

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE ESTRUTURAL DE VEÍCULOS COMERCIAIS TIPO ÔNIBUS

Inácio Benvegnú Morsch

Tese apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

2001

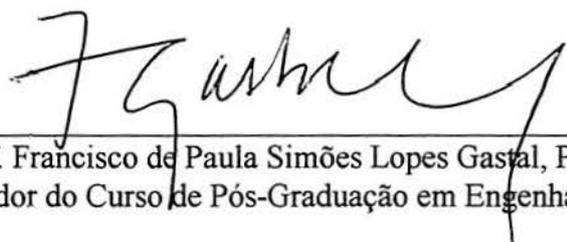
Título: ANÁLISE ESTRUTURAL DE VEÍCULOS COMERCIAIS

Autor: Inácio Benvegnú Morsch

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.



Prof. Ademar Gilberto Groehs, DSc
(Orientador)



Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal, PhD
(Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil)

Banca Examinadora:

Prof. Ademar Gilberto Groehs
DSc pela COPPE – UFRJ

Prof. Armando Miguel Awruch
DSc pela COPPE – UFRJ

Prof. Edison da Rosa
Dr Eng.Mec. pela UFSC

Prof. Ronaldo C. Battista
PhD – University of London

AGRADECIMENTOS

Agradeço aqui a todas as pessoas que colaboraram, de uma forma ou outra para a concretização deste trabalho. Ao professor Groehs pela orientação e incentivo ao longo desta longa jornada e também pela minha participação na equipe do projeto GAELI, o que sem dúvida despertou o meu gosto por uma Engenharia de bom nível. À professora Maria Inês pelas colaborações no cálculo de autovetores através do GAELI. Ao professor Awruch pelo incentivo e sugestões dadas no término deste trabalho. Aos professores do PPGEC pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas. Ao colega Mário Boéssio pelo trabalho em equipe desenvolvido em várias etapas desta pesquisa. Aos colegas Segovia, Cunda, Alquati pelo convívio durante o difícil período das disciplinas e qualificação. Ao professor Wilson Ferreira e ao pessoal do LTMF pelo enriquecedor período de convívio, que permitiu manter certa continuidade neste trabalho. Ao professor Fábio Teixeira pelo auxílio no desenvolvimento do programa de representação de resultados. Aos colegas do CEMACOM e à coordenadora do curso de Engenharia Civil, professora Wai pelo incentivo ao término deste trabalho. Aos funcionários das diversas empresas visitadas/consultadas pelos dados que foram passados. Às secretárias do PPGEC pelo seu empenho que mantém este curso funcionando. Às agências CAPES e CNPQ pelo financiamento desta pesquisa.

Não há assunto tão velho que algo de novo não possa ser dito sobre ele.
Dostoevsky

Dedico este trabalho à minha esposa Vera e ao meu filho Filipe por terem propiciado um ambiente de harmonia e amor fundamental para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho realiza-se um estudo abrangente das estruturas de veículos comerciais do tipo ônibus. Características específicas das partes que a formam; carroceria, chassi, suspensão; são apresentadas. A questão do empenamento de perfis com seção aberta, que eram utilizados em concepções estruturais antigas para este tipo de veículo, é analisada. Apresenta-se uma formulação para estimar a vida útil de um ônibus baseado no processo de fadiga provocado pelo deslocamento do veículo em vias com irregularidades. Esta formulação foi implementada num código computacional resultando numa ferramenta útil para tornar o projeto deste tipo de estrutura mais dinâmico e melhor fundamentado, apesar das simplificações adotadas.

ABSTRACT

A complete study of commercial vehicle structures such as a bus is accomplished in this work. Specific characteristic of different parts; suspension, chassis and body; are presented. Twisting of thin-walled open sections is also analysed. In spite of the assumed simplifications, a formulation to estimate the fatigue lifetime due to vibrations originated by road irregularities is presented as an useful tool for vehicle design.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS PROPOSTOS.....	1
1.2 ANÁLISE NUMÉRICA DE VEÍCULOS ESTRUTURADOS.....	3
1.3 O PROBLEMA DO EMPENAMENTO.....	6
1.4 O PROBLEMA DA EXCITAÇÃO NA BASE.....	9
1.5 COMO ESTIMAR A VIDA ÚTIL DE UM ÔNIBUS.....	11
1.6 CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS DE UM ÔNIBUS.....	13
1.6.1 Suspensão.....	13
1.6.2 Chassi.....	25
1.6.3 Carroceria.....	26
1.7 CARGAS DE PROJETO.....	29
1.8 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	30
2. ESTUDO DO PROBLEMA DA TORÇÃO	31
2.1 ESTRATÉGIA PARA REDUÇÃO DO USO DA MEMÓRIA.....	32
2.1.1 Elementos de Alta Ordem.....	32
2.1.2 Método p.....	33
2.1.3 Elementos com Razão de Aspecto Elevada.....	33
2.2 ELEMENTOS DE CASCA POLIÉDRICA.....	34
2.3 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA O ELEMENTO DE MEMBRANA.....	35
2.4 ELEMENTOS DE PLACAS.....	35
2.4.1 DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral).....	35
2.4.2 Serendipity Quadrático - MINDLIN.....	36
2.4.3 Lagrange Quadrático - Mindlin.....	36
2.4.4 Serendipity com 1 e 2 Níveis de Funções Bolha.....	37
2.5 PROCEDIMENTO DE TRABALHO.....	38
3. USO DE ELEMENTOS DE CASCA POLIÉDRICA COM RAZÃO DE ASPECTO ELEVADA NO ESTUDO DE PERFIS ABERTOS SUJEITOS A TORÇÃO	39
3.1 EXEMPLO COM EMPENAMENTO RESTRINGIDO.....	40
3.1.1 Perfil I.....	40
3.2 EXEMPLOS COM EMPENAMENTO SEMI-RESTRINGIDO.....	44
3.1.1 Ligação em T.....	44
3.2.2 Estrutura Tipo Grelha.....	50
3.2.3 Estrutura Tipo Caixa.....	59
3.3 CONCLUSÕES RELATIVAS AOS ELEMENTOS IMPLEMENTADOS.....	69
4. ANÁLISE DE VEÍCULO SUBMETIDO À CARGAS DE EXCITAÇÃO NA BASE	71
4.1 CONSIDERAÇÕES CINEMÁTICAS.....	71
4.2 DESCRIÇÃO DA PISTA DE ROLAMENTO.....	73
4.2.1 Espectro de Potência de uma Trilha.....	76
4.2.2 Intervalo de Validade da Função $G_z(n)$	80
4.2.3 Relação entre as Densidades Espectrais que Atuam numa mesma Trilha.....	81
4.3 A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO.....	82
4.3.1 Definição das Matrizes da Equação de Movimento.....	84
4.3.2 Considerações Práticas sobre a Equação de Movimento.....	85
4.3.3 Definição da Excitação.....	86
4.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO.....	86
4.5 CÁLCULO DOS ESPECTROS DE POTÊNCIA.....	89
4.5.1 Espectro de Potência da Carga.....	89

4.5.2	<i>Espectro de Potência dos Deslocamentos Dinâmicos</i>	91
4.5.3	<i>Espectro de Potência dos Deslocamentos Pseudoestáticos</i>	92
4.5.4	<i>Espectro de Potência Cruzado dos Deslocamentos Dinâmicos e Pseudoestáticos</i>	93
4.5.5	<i>Espectro de Potência dos Deslocamentos Totais</i>	94
4.5.6	<i>Espectro de Potência das Solicitações</i>	94
4.5.7	<i>Valores da Diagonal da Matriz Espectral dos Deslocamentos e Solicitações</i>	96
4.5.8	<i>Espectro das Tensões Normais</i>	98
4.5.9	<i>Espectro de Potência das Tensões Tangenciais</i>	101
4.5.10	<i>Espectro de Potência das Tensões Equivalentes</i>	102
4.5.11	<i>Espectro de Potência Cruzado das Tensões Normais e Tensões Tangenciais</i>	104
5.	PROCESSO PARA VERIFICAÇÃO DA ESTRUTURA À FADIGA	107
5.1	DEFINIÇÕES GERAIS	108
5.1.1	<i>Cargas que Provocam Fadiga</i>	108
5.1.2	<i>Regimes de Fadiga</i>	109
5.1.3	<i>Processos do Tipo Banda Estreita e Banda Larga</i>	109
5.1.4	<i>Vida Útil</i>	111
5.2	DEFINIÇÃO DAS CURVAS DE WÖHLER - LIMITE DE FADIGA	111
5.2.1	<i>Estimativa de uma Curva -N</i>	112
5.2.2	<i>Correção do Limite de Fadiga do Material dos Perfis</i>	113
5.3	O MODELO DE DANO	117
5.3.1	<i>Consideração do Dano abaixo do Limite de Fadiga</i>	119
5.4	ANÁLISE DE ULTRAPASSAGENS	120
5.4.1	<i>Análise de Ultrapassagem num Processo de Banda Estreita</i>	121
5.4.2	<i>Distribuição de Picos num Processo de Banda Estreita</i>	122
5.4.3	<i>Distribuição de Picos num Processo Geral</i>	123
5.4.4	<i>Distribuição de Picos num Processo de Banda Larga</i>	124
5.5	ESTIMATIVA DA VIDA ÚTIL EM PROCESSOS DE BANDA ESTREITA E BANDA LARGA...	126
5.6	DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE CICLOS N_0	127
5.6.1	<i>Influência das Tensões Médias</i>	127
5.6.2	<i>Influência do Estado Biaxial de Tensões</i>	130
5.6.3	<i>Processo de Cálculo</i>	133
5.6.4	<i>Método Alternativo para o Cálculo do Dano num Estado Biaxial de Tensões</i>	134
5.7	FADIGA DE ESTRUTURAS SOLDADAS.....	135
6.	IMPLEMENTAÇÃO DA ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	137
6.1	SOLUÇÕES ADOTADAS	137
6.1.1	<i>Cálculo das Solicitações Médias, Autovetores e Autovalores</i>	137
6.1.2	<i>Cálculo da Matriz dos Coeficientes de Influência</i>	137
6.1.3	<i>Montagem do Vetor de Cargas do Sistema de Equações Lineares Complexas</i>	138
6.1.4	<i>Solução do Sistema de Equações Lineares Complexas</i>	139
6.1.5	<i>Cálculo dos Desvios Padrões</i>	140

6.1.6	<i>Integração dos Espectros de Potência</i>	142
6.1.7	<i>Cálculo das Tensões</i>	143
6.1.8	<i>Cálculo da Vida Útil</i>	146
6.1.9	<i>Verificação da Falha por Fadiga num Estado Biaxial de Tensões</i>	150
6.1.10	<i>Verificação da Falha num Ponto</i>	150
6.2	ORGANIZAÇÃO MACRO DO CÓDIGO	152
6.2.1	<i>Programa Principal</i>	152
6.2.2	<i>Subrotinas FADIGA e FADIGAI</i>	154
6.3	ENTRADA DE DADOS	156
6.3.1	<i>Dados Principais</i>	156
6.3.2	<i>Dados Fornecidos no Programa Auxiliar</i>	159
6.4	SAÍDA DE RESULTADOS	161
6.5	LINGUAGEM ADOTADA	164
7.	MODELAMENTO DE UM ÔNIBUS SIMPLIFICADO	165
7.1	MODELO MATEMÁTICO UTILIZADO	165
7.2	DESENVOLVIMENTO DO MODELO	166
7.2.1	<i>Materiais</i>	171
7.2.2	<i>Aplicação das Cargas e Massas Concentradas</i>	171
7.2.3	<i>Elementos de Mola e Amortecedor</i>	174
8.	ANÁLISE ESTÁTICA DO ÔNIBUS SIMPLIFICADO	175
8.1	CASO NORMAL	175
8.2	CASO DE TORÇÃO - REMOÇÃO DE UM APOIO DIANTEIRO	178
8.3	CASO DE TORÇÃO - REMOÇÃO DE UM APOIO TRASEIRO	180
8.4	ANÁLISE DOS RESULTADOS	182
9.	APLICAÇÕES DO PROGRAMA PARA ANÁLISE DE FADIGA	183
9.1	EXEMPLOS FUNCIONAIS	183
9.1.1	<i>Exemplo 1</i>	183
9.1.2	<i>Exemplo 2</i>	188
9.1.3	<i>Exemplo 3</i>	191
9.1.4	<i>Observações Gerais</i>	195
9.2	ANÁLISE DO ÔNIBUS SIMPLIFICADO	196
9.2.1	<i>Cálculo dos Autovalores e Autovetores</i>	196
9.2.2	<i>Dados Extras para a Análise de Fadiga</i>	198
9.2.3	<i>Definição do Espectro das Irregularidades do Pavimento</i>	199
9.2.4	<i>Análise Espectral</i>	200
9.2.5	<i>Análise de Fadiga</i>	202
9.2.6	<i>Influência dos Elementos da Suspensão</i>	207
9.2.7	<i>Observações Gerais</i>	209
10.	CONCLUSÃO	211
10.1	SUGESTÕES	214
	ANEXO A - TEORIA DE VLASOV APLICADA AO CAPÍTULO 3	216
	ANEXO B - INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES AO CAPÍTULO 2	217
	B.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	217
	<i>B.1.1 Funções de Interpolação Padrão</i>	217
	<i>B.1.2 Funções de Interpolação Hierárquicas</i>	218
	B.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO DE CASCA POLIÉDRICA	220
	B.3 TEORIA DE KIRCHHOFF	220
	B.4 TEORIA DE REISSNER-MINDLIN	221
	B.5 TENDÊNCIAS ATUAIS DOS ELEMENTOS DE PLACA	226
	ANEXO C TERMINOLOGIA RELACIONADA À CARROCERIA E CHASSI	228
	C.1 COMPONENTES DA CARROCERIA EM BRUTO DE ÔNIBUS	228
	ANEXO D - EFEITO DO EMPENAMENTO EM SEÇÕES TUBULARES	230

D.1 EXEMPLO 1	231
D.2 EXEMPLO 2	233
D.3 EXEMPLO 3	234
D.4 EXEMPLO 4.....	236
D.5 OBSERVAÇÕES.....	238
ANEXO E - DEFINIÇÕES COMPLEMENTARES AO CAPÍTULO 4	241
TRANSFORMADA DE FOURIER.....	241
FUNÇÃO DE DENSIDADE ESPECTRAL.....	242
RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO E DENSIDADE ESPECTRAL	242
ANEXO F - CÁLCULO DO DESVIO PADRÃO DA F.D.E.P. DA RODOVIA	246
ANEXO G - SISTEMA GAELI.....	247
ANEXO H - LIGAÇÕES ENTRE CHASSI E CARROCERIA.....	248
ANEXO I - EFEITO DAS JANELAS	257
ANEXO J - CÁLCULO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES.....	259
ANEXO K SELEÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS DE MOLA	263
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	264

LISTA DE FIGURAS

FIGURA (1.1) - COMPARAÇÃO ENTRE ENGENHARIA SEQUENCIAL E ENGENHARIA PREDITIVA.....	3
FIGURA (1.2) - GRÁFICO COMPARATIVO ENTRE OS CUSTOS DOS MÉTODOS DE PROJETO.....	4
FIGURA (1.3) - ESQUEMA SIMPLIFICADO DE VEÍCULO PARA ESTUDO DA SUSPENSÃO.....	10
FIGURA (1.4) - REPRESENTAÇÃO DE MODELOS DE SUSPENSÕES USUAIS.....	14
FIGURA (1.5) - EXEMPLO DE MOLA DE FEIXES.....	14
FIGURA (1.6) - CURVA FORÇA X DEFLEXÃO DE UM FEIXE DE MOLAS PARA SUSPENSÃO DIANTEIRA.....	15
FIGURA (1.7) - CURVA FORÇA X DEFLEXÃO DE UM FEIXE DE MOLAS PARA SUSPENSÃO TRASEIRA.....	15
FIGURA (1.8) - DISPOSIÇÃO DAS CÂMARAS PNEUMÁTICAS.....	16
FIGURA (1.9) - ESQUEMA DE MOLAS PNEUMÁTICAS EMPREGADAS NAS SUSPENSÕES DE ÔNIBUS.....	17
FIGURA (1.10) - CURVA ISOBÁRICA DE DEFLEXÃO PARA MOLA PNEUMÁTICA - SUSPENSÃO DIANTEIRA.....	19
FIGURA (1.11) - CURVA ISOBÁRICA DE DEFLEXÃO PARA MOLA PNEUMÁTICA - SUSPENSÃO TRASEIRA.....	20
FIGURA (1.12) - EXEMPLO DE UM BATENTE DE BORRACHA.....	21
FIGURA (1.13) - CURVAS FORÇA X VELOCIDADE PARA AMORTECEDORES SUBMITIDOS A EXTENSÃO E A COMPRESSÃO.....	22
FIGURA (1.14) - VARIAÇÃO DA FORÇA EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE.....	22
FIGURA (1.15) - ESQUEMA DO EQUIPAMENTO UTILIZADO NOS TESTES DOS AMORTECEDORES.....	23
FIGURA (1.16) - CURVAS FORÇA X DESLOCAMENTO.....	24
FIGURA (1.17) - CURVA FORÇA X CURSO PARA AMORTECEDOR EMPREGADO EM SUSPENSÃO DIANTEIRA.....	24
FIGURA (1.18) - CURVA FORÇA X CURSO PARA AMORTECEDOR UTILIZADO NA SUSPENSÃO TRASEIRA.....	25
FIGURA (1.19) - GRÁFICO APROXIMADO FORÇA X VELOCIDADE DA CURVA DE EXTENSÃO DA FIGURA (1.18).....	25
FIGURA (1.20) - ESQUEMA DE UM CHASSI VOLVO COM MOTOR CENTRAL.....	26
FIGURA (1.21) - ILUSTRAÇÃO DA CARROCERIA DE UM ÔNIBUS.....	27
FIGURA (1.22) - SEÇÃO TÍPICA DA ESTRUTURA DE UM ÔNIBUS.....	28
FIGURA (1.23) - ESQUEMA COMPLETO DA ESTRUTURA DE UM ÔNIBUS.....	28
FIGURA (1.24) - VISTA LATERAL DA ESTRUTURA DO ÔNIBUS.....	29
FIGURA (1.25) - ILUSTRAÇÃO DE UM ÔNIBUS.....	29
FIGURA (2.1) - PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DE UM ELEMENTO DE CASCA POLIÉDRICA.....	34
FIGURA (2.2) - SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS DO ELEMENTO.....	35
FIGURA (2.3) - REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO LAGRANGIANO QUADRÁTICO.....	36
FIGURA (3.1) - EXEMPLO DE ERRO NO CÁLCULO DAS TENSÕES MÉDIAS NOS NÓS DE ELEMENTOS QUE PERTENCEM A DISTINTOS PLANOS GEOMÉTRICOS.....	39
FIGURA (3.2) - VIGA I SUBMETIDA A TORÇÃO.....	40
FIGURA (3.3) - MALHAS UTILIZADAS COM 3 ELEMENTOS REPRESENTANDO A ALTURA DA ALMA.....	41
FIGURA (3.4) - MALHAS UTILIZADAS COM 2 ELEMENTOS REPRESENTANDO A ALTURA DA ALMA.....	41
FIGURA (3.5) - MALHAS UTILIZADAS COM UM ELEMENTO REPRESENTANDO A ALTURA DA ALMA.....	42
FIGURA (3.6) - TENSÃO σ_x [MPa] AO LONGO DA ABA PARA VÁRIAS MALHAS USANDO O ELEMENTO SQ.....	43
FIGURA (3.7) - DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO σ_x [MPa] NA ALMA PARA A MALHA I8A.....	43

