

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MICAEL FISCHMANN

**SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS
LUR'E COM CONTROLE
SATURANTE**

Porto Alegre
2017

MICAEL FISCHMANN

**SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS
LUR'E COM CONTROLE
SATURANTE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores

Porto Alegre
2017

MICAEL FISCHMANN

**SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS
LUR'E COM CONTROLE
SATURANTE**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr, UFRGS
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse - Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan, UFSC
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse - Toulouse, França

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica - São José dos Campos, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. Valner João Brusamarello

Porto Alegre, Julho de 2017.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, uma constante inspiração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. João Manoel Gomes da Silva Jr., pela dedicação e pelos valerosos conselhos. Agradeço também ao meu co-orientador, Prof. Jeferson Vieira Flores, por todo o auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas do PPGEE e do LASCAR, muitos para nomear individualmente, pelos momentos de confraternização, além dos meus amigos de fora da UFRGS. Sem vocês este mestrado teria sido muito menos divertido.

Por último, agradeço a minha família, os quais me apoiaram nos momentos bons e ruins, principalmente à Michele, pelas horas gastas tendo que realizar simulações, escrever ou revisar meus artigos e este trabalho. Muito obrigado por tudo.

RESUMO

Este trabalho apresenta estratégias de controle para a sincronização de dois sistemas não-lineares do tipo Lur'e sob controle saturante. O objetivo no uso de controlador é para que os estados de um sistema escravo sigam a referência dos estados do sistema mestre. Resultados teóricos para a síntese de controladores são propostos considerando diferentes hipóteses sobre a não-linearidade do sistema Lur'e. Primeiramente esta é tratada como uma função genérica que satisfaz globalmente uma condição de setor, enquanto que posteriormente assume-se que a função não-linear é uma função linear por partes e um modelo equivalente baseado em funções saturação é empregado para descrever os efeitos da mesma no comportamento dinâmico do sistema. São considerados, ainda, duas estratégias de controle: realimentação estática dos estados dos sistemas e realimentação dinâmica da saída dos sistemas, incluindo neste último caso elementos referentes às não-linearidades inerentes do sistema Lur'e e um elemento *anti-windup*. O projeto dos parâmetros de cada controlador é feito através de problemas de otimização convexa com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (*LMIs*) tendo como objetivo maximizar o conjunto de estados iniciais nos quais a sincronização é assegurada. A formulação dos problemas de otimização é obtida através de inequações matriciais lineares, utilizando-se a teoria de estabilidade de Lyapunov juntamente com métodos baseados em condições de setor para assegurar a convergência assintótica do erro de sincronização para zero, i.e. garantir que os estados do sistema mestre são seguidos pelos do escravo. Os métodos propostos são ilustrados por meio de exemplos numéricos tendo como objetivo a sincronização de dois circuitos de Chua.

Palavras-chave: Sincronização, sistemas Lur'e, saturação, funções lineares por partes.

ABSTRACT

This work presents control strategies for the synchronization of two nonlinear Lur'e systems subject to control saturation. The objective of the use of controllers is so that the states of a slave system follow the reference of the states of the master system. Theoretical results for the synthesis of controllers are proposed considering different hypothesis about the nonlinearity of the Lur'e system. Initially it is considered as being a generic function that satisfies globally a sector condition, while afterwards it is assumed that the non-linear function is a piecewise-linear function and an equivalent saturation function model is employed in order to describe its effect on the system's dynamic behaviour. Two controller strategies are considered: a static feedback of the system's states and a dynamic feedback of the system's output, coupled, in the last case, with elements based on the system's non-linearities and an anti-windup element is considered. The design of the parameters of each controller is generated by convex optimization problems with restrictions in the form of linear matrix inequalities (LMI) having as objective maximizing the set of initial conditions for which synchronization is guaranteed. The optimization problems are formulated by the means of linear matrix inequalities based on Lyapunov's stability theory and a sector-based approach to ensure null synchronization error, i.e. to ensure the local asymptotic convergence of the slave state to the master one. The proposed methods are illustrated by numerical examples with the objective of the synchronization of two Chua's circuits.

Keywords: synchronization, Lur'e systems, control saturation, piecewise-linear functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Diagrama de um Sistema do tipo Lur'e	21
Figura 2:	Diagrama de blocos da sincronização dos sistemas mestre e escravo	22
Figura 3:	Exemplo de função não-linear genérica	24
Figura 4:	Exemplo de função PWL com 2 pontos de quebra	27
Figura 5:	Função não-linear $\sigma_{(i)}(f)$ delimitada por setor.	33
Figura 6:	Função não-linear $\Psi_{j(i)}(f)$ delimitada por setor.	34
Figura 7:	Circuito de Chua com diodo de Chua	43
Figura 8:	Esquemático do Diodo de Chua	44
Figura 9:	Função PWL do circuito de Chua com um ponto de quebra	44
Figura 10:	Estimativa tridimensional da região de atração do caso geral	46
Figura 11:	Estimativa tridimensional da região de atração do caso PWL	47
Figura 12:	Comparação dos cortes ($e_{(3)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação estática de estados: azul para o caso geral; vermelho para o caso PWL	47
Figura 13:	Comparação dos cortes ($e_{(2)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação estática de estados: azul para o caso geral; vermelho para o caso PWL	48
Figura 14:	Comparação dos cortes ($e_{(1)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação estática de estados: azul para o caso geral; vermelho para o caso PWL	48
Figura 15:	Comportamento temporal do sinal de erro	49
Figura 16:	Comportamento temporal do sinal de controle	50
Figura 17:	Trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$	50
Figura 18:	Comportamento temporal do sinal de erro	51
Figura 19:	Comportamento temporal dos estados do sistema Mestre	51
Figura 20:	Comportamento temporal dos estados do sistema Escravo	52
Figura 21:	Estimativa tridimensional da região de atração do caso geral	72
Figura 22:	Estimativa tridimensional da região de atração do caso PWL	72
Figura 23:	Comparação dos cortes ($e_{(3)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação dinâmica de saída: azul para o caso geral; vermelho para o caso PWL	73
Figura 24:	Comparação dos cortes ($e_{(2)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação dinâmica de saída: azul para o caso geral; vermelho para o caso PWL	73
Figura 25:	Comparação dos cortes ($e_{(1)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação dinâmica de saída: azul para o caso geral; vermelho para o caso PWL	74

Figura 26:	Comportamento temporal do sinal de erro	75
Figura 27:	Comportamento temporal do sinal de controle	75
Figura 28:	Trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$. . .	76
Figura 29:	Comportamento temporal do sinal de erro	77
Figura 31:	Comportamento temporal das saídas do sistema Escravo	77
Figura 30:	Comportamento temporal das saídas do sistema Mestre	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Parâmetros físicos considerados para o circuito de Chua	43
Tabela 2:	Parâmetros considerados para as simulações numéricas	45

LISTA DE ABREVIATURAS

<i>BMI</i>	<i>Bilinear Matrix Inequality</i>
FLK	Funcional de Lyapunov-Krasovski
<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequality</i>
<i>PWL</i>	<i>Piecewise-linear</i>
<i>UKF</i>	<i>Unscented Kalman Filter</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$*$	Elemento simétrico de uma matriz
\bullet	Elemento irrelevante de uma matriz
\triangleq	Definição de igualdade
$0_{a \times b}$	Matriz nula com a linhas e b colunas
δ_j	Coefficiente de um elemento da função linear por partes $\sigma(\cdot)$
ζ	Vetor aumentado
Ω_σ	Máxima inclinação de um elemento de $\sigma(\cdot)$
$\sigma(\cdot)$	Não-linearidade do sistema Lur'e
$\rho(\cdot, \cdot)$	Não-linearidade composta baseada em $\sigma(\cdot)$
Δ_j	Matriz de coeficientes da função linear por partes $\sigma(\cdot)$
$\Lambda(\cdot, \cdot)$	Não-linearidade composta baseada em $\Psi(\cdot)$
Ξ	Conjunto poliedral usado nos problemas de otimização
\sum	Somatório
$\Phi(\cdot, \cdot)$	Função zona-morta referente à saturação do sinal de controle
$\Psi(\cdot, \cdot)$	Função zona-morta referente à saturação usada na não-linearidade $\sigma(\cdot)$
$\mathcal{L}_{C,D}$	controlador de realimentação dinâmica de saída
$\mathcal{L}_{C,E}$	controlador de realimentação estática de estados
\mathcal{M}	Sistema mestre
\mathcal{S}	Sistema escravo
\mathcal{Z}_0	Conjunto conhecido de trajetórias nos quais há sincronização
\mathbb{R}^n	Conjunto dos números reais de ordem n
$diag\{A, B\}$	Matriz diagonal com elementos A, B
$e(t)$	Diferença entre os estados dos sistemas mestre e escravo
$\min(a, b)$	Função que retorna o menor valor entre a e b
$\text{sign}(a)$	Função não-linear de sinal, com valor 1 para $a > 0$, valor -1 para $a < 0$ e valor nulo para $a = 0$

$sat(a, b)$	Função saturação simétrica da variável a com valor máximo b
$u(t)$	Sinal de controle saturado
$v(t)$	Sinal de controle pré-saturação
$x_M(t)$	Estados do sistema mestre
$x_S(t)$	Estados do sistema escravo
$y_e(t)$	Diferença entre as saídas dos sistemas mestre e escravo
$y_M(t)$	Saída do sistema mestre
$y_S(t)$	Saída do sistema escravo
$z_e(t)$	Diferença entre as variáveis $z_M(t)$ e $z_S(t)$
$z_M(t)$	Entrada da não-linearidade $\sigma(\cdot)$ do sistema mestre
$z_S(t)$	Entrada da não-linearidade $\sigma(\cdot)$ do sistema escravo
A_i	Matriz A de índice i
$A_{(i)}$	i -ésima linha da Matriz A
$A_{i(j)}$	j -ésima linha da Matriz A de índice i
$A_{(i,j)}$	Elemento (i, j) da Matriz A
I_a	Matriz identidade com a linhas de dimensão a
$V(\cdot)$	Função candidata de Lyapunov
$Sim\{A\}$	Soma hermetiana $(A + A')$ da Matriz A

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivação	15
1.2	Estado da Arte	16
1.2.1	Trabalhos lidando com Sincronização de Sistemas	16
1.2.2	Trabalhos lidando com Saturação do Sinal de Controle	18
1.2.3	Trabalhos lidando com estabilidade de Sistemas Lur'e com não-linearidades lineares por partes	18
1.2.4	Trabalhos lidando com controladores de realimentação dinâmica de saída	19
1.3	Objetivos	19
1.4	Estrutura	20
2	DESCRIÇÃO DO SISTEMA MESTRE E ESCRAVO	21
2.1	Introdução	21
2.2	Formulação do problema de sincronização	22
2.3	Não-Linearidades Genéricas	24
2.3.1	Realimentação Estática de Estados	24
2.3.2	Realimentação Dinâmica	25
2.4	Caso Linear por Partes	26
2.4.1	Realimentação Estática	28
2.4.2	Realimentação Dinâmica	29
2.5	Conclusão	31
3	REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE ESTADOS	32
3.1	Relações Baseadas em Setor	32
3.2	Condições de Estabilidade	37
3.2.1	Caso Geral	37
3.2.2	Caso Linear por Partes	39
3.3	Problema de Otimização	41
3.4	Validação Numérica dos Resultados	42
3.4.1	Circuito de Chua	42
3.4.2	Resultados Numéricos	45
3.5	Conclusão	52
4	REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA	54
4.1	Relações Baseadas em Setor	54
4.2	Condições de Estabilidade	55

4.2.1	Caso Geral	55
4.2.2	Caso Linear por Partes	60
4.3	Problema de Otimização	68
4.4	Validação Numérica	69
4.5	Conclusão	78
5	CONCLUSÕES	80
	REFERÊNCIAS	82

1 INTRODUÇÃO

A sincronização de sistemas não-lineares tem sido um problema vastamente estudado, principalmente em relação a sistemas caóticos, os quais foram o foco dos primeiros estudos desta área. Em um dos primeiros estudos realizados sobre a sincronização de sistemas caóticos (PECORA; CARROL, 1990), foi demonstrado que a sincronização das trajetórias de um sistema escravo com as de um sistema mestre pode ser atingida, desde que ambos possuam o mesmo modelo dinâmico e que ambos possuam um dos estados em comum. Trabalhos subsequentes ((SUYKENS; CURRAN; CHUA, 1997), por exemplo) demonstraram que, ao considerar a diferença entre as trajetórias dos sistemas e aplicar a teoria de estabilidade de Lyapunov (CHEN, 1998), o problema estudado pode ser visto então como um problema de controle. Deste modo, ao assegurar que a dinâmica do erro entre os estados dos sistemas mestre e escravo seja assintoticamente estável é possível obter a sincronização, necessitando apenas que ambos os sistemas possuam o mesmo modelo dinâmico, dispensando assim um estado em comum.

Dentre as estratégias de controle encontradas na literatura para a sincronização de sistemas não-lineares, predomina o uso de realimentação estática de estados, necessitando a informação completa de todos os estados do sistema, o que nem sempre é factível ao se lidar com sistemas reais. Portanto, o presente trabalho propõe a aplicação de um controlador de realimentação dinâmica de saída. Além disso, também é considerado neste trabalho o caso em que a não-linearidade do sistema Lur'e pode ser modelada como uma função linear por partes (*PWL*, do inglês *piecewise-linear*) monotônica, podendo ser subsequentemente modelada por funções de saturação, o que pode ser vantajoso ao se comparar com a modelagem usando a não-linearidade como uma função de setor genérica. Ademais, grande parte dos trabalhos encontrados na literatura não consideram as limitações físicas dos atuadores, o que é importante ao lidar com sistemas reais. Portanto, foi ponderado relevante incluir tal consideração neste trabalho. A fim de validar a estratégia proposta, são apresentadas comparações entre os resultados considerando a função não-linear do sistema Lur'e genérica e os considerando diretamente uma função *PWL*, ambas considerando a saturação do sinal de controle e sendo aplicadas tanto para estratégia de controle por realimentações de estados, a mais encontrada na literatura, quanto para a estratégia de realimentação dinâmica de saída proposta.

1.1 Motivação

A exploração de novas estratégias de controle para sincronização de sistemas não-lineares é de alto interesse acadêmico, pois a sincronização de sistemas possui

múltiplas aplicações práticas. Considerando a sincronização de sistemas caóticos, um subconjunto de sistemas não-lineares, podem ser mencionadas, por exemplo, aplicações em comunicação segura (JIANG et al., 2016) (TAYEBI; BERBER; SWAIN, 2016), em encriptação de dados (LIU et al., 2016) e no uso de lasers semi-condutores (ARGYRIS; PIKASIS; SYVRIDIS, 2016). Entre os sistemas não-lineares, a classe considerada neste trabalho, sistemas do tipo Lur'e, possui como vantagem não apenas que a não-linearidade intrínseca do sistema pertence a um setor, possibilitando análises por condições de setor, como diversos sistemas caóticos, como o circuito de Chua (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985) e atratores hiper-caóticos (ZHANG; LU; ZHENG, 2011) pertencem a esta classe. Assim, os resultados obtidos nesta dissertação podem ser considerados nas aplicações mencionadas anteriormente.

Entretanto, um dos principais problemas encontrados ao aplicar a sincronização de sistemas não-lineares é a saturação do sinal de controle. Este problema ocorre pelas limitações físicas dos atuadores e, caso o erro inicial entre os estados mestre e escravo seja grande, pode levar a um comportamento divergente, ou seja, no qual a sincronização não ocorre ou a uma performance transitória deteriorada (TARBOURIECH et al., 2011), o que dependendo da aplicação pode ser inadmissível. Assim, neste trabalho busca-se considerar a saturação na síntese do controlador, garantindo que a origem do sistema em malha fechada em torno do erro de sincronização seja globalmente estável ou, quando isto não for possível, garantir pelo menos a sua estabilidade local, i. e., garantir que a sincronização seja obtida em uma região em torno da origem do erro de sincronização.

A comparação entre as considerações sobre a não-linearidade do sistema Lur'e tem como objetivo validar a utilização, quando possível, de modelagem da não-linearidade por funções lineares por partes como possuindo vantagens relacionadas a considerar mais informações. A escolha de se considerar uma realimentação dinâmica de saída está relacionada a esta estratégia poder ser mais facilmente aplicada a sistemas reais, os quais em diversas ocasiões não possuem todos os estados disponíveis para serem medidos.

1.2 Estado da Arte

Existem múltiplos exemplos de sincronização de sistemas do tipo Lur'e na literatura, muitos destes sendo sistemas caóticos. Dentre os trabalhos pesquisados, encontram-se exemplos de sincronização de sistemas levando em consideração atraso de comunicação ou saturação do sinal de controle, entretanto os exemplos são de síntese de controladores de realimentação estática. Os poucos exemplos de sincronização com realimentação dinâmica de saída não apresentam a síntese dos controladores.

1.2.1 Trabalhos lidando com Sincronização de Sistemas

No trabalho de Aguirre (AGUIRRE; TEIXEIRA; TÔRRES, 2005), o método *unscented Kalman filter* (*UKF*) é introduzido para a estimação de parâmetros de sistemas não-lineares digitais. O artigo demonstra como este método pode ser utilizado para sistemas reais sem conhecimento prévio do modelo, tendo acesso apenas aos dados de entrada e de saída. O artigo conclui com um exemplo utilizando o sistema não-linear conhecido como atrator de Lorenz, um sistema com comportamento caótico.

Em (PALHARES et al., 2007) foi realizado a sincronização de um circuito de

Chua digital. Os parâmetros dos sistemas foram obtidos pelo método UKF e o controlador foi obtido pelo método \mathcal{H}_∞ . O artigo é concluído com um experimento prático de utilizar o circuito de Chua digital para transmissão segura de informação. Por outro lado, em (PALHARES et al., 2008) investiga-se o efeito do atraso variante de sinal na sincronização do circuito de Chua. Para garantir a estabilidade assintótica foram consideradas três variações de um sistema com realimentação do erro e da diferença do sinal atrasado do sistema mestre com o sinal atual do sistema escravo. Os controladores foram sintetizados por três técnicas, todas utilizando um funcional de Lyapunov-Krasovskii (FLK). A primeira técnica utilizou somente o funcional, a segunda utilizou na síntese garantias para que a convergência ocorresse de forma exponencial e a terceira expandiu o primeiro teorema para garantir a sincronização mesmo com parâmetros incertos.

O trabalho de Zhang (ZHANG; LU; ZHENG, 2011) também inclui o atraso de sinal na dinâmica do sistema não-linear para um uso de comunicação segura discreta. A contribuição deste trabalho está no uso de uma discretização do FLK utilizado, discretizando também o atraso de sinal. Deste modo, foi demonstrado em um exemplo numérico utilizando o circuito de Chua que a utilização deste FLK discretizado gerou um resultado menos conservador do que ao utilizar um FLK convencional.

Em (LI et al., 2016), por outro lado, o atraso de sinal é tratado de outra forma. Além de utilizar realimentação do erro e da diferença do sinal atrasado do sistema mestre com o sinal atual do sistema escravo, como o trabalho mencionado anteriormente, foi utilizado um FLK aumentado. Um exemplo utilizando circuito de Chua foi empregado para ilustrar os resultados e foi demonstrado que o FLK aumentado resultou em uma redução de conservadorismo em relação ao máximo atraso de sinal admitido quando comparado com um FLK típico.

Em (HUA; GE; GUAN, 2015) também foi realizado uma sincronização de circuito de Chua com atraso de sinal. Diferentemente dos trabalhos anteriores, foi utilizado apenas realimentação do erro no instante de amostragem, mas o atraso de sinal foi incluído na dinâmica dos estados de cada sistema, sendo contabilizado não apenas o atraso do sistema mestre, como também o do sistema escravo. Além disso foi proposto um novo FLK, incluindo a parcela não-linear do sistema, sendo obtido um resultado menos conservador com relação máximo valor de tempo de amostragem ao se comparar com funcionais convencionais.

No trabalho de Yang (YANG et al., 2016) é empregado um controlador de modos deslizantes (*sliding mode*) (KHALIL, 1992) para garantir a sincronização de sistemas Lur'e caóticos com atraso de sinal. Este artigo é um dos poucos encontrados que considera que o sinal de controle está presente no sistema mestre ao invés de considerar este no sistema escravo, resultando em trocas de sinais ao se comparar com outros trabalhos. Não foram propostos problemas de otimização, sendo analisados apenas a factibilidade das estratégias de controle. Os autores buscaram comparar resultados numéricos simulados, obtendo uma sincronização mais rápida com *sliding mode* do que ao utilizar uma realimentação estática, apesar de haver *chattering* no valor do sinal de controle.

A sincronização de uma rede de sistemas Lur'e, sob perturbações distintas para cada nodo na entrada dos sistemas, é tratado em (KIM; PERSIS, 2015). Foi considerado no controlador uma parcela adaptativa para lidar com a ausência de passividade (KHALIL, 1992) causada pelas perturbações. Foi utilizado um exemplo com uma

rede possuindo quatro circuitos de Chua para ilustrar os resultados obtidos.

1.2.2 Trabalhos lidando com Saturação do Sinal de Controle

O livro de Tarbouriech (TARBOURIECH et al., 2011) trata da estabilidade de sistemas lineares sob atuadores saturantes de diversas formas. Uma forma particularmente relevante para o presente trabalho é de considerar a função saturação como a diferença de uma função linear e de uma zona-morta. Este modelo permite análises de setor locais, as quais podem ser menos conservadoras em relação à estimação da região de atração do que análises de setor globais. Além do presente trabalho, diversos artigos descritos nesta subseção utilizaram esta abordagem.

O uso de termos *anti-windup* em compensadores dinâmicos é apresentado, por exemplo, em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005), que lida com sistemas sob controle saturante utilizando o modelo de saturação descrito pela diferença de uma função linear e de uma zona-morta. Neste trabalho foi demonstrado que ao adicionar um elemento *anti-windup* ao controlador resultou em uma região de atração menos conservadora do que quando o elemento não foi considerado. Um exemplo numérico é utilizado para validar os resultados obtidos.

Em (IQBAL et al., 2015), por exemplo, é utilizado a abordagem mencionada na referência anterior. Este artigo se destaca ao considerar a sincronização de dois sistemas não-lineares com o mesmo modelo, mas parâmetros distintos. Para obter a sincronização foi considerada uma lei de controle adaptativa que incluía a dinâmica não-linear do sistema escravo. Um exemplo considerando o sistema caótico de Rössler valida os resultados descritos.

Em (HAO; YANG, 2013) um controlador tolerante a falhas de atuadores e a saturação é proposto para garantir a estabilidade local do erro de sincronização. Foi considerado um controle adaptativo por modos deslizantes como solução deste problema. A saturação foi modelada como o primeiro modelo politópico apresentado em (TARBOURIECH et al., 2011). Um exemplo ilustrado encerra o trabalho.

O trabalho de Ma (MA; JING, 2014) aborda o problema da sincronização robusta de sistemas saturantes com atraso variável através de uma realimentação estática de estados. Foi utilizados um FLK para lidar com o atraso variável e a saturação foi modelada como uma zona-morta. Foram propostas condições de desigualdades matriciais lineares (*LMI*, do inglês *linear matrix inequalities*) para garantir um critério de desempenho \mathcal{H}_∞ .

1.2.3 Trabalhos lidando com estabilidade de Sistemas Lur'e com não-linearidades lineares por partes

Em (HU; HUANG; LIN, 2004) é proposto o uso de um modelo *PWL* para reduzir o conservadorismo na análise de sistemas com funções não-lineares limitadas em setores. Mostra-se que esta função *PWL* pode ser descrita como uma função linear somada a funções de saturação e analisada sob um ponto de vista de inclusões diferenciais politópicas. Argumentos de convexidade podem então ser aplicados ao se considerar que a função não-linear analisada está sempre entre duas funções lineares por partes.

O modelo de saturações para funções *PWL* descrito em (HU; HUANG; LIN, 2004) é utilizado em (LI; LIN, 2016) para a análise de estabilidade interna de sistemas Lur'e, utilizando uma abordagem por zona-morta para modelar a saturação. Um novo método para a determinação da região de atração considerando o método

PWL é então proposto. Um problema de otimização é considerado, gerando uma desigualdade bilinear matricial (BMI , do inglês *bilinear matrix inequalities*).

1.2.4 Trabalhos lidando com controladores de realimentação dinâmica de saída

O uso de controladores dinâmicos para a sincronização de sistemas não-lineares caóticos é introduzido em (SUYKENS; CURRAN; CHUA, 1997). Entretanto, é realizado apenas uma análise de estabilidade dado o controlador de realimentação dinâmica de saída, não sendo realizada a síntese do mesmo. O artigo é concluído com duas simulações, uma com o circuito de Chua e a segunda com um sistema híper-caótico. Por outro lado, em (SUYKENS et al., 1997) é realizada a síntese de um controlador linear de realimentação dinâmica de saída para a sincronização. O problema resultante é não-convexo, portanto os parâmetros do controlador são gerados aleatoriamente e otimizados posteriormente através de soluções sub-ótimas. O controlador obtido atende o critério \mathcal{H}_∞ através do problema de otimização considerado. Um exemplo com circuito de Chua é utilizado para validar o trabalho.

O trabalho de Gomes da Silva Jr. (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013) não trata de sincronização de sistemas, mas trata da síntese de controladores dinâmicos para estabilidade interna e externa de sistemas do tipo Lur'e com controle saturante. Diferentemente de (SUYKENS et al., 1997), as não-linearidades intrínsecas ao sistema e um elemento *anti-windup* são incluídas na dinâmica do controlador. Quatro problemas de otimização convexos, baseados em restrições LMI , são propostos; um para a maximização da estimativa da região de atração, um segundo priorizando a performance e os últimos dois a tolerância e a rejeição de perturbações.

1.3 Objetivos

O presente trabalho possui três objetivos principais. O primeiro objetivo consiste em avaliar o impacto de se utilizar um modelo PWL para descrever a não-linearidade do sistema Lur'e sob o ponto de vista da região de atração quando comparado com utilizar apenas a informação de qual setor a não-linearidade está contida. O segundo objetivo baseia-se em considerar a saturação do sinal de controle na síntese dos controladores, o que é uma importante consideração para as aplicações práticas mencionadas anteriormente. Por último, o terceiro objetivo representa desenvolver uma base teórica para a síntese de realimentação dinâmica de saída para sincronização de sistemas, o que é pouco considerado na literatura existente.

Para validar os resultados obtidos, garantindo que o erro de sincronização se anule assintoticamente, isto é, que os sistemas entrem em sincronização, serão propostas condições LMI obtidas a partir de uma função de Lyapunov candidata quadrática e de condições de setor para lidar com as não-linearidades acima. Um exemplo numérico considerando o caso da sincronização do circuito de Chua é empregado como uma forma de comparar as metodologias exploradas dentro de cada estratégia de controle. Busca-se validar os resultados ilustrados por simulações numéricas utilizando o programa MATLAB¹.

¹MATLAB's solver mincx (MATLAB 2017a, The MathWorks Inc., Natick, MA, 2017)

1.4 Estrutura

Esta dissertação está dividida como segue. No capítulo 2 os sistemas mestre e escravo que serão estudados são apresentados, diferenciando as duas metodologias para lidar com a não-linearidade intrínseca ao sistema Lur'e e descrevendo a saturação considerada para o sinal de controle. Além disso, são apresentadas as estratégias de controle utilizadas neste trabalho, enunciando os problemas a serem analisados nos capítulos seguintes.

O capítulo 3 aborda a síntese do controlador de realimentação estática de estados. Inicia-se o capítulo com as relações baseadas em setor que serão utilizadas conjuntamente com a função candidata de Lyapunov para garantir a estabilidade assintótica do sinal de erro de sincronização. Em sequência, os teoremas com condições para solução dos problemas de síntese enunciados no capítulo 2 relacionados à estratégia de controle por realimentação estática de estados são apresentados, seguidas pelo problema de otimização empregado. Finalizando o capítulo está uma breve descrição do sistema utilizado neste trabalho para ilustrar os resultados obtidos, o circuito de Chua, e as simulações numéricas empregadas para a comparação dos teoremas apresentados neste capítulo.

