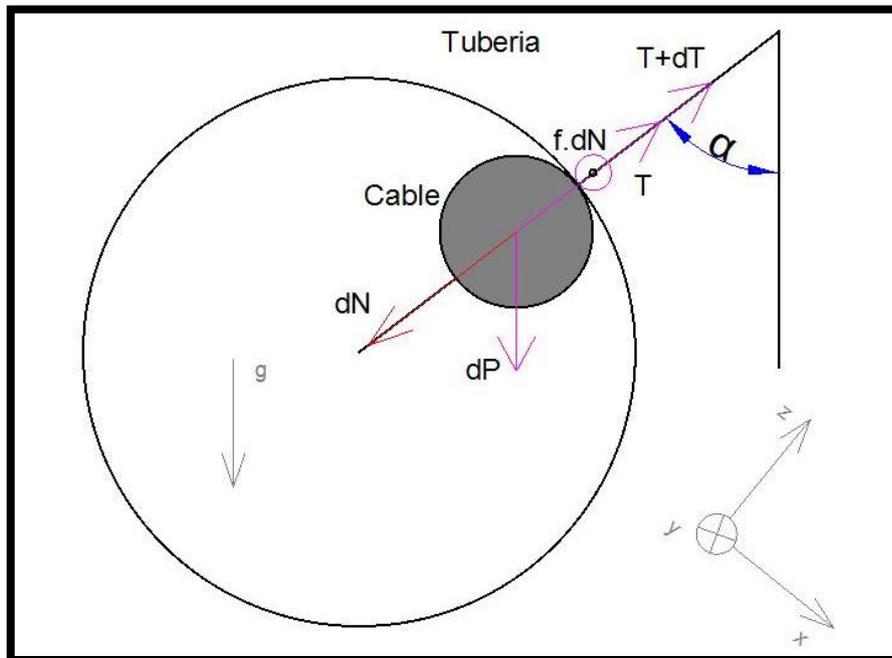


Figura 3.14 Diagrama cuerpo libre curva vertical invertida inclina simplificada con peso propio. Vista en corte.

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje z, se obtiene:

$$(T + dT)\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) = T\cos\left(\frac{d\phi}{2}\right) + dP\cos\alpha\cos\phi + fdN. \quad (3.231)$$

Planteando equilibrio de fuerzas según el eje y, se obtiene:

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = dN + dP\sin\phi. \quad (3.232)$$

Las Ecuaciones (3.125) y (3.126), son las mismas que las correspondientes al caso de curva vertical ascendente invertida, donde el factor correspondiente al peso del cable esta multiplicado por un factor constante ($\cos\alpha$) que contempla la inclinación de la curva (α) respecto de la horizontal.

La solución pues, será la misma solución que para el caso de curva vertical invertida ascendente con el correspondiente factor:

$$T(\phi) = jr\cos\alpha\sin\phi + (T_1 - jr\cos\alpha\sin\phi_1)e^{f(\phi-\phi_1)}, \quad (3.233)$$

Que es la ecuación de tensiones en una curva vertical ascendente invertida inclinada.

3.1.15 Curvas Descendentes Invertidas Plano Inclinado considerando el Peso del Cable

En este caso, se considerará un cable con peso en una curva invertida que se desarrolla en un plano inclinado de la vertical. El sentido de movimiento del cable es descendente. Las consideraciones realizadas para el caso de curva ascendente invertida inclinada son igualmente válidas para este caso también.

De igual manera, son las mismas ecuaciones que las correspondientes al caso de curva vertical invertida descendente, donde el factor correspondiente al peso del cable esta multiplicado por un factor constante ($\cos\alpha$) que contempla la inclinación de la curva (α) respecto de la horizontal.

Consecuentemente la ecuación solución es la correspondiente a la del caso de curva descendente invertida con el factor de corrección:

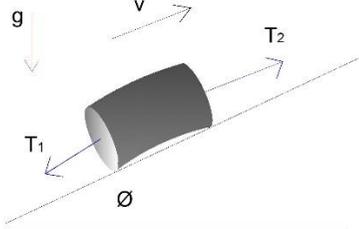
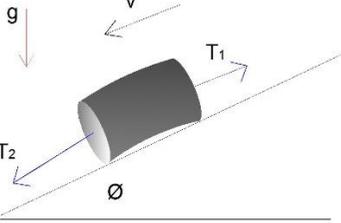
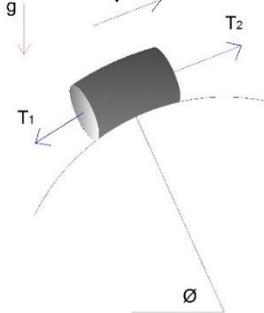
$$T(\phi) = e^{f(\phi-\phi_1)}(T_1 + jr\cos\alpha\sin\phi_1) - jr\cos\alpha\sin\phi, \quad (3.234)$$

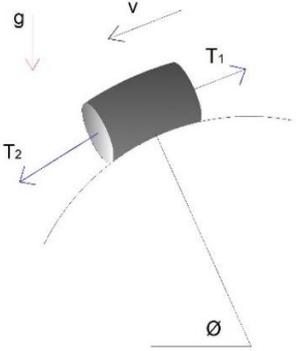
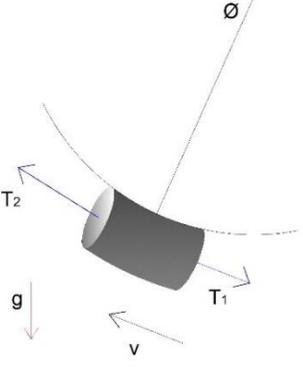
Que es la ecuación de tensiones para curvas descendentes invertidas inclinada.

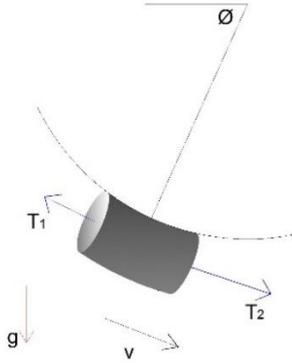
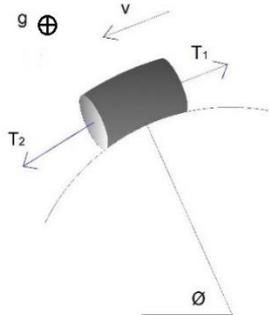
Quedaron así expresadas todas las ecuaciones de tensiones de tramos rectos y curvas en cualquier configuración posible.

En la Tabla 3.1 se muestra un resumen de estos casos y sus correspondientes ecuaciones.

1 Tabla 3.1 Resumen de las geometrías tratadas con sus correspondientes ecuaciones

Tipo de Geometría	Representación Gráfica	Ecuación de Tensiones Correspondiente
Tramo recto ascendente		$T_2 = T_1 + jl(f \cos \phi + \sin \phi)$
Tramo recto descendente		$T_2 = T_1 + jl(f \cos \phi - \sin \phi)$
Curva ascendente plano inclinado considerando peso del cable		$T(\phi) = \frac{jr \cos \alpha}{1 + f^2} (\sin \phi - 2f \cos \phi - f^2 \sin \phi) + e^{f(\phi - \phi_1)} (T_1 - \frac{jr \cos \alpha}{1 + f^2} (\sin \phi_1 - 2f \cos \phi_1 - f^2 \sin \phi_1))$

<p>Curva descendente plano inclinado considerando peso del cable</p>		$T(\phi) = -jr \cos \alpha \sin \phi + e^{f(\phi_1 - \phi)} (T_1 + jr \cos \alpha \sin \phi_1)$
<p>Curva ascendente invertida plano inclinado considerando peso del cable</p>		$T(\phi) = jr \cos \alpha \sin \phi + (T_1 - jr \cos \alpha \sin \phi_1) e^{f(\phi - \phi_1)}$

<p>Curva descendente invertida plano inclinado considerando peso del cable</p>		$T(\phi) = e^{f(\phi-\phi_1)}(T_1 + jr \cos \alpha \sin \phi_1) - jr \cos \alpha \sin \phi$
<p>Curva plana considerando peso del cable</p>		$T_2 = \frac{C^2 - j^2 r^2}{2C} \text{ con } C = e^{f\theta} T_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T_1^2}} \right)$

- 2 f : Coeficiente de fricción.
3 r : Radio de curvatura.
4 $T(\phi)$: Es la tensión del cable en el ángulo ϕ .
5 T_1 : Tensión de entrada a recta o curva.
6 θ : Ángulo de desarrollo de la curva plana.

- ϕ_1 : Ángulo respecto de la horizontal del comienzo de la curva.
 ϕ : Ángulo respecto de la horizontal.
 α : Ángulo del plano de la curva respecto del plano horizontal.
 T_2 : Tensión de salida de recta o curva.

3.2 Evaluación de la Consideración del Modelo con Peso Versus el Modelo Tradicional

En esta sección, se realizará una evaluación comparativa entre el modelo desarrollado que considera el peso propio del cable, y el modelo usual para cálculo de tensiones en tramos curvos.

Para visualizar la influencia del peso propio del cable, utilizaremos el caso y la ecuación de tensiones correspondiente a curva ascendente, esto es, el caso desarrollado en 3.1.7 y la Ecuación (3.110).

3.2.1 Influencia de la Tensión de Ingreso a Curva

Veremos, en este caso, como es la evolución de la influencia del peso propio a medida que, aumentamos los valores de la tensión de entrada a la curva.

Consideraremos nombrar como TSP , a la tensión de salida de curva considerando el modelo con peso propio y TS a la tensión de salida de la misma curva, pero considerando el modelo tradicional, evaluaremos entonces el comportamiento del cociente TSP/TS . En la Figura 3.15 se muestra la evolución del cociente TSP/TS a medida que la tensión de ingreso a curva aumenta. La tensión de ingreso a curva es normalizada dividiendo por el peso del cable en la misma curva. Esta evolución, es evaluada también para distintos valores de radios de curva.

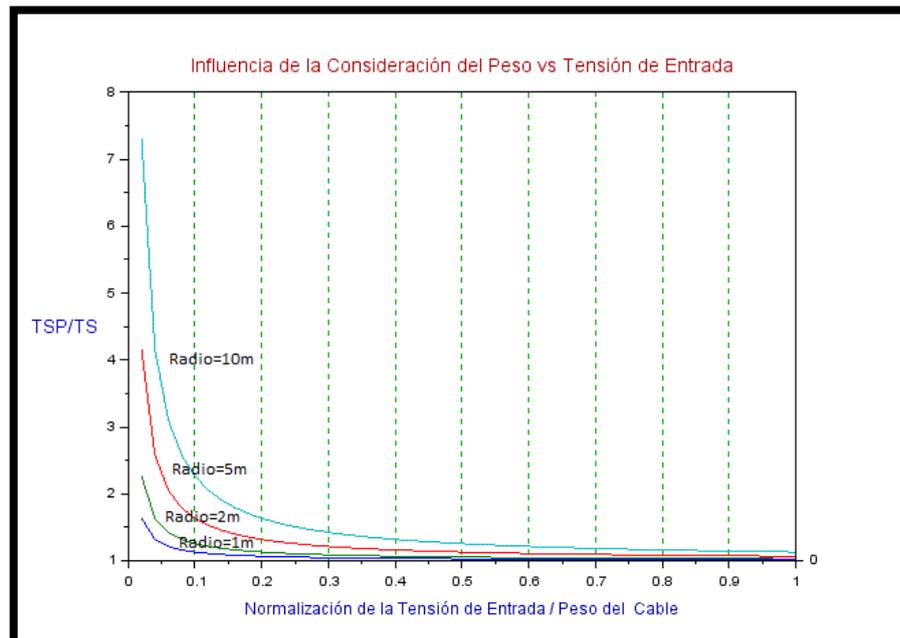


Figura 3.15 Influencia de la consideración del peso vs tensión de entrada para diferentes radios de curvatura.

En la Figura 3.15 se tiene: ángulo de curva $\Theta=90^\circ$, densidad de fluido $\rho =800 \text{ kg/m}^3$, diámetro de cable $d=25 \text{ mm}$, coeficiente de fricción $\mu=0.2$, $TSP=$ Tensión de salida de curva considerando el peso propio del cable y $TS=$ Tensión de salida de curva sin consideración del peso propio.

Por intermedio de la Figura 3.15 es posible afirmar que hay una muy marcada influencia del peso propio del cable para bajas tensiones de entrada a la curva y altos radio de curvatura. Para estos casos, el valor de tensión considerando el peso del cable, fácilmente puede duplicar el valor hallado mediante el modelo tradicional. La influencia del peso decae rápidamente a medida que la tensión de entrada aumenta, acercándose al modelo de cable sin peso por encima de algunos centenares de Newtons de tensión de entrada.

3.2.2 Influencia del Peso Propio del Cable

En este caso, veremos la evolución del efecto del peso propio del cable en función del peso específico del cable. Esto es, como se afectan los valores de tensión para distintos pesos específicos del cable.

Al igual que en el análisis anterior, TSP es la tensión de salida de curva considerando el modelo con peso propio y TS la tensión de salida de la misma curva, pero sin considerar el peso. Evaluaremos el comportamiento del cociente TSP/TS mediante la Figura 3.16. En la misma se presenta gráficamente el comportamiento del cociente TSP/TS como función del peso por unidad de longitud del mismo. Este comportamiento es evaluado a distintas tensiones de ingreso a curva.

Se observa en la gráfica que, para determinada tensión, la influencia del peso del cable es lineal con el aumento del peso específico del mismo. Nuevamente, la influencia relativa de este término, decae marcadamente a medida que la tensión del cable aumenta. Para cables con cierta envergadura y con tensiones bajas, las fuerzas de tracción son claramente influenciadas por el peso.

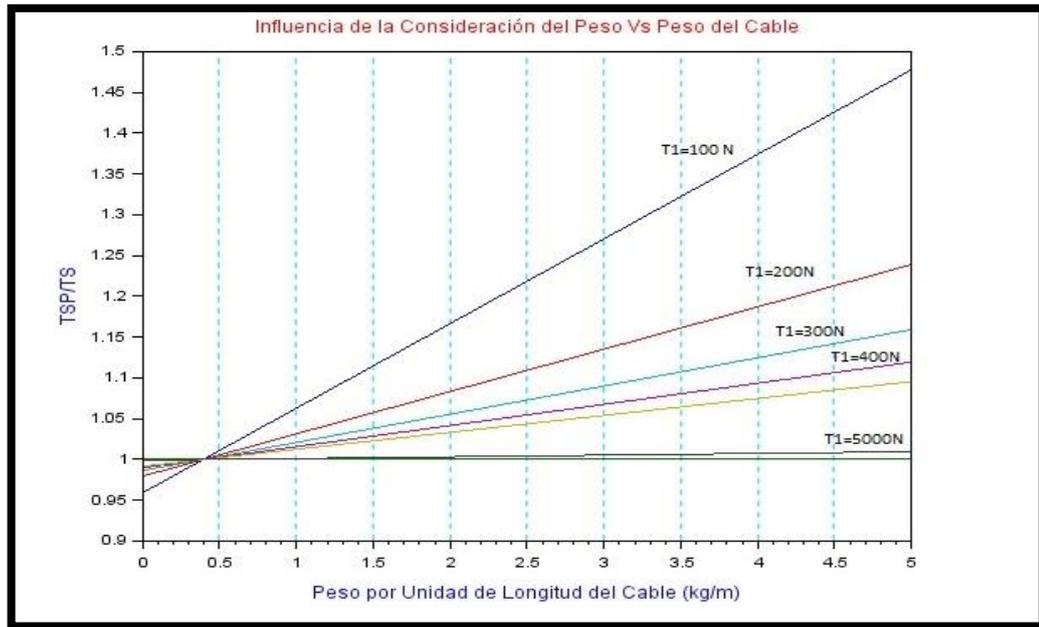


Figura 3.16 Influencia de la consideración del peso vs peso específico del cable para distintas tensiones de entrada a curva.

En la Figura 3.16 se tiene: ángulo de curva $\Theta=90^\circ$, densidad de fluido $\rho=800 \text{ kg/m}^3$, diámetro de cable $d=25 \text{ mm}$, coeficiente de fricción $\mu=0.2$, radio de curva $r=1 \text{ m}$, TSP= Tensión de salida de curva considerando el peso propio del cable y TS= Tensión de salida de curva sin consideración del peso propio.

Existe un valor específico de peso por unidad de longitud del cable que, independientemente de la tensión, no altera los valores de tensión de tracción respecto del modelo tradicional. Este peso específico es el que hace que la fuerza de peso iguale al empuje dado por el fluido, con lo cual, justamente, en el medio líquido circundante el cable está en equilibrio.

Cabe observar que, para valores de peso específico del cable menores a las de equilibrio la influencia del peso tiende a reducir las tensiones de salida en comparación con el modelo tradicional. Esto es así dado que estamos en un caso de curva ascendente, donde el peso tiende a influir en el mismo sentido que la tensión del cable. Para casos de curvas invertidas sucederá el efecto contrario.

3.2.3 Influencia del Radio de Curvatura de la Curva

Para este caso, se verá el efecto del peso propio como función del radio de curvatura presente en la curva. Al igual que en los casos anteriores TSP y TS conservan los significados ya vistos. La influencia del radio de curvatura será evaluada para distintas tensiones de ingreso como se muestra en la Figura 3.17.