FIGURA (3.8) - DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO σ_x [MPa] NA ALMA PARA A MALHA I8A1.....	44
FIGURA (3.9) - COMPARAÇÃO DA SOLUÇÃO ENTRE ELEMENTOS.....	44
FIGURA (3.10) - DETALHAMENTO DA ESTRUTURA.....	45
FIGURA (3.11) - TIPOS DE LIGAÇÃO UTILIZADOS.....	45
FIGURA (3.12) - MALHAS UTILIZADAS NO MODELAMENTO DA LIGAÇÃO T.....	46
FIGURA (3.13) - DEFORMADA DA ESTRUTURA.....	46
FIGURA (3.14) - DISTRIBUIÇÃO QUALITATIVA DA TENSÃO DE VON MISES (MPa).....	47
FIGURA (3.15) - DISTRIBUIÇÃO QUALITATIVA DA TENSÃO EQUIVALENTE (MPa).....	48
FIGURA (3.16) - TENSÃO DE VON MISES POR PLANOS [MPa] - MALHA (A), LIGAÇÃO (A).....	49
FIGURA (3.17) - TENSÃO DE VON MISES POR PLANOS [MPa] - MALHA (A), LIGAÇÃO (B).....	50
FIGURA (3.18) - ESTRUTURA DO CHASSI.....	51
FIGURA (3.19) - ESQUEMA DE MODELAMENTO DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	51
FIGURA (3.20) - MALHAS EMPREGADAS NO MODELAMENTO DA GRELHA.....	52
FIGURA (3.21) - DEFORMADA DA ESTRUTURA.....	53
FIGURA (3.22) - DISTRIBUIÇÃO QUALITATIVA DA TENSÃO σ_x [MPa] - MALHA (A).....	54
FIGURA (3.23) - DISTRIBUIÇÃO QUALITATIVA DA TENSÃO DE VON MISES [MPa] - MALHA (A).....	55
FIGURA (3.24) - DETALHE DA REGIÃO DE TENSÃO DE VON MISES MÁXIMA [MPa] - MALHA (A).....	55
FIGURA (3.25) - DETALHE DA REGIÃO DE TENSÃO DE VON MISES MÁXIMA [MPa].....	56
FIGURA (3.26) - TENSÃO DE VON MISES [MPa] - MODELO DE BARRAS.....	57
FIGURA (3.27) - TENSÃO DE VON MISES [MPa] NO PLANO HORIZONTAL - MALHA (A).....	58
FIGURA (3.28) - TENSÃO DE VON MISES [MPa] NO PLANO VERTICAL - MALHA (A).....	58
FIGURA (3.29) - ESTRUTURA TIPO CAIXA.....	59
FIGURA (3.30) - VINCULAÇÃO E CARREGAMENTO DA ESTRUTURA.....	60
FIGURA (3.31) - DETALHE DO MODELAMENTO DAS JUNTAS.....	60
FIGURA (3.32) - MALHAS EMPREGADAS.....	61
FIGURA (3.33) - DEFORMADA DA ESTRUTURA PARA A MALHA COM RA = 2.....	62
FIGURA (3.34) - DISTRIBUIÇÃO QUALITATIVA DA TENSÃO σ_x [KGF/CM ²].....	63
FIGURA (3.35) - DISTRIBUIÇÃO QUALITATIVA DA TENSÃO DE VON MISES [KGF/CM ²].....	64
FIGURA (3.36) - DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE VON MISES [KGF/CM ²] NO NÓ 6.....	65
FIGURA (3.37) - PONTOS PARA CÁLCULO DAS TENSÕES.....	66
FIGURA (3.38) - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES DE VON MISES MÁXIMAS [KGF/CM ²].....	66
FIGURA (3.39) - DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE VON MISES POR PLANOS [KGF/CM ²].....	67
FIGURA (3.40) - DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE VON MISES [KGF/CM ²] - DETALHE DA LIGAÇÃO 6.....	68
FIGURA (3.41) - TENSÃO DE VON MISES, SUAVIZADA POR PLANOS, NO PLANO HORIZONTAL.....	68
FIGURA (3.42) - DETALHE DA TENSÃO DE VON MISES [KGF/CM ²] NO NÓ 6.....	69
FIGURA (4.1) - ESQUEMA PARA DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE E ACELERAÇÃO VERTICAL.....	71
FIGURA (4.2) - DESCRIÇÃO DA PISTA.....	73
FIGURA (4.3) - PARÂMETROS PARA DESCREVER A SUPERFÍCIE DE UMA PISTA BIDIMENSIONAL.....	75
FIGURA (4.4) - REPRESENTAÇÃO DA FDEP DAS IRREGULARIDADES EM FUNÇÃO DE N.....	78

FIGURA (4.5) - VARIAÇÃO DA FUNÇÃO DE COERÊNCIA COM w .	79
FIGURA (4.6) - ESTRUTURA COM MÚLTIPLOS APOIOS SUBMETIDA A UMA EXCITAÇÃO NA BASE.	82
FIGURA (4.7) - ESQUEMA DAS MATRIZES DE MASSA, AMORTECIMENTO E RIGIDEZ.	85
FIGURA (5.1) - ESQUEMA DA REPRESENTAÇÃO SIMPLIFICADA DAS TENSÕES.	107
FIGURA (5.2) - CLASSIFICAÇÃO DAS TENSÕES COM AMPLITUDE CONSTANTE.	108
FIGURA (5.3) - TENSÃO COM AMPLITUDE E FREQUÊNCIA VARIÁVEL DE NATUREZA SEMI-ALEATÓRIA.	109
FIGURA (5.4) - EXEMPLO DE PROCESSO BANDA LARGA E BANDA ESTREITA.	109
FIGURA (5.5) - CLASSIFICAÇÃO DOS PROCESSOS CONFORME SUA BANDA DE FREQUÊNCIA.	110
FIGURA (5.6) EXEMPLO DE CURVA $-N$.	111
FIGURA (5.7) - CURVA $-N$ EM ESCALA LOGARÍTMICA.	112
FIGURA (5.8) - GRÁFICO PARA OBTENÇÃO DO COEFICIENTE DE ACABAMENTO SUPERFICIAL.	113
FIGURA (5.9) - MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DO DIÂMETRO EQUIVALENTE.	114
FIGURA (5.10) - SEÇÕES CONSIDERADAS NO TRABALHO.	115
FIGURA (5.11) - ESQUEMA MOSTRANDO O FUNCIONAMENTO DA REGRA DE MINER.	117
FIGURA (5.12) - CURVAS PARA CONSIDERAÇÃO DO DANO ABAIXO DO LIMITE DE FADIGA.	120
FIGURA (5.13) - CRUZAMENTOS EM A COM DERIVADA POSITIVA.	121
FIGURA (5.14) - DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE x E \dot{x} .	121
FIGURA (5.15) - DISTRIBUIÇÃO DE PICOS PARA BANDA ESTREITA.	122
FIGURA (5.16) - REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE <i>RAYLEIGH</i> .	123
FIGURA (5.17) - FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DOS MÁXIMOS PARA DIFERENTES VALORES DA LARGURA.	125
FIGURA (5.18) - FUNÇÃO DE PROBABILIDADE ACUMULADA $P()$ PARA DIFERENTES VALORES DE	125
FIGURA (5.19) - CONTAGEM DO NÚMERO DE CICLOS DE TENSÃO EM FUNÇÃO DE v_0^+ .	127
FIGURA (5.20) - EFEITO DA TENSÃO MÉDIA m NO ENSAIO PARA DETERMINAÇÃO DO LIMITE DE FADIGA.	127
FIGURA (5.21) - RELAÇÕES EMPÍRICAS PARA ESTIMAR O EFEITO DAS TENSÕES m NA FALHA POR FADIGA.	128
FIGURA (5.22) - DIAGRAMA DE SMITH.	129
FIGURA (5.23) - DIAGRAMA MODIFICADO DE GOODMAN.	129
FIGURA (5.24) - DETERMINAÇÃO DA TENSÃO ALTERNANTE PURA QAP .	133
FIGURA (6.1) - EXEMPLO DE DISTRIBUIÇÃO DA VELOCIDADE DO VEÍCULO.	141
FIGURA (6.2) - REPRESENTAÇÃO QUALITATIVA DA F.D.E.P. DAS IRREGULARIDADES.	142
FIGURA (6.3) - ORIENTAÇÃO POSITIVA DAS SOLICITAÇÕES FORNECIDAS PELO SISTEMA GAELI.	144
FIGURA (6.4) - REGIÕES DE TRAÇÃO E COMPRESSÃO PARA O MOMENTO M_z .	144
FIGURA (6.5) - REGIÕES DE TRAÇÃO E COMPRESSÃO PARA O MOMENTO M_y .	144
FIGURA (6.6) - PONTOS SIGNIFICATIVOS E DADOS NECESSÁRIOS PARA O CÁLCULO DAS TENSÕES.	145
FIGURA (6.7) - DIVISÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE <i>RAYLEIGH</i> EM FAIXAS.	147
FIGURA (6.8) - USO DO DIAGRAMA DE GOODMAN NA VERIFICAÇÃO DE UM PONTO.	151
FIGURA (6.9) - ORDEM DE FORNECIMENTO DOS NÓS RESTRITOS.	157
FIGURA (6.10) - PLANILHA DE PROPRIEDADES.	157
FIGURA (6.11) - TELA PARA ESPECIFICAÇÃO DE DADOS EXTRAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL.	158

FIGURA (6.12) - TELA PRINCIPAL DA ENTRADA DE DADOS AUXILIAR.....	159
FIGURA (6.13) - MÓDULO VISUALIZADOR.....	163
FIGURA (7.1) - ESQUEMA DO CHASSI SIMPLIFICADO (SEM ESCALA).....	166
FIGURA (7.2) - PEÇAS BÁSICAS PARA O MODELAMENTO DO CHASSI.....	167
FIGURA (7.3) - IDENTIFICAÇÃO DAS PEÇAS BÁSICAS NO CHASSI.....	167
FIGURA (7.4) - REPRESENTAÇÃO DA MALHA RESULTANTE.....	167
FIGURA (7.5) - CONJUNTO DE LIGAÇÃO CARROCERIA-CHASSI.....	168
FIGURA (7.6) - QUADRO DE LIGAÇÃO CARROCERIA-CHASSI (SEM ESCALA).....	168
FIGURA (7.7) - DISPOSIÇÃO DOS QUADROS DE LIGAÇÃO CARROCERIA- CHASSI.....	168
FIGURA (7.8) - DETALHE DA LIGAÇÃO DO CHASSI COM A PARTE INFERIOR DA CARROCERIA.....	168
FIGURA (7.9) - DETALHAMENTO DO PÓRTICO BÁSICO.....	169
FIGURA (7.10) - VISTA LATERAL DA CARROCERIA.....	169
FIGURA (7.11) - DETALHE DO BALANÇO TRASEIRO DO ÔNIBUS.....	170
FIGURA (7.12) - MALHA DA CARROCERIA.....	170
FIGURA (7.13) - MALHA RESULTANTE.....	171
FIGURA (7.14) - DISTRIBUIÇÃO DAS MASSAS NO CHASSI.....	172
FIGURA (7.15) - MODELO PARA REPRESENTAÇÃO DA SUSPENSÃO.....	173
FIGURA (8.1) - VINCULAÇÃO PARA O CASO NORMAL.....	175
FIGURA (8.2) - DISTRIBUIÇÃO DE COEFICIENTE DE RISCO - CASO 1.....	176
FIGURA (8.3) - TENSÃO DE VON MISES, EM N/M^2 , PARA O CHASSI - CASO 1.....	177
FIGURA (8.4) - DEFORMADA DO MODELO MISTO - CASO 2.....	178
FIGURA (8.5) - DISTRIBUIÇÃO DE COEFICIENTE DE RISCO - CASO 2.....	179
FIGURA (8.6) - RESULTADOS PARA O CHASSI - CASO 2.....	180
FIGURA (8.7) - DEFORMADA DO MODELO - CASO 3.....	180
FIGURA (8.8) - DISTRIBUIÇÃO DE COEFICIENTE DE RISCO - CASO 3.....	181
FIGURA (8.9) - RESULTADOS PARA O CHASSI - CASO 3.....	182
FIGURA (9.1) - ESQUEMA DA ESTRUTURA DO EXEMPLO 1.....	183
FIGURA (9.2) - MODOS DE VIBRAÇÃO NUMERADOS E REPRESENTADOS EM ORDEM CRESCENTE.....	184
FIGURA (9.3) - DISTRIBUIÇÃO DO COEFICIENTE DE RISCO NO MODELO.....	187
FIGURA (9.4) - ESQUEMA DA ESTRUTURA DO EXEMPLO 2.....	188
FIGURA (9.5) - DISTRIBUIÇÃO DO COEFICIENTE DE RISCO NO MODELO DO EXEMPLO 2.....	191
FIGURA (9.6) - ESQUEMA DA ESTRUTURA DO EXEMPLO 3.....	192
FIGURA (9.7) - OITO PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO REPRESENTADOS EM ORDEM CRESCENTE DA ESQUERDA PARA A DIREITA E DE CIMA PARA BAIXO.....	197
FIGURA (9.8) - COEFICIENTE DE RISCO PARA O VEÍCULO RODANDO NA PRIMEIRA VIA CONSIDERANDO A CURVA -N COM DANO CONTÍNUO.....	203
FIGURA (9.9) - COEFICIENTE DE RISCO PARA O VEÍCULO RODANDO NA SEGUNDA VIA CONSIDERANDO A CURVA -N COM DANO CONTÍNUO.....	204
FIGURA (9.10) - COEFICIENTE DE RISCO PARA O VEÍCULO RODANDO NA 3 ^A VIA E CONSIDERANDO A CURVA -N DO	

TIPO EUROCODE	205
FIGURA (9.11) - COEFICIENTE DE RISCO PARA O VEÍCULO RODANDO NA 3 ^ª VIA E CONSIDERANDO A CURVA -N COM DANO CONTÍNUO.	207
FIGURA (9.12) - COEFICIENTE DE RISCO PARA O VEÍCULO RODANDO NA 2 ^ª VIA, ADOTANDO A CURVA -N COM DANO CONTÍNUO E DESCONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DOS AMORTECEDORES NO VETOR DE CARGAS.	208

LISTA DE TABELAS

TABELA (1.1) - CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DA MOLA DA FIGURA (1.9.A)	19
TABELA (1.2) - CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DA MOLA DA FIGURA (1.9.B).....	20
TABELA (3.1) - CARACTERÍSTICAS DAS MALHAS UTILIZADAS.	53
TABELA (3.2) - RESULTADOS GERAIS DA ANÁLISE.	54
TABELA (3.3) - CARACTERÍSTICAS DAS MALHAS EMPREGADAS.	62
TABELA (4.1) - OBTENÇÃO DE C	78
TABELA (4.2) - DADOS PARA INTERPOLAÇÃO DE $G(N)$	80
TABELA (4.3) - TESTE DA FUNÇÃO (4.166).....	104
TABELA (5.1) - COEFICIENTES DE CONFIABILIDADE.....	116
TABELA (6.1) - COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO.....	142
TABELA (6.2) - SINAIS DA TENSÃO EM FUNÇÃO DE M_z E W_z	144
TABELA (6.3) - SINAIS DA TENSÃO EM FUNÇÃO DE M_y E W_y	145
TABELA (6.4) - VALORES DO MÓDULOS RESISTENTES.	146
TABELA (6.5) - PROBABILIDADE DA TENSÃO σ_1 ESTAR NA FAIXA A_1	147
TABELA (6.6) - PROBABILIDADE EM PERCENTUAL DA TENSÃO σ_1 ESTAR NA FAIXA A_1	149
TABELA (9.1) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DOS DESLOCAMENTOS D_z [M] EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA SOLUÇÃO DO TESTE 1.	185
TABELA (9.2) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DAS SOLICITAÇÕES; PARA O ELEMENTO 1, NÓ 2; EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA SOLUÇÃO.	186
TABELA (9.3) - INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE AUTOVETORES EMPREGADOS NOS PRINCIPAIS RESULTADOS DA ANÁLISE DE FADIGA.	187
TABELA (9.4) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DOS DESLOCAMENTOS D_z [M] EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA SOLUÇÃO DO EXEMPLO 2.	189
TABELA (9.5) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DAS SOLICITAÇÕES; PARA O ELEMENTO 1, NÓ 2; EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA SOLUÇÃO DO EXEMPLO 2.	189
TABELA (9.6) - INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE AUTOVETORES EMPREGADOS NOS PRINCIPAIS RESULTADOS DA ANÁLISE DE FADIGA DO EXEMPLO 2.....	191
TABELA (9.7) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DOS DESLOCAMENTOS D_z [M] EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3.	193
TABELA (9.8) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DAS SOLICITAÇÕES DO ELEMENTO 3, NÓ 4] EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3.	193
TABELA (9.9) - INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE AUTOVETORES EMPREGADOS NOS PRINCIPAIS RESULTADOS DA ANÁLISE DE FADIGA DO EXEMPLO 3.....	194
TABELA (9.10) - COMPARATIVO DOS RESULTADOS OBTIDOS NOS TRÊS EXEMPLOS.	195
TABELA (9.11) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DOS DESLOCAMENTOS DO NÓ 9 EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES UTILIZADO NA SOLUÇÃO.	200
TABELA (9.12) - VARIAÇÕES DO DESVIO PADRÃO DAS SOLICITAÇÕES DO ELEMENTO 9, NÓ 9 EM FUNÇÃO DO	

NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA ANÁLISE.	200
TABELA (9.13) - TEMPO DE PROCESSAMENTO [s] PARA REALIZAR UMA ANÁLISE ESPECTRAL NUM COMPUTADOR PENTIUM II300 MHz COM 192 MBYTES DE MEMÓRIA.	202
TABELA (9.14) - RESULTADOS OBTIDOS PARA O PIOR PONTO CONSIDERANDO O VEÍCULO TRAFEGANDO NA 3ª VIA E ADOTANDO-SE A CURVA -N COM DANO CONTÍNUO.	206

LISTA DE QUADROS

QUADRO (6.1) - ALGORITMO DO PROGRAMA PRINCIPAL	153
QUADRO (6.2) - ALGORITMO RESUMIDO DA ROTINA FADIGA.....	155
QUADRO (6.3) - ALGORITMO RESUMIDO DA ROTINA FADIGA1.....	156
QUADRO (9.1) - VARIAÇÃO DOS MOMENTOS DA DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO NORMAL PARA O ELEMENTO 1; NÓ 2; PONTOS DE VERIFICAÇÃO 1 E 6.	186
QUADRO (9.2) - VARIAÇÕES DAS CARACTERÍSTICAS DAS DISTRIBUIÇÕES DA TENSÃO NORMAL PARA O ELEMENTO 1; NÓ 2; PONTOS DE VERIFICAÇÃO 1 E 6.	190
QUADRO (9.3) - VARIAÇÕES DAS CARACTERÍSTICAS DAS DISTRIBUIÇÕES DA TENSÃO NORMAL PARA O ELEMENTO 3; NÓ 4; PONTOS DE VERIFICAÇÃO 1 E 2, EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE AUTOVETORES USADO NA SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3.....	194
QUADRO (9.4) - CARACTERÍSTICAS DAS DISTRIBUIÇÕES DA TENSÃO NORMAL NOS PONTOS 1 E 2 DO NÓ 9, ELEMENTO 9.....	201
QUADRO (9.5) - EXEMPLO DO RELATÓRIO DE DANO DO VEÍCULO CONSIDERANDO A PRIMEIRA VIA DE ROLAMENTO E A CURVA -N PADRÃO.....	203
QUADRO (9.6) - RESUMOS DOS RELATÓRIOS DE FALHA DO VEÍCULO CONSIDERANDO A SEGUNDA VIA DE ROLAMENTO E AS CURVAS -N DO TIPO EUROCODE E COM DANO CONTÍNUO.	204
QUADRO (9.7) - RESUMO DO RELATÓRIO DE FALHA CORRESPONDENTE À 3 ^A VIA DE ROLAMENTO E CURVA -N DO TIPO EUROCODE	205
QUADRO (9.8) - LISTA DOS ELEMENTOS QUE FALHARAM CONSIDERANDO O VEÍCULO TRAFEGANDO NA 3 ^A VIA E ADOTANDO-SE A CURVA -N COM DANO CONTÍNUO.....	206

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 2

- F** : Vetor de forças.
K: Matriz de rigidez.
U: Vetor de deslocamentos.
N: Função de interpolação.
 ξ : Coordenada normalizada do elemento.
 η : Coordenada normalizada do elemento.