O capítulo 4 segue uma lógica similar à do capítulo 3. Primeiramente são analisadas as relações baseadas em setor que diferem em relação às observadas no capítulo 3. Em seguida os teoremas para a síntese dos controladores de realimentação dinâmica de saída são apresentados, sendo seguidos pelos problemas de otimização dos mesmos. Por último, é feita uma simulação utilizando o circuito de Chua para validar os teoremas e realizar as comparações.

No capítulo 5, tem-se a análise dos argumentos teóricos feitos no decorrer do texto, assim como a validação de tais hipóteses levando em consideração os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4. Considerações finais e sugestões de trabalhos futuros encerram o capítulo.

2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA MESTRE E ESCRAVO

2.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à apresentação dos problemas que serão tratados nos capítulos 3 e 4, sendo tratados a descrição dos sistemas Lur'e utilizados, a modelagem da saturação, as duas abordagens para a não-linearidade e as descrições das duas estratégias de controle. Cada subseção deste capítulo finaliza com a descrição de um dos problemas estudados neste trabalho.

Um sistema não-linear da classe Lur'e é caracterizado por ter uma parcela linear e uma não-linearidade na sua dinâmica. Esta não linearidade é tratada como uma realimentação, podendo depender dos estados ou da saída do sistema, conforme representado na Fig. 1. Uma das principais características de um sistema Lur'e é de que a não-linearidade do sistema está contida global ou localmente em um setor (KHALIL, 1992). Isto permite que relações baseadas em setor sejam exploradas na formulação de condições de análise e síntese de controladores estabilizantes.

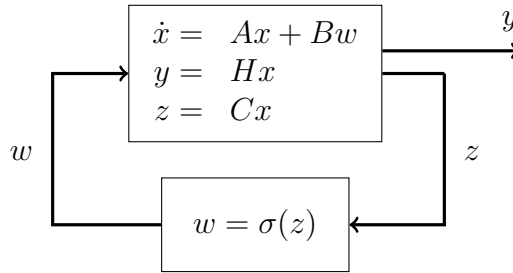


Figura 1: Diagrama de um Sistema do tipo Lur'e

O objetivo deste trabalho consiste em obter a sincronização entre dois sistemas do tipo Lur'e, com o sistema escolhido como base denominado de mestre enquanto que o sistema que deve seguir este último é denominado de sistema escravo. A sincronização consiste em modificar a dinâmica do sistema escravo através de um sinal de controle de tal forma que os estados destes se igualem aos estados do sistema mestre assintoticamente.

Conforme pode ser visto na Fig. 2, a sincronização de sistemas ocorre da seguinte forma. Um sinal $v(t)$ é gerado para cada sistema escravo em um sistema controlador, que usa como entrada as diferenças dos estados ou das saídas dos sistemas mestre e escravo, sendo que neste trabalho são estudados estratégias de controle: por realimentação de estados e por realimentação dinâmica de saída. Como será levado em conta as limitações dos atuadores, o sinal $v(t)$, o qual é o sinal determinado pelo

controlador, é limitado em valor de sua magnitude, sendo obtido então o sinal $u(t)$, que é o sinal saturado efetivamente aplicado ao escravo para fim de saturação.

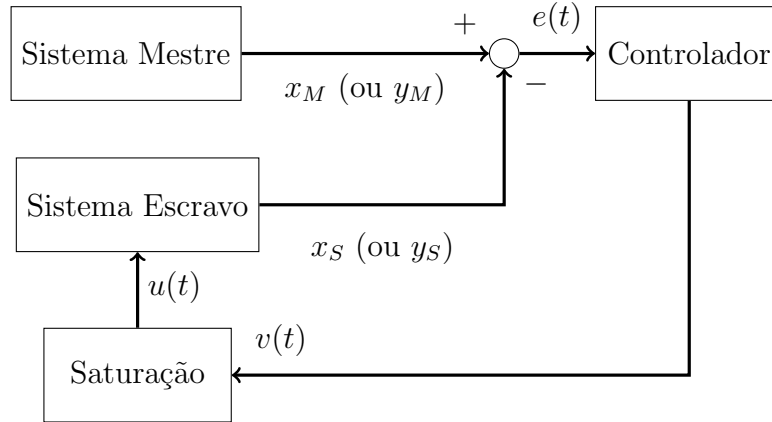


Figura 2: Diagrama de blocos da sincronização dos sistemas mestre e escravo

2.2 Formulação do problema de sincronização

Considere os seguintes sistemas não-lineares do tipo Lur'e mestre \mathcal{M} e escravo \mathcal{S}

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \dot{x}_M = Ax_M + B\sigma(z_M) \\ y_M = Hx_M \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}_S = Ax_S + B\sigma(z_S) + u \\ y_S = Hx_S \end{cases} \quad (2)$$

onde $x_M, x_S \in \mathbb{R}^n$ são respectivamente os estados dos sistemas mestre e escravo, $y_M, y_S \in \mathbb{R}^q$ são as saídas dos sistemas mestre e escravo, $z_M(t), z_S(t) \in \mathbb{R}^m$ são as funções lineares baseadas nos estados ou saídas do sistema Lur'e, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ é a entrada de sinal de controle e $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial não-linear descentralizada. A, B, H são matrizes reais com dimensões apropriadas.

As variáveis $z_M(t)$ e $z_S(t)$ serão consideradas de diferentes formas dependendo da estratégia de controle analisada. Como para o controlador de realimentação estática de estados é realizada uma realimentação baseada nos estados, a não-linearidade também será baseada nos estados do sistema, tendo a forma $z_M(t) = C_E x_M(t)$ para o sistema mestre e $z_S(t) = C_E x_S(t)$ para o sistema escravo. Por outro lado, como o controlador de realimentação dinâmica de saída utiliza a informação da saída do sistema, é conveniente escrever a não-linearidade como uma função da saída do sistema ao utilizar este controlador, portanto as não-linearidades dos sistemas mestre e escravo são, respectivamente, $z_M(t) = C_D y_M(t)$ e $z_S(t) = C_D y_S(t)$. As matrizes C_E, C_D são matrizes reais de dimensões apropriadas.

Como o objetivo da sincronização é garantir que os estados do sistema escravo sigam o do sistema mestre, é conveniente definir uma variável referente à diferença destes valores. Definindo e, z_e e y_e como as diferenças entre as variáveis dos sistemas mestre e escravo, i.e. $e = x_M - x_S$, $z_e = z_M - z_S$ e $y_e = y_M - y_S = He$, pode-se, então, escrever a dinâmica do sinal de erro $e(t)$ como sendo:

$$\dot{e} = Ae + B(\sigma(z_M) - \sigma(z_S)) - u$$

$$y_e = He$$

Entretanto, não é desejável que as não-linearidades encontradas na dinâmica do erro não tenham nenhuma dependência ao valor do erro. Uma estratégia encontrada na literatura, como por exemplo em (YANG et al., 2016), consiste em definir uma segunda não-linearidade ρ que depende de duas variáveis, sendo uma delas relacionada ao erro. Assim, considera-se a função vetorial não-linear descentralizada $\rho(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como:

$$\rho(f_1, f_0) \triangleq \sigma(f_1 + f_0) - \sigma(f_0).$$

Como foi definido que $z_e = z_M - z_S$, então pode-se dizer que $z_M = z_e + z_S$. Assim, considerando que f_1 e f_0 de $\rho(f_1, f_0)$ correspondem, respectivamente, a z_e e a z_S , então a dinâmica do erro é dada por:

$$\dot{e} = Ae + B\rho(z_e, z_S) - u \quad (3)$$

Como está sendo observado a saturação dos atuadores, é assumido que o sinal de controle é limitado como segue:

$$|u_{(k)}(t)| \leq u_{0(k)}, \quad k = 1, \dots, n \quad (4)$$

Devido às restrições de magnitude do sinal de controle dadas em (4), o sinal de controle para o propósito de sincronização é assim saturante, ou seja:

$$u_{(k)} = \text{sat}(v_{(k)}, u_{0(k)})$$

onde v é a saída dos controladores apresentados neste capítulo, $u_{0(k)}$ é a limitação em magnitude do sinal de controle e $\text{sat}(v_{(k)}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função clássica de saturação simétrica, i.e.

$$\text{sat}(v_{(k)}, u_{0(k)}) \triangleq \text{sign}(v_{(k)}, u_{0(k)}) \min(|v_{(k)}|, u_{0(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Conforme foi apresentado em (TARBOURIECH et al., 2011), existem diversos métodos para tratar da saturação. O método escolhido consiste em definir uma função descentralizada de zona-morta $\Phi(v)$, de tal forma que:

$$\Phi_{(k)}(v_{(k)}, u_{0(k)}) = v_{(k)} - \text{sat}(v_{(k)}, u_{0(k)}), \quad k = 1, \dots, n$$

Substituindo-se o sinal saturante u pela relação envolvendo a zona-morta $\Phi(v)$ em (3), obtém-se:

$$\dot{e} = Ae + B\rho(z_e, z_S) + \Phi(v, u_0) - v \quad (5)$$

Neste caso, a dinâmica do erro não depende mais diretamente da saturação, mas sim de uma zona-morta. Esta zona-morta permite o uso de uma condição de setor generalizada conforme utilizada em, por exemplo, (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013).

O problema de sincronização entre os sistemas mestre e escravo pode então ser enunciado como segue.

Problema 2.1. *Determinar os parâmetros da estratégia de controle escolhida de tal forma que a origem do erro de sincronização $e(t)$ seja assintoticamente estável.*

Como o erro de sincronização está diretamente relacionado à diferença dos estados dos sistemas mestre e escravo, então caso garanta-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} e \rightarrow 0$, tem-se então $x_S \rightarrow x_M$, assim obtendo a sincronização.

2.3 Não-Linearidades Genéricas

Neste caso a ser estudado assume-se que uma das poucas informações conhecidas da não linearidade $\sigma(\cdot)$ é o setor em que ela se encontra, não havendo necessidade de descrever exatamente a função não-linear. Assume-se que as seguintes características, representadas graficamente em uma não-linearidade exemplo na Fig. 3, são válidas para cada componente individual de $\sigma(\cdot)$, i.e. $\sigma_{(i)}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$:

- (i) $\sigma_{(i)}(f)$ é uma função não-linear contínua com simetria ímpar (i.e. $\sigma_{(i)}(-f) = -\sigma_{(i)}(f)$) e com $\sigma_{(i)}(0) = 0$;
- (ii) é diferenciável por partes com

$$0 < \frac{d(\sigma_{(i)}(f))}{df} \leq \Omega_{\sigma_{(i)}}, \quad \forall f > 0;$$

- (iii) $\sigma_{(i)}(f)$ pertence globalmente ao setor $[0, \Omega_{\sigma_{(i)}}]$, $\Omega_{\sigma_{(i)}} > 0$.

onde $\Omega_{\sigma} = \text{diag}\{\Omega_{\sigma_{(1)}}, \dots, \Omega_{\sigma_{(i)}}\}$.

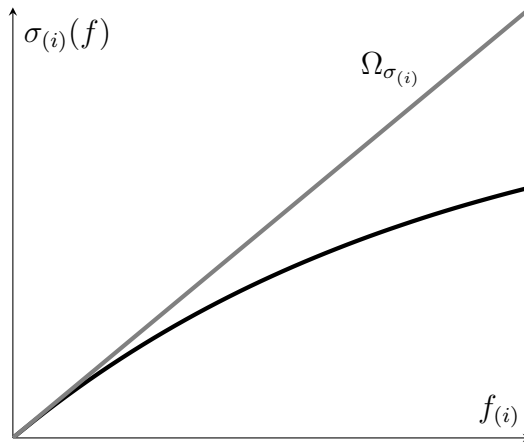


Figura 3: Exemplo de função não-linear genérica

As suposições listadas acima serão utilizadas nas seções 3.1 e 4.1 para obter as relações baseadas em setor relativas às não-linearidades $\sigma(z_e)$ e $\rho(z_e, z_S)$. Com base nas características de $\sigma(\cdot)$ descritas acima, duas estratégias de controle para resolver o Problema 2.1 são apresentados nas sub-seções a seguir, uma por realimentação estática de estados e a segunda por realimentação dinâmica de saída.

2.3.1 Realimentação Estática de Estados

Esta subseção trata da estratégia de controle por realimentação estática de estados. O controlador é apresentado, sendo subsequentemente incluído na dinâmica do erro obtida anteriormente. A subseção se encerra com a apresentação formal do problema relacionado a este controlador.

Conforme utilizado na literatura diversos artigos apresentados na seção 1.2, é inicialmente considerado um controlador do tipo realimentação estática de estados. Este controlador é definido como $\mathcal{L}_{C,E}$ e é representado como:

$$\mathcal{L}_{C,E} : v = Ke$$

onde v é a saída do controlador e $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz real.

Como foi definido na seção 2.2, para a estratégia de controle estático, $z_M(t) = C_E x_M(t)$ e $z_S(t) = C_E x_S(t)$. Assim, $z_e = z_M - z_S = C_E(x_M - x_S) = C_E e$. Substituindo z_e , z_S e $\mathcal{L}_{C,E}$ em (5) obtém-se:

$$\dot{e} = (A - K)e + B\rho(C_E e, C_E x_S) + \Phi(K e, u_0) \quad (6)$$

A equação (6) depende, então, apenas do sinal do erro e dos estados do sistema escravo. Para implementar esta lei de controle assume-se que $e(t)$ deva ser mensurável, o que geralmente significa que os estados do mestre e do escravo devem estar disponíveis para serem medidos. O objetivo de interesse deste trabalho em relação a esta dinâmica de malha fechada do erro está descrita no Problema 2.2.

Problema 2.2. *Determinar matriz K do controlador $\mathcal{L}_{C,E}$ de tal forma que todas as trajetórias do sistema malha fechada (6) que comecem dentro de um conjunto admissível $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ convirjam assintoticamente para a origem.*

2.3.2 Realimentação Dinâmica

Caso os estados dos sistemas não estejam disponíveis para serem medidos a estratégia por realimentação de estados não pode ser aplicada e deve-se buscar uma estratégia de controle alternativa. Se apenas os sinais da saída do sistema podem ser medidos então a estratégia de controle por realimentação dinâmica de saída é uma solução viável.

Esta subseção trata da formulação do problema de sincronização utilizando controlador do tipo realimentação dinâmica de saída. É apresentado o modelo do controlador, o qual é aplicado na dinâmica do erro obtida na seção 2.2 para obter a equação de malha fechada referente a esta estratégia de controle. A introdução formal do problema relacionado a este controlador encerra esta subseção.

A estratégia de realimentação dinâmica de saída considerado neste trabalho foi inspirado pelo controlador utilizado em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2013). Conforme proposto neste trabalho, as não-linearidades presentes nos sistemas, $\sigma(\cdot)$ e na dinâmica do erro, $\rho(\cdot, \cdot)$ são incluídas tanto na dinâmica do controlador quanto na sua saída. Neste caso, considera-se que z_M e z_S dependem apenas das saídas dos sistemas. É ainda adicionado um termo *anti-windup* estático à dinâmica do controlador, com o objetivo de mitigar os efeitos da saturação e de levar a uma maior estimativa de região de atração conforme (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005). O controlador de realimentação dinâmica de saída $\mathcal{L}_{C,D}$ é então definido pela seguinte equação:

$$\mathcal{L}_{C,D} : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + E_c y_e + O_c \sigma(C_D y_e) + B_c \rho(C_D y_e, C_D y_S) - F_c \Phi(v, u_0) \\ v = H_c x_c + D_c y_e + L_c \sigma(C_D y_e) + R_c \rho(C_D y_e, C_D y_S) \end{cases} \quad (7)$$

com $x_c \in \mathbb{R}^n$ e v sendo o estado e a saída do controlador, respectivamente, enquanto que $y_e = y_M - y_S$ é a diferença entre as saídas dos sistemas. A_c , E_c , O_c , B_c , F_c , H_c , D_c , L_c , R_c são matrizes reais de dimensões apropriadas e $F_c \Phi(v, u_0) = \text{sat}(u) - v$ corresponde ao termo de *anti-windup* estático.

Substituindo-se v de $\mathcal{L}_{C,D}$ em (5) obtém-se:

$$\dot{e} = A e + (B - R_c) \rho(C_D y_e, C_D y_S) + \Phi(v, u_0) - (H_c x_c + D_c y_e + L_c \sigma(C_D y_e)) \quad (8)$$

Definindo um vetor de estado aumentado $\zeta(t) = [e(t)' \ x_c(t)']' \in \mathbb{R}^{2n}$, então, de (8) e de (7), a dinâmica de malha fechada do estado aumentado se dá por:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \mathbb{A}\zeta + \mathbb{L}\sigma(\mathbb{C}\zeta) + \mathbb{B}\rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S) + \mathbb{F}\Phi(v, u_0) \\ v = \mathbb{K}\zeta + L_c\sigma(\mathbb{C}\zeta) + R_c\rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S) \\ y_e = [H \ 0_{q \times n}]\zeta \end{cases} \quad (9)$$

com as matrizes \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{C} , \mathbb{L} , \mathbb{F} e \mathbb{K} definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} A - D_c H & -H_c \\ E_c H & A_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B - R_c \\ B_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L} = \begin{bmatrix} -L_c \\ O_c \end{bmatrix}, \\ \mathbb{F} &= \begin{bmatrix} I_n \\ -F_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c H & H_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_D H & 0_{m \times n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A partir do exposto, pode-se enunciar o Problema 2.3, que descreve o objetivo da estratégia de controlador de realimentação dinâmica de saída para o caso geral.

Problema 2.3. *Determinar as matrizes A_c , E_c , O_c , B_c , H_c , D_c , L_c , R_c , F_c do controlador de realimentação dinâmica de saída não-linear (7) de tal forma que todas as trajetórias do sistema de malha fechada (9) iniciadas em um conjunto $\mathcal{Z}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ converjam assintoticamente para a origem.*

2.4 Caso Linear por Partes

Para esta seção, assume-se que a não linearidade $\sigma(\cdot)$ é uma função *PWL*.

Assim, é considerado que as seguintes características são válidas para cada componente individual de $\sigma(\cdot)$, i.e. $\sigma_i(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, deve satisfazer as seguintes condições, representadas graficamente na Fig. 4:

- (i) $\sigma_i(f)$ é uma função não-linear contínua com simetria ímpar (i.e. $\sigma_i(-f) = -\sigma_i(f)$) e $\sigma_i(0) = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$.
- (ii) é *PWL* com $N - 1$ pontos de quebra (ou N segmentos), ou seja, é descrita como:

$$\sigma_i(f) = \begin{cases} \delta_{1(i)} f, & f \in [0, b_{1(i)}] \\ \delta_{2(i)} f + c_{2(i)}, & f \in (b_{1(i)}, b_{2(i)}] \\ \vdots \\ \delta_{N(i)} f + c_{N(i)}, & f \in (b_{N-1(i)}, \infty) \end{cases} \quad (10)$$

onde $c_{j(i)} \triangleq b_{j-1(i)}(\delta_{j-1(i)} - \delta_{j(i)}) + c_{j-1(i)}$, $j = 2, \dots, N$ e $c_{1(i)} \triangleq 0$;

- (iii) é monotonicamente crescente.

Em (HU; HUANG; LIN, 2004), a função *PWL* foi reescrita como funções de saturação. Para uma função com $N - 1$ pontos de quebra, cada elemento de $\sigma(f) \in \mathbb{R}^m$ fica como:

$$\sigma_i(f) = \delta_{N(i)} f + \sum_{j=1}^{N-1} (\delta_{j(i)} - \delta_{j+1(i)}) \text{sat}(f, b_{j(i)}), \quad i = 1, \dots, m$$

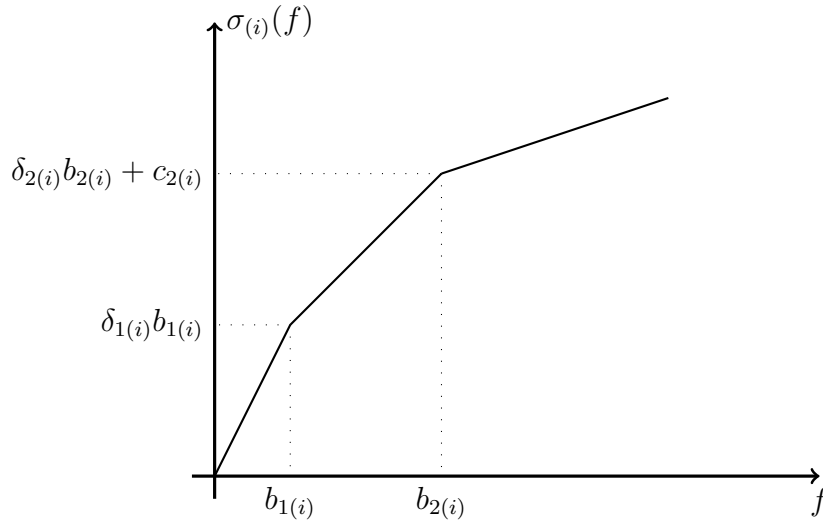


Figura 4: Exemplo de função *PWL* com 2 pontos de quebra

Observação 2.1. *Por exemplo, considerando uma função $\sigma(f)$ *PWL* com 2 pontos de quebra, i. e., $N = 3$. Tem-se que cada um dos elementos escalares da função são:*

$$\begin{aligned}\sigma_{(i)}(f) &= \delta_{3(i)}f_{(i)} + \sum_{j=1}^2 (\delta_{j(i)} - \delta_{j+1(i)}) \text{sat}(f_{(i)}, b_{j(i)}) \\ \sigma_{(i)}(f) &= \delta_{3(i)}f_{(i)} + (\delta_{1(i)} - \delta_{2(i)}) \text{sat}(f_{(i)}, b_{1(i)}) + (\delta_{2(i)} - \delta_{3(i)}) \text{sat}(f_{(i)}, b_{2(i)})\end{aligned}$$

Assim, para $f \in [0, b_{1(i)}]$, tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{(i)}(f) &= \delta_{3(i)}f_{(i)} + (\delta_{1(i)} - \delta_{2(i)})f_{(i)} + (\delta_{2(i)} - \delta_{3(i)})f_{(i)} \\ &= \delta_{1(i)}f_{(i)}.\end{aligned}$$

Para $f \in (b_{1(i)}, b_{2(i)}]$, tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{(i)}(f) &= \delta_{3(i)}f_{(i)} + (\delta_{1(i)} - \delta_{2(i)})b_{1(i)} + (\delta_{2(i)} - \delta_{3(i)})f_{(i)} \\ &= \delta_{2(i)}f_{(i)} + (\delta_{1(i)} - \delta_{2(i)})b_{1(i)}.\end{aligned}$$

Finalmente tem-se para $f \in (b_{2(i)}, \infty)$:

$$\sigma_{(i)}(f) = \delta_{3(i)}f + (\delta_{1(i)} - \delta_{2(i)})b_{1(i)} + (\delta_{2(i)} - \delta_{3(i)})b_{2(i)}.$$

Verifica-se, então, que o modelo considerado em (HU; HUANG; LIN, 2004) é equivalente à descrição apresentada na suposição (ii).

Assim como na seção 2.2, será utilizada uma função de zona-morta descentralizada para tratar a saturação (TARBOURIECH et al., 2011). A zona-morta para a função *PWL* é dada por:

$$\Psi_{j,(i)}(f_{(i)}, b_{j(i)}) = f_{(i)} - \text{sat}(f_{(i)}, b_{j(i)}). \quad (11)$$

Considerando então $\Delta_j = \text{diag}\{\delta_{j,(1)}, \dots, \delta_{j,(m)}\}$, a expressão de $\sigma_{(i)}(f)$ em função da zona-morta resulta na seguinte expressão de $\sigma(f)$.

$$\sigma(f) = \Delta_N f + \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1})(f - \Psi_j(f, b_j))$$

$$\sigma(f) = \Delta_1 f - \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1}) \Psi_j(f, b_j) \quad (12)$$

Por $\sigma(f)$ possuir uma nova forma, a dinâmica do erro e a não-linearidade $\rho(f_1, f_0)$ também serão diferentes.

De (5), pode-se substituir (12) na definição de $\rho(f_1, f_0)$. Das não-linearidades $\sigma(\cdot)$ encontradas em $\rho(f_1, f_0)$, tem-se:

$$\sigma(f_1 + f_0) = \Delta_1(f_1 + f_0) - \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1}) \Psi_j(f_1 + f_0, b_j)$$

e

$$\sigma(f_0) = \Delta_1(f_0) - \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1}) \Psi_j(f_0, b_j)$$

Assim, $\rho(f_1, f_0)$ pode ser reescrito como:

$$\rho(f_1, f_0) = \Delta_1 f_1 - \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1}) (\Psi_j(f_1 + f_0, b_j) - \Psi_j(f_0, b_j))$$

A expressão acima possui uma parcela linear e uma parcela não linear similar à definição original de $\rho(f_1, f_0)$. Definindo então uma função vetorial descentralizada $\Lambda_j(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, como

$$\Lambda_j(f_1, f_0) \triangleq \Psi_j(f_1 + f_0, b_j) - \Psi_j(f_0, b_j)$$

tem-se que

$$\rho(f_1, f_0) = \Delta_1 f_1 - \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1}) \Lambda_j(f_1, f_0) \quad (13)$$

Deste modo, a dinâmica do erro descrita por (5) pode ser escrita agora como:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + B\rho(z_e, z_S) + \Phi(v, u_0) - v \\ \dot{e} &= Ae + B\Delta_1 z_e - B \sum_{j=1}^{N-1} ((\Delta_j - \Delta_{j+1}) \Lambda_j(z_e, z_S)) + \Phi(v, u_0) - v \end{aligned} \quad (14)$$

Nas sub-seções a seguir são apresentados os problemas baseados nas estratégias de controlador de realimentação estática de estados e de realimentação dinâmica de saída para o caso em que a não-linearidade do sistema Lur'e é representada conforme descrito acima.

2.4.1 Realimentação Estática

Assim como a subseção 2.3.1, esta subseção trata do controlador de realimentação estática de estados, mas diferentemente da subseção anterior, utiliza-se a não linearidade descrita por (12) conforme obtida na seção 2.4. Assim, mesmo utilizando o mesmo modelo de controlador descrito em 2.3.1, como a função $\sigma(\cdot)$ possui suposições distintas entre as seções 2.3 e 2.4, o desenvolvimento e o problema descrito no

fim desta subseção são diferentes dos apresentados em 2.3.1. Isso pode ser facilmente percebido pelas diferenças entre (5) e (14).

Assim como na subseção 2.3.1, $z_M(t) = C_E x_M(t)$ e $z_S(t) = C_E x_S(t)$. Substituindo, então, z_e , z_S e $\mathcal{L}_{C,E}$ em (14) obtém-se:

$$\dot{e} = (A + B\Delta_1 C_E - K)e - B \sum_{j=1}^{N-1} ((\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_E e, C_E x_S)) + \Phi(Ke, u_0) \quad (15)$$

que é a forma particular de (6) considerando que $\sigma(f)$ é uma função *PWL*.

A equação (15) depende, então, apenas do sinal do erro e dos estados do sistema escravo. O objetivo de interesse deste trabalho em relação a esta dinâmica de malha fechada do erro está descrita no Problema 2.4.