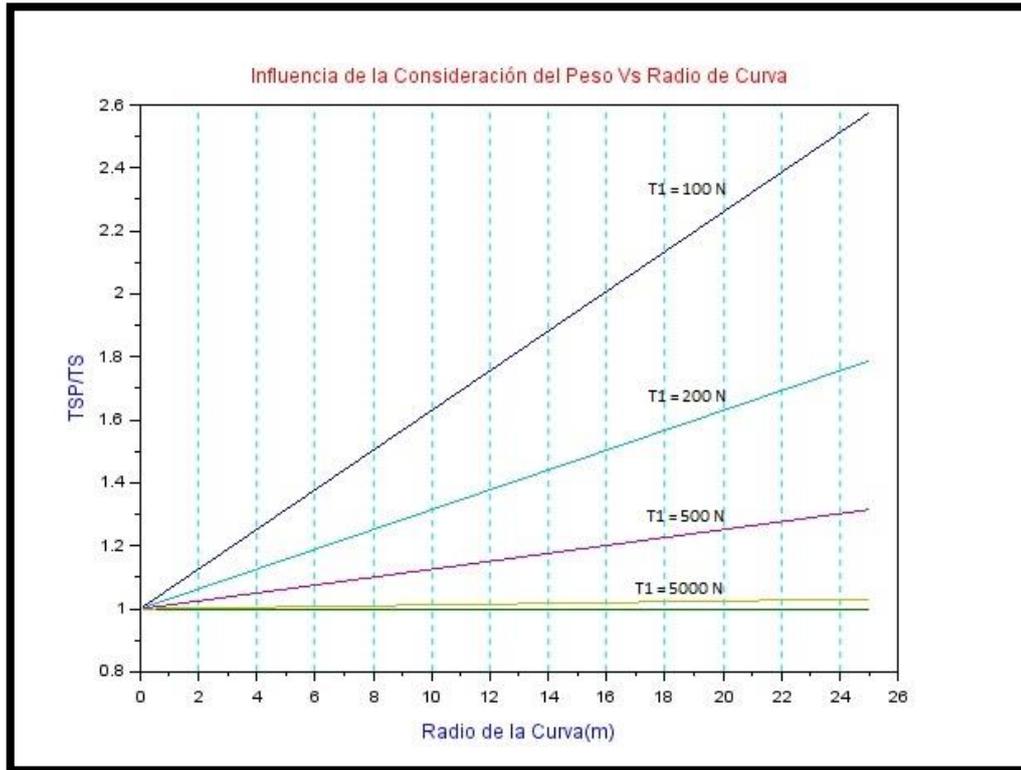


Figura 3.17 Influencia de la consideración del peso vs radio de la curva para distintas tensiones de entrada a curva.

En la Figura 3.17 se tiene: ángulo de curva $\Theta=90^\circ$, densidad de fluido $\rho=800 \text{ kg/m}^3$, diámetro de cable $d=25 \text{ mm}$, coeficiente de fricción $\mu=0.2$, TSP = Tensión de salida de curva considerando el peso propio del cable y TS = Tensión de salida de curva sin consideración del peso propio.

La Figura 3.17 muestra claramente que, al igual que para el peso del cable, para el radio de curva también se observa el comportamiento lineal del cociente TSP/TS . Nuevamente, la influencia decae marcadamente a medida que la tensión del cable aumenta. El comportamiento sigue la lógica de que, para curvas con grandes radios, la longitud del arco de curva es también grande, con lo cual, el término relacionado con el peso propio tiene una relevancia mayor que para curvas de radio pequeños.

3.2.4 Influencia del Diámetro del Cable

Finalmente evaluaremos la influencia del peso propio como función del diámetro de cable, visualizaremos este efecto para distintas tensiones de entrada a la curva. TSP y TS conservan los anteriores significados. En la Figura 3.18 se presenta en forma gráfica el cociente TSP/TS como función del diámetro de cable. Son presentadas distintas curvas dadas por distintos valores de tensión de entrada.

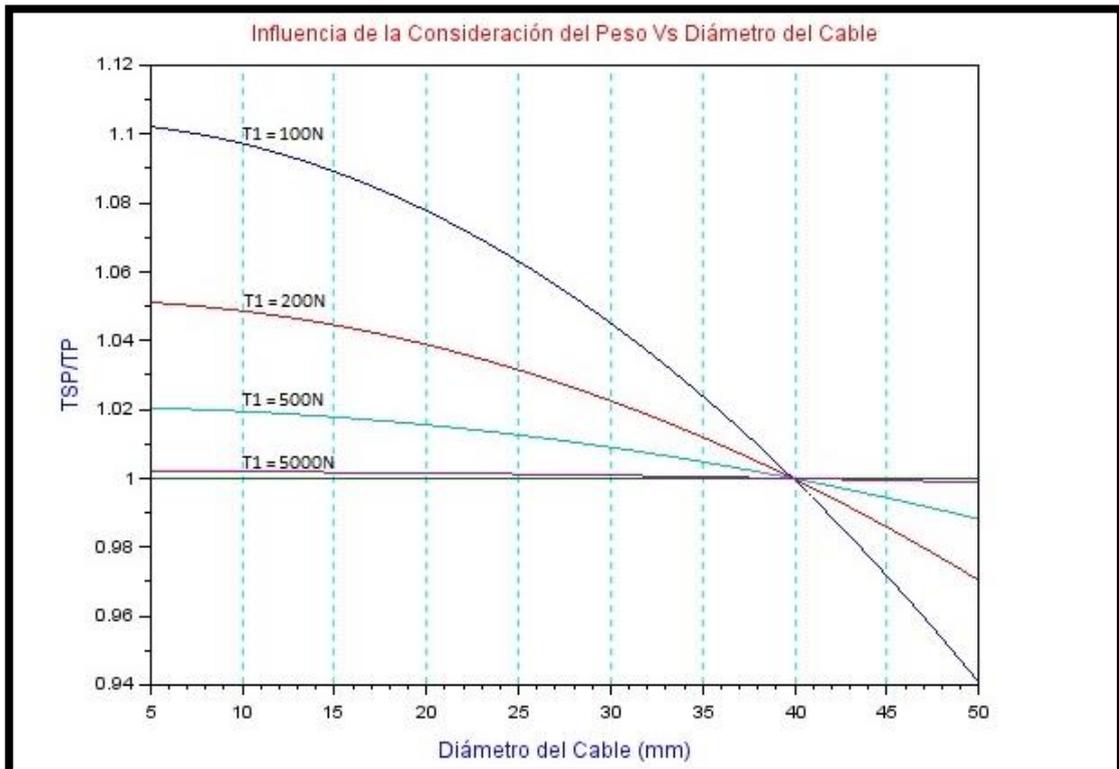


Figura 3.18 Influencia de la consideración del peso vs diámetro de cable para distintas tensiones de entrada a curva.

En la Figura 3.18 se tiene: ángulo de curva $\Theta=90^\circ$, densidad de fluido $\rho =800 \text{ kg/m}^3$, coeficiente de fricción $\mu=0.2$, radio de curva $r=1\text{m}$, $TSP=$ Tensión de salida de curva considerando el peso propio del cable y $TS=$ Tensión de salida de curva sin consideración del peso propio.

Aquí también, mediante la Figura 3.18 es posible verificar que el aumento del diámetro del cable tiene un efecto directo en la relación de las fuerzas de peso del cable y empuje del fluido sobre él. Por tanto, al igual que para el peso específico del cable, existe un valor de diámetro que anula las fuerzas relacionadas al peso, en cuyo caso la relación TSP/TP

toma el valor 1, independientemente de la tensión de entrada a curva. Nuevamente, el efecto del peso cae rápidamente al aumentar el valor de tensiones de entrada.

Al igual que para lo que sucede con el peso específico del cable, aquí también se observa que, para valores de diámetro de cable mayores a las de equilibrio, la influencia del peso tiende a reducir las tensiones de salida en comparación con el modelo tradicional. Sucederá la situación contraria para casos de curvas invertidas.

4 EFECTO DE LA FLEXIÓN

Comparaciones realizadas entre los valores reales de tensión de instalación y las predichas por los modelos que asumen un cable perfectamente flexible arrojaron diferencias de más del 100% [Iordanescu, Tamowski, 1996].

Diversos efectos serían los responsables de esta diferencia y que resultan en el aumento de las tensiones predichas por el modelo clásico expuesto por Rifenburg, 1953. Según Iordanescu y Tamowski, 1996, los efectos son los siguientes:

Efecto 1: La trayectoria adoptada por un cable rígido dentro de una tubería es diferente de la que toma un cable perfectamente flexible en la misma tubería. Esto es, un cable rígido a medida que entra o sale de la curva la resistencia a la flexión del cable aleja al mismo del intradós de la curva llevándolo hacia el extradós. Esto genera puntos adicionales de contacto lateral del cable contra la tubería y por consiguiente aumento de la fuerza de fricción.

Efecto 2: Fenómenos de histéresis del cable cuando el mismo pasa a través de sucesiones de curvas dentro de la tubería. Estos fenómenos vienen dados por la característica no lineal del momento de flexión del cable en función de la curvatura. Los sucesivos ciclos de carga-descarga a los que se ve sometido el cable, cuando atraviesa curvas y contra-curvas, provoca pérdidas internas de energía mecánica que deben ser compensados con mayor fuerza de tracción del cable.

Efecto 3: Dependiendo de cómo esté conformada la tubería pueden aparecer bordes afilados resultados, por ejemplo, de la soldadura de piezas. Estos bordes aumentan las fuerzas de fricción longitudinal.

Efecto 4: La operación de tracción del cable puede provocar la oscilación del valor de la fuerza debido a que la velocidad de tracción no es constante.

Evaluaciones realizadas indican que los efectos de mayor influencia en los apartamientos de las tensiones frente al modelo de Rifenburg son los efectos 1 y 2 [Fee y Quist, 1991].

Ambos efectos (1 y 2), están asociados al carácter rígido del cable, es por esto que incorporar en el modelo los fenómenos relacionados a la rigidez del cable redundaría en una mejora sustancial del modelo de cálculo de tensiones.

4.1.1 Consideraciones del Modelo

En el desarrollo de las ecuaciones realizadas por Iordanescu y Tamowski, 1996, se toman en consideración ciertas simplificaciones al modelo, las más significativas son:

- a) Los efectos dinámicos se desprecian.
- b) El diagrama de flexión característica del cable es no lineal y puede representarse aproximadamente por una relación bilineal entre el momento de flexión M y la curvatura de flexión C . Tres parámetros definen un diagrama de este tipo: los dos módulos de rigidez a la flexión EI_a y EI_b y el punto de rotura de curvatura C_a . En la Figura 4.1 es presentado el diagrama del momento de flexión como función de la curvatura para un cable típico.

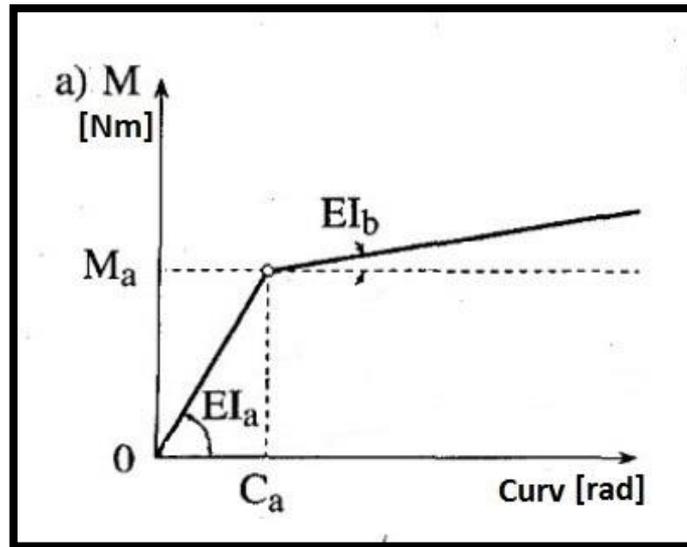


Figura 4.1 Diagrama Momento de Flexión vs curvatura [Fuente: Adaptado de Iordanescu y Tamowski, 1996].

- c) Se considera el modelo de fricción estándar, esto es, la fuerza resultante de la fricción del cable contra las paredes de la tubería responde a la ecuación:

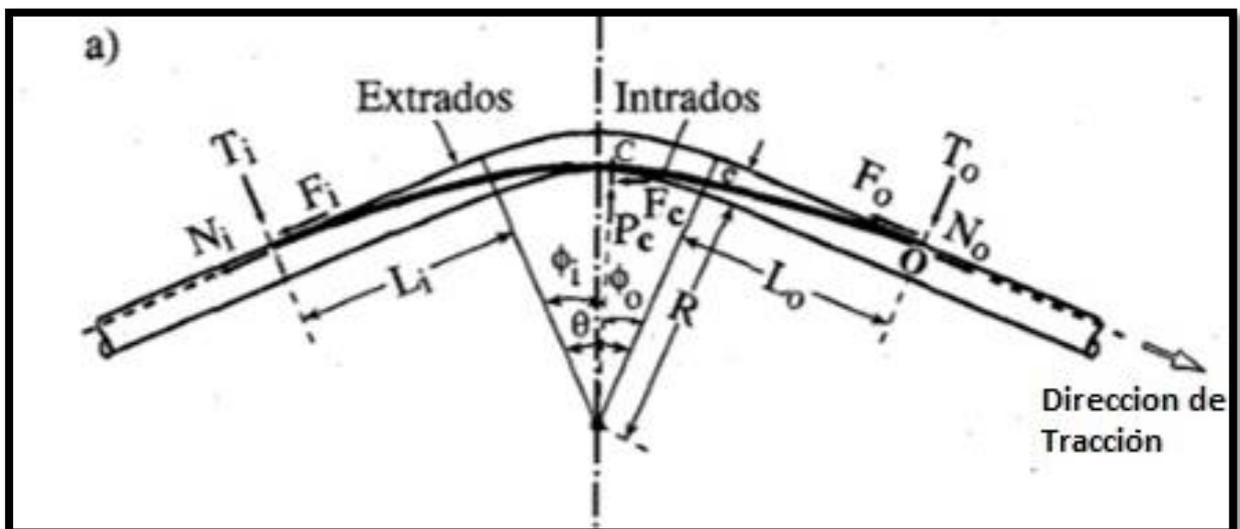
$$Fr = \mu N. \quad (4.1)$$

4.1.2 Tipo de Contactos en las Curvas

Dependiendo de la magnitud de la fuerza de tracción axial en el cable y también de su rigidez a la flexión, dos tipos de contacto se pueden establecer entre el cable y el intradós de la tubería [Iordanescu y Tamowski, 1996]:

- Contacto del cable reducido a un solo punto situado en la parte inferior de la curva. Este tipo de contacto admite que el radio de curvatura del cable sea menor que el radio de curvatura de la tubería. Esta tipología se manifiesta para altas resistencias a la flexión del cable con fuerzas de tensión relativamente baja en el mismo (Figura 4.2 a).
- Contacto mantenido a lo largo de una longitud limitada, este contacto se da en la parte central de la curva a lo largo del intradós de la tubería Figura (4.2 b). Este contacto obliga al cable a tomar una curvatura de flexión más grande que el del caso de contacto en un punto que es constante e igual a la curvatura de la tubería. Esta tipología de contacto está relacionada con una fuerza de tracción relativamente mayor y menor rigidez a la flexión en el cable.

En la Figura 4.2, se presentan las 2 tipologías de contacto presentes en curvas.



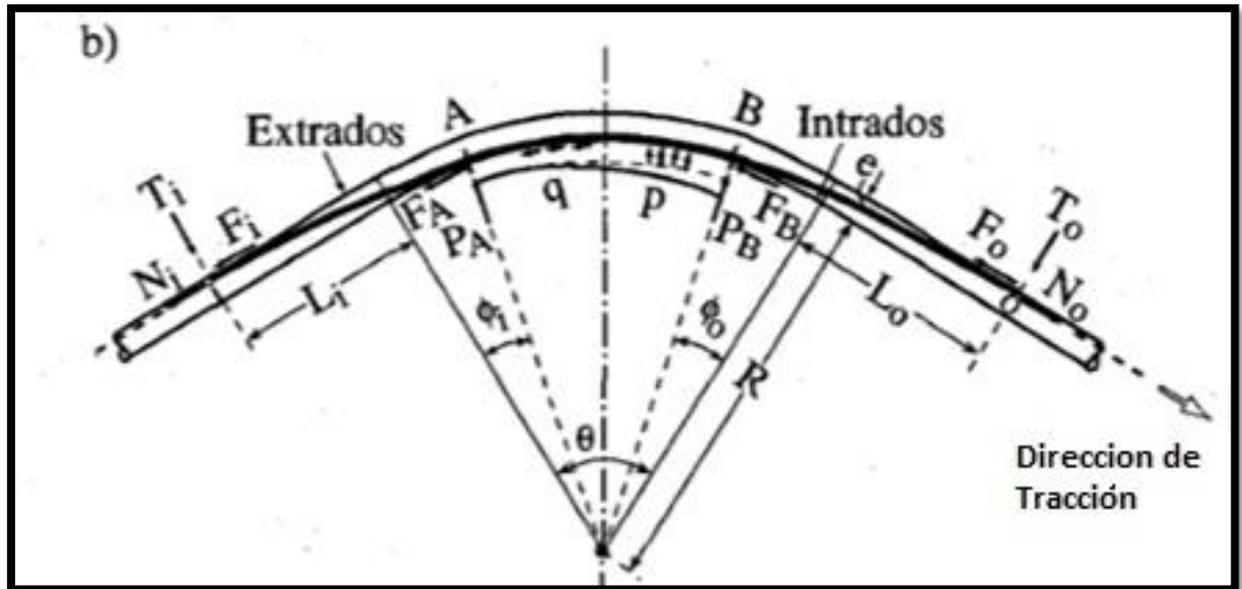


Figura 4.2 Tipos de contacto en las curvas. 3a) Contacto en un solo punto. 3b) Contacto mantenido. [Fuente: Adaptado de Iordanescu y Tamowski, 1996]

4.1.3 Condiciones de Equilibrio en las Curvas

Con respecto a la línea central de la curva, el área de contacto no es simétrica. Esto es a causa del aumento local de la fuerza axial que experimenta el cable al pasar por la curva. Este aumento se puede determinar planteando las condiciones de equilibrio estático del cable en la zona de la curva, entre el punto de entrada I y el punto de salida O. En esos puntos, antes del punto I y después del punto O, el cable se mantiene en una posición rectilínea, paralela al eje del conducto, con el momento nulo, además en los puntos I y O, se ejercen reacciones de contacto concentradas T_i y T_o que inducen fuerzas de fricción longitudinales que responden a las ecuaciones:

$$F_i = \mu T_i \quad F_o = \mu T_o . \quad (4.2)$$

Debido a estas fuerzas de fricción longitudinales en estos puntos, se da un incremento repentino de la fuerza axial en el cable.