CAPÍTULO 3

- ν : Coeficiente de Poisson.

CAPÍTULO 4

- a : Distância entre eixos.
 a_k : Fator que multiplica a matriz de rigidez para obter a matriz de amortecimento.
 a_m : Fator que multiplica a matriz de massa para obter a matriz de amortecimento.
 $2b$: Bitola do veículo.
 c : Constante que é função do tipo de estrada.
 C_{cc} : Matriz de amortecimento do chassi e da carroceria.
 C_{cb} e C_{bc} : Matrizes de amortecimento de acoplamento entre chassi e carroceria com a suspensão.
 C_{bb} : Matriz de amortecimento da suspensão.
 C_{cc}^c : Matriz de amortecimento da carroceria e chassi.
 C_{cc}^s : Matriz de amortecimento da suspensão.
 $E[x]$: Valor esperado da variável x .
 e_1 : Vetor que representa a excitação nas rodas da pista esquerda.
 e_2 : Vetor que representa a excitação nas rodas da pista direita.
 $f(x,y)$: Função que define as irregularidades.
 $G(n)$: Espectro de potência *one sided* das irregularidades.
 $g(n)$: Função de coerência.
 G_{cb} : Matriz dos coeficientes de influência.
 $\bar{H}(\omega)$: Matriz de admitância complexa.
 i : Número imaginário igual a $\sqrt{-1}$.
I : Matriz identidade.
 K_{cc} : Matriz de rigidez do chassi e da carroceria.
 K_{cb} e K_{bc} : Matrizes de rigidez de acoplamento entre chassi e carroceria com a suspensão.
 K_{bb} : Matriz de rigidez da suspensão.
 M_{cc} : Matriz de massa do chassi e da carroceria.
 M_{cb} e M_{bc} : Matrizes de massa de acoplamento entre chassi e carroceria com a suspensão.
 M_{bb} : Matriz de massa da suspensão.
 n : Número de onda.
 $p(t)$: Vetor de cargas.
 $p^e(t)$: Vetor das solicitações de cada elemento.

\mathbf{q}_n : Autovetor n .
 $R(\xi, \eta)$: Função de correlação bidimensional.
 $S_c(n)$: Espectro de potência cruzado das irregularidades.
 $S(n)$: Espectro de potência das irregularidades em função do número de onda.
 $S(\omega)$: Espectro de potência das irregularidades em função da frequência.
 $S_p(\omega)$: Espectro de potência da carga.
 $S_u(\omega)$: Espectro de potência dos deslocamentos dinâmicos.
 $S_{u_s}(\omega)$: Espectro de potência dos deslocamentos pseudoestáticos.
 $S_{u_{us}}(\omega)$ e $S_{u_{su}}(\omega)$: Espectro de potência cruzado dos deslocamentos pseudoestáticos e dos deslocamentos dinâmicos.
 $S_{u_t}(\omega)$: Espectro de potência dos deslocamentos totais.
 $S_p^e(\omega)$: Espectro de potência das solicitações.
 $S_\sigma(\omega)$: Espectro das tensões normais.
 $S_{\sigma_{eq}}(\omega)$: Espectro de potência das tensões equivalentes.
 $S_\tau(\omega)$: espectro de potência das tensões tangenciais.
 $S_{\sigma\tau}(\omega)$ e $S_{\tau\sigma}(\omega)$: Espectros de potência cruzados entre a tensão normal e tangencial.
 \mathbf{u}_t : Vetor deslocamento total correspondentes aos graus de liberdade não submetidos à excitação de apoio.
 \mathbf{u}_b : Vetor deslocamento total correspondentes aos graus de liberdade submetidos à excitação de apoio.
 \mathbf{u}_s : Vetor dos deslocamentos pseudoestáticos.
 \mathbf{u} : Vetor de deslocamentos dinâmicos.
 $\bar{\mathbf{U}}(\omega)$: Vetor dos deslocamentos dinâmicos no domínio da frequência.
 T : Período.
 V : Velocidade do veículo.
 $\bar{\mathbf{Y}}(\omega)$: Vetor dos deslocamentos generalizados no domínio da frequência.
 \mathbf{y} : Vetor das coordenadas generalizadas.
 W_1 : Inverso da área da seção transversal.
 W_4 : Inverso do módulo resistente à torção.
 W_5 : Inverso do módulo resistente à flexão na direção Y_L .
 W_6 : Inverso do módulo resistente à flexão na direção Z_L .
 Z : Irregularidades da pista.
 λ : Comprimento de onda.
 ω : Frequência.
 ω_n : Frequência natural n .
 Φ : Matriz dos autovetores do sistema.
 Ω^2 : matriz diagonal que contém as frequências naturais ω_i ordenadas em ordem crescente e elevadas ao quadrado.
 Ξ : Matriz diagonal cujos elementos são os coeficientes de amortecimento relativo modal ξ_i .
 τ : Tensão tangencial.
 σ : Tensão normal.
 σ_{eq} : Tensão equivalente de von Mises ou simplesmente tensão de von Mises.
 σ_m : Tensão normal média.
 τ_m : Tensão tangencial média.

σ_{eqm} : Tensão média de von Mises.

CAPÍTULO 5

m, a : Constantes que definem a curva σ -N.

m_1, a_1 : Constantes que definem a curva σ -N do tipo EUROCODE 3.

D: Dano.

D_σ : Dano provocado apenas pelas tensões normais.

D_τ : Dano provocado apenas pelas tensões tangenciais.

K_a : Coeficiente de acabamento superficial.

K_b : Coeficiente de escala.

K_c : Coeficiente de confiabilidade.

K_{solda} : Coeficiente de solda.

M_0, M_2 e M_4 : Momentos da distribuição de um processo.

N : Número de ciclos de tensão.

$p(\)$: Distribuição de probabilidade.

$P(\)$: Probabilidade acumulada.

T: Período.

σ_{max} : Tensão normal máxima.

σ_{min} : Tensão normal mínima.

σ_a : Tensão normal alternante.

σ_m : Tensão normal média

σ_n : Resistência a fadiga para n ciclos de tensão.

σ_r : Tensão de ruptura do material.

σ_e : Tensão de escoamento do material.

σ_{fcp} : Limite de fadiga do corpo de prova para 10^6 ciclos de tensão.

σ_f : Limite de fadiga da peça para 10^6 ciclos de tensão.

σ_{eqa} : Tensão alternante de von Mises.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Tensões principais.

σ_{qap} : Tensão equivalente alternante pura.

σ_{qm} : Tensão equivalente média.

σ_{qa} : Tensão equivalente alternante.

$\sigma_{5 \times 10^6}$: Resistência a fadiga que indica a mudança de declividade na curva σ -N do tipo EUROCODE 3.

σ_{10^8} : Limite de fadiga abaixo do qual não ocorre dano (*cut-off limit*). É usado na curva curva σ -N do tipo EUROCODE 3.

$\Delta\sigma$: Faixa de tensão

ε : Constante que identifica o tipo do processo.

ν_0^+ : Freqüência de ultrapassagem em zero.

ω : Freqüência.

ν_m : Freqüência de máximo.

ν_m/ν_0^+ : Fator de distorção.

CAPÍTULO 6

A_x : Área da seção transversal.

C_{cb}^{mod} : Matriz de amortecimento modificada que representa a efetiva influência dos amortecedores na componente complexa do vetor de cargas.

F_x : Esforço normal.

M_x : Momento torçor.

M_y : Momento fletor em torno do eixo Y_L .

M_z : Momento fletor em torno do eixo Z_L .

I_z, I_y : Momentos de inércia em relação aos eixos Z_L e Y_L .

z, y : Coordenadas do ponto de verificação no sistema local do elemento.

W_t : Módulo resistente a torção.

ψ_x : Desvio padrão da variável x .

$\omega_{min}, \omega_{max}$: Limites inferior e superior do intervalo de frequências para integração.

1. INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS PROPOSTOS

Pode-se dizer que uma análise estrutural, realizada em 1988, de um ônibus urbano fabricado pela empresa MarcoPolo foi em parte responsável pelo início desta pesquisa. Naquela ocasião, fez-se uma análise estática linear do veículo, utilizando-se o sistema GAELI (anexo G), cujos resultados foram comparados com os obtidos por uma análise experimental. Neste processo, notou-se, para algumas barras, diferenças entre os valores numéricos obtidos para deslocamentos/deformações/tensões e os teórico-experimentais. O problema, então, era como justificar estas diferenças?

Os motivos apresentados na época para justificá-las, em ordem de importância, foram a não consideração do efeito do empenamento devido à torção, a não consideração das chapas de reforço ao redor das rodas e a não consideração do enrijecimento causado pelas chapas do teto. As tensões de empenamento eram importantes por que a carroceria do ônibus estudado utilizava um grande número de perfis com seção transversal aberta. Estas tensões não foram consideradas por que os elementos de pórtico espacial empregados não levavam em conta os efeitos do empenamento.

Durante este estudo, ficou evidente a necessidade de um sistema com ferramentas de pós-processamento mais poderosas, tais como o cálculo automático de tensões equivalentes. Além disso, recursos de análise dinâmica e de fadiga também se fizeram necessários para que se pudesse propor formas mais completas de avaliação da estrutura.

Nos anos seguintes, teve início no CPGEC um esforço para desenvolver um elemento que levasse em conta o empenamento. Realizaram-se pesquisas sobre o uso de elementos de barra e de casca. No entanto, os resultados obtidos com elementos de barra em problemas tridimensionais não foram satisfatórios. Por outro lado, os resultados obtidos com elementos de casca não foram significativos devido às limitações de equipamento da época.

De um modo geral, os dados práticos sobre como proceder na verificação de estruturas que apresentem empenamento por torção são limitados. Estudos com dados experimentais sobre este assunto são poucos, e trabalhos que usem elementos de casca, mostrando com detalhe o comportamento das tensões devido ao empenamento, também são raros. Por outro lado, as normas de projeto de estruturas metálicas; CAN S136- M89, AISI e NB14; não

prevêm a verificação de perfis submetidos a torção. Elas apenas recomendam que as vigas estejam adequadamente contraventadas, ou limitam-se a dizer que perfis de seção aberta não são adequados para esta solicitação. Mesmo em livros clássicos da área (YU-1973) este assunto não é abordado. Talvez isto se deva ao enfoque destas normas à construção civil nas quais a atuação do momento torçor não é considerada.

Por outro lado, há uma certa carência de material bibliográfico que especifique os carregamentos a que estão submetidos os veículos estruturados*, e que indique procedimentos para a verificação estrutural deste tipo de veículo. Somado a isto, constatou-se a falta de norma brasileira que trate deste assunto.

Também há uma falta considerável de informações práticas a respeito da estrutura de um ônibus, as quais são vitais para a execução de um bom modelo numérico. Entre os dados necessários estão as características dos elementos da suspensão, os tipos de perfis adotados, as ligações destes, as cargas de trabalho, os tipos de chassi empregados.

Atualmente, programas que estimem a vida útil de um ônibus levando em consideração o desgaste que o mesmo sofre ao rodar em vias com más condições têm sido cada vez mais requisitados. Isto se deve às exigências atuais, que muitas vezes obrigam as empresas a fornecerem um laudo comprovando a vida útil do veículo. Além disso, o modo de falha mais provável para uma barra da carroceria, de um bom projeto de ônibus, é fadiga de alto ciclo.

Dentro desta realidade foram estabelecidas as seguintes metas para este trabalho:

- Estudar o empenamento em perfis de seção aberta empregando elementos de casca plana;
- Estudar o empenamento em estruturas carrocerias e chassis de ônibus;
- Propor uma estratégia para redução dos custos computacionais da análise quando se empregam elementos de casca plana;
- Obtenção de dados práticos, com as empresas da área, a respeito da estrutura analisada;
- Modelamento de uma estrutura de ônibus simplificada;
- Propor uma formulação para análise de uma estrutura de ônibus submetida a cargas dinâmicas aleatórias de excitação da base;
- Desenvolver um código computacional para análise de fadiga do veículo considerando as cargas aleatórias da base.

* O termo estruturado se aplica a todo veículo cuja a estrutura seja formada por um “esqueleto” como por exemplo um ônibus ou um caminhão. Outro termo também utilizado, com o mesmo propósito, é veículo comercial.

1.2 ANÁLISE NUMÉRICA DE VEÍCULOS ESTRUTURADOS

O projeto de estruturas de ônibus usualmente desenvolvido nas empresas nacionais, usa processos clássicos de projeto como a *engenharia seqüencial*. Este modo de projeto segue uma ordem rígida, ilustrada na figura (1.1). Primeiro são estabelecidas as tarefas que o equipamento deve realizar, e as características deste, obtendo-se um anteprojeto. O projeto propriamente dito é executado baseado na experiência dos funcionários, em dados sigilosos da empresa e em processos clássicos de cálculo. Neste sentido, GASPAR (1978) apresenta um modo de cálculo simplificado baseado na Teoria das Estruturas. Concluído o projeto, constrói-se um protótipo que é testado em condições severas de uso. Com os resultados dos testes são feitas alterações no projeto original quando necessárias. Os veículos resultantes deste processo são usualmente robustos porque as ferramentas de projeto adotadas são básicas e também porque o nível de correção do projeto, a partir dos dados práticos, normalmente não é muito grande. Uma vez aprovado o protótipo parte-se para a fabricação em série.

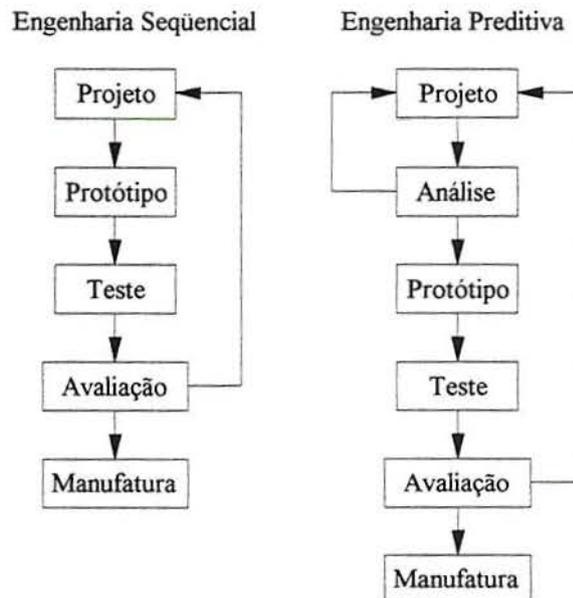


Figura (1.1) - Comparação entre Engenharia Seqüencial e Engenharia Preditiva.

Entretanto, com o processo de abertura de mercado em que se encontra o Brasil, cada vez mais se fazem necessários produtos mais competitivos. Junto com esta realidade as exigências técnicas, certificados ISO-9000, para exportação de produtos são crescentes. No que diz respeito a fabricação de ônibus são exigidas vidas úteis cada vez maiores, as quais, muitas vezes, devem ser comprovadas para o cliente. Além disso, os processos de cálculo mais sofisticados estão sendo empregados como uma boa ferramenta de *marketing*: a

empresa Volvo realiza uma série de testes de impacto (*crash-test*) e divulga os seus resultados para os clientes, as empresas automotivas nacionais frequentemente anunciam que seus novos veículos possuem área de deformação controlada para choque frontal, que é resultante de múltiplas simulações de impacto empregando-se o método dos elementos finitos. Com esta nova realidade, faz-se necessário a utilização de um processo de projeto mais sofisticado.

O projeto de equipamentos e estruturas aplicando os recursos de simulação numérica, *engenharia preditiva*, são largamente usados no exterior. Este tipo de projeto é mais versátil que o tradicional já que este pode até dispensar ou pelo menos minimizar o uso do protótipo. Normalmente a otimização do produto é totalmente numérica sendo construído apenas um protótipo, na etapa final do processo, para confirmar os resultados obtidos. A engenharia preditiva exige ferramentas de análise mais sofisticadas e por isso o seu custo inicial de desenvolvimento de um projeto é mais alto que o da engenharia seqüencial. Porém, o custo total deste modo de projeto é inferior ao do processo tradicional, figura (1.2). Além disso, o tempo para o desenvolvimento de um novo equipamento é menor quando se usa este processo de forma sistemática, logo pode-se lançar um novo produto no mercado num tempo menor.

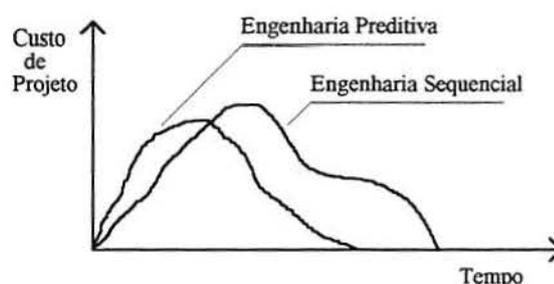


Figura (1.2) - Gráfico comparativo entre os custos dos métodos de projeto.

Para se desenvolver um projeto aplicando o conceito de engenharia preditiva são necessários sistemas que façam simulações numéricas reproduzindo as condições de trabalho do equipamento, como por exemplo um sistema de elementos finitos.

A análise completa da estrutura de um ônibus, pelo método dos elementos finitos é um problema complexo. Em condições normais de uso, um ônibus está submetido a um carregamento estático, peso próprio mais carga máxima, e a um carregamento dinâmico, gerado por excitações nas rodas devido às irregularidades da via. Também são importantes as cargas de frenagem e de aceleração, para testar a estabilidade do veículo. Neste estudo, estão contidos o problema de análise estática com cargas determinísticas e análise dinâmica com cargas aleatórias. A estrutura deve também ser verificada quanto a fadiga. Poderão ainda ocorrer problemas de flambagem. Todas estas verificações devem considerar o empenamento.

As estruturas de ônibus são nitidamente formadas por barras. Algumas delas são feitas com perfis de seção transversal aberta, o que leva a necessidade teórica da consideração do empenamento, que é geralmente desconsiderado na análise porque são erroneamente usados elementos de pórtico espacial convencional para representar as barras. Mesmo os elementos não convencionais, que usam alguma formulação especial para tratar o empenamento, não representam de modo razoável o problema quando este é 3D. Para se solucionar esta deficiência, uma possibilidade é o uso de elementos de casca, que consideram o empenamento restringido diretamente. Porém, o seu uso apresenta algumas dificuldades uma vez que o número de elementos necessários, e o esforço computacional envolvido é grande.