Problema 2.4. *Determinar matriz K do controlador $\mathcal{L}_{C,E}$ de tal forma que todas as trajetórias do sistema malha fechada (15) que comecem dentro de um conjunto admissível $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ convirjam assintoticamente para a origem.*

2.4.2 Realimentação Dinâmica

Assim como a subseção 2.4.1 trata das diferenças causadas por (12) na estratégia de controlador de realimentação estática de estados, a presente subseção, a subseção 2.3.2 e esta subseção possuem diferenças que são análogas às diferenças das subseções 2.3.1 e 2.4.1. Relembrando o controlador de realimentação dinâmica de saída $\mathcal{L}_{C,D}$ como definido em 2.3.2:

$$\mathcal{L}_{C,D} : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + E_c y_e + O_c \sigma(C_D y_e) + B_c \rho(C_D y_e, C_D y_S) - F_c \Phi(v, u_0) \\ v = H_c x_c + D_c y_e + L_c \sigma(C_D y_e) + R_c \rho(C_D y_e, C_D y_S) \end{cases}$$

Substituindo a relação do somatório das zonas-mortas Ψ_j nas não-linearidades σ encontradas em $\mathcal{L}_{C,D}$ tem-se, considerando, por exemplo, $O_c \sigma(C_D y_e)$:

$$O_c \sigma(f) = O_c \Delta_N f + O_c \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1})(f - \Psi_j(f, b_j))$$

Por outro lado, é de interesse que cada função de zona-morta presente no controlador de realimentação dinâmica de saída possua uma matriz de ganho independente das demais. Deste modo será possível obter mudanças de variáveis favoráveis para a formação de condições convexas de síntese conforme será visto na subseção 4.2.2. Assim, a não-linearidade $O_c \sigma(C_D y_e)$ pode ser substituída por:

$$\begin{aligned} O_c \sigma(f) &= O_{c_{N-1}} \Delta_N f + \sum_{j=1}^{N-1} O_{c_j} (\Delta_j - \Delta_{j+1})(f - \Psi_j(f, b_j)) \\ O_c \sigma(f) &= O_{c_0} f - \sum_{j=1}^{N-1} O_{c_j} (\Delta_j - \Delta_{j+1}) \Psi_j(f, b_j) \end{aligned}$$

onde $O_{c_0} = O_{c_1} \Delta_1 + \sum_{j=2}^{N-1} \Delta_j (O_{c_j} - O_{c_{j-1}})$.

Observação 2.2. *No caso particular em que há apenas um ponto de quebra, ou seja, $N = 2$, $O_{c_0} = O_{c_1} \Delta_1$. O mesmo caso ocorre para B_{c_0} , L_{c_0} e R_{c_0} .*

Assim, $\mathcal{L}_{C,D}$ pode ser descrita como:

$$\mathcal{L}_{C,D} : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + (E_c + (O_{c_0} + B_{c_0})C_D)He - \sum_{j=1}^{N-1} O_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(C_D He, b_j) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N-1} (B_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_D He, C_D H x_S)) - F_c \Phi(v, u_0) \\ v = H_c x_c + (D_c + (L_{c_0} + R_{c_0})C_D)He - \sum_{j=1}^{N-1} L_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(C_D He, b_j) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N-1} (R_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_D He, C_D H x_S)) \end{cases} \quad (16)$$

com $x_c \in \mathbb{R}^n$ e v sendo o estado e a saída do controlador, respectivamente. A_c , E_c , O_{c_0} , O_{c_j} , B_{c_0} , B_{c_j} , F_c , H_c , D_c , L_{c_0} , L_{c_j} , R_{c_0} , R_{c_j} são matrizes reais de dimensões apropriadas.

Substituindo-se v de (16) em (14) obtém-se:

$$\dot{e} = (A + (B\Delta_1 - (D_c + (L_{c_0} + R_{c_0})C_D)He + \sum_{j=1}^{N-1} ((R_{c_j} - B)(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_D He, C_D H x_S)) + \Phi(v, u_0) - H_c x_c + \sum_{j=1}^{N-1} L_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(C_D He, b_j)) \quad (17)$$

Assim como em 2.3.2, utiliza-se um vetor de estados aumentados $\zeta(t) = [e(t)'x_c(t)']' \in \mathbb{R}^{2n}$. Portanto, de (17) e de (16) a dinâmica de malha fechada do estado aumentado se dá por:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \mathbb{A}\zeta + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbb{L}_j(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(\mathbb{C}\zeta, b_j)) \\ \quad + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbb{B}_j(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(\mathbb{C}\zeta, C_D H x_S)) + \mathbb{F}\Phi(v, u_0) \\ v = (\mathbb{K} + (L_{c_0} + R_{c_0})\mathbb{C})\zeta - \sum_{j=1}^{N-1} (L_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(\mathbb{C}\zeta, b_j)) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N-1} (R_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(\mathbb{C}\zeta, C_D H x_S)) \\ y_e = [H \ 0_{q \times n}]\zeta \end{cases} \quad (18)$$

com as matrizes \mathbb{A} , \mathbb{B}_j , \mathbb{C} , \mathbb{L}_j , \mathbb{F} e \mathbb{K} definidas como:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A - (D_c + ((L_{c_0} + R_{c_0}) - B\Delta_1)C_D)H & -H_c \\ (E_c + (O_{c_0} + B_{c_0})C_D)H & A_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_j = \begin{bmatrix} R_{c_j} - B \\ -B_{c_j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}_j = \begin{bmatrix} L_{c_j} \\ -O_{c_j} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{bmatrix} I_n \\ -F_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c H & H_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_D H & 0_{m \times n} \end{bmatrix}.$$

Com (18) em mãos, pode-se descrever o Problema 2.5, que descreve o objetivo da estratégia de controlador de realimentação dinâmica de saída para o caso geral.

Problema 2.5. *Determinar as matrizes A_c , E_c , O_{c_j} , B_{c_j} , H_c , D_c , L_{c_j} , R_{c_j} , F_c , $j = 1, \dots, N-1$, do controlador de realimentação dinâmica de saída não-linear (7) de tal forma que todas as trajetórias do sistema de malha fechada (18) iniciadas em um conjunto $\mathcal{Z}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ convirjam assintoticamente para a origem.*

2.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os problemas estudados neste trabalho. Ambos os métodos de se modelar a não-linearidade do sistema Lur'e, por um modelo que simplesmente satisfaz o critério de setor característico de sistemas do tipo Lur'e e por um modelo baseado em função *PWL* foram apresentadas. Além disso, os controladores $\mathcal{L}_{C,E}$ e $\mathcal{L}_{C,D}$ são definidos e incluídos na dinâmica do sistema de malha fechada.

Percebe-se que os problemas relacionados ao caso em que $\sigma(\cdot)$ é considerada uma função *PWL* apresenta maior complexidade, pois, dependendo da quantidade de pontos de quebra N utilizados para modelar $\sigma(\cdot)$, aparecerão $N - 1$ funções de saturação relacionadas. Devido a estas não-linearidades, nas subseções 3.2.2 e 4.2.2 haverá mais restrições de setor que devem ser consideradas para obter as *LMIs* para a síntese dos controladores.

Por fim, foi visto que os problemas de sincronização estão diretamente relacionados ao sinal de erro $e(t)$. Assim, os problemas de sincronização são, portanto, equivalentes a problemas de estabilização de dinâmica do erro de sincronização, i.e. caso $\lim_{t \rightarrow \infty} e \rightarrow 0$ tem-se $x_S \rightarrow x_M$. Entretanto, devido à natureza não-linear do sistema, em alguns casos não é possível garantir a estabilidade global da origem da dinâmica de erro em malha fechada, ou seja, $\forall x_S(0), x_M(0) \in \mathbb{R}^n$. Portanto, nos capítulos 3 e 4 uma abordagem local é inicialmente aplicada, na qual a sincronização é garantida apenas se o valor inicial do sinal de erro pertence a um conjunto admissível \mathcal{Z}_0 contido na região de atração da origem das dinâmicas de erro em malha fechada.

3 REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE ESTADOS

Este capítulo aborda a estratégia de controle referente à realimentação estática dos estados dos sistemas mestre e escravo, ou seja, são abordados os Problemas 2.2 e 2.4. Primeiramente as funções não-lineares $\rho(f_1, f_0)$, $\Lambda_j(f_1, f_0)$ e $\Phi(f)$ são analisadas através de condições baseadas em setor. As não-linearidades referentes ao sistema Lur'e, $\rho(f_1, f_0)$ e $\Lambda_j(f_1, f_0)$, são analisadas através de condições de setor tradicionais (KHALIL, 1992), enquanto a não linearidade relacionada a saturação do sinal de controle $\Phi(f)$ é analisada através de uma condição de setor generalizada (TARBOURIECH et al., 2011).

Em seguida na seção 3.2 são apresentados os teoremas para a síntese de realimentação de estados estabilizante referente aos Problemas 2.2 e 2.4. Os teoremas consideram a teoria de estabilidade de Lyapunov (CHEN, 1998) juntamente com as relações baseadas em setor obtidas na seção anterior para gerar condições de estabilidade, de forma a garantir a convergência assintótica do sinal de erro a zero local ou globalmente. Na sequência, um problema de otimização é formulado com o objetivo de maximizar a estimativa da região de atração.

Na última seção deste capítulo o primeiro exemplo é apresentado. Primeiramente o sistema considerado é brevemente descrito e seu modelo apresentado. Uma simulação numérica é então realizada para os dois casos estudados neste capítulo, com as respectivas matrizes e estimativas de região de atração sendo apresentadas. A partir do resultado que apresenta maior região de atração é realizada uma simulação computacional da sincronização do sistema escravo com o sistema mestre, com os resultados obtidos sendo brevemente analisados.

3.1 Relações Baseadas em Setor

Nesta seção as relações baseadas em setor referentes às não-linearidades presentes nos Problemas 2.2 e 2.4, ou seja, $\rho(\cdot, \cdot)$, $\Lambda_j(\cdot, \cdot)$ e $\Phi(\cdot)$, são demonstradas nos seus respectivos Lemas. Uma prova adequada é estabelecida na sequência de cada um dos Lemas propostos. Inicia-se com a não-linearidade $\rho(\cdot, \cdot)$, descrita no Lema 3.1, cuja prova baseia-se nas relações de setor exemplificadas em (KHALIL, 1992).

Lema 3.1. *Se $\sigma(f_1)$ é tal que as suposições (i), (ii) e (iii) apresentadas na seção 2.3 são válidas, então a função não-linear $\rho(f_1, f_0) \triangleq \sigma(f_1 + f_0) - \sigma(f_0)$ é tal que a relação*

$$\rho(f_1, f_0)' S_\rho (\rho(f_1, f_0) - \Omega_\sigma f_1) \leq 0, \quad \forall f_1, f_0 \quad (19)$$

é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal S_ρ positiva definida.

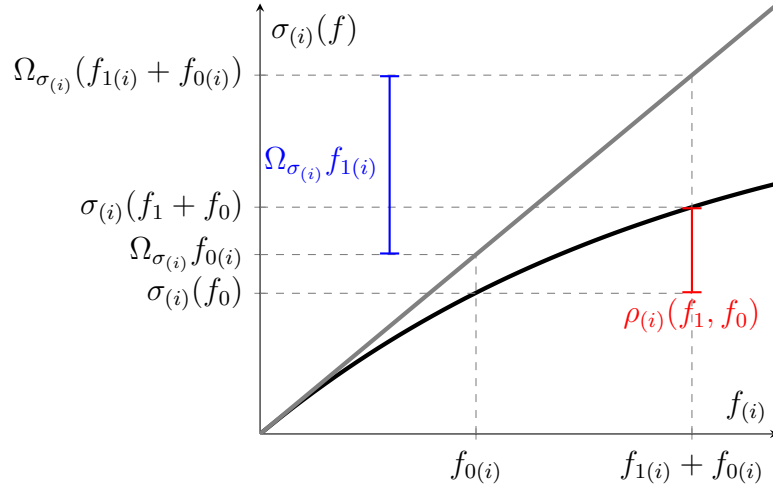


Figura 5: Função não-linear $\sigma_i(f)$ delimitada por setor.

Prova. Considera-se a prova com apenas uma componente de $\sigma(f)$ e de $\rho(f_1, f_0)$.

Das suposições (i) e (ii) tem-se que $|\sigma_i(f_0)| \leq |\Omega_{\sigma(i)} f_{0(i)}|$ e que $|\sigma_i(f_1 + f_0)| \leq |\Omega_{\sigma(i)}(f_1(i) + f_{0(i)})|$, $\forall f_0, f_1, \forall i = 1, \dots, m$. Considere agora os seguintes casos:

- (a) $f_{0(i)} > 0$ e $f_{1(i)} > 0$: Este caso é precisamente o ilustrado na Fig. 5. Nota-se que como (ii) é válida, então $\sigma_i(f_1 + f_0) \geq \sigma_i(f_0)$ e $\sigma_i(f_1 + f_0) - \sigma_i(f_0) \leq \Omega_{\sigma(i)}(f_1(i) + f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{0(i)}$. Isto implica que $\rho_i(f_1, f_0) \geq 0$ e que $\rho_i(f_1, f_0) \leq \Omega_{\sigma(i)}(f_1(i) + f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{0(i)} = \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}$. Logo, pode-se concluir que $\rho_i(f_1, f_0) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)} \leq 0$ e, consequentemente, que a relação $\rho_i(f_1, f_0)(\rho_i(f_1(i), f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}) \leq 0$ é verificada;
- (b) $f_{0(i)} > 0$ e $f_{1(i)} < 0$: Como a suposição (ii) é válida, então, $\sigma_i(f_1 + f_0) \leq \sigma_i(f_0)$, logo $\rho_i(f_1, f_0) \leq 0$. Como, de (ii), $|\sigma_i(f_1 + f_0) - \sigma_i(f_0)| \leq |\Omega_{\sigma(i)}(f_1(i) + f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{0(i)}| = |\Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}|$. Como tanto $\sigma_i(f_1 + f_0) - \sigma_i(f_0)$ quanto $f_{1(i)}$ são negativos, então $0 \geq \rho_i(f_1, f_0) \geq \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}$ o que implica em $\rho_i(f_1, f_0) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)} \geq 0$ e, consequentemente, que a relação $\rho_i(f_1, f_0)(\rho_i(f_1(i), f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}) \leq 0$ é verificada;
- (c) $f_{0(i)} < 0$ e $f_{1(i)} < 0$: Nota-se que como (ii) é válida, então $\sigma_i(f_1 + f_0) \leq \sigma_i(f_0)$ e $|\sigma_i(f_1 + f_0) - \sigma_i(f_0)| \leq |\Omega_{\sigma(i)}(f_1(i) + f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{0(i)}|$. Como $\rho_i(f_1, f_0) < 0$, $f_{0(i)} < 0$ e $f_{1(i)} < 0$, então $0 \geq \rho_i(f_1, f_0) \geq \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}$. Isto implica que $\rho_i(f_1, f_0) \leq 0$ e que $\rho_i(f_1, f_0) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)} \geq 0$. Logo, pode-se concluir que a relação $\rho_i(f_1, f_0)(\rho_i(f_1(i), f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}) \leq 0$ é verificada;
- (d) $f_{0(i)} < 0$ e $f_{1(i)} > 0$: Como a suposição (ii) é válida, então, $\sigma_i(f_1 + f_0) \geq \sigma_i(f_0)$, portanto $\rho_i(f_1, f_0) \geq 0$. Como, de (ii), $|\sigma_i(f_1 + f_0) - \sigma_i(f_0)| \leq |\Omega_{\sigma(i)}(f_1(i) + f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{0(i)}| = |\Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}|$. Como tanto $\rho_i(f_1, f_0)$ quanto $f_{1(i)}$ são positivos, então $0 \leq \rho_i(f_1, f_0) \leq \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}$ o que implica em $\rho_i(f_1, f_0) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)} \leq 0$ e, consequentemente, que a relação $\rho_i(f_1, f_0)(\rho_i(f_1(i), f_{0(i)}) - \Omega_{\sigma(i)} f_{1(i)}) \leq 0$ é verificada.

Como $\sigma(f)$ e $\rho(f_1, f_0)$ são funções descentralizadas, é possível estender os resultados obtidos acima de cada elemento $\sigma_i(f)$ e $\rho_i(f_1, f_0)$ para as funções em

suas formas compostas. Como S_ρ é considerada como uma matriz diagonal positiva definida, então segue que (19) é válida $\forall f_1, f_0$. \square

Um procedimento similar é considerado para tratar das não-linearidades $\Lambda_j(\cdot, \cdot)$ no Lema 3.2. Diferentemente do Lema 3.1, há mais casos a serem provados, pois as duas zona-mortas de $\Psi_j(\cdot, \cdot)$ irão influenciar $\Lambda_j(\cdot, \cdot)$ de maneira distinta dependendo em qual zona essas não-linearidades se encontram. A prova do próximo Lema possui uma lógica similar à prova da relação de setor generalizada encontrada em (TARBOURIECH et al., 2011).

Lema 3.2. *Se $\Lambda_j(f_1, f_0)$ é tal que as suposições (i), (ii) e (iii) descritas na seção 2.4 são verdadeiras, então a função não-linear $\Lambda_j(f_1, f_0) \triangleq \Psi_j(f_1 + f_0, b_j) - \Psi_j(f_0, b_j)$ é tal que a relação*

$$\Lambda_j(f_1, f_0)' S_{\Lambda_j} (\Lambda_j(f_1, f_0) - f_1) \leq 0, \quad \forall f_1, f_0 \quad (20)$$

é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal S_{Λ_j} positiva definida.

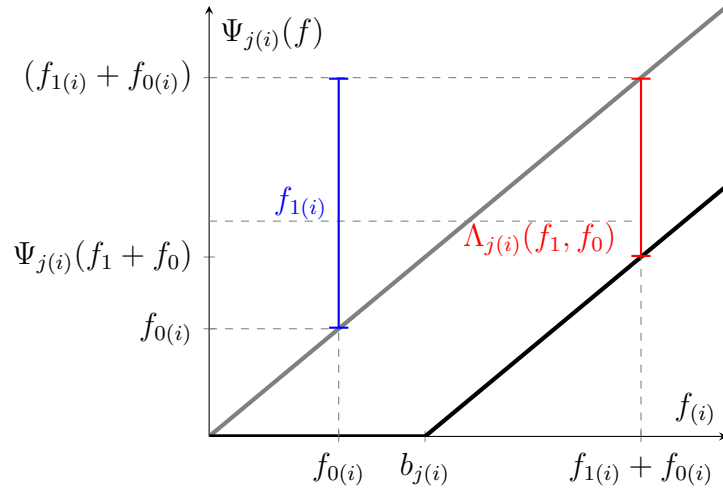


Figura 6: Função não-linear $\Psi_{j(i)}(f)$ delimitada por setor.

Prova. Por simplicidade considere a i -ésima componente de Ψ_j e de Λ_j . Neste caso, como $\Psi_{j(i)}$, $\Lambda_{j(i)}$, $f_{1(i)}$ e $f_{0(i)}$ são escalares e como Ψ_j e Λ_j são descentralizados, a prova pode ser diretamente generalizada para qualquer $m \neq 1$ considerando que $S_{\Lambda_{j(i)}}$ é uma matriz diagonal. Considera-se, então, os seguintes casos:

(a) $f_{0(i)} > 0$ e $f_{1(i)} > 0$

- I $f_{0(i)} < b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} < b_{j(i)}$. Neste caso, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = 0$, pois $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = 0$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = 0$. Assim, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = 0$.
- II $f_{0(i)} < b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} > b_{j(i)}$. Este caso é precisamente o ilustrado na Fig. 6. Assim, $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = 0$, portanto $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)} > 0$ e $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{0(i)} - b_{j(i)})$. Como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) > 0$ e $f_{0(i)} - b_{j(i)} < 0$, então $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.

- III $f_{0(i)} > b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} > b_{j(i)}$. Tem-se $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = f_{0(i)} - b_{j(i)}$, portanto $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)} - (f_{0(i)} - b_{j(i)}) = f_{1(i)} > 0$. Deste modo, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{1(i)} - f_{1(i)}) = 0$.

(b) $f_{0(i)} > 0$ e $f_{1(i)} < 0$

- I $f_{0(i)} < b_{j(i)}$ e $-b_{j(i)} < f_{1(i)} + f_{0(i)} < b_{j(i)}$. O desenvolvimento deste caso é idêntico ao desenvolvimento do caso a-I.
- II $f_{0(i)} < b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} < -b_{j(i)}$. Neste caso, $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = 0$, resultando em $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)} < 0$ e, conseqüentemente, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)} - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{0(i)} + b_{j(i)})$. Como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) < 0$ e como $f_{0(i)} > 0$ e $b_{j(i)} > 0$, tem-se $f_{0(i)} + b_{j(i)} > 0$ e então $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.
- III $f_{0(i)} > b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} > b_{j(i)}$. O desenvolvimento deste caso é idêntico ao desenvolvimento do caso a-III.
- IV $f_{0(i)} > b_{j(i)}$ e $-b_{j(i)} < f_{1(i)} + f_{0(i)} < b_{j(i)}$. Neste caso, $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = 0$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = f_{0(i)} - b_{j(i)}$, portanto $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = -f_{0(i)} + b_{j(i)} < 0$ e, conseqüentemente, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(-f_{0(i)} + b_{j(i)} - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(b_{j(i)} - (f_{0(i)} + f_{1(i)}))$. Como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) < 0$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} < b_{j(i)}$, então $b_{j(i)} - (f_{0(i)} + f_{1(i)}) > 0$ e $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.
- V $f_{0(i)} > b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} < -b_{j(i)}$. Com esta configuração, $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = f_{0(i)} - b_{j(i)}$, logo $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)} - (f_{0(i)} - b_{j(i)}) = f_{1(i)} + 2b_{j(i)} < 0$, pois neste caso como $f_{0(i)} > b_{j(i)}$, então $f_{0(i)} + b_{j(i)} > 2b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + 2b_{j(i)} < f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)}$. Como $f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)} < 0$, então $f_{1(i)} + 2b_{j(i)} < 0$. Assim, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{1(i)} + 2b_{j(i)} - f_{1(i)}) = 2\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(b_{j(i)})$ e, como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) < 0$ e $b_{j(i)} > 0$, então $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.

(c) $f_{0(i)} < 0$ e $f_{1(i)} < 0$

- I $f_{0(i)} > -b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} > -b_{j(i)}$. Neste caso, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = 0$, pois $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = 0$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = 0$. Assim, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = 0$.
- II $f_{0(i)} > -b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} < -b_{j(i)}$. Para este caso, $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = 0$, portanto $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)} < 0$ e $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)} - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{0(i)} + b_{j(i)})$. Como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) < 0$ e $f_{0(i)} + b_{j(i)} > 0$, então $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.
- III $f_{0(i)} < -b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} < -b_{j(i)}$. Tem-se $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = f_{0(i)} + b_{j(i)}$, portanto $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} + b_{j(i)} - (f_{0(i)} + b_{j(i)}) = f_{1(i)} < 0$. Deste modo, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{1(i)} - f_{1(i)}) = 0$.

(d) $f_{0(i)} < 0$ e $f_{1(i)} > 0$

- I $f_{0(i)} > -b_{j(i)}$ e $-b_{j(i)} < f_{1(i)} + f_{0(i)} < b_{j(i)}$. O desenvolvimento deste caso é idêntico ao desenvolvimento do caso c-I.
- II $f_{0(i)} > -b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} > b_{j(i)}$. Neste caso $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = 0$, resultando em $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)} > 0$ e, consequentemente, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{0(i)} - b_{j(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{0(i)} - b_{j(i)})$. Como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) > 0$ e como $f_{0(i)} < 0$ e $b_{j(i)} > 0$, tem-se $f_{0(i)} - b_{j(i)} < 0$ e, então, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.
- III $f_{0(i)} < -b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} < -b_{j(i)}$. O desenvolvimento deste caso é idêntico ao desenvolvimento do caso c-III.
- IV $f_{0(i)} < -b_{j(i)}$ e $-b_{j(i)} < f_{1(i)} + f_{0(i)} < b_{j(i)}$. Neste caso, $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = 0$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = f_{0(i)} + b_{j(i)}$, logo $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = -f_{0(i)} - b_{j(i)} > 0$ e, consequentemente, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(-f_{0(i)} - b_{j(i)} - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(-(b_{j(i)} + f_{0(i)} + f_{1(i)}))$. Como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) > 0$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} > -b_{j(i)}$, então $-(b_{j(i)} + f_{0(i)} + f_{1(i)}) < 0$ e $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.
- V $f_{0(i)} < -b_{j(i)}$ e $f_{1(i)} + f_{0(i)} > b_{j(i)}$. Com esta configuração, $\Psi_{j(i)}(f_1 + f_0, b_{j(i)}) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)}$ e $\Psi_{j(i)}(f_0, b_{j(i)}) = f_{0(i)} + b_{j(i)}$, logo $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) = f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)} - (f_{0(i)} + b_{j(i)}) = f_{1(i)} - 2b_{j(i)} > 0$, pois neste caso $f_{1(i)} - 2b_{j(i)} > f_{1(i)} + f_{0(i)} - b_{j(i)} > 0$. Assim, $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) = \Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(f_{1(i)} - 2b_{j(i)} - f_{1(i)}) = -2\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(b_{j(i)})$ e, como $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) > 0$ e $b_{j(i)} > 0$, então $\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0)'(\Lambda_{j(i)}(f_1, f_0) - f_{1(i)}) < 0$.

Como Ψ_j e Λ_j são funções descentralizadas, é possível estender os resultados obtidos de cada elemento $\Psi_{j(i)}$ e $\Lambda_{j(i)}$ para as formas compostas das funções não-lineares. Como S_{Λ_j} é considerada uma matriz diagonal positiva definida, então segue que (20) é válida para quaisquer funções $\Psi_j(\cdot, \cdot)$, $\Lambda_j(\cdot, \cdot)$ e $\forall f_1, f_0$. \square

A função não-linear $\Phi(\cdot, \cdot)$ satisfaz a condição de setor modificada de (TARBOURIECH et al., 2011) enunciada no lema a seguir:

Lema 3.3. *Se v e w pertencerem ao conjunto $\mathcal{W}(v, w) = \{v, w \in \mathbb{R}^n; |v_{(k)} - w_{(k)}| \leq u_{0(k)}, k = 1, \dots, n\}$, então*

$$\Phi(v, u_0)' S_{\Phi} (\Phi(v, u_0) - w) \leq 0 \quad (21)$$

é verificada para qualquer matriz diagonal S_{Φ} positiva definida.

Prova. Como a função de saturação utilizada para definir a zona-morta $\Phi(v, u_0)$ é descentralizada, então $\Phi(v, u_0)$ também é uma função descentralizada. Assim, pode-se considerar os elementos individuais $\Phi_{(k)}(v, u_0)$, os quais são escalares, para configurar a prova, com a prova de (21) sendo generalizada diretamente. Considera-se, então os seguintes casos:

- (a) $v_{(k)} > u_{0(k)}$. Neste caso, $\Phi_{(k)}(v, u_0) = v_{(k)} - u_{0(k)} > 0$ e $\Phi_{(k)}(v, u_0) - w_{(k)} = v_{(k)} - u_{0(k)} - w_{(k)}$. Como $v_{(k)} - w_{(k)} < u_{0(k)}$, isto implica que $v_{(k)} - u_{0(k)} - w_{(k)} < 0$ e, portanto, $\Phi_{(k)}(v, u_0)'(\Phi_{(k)}(v, u_0) - w_{(k)}) \leq 0$.
- (b) $-u_{0(k)} < v_{(k)} < u_{0(k)}$. Neste caso, $\Phi_{(k)}(v, u_0) = 0$. Assim, $\Phi_{(k)}(v, u_0)'(\Phi_{(k)}(v, u_0) - w_{(k)}) = 0$.

- (c) $v_{(k)} < -u_{0(k)}$. Para este caso, $\Phi_{(k)}(v, u_0) = v_{(k)} + u_{0(k)} < 0$ e $\Phi_{(k)}(v, u_0) - w_{(k)} = v_{(k)} + u_{0(k)} - w_{(k)}$. Como $v_{(k)} - w_{(k)} > -u_{0(k)}$, isto implica que $v_{(k)} + u_{0(k)} - w_{(k)} > 0$ e, portanto, $\Phi_{(k)}(v, u_0)'(\Phi_{(k)}(v, u_0) - w_{(k)}) \leq 0$, sendo demonstrado todos os três casos.

Deste modo, (21) é válida para qualquer matriz S_Φ positiva definida. \square

3.2 Condições de Estabilidade

Nesta seção os Lemas 3.1, 3.2 e 3.3 são utilizados para formular os Teoremas 3.1 e 3.2, os quais são utilizados para a síntese das lei de realimentação de estados estabilizantes referentes aos Problemas 2.2 e 2.4, respectivamente. São utilizadas funções candidatas de Lyapunov quadráticas e as relações de setor obtidas na seção anterior para garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (6).

3.2.1 Caso Geral

Nesta subseção o Problema 2.2 é considerado. Como visto na seção 2.3.1, a dinâmica de malha fechada do sistema para este problema é descrita por:

$$\dot{e} = (A - K)e + B\rho(C_E e, C_E x_S) + \Phi(K e, u_0) \quad (22)$$

Utilizando as relações de setor obtidas nos Lemas 3.1 e 3.3, pode-se enunciar o Teorema 3.1 descrito a seguir.