Siendo N_{ic} y N_{oc} la fuerza axial en el cable justo después del punto I o justo antes del punto O, se cumple:

$$N_{ic} = N_i + F_i \quad N_{oc} = N_o - F_o . \quad (4.3)$$

En las áreas de contacto, los 2 modelos se comportan diferentes. Para el modelo no simétrico de un punto de contacto, la reacción radial (P_c) en el punto de contacto induce una fuerza longitudinal en ese punto que responde a la ecuación:

$$F_c = \mu P_c. \quad (4.4)$$

Otras relaciones se obtienen aplicando equilibrio de fuerzas y momentos. Aplicando equilibrio de fuerzas según el eje vertical, se obtiene:

$$P_c = T_i \cos(\phi_i) + T_o \cos(\phi_o) + N_{ic} \text{sen}(\phi_i) + N_{oc} \text{sen}(\phi_o). \quad (4.5)$$

Aplicando equilibrio de momentos respecto del centro de la curva, se obtiene:

$$N_{oc} \left(1 + \frac{e}{R}\right) = N_{ic} \left(1 + \frac{e}{R}\right) + F_c + T_i \frac{L_i}{R} - T_o \frac{L_o}{R}. \quad (4.6)$$

Para el modelo no simétrico de contacto mantenido, el momento flector en el segmento circular AB del cable responde a la ecuación:

$$M = \frac{EI}{R}. \quad (4.7)$$

En la zona de contacto, la presión radial existente p produce una fuerza de fricción longitudinal distribuida que responde a la ecuación:

$$q = \mu p. \quad (4.8)$$

Esta fuerza distribuida se agrega a las fuerzas presentes en los puntos A y B que responden a las ecuaciones:

$$F_a = \mu P_a \quad F_b = \mu P_b. \quad (4.9)$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los tramos IA y OB, se obtiene:

$$P_a = T_i \cos(\phi_i) + N_{ic} \text{sen}(\phi_i) \quad P_b = T_o \cos(\phi_o) + N_{oc} \text{sen}(\phi_o). \quad (4.10)$$

Aplicando equilibrio de momentos para todo el segmento IO, se obtiene:

$$N_{oc} \left(1 + \frac{e}{R}\right) = N_{ic} \left(1 + \frac{e}{R}\right) + F_a + \int_A^B q \, ds + F_b + T_i \frac{L_i}{R} - T_o \frac{L_o}{R}. \quad (4.11)$$

Dependiendo del tipo de contacto, las Ecuaciones (4.6) o (4.11) permiten determinar el incremento de la fuerza axial desde el punto I al punto O como función de varias fuerzas de fricción inducidas en la curva. Estas dos expresiones pueden ser simplificadas a una única expresión válida para ambos modelos,

$$N_o \cong N_i + \mu T_i + \frac{R}{R+e} \left[F_{rs} + T_i \left(\mu \cos(\phi_i) + \frac{Li}{R} \right) + T_o \left(\mu \cos(\phi_o) - \frac{Li}{R} \right) \right] + \mu T_o, \quad (4.12)$$

donde, F_{rs} es la fuerza longitudinal inducida por la curva despreciando los efectos de rigidez, pero con tensión de ingreso N_i .

De acuerdo a la expresión anterior, para hallar las fuerzas de tensión y presiones en las paredes de la tubería se necesita calcular T_i y T_o . Según lo expresado por Iordanescu y Tamowski, 1996, el análisis completo que considera las reales asimetrías de la posición del cable puede ser desarrollado, pero las limitaciones ya introducidas por las aproximaciones adoptadas no justifican las complicaciones adicionales, prefiriendo desarrollar un modelo simple, asumiendo que la posición que toma el cable en la curva es simétrica respecto de la línea central de la misma. La Figura 4.3 muestra el diagrama de fuerzas y momentos para el tipo de contacto de un solo punto, considerando la aproximación de configuración simétrica.

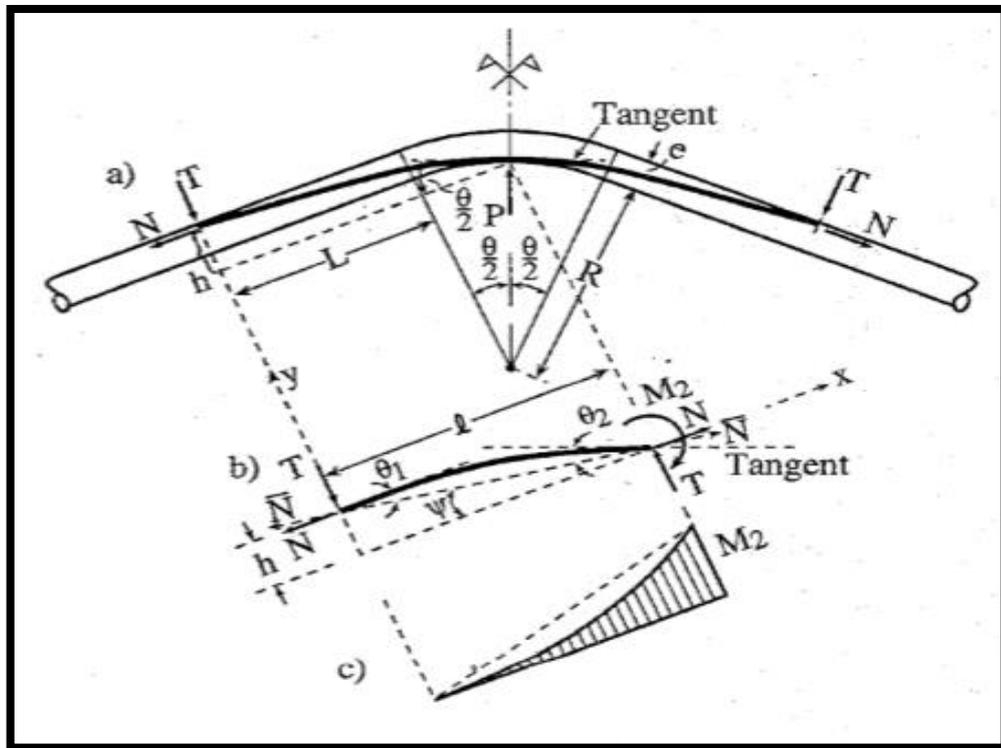


Figura 4.3 Tipo de contacto de un solo punto, configuración simétrica. [Fuente: Iordanescu y Tamowski, 1996].

La Figura 4.4 presenta el diagrama de fuerzas y momentos para el tipo de contacto sostenido, considerando la aproximación de configuración simétrica.

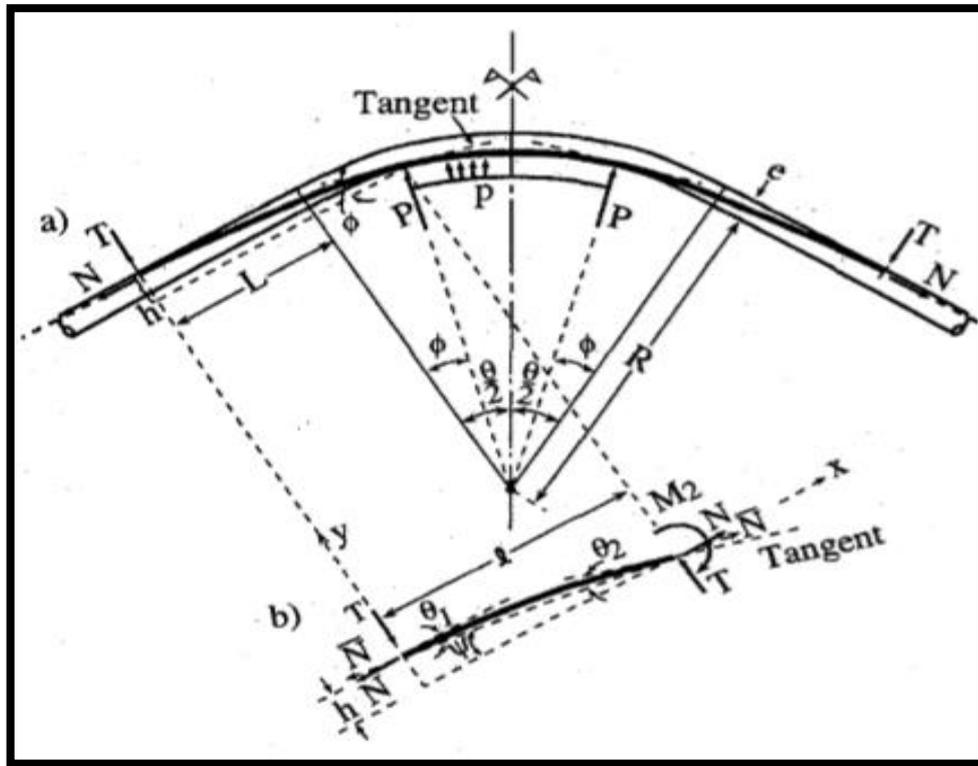


Figura 4.4 Tipo de contacto mantenido, configuración simétrica. [Fuente: Iordanescu y Tamowski, 1996].

La fuerza axial ejercida en el cable es variable a lo largo del segmento IO, para el caso en que se realiza la aproximación considerando una configuración simétrica, esta fuerza variable es aproximada por un valor constante de tensión N igual al promedio entre el valor de entrada y salida, es decir:

$$N = \frac{N_{ic} + N_{oc}}{2}. \quad (4.13)$$

4.1.4 Modelo Simétrico de Contacto de Cable Reducido a un Punto

Según Iordanescu y Tamowski, 1996, muchas condiciones caracterizan la posición simétrica del cable cuando el contacto está reducido a un punto. Utilizando la notación adoptada en la Figura 4.3 y planteando equilibrio de momentos, se obtiene:

$$M_2 = Tl + Nh , \quad (4.14)$$

donde M_2 , es el momento máximo aplicado al cable. Las condiciones de deformación pueden ser expresadas como:

$$\theta_1 = \frac{M_2 l}{6EI} \beta(n) , \theta_2 = \frac{M_2 l}{3EI} \alpha(n) , \quad (4.15)$$

donde:

$$\alpha(n) = \frac{3}{n^2} \left(\frac{n}{\tanh(n)} - 1 \right) , \beta(n) = \frac{6}{n^2} \left(1 - \frac{n}{\sinh(n)} \right) , \quad (4.16)$$

que son funciones del parámetro adimensional n ,

$$n = l \sqrt{\frac{\bar{N}}{EI}} , \bar{N} = N \cos(\Psi) + T \sin(\Psi). \quad (4.17)$$

Muchas igualdades geométricas son evidentes:

$$\theta_1 = \Psi \quad \theta_2 + \Psi = \frac{\theta}{2} \quad \tan(\Psi) = \frac{h}{l} \quad L = l - R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad h = e + R \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) , \quad (4.18)$$

donde R y θ son el radio y el ángulo de la curva.

Las Ecuaciones (4.9) hasta (4.18) son un conjunto de 9 ecuaciones con 9 incógnitas que se pueden reducir a una única ecuación no lineal:

$$l = \frac{e + R \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\tan\left(\frac{\beta(n)\theta}{2(2\alpha(n) + \beta(n))}\right)} , \quad (4.19)$$

Usando una solución numérica, la longitud característica l puede ser calculada como función de un valor conocido de la tensión N . Una vez calculado l , resulta M_2 :

$$M_2 = \frac{3}{2\alpha(n) + \beta(n)} \frac{EI}{l} \theta , \quad (4.20)$$

con lo cual, es posible calcular las reacciones en los puntos adicionales de contacto T :

$$T = \frac{M_2 - N \left[e + R \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right]}{l} . \quad (4.21)$$

Conocido el valor de T , es posible, entonces, utilizando la Ecuación (4.13), aplicada al modelo simétrico, determinar las tensiones del cable. La dificultad radica en que es necesario

conocer N previo a la resolución de la ecuación, lo cual implica que el cálculo es necesariamente un proceso iterativo [Iordanescu y Tamowski, 1996].

4.1.5 Modelo Simétrico de Contacto de Cable Mantenido

Para este caso, a lo largo del área de contacto la curvatura del cable permanece constante y el momento de flexión tiene el valor:

$$M_2 = \frac{EI}{R}. \quad (4.22)$$

Las ecuaciones previas (4.14) y (4.15):

$$M_2 = Tl + Nh, \quad (4.14)$$

$$\theta_1 = \frac{M_2 l}{6EI} \beta(n) \quad \theta_2 = \frac{M_2 l}{3EI} \alpha(n), \quad (4.15)$$

siguen siendo válidas, pero las condiciones de compatibilidad se ven un poco alteradas:

$$\theta_1 = \Psi \quad \theta_2 + \Psi = \emptyset \quad \tan(\Psi) = \frac{h}{l} \quad L = l - R \sin(\emptyset) \quad h = e + R(1 - \cos(\emptyset)). \quad (4.23)$$

Al igual que en el caso de contacto de un solo punto, todas estas ecuaciones conducen a:

$$\left(\frac{e}{R} + 1 - \cos(\emptyset) \right) = \frac{6\emptyset}{2\alpha(n) + \beta(n)} \tan\left(\frac{\beta(n)\emptyset}{2\alpha(n) + \beta(n)} \right), \quad (4.24)$$

que es una ecuación no lineal para el ángulo característico \emptyset como función de la tensión promedio N . La fuerza de contacto adicional T puede ser obtenida mediante la ecuación:

$$T = \frac{R}{l} \left[\frac{EI}{R^2} - N \left(\frac{e}{R} + 1 - \cos(\emptyset) \right) \right]. \quad (4.25)$$

Al igual que para el caso de contacto reducido a un punto, es necesario conocer N para determinar T , con lo cual la determinación es nuevamente iterativa.

4.1.6 Validez de los Dos Modelos de Contacto

Según Iordanescu y Tamowski, 1996, algunos comentarios son necesarios para clarificar el uso de los modelos desarrollados previamente.

- a) Obviamente, solo uno de los modelos de contacto existe para una particular curva de la tubería. El límite de separación entre los dos modelos puede ser expresado en el dominio $(e/R, \theta)$ mediante la relación aproximada

$$\frac{e}{R} = \frac{\theta^2}{24}, \quad (4.26)$$

por lo tanto, para curvas con

$$\frac{e}{R} \geq \frac{\theta^2}{24}, \quad (4.27)$$

el contacto entre el cable y tubería se reduce solo a un punto, mientras que para

$$\frac{e}{R} < \frac{\theta^2}{24}, \quad (4.28)$$

el contacto es mantenido a lo largo de una longitud finita. En realidad, el efecto de la tensión del cable afectará el valor del límite determinado por la Ecuación (4.26), pero se mantiene la propiedad complementaria de los dominios de validez para los dos modelos.

- b) Los modelos de contacto fueron desarrollados para curvas separadas por tramos rectos lo suficientemente largos para permitir que el cable alcance los puntos de contacto adicionales O e I en el extradós de la curva. Estudios paramétricos han demostrado que la distancia l entre la curva y el punto de contacto en el extradós aumenta para radios de curvatura grandes y también para altas tensiones en el cable. Si sucesivas curvas están cercanas unas a otras y situadas en el mismo plano, el cable puede perder el punto de contacto en el extradós especialmente para tensiones altas en el cable. En tal caso, algunos de las fuerzas de fricción presentes en la Ecuación (4.12), desaparecerán.
- c) Ambos modelos de contacto tienen la misma tendencia: la fuerza axial adicional en una curva aumenta con la rigidez a la flexión del cable, pero disminuye significativamente para una mayor tensión del cable en la zona de curvatura. Esto significa que los efectos relacionados con los modelos de contacto estarán presentes principalmente en la primera parte del tramo de cable y, finalmente, desaparecerán a medida que se presenten las tensiones más altas. En la Figura 4.5 se muestra la influencia de la tensión del cable de entrada (N_i) en el cociente entre la tensión de salida (N_o) y la fuerza de rozamiento generada (F_{rS}).