Até o final da década de 80, a maioria das carrocerias de ônibus fabricadas no Brasil eram compostas de perfis de seção aberta, que eram preferidos aos perfis tubulares porque a execução de pintura e de tratamento contra corrosão em perfis tubulares era problemática. O projeto destas carrocerias não considerava de modo direto o empenamento porque não se dispunha de ferramenta computacional capaz de solucionar um problema deste porte, já que seria necessário o modelamento de toda a carroceria do veículo com elementos de casca. Mesmo a aplicação de teorias mais simples não era adotado. Logo, o empenamento era considerado de modo empírico ou indireto através de um coeficiente de segurança.

A análise de uma estrutura completa de um ônibus com elementos de casca requer malhas com talvez 10000 elementos. Para isto o sistema usado deve ter recursos que tornem mais simples as tarefas de pré-processamento e pós-processamento. Além disso, faz-se necessário o uso de alguma estratégia para redução dos custos computacionais desta análise. Estas dificuldades motivaram um forte investimento de pesquisa nesta área. Como este trabalho iniciou efetivamente em 1994, com informações práticas do final da década de 80, desenvolveu-se a 1ª parte dele nesta linha de atuação. A partir do início dos anos 90, os fabricantes de carroceria de ônibus nacionais passaram a adotar apenas com perfis tubulares (esta é uma tendência mundial que já havia iniciado a algum tempo). Com isto o empenamento passa a ser mínimo nestas barras (anexo **D**). O mesmo permanece apenas no chassi que é tradicionalmente construído com perfis de seção aberta. Logo, a necessidade de recursos de análise com as características já mencionadas ficou reduzida.

Do ponto de vista de um estudo dinâmico de um ônibus, nota-se que a principal causa de falha é a fadiga de uma ou mais barras provocada pelas cargas aleatórias devido às irregularidades da via (BRANCO et al. - 1986). Logo, faz-se necessário o desenvolvimento de uma formulação que permita analisar a fadiga, de cada uma das barras, considerando o efeito

conjunto das cargas dinâmicas com as cargas estáticas determinísticas. Com este tipo de ferramenta tem-se condições de fazer uma estimativa da vida útil do veículo. Quanto às análises dinâmicas determinísticas, por exemplo a simulação de uma roda caindo num buraco e a obtenção de autovalores, pode-se aplicar qualquer sistema de elementos finitos que tenha estes recursos. Já a análise de flambagem, que é rara neste tipo de estrutura, pode ser feita aplicando-se uma das consagradas normas de projeto de estruturas metálicas.

O sucesso de qualquer uma das análises mencionadas está condicionada a um bom modelamento da estrutura do ônibus: suspensão, chassi e carroceria. A obtenção de uma série de dados práticos tais como: características da suspensão, tipos de perfis usados no chassi, tipos de perfis usados na carroceria, tipos de ligações usadas entre chassi-carroceria, materiais empregados e cargas, se fazem necessários para validar o trabalho.

1.3 O PROBLEMA DO EMPENAMENTO

Estruturas de ônibus (chassi e carroceria); chassi de caminhões, tratores, colheitadeiras; vagões são apenas alguns exemplos nos quais a consideração dos efeitos da torção pode ter uma importância significativa. Nestas estruturas é necessário considerar o efeito do empenamento adicionado aos demais esforços. Esta exigência cresce a medida que a espessura da chapa utilizada no perfil diminui, e a medida que as dimensões das juntas são relevantes se comparadas com o comprimento da barra. (BEERMANN - 1989).

As vigas de seção aberta tendo uma ou mais seções restringidas, parcial ou totalmente, ao empenamento, e sujeitas a um sistema geral de forças externas, desenvolvem uma complexa distribuição de tensões longitudinais. A existência das tensões de empenamento pode ser verificada pela aplicação de um momento torçor em uma viga de seção não circular. Este momento causa deslocamentos na direção normal ao plano da seção de modo que esta não permanece plana após a deformação (CHEN & BATSUTA - 1977), (ODEN & RIPPERGER - 1981). Uma seção transversal com movimentos impedidos na direção normal ao plano da seção desenvolve um conjunto de tensões normais longitudinais, as quais variam na seção e ao longo da viga, sendo acompanhadas por uma distribuição não uniforme de tensões de corte. Estas tensões não podem ser calculadas por teorias elementares, como as baseadas na hipótese de Bernoulli-Navier. A aplicação do Princípio de Saint-Venant, o qual estabelece que as deformações devidas ao empenamento ocorrem livre e uniformemente ao longo da viga, pode levar a grandes erros, principalmente em vigas de seção aberta, porque as tensões de empenamento decrescem lentamente a partir do ponto de aplicação da restrição. A

solicitação que resulta destas tensões, na seção restringida, é um sistema auto-equilibrado denominado bimomento. Nota-se que, para certas estruturas e estados de carga, as tensões produzidas pelo impedimento do empenamento podem ser predominantes.

O método desenvolvido por VLASOV (1961) faz a análise elástica de vigas de seção aberta de perfil qualquer. A solução do problema passa por uma equação diferencial de 4ª ordem não homogênea com coeficientes constantes cuja resolução para carregamentos e condições de contorno gerais é bastante complexa sendo necessária a utilização das *funções de Bessel* ou de *séries de potência* (anexo A). Além disso, esta formulação não pode ser aplicada em casos que apresentem empenamento semi-restringido como a ligação de duas barras. Para estes problemas faz-se necessário o uso de integração numérica.

Os casos com empenamento semi-restringido foram inicialmente abordados por métodos aproximados, como o apresentado por Takahashi (BOÉSSIO - 1992) para análise de chassi de caminhões. Aliás, o primeiro artigo que trata o empenamento semi-restringido em chassi de caminhões foi apresentado na conferência FISITA de 1968 (BEERMANN - 1989). Pode-se dizer que a necessidade de um método de análise geral impulsionou a pesquisa de vários autores, as quais podem ser divididas em duas linhas de trabalho.

A primeira linha de pesquisa aplica elementos de barra com um parâmetro nodal extra associado ao bimomento. Estes métodos são limitados a estruturas em linha ou grelhas, nas quais o bimomento é transferido de uma viga a outra, sem necessidade de rotação.

Fazendo um resumo histórico, pode-se dizer que o desenvolvimento destes elementos de barra teve início a partir de um trabalho apresentado por KRAHULA (1967); ele foi o 1º a considerar o bimomento como carga nodal, sendo apresentada uma matriz de rigidez linear que incluía o efeito do empenamento restringido. BAZANT & NIMEIRE (1973) chegam a conclusão de que o bimomento e o empenamento independem das demais solicitações e deslocamentos. ETTOUNEY & KIRBY (1981) criam os conceitos de empenamento contínuo e restrição parcial ao empenamento expressando este em termos de outros graus de liberdade. YANG Y. B. (1984) desenvolve um elemento de viga para a análise da torção não uniforme em pórticos espaciais introduzindo os conceitos de coeficiente indicador de empenamento (*warping indicator*) e coeficiente de mola para transmissão do empenamento (*warping spring*). A partir deste ponto, vários tipos de elementos foram propostos empregando as mais distintas formulações. Do ponto de vista teórico, qualquer elemento com funções de interpolação cúbicas descreve o empenamento já que este é proporcional a 3ª derivada do ângulo de giro da viga com relação ao comprimento medido ao longo do eixo da mesma.

A principal vantagem dos elementos de barra é o uso de um número reduzido de elementos, o que reduz as exigências de memória/tempo de máquina. Porém, este método tem uma séria limitação. O bimomento não é um tensor; (ODEN & RIPPERGER -1981), (YANG Y. B. - 1986); não existindo possibilidade de realizar sua rotação numa configuração espacial. Como consequência, a análise de estruturas espaciais não é viável de modo direto. Esta questão é tão complexa, que muitos autores apresentavam novos elementos de barra e nem sequer comentavam sobre a transmissão do bimomento (MORAIS -1993). O caso é que a transmissão e restrição do empenamento depende do detalhe da conexão, e o modelamento de uma estrutura de barras com elementos unidimensionais ignora qualquer efeito de distribuição local de tensões nas proximidades de um nó, de modo que somente as condições globais de compatibilidade em cada nó são satisfeitas. Porém, alguns autores obtiveram resultados parciais com o modelamento de vários tipos de uniões com elementos de casca ou através de análise experimental com o objetivo de obter os coeficientes indicador de empenamento e coeficiente de mola para transmissão do empenamento.

No CPGEC-UFRGS fez-se uma dissertação de Mestrado na linha dos elementos de barra (MORAIS - 1993). Analisou-se vários tipos de junções, com elementos de casca do sistema GAELI, com o objetivo de obter os coeficientes já mencionados. Os resultados obtidos foram parcialmente satisfatórios. Segundo o autor: "Tornou-se bastante clara a carência de um tratamento teórico mais eficiente para o problema da transmissão do empenamento em interseções de barras. A incorporação dos efeitos localizados dos nós não está bem resolvida ainda e estudos teóricos mais aprofundados neste tema são recomendados". Sobre a versatilidade do método, o autor comenta:" Para situações de carregamento mais geral a aproximação claramente deixa de ser automática e o analista deve ter cuidado na aplicação deste conceito. Longe de ser considerado um fracasso, o fato da solução apresentada não poder ser generalizada serve como alerta para a falta de um tratamento teórico mais sofisticado". Nota-se que, até o momento, não se tem uma solução totalmente aceitável para barras, que considere o empenamento em estruturas 3D.

A segunda linha de trabalho faz o modelamento das barras com elementos de casca, obtendo uma solução que enfoca de modo geral e adequado o problema. No entanto, esta abordagem leva a um grande número de elementos com conseqüente necessidade elevada de memória e tempo de máquina. Além disso, a própria geração dos dados e interpretação dos resultados geram dificuldades consideráveis. Os trabalhos nesta linha se preocupam basicamente em reduzir os custos computacionais (KANOK - 1988).

Quando se empregam elementos de casca, o empenamento é transmitido de modo direto. Porém, a qualidade da solução obtida vai depender do modelamento das uniões. Uniões soldadas são, via de regra, facilmente modeladas. Já uniões aparafusadas ou rebitadas, são de difícil representação. Nestes casos, a qualidade do resultado obtido é questionável, sendo necessário o uso de análise experimental para se descrever o comportamento da ligação.

No CPGEC-UFRGS se desenvolveu uma dissertação de Mestrado (BOÉSSIO - 1992) que usa elementos de casca de 8 nós na análise de vigas de seção aberta submetidas à torção. Usou-se o conceito de subestruturas para reduzir o custo com memória e tempo de análise. Os resultados obtidos no estudo de casos com solução analítica, mostraram que os elementos de casca se aplicam bem ao problema. Esta estratégia não foi amplamente usada na solução de problemas com empenamento devido à dificuldade de fornecimento de dados e aos recursos de pós-processamento limitados, já que o mesmo operava em computador Bourroughs.

Uma vantagem do emprego de elementos de casca é a melhor visualização dos resultados. Os recursos de pós-processamento disponíveis; tais como representação da distribuição de tensões, deslocamentos e tensões equivalentes; são mais poderosos do que os recursos disponíveis para elementos de barra. Além disso, a preocupação com a redução dos custos computacionais, embora válida, tem a sua importância reduzida com o tempo devido ao crescente aumento dos recursos computacionais e queda de preço destes. Logo o uso de elementos de casca é uma estratégia que aparentemente tende a se fortalecer no futuro.

Os dois enfoques propostos para o estudo do problema do empenamento apresentam, cada um, vantagens e desvantagens, e não se pode afirmar que um enfoque é melhor que o outro de um modo geral. O uso de um ou outro método deve ser decidido pela consideração das características do problema, dos recursos computacionais disponíveis, do tipo de análise que se quer realizar e do tipo de saída de resultados desejada.

1.4 O PROBLEMA DA EXCITAÇÃO NA BASE

O estudo de veículos submetidos a excitações provenientes da base provavelmente teve início devido a necessidade de se projetar a suspensão destes. Nestes primeiros trabalhos, os principais objetivos eram verificar as condições de estabilidade e conforto do veículo. Para isto a suspensão era modelada com elementos de mola e de amortecedor, e o veículo era considerado como um corpo rígido conforme figura (1.3).

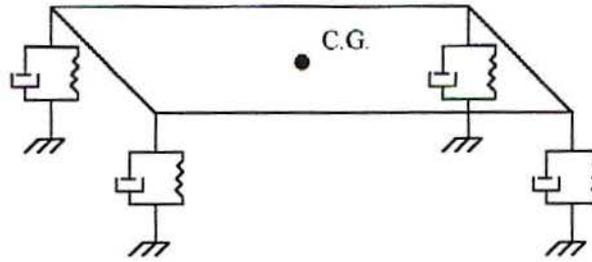


Figura (1.3) - Esquema simplificado de veículo para estudo da suspensão

Este modelo era submetido aos impulsos aleatórios de uma pista de rolamento (DODDS & ROBSON - 1970), (NATHOO & HEALEY - 1978). Atualmente este mesmo tipo de modelo simplificado ainda é utilizado com objetivo de se fazer simulação, otimização e controle de suspensões com elementos ativos (BARBIERI - 1993).

Os trabalhos atuais sobre veículos submetidos à cargas aleatórias passam a analisar também os danos causados nas estradas devido às cargas dinâmicas provocadas por caminhões de transporte pesado. Também são feitos estudos sobre desgaste nos pneus devido às irregularidades da pista. Neste sentido, a sofisticação da análise e da instrumentação utilizada é bastante elevada (KULAKOWSKI et al. - 1992), (POELMAN & WEIR - 1992), (SEBAALY-1992). Os sistemas de análise de veículos atuais trabalham fundamentalmente com simulação devido às não linearidades dos componentes que formam a suspensão do mesmo, (YI - 1992). Entretanto, como o custo computacional de um processo de simulação é elevado, é interessante ter-se ferramentas de menor custo que possam ser aplicadas a casos mais simples, e que possam servir para testar um posterior processo de simulação.

Uma etapa importante no estudo da resposta de um veículo rodando numa pista defeituosa é a descrição detalhada do espectro de potência das irregularidades. As superfícies das pistas podem ser representadas como *realizações de um campo aleatório* desde que efeitos ocasionais como grandes irregularidades, buracos na pista, sejam removidos e tratados separadamente. Neste caso, a descrição da superfície da pista é considerada *um processo aleatório estacionário* (DODDS & ROBSON - 1973). Inicialmente as pistas eram descritas utilizando-se dois perfis isolados ou duas trilhas isoladas. Esta técnica obteve um grande sucesso e vários modelos analíticos foram desenvolvidos. Porém, ela complica o modelo quando se quer considerar diferentes excitações nos dois lados do veículo porque é necessário ter a descrição do par de perfis para cada caso, o que requer a definição de dois espectros de potência e também dos dois espectros cruzados. Além disso, este conjunto de espectros varia em função da largura entre rodas do veículo. Uma alternativa a esta técnica é descrever a

superfície como um espectro de potência bidimensional em função de dois números de onda. Entretanto este processo também não fornece uma formulação simples. Por outro lado, se a hipótese de *isotropia* é aceita, ela simplifica bastante a descrição da pista.

Nesta linha de raciocínio, Dodds (DODDS & ROBSON - 1973) propôs um espectro de potência considerando as pistas de rolamento como realizações de um *processo aleatório gaussiano bidimensional isotrópico e homogêneo* (KAMASH & ROBSON - 1977), (ROBSON - 1978). Esta hipótese facilita a análise já que as propriedades da pista são obtidas por medições tomadas de uma única trilha ao longo da pista uma vez que as propriedades estatísticas são as mesmas em todas as direções. Outra vantagem é o uso de fórmulas simples para a descrição do espectro de potência (ASHMORE & HODGES - 1992).

Neste estudo, considera-se o problema linear. Aplica-se uma solução no domínio da frequência associada ao uso do *método modal* (YANG C.Y. - 1986). O espectro de potência das irregularidades da pista é descrito segundo a hipótese apresentada em DODDS & ROBSON (1973).

Como crítica a esta escolha, pode-se dizer que as superfícies das estradas não são precisamente isotrópicas e nem homogêneas. Caso uma boa precisão seja necessária, a consideração da isotropia não é adequada. Neste caso, descrições mais precisas e mais complexas devem ser empregadas. Porém, como não se dispõe de dados experimentais para as condições das nossas estradas, a aproximação fornecida pela *isotropia* é considerada válida porque a escolha de qualquer outro espectro de potência será também aproximada.

1.5 COMO ESTIMAR A VIDA ÚTIL DE UM ÔNIBUS

A vida útil de um veículo, exceto os casos de falha por defeito de fabricação e por desgaste natural, é principalmente determinada por um processo de fadiga gerado por cargas dinâmicas aleatórias causadas pelas irregularidades das vias. A estimativa de uma vida útil nestas condições não é trivial, embora o tema *fadiga* venha sendo estudado há décadas.

A primeira notícia sobre falha de um elemento mecânico por tensões repetidas ocorreu nos anos 1800 com a ruptura sistemática dos eixos de locomotivas. O termo *fadiga* foi usado pela primeira vez por Poncelet em 1839. Em 1871, August Wöhler publicou o primeiro trabalho científico sobre a falha por fadiga, do qual resultaram os *diagramas de Wöhler* que são usados até hoje. Em 1921, Griffith propôs um critério de falha relacionando fratura com crescimento de trinca. Em 1930, Goodman e Soderberg determinaram, de modo independente, a influência das tensões médias na fadiga. Em 1937, Neuber propôs uma equação que

considera a concentração de deformação em entalhes. Na década de 50, os desastres aéreos com os aviões *Comet* motivaram estudos que resultaram na criação do conceito de *fator de intensificação de tensões*. Em 1953, Peterson publicou o livro "*Stress Concentration Design Factors*". Em 1955, Coffin e Manson publicaram independentemente uma lei para fadiga de baixo ciclo. Em 1961, é publicada a *Lei de Paris* da Mecânica da Fratura que relaciona o crescimento de trinca com fadiga. Ainda hoje, pesquisas a respeito dos mecanismos de fadiga continuam sendo desenvolvidas na busca de respostas a perguntas aparentemente simples.

Pela natureza das cargas envolvidas neste problema, verifica-se que este é um processo de fadiga de *alto ciclo*. Devido ao porte da estrutura a ser analisada considera-se a aplicação da *teoria clássica de fadiga*, que está baseada nos diagramas de Wöhler e nos fatores de correção que são aplicados a estes. Entre outras publicações, os livros de JUVINALL (1967) e SHIGLEY (1963) são referências clássicas no assunto. Referências mais atuais são encontradas nos livros de COLLINS (1993), NORTON (1998) e (SURESH - 1998).

A análise de fadiga de um ônibus pode ser feita basicamente de duas formas: *análise no domínio da frequência* ou usando alguma técnica de *simulação no domínio do tempo*. No primeiro caso, as equações de movimento são escritas no domínio da frequência com o uso da transformada de Fourier. Estas equações são resolvidas de modo completo ou pelo do método modal (CLOUGH & PENZIEN - 1993). As respostas delas são obtidas em valores quadráticos médios, devendo as cargas médias serem tratadas separadamente. A análise de fadiga, caso não se use um algoritmo de contagem, é feita baseada nos momentos da distribuição de cada variável (BREBBIA & WALKER - 1979). No segundo caso, as equações de movimento são resolvidas no domínio do tempo. As cargas aleatórias são obtidas, baseadas no espectro de potência das irregularidades, através do uso de uma série harmônica senoidal com ângulos de fase gerados aleatoriamente (YANG C.Y. - 1986). Este método exige rotinas de contagem (como *rainflow*) para se fazer a análise de fadiga. A princípio este processo é mais versátil que a primeira alternativa, porém ele apresenta alguns fatores complicantes na análise de fadiga. Neste trabalho, optou-se pela *análise no domínio da frequência*. Esta abordagem é bastante utilizada embora exija um trabalho analítico maior que a outra opção. Uma das suas vantagens é evitar o uso de rotinas de contagem. Neste sentido, pesquisas são continuamente desenvolvidas para aprimorar o método de cálculo (LÜ et al. - 1998).