Teorema 3.1. *Se existe uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \text{Sim}\{AW - \tilde{K}\} & * & * \\ \Omega_\sigma C_E + (T_\rho B)' & -2T_\rho & * \\ \tilde{G} + T_\Phi & 0_{n \times m} & -2T_\Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ (\tilde{K}_{(k)} - \tilde{G}_{(k)}) & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} > 0, k = 1, \dots, n \quad (24)$$

então segue que todas as trajetórias do sistema em malha fechada (22) com $K = \tilde{K}W^{-1}$ iniciadas no conjunto

$$\mathcal{Z}_0 = \{e \in \mathbb{R}^n; e'Pe \leq 1\} \quad (25)$$

com $W = P^{-1}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. De acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov (KHALIL, 1992), caso uma função candidata de Lyapunov seja positiva e a sua derivada seja negativa em um determinado domínio, a origem das variáveis da função candidata será assintoticamente estável. Definindo, então, uma função de Lyapunov candidata quadrática $V = e'Pe$, onde P é uma matriz simétrica definida positiva, portanto garantindo que V seja positiva, sendo necessário garantir a negatividade de sua derivada. Calculando a derivada de V em relação às trajetórias do sistema (22) tem-se:

$$\dot{V} = \text{Sim}\{e'P[(A - K)e + B\rho(C_E e, C_E x_S) + \Phi(K e, u_0)]\}. \quad (26)$$

As relações baseadas em setor obtidas na seção anterior podem ser utilizadas para garantir a negatividade de (26) através de uma aplicação de *S-procedure* (BOYD et al., 1994). Baseado no Lema 3.3, e assumindo $w = Ge$, tal que $\mathcal{W}(v, w) = \mathcal{W}(e) = \{e \in \mathbb{R}^n; |(K_{(k)} - G_{(k)})e| \leq u_{0(k)}, k = 1, \dots, n\}$, então segue que

$$\Upsilon_\Phi = \Phi(Ke, u_0)' S_\Phi (\Phi(Ke, u_0) - Ge) \leq 0 \quad (27)$$

é assegurado $\forall e \in \mathcal{W}(e)$. Por outro lado do Lema 3.1:

$$\Upsilon_{\rho 1} = \rho(C_E e, C_E x_S)' S_\rho (\rho(C_E e, C_E x_S) - \Omega_\sigma C_E e) \leq 0. \quad (28)$$

Como (27) e (28) possuem valor negativo ou nulo, ao subtraí-las de (26), tem-se uma equação mais positiva do que a derivada da função candidata de Lyapunov desde que $\forall e \in \mathcal{W}(e)$. Assim, caso seja garantido que a equação resultante seja negativa dentro do domínio $\mathcal{W}(e)$, garante-se, por consequência, que a derivada da função candidata também seja negativa dentro do mesmo domínio.

$$\dot{V} \leq \text{Sim}\{e' P[(A - K)e + B\rho(C_E e, C_E x_S) + \Phi(Ke)]\} - 2\Upsilon_{\rho 1} - 2\Upsilon_\Phi. \quad (29)$$

O lado direito de (29) pode ser escrito na forma matricial $\xi_1(t)' \Gamma_1 \xi_1(t)$ com $\xi_1 = [e' \rho' \Phi']'$ e com

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{P(A - K)\} & * & * \\ S_\rho \Omega_\sigma C_E + (PB)' & -2S_\rho & * \\ P + S_\Phi G & 0_{n \times m} & -2S_\Phi \end{bmatrix}.$$

As incógnitas da matriz acima são as matrizes P , K , S_ρ , S_Φ . Entretanto, a matriz acima não forma uma *LMI*, pois há multiplicações entre P e K . Assim, busca-se eliminar esta não-linearidade da matriz, definindo as seguintes variáveis $W = P^{-1}$, $T_\rho = S_\rho^{-1}$ e $T_\Phi = S_\Phi^{-1}$. Ao pre- e pós-multiplicar a matriz Γ_1 por $\text{diag}\{W, T_\rho, T_\Phi\}$ resulta em

$$\bar{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{(A - K)W\} & * & * \\ \Omega_\sigma C_E W + (BT_\rho)' & -2T_\rho & * \\ T_\Phi + GW & 0_{n \times m} & -2T_\Phi \end{bmatrix}.$$

Entretanto, a matriz $\bar{\Gamma}_1$ ainda é não-linear. Para resolver isto, pode-se aplicar as seguintes mudanças de variáveis $\tilde{K} = KW$ e $\tilde{G} = GW$ para linearizar a matriz $\bar{\Gamma}_1$. Com estas mudanças de variáveis, segue que $\bar{\Gamma}_1$ é equivalente ao lado esquerdo de (23). Assim, se (23) for verificada, segue que $\bar{\Gamma}_1 < 0$ e, consequentemente, $\dot{V} < 0$, desde que $e \in \mathcal{W}(e)$.

De (TARBOURIECH et al., 2011) sabe-se que $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{W}(e)$ se

$$e' P e - e' (K_{(k)} - G_{(k)})' \frac{1}{u_{0(k)}^2} (K_{(k)} - G_{(k)}) e \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (30)$$

pois neste caso tem-se

$$|e' (K_{(k)} - G_{(k)})' \frac{1}{u_{0(k)}^2} (K_{(k)} - G_{(k)}) e| < e' P e \leq 1$$

Aplicando agora o complemento de Schur em (30), tem-se:

$$\begin{bmatrix} P & * \\ (K_{(k)} - G_{(k)}) & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} > 0, k = 1, \dots, n$$

Ao pré- e pós-multiplicar a matriz resultante por $\text{diag}\{W, 1\}$ e realizar as trocas de variáveis consideradas anteriormente obtém-se (24). Como consequência, a satisfação de (23) e de (24) implica em $\dot{V} < 0$ para todas as trajetórias do sistema em malha fechada (22) iniciadas em \mathcal{Z}_0 , o que conclui a prova. \square

Utilizando as relações de setor dos Lemas 3.1 e 3.3 de tal forma que w escolhido satisfaça globalmente a condição de setor apresentada, pode-se enunciar o Corolário 3.1 descrito a seguir.

Corolário 3.1. *Se existe uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matriz $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} \text{Sim}\{AW - \tilde{K}\} & * & * \\ \Omega_\sigma C_E + (T_\rho B)' & -2T_\rho & * \\ \tilde{K} + T_\Phi & 0_{n \times m} & -2T_\Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

então segue que todas as trajetórias do sistema em malha fechada (22) com $K = \tilde{K}W^{-1}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Considere que $G = K$. Assim, segue que a condição de setor

$$\Upsilon_\Phi = \Phi(Ke, u_0)' S_\Phi(\Phi(Ke, u_0) - Ge) \leq 0 \quad (32)$$

é verificada $\forall e \in \mathbb{R}^n$. Pode-se perceber que (31) corresponde à (23) obtida no Teorema 3.1 e que a estabilidade assintótica global da origem do erro de sincronização é obtida. \square

3.2.2 Caso Linear por Partes

Nesta subseção o Problema 2.4 é considerado. Conforme mostrado na seção 2.4.1, a dinâmica de malha fechada do sistema para este problema é descrita por:

$$\dot{e} = (A + B\Delta_1 C_E - K)e - B \sum_{j=1}^{N-1} ((\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_E e, C_E x_S)) + \Phi(Ke, u_0) \quad (33)$$

Utilizando as relações de setor obtidas nos Lemas 3.2 e 3.3, pode-se gerar o Teorema 3.2 descrito a seguir. O Teorema 3.2 possui algumas similaridades com o Teorema 3.1, devido à consideração relacionada com a não-linearidade $\Phi(Ke, u_0)$ ser idêntica.

Teorema 3.2. *Se existe uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_{\Lambda_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \text{Sim}\{AW - \tilde{K} + B\Delta_1 C_E W\} & * & * & * & * \\ C_E W - T_{\Lambda_1}(\Delta_1 - \Delta_2)' B' & -2T_{\Lambda_1} & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_E W - T_{\Lambda_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)' B' & 0_{m \times m} & \cdots & -2T_{\Lambda_{N-1}} & * \\ T_\Phi + \tilde{G} & 0_{n \times m} & \cdots & 0_{n \times m} & -2T_\Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ (\tilde{K}_{(k)} - \tilde{G}_{(k)}) & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} > 0, k = 1, \dots, n \quad (35)$$

então segue que todas as trajetórias do sistema em malha fechada (33) com $K = \tilde{K}W^{-1}$ iniciadas no conjunto \mathcal{Z}_0 definido em (25), com $W = P^{-1}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Definindo a função de Lyapunov candidata $V = e'Pe$ onde P é uma matriz simétrica definida positiva, e calculando a derivada de V em relação às trajetórias do sistema tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \text{Sim}\{e'P[(A + B\Delta_1 C_E - K)e \\ & - B \sum_{j=1}^{N-1} ((\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_E e, C_E x_S) + \Phi(Ke, u_0))]\}. \end{aligned} \quad (36)$$

São empregadas nesta seção as relações baseadas em setor das não-linearidades $\Lambda_j(C_E e, C_E x_S)$ e $\Phi(Ke, u_0)$, sendo manipuladas através do *S-procedure* para garantir a negatividade de (36). Para a não-linearidade $\Phi(Ke, u_0)$ é utilizado a relação baseada em setor (27) descrita na subseção anterior. Baseado no Lema 3.2 pode-se escrever a seguinte equação:

$$\Upsilon_{\Lambda_j} = \Lambda_j(C_E e, C_E x_S)' S_{\Lambda_j} (\Lambda_j(C_E e, C_E x_S) - C_E e) \leq 0. \quad (37)$$

Assim tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \text{Sim}\{e'P[(A + B\Delta_1 C_E - K)e \\ & - B \sum_{j=1}^{N-1} ((\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_E e, C_E x_S) + \Phi(v))] \\ & - 2\Upsilon_{\Phi} - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \Upsilon_{\Lambda_j}\}. \end{aligned} \quad (38)$$

O lado direito de (38) pode ser escrito na forma matricial $\xi_2(t)' \Gamma_2 \xi_2(t)$ com $\xi = [e' \tilde{\Lambda}' \Phi']'$ e com $\tilde{\Lambda} = [\Lambda_{j(i)} \dots \Lambda_{N-1}]'$.

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{P(A + B\Delta_1 C_E - K)\} & * & * & * & * \\ S_{\Lambda_1} C_E - (\Delta_1 - \Delta_2)' B' P & -2S_{\Lambda_1} & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{\Lambda_{N-1}} C_E - (\Delta_{N-1} - \Delta_N)' B' P & 0_{m \times m} & \cdots & -2S_{\Lambda_{N-1}} & * \\ P + S_{\Phi} G & 0_{n \times m} & \cdots & 0_{n \times m} & -2S_{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Assim como na subseção anterior, Γ_2 possui multiplicações entre as variáveis de decisão, portanto não pode formar uma *LMI*. Assim, definindo $W = P^{-1}$, $T_{\Lambda_j} = S_{\Lambda_j}^{-1}$ e $T_{\Phi} = S_{\Phi}^{-1}$ e pre- e pós-multiplicando a matriz Γ_2 por $\text{diag}\{W, T_{\Lambda_j}, \dots, T_{\Lambda_{N-1}}, T_{\Phi}\}$ resulta em

$$\bar{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{(A + B\Delta_1 C - K)W\} & * & * & * & * \\ C_E W - T_{\Lambda_1} (\Delta_1 - \Delta_2)' B' & -2T_{\Lambda_1} & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_E W - T_{\Lambda_{N-1}} (\Delta_{N-1} - \Delta_N)' B' & 0_{m \times m} & \cdots & -2T_{\Lambda_{N-1}} & * \\ T_{\Phi} + GW & 0_{n \times m} & \cdots & 0_{n \times m} & -2T_{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Novamente é necessário aplicar uma mudança de variável para linearizar a matriz $\bar{\Gamma}_2$. Portanto, define-se $\tilde{K} = KW$ e $\tilde{G} = GW$ segue que $\bar{\Gamma}_2$ é equivalente ao lado esquerdo de (34). Assim, se (34) for verificada segue que $\Gamma_2 < 0$ e, conseqüentemente, $\dot{V} < 0$ desde que $e \in \mathcal{W}(e)$.

A relação (35) assegura que \mathcal{Z}_0 definido em (25) esteja contido em $\mathcal{W}(e)$, i.e. $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{W}(e)$. Esta prova é a mesma apresentada na subseção 3.2.1. Como consequência, a satisfação de (34) e de (35) implica em $\dot{V} < 0$ para todas as trajetórias do sistema em malha fechada (33) iniciadas em \mathcal{Z}_0 , o que conclui esta prova. \square

Utilizando as relações de setor dos Lemas 3.2 e 3.3 de tal forma que w escolhido satisfaça globalmente a condição de setor apresentada, pode-se enunciar o Corolário 3.2 descrito a seguir.

Corolário 3.2. *Se existe uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_{\Lambda_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matriz $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} \text{Sim}\{AW - \tilde{K} + B\Delta_1 C_E W\} & * & * & * & * \\ C_E W - T_{\Lambda_1}(\Delta_1 - \Delta_2)' B' & -2T_{\Lambda_1} & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_E W - T_{\Lambda_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)' B' & 0_{m \times m} & \cdots & -2T_{\Lambda_{N-1}} & * \\ T_{\Phi} + \tilde{K} & 0_{n \times m} & \cdots & 0_{n \times m} & -2T_{\Phi} \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

então segue que todas as trajetórias do sistema em malha fechada (33) com $K = \tilde{K}W^{-1}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Considere que $G = K$. Assim, segue que a condição de setor

$$\Upsilon_{\Phi} = \Phi(K e, u_0)' S_{\Phi}(\Phi(K e, u_0) - G e) \leq 0 \quad (40)$$

é verificada $\forall e \in \mathbb{R}^n$. Pode-se perceber que (39) corresponde à (34) obtida no Teorema 3.2 e que a estabilidade assintótica global da origem do erro de sincronização é obtida. \square

3.3 Problema de Otimização

Conforme mencionado anteriormente, um problema de interesse é a maximização do conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{Z}_0 para as quais é possível garantir a convergência de trajetórias em malha fechada para a origem. Baseado nos Teoremas 3.1 e 3.2, problemas de otimização podem ser propostos para a obtenção da matriz de ganho K , tendo como objetivo a maximização do tamanho do conjunto \mathcal{Z}_0 . O tamanho de \mathcal{Z}_0 pode, por exemplo, ser medido em relação ao conjunto poliedral $\Xi = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ onde os vértices $v_l \in \mathbb{R}^n, l = 1, \dots, n$ correspondem a direções nas quais o conjunto deverá ser maximizado, conhecidos *a priori* (TARBOURIECH et al., 2011). Logo, o objetivo do problema de otimização é maximizar um escalar $\gamma > 0$ de tal forma que $\gamma\Xi \subset \mathcal{Z}_0$ descrita em (41) seja maximizado. Assumindo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, a minimização de η implica na maximização de γ .

$$\gamma v_l' P v_l \gamma \leq 1 \quad (41)$$

A solução deste problema pode ser obtida através do problema de otimização (42) para o Problema 2.2 e do problema de otimização (43) para o Problema 2.4. O Problema de otimização (42) é obtido ao considerar as relações (23) e (24) e ao aplicar o complemento de Schur à (41) levando em consideração a relação de γ e de η , enquanto que o Problema de otimização (43) é obtido ao considerar as relações (34) e (35) e ao aplicar o complemento de Schur à (41).

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \min \eta \\ \begin{bmatrix} \eta & * \\ v_l & W \end{bmatrix} > 0, \quad \forall l = 1, \dots, n \\ \text{Relações (23) e (24)} \end{cases} \quad (42)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \min \eta \\ \begin{bmatrix} \eta & * \\ v_l & W \end{bmatrix} > 0, \quad \forall l = 1, \dots, n \\ \text{Relações (34) e (35)} \end{cases} \quad (43)$$

Assumindo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, a minimização de η implica na maximização de γ . Observe que uma vez que as condições (23), (24), (34) e (35) são LMIs, então os problemas de otimização (42) e (43) são convexos e podem ser resolvidos eficientemente por solucionadores de *LMI* padrão.

Outros critérios para a maximização de \mathcal{Z}_0 podem ser considerados, como por exemplo a maximização do volume do elipsoide \mathcal{Z}_0 , a minimização do traço de P e a maximização do menor eixo do elipsoide \mathcal{Z}_0 (TARBOURIECH et al., 2011). Entretanto o critério apresentado acima foi o escolhido para ser aplicado às simulações apresentadas a seguir.

3.4 Validação Numérica dos Resultados

Nesta seção são apresentados resultados aplicados a um circuito de Chua. Primeiramente o sistema a ser simulado é descrito, para então em sequência os resultados obtidos serem apresentados.

3.4.1 Circuito de Chua

Como visto na seção 1.2, o circuito de Chua é comumente empregado para o uso de simulações e de experimentos numéricos para ilustrar os resultados obtidos tanto para a sincronização de sistemas Lur'e quanto para os resultados sob a ótica de sistemas caóticos. Isso se deve em parte pelo criador deste sistema, Leon O. Chua, ter publicado diversos trabalhos sobre este tema utilizando o seu circuito como exemplo, mas também por ser o circuito elétrico mais simples que pode ser construído que apresenta comportamento caótico. Por estas razões este sistema foi o escolhido para representar o exemplo numérico incluído neste trabalho.

Um sistema caótico é caracterizado por possuir hiper-sensibilidade em relação às condições iniciais, com pequenas variações nas condições iniciais causando vastas mudanças de trajetória. De acordo com (ELGAR; KENNEDY, 1993), um sistema elétrico composto de resistores, capacitores e indutores necessita possuir os seguintes três componentes para ser um sistema caótico:

- pelo menos um componente não-linear
- pelo menos um resistor localmente ativo, um elemento ativo o qual possui resistência equivalente negativa
- pelo menos três elementos armazenadores de energia

O circuito de Chua, representado na Fig. 7, satisfaz o terceiro requisito por possuir em sua composição dois capacitores e um indutor. O primeiro e o segundo itens são satisfeitos por um componente chamado de diodo de Chua (D_C), o qual possui diversas formas possíveis. Os valores dos componentes da Fig. 7 utilizados em (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985) estão localizados na Tabela 1, enquanto que os valores do diodo de Chua são considerados de tal forma que a sua não-linearidade pode ser descrita por (45).

No presente trabalho foi considerado a forma do diodo de Chua conforme apresentado na Fig. 8, com um amplificador inversor sendo responsável pela resistência equivalente negativa e o par de diodos formando a não-linearidade com simetria ímpar. Esta configuração resulta em uma não-linearidade *PWL* com um ponto de quebra devido ao par de diodos, com mais pontos de quebra sendo possível caso um amplificador de ganho variável seja considerado. Entretanto, como os parâmetros encontrados na literatura de um circuito de Chua que apresenta comportamento caótico contém uma não-linearidade com apenas um ponto de quebra, foi escolhido a configuração com apenas um ponto de quebra.

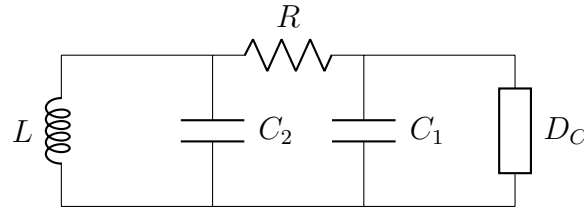


Figura 7: Circuito de Chua com diodo de Chua

Tabela 1: Parâmetros físicos considerados para o circuito de Chua

Parâmetro	Valor
C_1	$0.0055\mu F$
C_2	$0.0495\mu F$
L	$7.07mH$
R	$1.428k\Omega$

De acordo com a formulação apresentada em (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985), este sistema pode ser genericamente representado com as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(-x_1 + x_2 - \phi(x_1)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 \end{cases} \quad (44)$$

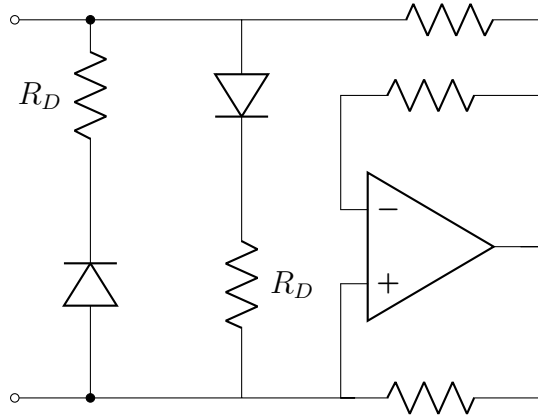


Figura 8: Esquemático do Diodo de Chua

onde x_1 corresponde à tensão no capacitor C_1 , x_2 corresponde à tensão no capacitor C_2 , x_3 corresponde à corrente no indutor L e $\phi(f)$ é a função não-linear chamada de diodo de Chua descrita por:

$$\phi(f) = \begin{cases} -g_2(f + 1) + g_1, & \text{se } f < -1 \\ -g_1 f, & \text{se } |f| \leq 1 \\ -g_2(f - 1) - g_1, & \text{se } f > 1 \end{cases} \quad (45)$$

com $g_1 > g_2 > 0$. Note que neste caso $\phi(f)$ é escalar, i. e. $\phi(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

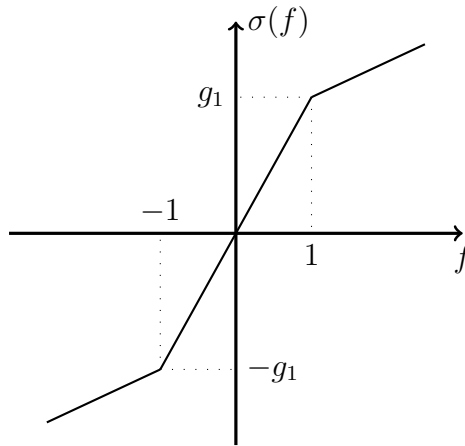


Figura 9: Função *PWL* do circuito de Chua com um ponto de quebra

Escrevendo (44) e (45) na forma dos sistemas mestre e escravo como definidas em (1) e em (2), tem-se as seguintes relações:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad C_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

e com $\Omega_\sigma = g_1$, $\Delta_1 = -g_1$, $\Delta_2 = -g_2$ e $\sigma(C_E x) = -\phi(x_1)$, representado na Fig. 9, para o controlador estático de realimentação de estados. Os parâmetros utilizados nas simulações numéricas a seguir estão expostos na Tabela 2, com os parâmetros

referentes ao modelo do circuito de Chua que mais se aproxima do comportamento do circuito mostrado na Fig. 7 sendo obtidos de (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985) e os parâmetros referentes ao limite de magnitude do sinal de controle, $u_{0(k)}$, $k = 1, 2, 3$, sendo arbitrado.

Tabela 2: Parâmetros considerados para as simulações numéricas

Parâmetro	Valor
α	9
β	14.28
g_1	1.143
g_2	0.714
b_1	1
$u_{0(1)}$	1
$u_{0(2)}$	1
$u_{0(3)}$	1

3.4.2 Resultados Numéricos

Resolvendo o problema convexo (42), ou seja, resolvendo o problema relacionado com o caso geral, com o conjunto poliedral

$$\Xi = Co \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

obtém-se:

$$K = \begin{bmatrix} 16.8593 & 0.2668 & 0.1046 \\ 0.2668 & 16.6904 & 0.0282 \\ 0.1046 & 0.0282 & 17.4014 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.3510 & 1.2668 & 0.4374 \\ 1.2668 & 3.9013 & 0.1368 \\ 0.4374 & 0.1368 & 0.5252 \end{bmatrix}$$

$$\eta = 3.9445$$

Por outro lado, ao resolver o problema convexo no qual a não-linearidade do sistema Lur'e é considerada *PWL*, o problema de otimização (43) com o mesmo conjunto poliedral considerado no caso anterior, obtém-se:

$$K = \begin{bmatrix} 14.1902 & 0.3872 & 0.2949 \\ 0.3872 & 14.3516 & 0.0634 \\ 0.2949 & 0.0634 & 14.9276 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.2391 & 0.9593 & 0.5627 \\ 0.9593 & 2.4216 & 0.1998 \\ 0.5627 & 0.1998 & 0.4257 \end{bmatrix}$$

$$\eta = 2.4518$$

O critério de otimização considerado na seção 3.3 implica que um valor de η menor corresponde a uma região \mathcal{Z}_0 maior. Assim, espera-se que o segundo caso possua uma estimativa da região de atração maior. As estimativas tridimensionais de região de atração obtidas para os problemas de otimização (42) e (43) estão mostradas nas Fig. 10 e 11, respectivamente, geradas por uma rotina de MATLAB¹. Entretanto, comparar visualmente as regiões de atração em suas representações tridimensionais não é trivial, portanto uma representação bidimensional de cada uma das estimativas foi obtida para realizar a comparação. As representações bidimensionais foram obtidas realizando cortes nas estimativas tridimensionais de forma que a dimensão não-representada na respectiva imagem possui valor nulo. Estas representações estão mostradas nas Fig. 12, 13 e 14.

Pode-se perceber pelas três imagens que quando a não-linearidade $\sigma(C_E x)$ foi modelada como uma função *PWL* na formulação do Problema 2.4 foi possível obter uma maior estimativa da região de atração do que quando a não-linearidade foi considerada apenas satisfazendo a condição de setor global como feito na formulação do Problema 2.2. Deste modo, pode-se dizer que a abordagem de modelar a função não-linear como uma função *PWL* possibilitou uma abordagem com menos conservadorismo do que se fosse apenas utilizado o setor global na qual a função não-linear se encontra.