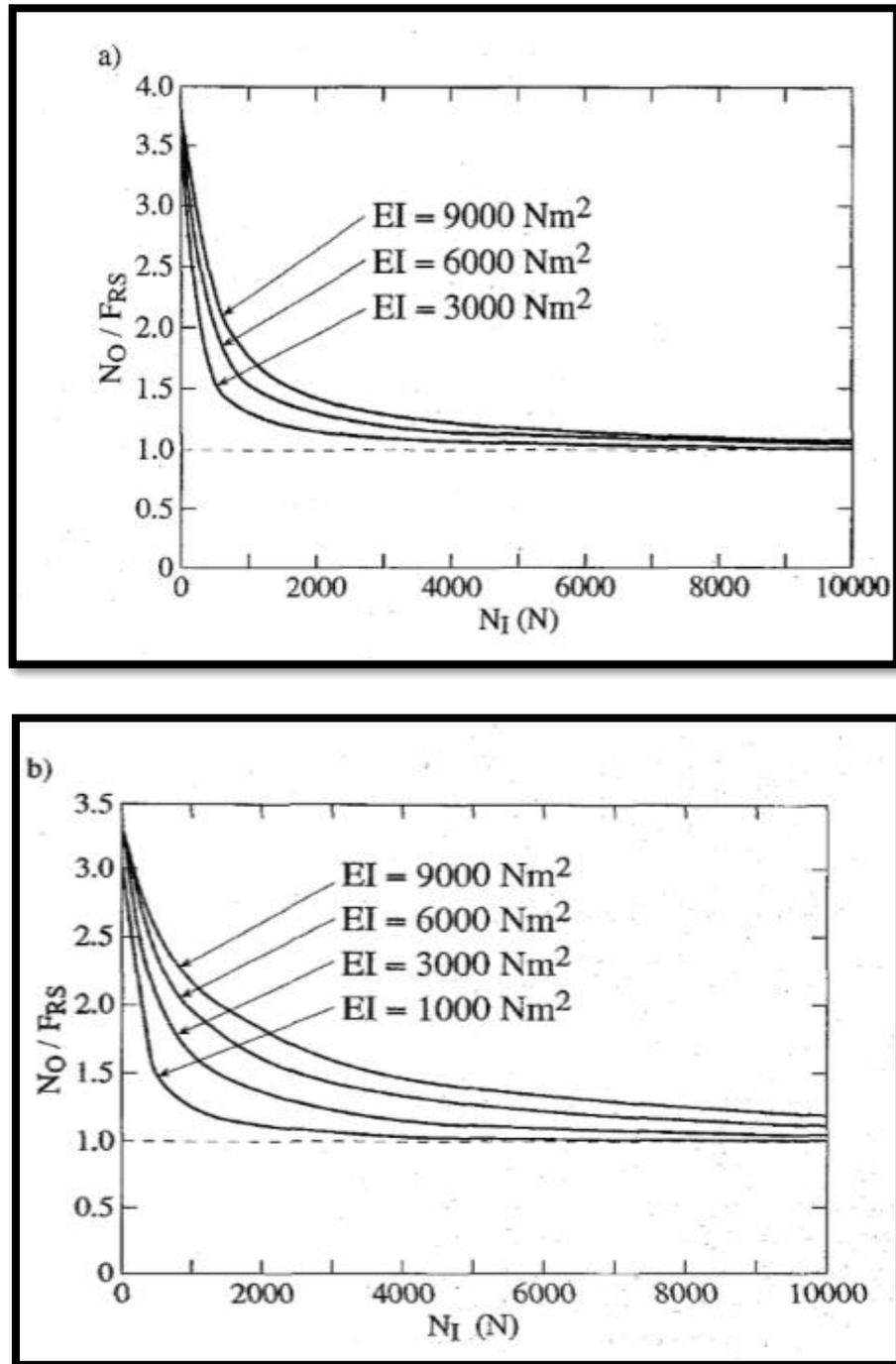
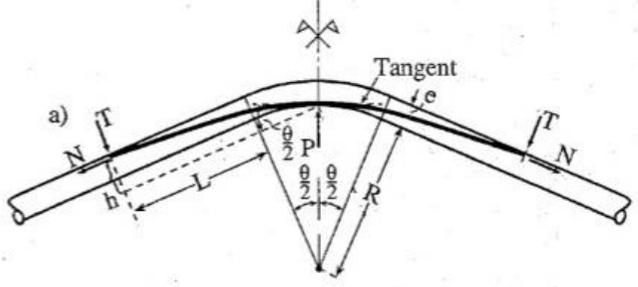
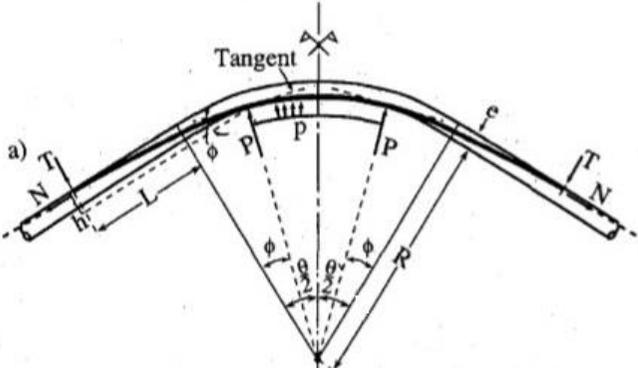


Figura 4.5 Influencia de la tensión del cable y la rigidez a la flexión. a) modelo de un punto de contacto $R=3m$ $e=0.03m$ $\theta=20^\circ$ b) modelo de contacto mantenido $R=1.5 \text{ m}$ $e=0.03m$ $\theta=60^\circ$. [Fuente: Iordanescu y Tamowski, 1996].

A continuación, se muestra un resumen (Tabla 4.1) de las configuraciones y correspondientes ecuaciones de tensiones debidas a la flexión.

Tabla 4.1 Resumen de ecuaciones de fuerzas debidas a la flexión

Tipo de Configuración	Condiciones de Validez	Figura Asociada	Ecuaciones de Tensiones
<p>Modelo Simétrico de Contacto de Cable Reducido a un Punto</p>	$\frac{e}{R} \geq \frac{\theta^2}{24}$		$l = \frac{e + R \left(1 - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)}{\tan \left(\frac{\beta(n)\theta}{2(2\alpha(n) + \beta(n))} \right)}$ $M_2 = \frac{3}{2\alpha(n) + \beta(n)} \frac{EI}{l} \theta$ $T = \frac{M_2 - N \left[e + R \left(1 - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]}{l}$
<p>Modelo Simétrico de Contacto de Cable Mantenido</p>	$\frac{e}{R} < \frac{\theta^2}{24}$		$M_2 = Tl + Nh$ $\left(\frac{e}{R} + 1 - \cos(\phi) \right) = \frac{6\phi}{2\alpha(n) + \beta(n)} \tan \left(\frac{\beta(n)\phi}{2\alpha(n) + \beta(n)} \right)$ $T = \frac{R}{l} \left[\frac{EI}{R^2} - N \left(\frac{e}{R} + 1 - \cos(\phi) \right) \right]$

5 EVALUACION DEL MODELO.

En este capítulo se realizan las evaluaciones del modelo mediante comparación con mediciones prácticas realizadas bajo condiciones controladas. Se evalúa solo el modelo ampliado de fricción sin considerar los efectos de la rigidez del cable. Las determinaciones de los coeficientes de fricción, así como de los valores reales de fuerza de tracción para distintas configuraciones de tubería fue realizado por estudiantes de la maestría de ingeniería mecánica de la UFRGS. La metodología de obtención de estos valores, instalaciones utilizadas y demás son también expuestas en este capítulo.

5.1 Determinación del coeficiente de fricción

Uno de los parámetros a determinar, es el valor de coeficiente de rozamiento μ entre el cable y la tubería. Las determinaciones de los coeficientes de fricción fueron realizadas para distintas tuberías y cables.

5.1.1 Coeficiente de fricción para Risers y tubo galvanizado

Para la determinación de este valor se utilizó un cable de energía eléctrica de 25.4 mm de diámetros y 16 N/m de peso unitario. El largo del cable fue de 2m con una masa de 3.175kg. El cable fue traccionado de forma manual, interponiéndose 5 dinamómetros de resorte en paralelo con capacidades de 25N cada uno e incertidumbre del 1%.

Para obtener los valores de los coeficientes de fricción, se utilizó el método de cálculo de acuerdo con la norma ASTM D3702-94, donde el coeficiente se calcula de acuerdo a la relación entre la fuerza aplicada y la fuerza normal.

$$\mu = \frac{F}{N}. \quad (5.1)$$

Para la medición de la velocidad de avance del cable se realizaron marcas en el elemento de tracción del cable. Mediante la filmación de estas marcas se realizó el cálculo de velocidad determinando el desplazamiento ocurrido y el tiempo insumido para el mismo.

Como método de obtención del coeficiente de fricción estática se traccionó del cable hasta que el mismo comenzó a moverse registrándose, en varias oportunidades, la fuerza requerida para provocar el movimiento.

La tabla 5.1 muestra los resultados de fuerza y correspondiente coeficiente de fricción estática obtenido.

Tabla 5.1 Valores de fuerza obtenidos y coeficiente de fricción estática asociado. Cable traccionado en tubería Riser.

Medición	Valor Dinamómetro (g)	Coefficiente de fricción estático
1	1725	0,543
2	1625	0,512
3	1650	0,520
4	1650	0,520
5	1500	0,472
6	1600	0,504
7	1625	0,512
8	1625	0,512
9	1625	0,512
MÉDIA	1625	0,512

De manera similar se determinó el coeficiente de fricción dinámico, solo que para este caso el coeficiente se determina midiendo la fuerza necesaria para mover el cable a velocidad constante. Se realizaron mediciones a tres velocidades diferentes de forma tal de verificar la no influencia de la velocidad en el coeficiente.

La Tabla 5.2 muestra los valores de fuerza de tracción para distintas velocidades de cable con sus coeficientes de fricción cinética asociados.

Tabla 5.2 Valores de fuerza obtenidos y coeficiente de fricción cinética asociado.

Cable traccionado en tubería Riser

Velocidad (m/s)	Fuerza (kgf)	Coef. de Fricción Cinético
0,04	1,375	0,433
0,10	1,375	0,433
0,63	1,375	0,433

Se determina, entonces, los valores de 0.512 para coeficiente de fricción estático y 0.433 para el coeficiente de fricción dinámico del cable en la tubería Riser.

Las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3 muestran los elementos utilizados para realizar el movimiento del cable, las mediciones de fuerza y el cable utilizado.



Figura 5.1 Sistema de movimiento para determinación de coeficiente de fricción en tuberías Riser. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

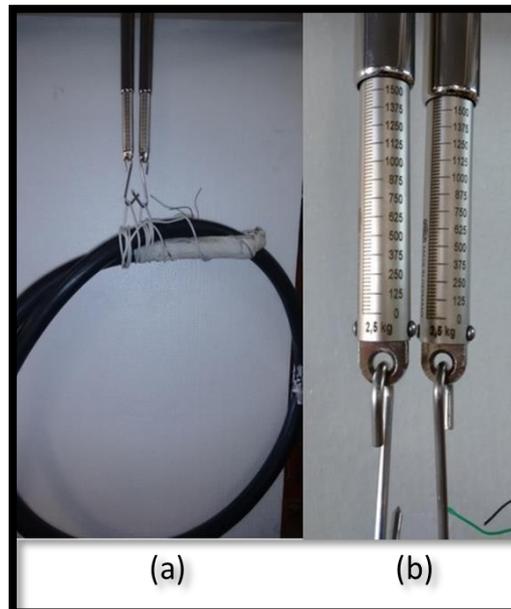


Figura 5.2 a) Pesaje de cables. b) Obtención de valores de fuerza. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

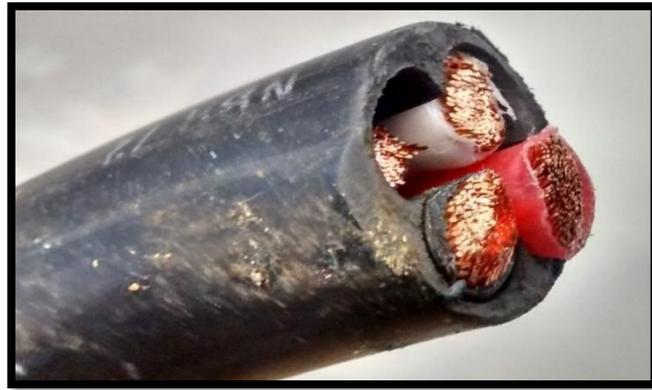


Figura 5.3 Cable utilizado en las mediciones. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

Se realizaron también, otras medidas de coeficiente de fricción tanto en la tubería Riser como en un tubo galvanizado construido especialmente para las pruebas, estas mediciones fueron realizadas bajo distintas condiciones de lubricación.

Para obtener los valores de los coeficientes de fricción, se utilizó, nuevamente, el método de cálculo de acuerdo con la norma ASTM D3702-94.

Se utilizaron de 0,77 m de longitud de cable con una masa propia de 1.225 kg. El cable fue traccionado manualmente a través de un dinamómetro de resorte de 25 N capacidad e incertidumbre del 1%. La medición consistió en determinar el valor de la fuerza antes y después del inicio del movimiento. En estas pruebas, el cable fue sometido a dos condiciones de lubricación (sin lubricación y con lubricación) y dos superficies distintas (tubo galvanizado y tubo Riser). Además de estas condiciones de prueba, también se realizaron cinco ensayos más con un cable recubierto por una capa de aluminio. La Figura 5.2 muestra el cable con el que se realizaron las mediciones.



Figura 5.4 Cable revestido con capa de aluminio. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

Los ensayos realizados consistieron en:

- Dos condiciones de lubricación (sin lubricación y de lubricación);
- Dos superficies distintas (galvanizado y tubo ascendente);
- Cable montado sobre ruedas de acero.

Los resultados obtenidos de las mediciones experimentales del coeficiente de rozamiento estático en distintas situaciones para el cable con revestimiento polimérico se presentan en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento estático para distintas tuberías y condiciones de lubricación. Cable eléctrico con revestimiento polimérico. [Determinados por UFRGS 2016].

	Sin Lubricación	Con Lubricación	Inmerso
Riser	0,51	0,32	-
Tubo galvanizado	0,51	0,36	0,25

Se realizó también la determinación del coeficiente dinámico de fricción a través de la medición de la fuerza necesaria de tracción para mantener constante la velocidad del cable. Para este caso el valor obtenido de coeficiente de fricción dinámica para tubería Riser sin lubricación fue de 0.43.

Los resultados obtenidos del coeficiente de rozamiento estático para cable revestido de Aluminio para distintas tuberías y condiciones de lubricación se presentan en la Tabla 5.4

Tabla 5.4 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento estático para distintas tuberías y condiciones de lubricación. Cable eléctrico con revestimiento de Aluminio. [Determinados por UFRGS 2016].

	Sin Lubricación	Con Lubricación
Riser	0,22	0,20
Tubo galvanizado	0,22	0,20

Los resultados obtenidos del coeficiente de rozamiento dinámico para cable revestido de Aluminio para distintas tuberías y condiciones de lubricación se presentan en la Tabla 5.5

Tabla 5.5 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento dinámico para distintas tuberías y condiciones de lubricación. Cable eléctrico con revestimiento de Aluminio. [Determinados por UFRGS 2016].

	Sin Lubricación	Con Lubricación
Riser	0,14	0,12
Tubo galvanizado	0,14	0,12

Otros de los ensayos realizados fue acoplar un soporte con ruedas de acero a el cable con capa de aluminio y determinar los coeficientes de fricción. Por la interferencia entre las ruedas y el corrugado del Riser el ensayo solo fue realizado para el tubo galvanizado.

Los resultados de las mediciones son presentados en la Tabla 5.6

Tabla 5.6 Valores obtenidos para el coeficiente de rozamiento estático y dinámico para tubería galvanizada. Cable eléctrico con revestimiento de Aluminio montado en ruedas de acero. [Determinados por UFRGS 2016].

	Coefficiente Estático	Coefficiente Dinámico
Tubo galvanizado	0,07	0,05



Figura 5.5 Cable con cubierta de aluminio montado carro de ruedas de acero. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

5.2 Sistema de Medición Experimental de Fuerzas

Para la determinación práctica de las fuerzas de arrastre requeridas por el cable, se construyeron un conjunto de tuberías rectas y tramos curvos. Estas piezas, fueron elaboradas conformando chapa de acero galvanizada con uniones del tipo brida atornilladas. El diámetro

de todas las tuberías es de 101,6 mm. Se realizaron tres tipos de configuraciones: configuración en “L”, “S” y configuración en “U”. La configuración en “L” está compuesta de dos tramos rectos, seguidos de una curva de 90° y a posterior nuevamente un tramo recto. La Figura 5.6 muestra la instalación de medición de fuerzas con configuración “L”.



Figura 5.6 Instalación para la medición de fuerza de arrastre de cable, configuración en L.
[Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

La configuración en “U” consta de dos tramos rectos, dos curvas de 90°, una a continuación de la otra formando una única curva de 180°, y seguido un tramo recto. En la Figura 5.7 se muestra la instalación de medición de fuerzas con configuración “U”.



Figura 5.7 Instalación para la medición de fuerza de arrastre de cable, configuración en U.
[Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

La configuración en "S" fue realizada mediante dos tramos rectos, dos curvas de 90° , una a continuación de la otra, pero con ubicación opuesta del radio de curvatura formando así la "S", y finalmente un tramo recto. La Figura 5.8 muestra la instalación de medición de fuerzas con configuración "S".



Figura 5.8 Instalación para la medición de fuerza de arrastre de cable, configuración en S. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

Todos los tramos curvos tienen radio de curvatura de valor 0.5 metros.

A modo de simular el cable umbilical se utilizó cable eléctrico con revestimiento polimérico de diámetro exterior 25mm y de masa específica de 1.58 kg/m. La Figura 5.9 muestra el cable utilizado.