As principais dificuldades de uma análise de fadiga recaem na escolha do modelo de dano, na consideração das tensões médias, na consideração das tensões residuais, na combinação do efeito das tensões tangenciais com as tensões normais,. Aliás a estimativa da

vida útil de uma peça submetida a um estado multiaxial de tensões com características aleatórias é tema de intensas pesquisas.

Neste sentido, a formulação proposta utiliza procedimentos consagrados na literatura, que são obtidos a partir de hipóteses simplificadoras. O resultado é uma formulação que consegue obter uma vida útil por um processo teoricamente aceitável. Em contraponto a esta proposta, o que se faz atualmente na indústria é simplesmente aplicar fatores de carga dinâmica para os quais sabe-se que o veículo não falha.

1.6 CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS DE UM ÔNIBUS

Do ponto de vista estrutural, um ônibus pode ser dividido em 3 conjuntos: suspensão, chassi e carroceria. A nomenclatura técnica aplicada à estas partes encontra-se no anexo C.

1.6.1 Suspensão

A função primária de uma suspensão é controlar as mudanças de atitude do veículo com relação às irregularidades das pistas de rodagem. Isto requer o suporte do peso do veículo, controle da altura e dos ângulos de balanço (*pitch*) e rolamento (*roll*) produzidos pelas acelerações longitudinal e lateral. Usualmente suspensões duras produzem um bom controle de atitude. Do mesmo modo, a suspensão deve controlar a atitude das rodas com relação à superfície da pista e ao corpo do veículo. O projeto cinemático de elementos mecânicos e juntas com pouca flexibilidade minimizam mudanças indesejáveis de atitudes das rodas devido a forças oriundas de curvas, frenagem e aceleração. Outra função importante das suspensões é fazer com que as rodas mantenham contato com a via de rodagem de modo que as reações normais sejam o mais constantes possível (BARBIERI - 1995).

A função estrutural da suspensão é isolar o veículo das forças geradas nas rodas pelas irregularidades das vias. Os pneus filtram efetivamente os picos de maior frequência, e suspensões macias reduzem o efeito das componentes de menor frequência. Logo, o correto modelamento da suspensão de um veículo tem grande importância na análise estrutural deste, e também na simulação da deterioração das estradas devido ao transporte de cargas.

A suspensão usada em ônibus, que é normalmente passiva, é composta por molas, amortecedores, barras estabilizadoras e barras de reação. Uma suspensão é passiva quando os seus elementos não têm as características variáveis conforme o tipo da pista de rodagem ou seja as curvas de operação das molas e amortecedores não podem ser modificadas. Cada conjunto da suspensão pode ser ligado a um eixo rígido conforme figura (1.4).

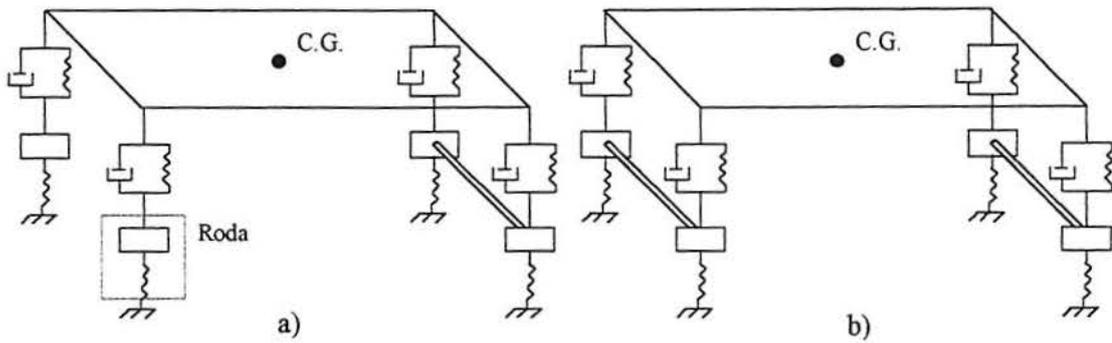


Figura (1.4) - Representação de modelos de suspensões usuais.
a) Montagem com suspensão dianteira independente. b) Montagem mais usual em ônibus.

Cada conjunto de suspensão traseira é ligado a um eixo rígido. Esta solução também é usual para a suspensão dianteira conforme figura (1.4.b). Em casos menos usuais, a suspensão dianteira é do tipo independente, figura (1.4.a). Quando a suspensão é do tipo independente, o movimento de uma roda não interfere no comportamento da outra. Por outro lado, a ligação das rodas a um eixo rígido faz com que o comportamento de uma roda interfira no da outra. Do ponto de vista do conforto e segurança, a melhor suspensão é do tipo independente.

Os elementos de mola adotados nas suspensões são do tipo molas de feixes, molas pneumáticas e batentes de borracha. A figura (1.5) ilustra uma mola de feixe.

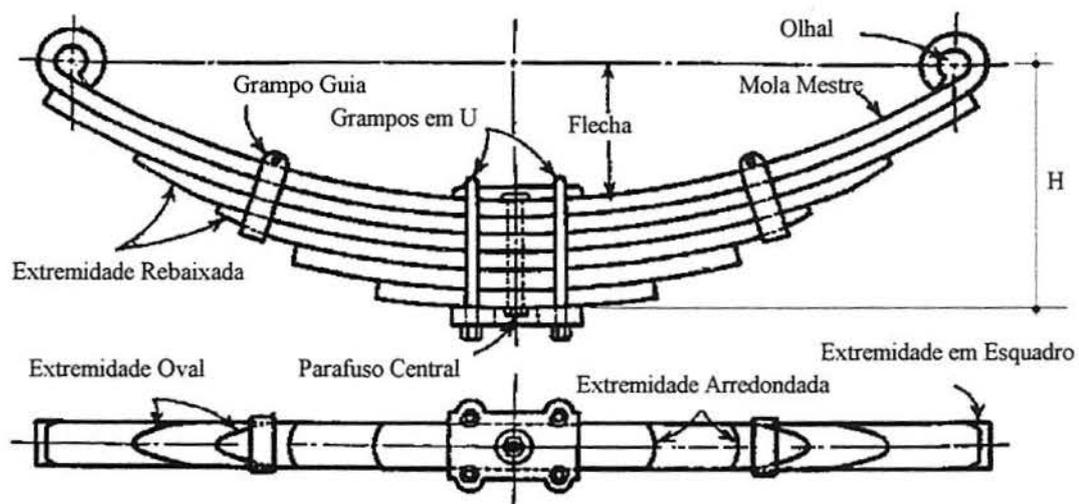


Figura (1.5) - Exemplo de mola de feixes.
(FAIRES - 1983).

As molas de feixe são formadas por um conjunto de lâminas de seção retangular de mesmo material, que podem ter espessura variável. Estas barras são presas por grampos de modo a trabalharem em conjunto. É mais comum ônibus urbanos adotarem molas de feixes por serem de menor custo, enquanto os ônibus rodoviários usam molas pneumáticas. As figuras (1.6) e (1.7) ilustram gráficos força x deflexão para este tipo de mola.

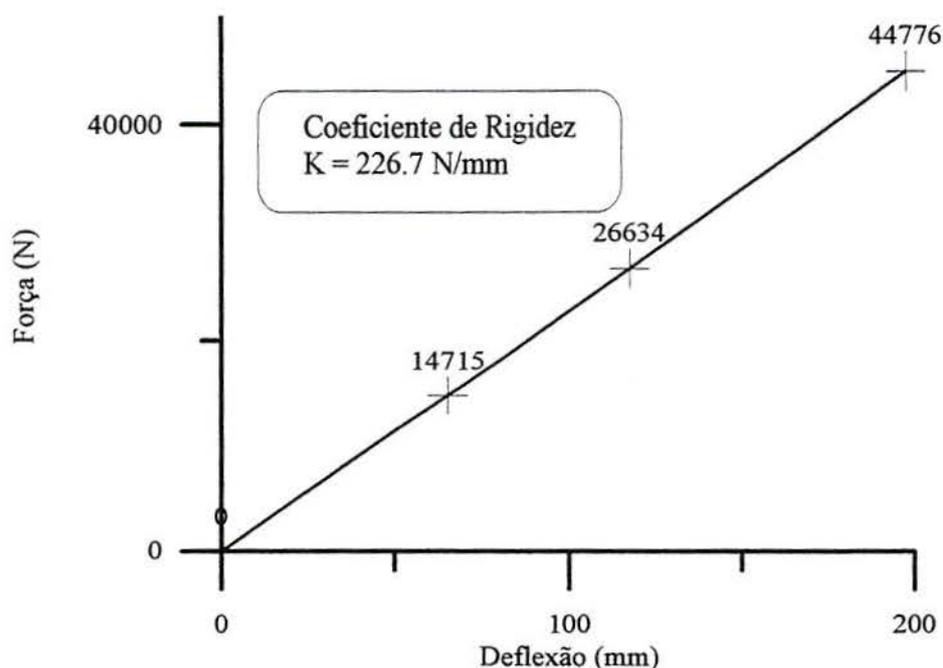


Figura (1.6) - Curva Força x Deflexão de um feixe de molas para suspensão dianteira. Distância entre olhais de 1900 mm e flecha de 125 mm (Cortesia MERCEDES-BENZ).

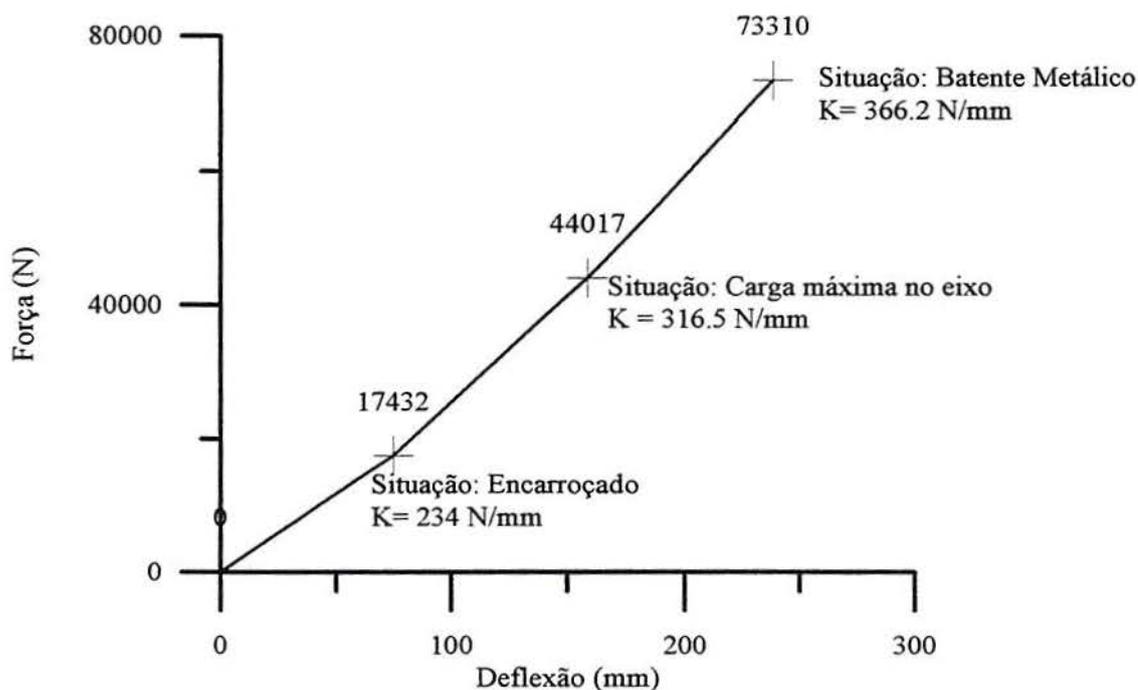


Figura (1.7) - Curva Força x Deflexão de um feixe de molas para suspensão traseira. Distância entre olhais de 1900 mm e flecha de 94 mm (Cortesia MERCEDES-BENZ).

Observa-se, pelos gráficos, que as molas de feixe têm comportamento linear ou linear por trechos. Neste último caso, deve-se estabelecer a zona de trabalho da mola e a sua respectiva rigidez. Caso não se disponha deste tipo de gráfico, estima-se a rigidez equivalente de uma mola de feixes através de fórmulas semi-empíricas encontradas na literatura (FAIRES - 1983).

As molas pneumáticas (câmaras de ar do tipo fole) são posicionadas na lateral externa das longarinas do chassi conforme ilustrado na figura (1.8).

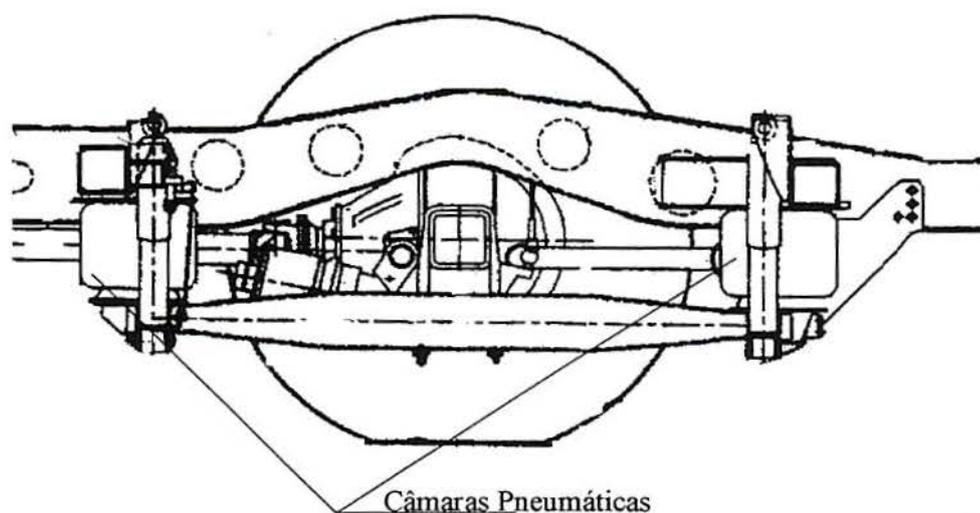


Figura (1.8) - Disposição das câmaras pneumáticas.
(Cortesia VOLVO).

Estas molas têm regulação automática de nível, o que implica na manutenção da altura do veículo através do aumento de pressão nas câmaras de ar. As figuras (1.9.a) e (1.9.b) ilustram esquemas de molas pneumáticas, nos quais se verifica a possibilidade de regulação de altura, para suspensão dianteira e traseira. Por este motivo, este tipo de suspensão é classificada como *suspensão adaptativa*. Por definição, sistemas adaptativos têm características que podem ser alteradas automaticamente em resposta às necessidades prevaletentes, as quais são percebidas pelo motorista ou através de mudanças das atividades suspensivas. As características particulares a serem adaptadas são normalmente disposições de amortecedor, rigidez das molas e altura do veículo. Tais sistemas são capazes de prover alguma melhoria no desempenho da suspensão com um modesto aumento no custo desta (BARBIERI - 1995). Na prática, este controle é feito pelo motorista através do acionamento de um comando no painel.

A rigidez destas molas é função da pressão interna no fole, do volume de ar no interior do fole e da altura de operação deste. Para efeitos teóricos considera-se que os foles trabalham com pressão interna constante. Esta hipótese pode ser tomada como verdadeira para um comportamento médio porque é bastante provável que ocorra variação de pressão, em curto tempo de duração, devido a grandes irregularidades tais como buracos ou lombadas. Neste caso, um compressor ou bomba deve entrar em ação para manter a pressão do fole

constante. Teoricamente não se pode prever o comportamento deste tipo de mola. Estes dados, que são do conhecimento do fabricante, somente podem ser obtidos por meio experimental.

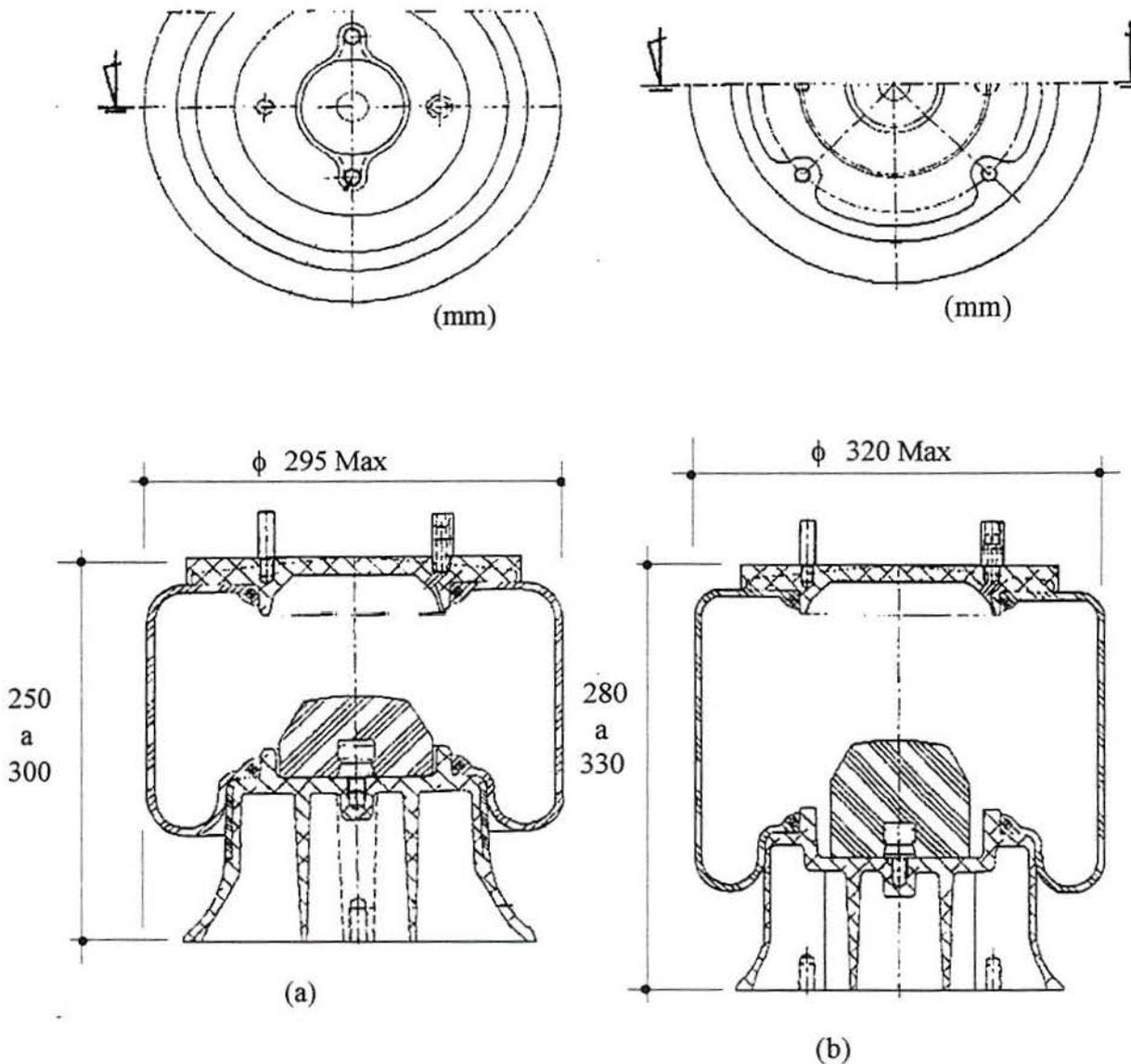


Figura (1.9) - Esquema de molas pneumáticas empregadas nas suspensões de ônibus.
(a) Suspensão dianteira. (b) suspensão traseira. Fabricação Firestone. (Cortesia Mercedes-Benz).