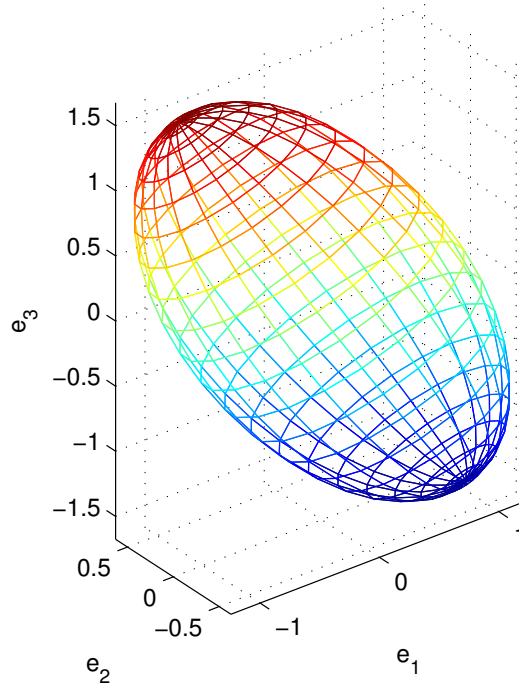


Figura 10: Estimativa tridimensional da região de atração do caso geral

Considerando agora as matrizes obtidas pelo problema de otimização (43), buscase confirmar que a sincronização é obtida para a região de atração estimada. Desta forma, foram escolhidos valores iniciais de x_M e de x_S de tal forma que o valor inicial

¹University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 2007

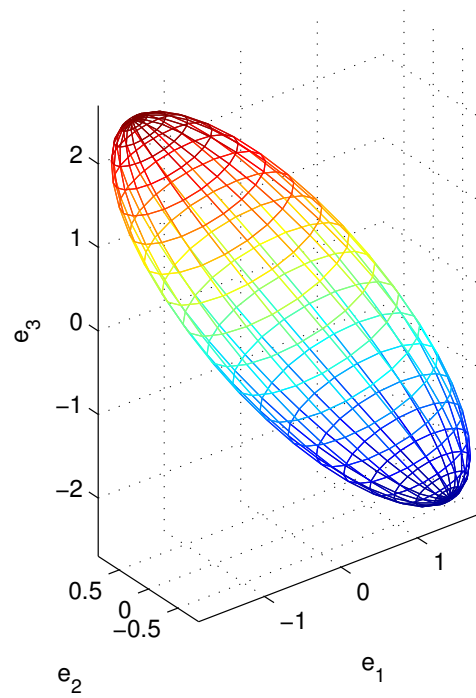


Figura 11: Estimativa tridimensional da região de atração do caso *PWL*

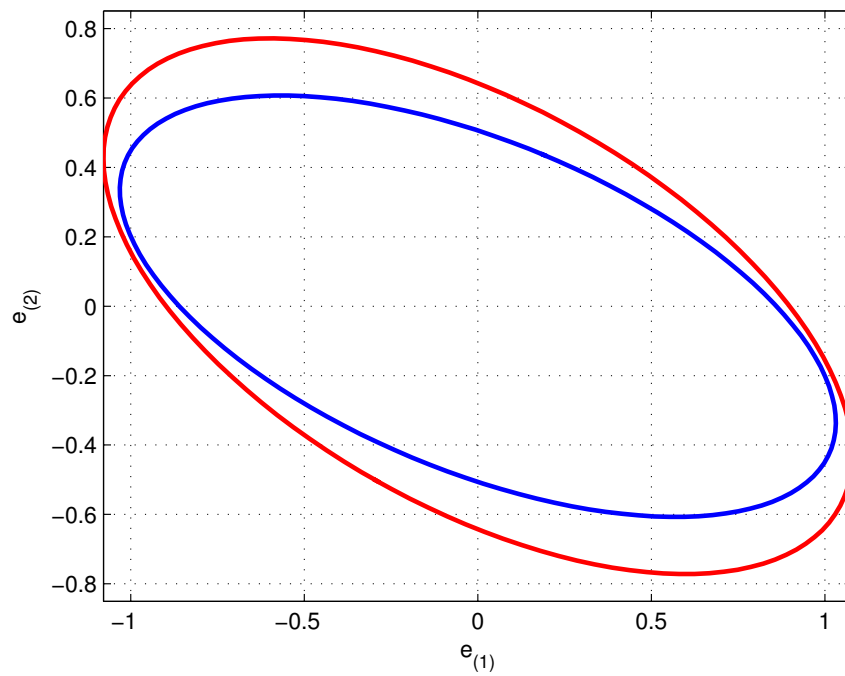


Figura 12: Comparação dos cortes ($e_{(3)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação estática de estados: azul para o caso geral; vermelho para o caso *PWL*

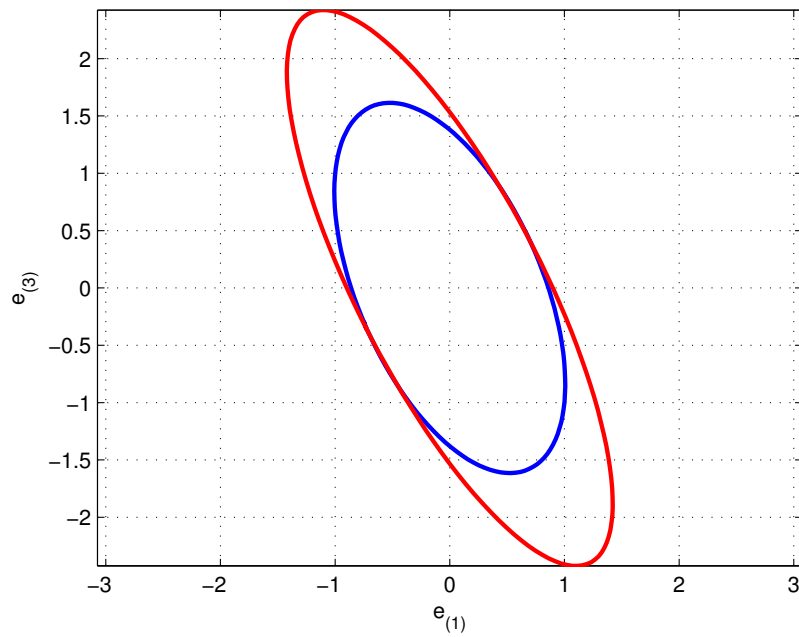


Figura 13: Comparação dos cortes ($e_{(2)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação estática de estados: azul para o caso geral; vermelho para o caso *PWL*

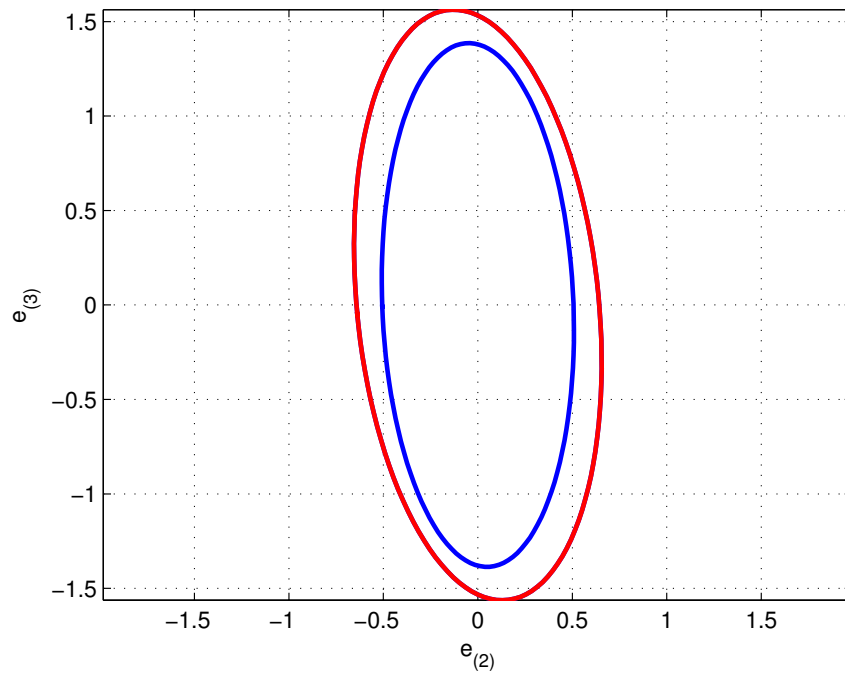


Figura 14: Comparação dos cortes ($e_{(1)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação estática de estados: azul para o caso geral; vermelho para o caso *PWL*

do erro de sincronização se encontra no limite da região \mathcal{Z}_0 encontrada para o caso *PWL*. Foram escolhidos os valores $e_0 = [0.45 \ 0.3 \ 0.35]'$.

Com base neste estado inicial do erro foi realizada uma simulação numérica, com os resultados obtidos representados nas Fig. 15, 16 e 17. A Fig. 15 mostra a evolução temporal do sinal de erro de sincronização. Como o sinal eventualmente se anula, pode-se concluir que o sistema \mathcal{S} entra em sincronia com o sistema \mathcal{M} . Na Fig. 16 pode-se observar o comportamento temporal de cada uma das componentes do sinal de controle u . Percebe-se que inicialmente os três sinais de controle são limitados pela saturação considerada, mas mesmo assim os sistemas foram capazes de entrar em sincronia. Além disso, uma vez que os sistemas entram em sincronia o sinal de controle também se anula, ou seja, após a sincronização ser obtida não é mais necessário a presença de um controlador, a não ser que perturbações sejam introduzidas em algum dos sistemas. Finalmente, na Fig. 17 são demonstradas as trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$, podendo confirmar a conclusão obtida na análise da Fig. 15 de que o sistema entra em sincronia. Pode-se também observar indícios do comportamento caótico dos sistemas, sendo o comportamento apresentado limitado em tempo com o propósito de não poluir a representação gráfica da sincronização.

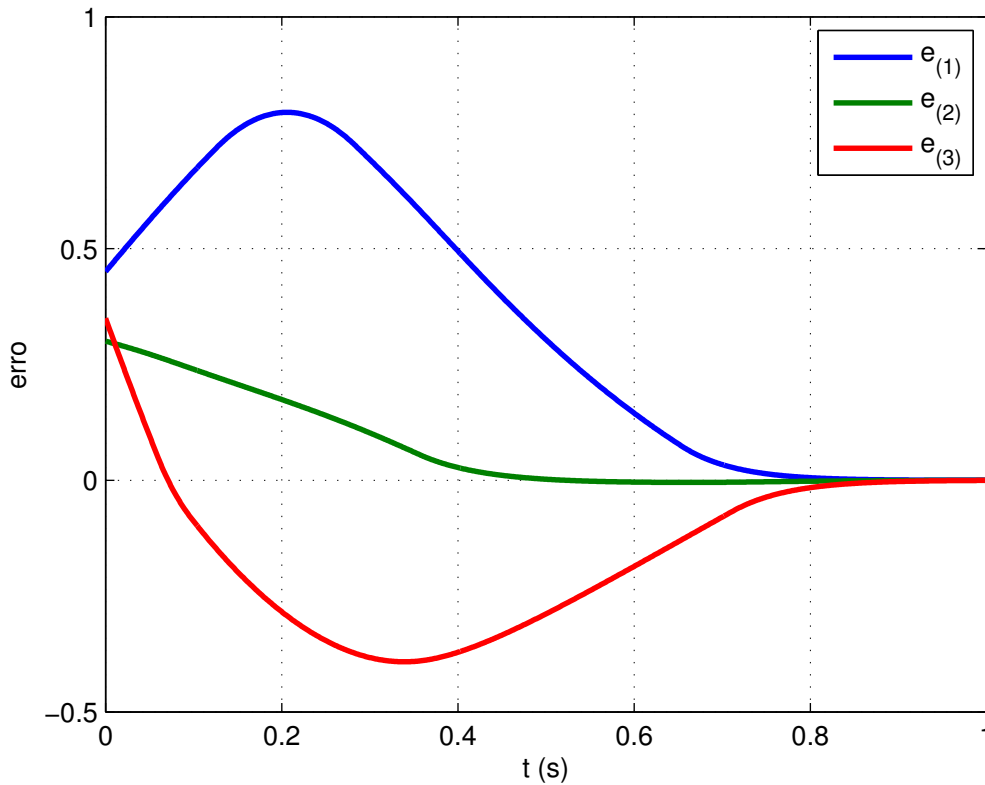


Figura 15: Comportamento temporal do sinal de erro

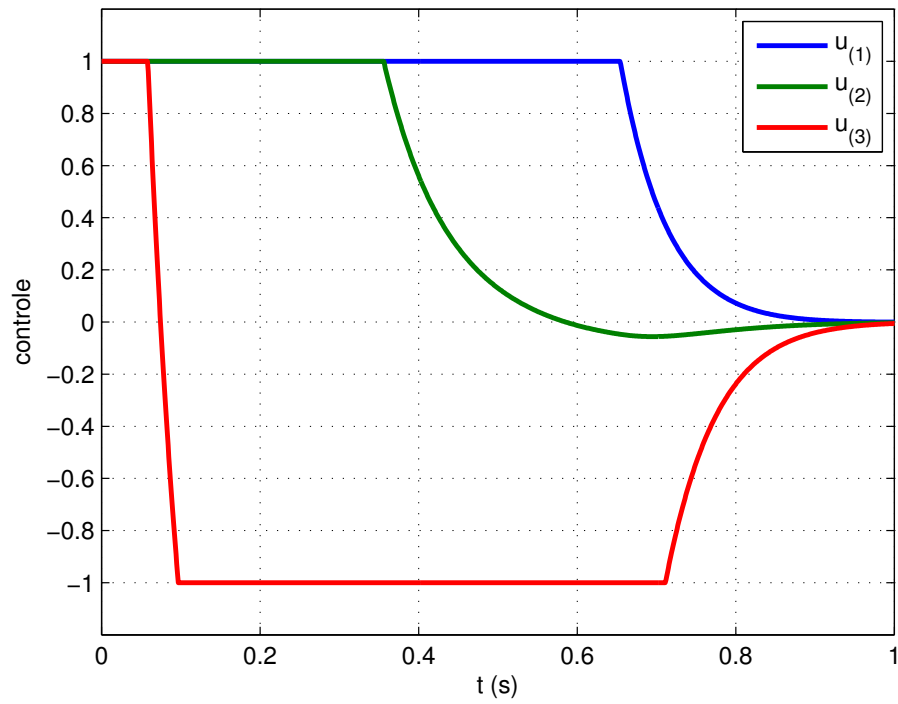


Figura 16: Comportamento temporal do sinal de controle

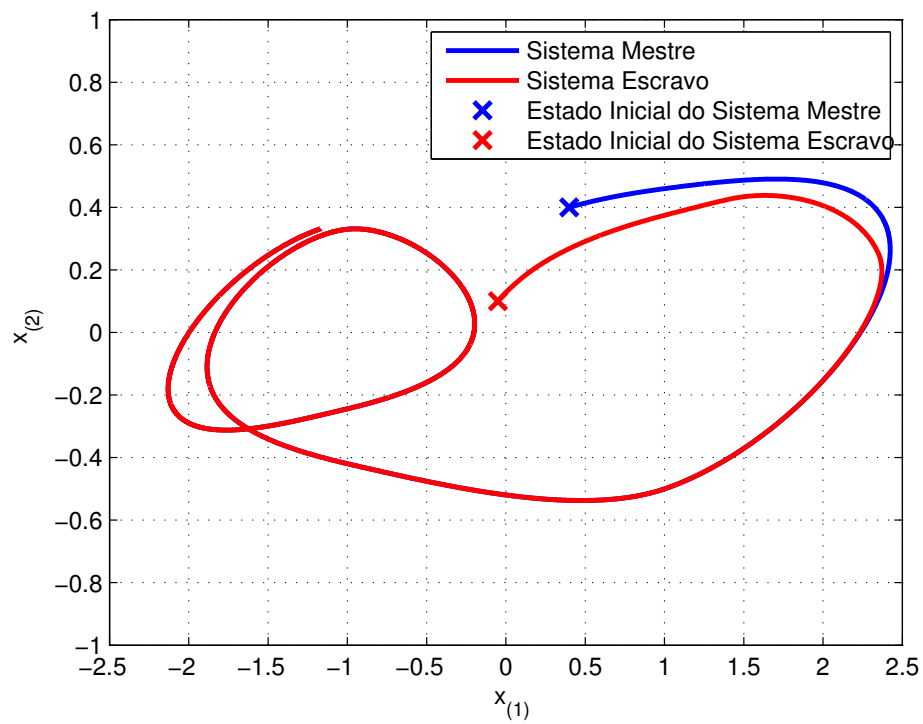


Figura 17: Trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$

Além da simulação onde foi considerado um valor inicial do erro de sincronização dentro da estimativa da região de atração, foi realizada também uma simulação numérica onde o valor inicial do erro está localizado fora da região de atração, sendo escolhido $e_0 = [4.4 \ 4.4 \ 4.6]'$. Como mostra a Fig. 18, nesta situação não foi possível obter a sincronização entre os dois sistemas. Os valores do erro aumentam exponencialmente pois, apesar do sistema Mestre ter valores iniciais que levam ao comportamento caótico como mostrado na Fig. 19, o sistema escravo é inicializado de tal forma que os seus estados possuem um comportamento exponencial divergente, como mostrado na Fig. 20.

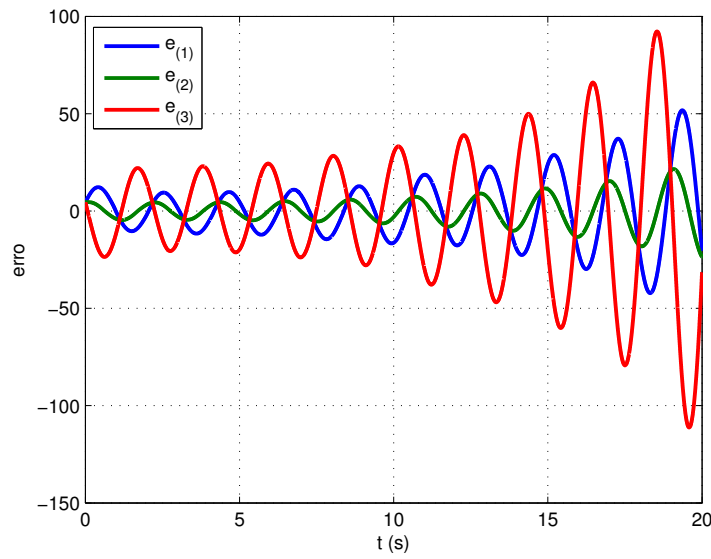


Figura 18: Comportamento temporal do sinal de erro

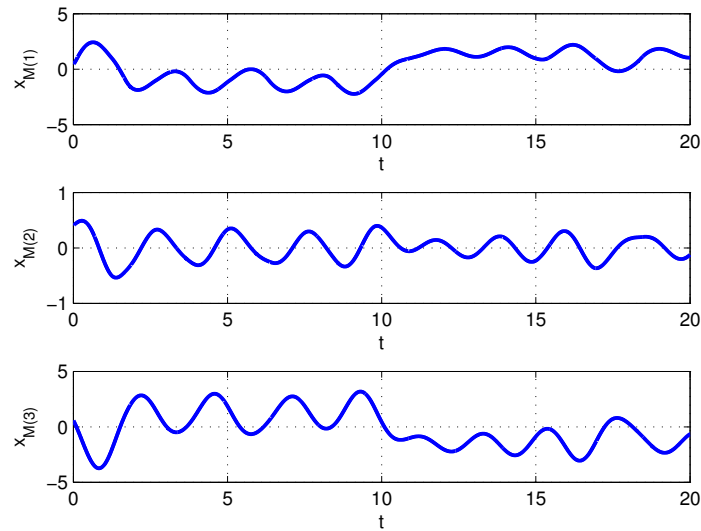


Figura 19: Comportamento temporal dos estados do sistema Mestre

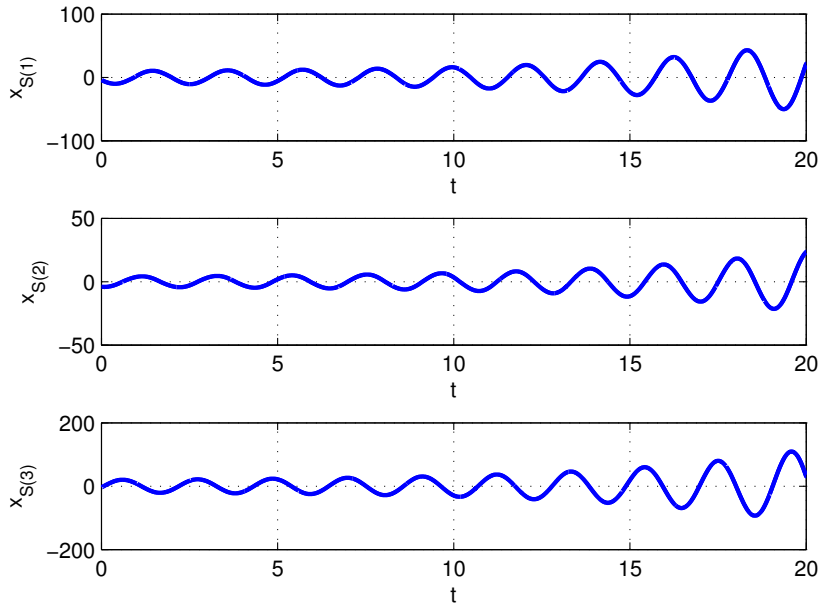


Figura 20: Comportamento temporal dos estados do sistema Escravo

3.5 Conclusão

Neste capítulo foi abordada a estratégia de controle por realimentação estática de estados, utilizando o circuito de Chua como sistema modelo para validar os teoremas de síntese dos controladores. Foi verificado ao resolver os Problemas de otimização (42) e (43) que o caso em que a não-linearidade σ foi modelada como uma função *PWL* levou a uma redução de conservadorismo em relação à estimativa da região de atração. Finalmente, foi mostrado, utilizando-se o resultado do caso *PWL*, que a sincronização é obtida para resultados no limite da região de atração, enquanto que valores iniciais de erro de sincronização fora da região de atração não resultam em sincronização. Os resultados obtidos neste capítulo para o caso em que a função *PWL* possui um ponto de quebra foram apresentados em (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017a).

Mesmo caso a não-linearidade σ não seja uma função *PWL*, ainda assim é possível utilizar os resultados obtidos na subseção 3.2.2. Para isto, a não-linearidade deve estar localizada entre duas funções *PWL*, pois foi demonstrado em (HU; HUANG; LIN, 2004) que os resultados obtidos podem ser aplicados para funções de Lur'e genéricas pertencentes ao envelope convexo de duas funções *PWL*. Este envelope convexo é definido por $\sigma \in Co\{\sigma_a, \sigma_b\}$, com $\sigma = \lambda_a \sigma_a + \lambda_b \sigma_b$, onde $\lambda_a + \lambda_b = 1$, $0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1$, σ_a, σ_b são funções *PWL* e σ é a função não-linear genérica. Assim como σ pertence a um envelope convexo, ρ também pertencerá a um envelope convexo, conforme a Observação 3.1, demonstrando como argumentos convexos possibilitam o uso deste método para qualquer função não-linear σ .

Observação 3.1. Definindo o envelope convexo $\rho \in Co\{\rho_a, \rho_b\}$, tal que $\rho_a(f_1 + f_0) = \sigma_a(f_1 + f_0) - \sigma_a(f_0)$ e $\rho_b(f_1 + f_0) = \sigma_b(f_1 + f_0) - \sigma_b(f_0)$, então:

$$\begin{aligned}
\rho(f_1 + f_0) &= \lambda_a \rho_a(f_1 + f_0) + \lambda_b \rho_b(f_1 + f_0) \\
\rho(f_1 + f_0) &= \lambda_a (\sigma_a(f_1 + f_0) - \sigma_a(f_0)) + \lambda_b (\sigma_b(f_1 + f_0) - \sigma_b(f_0)) \\
\rho(f_1 + f_0) &= \lambda_a \sigma_a(f_1 + f_0) + \lambda_b \sigma_b(f_1 + f_0) - (\lambda_a \sigma_a(f_0) + \lambda_b \sigma_b(f_0)) \\
\rho(f_1 + f_0) &= \sigma(f_1 + f_0) - \sigma(f_0)
\end{aligned}$$

4 REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA

Este capítulo aborda a estratégia de controle do tipo realimentação dinâmica das saídas dos sistemas mestre e escravo, ou seja, são abordados os Problemas 2.3 e 2.5. Primeiramente as funções não-lineares $\sigma(\cdot)$ e $\Psi(\cdot, \cdot)$ são analisadas através de condições baseadas em setor de forma similar à feita na seção 3.1. Como as não-linearidades $\rho(f_1, f_0)$ e $\Lambda_j(f_1, f_0)$ e $\Phi(f)$ foram analisadas na seção mencionada anteriormente, os Lemas previamente desenvolvidos podem ser utilizados.

Em seguida na seção 4.2 são apresentados os teoremas para a síntese dos controladores dinâmicos referentes aos Problemas 2.3 e 2.5. Assim como na seção 3.2, os teoremas consideram a teoria de estabilidade de Lyapunov (KHALIL, 1992) juntamente com as relações baseadas em setor obtidas tanto na seção 3.1 quanto na seção 4.1 para gerar condições de estabilidade, de forma a garantir a convergência assintótica do sinal de erro a zero. Diferentemente da seção 3.2, como é considerado uma realimentação do sinal de saída, uma maneira de linearização introduzida em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) é utilizada, permitindo uma mudança de variável de forma que as desigualdades matriciais propostas sejam lineares. Na sequência, um problema de otimização é formulado com o objetivo de maximizar a estimativa das regiões de atração da origem dos sistemas em malha fechada.

O capítulo é concluído com uma validação numérica utilizando o mesmo sistema apresentado na subseção 3.4.1. Inicialmente é realizada uma solução para os problemas de otimização propostos para os dois casos estudados neste capítulo, o que permite que as respectivas estimativas de região de atração sejam comparadas. Em seguida, o caso que possui menor conservadorismo em relação à estimativa da região de atração é escolhido para realizar duas simulações numéricas de tentativas de sincronização, sendo que a primeira simulação possui um valor inicial de erro de sincronização contido na estimativa da região de atração, enquanto que a segunda simulação possui um valor inicial fora da estimativa da região de atração.

4.1 Relações Baseadas em Setor

Diferentemente dos casos estudados no capítulo 3, as dinâmicas de malha fechada consideradas neste capítulo dependem explicitamente das não linearidades σ , ρ , Ψ_j , Λ_j e Φ . Como as não-linearidades ρ , Λ_j e Φ já possuem relações de setor definidas pelos Lemas 3.1, 3.2 e 3.3, resta então definir relações de setor para as não-linearidades σ , definida na seção 2.3, e Ψ_j , descrita por (11). Deste modo, são apresentadas condições de setor aplicáveis a estas não-linearidades nos Lemas seguintes.

A relação de setor referente à não-linearidade $\sigma(\cdot)$ está descrita no Lema 4.1. A

prova utilizada para validar este Lema pode ser obtida diretamente em (KHALIL, 1992).

Lema 4.1. *Se $\sigma(f)$ é tal que as suposições (i), (ii) e (iii) apresentadas na seção 2.3 são válidas, então a função não-linear $\sigma(f)$ é tal que a relação*

$$\sigma(f)'S_\sigma(\sigma(f) - \Omega_\sigma f) \leq 0, \quad \forall f \quad (46)$$

é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal S_σ positiva definida.

Assim como no Lema 4.1, a prova do Lema referente às não-linearidades $\Psi_j(\cdot, \cdot)$ descrito a seguir podem ser encontradas em (KHALIL, 1992).

Lema 4.2. *Se $\Psi_j(\cdot, \cdot)$ é tal que as suposições (i), (ii) e (iii) apresentadas na seção 2.4 são válidas, então a função não-linear $\Psi_j(\cdot, \cdot)$ é tal que a relação*

$$\Psi_j(f, b_j)'S_{\Psi_j}(\Psi_j(f, b_j) - f) \leq 0, \quad \forall f \quad (47)$$

é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal S_{Ψ_j} positiva definida.

4.2 Condições de Estabilidade

Nesta seção são obtidos os teoremas que solucionam os Problemas 2.3 e 2.5. A estabilidade assintótica das estratégias de controle por realimentação dinâmica de saída é garantida por condições *LMI* obtidas por funções candidatas de Lyapunov e pelas relações de setor obtidas nas seções 3.1 e 4.1. O uso de uma mudança de variável para realimentação de saída introduzida em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) é considerada para a obtenção das *LMI*s.

4.2.1 Caso Geral

Nesta subseção o Problema 2.3 considerando o controlador dinâmico de realimentação de saída visto na subseção 2.3.2:

$$\mathcal{L}_{C,D} : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + E_c y_e + O_c \sigma(C_D y_e) + B_c \rho(C_D y_e, C_D y_S) - F_c \Phi(v, u_0) \\ v = H_c x_c + D_c y_e + L_c \sigma(C_D y_e) + R_c \rho(C_D y_e, C_D y_S) \end{cases} \quad (48)$$

A dinâmica de malha fechada do sistema considerando o controlador (48) é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \mathbb{A}\zeta + \mathbb{L}\sigma(\mathbb{C}\zeta) + \mathbb{B}\rho(\mathbb{C}\zeta, C_D H x_S) + \mathbb{F}\Phi(v, u_0) \\ v = \mathbb{K}\zeta + L_c \sigma(\mathbb{C}\zeta) + R_c \rho(\mathbb{C}\zeta, C_D H x_S) \\ y_e = [H \quad 0_{q \times n}] \zeta \end{cases} \quad (49)$$

onde $\zeta(t) = [e(t)' \ x_c(t)']'$ é um estado aumentado e as matrizes \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{C} , \mathbb{L} , \mathbb{F} e \mathbb{K} definidas como:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A - D_c H & -H_c \\ E_c H & A_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B - R_c \\ B_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L} = \begin{bmatrix} -L_c \\ O_c \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} I_n \\ -F_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K} = [D_c H \quad H_c], \quad \mathbb{C} = [C_D H \quad 0_{m \times n}].$$

Utilizando as relações de setor obtidas nos Lemas 4.1, 3.1 e 3.3, pode-se gerar o Teorema 4.1 descrito a seguir.