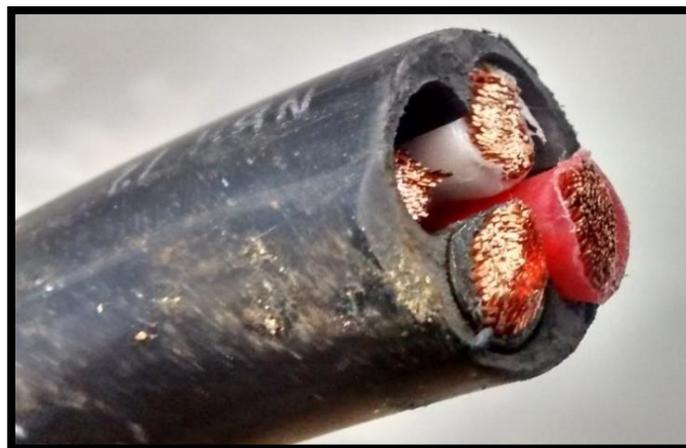


Figura 5.9 Cable eléctrico utilizado para las mediciones. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

Se recrearon las condiciones de cable inmerso, llenando completamente las tuberías con aceite de motor SL 20W 50 en sustitución de petróleo. Este aceite tiene una masa específica de 900 kg/m^3 .

Para realizar las mediciones de fuerza en cada configuración, se atravesó un cable por la tubería. De uno de los extremos se colgó un peso determinado (ver Figura 5.10) que actúa como la contra tensión de entrada a la curva, presente siempre en los sistemas reales, a la salida de la instalación, se conectó el cable a un sistema de tracción.

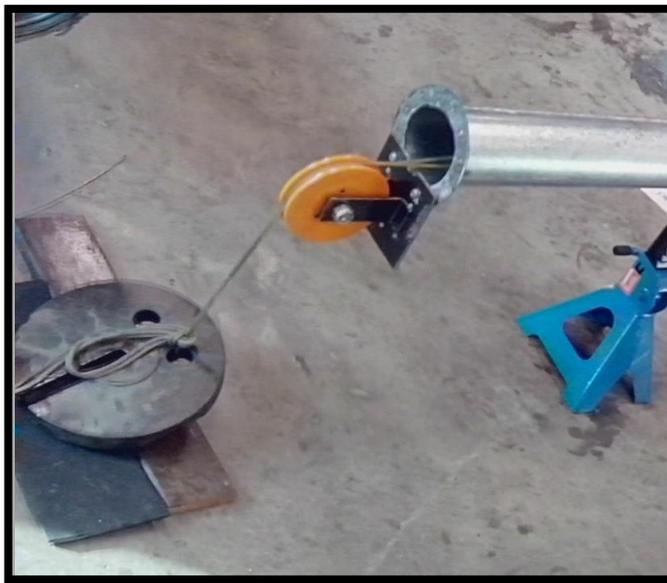


Figura 5.10 Peso utilizado para simular la contra tensión del cable. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

El sistema de tracción está compuesto por, un motor eléctrico inductivo y una polea que al girar tracciona el cable. En el sistema tractor se le interpuso una celda de carga de modo de poder medir las tensiones ejercidas por el cable al ser arrastrado. La rotación del motor es controlada mediante un inversor de frecuencia. En la Figura 5.11 se muestra el conjunto motor, polea y celda de carga utilizado para la tracción y medición de las fuerzas.

Para el control de la velocidad de avance del cable en el tubo se utilizó un motor eléctrico inductivo de 1 hp controlado por un convertidor de frecuencia de forma tal de fijar una velocidad ajustada al valor de la velocidad de desplazamiento del robot, esto es $0,05 \text{ m/s}$.



Figura 5.11 Detalle del sistema de tracción y medición de fuerza de arrastre de cable. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

Para la medición de la fuerza requerida se utilizó una celda de carga de marca HBM con capacidad de 500 N. La celda de carga fue conectada a un puente de Wheatstone y a una placa conversora analógica-digital de la firma National Instruments, con velocidad de adquisición de 100 Hz conectada su vez a un microordenador. En la Figura 5.12 se muestra el puente de Wheatstone, la placa conversora y el microcomputador.



Figura 5.12 Puente de Wheatstone, la placa conversora y microcomputador utilizados para la medición de fuerzas. [Fuente: Fotografía cedida por UFRGS 2016].

5.3 Mediciones Obtenidas

Se realizaron mediciones con dos contra tensiones diferentes para todas las configuraciones (“L”, “U” y “S”). Una corrida se realizó con una contra tensión de 75 N y otra con 105 N.

La Tabla 5.7 muestra los valores experimentales obtenidos para contra tensión de 75N.

Tabla 5.7 Valores de fuerza de arrastre obtenido para las diferentes configuraciones. Contra tensión 75N. [Determinados por UFRGS 2016]

Contra tensión de 75 N	Lubricado	Inmerso
Tubería en forma “U”	186 N	181 N
Tubería en forma “L”	121 N	115 N
Tubería en forma “S”	199 N	176 N
Tubería recta	89 N	-

La Tabla 5.8 muestra los valores experimentales obtenidos para contra tensión de 105N.

Tabla 5.8 Valores de fuerza de arrastre obtenido para las diferentes configuraciones. Contra tensión 105N. [Determinados por UFRGS 2016]

Contra tensión de 105 N	Lubricado	Inmerso
Tubería en forma “U”	-	248 N
Tubería en forma “L”	164 N	159 N
Tubería en forma “S”	236 N	230 N
Tubería recta	115 N	-

Con los valores experimentales obtenidos se realiza una comparación con los valores determinados mediante la ecuación correspondiente al caso.

La Tabla 5.9 muestra la comparativa de los datos experimentales y los que resultan del modelo.

Tabla 5.9 Tabla comparativa de valores experimentales y obtenidos mediante el modelo

Configuración Geométrica	Tensión Ingreso Curva (kgf)	Ángulo Total Curva	Densidad Fluido (kg/m3)	Peso/Unidad Longitud Cable (kgf/m)	Diámetro Exterior Cable (mm)	Radio Curva (m)	Coefficiente Fricción	Tensión Egreso Curva Calculado Según (kgf) $T2 = \frac{C^2 - j^2 r^2}{2C}$ con $C = e^{f\theta} T1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{j^2 r^2}{T1^2}} \right)$	Valor Medido Experimentalmente (kgf)	Porcentaje Error (%)
L	7,65	90	900	1,6	25,4	0,5	0,25	11,34	11,73	3,46
U	7,65	180	900	1,6	25,4	0,5	0,25	16,80	18,47	9,91
S	7,65	180	900	1,6	25,4	0,5	0,25	16,80	17,96	6,88
L	10,71	90	900	1,6	25,4	0,5	0,25	15,87	16,22	2,21
U	10,71	180	900	1,6	25,4	0,5	0,25	23,51	25,31	7,63
S	10,71	180	900	1,6	25,4	0,5	0,25	23,51	23,47	0,18

5.4 Análisis de Datos

Para el análisis de datos se realizó una comparación de los valores calculados aplicando el modelo desarrollado y los resultantes de las medidas experimentales, se determinó el error entre ellos para todas las configuraciones y para ambas contra tensiones de entrada. El error máximo entre todas las medidas realizadas fue de un 9.9% y el valor correspondiente al error mínimo se situó en el 0.18%.

Se observa que todos los valores que resultaron de la medición experimental fueron mayores al estimado mediante el modelo. Este resultado es congruente con el hecho de que no se contempló el efecto de la rigidez del cable en los cálculos realizados, más aún, los mayores errores entre la medida real y la estimada se da en el caso de configuración en U, que corresponde a la máxima deformación del cable y por ende al mayor efecto de la rigidez en la afectación de los valores de fuerza de arrastre.

6 HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

6.1 Motivación de las Herramientas de Cálculo

Cuando se requiera estimar la fuerza necesaria que deberá desarrollar el robot para el arrastre del cable umbilical dentro de la tubería, nos encontraremos con una serie de cálculos necesarios que involucrarán, tanto parámetros geométricos de la tubería, como del propio cable, y del fluido donde está inmerso. Tanto el cálculo numérico, al aplicar la ecuación correspondiente, como la determinación de los parámetros geométricos de la tubería presentan cierta complejidad, de modo tal, que para geometrías de tuberías con ya apenas unas pocas curvas o tramos rectos, la determinación de las tensiones sin ayuda de algún tipo de software o planilla se torna muy complejo. Es por este motivo que se desarrollaron dos aplicaciones específicas para el cálculo de fuerzas de arrastre de cables umbilicales. Una de las aplicaciones fue desarrollada para el cálculo de fuerzas en aquellas tuberías donde la geometría de la misma, viene dada por una sucesión de tramos rectos seguidos de curvas típicas, esto es, las tuberías “tradicionales” donde el recorrido es conformado mediante la unión de tramos de tubos y curvas estandarizadas. En la Figura 6.1 se muestra una tubería submarina de tipo tradicional.

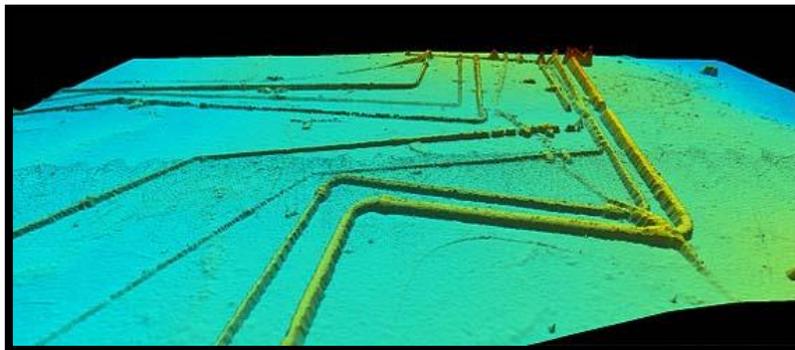


Figura 6.1 Imagen digital de tuberías submarinas conformada por tramos rectos y curvas. [Fuente: H&O Ingeniería, 2016]

Otra aplicación, sensiblemente diferente al anterior, tiene como objetivo el cálculo de fuerzas en aquellas tuberías donde la geometría no se ciñe a tramos rectos y curvos estándares, sino que, la misma posee cierta relativa alta flexibilidad y por ende adopta trayectorias diversas. La Figura 6.2 presenta una cañería flexible de extracción de petróleo.

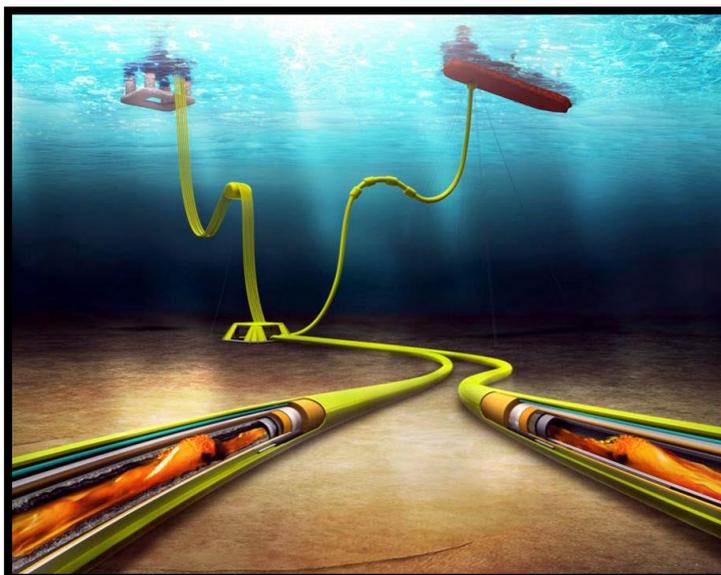


Figura 6.2 Tuberías flexibles en instalaciones de explotación petrolera. [Fuente: Argos Engineering & Projects, 2016]

6.2 Aplicación de Cálculo para Tuberías Rígidas

Tanto la aplicación para tuberías rígidas como para tuberías flexibles fueron desarrolladas mediante la plataforma de software Scilab. Scilab es un software abierto para análisis numérico, con un lenguaje de programación de alto nivel para cálculo científico.

Las características de Scilab incluyen: análisis numérico, visualización 2-D y 3-D, optimización, análisis estadístico, diseño y análisis de sistemas dinámicos, procesamiento de señales, e interfaces con Fortran, Java, C y C++. Mientras que la herramienta Xcos permite una interfaz gráfica para el diseño de modelos [<https://es.wikipedia.org/wiki/Scilab>, 2016].

Para ambas aplicaciones se realizó una interfaz gráfica (GUI) para el seteo de parámetros del cable, tubería, fluido, coeficientes de fricción y también para la carga de las características geométricas de los tramos rectos y curvos que componen la tubería. En la Figura 6.3 se muestra la visualización de la interfase del programa.

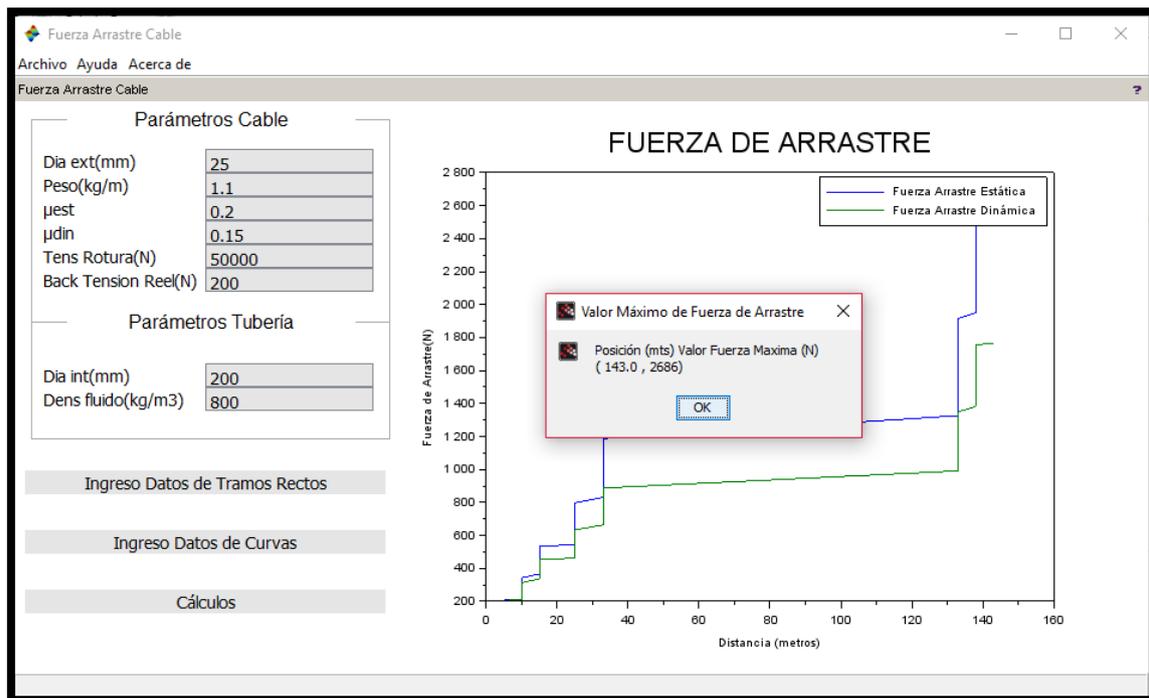


Figura 6.3 Interfaz gráfica del programa de cálculo de fuerza de arrastre para tuberías rígidas.

La aplicación corre dentro del entorno de *Scilab* para versiones del programa 5.5.0 o superiores. La interfaz gráfica se carga desde la consola de *Scilab* ejecutando la función *Fuerza Arrastre R.sce*. Al ejecutarse la función se despliega la ventana de interfaz, abriéndose los cuadros de carga de parámetros de cable y tubería. Ambos cuadros permiten asignar valores numéricos que caracterizan al cable y tubería, en todos los casos poseen valores por defecto de estos parámetros. Quedan también habilitados los botones de ingreso de datos para tramos rectos y tramos curvos. Estos botones despliegan cuadros de ingreso de datos cuyos valores determinan geoméricamente a la tubería.

Mediante el botón *Ayuda* se despliegan ventanas de información con instrucciones para el uso de los distintos cuadros. El botón *Cálculos* ejecuta los algoritmos de cálculo tomando los datos ingresados de cable, tubería y la configuración geométrica ingresada. Para esto utiliza las ecuaciones del modelo que aplican a cada caso (tramo recto ascendente, descendente, curva ascendente, descendente, etcétera).

Los valores calculados de fuerza de arrastre (tanto estáticos como dinámicos) son presentados en forma de gráfica como función de la distancia recorrida, de esta forma se obtiene una visión clara de los niveles de tensión alcanzados en el cable a medida que el robot avanza dentro de la tubería.

El valor de fuerza máxima alcanzado, así como su posición son mostrados en una ventana específica dentro del gráfico.

Si el valor máximo de tensión es alcanzado, en la gráfica se muestra la recta de tensiones máximas admisibles para el cable, así como también un mensaje donde se advierte esta situación. En la Figura 6.4 se muestra la advertencia presentada por el software al superar el valor de rotura del cable.