As figuras (1.10) e (1.11) ilustram as *curvas isobáricas de deflexão para molas pneumáticas*, que são utilizadas nas suspensões dianteiras e traseiras. Na parte inferior do gráfico tem-se uma escala de altura do fole em mm, na qual está indicada a faixa ideal de operação da mola bem como a altura recomendada desta. No lado esquerdo dos gráficos tem-se uma escala de volume em litros. No interior do gráfico tem-se representadas várias curvas isobáricas na

faixa de pressão entre 0,14 MPa (20 psi) e 0,84 MPa (120 psi). As tabelas (1.1) e (1.2) apresentam os valores obtidos das figuras (1.10) e (1.11). Para determinar o volume do fole com uma altura constante e pressão de 0,7 MPa (100 psi) usa-se a curva isobárica de deflexão, e para determinar a carga usa-se as curvas isobáricas normais.

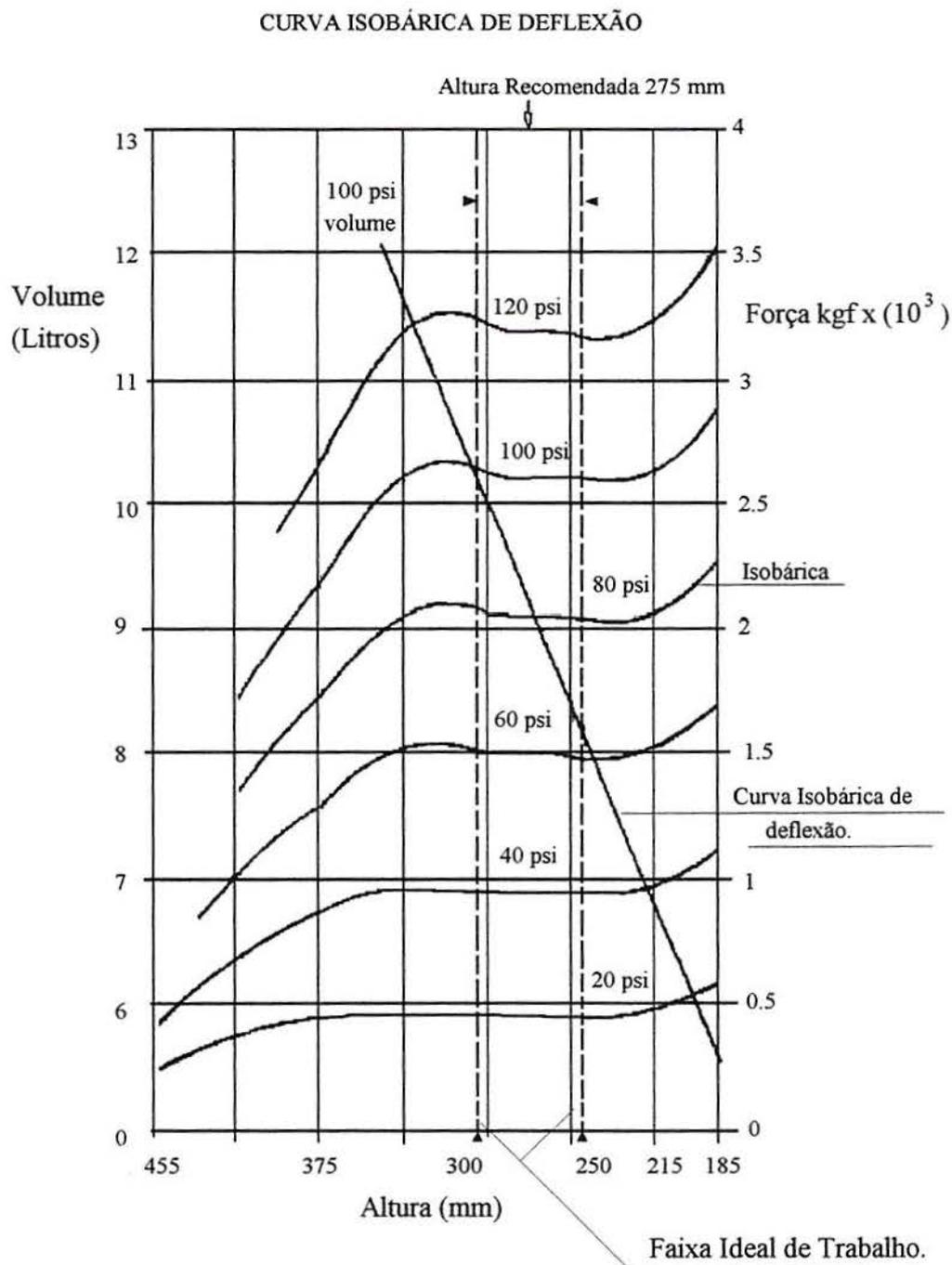


Figura (1.10) - Curva Isobárica de Deflexão para mola pneumática – suspensão dianteira.
Mola de Fabricação Firestone (Cortesia Mercedes-Benz).
Obs.: 1 psi = 0,007 MPa.

Tabela (1.1) - Características dinâmicas da mola da Figura (1.9.a).

Características dinâmicas a 275 mm, volume a 0,7 MPa = 12,36 litros			
Pressão (Mpa)	Carga (kN)	Kmola (kN/cm)	ω mola (Hz)
0,42	14,71	1,129	1,38
0,7	25,57	1,808	1,33

CURVA ISOBÁRICA DE DEFLEXÃO

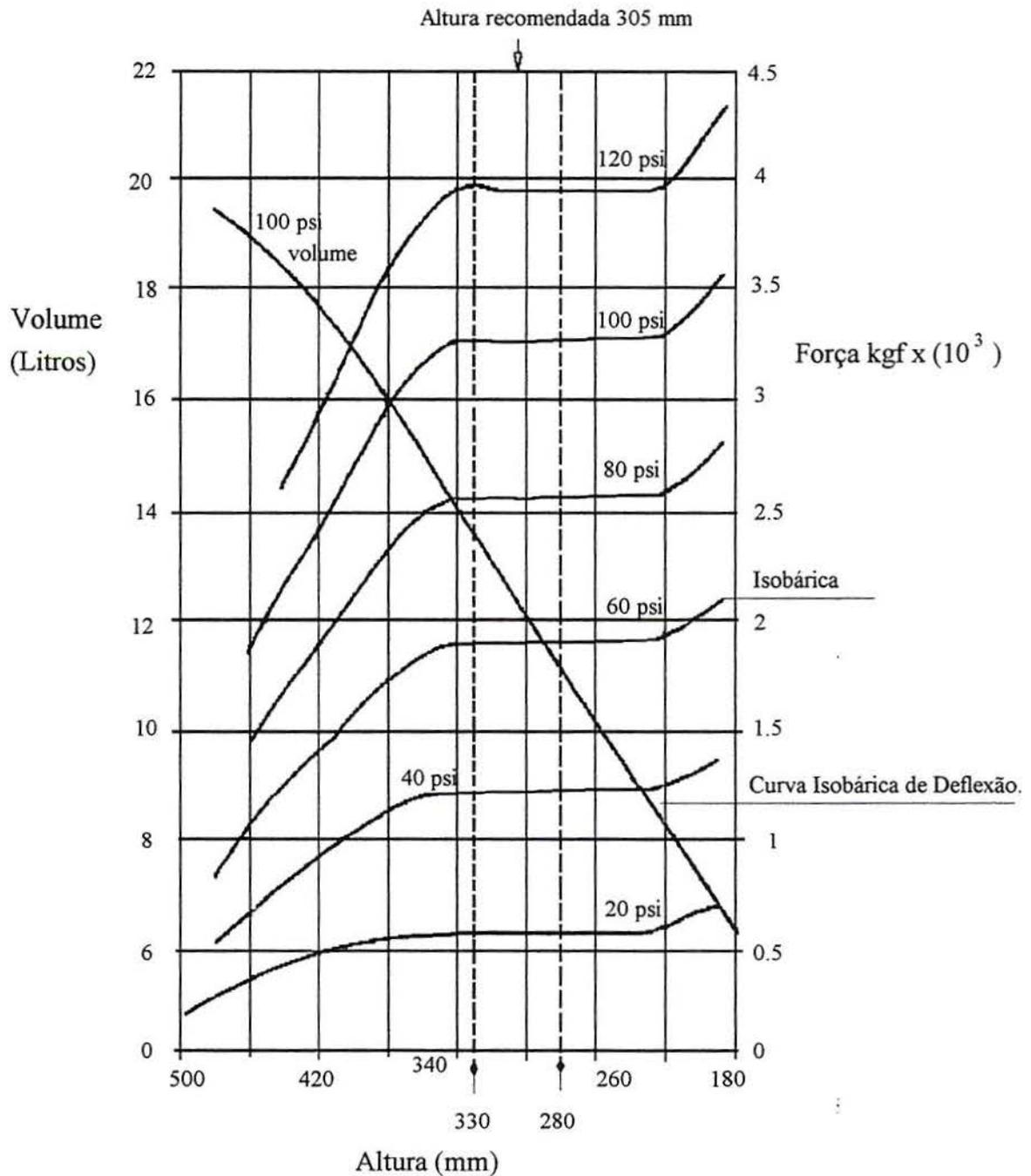


Figura (1.11) - Curva Isobárica de Deflexão para mola pneumática – suspensão traseira. Mola de fabricação Firestone. (Cortesia Mercedes-Benz).

Tabela (1.2) - Características dinâmicas da mola da Figura (1.9.b).

Características dinâmicas a 305 mm volume a 0,7 MPa = 12,36 litros			
Pressão (psi)	Carga (kN)	Kmola (kN/cm)	ω_{mola} (Hz)
0,42	18,57	1,202	1,27
0,7	32,09	1,913	1,22

As molas auxiliares, batentes de borracha, são normalmente empregadas na suspensão dianteira e somente entram em ação em condições excepcionais de carga. A figura (1.12) ilustra um esquema de um batente de borracha e o seu respectivo gráfico força x deflexão, no qual observa-se o comportamento não linear desta mola.

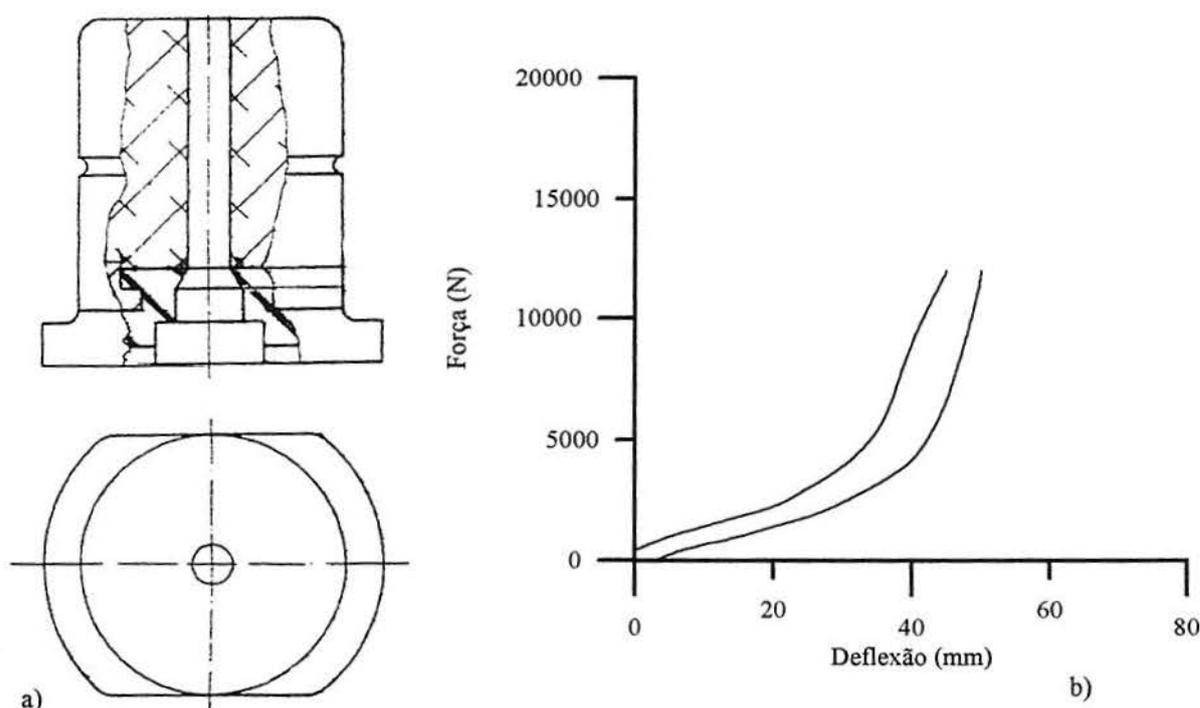


Figura (1.12) - Exemplo de um batente de borracha.

a) Esquema do batente de borracha.

b) Curva Força x Deflexão para mola auxiliar utilizada em suspensões dianteiras.

(Cortesia Mercedes-Benz).

Os amortecedores empregados nas suspensões devem controlar as vibrações do peso suspenso, carroceria e chassi, bem como as do peso não suspenso que é a própria suspensão. Aos amortecedores cabe a função de controlar as ações executadas pelas molas. Eles não devem impedir ou dificultar a compressão e extensão das molas, mas evitar que a estabilidade do veículo seja alterada pela repetição dos movimentos destas. Os amortecedores adotados em suspensões de ônibus são do tipo hidráulico ou bitubular, telescópicos e de duplo efeito. O adjetivo *duplo efeito* indica que o amortecedor trabalha tanto a extensão como a compressão.

Como regra geral os amortecedores fornecem maior resistência à extensão do que a compressão como está ilustrado na figura (1.13).

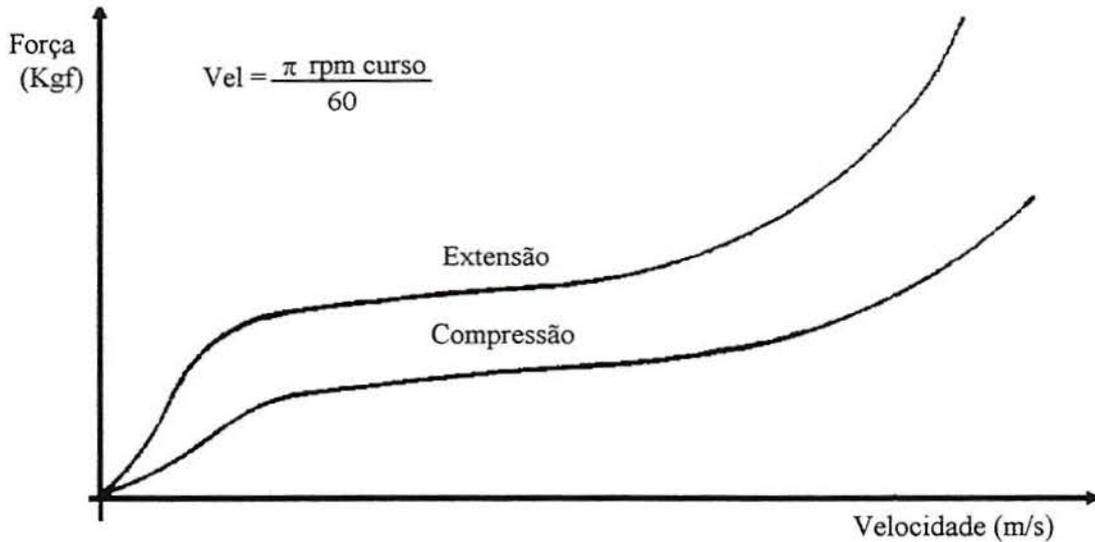


Figura (1.13) - Curvas força x velocidade para amortecedores submetidos a extensão e a compressão.
(Cortesia Cofap).

Estes amortecedores têm resistência variável de acordo com a velocidade do veículo e o tipo de estrada. Esta regulagem é feita de forma automática através de sistemas de passagem de óleo e de um conjunto de válvulas de ação progressiva. A figura (1.14) ilustra um gráfico qualitativo da variação da força exercida pelo amortecedor em função da velocidade. A curva resultante está representada com traço mais espesso neste mesmo gráfico.

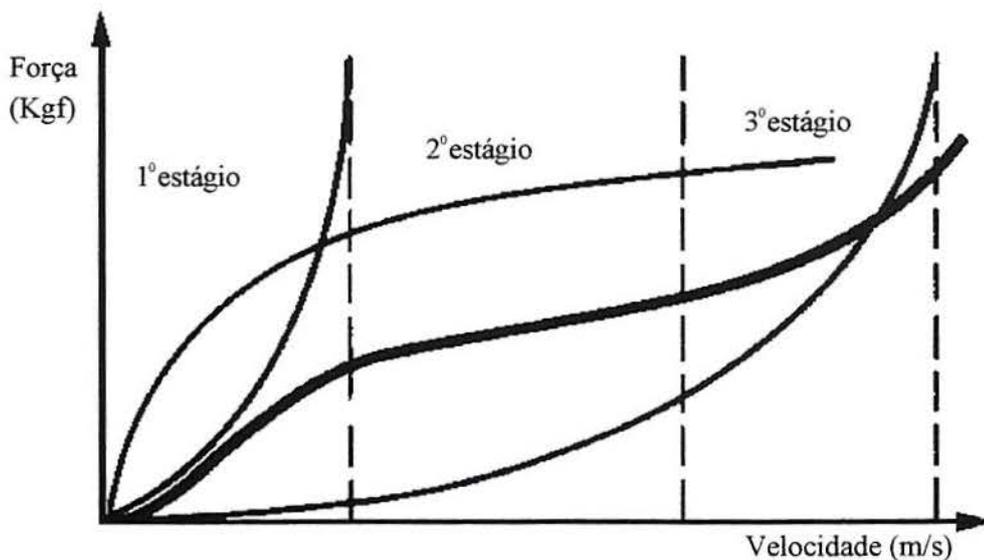


Figura (1.14) - Variação da força em função da velocidade.
(Cortesia Cofap).

Os amortecedores devem ser ensaiados com um dinamômetro conforme norma NBR 13308 (ABNT - 1995). O amortecedor é fixado no dinamômetro, pelo lado oposto à haste do êmbolo, ao mancal de acionamento, e pelo lado da haste do êmbolo, a um mecanismo que deflete proporcionalmente à força exercida pelo amortecedor. Este mecanismo é ligado ao visor digital que registra o valor da força conforme esquema da figura (1.15).