Teorema 4.1. *Se existem matrizes positivas definidas simétricas $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $T_\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\tilde{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{H}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{E}_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{R}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{L}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{O}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{G}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{G}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de tal maneira que as seguintes LMIs são verificadas:*

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & * & * & * & * \\ \Theta_2 & \Theta_4 & * & * & * \\ \Omega_\sigma C_D H Y - \tilde{L}'_c & \Omega_\sigma C_D H + \tilde{O}'_c & -2T_\sigma & * & * \\ \Theta_3 & \tilde{B}'_c + \Omega_\sigma C_D H & 0_{m \times m} & -2T_\rho & * \\ T_\Phi + \tilde{G}_1 & \tilde{F}'_c + \tilde{G}_2 & \tilde{L}_c & \tilde{R}_c & -2T_\Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} Y & * & * \\ I_n & X & * \\ \tilde{H}_{c(k)} - \tilde{G}_{1(k)} & D_{c(k)} H - \tilde{G}_{2(k)} & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (51)$$

com

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \text{Sim}\{AY - \tilde{H}_c\}, \\ \Theta_2 &= \tilde{A}_c + A' - H'D'_c, \\ \Theta_3 &= T_\rho B' - \tilde{R}'_c + \Omega_\sigma C_D H Y, \\ \Theta_4 &= \text{Sim}\{XA + \tilde{E}_c H\}, \end{aligned}$$

então o controlador de realimentação dinâmica de saída (48), com

$$\begin{aligned} A_c &= (U^{-1})'(\tilde{A}_c - XAY + X\tilde{H}_c - U'E_c H Y)N^{-1} \\ B_c &= (U^{-1})'(\tilde{B}_c T_\rho^{-1} - X(B - R_c)) \\ E_c &= (U^{-1})'(\tilde{E}_c + X D_c) \\ F_c &= (U^{-1})'(X - \tilde{F}_c T_\Phi^{-1}) \\ R_c &= \tilde{R}_c T_\rho^{-1} \\ H_c &= (\tilde{H}_c - D_c H Y)N^{-1} \\ L_c &= \tilde{L}_c T_\sigma^{-1} \\ O_c &= (U^{-1})'(\tilde{O}_c T_\sigma^{-1} + X L_c) \end{aligned} \quad (52)$$

onde as matrizes U e N verificam $U'N = I - XY$, garante que todas as trajetórias do sistema (49) iniciadas no conjunto

$$\mathcal{Z}_0 = E(P, 1) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n}; \zeta' P \zeta \leq 1\} \quad (53)$$

com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Definindo a função candidata de Lyapunov $V = \zeta' P \zeta$ com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & N' \\ N & \bullet \end{bmatrix}$. Calculando a sua derivada ao longo das trajetórias do sistema tem-se:

$$\dot{V} = \text{Sim}\{\zeta' P [A\zeta + \mathbb{L}\sigma(\mathbb{C}\zeta) + \mathbb{B}\rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S) + \mathbb{F}\Phi(v)]\}. \quad (54)$$

Suponha agora que $\sigma(\cdot)$ é tal que as suposições (i) a (iii) descritas na seção 2.3 são válidas. Então, dos Lemas 4.1 e 3.1 segue-se:

$$\Upsilon_\sigma = \sigma(\mathbb{C}\zeta)' S_\sigma (\sigma(\mathbb{C}\zeta) - \Omega_\sigma \mathbb{C}\zeta) \leq 0 \quad (55)$$

e

$$\Upsilon_\rho = \rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S)' S_\rho (\rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S) - \Omega_\sigma \mathbb{C}\zeta) \leq 0. \quad (56)$$

são verificados $\forall \zeta, y_S$.

Considerando v como definida em (49), definindo um vetor

$$w = \mathbb{G}\zeta + L_c \sigma(\mathbb{C}\zeta) + R_c \rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S)$$

com $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{n \times (2n)}$, $L_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e o conjunto

$$\mathcal{W}(\zeta) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n}; |(\mathbb{K}_{(k)} - \mathbb{G}_{(k)}\zeta)| \leq u_{0(k)}, k = 1, \dots, n\}$$

Com base no conjunto descrito acima, do Lema 3.3 segue que:

$$\Upsilon_\Phi = \Phi(v)' S_\Phi (\Phi(v) - \mathbb{G}\zeta - L_c \sigma(\mathbb{C}\zeta) - R_c \rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S)) \leq 0 \quad (57)$$

é válida $\forall \zeta \in \mathcal{W}(\zeta)$ e consequentemente,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \text{Sim}\{\zeta' P [\mathbb{A}\zeta + \mathbb{L}\sigma(\mathbb{C}\zeta) + \mathbb{B}\rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S) + \mathbb{F}\Phi(v)] \\ & - 2\Upsilon_\sigma - 2\Upsilon_\rho - 2\Upsilon_\Phi \end{aligned} \quad (58)$$

desde que $\zeta \in \mathcal{W}(\zeta)$.

O lado direito de desigualdade (58) pode ser escrito em uma forma matricial $\xi_3(t)' \Gamma_3 \xi_3(t)$ onde $\xi_3 = [\zeta' \sigma' \rho' \Phi']'$ e

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{\mathbb{A}'P\} & * & * & * \\ S_\sigma \Omega_\sigma \mathbb{C} + \mathbb{L}'P & -2S_\sigma & * & * \\ \mathbb{B}'P + S_\rho \Omega_\sigma \mathbb{C} & 0_{m \times m} & -2S_\rho & * \\ \mathbb{F}'P + S_\Phi \mathbb{G} & S_\Phi L_c & S_\Phi R_c & -2S_\Phi \end{bmatrix},$$

onde pode ser diretamente inferido que $\Gamma_3 < 0$ implica em $\dot{V} < 0$, $\forall \zeta \in \mathcal{W}(\zeta)$.

A sequência da prova utiliza a transformação linear apresentada em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) para demonstrar que (50) implica em $\Gamma_3 < 0$. É utilizado a matriz $\Pi = \begin{bmatrix} Y & I_n \\ N & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$, a qual é garantidamente não-singular se $I_n - XY$ também for não-singular. Como (51) implica que $I_n - XY$ é não-singular, então Π é não-singular.

Assim, definindo $T_\sigma = S_\sigma^{-1}$, $T_\rho = S_\rho^{-1}$ e $T_\Phi = S_\Phi^{-1}$ e pré- e pós-multiplicando a matriz Γ_3 por $\text{diag}\{\Pi', T_\sigma, T_\rho, T_\Phi\}$ e sua transposta, respectivamente, resulta em

$$\bar{\Gamma}_3 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{\Pi' \mathbb{A}' P \Pi\} & * & * & * \\ \Omega_\sigma \mathbb{C} \Pi + T_\sigma \mathbb{L}' P \Pi & -2T_\sigma & * & * \\ T_\rho \mathbb{B}' P \Pi + \Omega_\sigma \mathbb{C} \Pi & 0_{m \times m} & -2T_\rho & * \\ T_\Phi \mathbb{F}' P \Pi + \mathbb{G} \Pi & L_c T_\sigma & R_c T_\rho & -2T_\Phi \end{bmatrix}.$$

Expandindo as matrizes encontradas em $\bar{\Gamma}_3$ e realizando as seguintes mudanças de

variáveis:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_c &= XAY - X\tilde{H}_c + U'E_cHY + U'A_cN \\
\tilde{B}_c &= (X(B - R_c) + (U'B_c))T_\rho \\
\tilde{H}_c &= D_cHY + H_cN \\
\tilde{E}_c &= U'E_c - XD_c \\
\tilde{L}_c &= L_cT_\sigma \\
\tilde{R}_c &= R_cT_\rho \\
\tilde{O}_c &= (U'O_c - XL_c)T_\sigma \\
\tilde{F}_c &= XT_\Phi - U'F_cT_\Phi \\
\mathbb{G} &= [G_1 \ G_2] \\
\tilde{G}_1 &= G_1Y + G_2N \\
\tilde{G}_2 &= G_1
\end{aligned}$$

Segue então que (50) é equivalente à $\bar{\Gamma}_3 < 0$, o que implica em $\Gamma_3 < 0$ e, portanto $\dot{V} < 0, \forall \zeta \in \mathcal{W}(\zeta)$.

A relação (51) garante que $E(P, 1)$ como definido em (53) se encontra dentro do conjunto $\mathcal{W}(\zeta)$, i.e. $E(P, 1) \subset \mathcal{W}(\zeta)$. Esta prova é análoga a feita na subseção 3.2.1. De (TARBOURIECH et al., 2011) sabe-se que $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{W}(e)$ se

$$\zeta'P\zeta - \zeta'(\mathbb{K}_{(k)} - \mathbb{G}_{(k)})' \frac{1}{u_{0(k)}^2} (\mathbb{K}_{(k)} - \mathbb{G}_{(k)})\zeta, \quad k = 1, \dots, n \quad (59)$$

pois neste caso tem-se

$$\zeta'(\mathbb{K}_{(k)} - \mathbb{G}_{(k)})' \frac{1}{u_{0(k)}^2} (\mathbb{K}_{(k)} - \mathbb{G}_{(k)})\zeta < \zeta'P\zeta \leq 1$$

Aplicando o complemento de Schur em (59), tem-se:

$$\begin{bmatrix} P & * \\ (\mathbb{K}_{(k)} - \mathbb{G}_{(k)}) & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Ao pré- e pós-multiplicar, respectivamente, a matriz resultante por $\text{diag}\{\Pi, 1\}$ e sua transposta e realizar as trocas de variáveis consideradas anteriormente obtém-se (51). Consequentemente, satisfazer (50) e (51) implica que $\dot{V} < 0$ para todas as trajetórias (9) iniciadas em $E(P, 1)$, o que conclui a prova. \square

Observação 4.1. *Nota-se que apesar do sinal y_S não ser necessário para a prova da estabilidade da dinâmica do erro de sincronização, este é necessário para a implementação do controlador dinâmico por realimentação de saída, pois a não-linearidade Λ do controlador possui este sinal como uma de suas entradas.*

Utilizando as relações de setor dos Lemas 4.1, 3.1 e 3.3 de tal forma que w escolhido satisfaça globalmente a condição de setor apresentada, pode-se enunciar o Corolário 4.1 descrito a seguir.

Corolário 4.1. *Se existem matrizes positivas definidas simétricas $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $T_\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\tilde{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{H}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{E}_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

$\tilde{R}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{L}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\tilde{O}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de tal maneira que as seguintes LMIs são verificadas:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & * & * & * & * \\ \Theta_2 & \Theta_4 & * & * & * \\ \Omega_\sigma C_D H Y - \tilde{L}'_c & \Omega_\sigma C_D H + \tilde{O}'_c & -2T_\sigma & * & * \\ \Theta_3 & \tilde{B}'_c + \Omega_\sigma C_D H & 0_{m \times m} & -2T_\rho & * \\ T_\Phi + \tilde{H}_c & \tilde{F}'_c + D_c & \tilde{L}_c & \tilde{R}_c & -2T_\Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} Y & * \\ I_n & X \end{bmatrix} > 0 \quad (61)$$

com

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \text{Sim}\{AY - \tilde{H}_c\}, \\ \Theta_2 &= \tilde{A}_c + A' - H'D'_c, \\ \Theta_3 &= T_\rho B' - \tilde{R}'_c + \Omega_\sigma C_D H Y, \\ \Theta_4 &= \text{Sim}\{XA + \tilde{E}_c H\}, \end{aligned}$$

então o controlador de realimentação dinâmica de saída (48), com

$$\begin{aligned} A_c &= (U^{-1})'(\tilde{A}_c - XAY + X\tilde{H}_c - U'E_c H Y)N^{-1} \\ B_c &= (U^{-1})'(\tilde{B}_c T_\rho^{-1} - X(B - R_c)) \\ E_c &= (U^{-1})'(\tilde{E}_c + XD_c) \\ F_c &= (U^{-1})'(X - \tilde{F}_c T_\Phi^{-1}) \\ R_c &= \tilde{R}_c T_\rho^{-1} \\ H_c &= (\tilde{H}_c - D_c H Y)N^{-1} \\ L_c &= \tilde{L}_c T_\sigma^{-1} \\ O_c &= (U^{-1})'(\tilde{O}_c T_\sigma^{-1} + XL_c) \end{aligned} \quad (62)$$

onde as matrizes U e N verificam $U'N = I - XY$, garante que todas as trajetórias do sistema (49) com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Considere que $\mathbb{G} = \mathbb{K}$. Assim, segue que a condição de setor

$$\Upsilon_\Phi = \Phi(v)'S_\Phi(\Phi(v) - \mathbb{K}\zeta - L_c\sigma(\mathbb{C}\zeta) - R_c\rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S)) \leq 0 \quad (63)$$

é verificada $\forall \zeta \in \mathbb{R}^{2n}$. Note que neste caso $\mathbb{G}\Pi = \mathbb{K}\Pi = [\tilde{H}_c \ D_c]$. Pode-se, assim, perceber que (60) corresponde à (50) obtida no Teorema 3.1 e que a estabilidade assintótica global da origem do erro de sincronização é obtida. A relação (61) é necessária para garantir que $I_n - XY$ seja não-singular, o que implica que Π seja não-singular. \square

Utilizando apenas as relações de setor dos Lemas 3.1 e 3.3 e considerando que os elementos L_c e O_c da lei de controle (48) são nulos, pode-se enunciar o Corolário 4.2 descrito a seguir.

Corolário 4.2. *Se existem matrizes positivas definidas simétricas $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $\in \mathbb{R}^{m \times m}$, $T_\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\tilde{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{H}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{E}_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

$\tilde{R}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{G}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{G}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de tal maneira que as seguintes LMIs são verificadas:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & * & * & * \\ \Theta_2 & \Theta_4 & * & * \\ \Theta_3 & \tilde{B}'_c + \Omega_\sigma C_D H & -2T_\rho & * \\ T_\Phi + \tilde{G}_1 & \tilde{F}'_c + \tilde{G}_2 \tilde{R}_c & -2T_\Phi & \end{bmatrix} < 0 \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} Y & * & * \\ I_n & X & * \\ \tilde{H}_{c(k)} - \tilde{G}_{1(k)} & D_{c(k)} H - \tilde{G}_{2(k)} & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (65)$$

com

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \text{Sim}\{AY - \tilde{H}_c\}, \\ \Theta_2 &= \tilde{A}_c + A' - H'D'_c, \\ \Theta_3 &= T_\rho B' - \tilde{R}'_c + \Omega_\sigma C_D H Y, \\ \Theta_4 &= \text{Sim}\{XA + \tilde{E}_c H\}, \end{aligned}$$

então o controlador de realimentação dinâmica de saída (48), com

$$\begin{aligned} A_c &= (U^{-1})'(\tilde{A}_c - XAY + X\tilde{H}_c - U'E_c H Y)N^{-1} \\ B_c &= (U^{-1})'(\tilde{B}_c T_\rho^{-1} - X(B - R_c)) \\ E_c &= (U^{-1})'(\tilde{E}_c + X D_c) \\ F_c &= (U^{-1})'(X - \tilde{F}_c T_\Phi^{-1}) \\ R_c &= \tilde{R}_c T_\rho^{-1} \\ H_c &= (\tilde{H}_c - D_c H Y)N^{-1} \end{aligned} \quad (66)$$

onde as matrizes U e N verificam $U'N = I - XY$, garante que todas as trajetórias do sistema (49) iniciadas no conjunto $\mathcal{Z}_0 = E(P, 1) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n}; \zeta' P \zeta \leq 1\}$ com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Esta prova pode ser diretamente obtida da prova do Teorema 4.1, apenas considerando L_c e O_c nulos e descartando a relação de setor do Lema 4.1. \square

4.2.2 Caso Linear por Partes

Nesta subsecção o Problema 2.5 é considerado. O controlador dinâmico de realimentação de saída encontrado na subsecção 2.4.2 é dado por

$$\mathcal{L}_{C,D} : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + (E_c + (O_{c_0} + B_{c_0})C_D)H e - F_c \Phi(v, u_0) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N-1} O_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(C_D H e, b_j) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N-1} (B_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_D H e, C_D H x_S)) \\ v = H_c x_c + (D_c + (L_{c_0} + R_{c_0})C_D)H e - \sum_{j=1}^{N-1} L_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(C_D H e, b_j) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N-1} (R_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(C_D H e, C_D H x_S)) \end{cases} \quad (67)$$

é considerado. A dinâmica de malha fechada do sistema considerando o controlador (67) é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \mathbb{A}\zeta + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbb{L}_j(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(\mathbb{C}\zeta, b_j)) \\ \quad + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbb{B}_j(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(\mathbb{C}\zeta, C_D H x_S)) + \mathbb{F}\Phi(v, u_0) \\ v = (\mathbb{K} + (L_{c_0} + R_{c_0})\mathbb{C})\zeta - \sum_{j=1}^{N-1} (L_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(\mathbb{C}\zeta, b_j)) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N-1} (R_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(\mathbb{C}\zeta, C H x_S)) \\ y_e = [H \ 0_{q \times n}]\zeta \end{cases} \quad (68)$$

onde $\zeta(t) = [e(t)' \ x_c(t)']'$ é um estado aumentado, $O_{c_0} = O_{c_1}\Delta_1 = O_c\Delta_1$, $B_{c_0} = B_{c_1}\Delta_1 = B_c\Delta_1$, $L_{c_0} = L_{c_1}\Delta_1 = L_c\Delta_1$, $R_{c_0} = R_{c_1}\Delta_1 = R_c\Delta_1$ e as matrizes \mathbb{A} , \mathbb{B}_j , \mathbb{C} , \mathbb{L}_j , \mathbb{F} e \mathbb{K} são definidas como:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A - (D_c + ((L_{c_0} + R_{c_0}) - B\Delta_1)C_D)H & -H_c \\ (E_c + (O_{c_0} + B_{c_0})C_D)H & A_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_j = \begin{bmatrix} R_{c_j} - B \\ -B_{c_j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}_j = \begin{bmatrix} L_{c_j} \\ -O_{c_j} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{bmatrix} I_n \\ -F_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K} = [D_c H \ H_c], \quad \mathbb{C} = [C_D H \ 0_{m \times n}].$$

Teorema 4.2. *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_{\Psi_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $T_{\Lambda_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $\tilde{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{H}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{E}_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{R}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{L}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{O}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{G}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{G}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & * & * & * & * \\ \Theta_2 & \Theta_5 & * & * & * \\ \Theta_3 & \Theta_6 & -2T_{\Psi} & * & * \\ \Theta_4 & \Theta_7 & 0_{(jm) \times (jm)} & -2T_{\Lambda} & * \\ T_{\Phi} + \tilde{G}_1 & \tilde{F}'_c + \tilde{G}_2 & -\Theta_8 & -\Theta_9 & -2T_{\Phi} \end{bmatrix} < 0 \quad (69)$$

$$\begin{bmatrix} Y & * & * \\ I & X & * \\ \tilde{H}_{c(k)} - \tilde{G}_{1(k)} & D_{c(k)} - \tilde{G}_{2(k)} & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} > 0, k = 1, \dots, n \quad (70)$$

com

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \text{Sim}\{(A + B\Delta_1 C_D H)Y - \tilde{H}_c\}, \\
\Theta_2 &= \tilde{A}_c + (A + B\Delta_1 C_D H)' - H'(D_c)', \\
\Theta_3 &= [(C_D H Y)' + \tilde{L}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (C_D H Y)' + \tilde{L}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)]' \\
\Theta_4 &= [-T_{\Lambda_1}(B(\Delta_1 - \Delta_2)) + \tilde{R}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) + (C_D H Y)' \cdots \\
&\quad -T_{\Lambda_{N-1}}(B(\Delta_{N-1} - \Delta_N)) + \tilde{R}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N) + (C_D H Y)'], \\
\Theta_5 &= \text{Sim}\{X(A + B\Delta_1 C_H) + \tilde{E}_c H\} \\
\Theta_6 &= [(C_D H)' - \tilde{O}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (C_D H)' - \tilde{O}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\
\Theta_7 &= [(C_D H)' - \tilde{B}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (C_D H)' - \tilde{B}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\
\Theta_8 &= [\tilde{L}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots \tilde{L}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\
\Theta_9 &= [\tilde{R}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots \tilde{R}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\
T_\Psi &= \text{diag}\{T_{\Psi_1}, \dots, T_{\Psi_{N-1}}\} \\
T_\Lambda &= \text{diag}\{T_{\Lambda_1}, \dots, T_{\Lambda_{N-1}}\},
\end{aligned}$$

então o controlador de realimentação dinâmica de saída (67), com

$$\begin{aligned}
A_c &= (U^{-1})'(\tilde{A}_c + H'(R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D)' - X(A + B\Delta_1 C_D H)Y \\
&\quad + X\tilde{H}_c - U'(E_c + (O_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(O_{c_j} - O_{c_{j-1}}) \\
&\quad + B_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))C_D)HY)N^{-1} \\
B_{c_j} &= (U^{-1})'(\tilde{B}_{c_j}T_{\Lambda_j}^{-1} + X(B - R_{c_j})) \\
E_c &= (U^{-1})'(\tilde{E}_c + X(D_c + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D)) \\
&\quad - (O_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(O_{c_j} - O_{c_{j-1}}) \\
&\quad + B_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))C_D \\
F_c &= (U^{-1})'(X - \tilde{F}_c T_\Phi^{-1}) \\
R_{c_j} &= \tilde{R}_{c_j} T_{\Lambda_j}^{-1} \\
H_c &= (\tilde{H}_c - (D_c + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D)HY)N^{-1} \\
L_{c_j} &= \tilde{L}_{c_j} T_{\Psi_j}^{-1} \\
O_{c_j} &= (U^{-1})'(\tilde{O}_{c_j} T_{\Psi_j}^{-1} + X L_{c_j})
\end{aligned} \tag{71}$$

onde as matrizes U e N verificam $U'N = I - XY$, garante que todas as trajetórias do sistema (68) iniciadas em um conjunto \mathcal{Z}_0 com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Definindo a função candidata de Lyapunov $V = \zeta' P \zeta$ com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & N' \\ N & \bullet \end{bmatrix}$, e obtendo a sua derivada ao longo das trajetórias do sistema tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \text{Sim}\{\zeta' P [\mathbb{A}\zeta + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbb{L}_j(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j(\mathbb{C}\zeta, b_j)) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbb{B}_j(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S)) + \mathbb{F}\Phi(v, u_0)]\}. \end{aligned} \quad (72)$$

Assumindo agora que $\sigma(\cdot)$ é tal que as suposições (i) a (iii) descritas na seção 2.4 são válidas. Então, dos Lemas 4.2 e 3.2, segue que

$$\Upsilon_{\Psi_j} = \Psi_j(\mathbb{C}\zeta)' S_{\Psi_j}(\Psi_j(\mathbb{C}\zeta) - \mathbb{C}\zeta) \leq 0 \quad (73)$$

e

$$\Upsilon_{\Lambda_j} = \Lambda_j(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S)' S_{\Lambda_j}(\Lambda_j(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S) - \mathbb{C}\zeta) \leq 0. \quad (74)$$

são verificadas $\forall \zeta, y_S$.

Considerando agora v como definida em (68), um vetor w conforme definido na subseção 4.2.1

$$\begin{aligned} w = & (\mathbb{G} + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))\mathbb{C})\zeta \\ & - \sum_{j=1}^{N-1} (L_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j + R_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j) \end{aligned}$$

com $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{n \times (2n)}$, $L_{c_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R_{c_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e o conjunto

$$\mathcal{W}(\zeta) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n}; |(\mathbb{K}_{(k)} - \mathbb{G}_{(k)})\zeta| \leq u_{0(k)}, \ k = 1, \dots, n, \ i = 1, \dots, m\}.$$

Note que o termo

$$(R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))\mathbb{C})\zeta$$

que multiplica ζ em w se anula com o mesmo termo encontrado em (68).

Assim, do Lema 3.3,

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\Phi} = & \Phi(v)' S_{\Phi}(\Phi(v) - (\mathbb{G} + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))\mathbb{C})\zeta - L_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Psi_j \\ & - R_{c_j}(\Delta_j - \Delta_{j+1})\Lambda_j) \leq 0 \end{aligned} \quad (75)$$

é válida $\forall \zeta \in \mathcal{W}(\zeta)$ e, consequentemente,

$$\dot{V} \leq \text{Sim}\{\zeta' P [\mathbb{A}\zeta + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbb{L}_j\Psi_j + \mathbb{B}_j\Lambda_j) + \mathbb{F}\Phi(v)]\} - 2\Upsilon_{\Psi_j} - 2\Upsilon_{\Lambda_j} - 2\Upsilon_{\Phi} \quad (76)$$

desde que $\zeta \in \mathcal{W}(\zeta)$.

O lado direito de (72) pode ser reescrito em uma forma matricial $\xi_4(t)'T_4\xi_4(t)$ com $\xi_4 = [\zeta'\Psi'\Lambda'\Phi']'$, $\Psi = [\Psi_1 \cdots \Psi_{N-1}]$, $\Lambda = [\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1}]$, $S_\Psi = \text{diag}\{S_{\Psi_1}, \dots, S_{\Psi_{N-1}}\}$, $S_\Lambda = \text{diag}\{S_{\Lambda_1}, \dots, S_{\Lambda_{N-1}}\}$ e

$$\Gamma_4 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{\mathbb{A}'P\} & * & * & * \\ \theta_1 & -2S_\Psi & * & * \\ \theta_2 & 0_{m \times m} & -2S_\Lambda & * \\ \mathbb{F}'P + \theta_3 & -\theta_4 & -\theta_5 & -2S_\Phi \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \theta_1 &= [(\Psi_1\mathbb{C})' + P\mathbb{L}_1(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (\Psi_{N-1}\mathbb{C})' + P\mathbb{L}_{N-1}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)]' \\ \theta_2 &= [(S_{\Lambda_1}\mathbb{C})' + P\mathbb{B}_1(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (S_{\Lambda_{N-1}}\mathbb{C})' + P\mathbb{B}_{N-1}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)]' \\ \theta_3 &= S_\Phi(\mathbb{G} + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 \\ &\quad + \sum_{j=2}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))\mathbb{C}) \\ \theta_4 &= [S_\Phi L_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots S_\Phi L_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\ \theta_5 &= [S_\Phi R_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots S_\Phi R_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \end{aligned}$$

e onde pode ser inferido diretamente que $\Gamma_4 < 0$ implica em $\dot{V} < 0$, $\forall \zeta \in \mathcal{W}(\zeta)$.

Assim como na subseção 4.2.1, é utilizada a matriz $\Pi = \begin{bmatrix} Y & I_n \\ N & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$ introduzida em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) para poder realizar mudanças de variáveis a fim de obter uma *LMI*. Novamente, a equação (70) garante que Π é não-singular, pois $I_n - XY$ é não-singular. Assim, definindo $T_{\Psi_j} = S_{\Psi_j}^{-1}$, $T_\Psi = \text{diag}\{T_{\Psi_1}, \dots, T_{\Psi_{N-1}}\}$, $T_{\Lambda_j} = S_{\Lambda_j}^{-1}$, $T_\Lambda = \text{diag}\{T_{\Lambda_1}, \dots, T_{\Lambda_{N-1}}\}$ e $T_\Phi = S_\Phi^{-1}$ e pré- e pós-multiplicando a matriz Γ_4 respectivamente por $\text{diag}\{\Pi', T_\Psi, T_\Lambda, T_\Phi\}$ e a sua transposta resulta em

$$\bar{\Gamma}_4 = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{\Pi'\mathbb{A}'P\Pi\} & * & * & * \\ \theta_6 & -2T_\Psi & * & * \\ \theta_7 & 0_{m \times m} & -2T_\Lambda & * \\ T_\Phi \mathbb{F}'P\Pi + \theta_8 & -\theta_9 & -\theta_{10} & -2T_\Phi \end{bmatrix}.$$

com

$$\begin{aligned} \theta_6 &= [(\mathbb{C}\Pi)' + \Pi'P\mathbb{L}_1(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (\mathbb{C}\Pi)' + \Pi'P\mathbb{L}_{N-1}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)]' \\ \theta_7 &= [(\mathbb{C}\Pi)' + \Pi'P\mathbb{B}_1(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (\mathbb{C}\Pi)' + \Pi'P\mathbb{B}_{N-1}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)]' \\ \theta_8 &= (\mathbb{G} + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 \\ &\quad + \sum_{j=2}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))\mathbb{C})\Pi \\ \theta_9 &= [L_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2)T_{\Psi_1} \cdots L_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)T_{\Psi_{N-1}}] \\ \theta_{10} &= [R_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2)T_{\Lambda_1} \cdots R_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)T_{\Lambda_{N-1}}] \end{aligned}$$

Expandindo os elementos de $\bar{\Gamma}_4$ e realizando as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_c &= X(A + B\Delta_1 C_D H)Y - X\tilde{H}_c + U'(E_c + (O_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(O_{c_j} - O_{c_{j-1}}) \\
&\quad + B_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))C_D)HY + U'A_c N \\
&\quad - H'(R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}})C_D)' \\
\tilde{B}_{c_j} &= (X(R_{c_j} - B) + (U'B_{c_j}))T_{\Lambda_j} \\
\tilde{H}_c &= ((D_c + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D)HY) + H_c N \\
\tilde{E}_c &= U'(E_c + (O_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(O_{c_j} - O_{c_{j-1}}) + B_{c_1}\Delta_1 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))) - X(D_c + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D) \\
\tilde{L}_{c_j} &= L_{c_j} T_{\Psi_j} \\
\tilde{R}_{c_j} &= R_{c_j} T_{\Lambda_j} \\
\tilde{O}_{c_j} &= (U'O_{c_j} - XL_{c_j})T_{\Psi_j} \\
\tilde{F}_c &= XT_\Phi - U'F_c T_\Phi \\
\mathbb{G} &= [G_1 \ G_2] \\
\tilde{G}_1 &= (G_1 + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D H)Y + G_2 N \\
\tilde{G}_2 &= G_1 + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D H
\end{aligned}$$

O procedimento para obter (70) é o mesmo utilizado na sub-seção 4.2.1. Assim, segue que a relação (70) garante que $E(P, 1)$ como definida em (53) está localizada dentro de $\mathcal{W}(\zeta)$, i.e. $E(P, 1) \subset \mathcal{W}(\zeta)$. Consequentemente, a satisfação de (69) e de (70) implica em $\dot{V} < 0$ para todas as trajetórias do sistema de malha fechada (68) iniciadas em $E(P, 1)$, o que conclui a prova. \square

Utilizando as relações de setor dos Lemas 4.2, 3.2 e 3.3 de tal forma que w escolhido satisfaça globalmente a condição de setor apresentada, pode-se enunciar o Corolário 4.3 descrito a seguir.