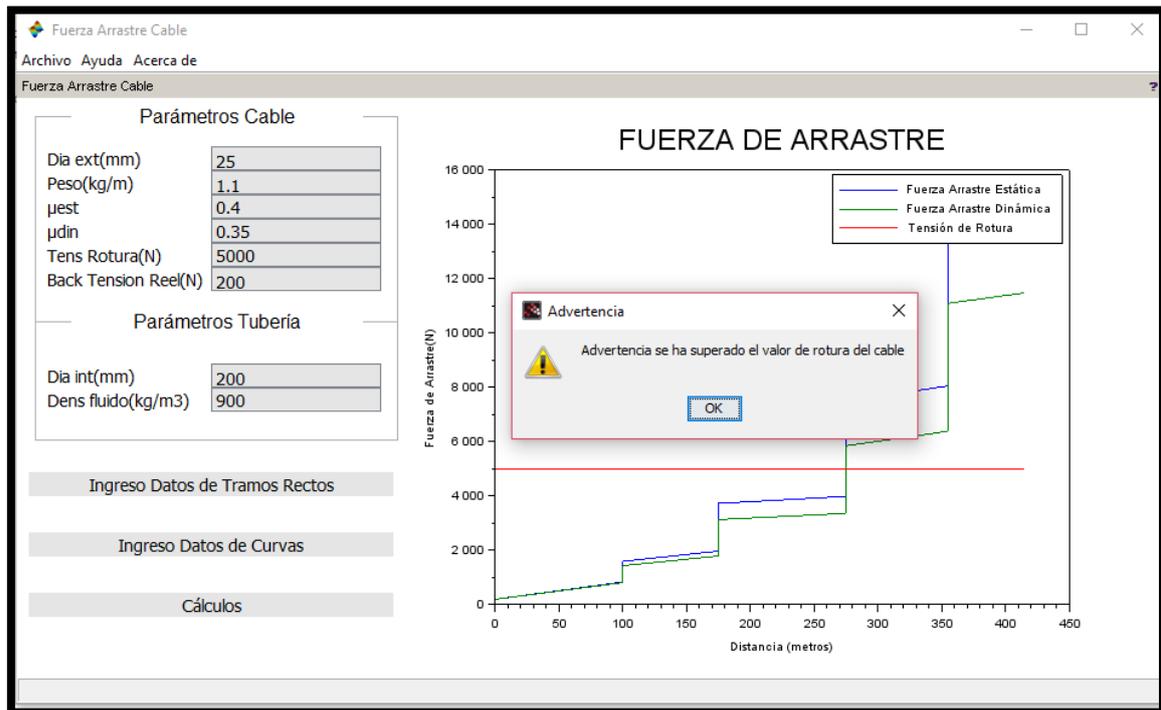


Figura 6.4 Interfaz gráfica para el cálculo de fuerzas de arrastre. Visualización de tensión máxima y advertencia de límite alcanzado.

En la Figura 6.5 se muestra un flujograma de la aplicación de software desarrollada para el cálculo de fuerzas de arrastre en tuberías rígidas.

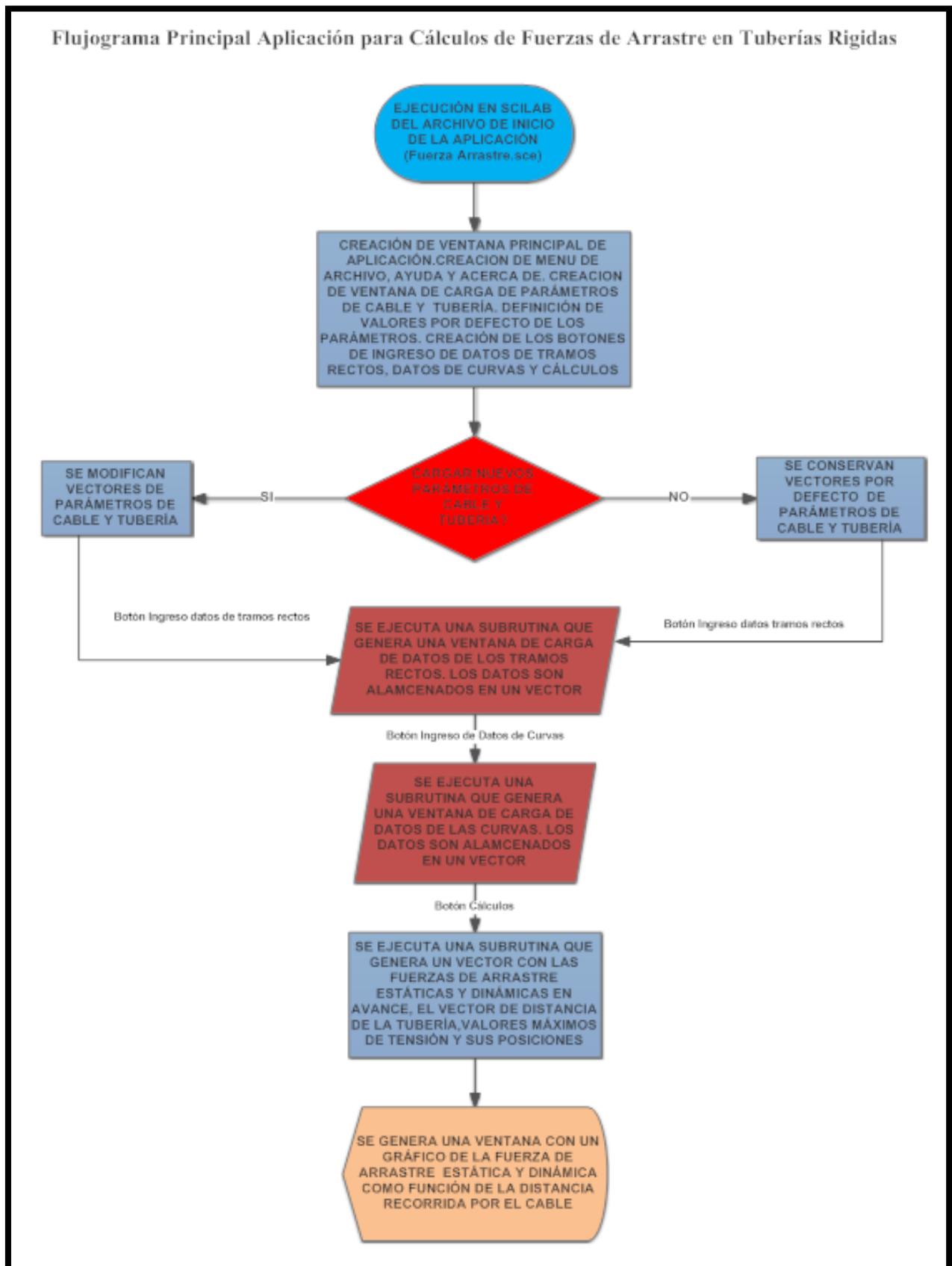


Figura 6.5 Flujograma de aplicación para cálculos de fuerza de arrastre en tuberías rígidas.

6.3 Aplicación de Cálculo para Tuberías Flexibles

También para esta aplicación se realizó una interfaz gráfica (GUI) para el seteo de parámetros del cable, tubería, fluido presente dentro de la tubería y coeficientes de rozamiento estático y dinámico. A diferencia de la aplicación para tuberías rígidas, donde son ingresados explícitamente los parámetros que determinan la geometría de tramos rectos y curvas, en este caso al ser una tubería flexible, la tubería es incorporada a la aplicación a modo de nube de puntos, es decir, la geometría de la tubería está representada por una matriz de puntos coordinados (x, y, z) que la definen.

La aplicación, al igual que para la de tuberías rígidas, corre dentro del entorno de Scilab para versiones del programa 5.5.0 o superiores. La interfaz gráfica se carga desde la consola de Scilab ejecutando la función *Fuerza Arrastre Nube Puntos.sce*. También aquí, al ejecutarse la función se despliega la ventana de interfaz abriéndose los cuadros de carga de parámetros de cable y tubería donde pueden asignarse valores numéricos de los parámetros por defecto mostrados.

Dentro de la ayuda se disponen de instrucciones para la carga de datos y utilización del programa. El botón *Ingreso de Nube de Puntos de Tubería* despliega una ventana de ingreso de datos. Estos datos a ingresar determinan la geometría de la tubería. Los mismos deben ser ingresados como conjunto ordenado de coordenadas, esto es, la primera columna debe representar la coordenada “x”, la segunda columna la coordenada “y” y la tercera columna la coordenada “z” de modo tal que valores crecientes de z impliquen la representación de una tubería que asciende. La matriz de coordenadas de puntos debe estar ordenada de modo que la primera fila de la matriz represente las coordenadas del primer punto espacial del robot cuando avanza (comienzo de la tubería). Las unidades de las coordenadas deben ser metros. Una vez ingresada la matriz de puntos es posible visualizar la tubería en todo su recorrido, para esto se utiliza el botón *Plot 3D Tubería*. Este botón despliega una ventana gráfica donde se visualiza espacialmente la tubería. La Figura 6.6 muestra la gráfica realizada por el software del recorrido espacial de la tubería.

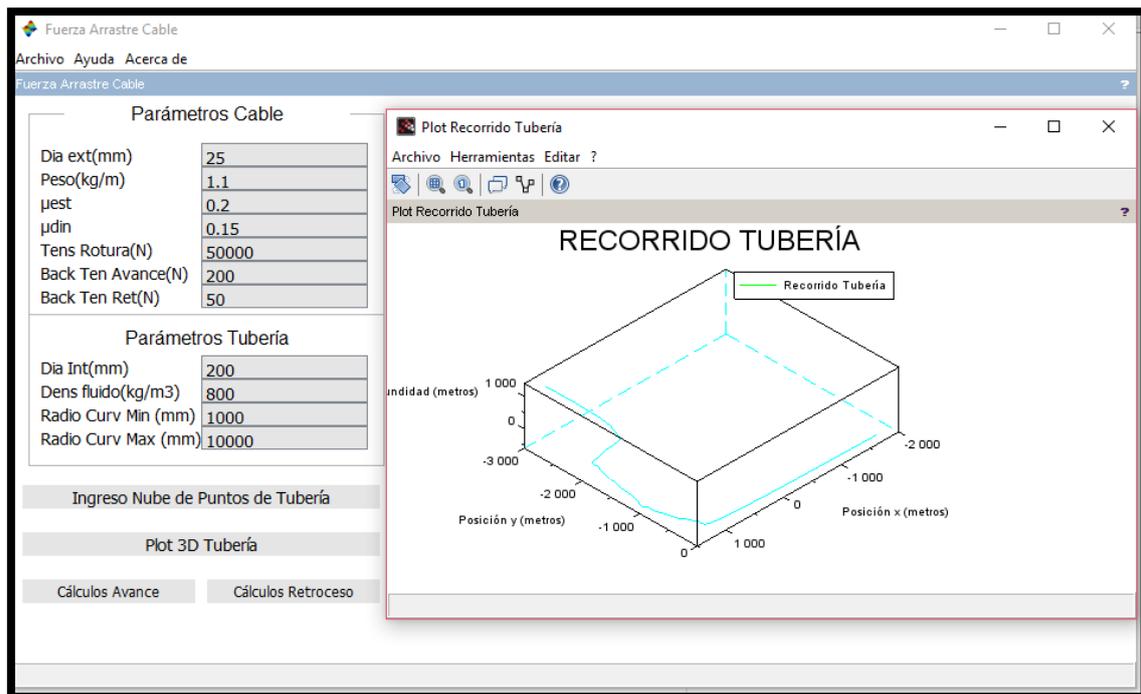


Figura 6.6 Interfaz gráfica para el cálculo de fuerzas de arrastre. Visualización espacial del recorrido de la tubería.

Los botones *Cálculos Avance* y *Cálculos Retroceso* ejecutan los algoritmos para el cálculo de las fuerzas de arrastre en avance y retroceso del robot. Para este caso, donde la geometría de la tubería viene dada por una matriz de coordenadas, el programa analiza conjuntos sucesivos de puntos, determinando para cada conjunto si se está frente a un tramo de tubería recto o curvo. En función de esto y para cada caso, determinará los parámetros que caracterizan ya sea a la recta o a la curva, explícitamente para una recta determinará su longitud y ángulo de inclinación respecto de la horizontal, para una curva hallará su centro, radio de curvatura, ángulo de inicio, ángulo de fin y ángulo de plano respecto de la horizontal. El programa aplicará la ecuación correspondiente al caso en el que se esté presente (recta ascendente, descendente, curva ascendente, descendente, plana, etcétera). El programa recorre todos los puntos construyendo así el vector de fuerzas de arrastres necesarias. Nuevamente los valores calculados de fuerza de arrastre son presentados en forma de gráfica como función de la distancia recorrida. El valor de fuerza máxima alcanzado, así como su posición son mostrados en una ventana específica dentro del gráfico.

También en esta aplicación si el valor máximo de tensión es alcanzado, en la gráfica se muestra la recta de tensiones máximas admisibles para el cable, así como también un mensaje donde se advierte esta situación. En la Figura 6.7 se muestra la presentación gráfica, dada por el software, de la evolución de las fuerzas de arrastre en avance, así como también los mensajes asociados a los valores de tensión alcanzados.

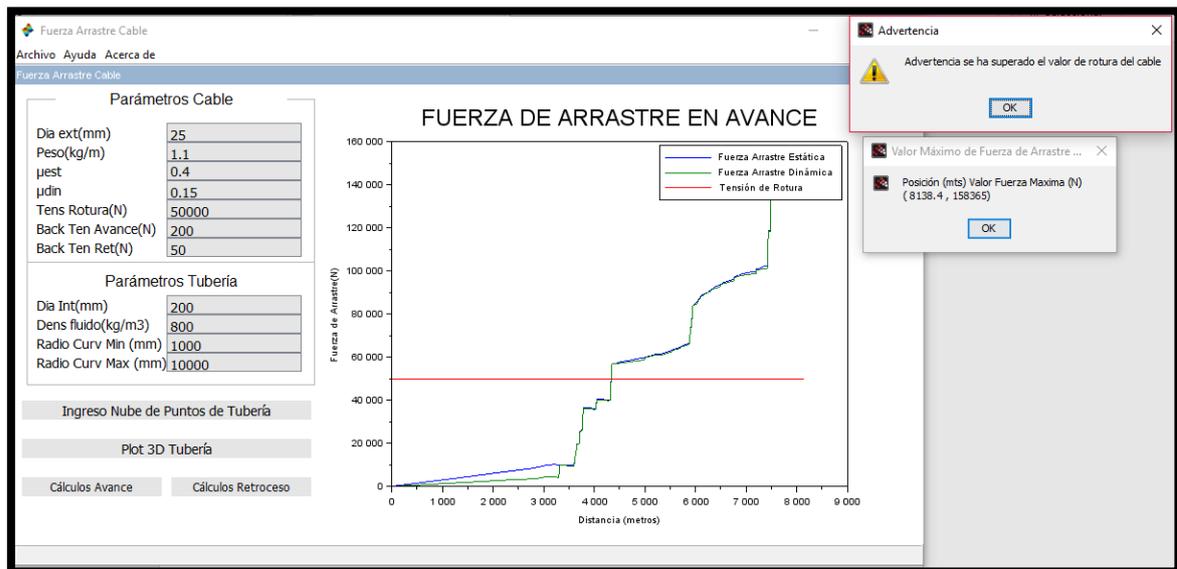


Figura 6.7 Presentación gráfica de las fuerzas de arrastre. Indicación de valor máximo de tensión y advertencia de valor límite alcanzado.

En la Figura 6.8 se muestra un flujograma de la aplicación de software desarrollada para el cálculo de fuerzas de arrastre en tuberías flexibles.

En la Figura 6.9 se muestra un flujograma de la subrutina específica para la determinación del vector de fuerza de tracción en avance para tuberías flexibles.

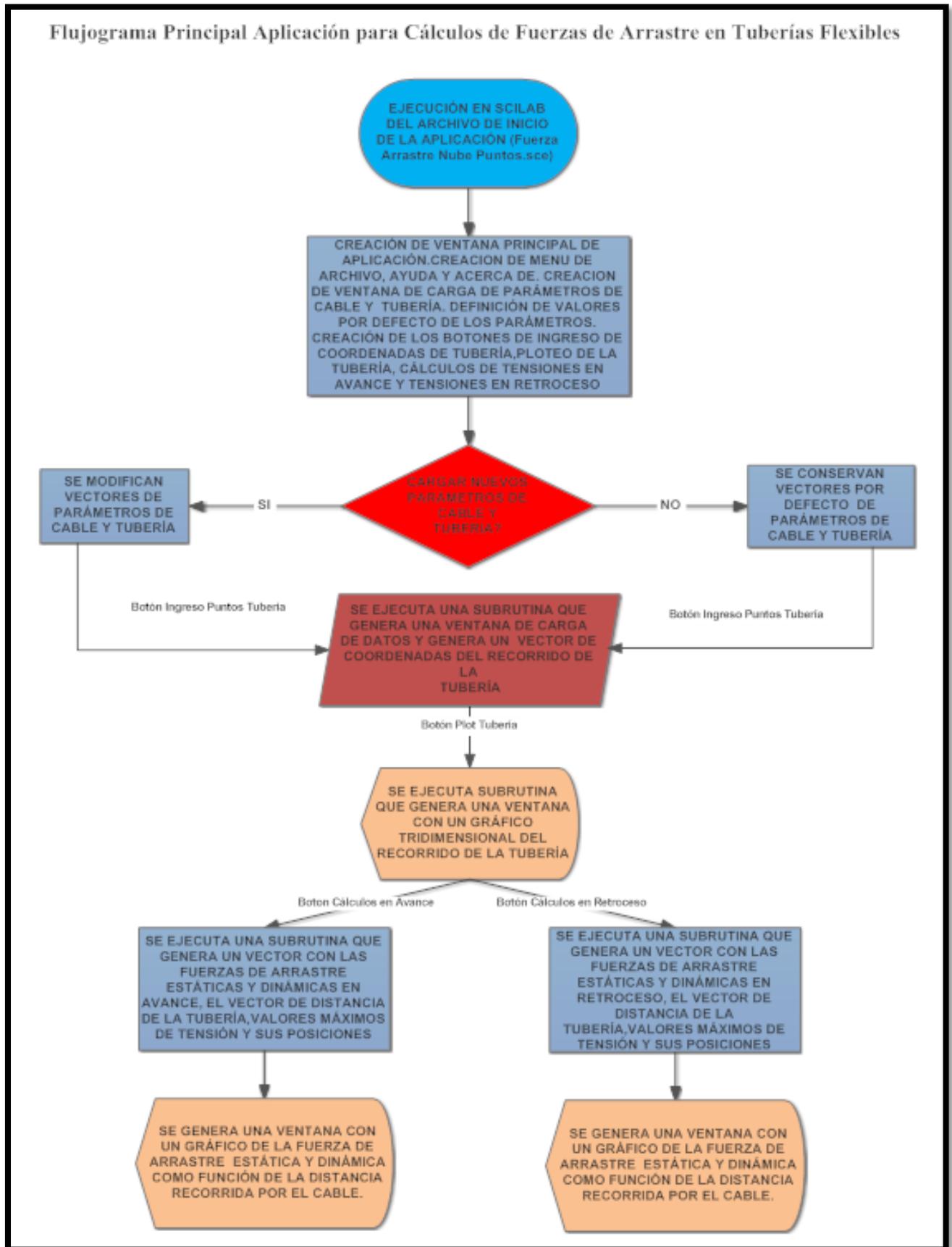


Figura 6.8 Flujograma de rutina principal de aplicación para cálculos de fuerza de arrastre en tuberías flexibles.