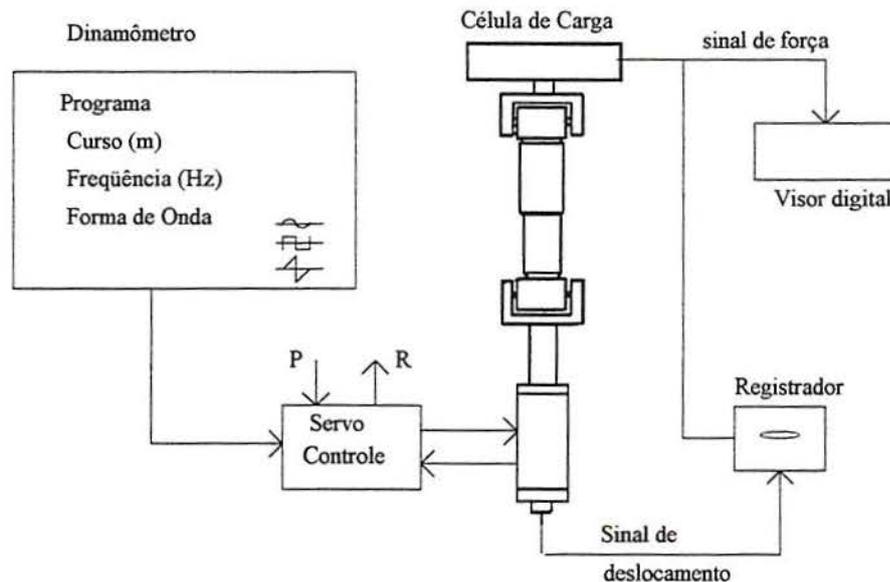


Figura (1.15) - Esquema do equipamento utilizado nos testes dos amortecedores.

As medições realizadas com o dinamômetro devem ser executadas para determinados valores do curso do amortecedor e de frequência do equipamento de teste. A norma estabelece que as medições devem ser feitas nos cursos de 10, 25, 50, 75 e 100 mm com uma rotação de 100 rpm. Não sendo possível executar as medições com estes parâmetros, pelas características do amortecedor ou do equipamento de ensaio, as medições devem ser realizadas para o curso de 100 mm com a rotação assumindo os valores 10 rpm, 25 rpm, 50 rpm, 75 rpm e 100 rpm.

O ensaio realizado no dinamômetro obtém como resultado curvas força x deslocamento, ver figura (1.16). Estas curvas são traçadas representando no eixo horizontal o deslocamento (curso do amortecedor em mm), e no eixo vertical a força correspondente em N. Os valores positivos do eixo vertical são as forças de extensão. Os pontos 1, 2, 3, 4 e 5 são os valores máximos ou picos de força para cada velocidade de acionamento. Os valores negativos são as forças de compressão cujos pontos de máximo estão representados em vermelho. Com estes valores máximos se estabelecem gráficos força x deslocamento como os ilustrados nas figuras (1.17) e (1.18). Nestes gráficos, os pontos de máximo são unidos entre si, de modo aproximado, por retas. Com este mesmo raciocínio se traçam gráficos força x

velocidade bastando para isto calcular as velocidades para os pontos máximos de acordo com a relação ilustrada na figura (1.13). Unindo-se estes pontos por retas determinam-se os valores da constante de amortecimento para cada trecho conforme ilustrado na figura (1.19). Entretanto, novamente vale ressaltar que estes diagramas são aproximados uma vez que a constante de amortecimento é função da velocidade ou seja o processo é não linear.

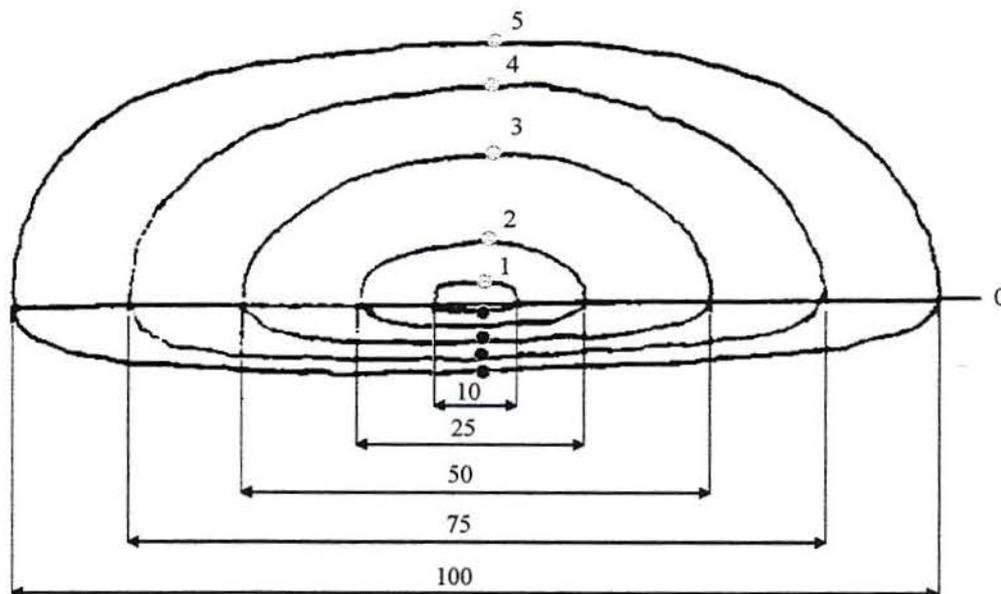


Figura (1.16) - Curvas força x deslocamento.
(Cortesia Cofap).

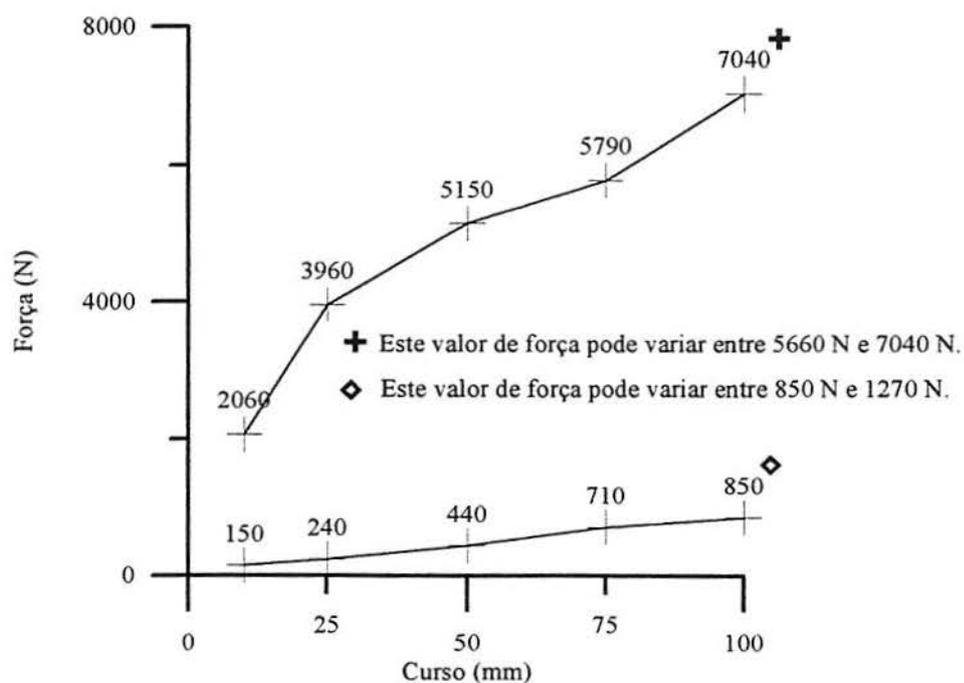


Figura (1.17) - Curva Força x Curso para amortecedor empregado em suspensão dianteira. O ensaio é realizado numa temperatura de 20°C, e com frequência de 100 rpm. (Cortesia Mercedes-Benz). A curva indicada pelo símbolo + representa a extensão do amortecedor e a outra a compressão.

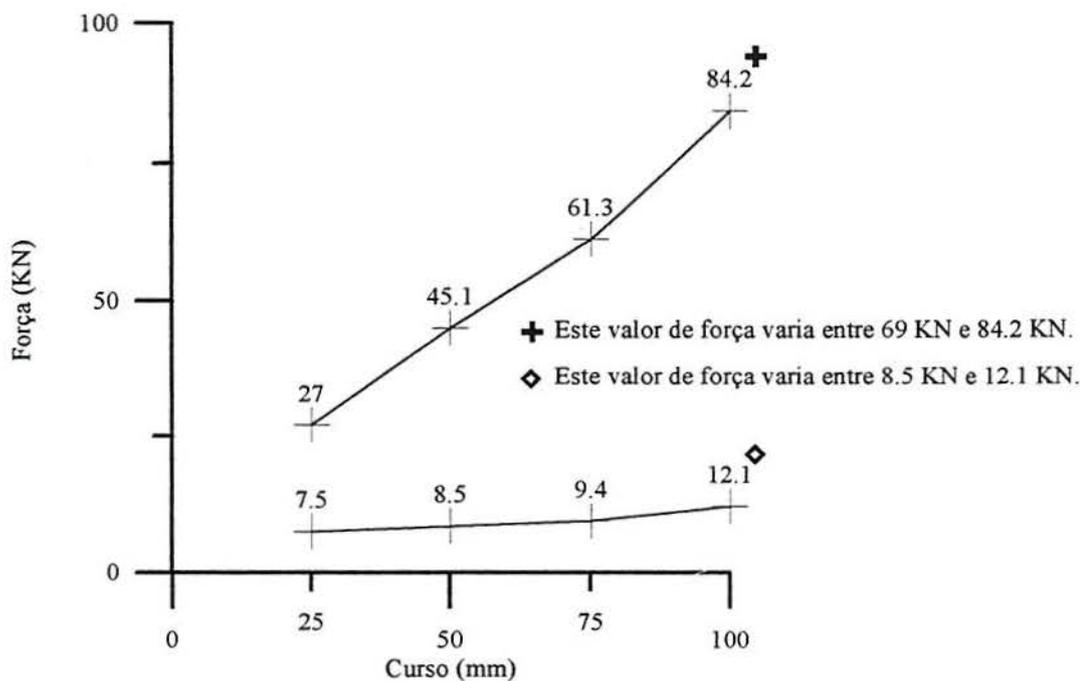


Figura (1.18) - Curva Força x Curso para amortecedor utilizado na suspensão traseira. O ensaio é realizado nas mesmas condições da figura (1.18). (Cortesia Mercedes-Benz). A curva indicada pelo símbolo + representa a extensão do amortecedor e a outra a compressão.

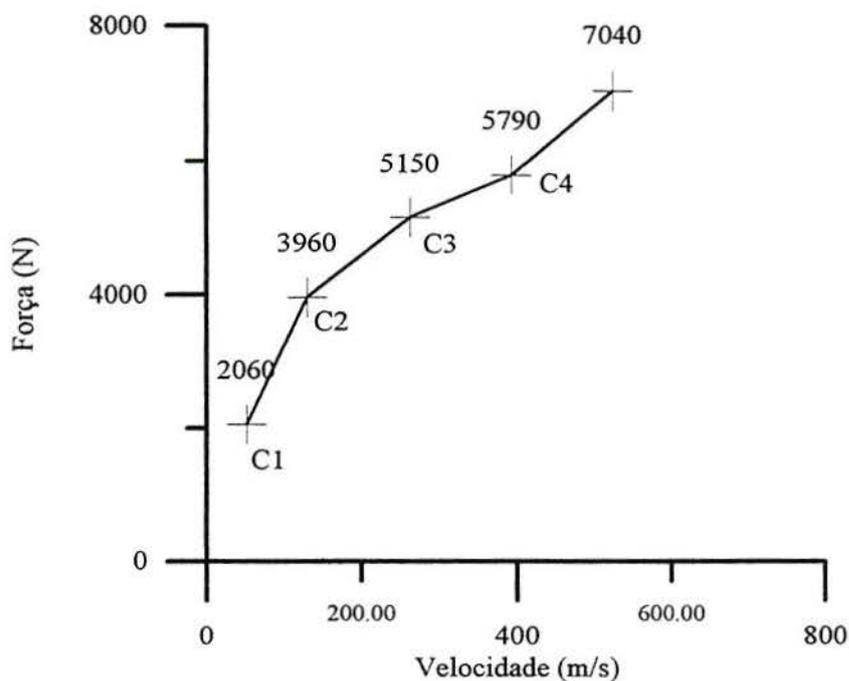


Figura (1.19) - Gráfico aproximado força x velocidade da curva de extensão da figura (1.18).

Além dos elementos apresentados anteriormente, a suspensão também é formada por barras de reação e barras estabilizadoras as quais têm a função de fazer com que cada conjunto da suspensão traseira ou dianteira trabalhe de forma unida.

O pneu também atua como parte integrante da suspensão. As suas funções essenciais são suportar o peso vertical, desenvolver forças longitudinais de aceleração e frenagem, desenvolver forças laterais de mudança de direção. Além disso, ele contribui no isolamento do veículo quanto a choques, provocados por buracos/sobresaltos, e também quanto a irregularidades que causam excitações em alta frequência. Entretanto o seu modelamento é uma tarefa difícil por se tratar de um sistema não linear. As características de mola e de amortecimento dos pneus são função da temperatura dos mesmos, da pressão interna e da área de contato com o solo. O modelamento mais comum é considerar o pneu como um elemento de mola, embora seja frequente incluir um amortecedor para considerar o pequeno amortecimento inerente a natureza viscoelástica do pneu (GILLESPIE – 1992).

1.6.2 Chassi

O chassi (quadro) de um ônibus é praticamente uma estrutura do tipo grelha. A figura (1.20) ilustra a vista superior de um chassi no qual as vigas longitudinais são chamadas de longarinas e as vigas transversais são chamadas de travessas.

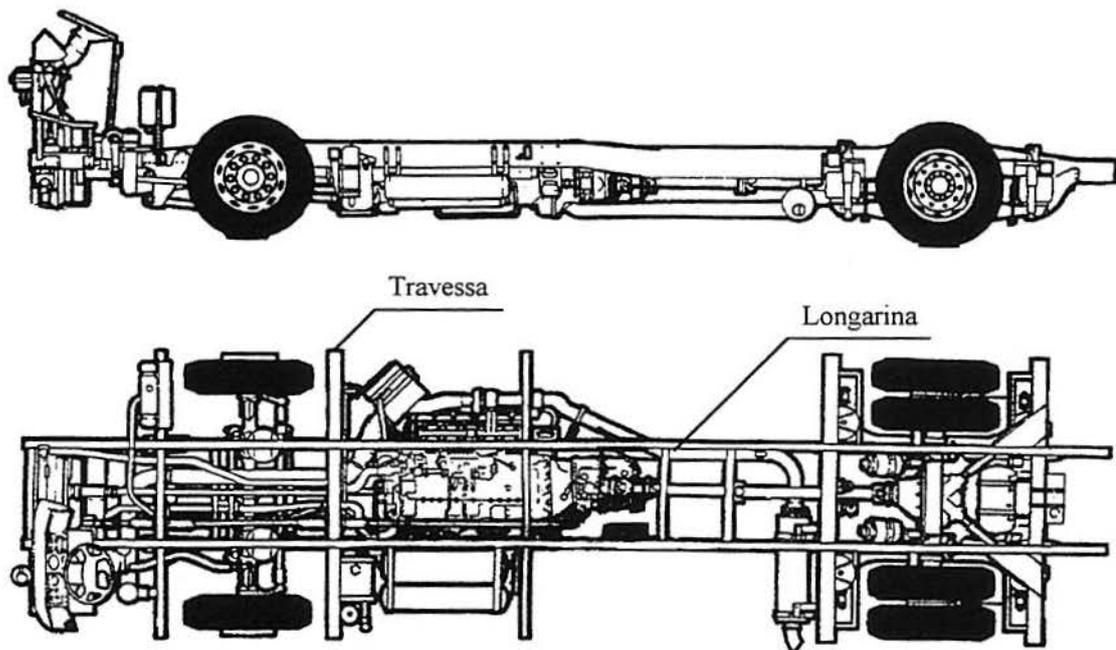


Figura (1.20) - Esquema de um chassi VOLVO com motor central.
(Cortesia MarcoPolo).

As longarinas são usualmente fabricadas utilizando-se uma seção transversal do tipo C ou I. Já as travessas utilizam normalmente uma seção transversal do tipo U ou caixão. As longarinas são normalmente prensadas e soldadas nas travessas. É comum o uso de chapas de reforço nas abas das regiões do eixo dianteiro, eixo traseiro e na fixação do motor. O chassi é

fabricado em aço como o St 44.2 N (DIN), LN 38 + Ti (ABNT). A função estrutural dele é suportar o peso de todos os componentes mecânicos; motor, caixa de mudanças, tanque de combustível; da carroceria e dos passageiros transmitindo o peso total para a suspensão. Além disso, ele aumenta a rigidez do veículo à torção e flexão.

1.6.3 Carroceria

A carroceria de um ônibus é uma estrutura do tipo pórtico construída com barras retas, barras curvas (chamadas por alguns autores de cavernas), chapas de revestimento e vidro. Esta estrutura é formada por um conjunto de quadros dispostos de modo conveniente conforme ilustrado na figura (1.21). A função estrutural dela é dar rigidez e forma ao veículo. A carroceria de um ônibus é tão rígida que ela irá absorver metade da carga de trabalho mesmo que seja montada num chassi projetado para absorver toda a carga. Alguns ônibus têm uma estrutura de barras integral que absorve toda a carga de trabalho. Outros projetos de ônibus urbano usam uma estrutura de barras tubular abaixo do piso, que divide a carga com a parte superior da carroceria, conforme figura (1.22). Para ônibus de turismo, esta estrutura abaixo do piso não possui elementos na diagonal de modo que seja possível acomodar a bagagem. Esta estrutura abaixo do piso é conectada na parte superior da carroceria através das barras laterais desta. Esta solução aumenta bastante a rigidez do veículo a flexão e torção. Outro projeto alternativo adota barras longitudinais e cruzadas estendidas nas paredes laterais, no lugar de uma estrutura de barras abaixo do piso (BEERMANN - 1989).