Corolário 4.3. *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_{\Psi_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $T_{\Lambda_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $\tilde{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{H}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{E}_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{R}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{L}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e $\tilde{O}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & * & * & * & * \\ \Theta_2 & \Theta_5 & * & * & * \\ \Theta_3 & \Theta_6 & -2T_\Psi & * & * \\ \Theta_4 & \Theta_7 & 0_{(jm) \times (jm)} & -2T_\Lambda & * \\ T_\Phi + \tilde{H}_c & \tilde{F}'_c + D_c & -\Theta_8 & -\Theta_9 & -2T_\Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (77)$$

$$\begin{bmatrix} Y & * \\ I & X \end{bmatrix} > 0, k = 1, \dots, n \quad (78)$$

com

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \text{Sim}\{(A + B\Delta_1 C_D H)Y - \tilde{H}_c\}, \\ \Theta_2 &= \tilde{A}_c + (A + B\Delta_1 C_D H)' - H'D'_c, \\ \Theta_3 &= [(C_D H Y)' + \tilde{L}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (C_D H Y)' + \tilde{L}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)]' \\ \Theta_4 &= [-T_{\Lambda_1}(B(\Delta_1 - \Delta_2)) + \tilde{R}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) + (C_D H Y)' \cdots \\ &\quad -T_{\Lambda_{N-1}}(B(\Delta_{N-1} - \Delta_N)) + \tilde{R}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N) + (C_D H Y)'], \\ \Theta_5 &= \text{Sim}\{X(A + B\Delta_1 C_H) + \tilde{E}_c H\} \\ \Theta_6 &= [(C_D H)' - \tilde{O}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (C_D H)' - \tilde{O}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\ \Theta_7 &= [(C_D H)' - \tilde{B}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (C_D H)' - \tilde{B}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\ \Theta_8 &= [\tilde{L}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots \tilde{L}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\ \Theta_9 &= [\tilde{R}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots \tilde{R}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\ T_\Psi &= \text{diag}\{T_{\Psi_1}, \dots, T_{\Psi_{N-1}}\} \\ T_\Lambda &= \text{diag}\{T_{\Lambda_1}, \dots, T_{\Lambda_{N-1}}\}, \end{aligned}$$

então o controlador de realimentação dinâmica de saída (67), com

$$\begin{aligned} \tilde{A}_c &= X(A + B\Delta_1 C_D H)Y - X\tilde{H}_c + U'(E_c + (O_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(O_{c_j} - O_{c_{j-1}}) \\ &\quad + B_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))C_D)HY + U'A_c N \\ &\quad - H'(R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}})C_D)' \\ B_{c_j} &= (U^{-1})'(\tilde{B}_{c_j}T_{\Lambda_j}^{-1} + X(B - R_{c_j})) \\ E_c &= (U^{-1})'(\tilde{E}_c + X(D_c + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\ &\quad + L_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(L_{c_j} - L_{c_{j-1}}))C_D)) \\ &\quad - (O_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(O_{c_j} - O_{c_{j-1}}) \\ &\quad + B_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))C_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_c &= (U^{-1})'(X - \tilde{F}_c T_\Phi^{-1}) \\
R_{c_j} &= \tilde{R}_{c_j} T_{\Lambda_j}^{-1} \\
H_c &= (\tilde{H}_c - (D_c + (R_{c_1} \Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j (R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad + L_{c_1} \Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j (L_{c_j} - L_{c_{j-1}})) C_D) H Y) N^{-1} \\
L_{c_j} &= \tilde{L}_{c_j} T_{\Psi_j}^{-1} \\
O_{c_j} &= (U^{-1})'(\tilde{O}_{c_j} T_{\Psi_j}^{-1} + X L_{c_j})
\end{aligned} \tag{79}$$

onde as matrizes U e N verificam $U'N = I - XY$, garante que todas as trajetórias do sistema (68) com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Considere que $\mathbb{G} = \mathbb{K}$. Assim, segue que a condição de setor

$$\Upsilon_\Phi = \Phi(v)' S_\Phi(\Phi(v) - \mathbb{K}\zeta - L_c \sigma(\mathbb{C}\zeta) - R_c \rho(\mathbb{C}\zeta, C_D y_S)) \leq 0 \tag{80}$$

é verificada $\forall \zeta \in \mathbb{R}^{2n}$. Note que neste caso $\mathbb{G}\Pi = \mathbb{K}\Pi = [\tilde{H}_c \ D_c]$. Pode-se, assim, perceber que (77) corresponde à (69) obtida no Teorema 3.1 e que a estabilidade assintótica global da origem do erro de sincronização é obtida. A relação (78) é necessária para garantir que $I_n - XY$ seja não-singular, o que implica que Π seja não-singular. \square

Utilizando apenas as relações de setor dos Lemas 3.2 e 3.3 e considerando que os elementos L_{c_j} e O_{c_j} da lei de controle (68) são nulos, pode-se enunciar o Corolário 4.4 descrito a seguir.

Corolário 4.4. *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais positivas definidas $T_{\Lambda_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $T_\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $\tilde{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{H}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{E}_c \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\tilde{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{R}_{c_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{G}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{G}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix}
\Theta_1 & * & * & * \\
\Theta_2 & \Theta_4 & * & * \\
\Theta_3 & \Theta_5 & -2T_\Lambda & * \\
T_\Phi + \tilde{G}_1 & \tilde{F}_c' + \tilde{G}_2 & -\Theta_6 & -2T_\Phi
\end{bmatrix} < 0 \tag{81}$$

$$\begin{bmatrix}
Y & * & * \\
I & X & * \\
\tilde{H}_{c(k)} - \tilde{G}_{1(k)} & D_{c(k)} - \tilde{G}_{2(k)} & u_{0(k)}^2
\end{bmatrix} > 0, k = 1, \dots, n \tag{82}$$

com

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \text{Sim}\{(A + B\Delta_1 C_D H)Y - \tilde{H}_c\}, \\
\Theta_2 &= \tilde{A}_c + (A + B\Delta_1 C_D H)' - H'(D_c)', \\
\Theta_3 &= [-T_{\Lambda_1}(B(\Delta_1 - \Delta_2)) + \tilde{R}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) + (C_D H Y)' \cdots \\
&\quad - T_{\Lambda_{N-1}}(B(\Delta_{N-1} - \Delta_N)) + \tilde{R}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N) + (C_D H Y)'], \\
\Theta_4 &= \text{Sim}\{X(A + B\Delta_1 C_H) + \tilde{E}_c H\} \\
\Theta_5 &= [(C_D H)' - \tilde{B}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots (C_D H)' - \tilde{B}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\
\Theta_6 &= [\tilde{R}_{c_1}(\Delta_1 - \Delta_2) \cdots \tilde{R}_{c_{N-1}}(\Delta_{N-1} - \Delta_N)] \\
T_\Psi &= \text{diag}\{T_{\Psi_1}, \dots, T_{\Psi_{N-1}}\} \\
T_\Lambda &= \text{diag}\{T_{\Lambda_1}, \dots, T_{\Lambda_{N-1}}\},
\end{aligned}$$

então o controlador de realimentação dinâmica de saída (67), com

$$\begin{aligned}
A_c &= (U^{-1})'(\tilde{A}_c + H'(R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad)C_D)' - X(A + B\Delta_1 C_D H)Y \\
&\quad + X\tilde{H}_c - U'(E_c + \\
&\quad + (B_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))C_D)HY)N^{-1} \\
B_{c_j} &= (U^{-1})'(\tilde{B}_{c_j}T_{\Lambda_j}^{-1} + X(B - R_{c_j})) \\
E_c &= (U^{-1})'(\tilde{E}_c + X(D_c + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad)C_D)) \\
&\quad - (B_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(B_{c_j} - B_{c_{j-1}}))C_D \\
F_c &= (U^{-1})'(X - \tilde{F}_c T_{\Phi}^{-1}) \\
R_{c_j} &= \tilde{R}_{c_j} T_{\Lambda_j}^{-1} \\
H_c &= (\tilde{H}_c - (D_c + (R_{c_1}\Delta_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(R_{c_j} - R_{c_{j-1}}) \\
&\quad)C_D)HY)N^{-1}
\end{aligned} \tag{83}$$

onde as matrizes U e N verificam $U'N = I - XY$, garante que todas as trajetórias do sistema (68) iniciadas em um conjunto \mathcal{Z}_0 com $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Esta prova pode ser diretamente obtida da prova do Teorema 4.2, apenas considerando L_{c_j} e O_{c_j} nulos e descartando a relação de setor do Lema 4.2. \square

4.3 Problema de Otimização

Um dos objetivos deste trabalho consiste em obter o maior conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{Z}_0 para as quais é possível garantir a convergência de trajetórias em malha fechada para a origem. Deste modo, baseando-se nos Teoremas 4.1 e 4.2, pode-se propor problemas de otimização para a obtenção das matrizes de ganho do controlador de realimentação dinâmica de saída (67), tendo como objetivo a maximização do tamanho do conjunto \mathcal{Z}_0 . Escolheu-se utilizar, assim como na seção 3.3, um conjunto poliedral $\Xi = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ onde os vértices $v_l \in \mathbb{R}^{2n}$, $l = 1, \dots, n$ correspondem a direções nas quais o conjunto deverá ser maximizado, conhecidos *a priori*.

O objetivo do problema de otimização é maximizar um escalar $\gamma > 0$ de tal forma que $\gamma\Xi \subset \mathcal{Z}_0$ seja maximizado. Assim, devido à forma da matriz P e como tem-se o objetivo de maximizar o sinal de erro inicial de sincronização admissível $e(t)$, não sendo relevante o sinal $x_c(t)$, pode-se considerar $v_l = [\bar{v}_l' \ 0'_{1 \times n}]'$ com $\bar{v}_l \in \mathbb{R}^n$. Assim, assumindo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, a minimização de η implica na maximização de γ .

$$\gamma v_l' P v_l \gamma \leq 1$$

Como $P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix}$ e $v_l = [\bar{v}_l' \ 0'_{1 \times n}]'$, então

$$\begin{aligned} [\bar{v}_l' \ 0'_{1 \times n}] \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_l \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} &\leq \eta \\ \bar{v}_l' X \bar{v}_l &\leq \eta \end{aligned} \quad (84)$$

Portanto, as soluções destes problemas podem ser obtidas através dos problemas de otimização (85) e (86), sendo o primeiro relacionado com o Problema 2.3 enquanto que o segundo se refere ao Problema 2.5.

$$\begin{aligned} &\min \eta \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \bar{v}_l' X \bar{v}_l \leq \eta, \quad \forall l = 1, \dots, n \\ \text{Relações (50) e (51)} \end{cases} \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} &\min \eta \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \bar{v}_l' X \bar{v}_l \leq \eta, \quad \forall l = 1, \dots, n \\ \text{Relações (69) e (70)} \end{cases} \end{aligned} \quad (86)$$

Assumindo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, a minimização de η implica na maximização de γ . Observe que uma vez que as condições (50), (51), (69) e (70) são *LMIs*, então os problemas de otimização (85) e (86) são convexos e, portanto, podem ser resolvidos eficientemente por solucionadores de *LMI* padrão.

4.4 Validação Numérica

Para resolver os problemas de otimização considerados neste capítulo, foi utilizado o circuito de Chua, o qual foi previamente descrito na subseção 3.4.1. Além disso foram considerados os mesmos parâmetros do capítulo anterior, descritas na Tabela 2 e com $\sigma(C_D y) = -\phi(y_{(1)})$ para a controlador dinâmico de realimentação de saída. Como o sistema escolhido possui uma não-linearidade *PWL* com apenas um ponto de quebra, o Teorema 4.2 pode ser aplicado com $O_{c_0} = O_{c_1} \Delta_1 = O_c \Delta_1$, com relações análogas para B_{c_0} , L_{c_0} e R_{c_0} , conforme mencionado na Observação 2.2. Resolvendo, então, o problema convexo (85) considerando o seguinte conjunto poliedral

$$\Xi = Co \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \right\},$$

foram obtidas as seguintes matrizes relacionadas ao Problema 2.3:

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} 3.5609 & 1.1610 & 0.7626 \\ 1.1610 & 4.2513 & -0.2788 \\ 0.7626 & -0.2788 & 3.2155 \end{bmatrix} \\
 A_c &= \begin{bmatrix} -22.8276 & -314.5511 & 3.2554 \times 10^4 \\ 27.9472 & 99.6154 & -1.5386 \times 10^3 \\ 10.1962 & 869.1976 & -8.7329 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 8.3650 \\ 12.0054 \\ 9.6828 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} 0.0072 & 1.8257 \\ 0.5649 & 0.7086 \\ 0.2885 & -1.2905 \end{bmatrix} \\
 L_c &= \begin{bmatrix} -0.0210 \\ 0.0058 \\ 0.0179 \end{bmatrix} \\
 R_c &= \begin{bmatrix} -13.2111 \\ 2.4917 \\ 6.1197 \end{bmatrix} \\
 O_c &= \begin{bmatrix} 0.0636 \\ -0.0010 \\ -0.0002 \end{bmatrix} \\
 E_c &= 10^3 \begin{bmatrix} 17.1964 & 18.9873 \\ -5.7314 & 29.7588 \\ 0.4774 & -24.7844 \end{bmatrix} \\
 F_c &= \begin{bmatrix} -2.2749 & -1.3660 & 1.5226 \\ 2.6565 & -0.0066 & 2.9277 \\ 1.3537 & 4.1676 & 0.0327 \end{bmatrix} \\
 H_c &= \begin{bmatrix} 3.1959 & 38.7882 & -4.5129 \times 10^3 \\ 0.9036 & 185.0425 & -1.8354 \times 10^4 \\ 1.8557 & 6.0344 & -1.5170 \times 10^3 \end{bmatrix} \\
 \eta &= 4.2804
 \end{aligned}$$

Ao se considerar o problema de otimização (86), no qual a não-linearidade do sistema Lur'e foi considerada como uma função *PWL* na síntese do controlador de realimentação dinâmica de saída, foram obtidas as seguintes matrizes, ainda utilizando o

mesmo conjunto poliedral:

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} 0.1169 & 0.0012 & 0.0020 \\ 0.0012 & 0.1426 & -0.0174 \\ 0.0020 & -0.0174 & 0.1153 \end{bmatrix} \\
 A_c &= \begin{bmatrix} -165.4303 & -14.3249 & -445.9233 \\ 27.7552 & 40.2813 & 478.1642 \\ -2.3817 & -975.1557 & -1.0308 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 1.0161 \\ -0.1856 \\ 0.0204 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} 10.1436 & -0.0453 \\ 0.1054 & 0.3532 \\ -0.1985 & -0.8649 \end{bmatrix} \\
 L_c &= \begin{bmatrix} -0.0508 \\ -0.2229 \\ 0.0574 \end{bmatrix} \\
 R_c &= \begin{bmatrix} -0.0444 \\ -0.0185 \\ -0.0318 \end{bmatrix} \\
 O_c &= \begin{bmatrix} -0.0065 \\ 0.0123 \\ -0.0176 \end{bmatrix} \\
 E_c &= \begin{bmatrix} 11.4066 & 0.9285 \\ -1.8483 & 1.8489 \\ -0.0776 & -15.2450 \end{bmatrix} \\
 F_c &= \begin{bmatrix} -0.1137 & 0.0911 & -0.0149 \\ 0.0205 & -0.0409 & 0.1183 \\ 0.0024 & 0.1079 & 0.0831 \end{bmatrix} \\
 H_c &= \begin{bmatrix} -112.2945 & 3.8234 & -159.7449 \\ 2.3720 & -99.0057 & -1.0519 \times 10^4 \\ 1.7531 & -25.8325 & -263.3825 \end{bmatrix} \\
 \eta &= 0.1454
 \end{aligned}$$

Estima-se que, devido a possuir η menor, o problema de otimização (86) resulte em uma estimativa da região de atração maior do que a obtida pelo problema de otimização (85). As Fig. 21 e 22 correspondem às estimativas de região de atração obtidas para os problemas de otimização (42) e (43), respectivamente. Apesar dos valores de η obtidos e das diferentes escalas utilizadas nas Fig. 21 e 22 serem indicadores de qual estimativa da região de atração é menos conservadora, foram obtidas representações bidimensionais ao se realizar cortes nas estimativas tridimensionais, ou seja, um dos valores de erro foi considerado nulo em cada uma das comparações com o fim de obter uma comparação direta entre as duas estimativas obtidas.

Pode-se perceber pelos cortes bidimensionais, ilustrados nas Fig. 23, 24 e 25, que considerar explicitamente $\sigma(C_D y)$ como uma função *PWL* na formulação do Problema levou a uma estimativa da região de atração significativamente maior do que no caso em que σ é considerada uma não-linearidade de setor genérica, o que é coerente com o valor de η do primeiro caso ser uma ordem de grandeza inferior ao η do segundo caso. Assim, pode-se dizer que neste caso o resultado do Teorema 4.2 leva a uma redução do conservadorismo.

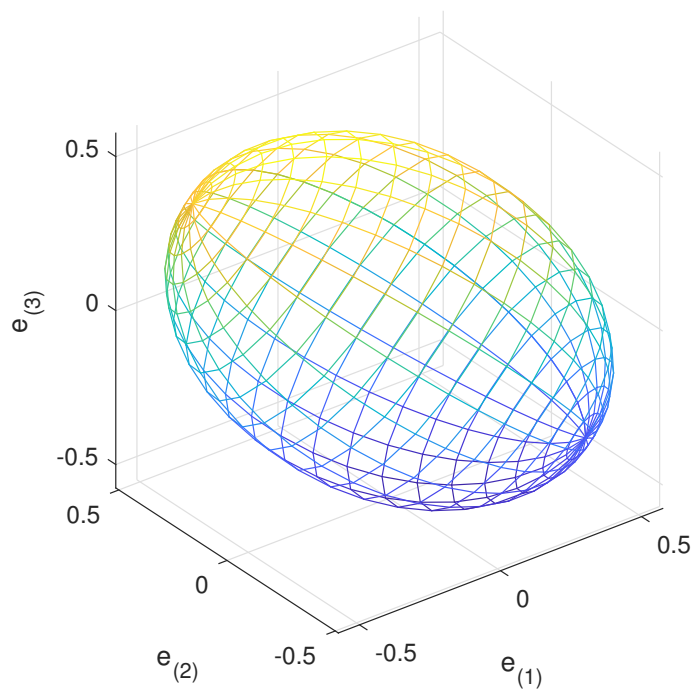


Figura 21: Estimativa tridimensional da região de atração do caso geral

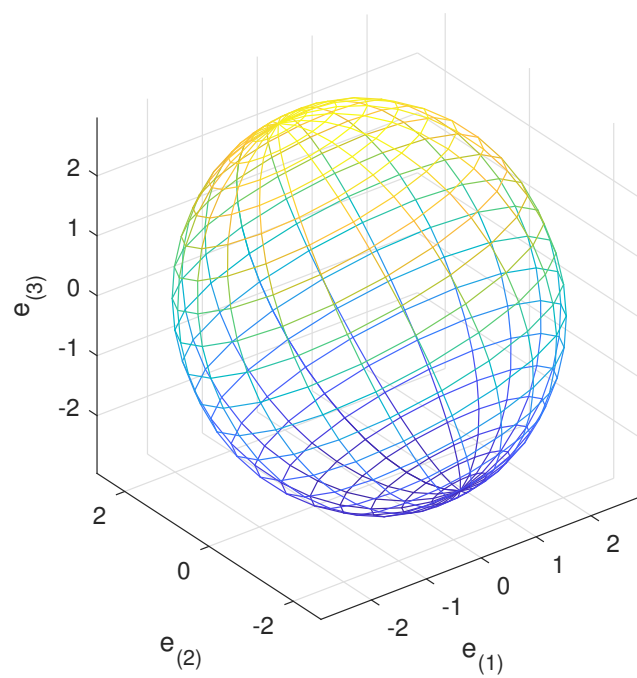


Figura 22: Estimativa tridimensional da região de atração do caso *PWL*

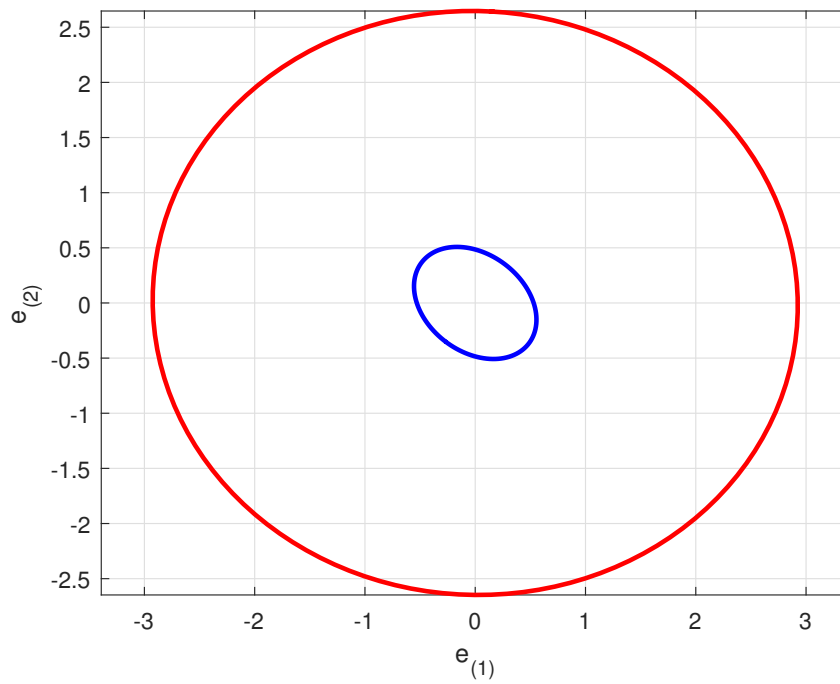


Figura 23: Comparação dos cortes ($e_{(3)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação dinâmica de saída: azul para o caso geral; vermelho para o caso *PWL*

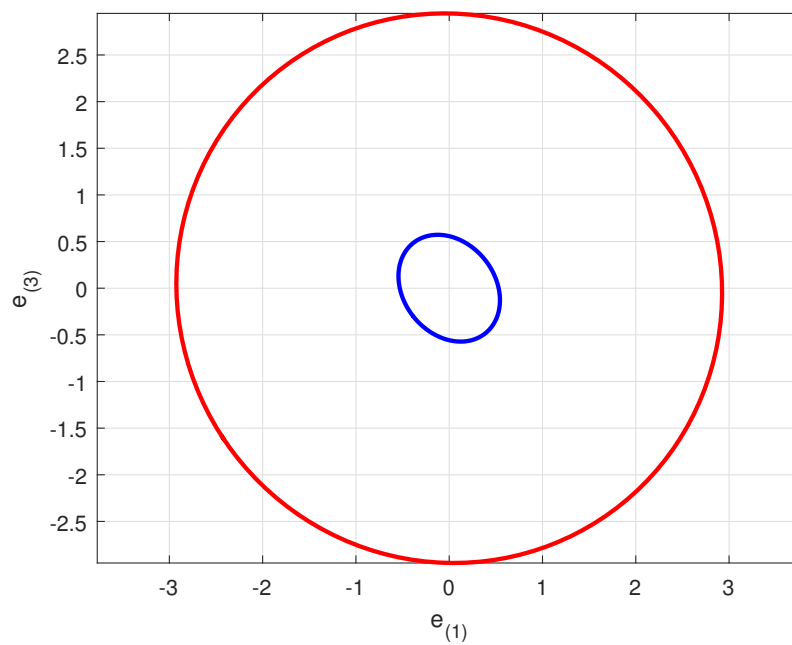


Figura 24: Comparação dos cortes ($e_{(2)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação dinâmica de saída: azul para o caso geral; vermelho para o caso *PWL*

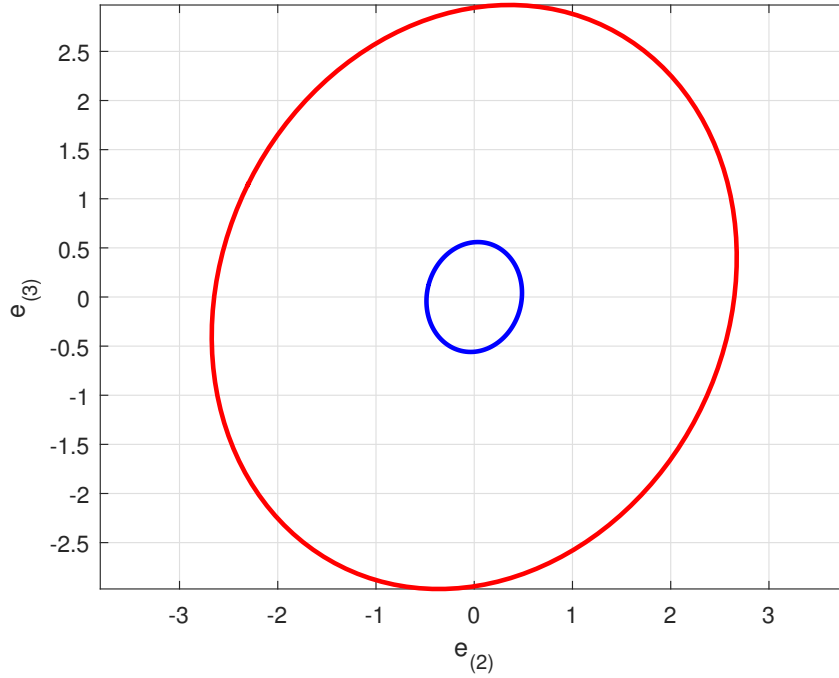


Figura 25: Comparação dos cortes ($e_{(1)} = 0$) das estimativas das regiões de atração obtidas para os controladores de realimentação dinâmica de saída: azul para o caso geral; vermelho para o caso *PWL*

Para validar os resultados obtidos em simulação, foi considerado o controlador de realimentação dinâmica de saída obtido pelo problema de otimização (86), pois o mesmo foi capaz de fornecer uma estimativa da região de atração menos conservadora. Assim, o objetivo da simulação é confirmar que a sincronização é obtida para a região de atração estimada representada na Fig. 22.