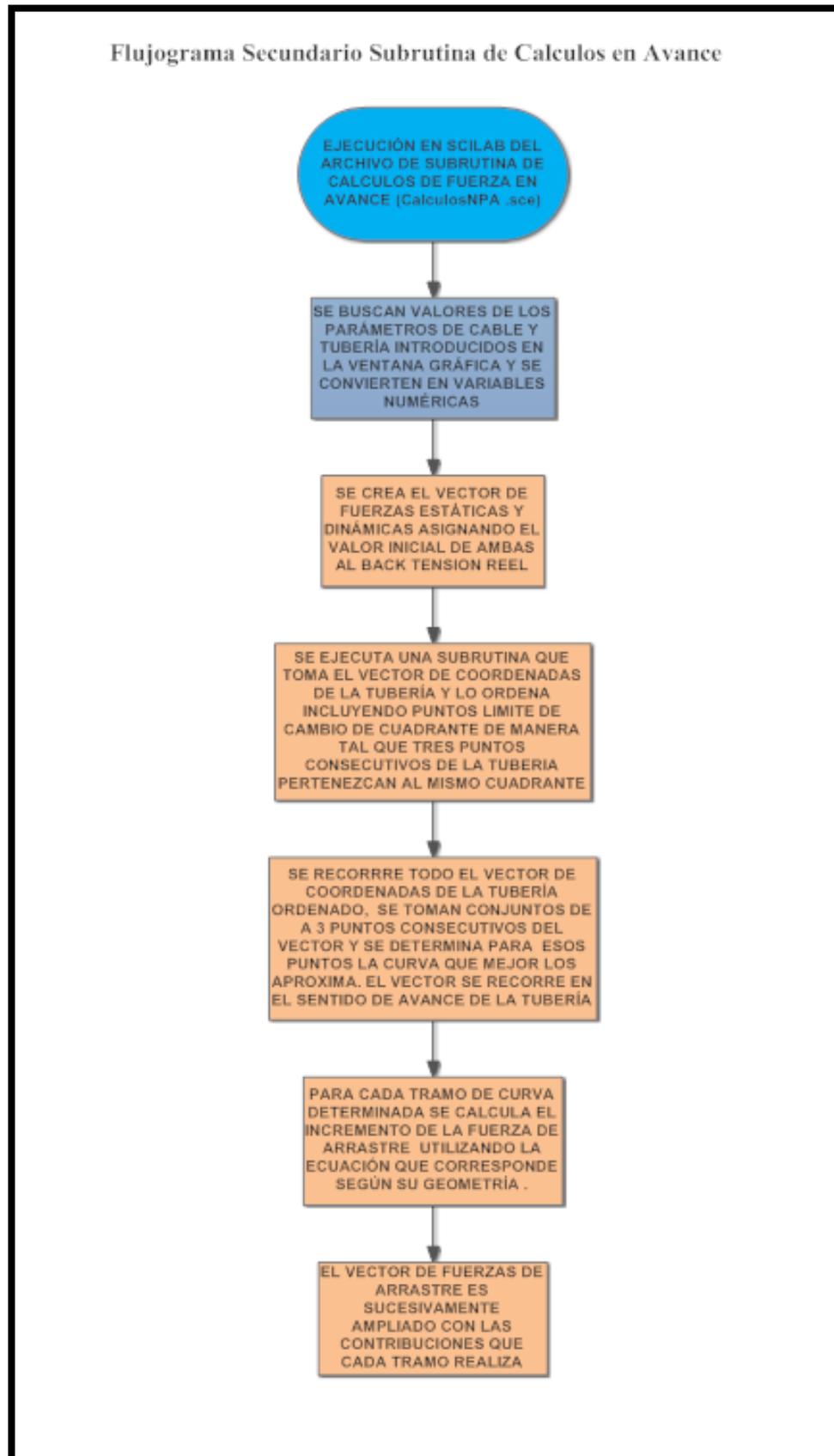


Figura 6.9 Flujograma de subrutina de cálculos de fuerza de arrastre en avance para tuberías flexibles.

En la Figura 6.10 se muestra un flujograma de la subrutina específica para la determinación del vector de fuerza de tracción en retroceso para tuberías flexibles.

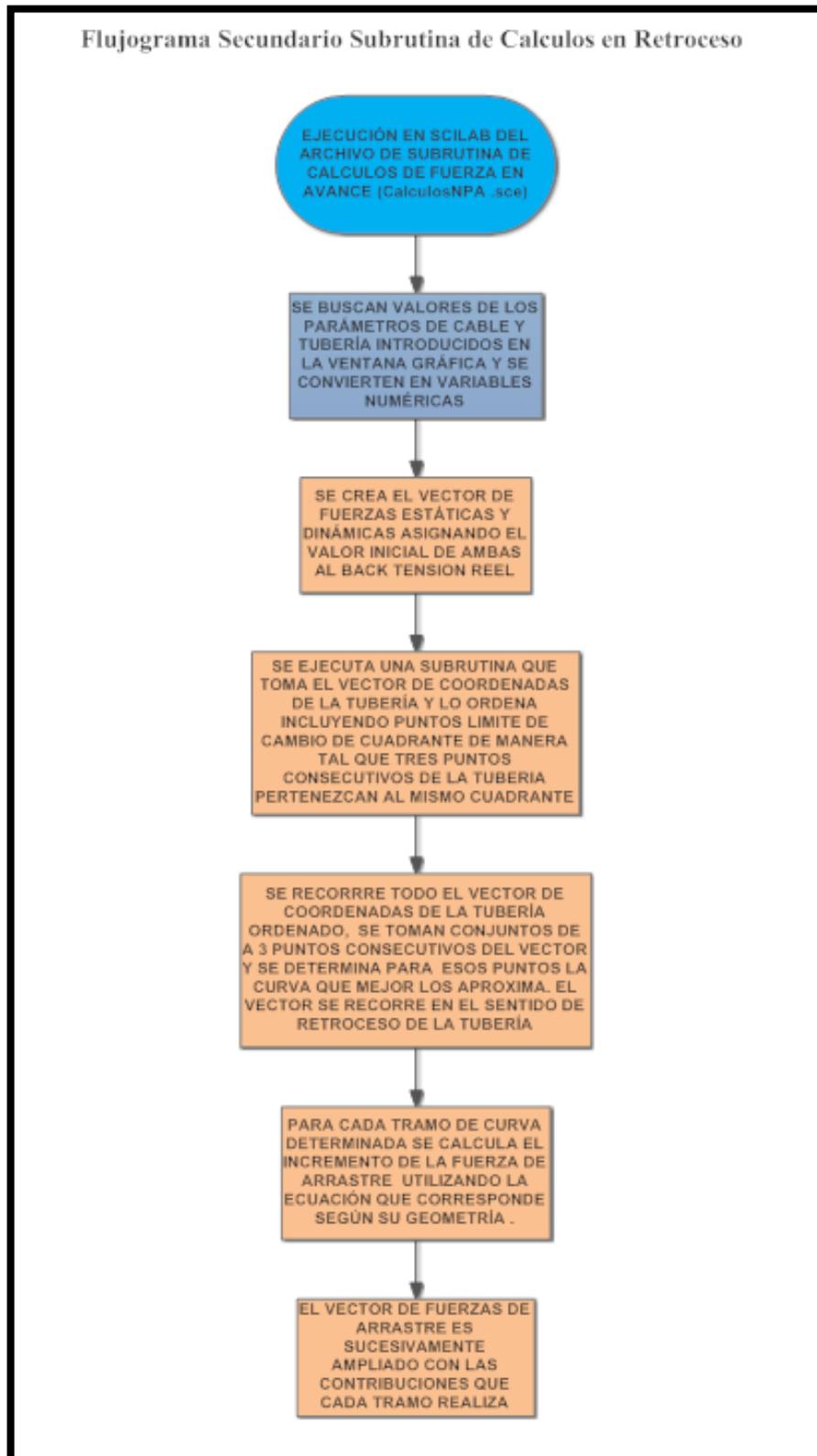


Figura 6.10 Flujograma de subrutina de cálculos de fuerza de arrastre en avance para tuberías flexibles.

7 ESTRATEGIAS PARA LA REDUCCIÓN DE FUERZAS

Dadas las usuales grandes distancias de tuberías que poseen las instalaciones de explotación de petróleo, las tensiones resultantes de arrastre del cable umbilical pueden limitar (ya sea por la propia resistencia del umbilical, la fuerza requerida por el sistema tractor o la resistencia de la tubería) el accionar de un robot de inspección o desobstrucción de tuberías. Es por esta razón, que encontrar formas de mantener bajas las fuerzas de rozamiento generadas es de vital importancia.

Mediante el análisis de las ecuaciones de tensión presentadas en los capítulos precedentes, es posible determinar los factores que inciden en la resultante de las fuerzas de arrastre pasibles de ser influenciados. En el supuesto, realista, de que la geometría de la tubería es dada y no se tiene dominio sobre la misma, queda el cable como elemento donde poder accionar.

7.1 Factores de Influencia

Uno de los términos de influencia que se reconoce es el valor denotado en capítulos previos como j . Este término responde a la fórmula:

$$j = \delta - \rho g A . \quad (3.5)$$

Donde, como se viera en el Capítulo 3, δ es el peso del cable por unidad de longitud del mismo, ρ es la densidad volumétrica del fluido y A es el área de la sección transversal del cable. Este término, es la diferencia entre el valor del peso del cable y las fuerzas de empuje del fluido por unidad de longitud del mismo. La influencia de este término se pone claramente de manifiesto en los tramos rectos de tubería donde las ecuaciones son de la forma:

$$T_2 = T_1 + jl(f \cos \phi + \sin \phi), \quad (3.16)$$

para rectas ascendentes y

$$T_2 = T_1 + jl(f \cos \phi - \sin \phi), \quad (3.22)$$

para rectas descendentes.

Es claro que, para un fluido determinado, existen valores de δ y A que resultan en un valor de $j = 0$, para cuyo caso la tensión al final del tramo recto resulta igual que la de principio. Físicamente $j = 0$, implica que el peso del cable es igualado a las fuerzas

de empuje del fluido, razón por la cual y para tramos rectos, no hay una fuerza normal entre el cable y la tubería y por tanto tampoco fuerzas de rozamiento resultantes.

La influencia del término j también es notoria en las ecuaciones para tramos curvos. En estas ecuaciones aparecen términos asociados a el aumento de tensión debido a las fuerzas normales generadas por el cambio de dirección del cable, específicamente el término $T1 e^{f(\theta-\theta1)}$, donde, recordando, f es el coeficiente de fricción, $T1$ la tensión de entrada a la curva y θ y $\theta1$ los ángulos fin de curva y principios de curva. También aparecen en estas ecuaciones términos asociados j , normalmente afectados por senos, cosenos y el coeficiente de fricción. Dependiendo del tipo de curva y del valor de j , la influencia de este término puede ser positiva, negativa o neutra respecto de la tensión de salida. En la Figura 7.1 se muestra la influencia del término j sobre la tensión de salida en una curva ascendente para diversas tensiones de entrada.

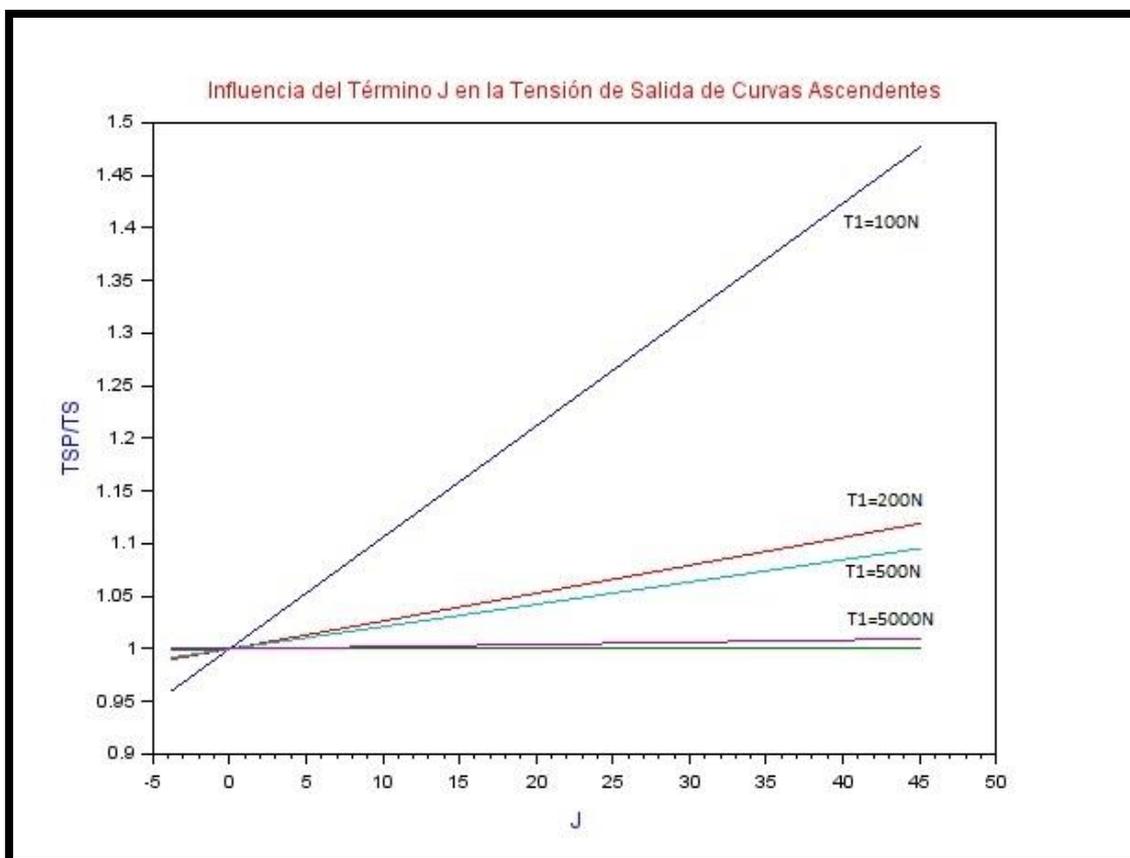


Figura 7.1 Influencia del término J en la tensión de salida para distintas tensiones de entrada a curva. Curva Ascendente.

En la Figura 7.1 se tiene: ángulo de curva $\Theta=90^\circ$, densidad de fluido $\rho=800$ kg/m³, diámetro de cable $d=25$ mm, coeficiente de fricción $f=0.2$, radio de curva $r=1$ m

TSP= Tensión de salida de curva considerando el peso propio del cable TS= Tensión de salida de curva sin consideración del peso propio.

En la Figura 7.2 se muestra la influencia del término j sobre la tensión de salida en una curva descendente también para diversas tensiones de entrada.

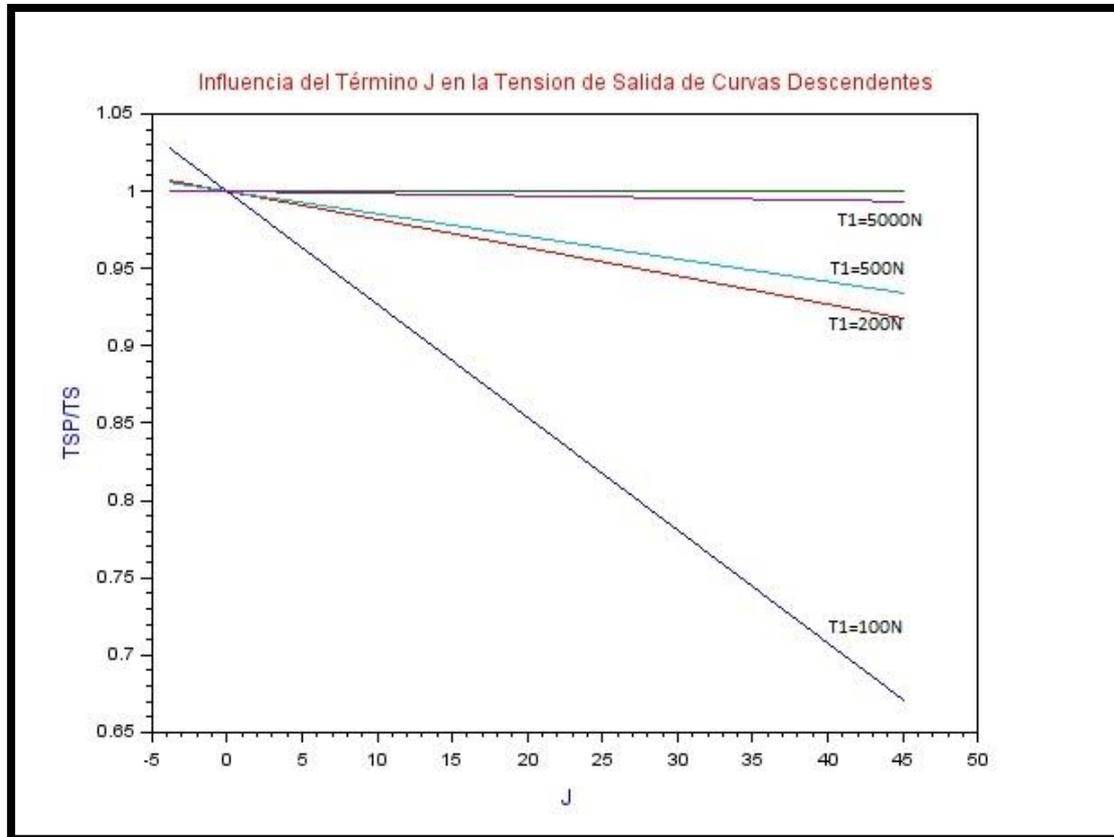


Figura 7.2 Influencia del término J en la tensión de salida para distintas tensiones de entrada a curva. Curva Descendente.

En la Figura 7.2 se tiene: ángulo de curva $\Theta=90^\circ$, densidad de fluido $\rho =800 \text{ kg/m}^3$, diámetro de cable $d=25 \text{ mm}$, coeficiente de fricción $f=0.2$, radio de curva $r=1\text{m}$
 TSP= Tensión de salida de curva considerando el peso propio del cable TS= Tensión de salida de curva sin consideración del peso propio.

La relación entre la tensión de salida y el término j es lineal. Un valor de j mayor que 0 es beneficioso, en términos de la tensión de salida de curva, para curvas descendentes pero perjudicial para curvas ascendentes.

De los factores de influencia en la tensión de salida, el que se visualiza más claramente es sin duda el coeficiente de fricción f . Para los tramos rectos el comportamiento de la tensión de salida es lineal con el coeficiente de fricción, pero para los tramos curvos, cualquiera sea el tipo, el término asociado a el aumento de tensión

debido a las fuerzas normales generadas por el cambio de dirección del cable, es exponencial con este coeficiente de fricción, y es nuevamente el término $T_1 e^{f(\theta-\theta_1)}$. En la Figura 7.3 se muestra la influencia del coeficiente de fricción en el factor exponencial del término asociado al cambio de dirección del cable $e^{f\theta}$.

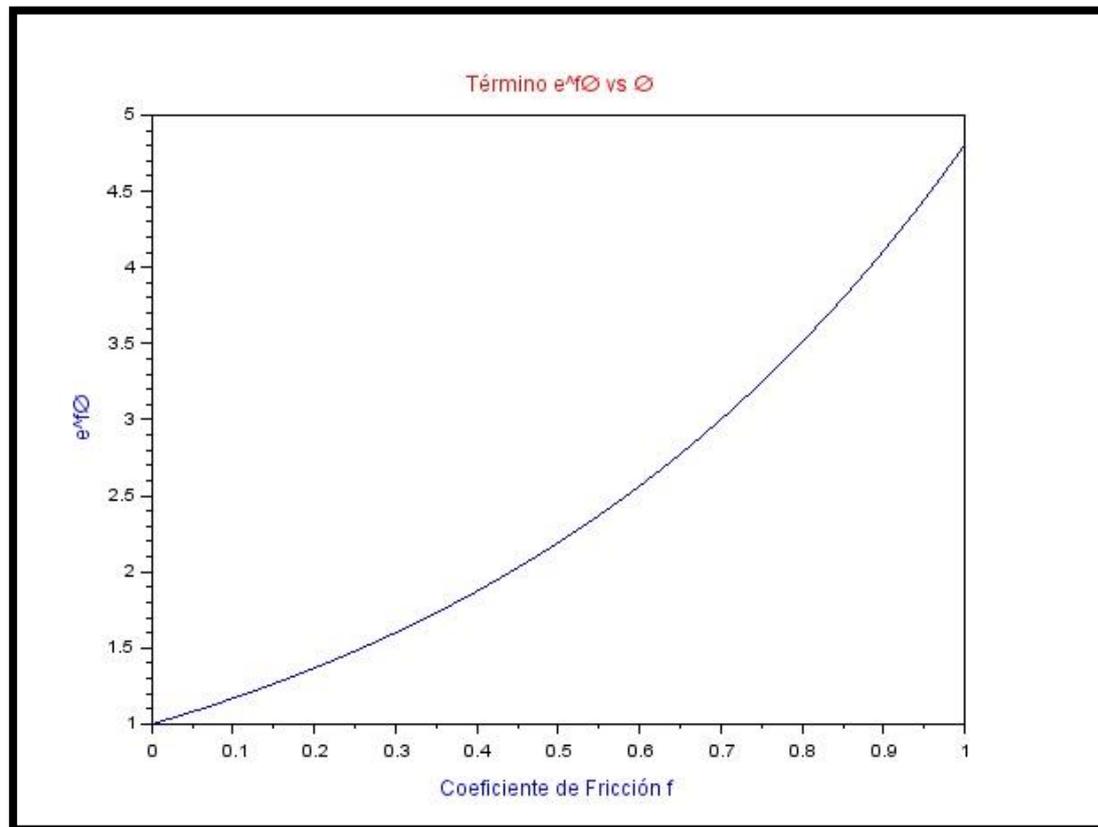


Figura 7.3 Término exponencial de las ecuaciones de tensión de salida para curvas vs coeficiente de fricción.

La rigidez del cable es otro de los factores que afectan las tensiones y en este caso, siempre de forma negativa ya que genera fuerzas normales adicionales y por tanto fuerzas de rozamiento asociados a estas. Ya visto en capítulos previos, la influencia de este factor puede multiplicar las tensiones de salida de curvas respecto de las que pudieran ser para cable sin rigidez a la flexión.

7.2 Estrategias

Todos los factores de influencia vistos tienen distintos grados de efecto sobre la tensión dependiendo de si se trata de tramos curvos o rectos, así pues, mantener un valor de j cercano a 0 es muy efectivo en la reducción de tensiones en tramos rectos, pero para

el caso de tramos curvos, dependiendo del caso conviene tener valores de j altos o bajos. Considerando que en una tubería usual no habrá sesgo por algún tipo de caso de curva en particular, el valor de $j=0$, será el que redunde en una disminución significativa de los valores de fuerza de arrastre del cable debido a que, con este valor se anulan los incrementos de tensión en tramos rectos. El término j es función de la densidad del fluido ρ , del valor de peso del cable por unidad de longitud δ y área de la sección transversal del cable A ($j = \delta - \rho g \cdot A$), para los valores usuales de estas variables un aumento del diámetro del cable es suficiente para alcanzar el valor de $j=0$. Para el cable utilizado en la determinación experimental de las fuerzas de arrastre debería aumentarse del valor de 25 mm de diámetro a 40 mm para alcanzar el cometido. El desarrollo de un cable especial, con materiales de baja densidad que logren esta característica sería lo deseable, pero para el caso de cables existentes la solución vendría dada por la incorporación de elementos de flotabilidad aumentada cuyo coeficiente rozamiento con la tubería fuera lo más bajo posible.

Dado el comportamiento (lineal para tramos rectos y exponencial para curvas) de la tensión como función del coeficiente de fricción f , es fundamental, como estrategia de reducción de fuerzas, utilizar cables con coeficiente de fricción con la tubería lo más bajos posibles. Para el caso de cables pre existentes, como ya dijéramos es deseable incorporar elementos que mejoren su flotabilidad que a la vez tengan un bajo coeficiente de rozamiento.

Sin duda un cable con baja rigidez a la flexión inducirá, en las curvas, fuerzas normales adicionales menores a un cable de rigidez considerable. Tener este factor presente al momento de elegir un umbilical redundará en fuerzas de arrastre considerablemente menores.

Los factores geométricos de la tubería son determinantes y prácticamente imposibles de modificarlos, finalmente lo que establece que las fuerzas de arrastre requeridas sean muy grandes es el hecho de que la tubería, o bien tiene una gran longitud, una importante cantidad de curvas o una combinación de ambas. La tensión de salida de una curva es al menos proporcional a la tensión de entrada, razón ésta que explica el rápido crecimiento de la fuerza de arrastre al cabo de algunas curvas. Una estrategia altamente efectiva es que, al cabo de cierta distancia, la contra tensión del cable vuelva nuevamente a 0, manteniendo así las tensiones en valores bajos. Esta reducción de la contra tensión es posible si la tracción del cable no viene dada por un único dispositivo

de tracción ubicado al comienzo del cable, sino que, se cuenten con varios dispositivos de tracción distribuidos a lo largo de todo el umbilical.

Sin duda esta estrategia requiere la resolución de aspectos técnicos de complejidad como la distribución de energía a estos módulos, la comunicación, etcétera, pero es eficaz ya que, a efectos prácticos, es como si se redujera la longitud de la tubería a la distancia entre los tramos de los sucesivos módulos de tracción.

8 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El presente trabajo tenía como objetivo el estudio de las fuerzas de rozamiento entre el cable umbilical de un robot de inspección o desobstrucción de tubería y la tubería propiamente dicha, para, a partir de este estudio, poder determinar numéricamente el valor de la fuerza necesaria que el dispositivo de tracción deberá desarrollar en su recorrido. Para esto, se desarrolló un modelo que extendió los alcances de los modelos previos contemplando las fuerzas particulares de empuje que se dan en medios fluidos, así como se incorporó el efecto del peso propio del cable pudiéndose llegar a expresiones explícitas de la evolución de las fuerzas de tracción para tramos rectos y curvos en todas sus configuraciones espaciales. Se investigó también los efectos de la rigidez del cable y como el mismo induce fuerzas adicionales en curvas. A los efectos de obtener el valor de la fuerza de arrastre se desarrolló una aplicación sobre la plataforma de software *Scilab*, primeramente, para aplicar el modelo en el cálculo de fuerzas de arrastre en tuberías rígidas. Obteniéndose así una herramienta sencilla de cálculo de fuerzas de arrastre para tuberías compuestas de tramos rectos y curvas estándares. Esta aplicación fue modificada de manera tal, de poder trabajar con tuberías flexibles (como las del objetivo específico del trabajo) y la forma particular en que la geometría de la misma viene dada, esto es, a través de una nube de puntos coordenados. Teniendo en cuenta esto es posible sustentar que los objetivos del trabajo fueron alcanzados. En el presente trabajo, también se realizó el análisis de las ecuaciones, de manera tal, de visualizar la influencia y grado de afectación que las distintas variables del sistema tienen sobre las fuerzas de arrastre. Se concluyó que las ecuaciones pre existentes contenían si los términos más significativos de las fuerzas de arrastre, pero, sobre todo para bajas tensiones, se cometen errores significativos al despreciar el peso en ciertas configuraciones geométricas. Se realizó también este análisis debido a que, tempranamente se detectó que las fuerzas necesarias podrían, por su magnitud, comprometer la integridad del cable y, por tanto, al hacer visible cuales son los términos responsables del aumento de tensiones es posible tomar acciones sobre aquellos de los que se obtendrán mejores beneficios en la reducción de fuerzas. Se puede afirmar que otra de las conclusiones obtenidas es que, para estas longitudes, geometrías de tubería y configuraciones de operación del robot son necesarias la adopción de estrategias que tengan como resultado la reducción de las fuerzas de

arrastre máxima alcanzadas de modo de asegurar la integridad del cable y demás elementos del sistema.

Respecto de los trabajos futuros, y en el contexto del desarrollo de un robot de inspección o desobstrucción de tuberías, lo más importante sería llevar a la práctica las estrategias de reducción de las fuerzas de arrastre, de manera tal de hacer posible que el robot tenga el alcance práctico suficiente sin comprometer la integridad física del cable, el propio robot y las tuberías, posibilitando también la reducción de la potencia necesaria (y por ende el tamaño) del dispositivo de tracción.

Otro trabajo futuro posible sería la inclusión del efecto de la rigidez en la aplicación de software desarrollada, de modo tal de que el modelo que el software aplica sea lo más completo posible.

El estudio de la influencia de las tensiones del cable en la propia tubería es otro de los factibles trabajos futuros. Dadas las altas tensiones desarrolladas por el cable, el hecho de que las tuberías presentan una trayectoria prácticamente sin restricciones al descender en el mar y la ausencia de sujeciones al alcanzar el lecho marino, evaluar si el cable no modifica el recorrido (tendiendo a enderezar los tramos curvos) de la tubería y el efecto de este posible cambio de trayectoria en el sistema puede ser necesario.

9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA

Armando Alberola Romá, Cayetano Mas Galvañ, Rosario Die Maculet, 2015, **”Jorge Juan Santacilia En la España de la Ilustraciòn”**, Universidad de Alicante.

Bowden, F.P. y Tabor, D, 1950, **“The Friction and Lubrication of Solids”**.

Cai Jin Yang, Di Feng Hong, Ge Xue Ren, Zhi Hua Zhao,2013, **“Cable installation simulation by using multibody dynamic model”**, publicado en Multibody System Dynamics Volumen 30 Issue 4 pp 433-447.

C. Daly, J. Krim, 1995, **“Sliding Friction of Xenon Monolayers and Bilayers on Ag (111)”**, publicado en Physical Review Letters Volumen 76, Número 5.

C.T. Sinclair, 1931 **“National Electric Light Association Underground Systems Committee”**, publicado en N.E.L.A. Publication N° 50.

Edison Electric Institute, 1957, **“Underground System Reference Book”**, publicado en EEI publication Volumen 55- Issue 16.

F.H. Buller, 1949, **“Pulling Tension During Cable Installation in Ducts or Pipes”**, publicado en General Electric Review Volumen 58 Issue 8.

Francisco Landon Mojica, Levi Rodríguez, 2010, **“Sistemas submarinos de producción”**, tesis de grado, Instituto Politécnico Nacional, Escuela de Ingeniería y Arquitectura, México.

Greenwood y Williamson, 1966, **“Contact of Nominally Flat Surfaces”**, Proceeding of The Royal Society A.

Haug T, Rebstock K, 2003, **“New material technologies for brakes”**, publicado en Advanced Brake Technology. vol. 4.

Ian Hutchings, 2016, “**Leonardo da Vinci’s studies of friction**”, publicado en *Wear*, Volúmenes 360–361, pp 1-160.

I.L. Singer y H.M. Pollock, 1992, “**Surface Forces and Adhesion**”, publicado en *Fundamentals of Friction: Macroscopical and Microscopical processes*, Kluwer Academic Publishers, pp 351-385.

J.C. Martínez-Rosas, M.A. Arteaga-Pérez, Castillo-Sánchez, 2006, “**Decentralized control of cooperative robots without velocity-force measurements**”, publicado en *Automatic Journal*, Volumen 42, febrero 2006, pp 329-336.

J. Krim, 2002, “**Surface science and the atomic-scale origins of friction: what once was old is new again**”, publicado en *Surface Science* 500 pp 741–758.

Juan Luis Varona Malumbres, 1996, “**Métodos Clásicos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**” Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja.

J.M. Fee, D.Y. Quist, 1991, “**A new cable pulling friction measurement method and results**”, IEEE T&D Conference, Sep 1991.

Mircea Iordanescu, Janislaw Tamowski, 1996, “**Pullflex -New Software For Duct-Cable Pulling Forces**”, publicado en *IEEE Transactions on Power Delivery*, Volumen 11 Issue 2.

Manuel Sellés García, 1995, “**La ley de Amontons y las Indagaciones Sobre el Aire en la Academia de Ciencias de París**”, publicado en *Asclepio-Vol.XLVII-I-1995*.

Olsson, H., Astrom, K., de Wit, C.C., Gafvert, M., y Lischinsky, P, 1998, “**Friction models and friction compensation**”, publicado en *European Journal of Control*, Volumen 4 Issue 3, enero de 1998.

Peter J. Blau, 2013, “**Friction Science and Technology**”, STLE, segunda edición.

R. C. Rifenberg, 1954, “**Pipe-line Design for Pipe-type Feeders**”, publicado en Electrical Engineering Volumen 73 Issue 3.

Tabor D, 1953, “**Mechanical Desing Handbook**”, Cap 7, Friction, Lubrication and Wear, pp 7.1-7.25.

Valentín Popov, 2010, “**Contact Mechanics and Friction**”, Ed Springer.

William A Thue, 2012, “**Electrical Power Cable Engineering**”, 3ª Edición.

A. Gajate, R. Haber y J.R. Alique, 2013, “**Ajuste óptimo de controladores para la compensación de no-linealidades en servomecanismos**”, disponible en <http://www.interempresas.net>, acceso en febrero de 2017.

Cuenca de Campos. Disponible en www.cprm.gov.br. Acceso octubre de 2016.

Dr. Orlando, **A Bacia Do Campos e o Offshore Brasileiro**. Disponible en <http://offshorebrasil.blogspot.com.uy>. Acceso en setiembre de 2016.

Plataforma de exploración. Disponible en www.petrobras.com.br. Acceso en setiembre de 2016.

Tree systems Pemex Subsea Training Module, disponible en www.pemex.com. Acceso en octubre de 2016

Tuberías submarinas, disponible en <http://www.hyo.com.pe/#>. Acceso en noviembre de 2016.

Tuberías submarinas, disponible en <http://www.argosep.com>. Acceso en noviembre de 2016.

Umbilical and subsea control equipment, Pemex Subsea System Training Module, disponible en www.pemex.com. Acceso en octubre de 2016.

Viviane Siqueira da Silva, **Petrobras**, disponible en www.clickmacae.com.br. Acceso en octubre de 2016.