Considerando agora que a condição inicial $\zeta_0 = [2 \ 1.5 \ 1.5 \ 0 \ 0 \ 0]'$, cujo ponto se encontra no limite da estimativa de região de atração \mathcal{Z}_0 , foi realizada uma simulação numérica. Na Fig. 26 está representada a evolução temporal do sinal de erro de sincronização, com o sinal de erro convergindo para zero. Deste modo, como esperado, pode-se concluir que houve a sincronização entre os dois sistemas estudados. A representação do comportamento temporal do sinal de controle u está representada na Fig. 27. É possível perceber que, apesar dos três sinais de controle atingirem o limite da saturação no início da simulação, foi possível obter a sincronização. Além disso, após a sincronização ser obtida, o sinal de controle converge assintoticamente para zero. Na Fig. 28 as trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$ estão representadas. Pode-se confirmar, por esta representação, a conclusão obtida na análise da Fig. 26 de que os sistemas entram em sincronia, além de ser possível observar o comportamento caótico dos sistemas, sendo apenas limitado pelo período escolhido para a simulação ocorrer.

Uma segunda simulação, considerando um valor inicial que se encontre fora da estimativa da região de atração, foi realizada. Foi escolhido $\zeta_0 = [5.6 \ 5.5 \ 5.7 \ 0 \ 0 \ 0]'$. Com este valor inicial não foi possível obter a sincronização entre os dois sistemas, como mostra a Fig. 29. Assim como a simulação feita na subseção 3.4 em que

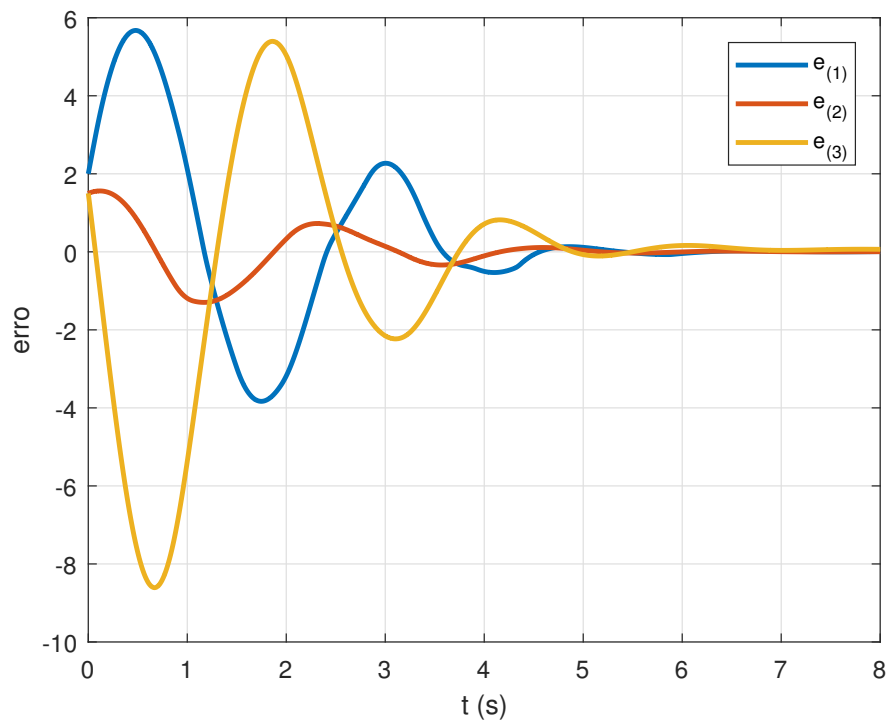


Figura 26: Comportamento temporal do sinal de erro

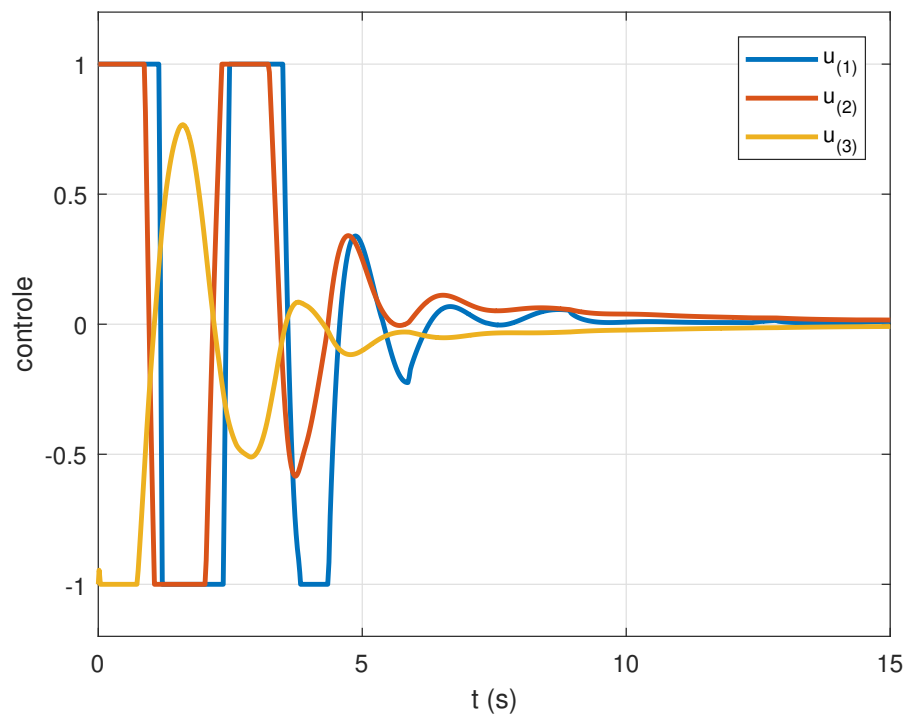


Figura 27: Comportamento temporal do sinal de controle

o valor inicial se encontra fora da estimativa da região de atração, os valores do erro aumentam exponencialmente. Isto se deve pelo fato de que, apesar do sistema Mestre ter valores iniciais que levam ao comportamento caótico como mostrado na Fig. 30, o sistema escravo é inicializado de tal forma que os seus estados possuem um comportamento exponencial ao invés do comportamento caótico, como mostrado na Fig. 31.

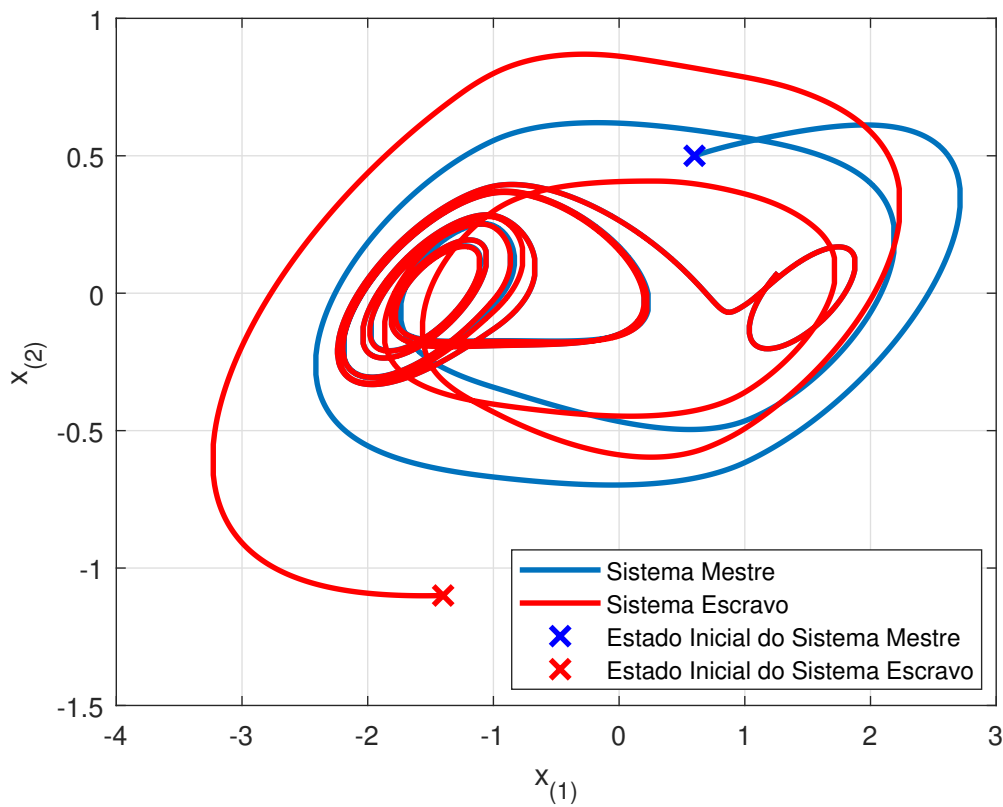


Figura 28: Trajetórias dos sistemas mestre e escravo no plano $x_{(1)} \times x_{(2)}$

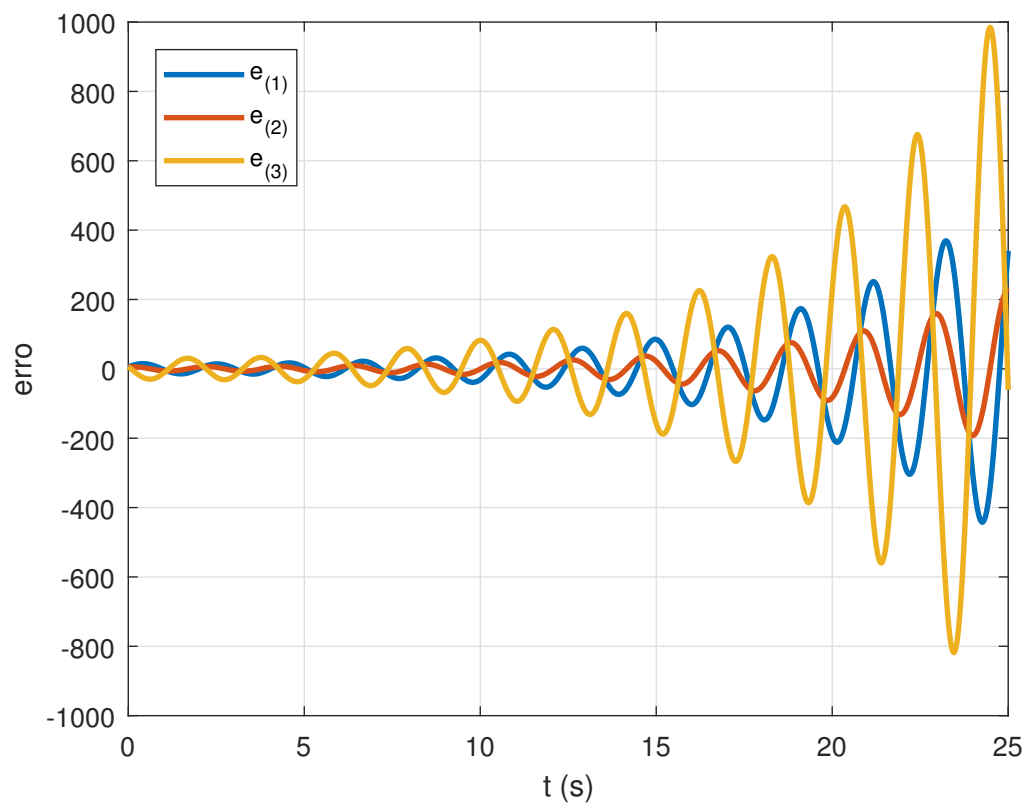


Figura 29: Comportamento temporal do sinal de erro

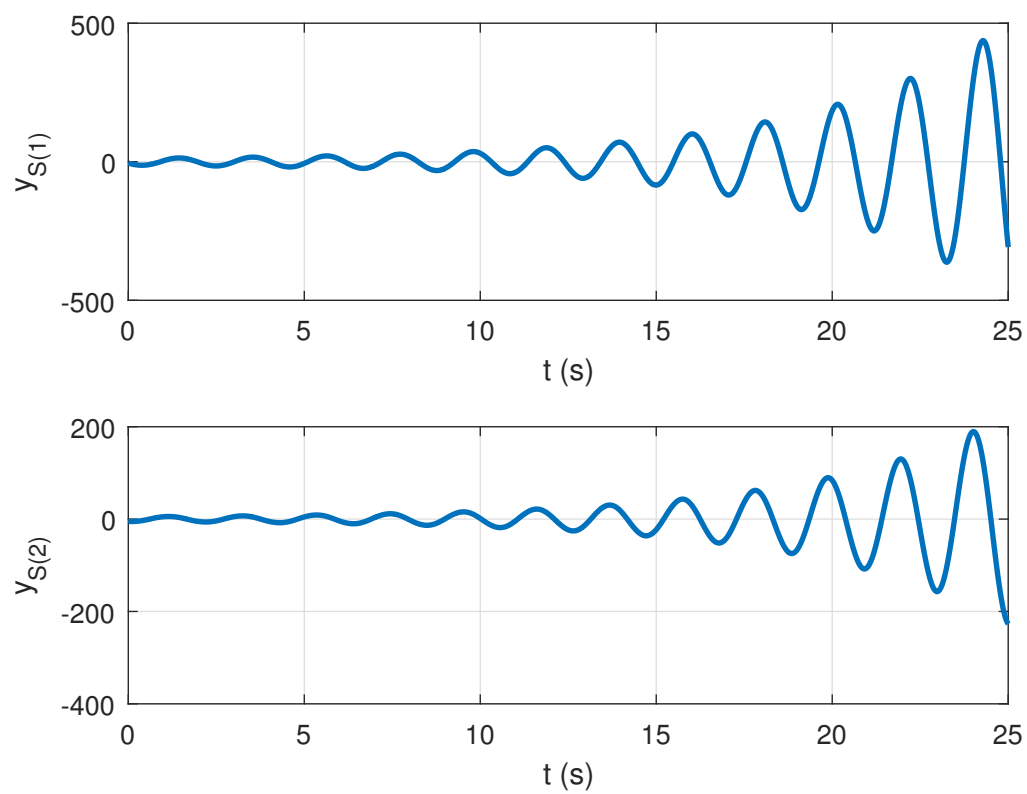


Figura 31: Comportamento temporal das saídas do sistema Escravo

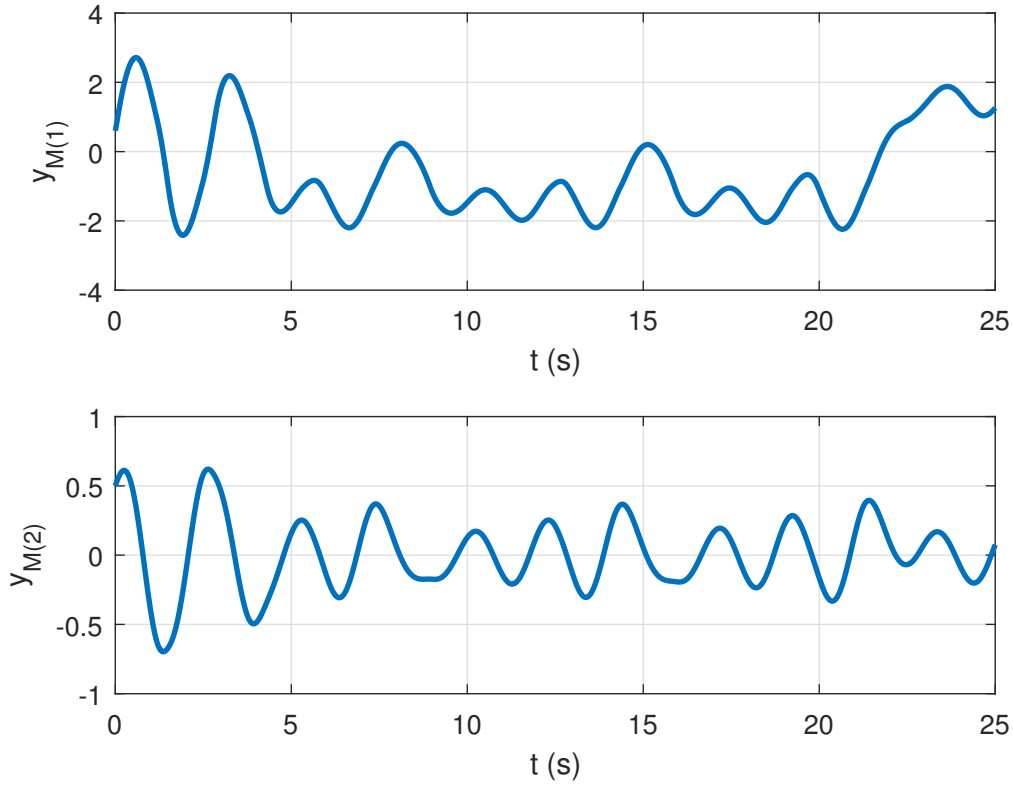


Figura 30: Comportamento temporal das saídas do sistema Mestre

Observação 4.2. Como os valores dos elementos L_c e O_c obtidos para ambos os problemas de otimização foram relativamente pequenos, decidiu-se comparar estes resultados com o controlador dinâmico de realimentação de saída que não utiliza as não-linearidades σ ou Ψ_j em sua composição. Assim, considerando o Corolário 4.4, foi resolvido um problema de otimização equivalente à (86). Foram obtidas a seguinte matriz X e escalar η :

$$X = \begin{bmatrix} 0.1247 & 0.0003 & 0.0015 \\ 0.0003 & 0.1529 & -0.0210 \\ 0.0015 & -0.0210 & 0.1241 \end{bmatrix}$$

$$\eta = 0.1566$$

Pode-se perceber que, ao se comparar com os resultados obtidos anteriormente para o problema de otimização (86), foi obtida uma estimativa da região de atração ligeiramente menor. Deste modo, a maior simplicidade e menor custo computacional resultante na aplicação do controlador devido a possuir menos elementos pode ser desejável em comparação à pequena perda da estimativa da região de atração obtida para este sistema.

4.5 Conclusão

Neste capítulo foi abordada a estratégia de controle por realimentação dinâmica de saída, utilizando o circuito de Chua como sistema modelo para validar os teoremas

de síntese dos controladores assim como utilizado no capítulo 3. O resultado obtido com o Teorema 4.1, demonstrando o efeito do uso de controlador dinâmico por realimentação de saída, foi apresentado em (FISCHMANN; FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2017b).

Ao resolver os Problemas de otimização (85) e (86), pode-se constatar de diversos modos que o caso em que a não-linearidade σ foi modelada como uma função *PWL* novamente levou a uma redução de conservadorismo em relação à estimativa da região de atração. Por último, a lei de controle obtida ao resolver o Problema de Otimização (86) foi considerada para realizar duas simulações numéricas. Na primeira simulação foi considerado um valor inicial de ζ tal que este se localiza no limite da região de atração e constatou-se que a sincronização foi atingida plenamente. Na segunda simulação foi considerado um valor inicial de ζ localizado fora da estimativa da região de estimação obtida, não resultando em sincronização.

5 CONCLUSÕES

No presente trabalho foram apresentadas duas estratégias de controle, uma aplicada a realimentação estática de estados e a outra a realimentação dinâmica de saída, para solucionar o problema da sincronização de sistemas Lur'e sob limitação de controle, i. e., controles saturantes. Além disso, foram considerados duas abordagens sobre as suposições assumidas sobre a não-linearidade do sistema Lur'e, com a primeira considerando uma função não-linear genérica que pertence local ou globalmente a um setor conhecido e a segunda considerando que a não-linearidade pode ser modelada como uma função *PWL*.

Considerando as combinações possíveis entre as estratégias de controle e os métodos de se modelar a não-linearidade do sistema Lur'e, foram apresentados quatro problemas de sincronização. O primeiro caso consistiu em utilizar o controlador de realimentação estática de estados e assumir apenas que a não-linearidade está confinada globalmente a um setor, o que é parte da definição de um sistema Lur'e, enquanto que o segundo caso considerou a estratégia de controle por realimentação de saída dinâmica sob o ponto de vista das mesmas considerações sobre a não-linearidade. O terceiro e o quarto casos consideraram a representação de funções não-lineares de setor do tipo função *PWL* (HU; HUANG; LIN, 2004) para posteriormente utilizar um modelo baseado em funções de saturação para descrever a dinâmica do sistema, com o terceiro caso empregando uma estratégia de realimentação estática de estados e com o quarto caso empregando uma estratégia de realimentação dinâmica de saída.

Um sistema caótico, o circuito de Chua, foi empregado em um exemplo numérico desenvolvido para validar os resultados obtidos neste trabalho. Primeiramente o sistema foi brevemente apresentado, sendo descritos os seus componentes e os requisitos para um circuito elétrico possuir comportamento caótico. Através da síntese dos controladores nos quatro casos, ficou evidente que as suposições consideradas para o terceiro e o quarto casos, ou seja, usando as condições para funções *PWL* levarem a uma redução no conservadorismo da estimativa da região de atração. Além disso, o quarto caso apresentando uma significativa redução no conservadorismo se comparado com os casos restantes. Subsequentemente foram realizadas simulações numéricas de sincronização considerando o caso de cada estratégia de controle que apresentou uma maior estimativa da região de atração, com a sincronização sendo atingida nos dois casos. Dentre os quatro casos abordados neste trabalho, o controlador de realimentação dinâmica de saída com abordagem por funções *PWL* possibilitou uma maior estimativa da região de atração.

Diferentemente dos outros trabalhos encontrados na literatura, que consideram apenas controladores de realimentação estática de estados, foi considerado neste

trabalho um controlador por realimentação dinâmica de saída que inclui as não-linearidades do sistema e um elemento *anti-windup*. Além disso, apesar de se encontrar trabalhos que tratam da saturação do sinal de controle na literatura, este problema não foi explorado para a sincronização de sistemas não-lineares sendo este também uma contribuição relevante para esta área de estudo.

Sugere-se como extensão dos resultados obtidos no presente trabalho as seguintes propostas:

- Estender os resultados para o caso de sistemas Lur'e discretos no tempo e para o caso de controle amostrado
- Desenvolvimento da prova do Lema 3.2 para condições de setor locais como considerada no Lema 3.3 e introduzida em (TARBOURIECH et al., 2011).
- Aplicação do controlador por realimentação dinâmica de saída e as considerações *PWL* para análise da sincronização com atraso de sinal, pois apesar do problema do atraso de sinal ser vastamente explorado na literatura não foi encontrado nenhum trabalho no qual realimentação dinâmica de saída é considerada.
- Estender os resultados para o caso em que os modelos dos sistemas mestre e escravo não forem idênticos devido a incertezas.
- Comparar os resultados obtidos com a modelagem *PWL* da não-linearidade do sistema com o modelo genérico, mas considerar setor $[\Omega_\sigma, \beta]$ e aplicar *loop transformation* (KHALIL, 1992) ao invés do setor $[\Omega_\sigma, 0]$ considerado neste trabalho.
- Explorar o uso de controlador estático não-linear por realimentação de estados, podendo utilizar as seguintes lei de controle propostas para as considerações genéricas e *PWL*, respectivamente:

$$\mathcal{L}_{C,E} : v = K_1 e + K_2 \rho$$

$$\mathcal{L}_{C,E} : v = K_1 e + K_2 \left(\Delta_1 e - \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \Delta_{j+1}) \Lambda_j \right)$$

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A.; TEIXEIRA, B. O. S.; TÔRRES, L. A. B. Using data-driven discrete-time models and the unscented Kalman filter to estimate unobserved variables of nonlinear systems. **Phys. Rev. E**, College Park, v.72, n.2, p.026226:1–026226:12, Aug. 2005.
- ARGYRIS, A.; PIKASIS, E.; SYVRIDIS, D. Highly correlated chaotic emission from bidirectionally coupled semiconductor lasers. **IEEE Photonics Technology Letters**, New York, USA, v.28, n.17, p.1819–1822, Sept. 2016.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. New York: Oxford University Press, 1998. (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering).
- ELGAR, S.; KENNEDY, M. P. Bispectral Analysis of Chua’s Circuit. **Journal of Circuits, Systems and Computers**, Singapore, v.3, n.1, 1993.
- FISCHMANN, M.; FLORES, J. V.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Sincronização de uma classe de sistemas Lur’e sob controle saturante. **Accepted to SBAI 2017**, Porto Alegre, p.1–8, Out. 2017.
- FISCHMANN, M.; FLORES, J. V.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Dynamic controller design for synchronization of Lur’e type systems subject to control saturation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 20., 2017, Toulouse. **Proceedings...** Amsterdam: Elsevier, 2017. p.1–6.
- GOMES DA SILVA JR., J. M. et al. Dynamic output feedback stabilization for systems with sector-bounded nonlinearities and saturating actuators. **Journal of the Franklin Institute**, Philadelphia, v.350, n.3, p.464–484, 2013.
- GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.50, n.1, p.106–111, Jan. 2005.
- HAO, L.-Y.; YANG, G.-H. Fault tolerant control for a class of uncertain chaotic systems with actuator saturation. **Nonlinear Dynamics**, Berlin, v.73, n.4, p.2133–2147, 2013.

- HU, T.; HUANG, B.; LIN, Z. Absolute stability with a generalized sector condition. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.49, n.4, 2004.
- HUA, C.; GE, C.; GUAN, X. Synchronization of chaotic Lur'e systems with time delays using sampled-data control. **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, New York, v.26, n.6, p.1214–1221, June 2015.
- IQBAL, M. et al. Sector-condition-based results for adaptive control and synchronization of chaotic systems under input saturation. **Chaos, Solitons & Fractals**, Amsterdam, v.77, p.158–169, 2015.
- JIANG, N. et al. Physically enhanced secure wavelength division multiplexing chaos communication using multimode semiconductor lasers. **Nonlinear Dynamics**, Berlin, v.86, n.3, p.1937–1949, 2016.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. New York, NY: Macmillan, 1992. 734 p.
- KIM, H.; PERSIS, C. D. Output synchronization of Lur'e-type nonlinear systems in the presence of input disturbances. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 54., 2015, Osaka. **Proceedings...** New York: IEEE, 2015. p.4145–4150.
- LI, T. et al. Further criteria on master–slave synchronization in chaotic Lur'e systems using delay feedback control. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Berlin, v.35, n.8, p.2992–3014, 2016.
- LI, Y.; LIN, Z. Analysis of linear systems with piecewise linear functions in the input. In: CHINESE CONTROL CONFERENCE (CCC), 35., 2016, Chengdu. **Proceedings...** New York: IEEE, 2016. p.5952–5957.
- LIU, H. et al. An encryption scheme based on synchronization of two-layered complex dynamical networks. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, New York, v.63, n.11, p.2010–2021, Nov. 2016.
- MA, Y.; JING, Y. Robust H_∞ synchronization of chaotic systems with input saturation and time-varying delay. **Advances in Difference Equations**, Berlin, v.2014, n.124, 2014.
- MATSUMOTO, T.; CHUA, L. O.; KOMURO, M. The double scroll. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, New York, v.32, n.8, p.797–818, 1985.
- PALHARES, R. M. et al. Experimental results on Chua's circuit robust synchronization via LMIs. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v.17, n.9, p.3199–3209, 2007.
- PALHARES, R. M. et al. Further results on master-slave synchronization of general Lur'e systems with time-varying delay. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v.18, n.1, p.187–202, 2008.
- PECORA, L. M.; CARROL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, College Park, v.64, n.8, p.821–824, 1990.

SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. **IEEE transactions on automatic control**, New York, v.42, n.7, 1997.

SUYKENS, J. A. K.; CURRAN, P. F.; CHUA, L. O. Master-slave synchronization using dynamic output feedback. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v.07, n.03, p.671–679, 1997.

SUYKENS, J. A. K. et al. Nonlinear H_∞ synchronization of Lur'e systems: dynamic output feedback case. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, New York, v.44, n.11, p.1089–1092, Nov. 1997.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

TAYEBI, A.; BERBER, S.; SWAIN, A. Performance analysis of chaotic DSSS-CDMA synchronization under jamming attack. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Berlin, v.35, n.12, p.4350–4371, 2016.

YANG, L. et al. Anticipating synchronization of chaotic Lur'e systems via output feedback and active sliding mode control schemes. In: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE (CCDC), 35., 2016, Chengdu. **Proceedings...** New York: IEEE, 2016. p.5627–5632.

ZHANG, X.; LU, G.; ZHENG, Y. Synchronization for time-delay Lur'e systems with sector and slope restricted nonlinearities under communication constraints. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Berlin, v.30, n.6, p.1573–1593, 2011.