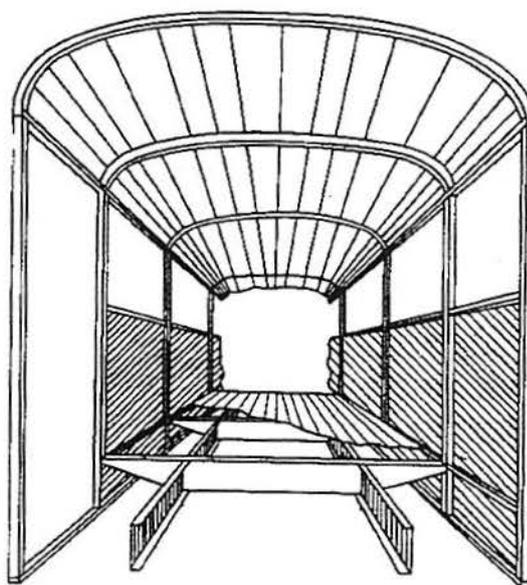


Figura (1.21) - Ilustração da carroceria de um ônibus.
(GASPAR - 1978)

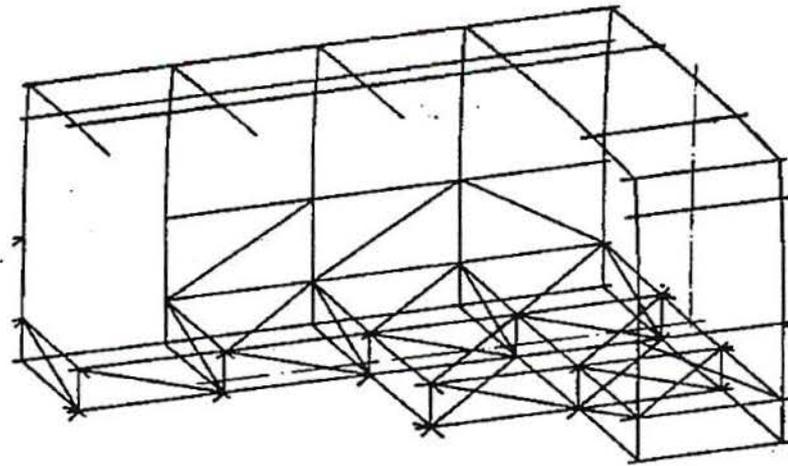


Figura (1.22) - Seção típica da estrutura de um ônibus.
(BEERMANN - 1989)

A figura (1.23) ilustra o modelo da estrutura completa de um ônibus, na qual pode-se observar a parte inferior e superior da carroceria. A parte superior da carroceria tem a função básica de dar a forma ao veículo e transmitir as cargas do revestimento deste para a parte inferior da carroceria e para o chassi. Entretanto, ela não contribui de forma significativa para a rigidez global do veículo. A figura (1.24) mostra uma vista lateral da estrutura no qual observa-se a parte superior da carroceria. Vale resaltar que o material mais utilizado nas carrocerias é o aço ASTM A36

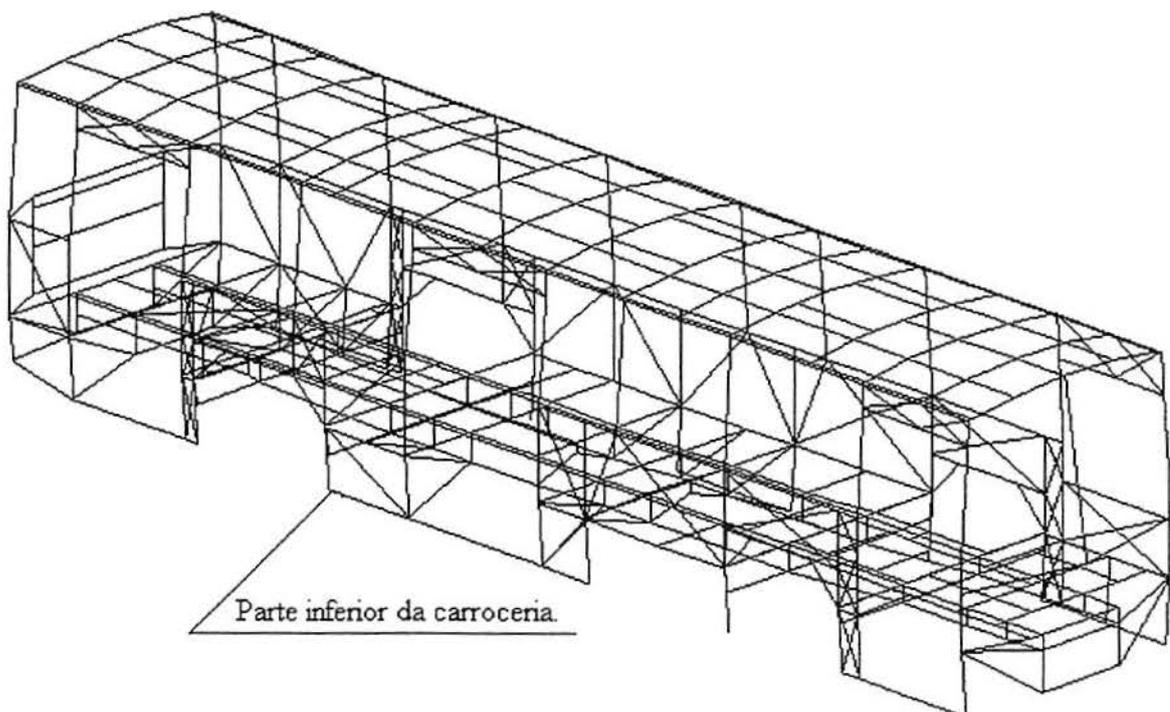


Figura (1.23) - Esquema completo da estrutura de um ônibus.
Ônibus MarcoPolo analisado em 1988. Malha empregada: 899 elementos de pórtico espacial e 449 nós.

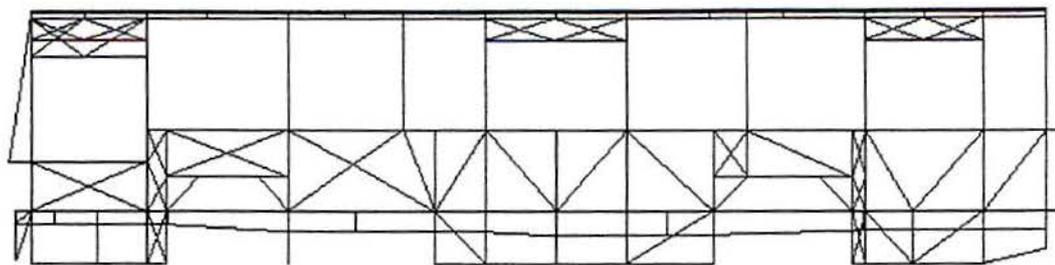


Figura (1.24) - Vista lateral da estrutura do ônibus.

A carroceria do veículo é revestida por chapas de alumínio e/ou fibra de vidro sendo todas de pequena espessura. Via de regra, usa-se alumínio para as laterais e fibra de vidro para o teto, frente e traseira do ônibus conforme figura (1.25). A fibra de vidro é utilizada nestas partes por facilitar o processo de fabricação e montagem. A forma como são fabricadas estas partes, a fibra é picoteada e aspergida de modo aleatório sobre a matriz, faz com que elas tenham uma resistência reduzida. Logo, considera-se que estas cumprem apenas função de fechamento da estrutura do veículo não devendo ser consideradas na análise estrutural.

Já as chapas laterais de alumínio podem contribuir para o aumento da rigidez de toda a estrutura. Para isto, o revestimento lateral deve ser ligado em todas as barras laterais do veículo, devendo também ser suficientemente pré-tensionados. Porém, normalmente estas especificações não são cumpridas de modo a permitir a consideração destas chapas na análise. Logo, via de regra, o revestimento lateral é considerado sem função estrutural.

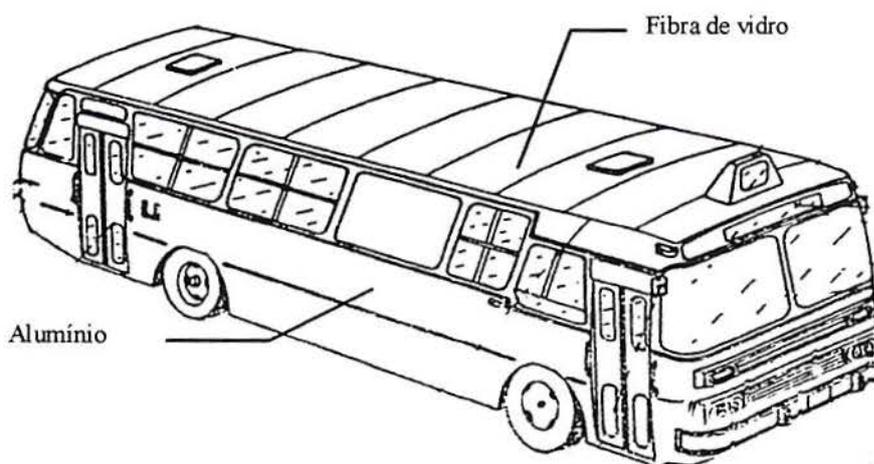


Figura (1.25) - Ilustração de um ônibus.

É usual adotar chapas de aço, próximas do rodado traseiro ou do dianteiro, para aumentar a rigidez das paredes laterais do veículo. Estas chapas devem ser consideradas na análise, mas se deve simplificar a sua geometria usualmente complexa.

A maioria dos ônibus têm uma área envidraçada bastante grande, que deve ser levada em conta na análise (anexo I). Nota-se que o vidro tem uma rigidez ao corte muito superior ao do quadro que forma a janela. Além disso, o vidro tem uma influência superior, nas barras da estrutura, se comparado com o revestimento metálico, desde que ele seja fixado por cola. Quando ele é fixado com as tradicionais tiras de borracha passa a existir alguma flexibilidade entre o vidro e o quadro da janela, mas o efeito de enrijecimento do quadro ainda é considerável (BEERMANN - 1989).

De um modo geral, os projetos de ônibus, até a década de 80, usavam um grande número de barras com seções transversais do tipo aberta (principalmente perfis do tipo C, U, Cartola, Caixa e Cantoneira). Estes perfis eram usados porque não se dispunha de conhecimento para realizar a pintura para se evitar uma corrosão prematura dos perfis tubulares. Nesta época, apenas as empresas multinacionais apresentavam veículos com perfis tubulares. A partir de 1989, a empresa MarcoPolo iniciou os seus testes com um protótipo de ônibus urbano e um rodoviário utilizando apenas perfis do tipo tubular para a carroceria. Os perfis com função não estrutural; suporte das luminárias, suporte das bagagens de mão; permanecem do tipo seção aberta. Esta é uma tendência mundial que também se generalizou nas empresas brasileiras. As vantagens desta alteração são bastante grandes. Com os perfis tubulares minimiza-se o efeito do empenamento restringido reduzindo assim o nível de tensões nas barras. Além disso, elimina-se a necessidade de dobrar-se chapa para obter-se os perfis uma vez que os perfis de seção tubular tem produção padronizada, sendo geralmente fabricados com costura. Para se controlar o problema da corrosão na região da ligação entre barras, que normalmente é soldada, é feita uma expansão de poliuretano no interior do tubo.

1.7 CARGAS DE PROJETO

O principal critério de projeto de uma estrutura de um ônibus é uma vida útil adequada sob condições de cargas dinâmicas aleatórias. Entretanto, os casos de cargas determinísticas não podem ser descartados. A lista a seguir apresenta os casos de cargas que devem ser considerados.

- a) Carga estática do veículo parado: Considera-se o veículo apoiado sobre todas as rodas com a sua capacidade máxima de carga;
- b) Carga de Frenagem e Carga de Aceleração: As cargas de frenagem e aceleração são determinadas pelas condições limites de aderência (frenagem máxima) e potência do motor;

- c) Carga de Aceleração Lateral: Esta carga está associada à mudança de direção do veículo, e é determinada a partir das forças que atuam nos pneus;
- d) Carga de Torção: Esta carga é obtida quando uma roda do eixo menos carregado está girando livre enquanto a outra sofre um solavanco, e as rodas do outro eixo estão numa superfície plana;
- e) Carga máxima no eixo dianteiro e traseiro: As cargas máximas nos eixos dianteiros e traseiros são balanceadas pelas forças de inércia. Isto contrasta com os fatores usualmente aplicados para o caso de carga estática especialmente para veículos contendo cargas concentradas tais como ônibus-guincho;
- f) Carga de Reboque: Tem pouca aplicação no caso de um ônibus;
- g) Cargas longitudinais assimétricas: Estas cargas são provocadas por diferentes forças de frenagem atuando nas rodas, situadas num mesmo eixo.

1.8 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O corpo do trabalho está dividido em três partes. A primeira parte, composta pelos capítulos 2 e 3, aborda a questão da análise dos perfis de seção aberta. O capítulo 2 apresenta o estudo do empenamento causado por torção. Propõe-se uma estratégia para redução do custo computacional quando se empregam elementos de casca poliédrica. O capítulo 3 apresenta os resultados obtidos para diversos exemplos analisando a influência do emprego de elementos com razão de aspecto maiores que as usuais na análise de problemas que envolvam torção. A segunda parte do trabalho, composta pelos capítulos 4, 5 e 6; estuda o efeito das cargas dinâmicas de excitação da base, na estrutura do veículo. No capítulo 4 propõe-se uma formulação para estudar o problema em questão através de uma análise espectral. No capítulo 5 propõe-se um procedimento para análise da estrutura à fadiga utilizando os resultados obtidos no capítulo anterior. No capítulo 6 é apresentada a implementação da formulação dos capítulos 4 e 5 num programa para análise espectral. A terceira parte, composta pelos capítulos 7, 8, 9 apresenta a análise de um ônibus simplificado. O capítulo 7 faz um resumo do modelamento do veículo. No capítulo 8 apresenta-se os resultados obtidos por uma análise estática do veículo. No capítulo 9 apresentam-se os resultados da análise de autovetores, da análise espectral e da análise de fadiga. O capítulo 10 apresenta as conclusões deste trabalho, bem como as sugestões para dar continuidade ao mesmo.

2. ESTUDO DO PROBLEMA DA TORÇÃO

Este estudo é um resumo do que resultou da busca de uma ferramenta capaz de analisar a estrutura de um ônibus levando em conta a torção. Esta solicitação foi considerada importante porque a informação que se tinha na época, 1993-1994, era de que os ônibus empregavam, na maior parte de suas barras, perfis de seção transversal do tipo aberta.

Devido às limitações dos elementos de barra especiais no tratamento de problemas tridimensionais, comentadas no capítulo 1, optou-se pelos elementos de casca poliédrica. Esta escolha levou a um problema complexo que é o modelamento da estrutura do ônibus. Para viabilizar esta alternativa, necessitava-se algum procedimento que reduzisse o custo computacional da análise e que facilitasse a geração da malha de elementos finitos.

Iniciou-se o estudo procurando um processo que permitisse reduzir o número de elementos necessários para a análise. Chegou-se a conclusão, como está apresentado a seguir, que a melhor escolha é o uso de elementos de casca com funções de interpolação especiais. Entretanto, após o término deste estudo verificou-se, graças às informações obtidas junto às indústrias fabricantes de ônibus, que os perfis de seção transversal aberta foram totalmente substituídos por perfis do tipo caixão ou seja com seção transversal fechada. Este processo, por exemplo, foi implementado na empresa MarcoPolo a partir do início dos anos 90 (na realidade, o veículo analisado em 1988 já utilizava, em algumas barras, seções do tipo caixão). Como estes perfis não apresentam praticamente empenamento, quando submetidos a torção, não se justifica mais o emprego de elementos de casca para modelar estas barras (anexo D). Neste caso, podem ser utilizadas barras de pórtico espacial do tipo convencional. Entretanto, o uso de elementos de casca ainda se faz necessário para modelar alguns tipos de chassi, e também para a representação de chapas de reforço estrutural, que são eventualmente empregadas. Logo, verificou-se não haver mais necessidade prática de desenvolvimento de ferramentas especiais para geração de malha visto que os recursos do sistema GAELI são suficientes para este tipo de problema.

Apesar do estudo realizado não ter mais uma aplicação considerável na análise estrutural de um ônibus, ele ainda permanece válido para outras aplicações práticas. Por este motivo, apresenta-se neste capítulo um resumo sucinto deste estudo que é complementado com o anexo B.

2.1 ESTRATÉGIA PARA REDUÇÃO DO USO DA MEMÓRIA

A solução proposta para reduzir o uso da memória/tempo de análise está baseada na redução do número de elementos do modelo. Nota-se que a grande maioria das barras usadas nas carrocerias e chassis são retas ou têm pequena curvatura. Além disso, o comprimento da barra usualmente é maior que as outras dimensões da seção transversal. Logo, elas podem ser modeladas sem problemas por elementos do tipo quadrilátero. Apenas um pequeno número de elementos pode apresentar distorções angulares nas ligações de barras inclinadas.

A relevância deste estudo fica clara tomando-se como exemplo a estrutura de um ônibus hipotético com 800 barras. Supondo que cada barra seja modelada com 100 elementos, seriam necessários 80.000 elementos para a análise da estrutura, o que levaria a um consumo de memória, disco e tempo de processamento considerável.

As alternativas estudadas, para se reduzir o número de elementos necessários, foram *funções de interpolação de alta ordem*, *método p* e *elementos finitos usuais com razão de aspecto elevada* (a expressão *razão de aspecto* representa a relação entre os lados do elemento, e neste texto ela pode ser encontrada abreviada como **r.a.**). Justifica-se um estudo tão abrangente devido a carência de material bibliográfico nesta área. As publicações relacionadas à aplicação de elementos finitos no estudo do empenamento são reduzidas e, via de regra, tratam de casos simples.

2.1.1 Elementos de Alta Ordem

O uso de elementos de casca com funções de interpolação de alta ordem foi investigada porque estes elementos suportam distorções mais elevadas sem afetar a qualidade do resultado obtido. O tipo de elemento a ser utilizado deve possuir um maior número de nós na direção do comprimento da barra. As funções de alta ordem empregadas podem ser do tipo *polinômios de Lagrange*, o que facilita a sua obtenção. Além disso, estes elementos devem estar baseados na *teoria de Mindlin* porque esta facilita o uso de funções de alta ordem.

Entretanto, o uso deste tipo de elemento exige modificações no pré-processador e pós-processador do GAELI de modo a permitir trabalhar com mais de oito nós por elemento. Uma solução para isto é eliminar todos os nós internos do elemento através de um processo de condensação estática. Porém, como o número de nós a ser condensado é elevado, este processo seria oneroso em tempo. Tem-se também o agravante da condensação estática não poder ser aplicada em problemas dinâmicos a não ser de modo aproximado. Por estas razões, abandonou-se esta alternativa como uma solução para o problema.

2.1.2 Método p

A consideração da utilização de elementos hierárquicos de alta ordem, *método p*, se deve a um artigo apresentado por WHEELER (1993), que comenta os bons resultados obtidos por estes elementos para razões de aspecto de até 40 (chegando em alguns até 200) e com ângulos internos entre 5° e 175° . O *método p* faz parte de um processo de refinamento da solução obtida usando uma série de polinômios hierárquicos (ZIENKIEWICZ et al. - 1983), (SZABÓ & BABUSKA - 1989). Em cada etapa de aproximação o grau do polinômio interpolador cresce de modo a reduzir o erro da malha em tensões. Logo, este método não cria novos nós e elementos como o *método h* que é empregado na maioria dos sistemas existentes.

O termo hierárquico indica que uma função de interpolação de ordem superior não elimina as de ordem inferior como ocorre com as funções de interpolação usuais. Logo, os resultados obtidos antes do refinamento não são perdidos, o que torna este método adequado para o uso de uma solução iterativa. Como o refinamento é feito sem o aumento do número de nós e elementos, o que cresce é o grau do polinômio interpolador, o número de elementos necessários para o modelamento de uma estrutura pode ser bastante reduzido principalmente se for utilizada a técnica "*blended linear interpolation*" para interpolação da geometria da estrutura. A grande dificuldade do *método p* está na definição das funções de interpolação a serem utilizadas (SZABÓ & SAHRMANN - 1988), (BABUSKA et al. - 1989).

O uso do *método p* para o tipo de problema em questão apresenta dificuldades. A estrutura de montagem das matrizes de rigidez e massa são distintas dos processos usuais. O algoritmo de solução estática e dinâmica do sistema GAELI, que é do tipo solução direta, deve ser alterado para se obter uma real vantagem do método. Logo, perde-se a compatibilidade com este sistema, o que descarta esta solução.

2.1.3 Elementos com Razão de Aspecto Elevada

Estudou-se a influência do aumento da razão de aspecto em problemas que envolvam empenamento. O objetivo deste estudo foi obter um valor máximo para a *r.a.*, que usado nos elementos, não cause alterações significativas nos resultados obtidos, e que permita uma redução no número de nós da malha. A vantagem desta alternativa é que ela utiliza elementos finitos usuais, que não necessitam de modificações na estrutura do GAELI.

De modo geral, a bibliografia clássica de elementos finitos recomenda que a *r.a.* de um elemento seja igual a 1 podendo, no entanto, variar até 2. Porém, em problemas com condições especiais, elementos com formulação convencional podem assumir valores para

r.a. da ordem de 8 a 10. Este comportamento é verificado, por exemplo, quando se modela uma chapa submetida a tração com elementos de *estado plano de tensões* de 8 nós. Logo, este trabalho vai estudar a influência da razão de aspecto dos elementos apenas em problemas característicos. Não se pretende aqui obter conclusões que possam ser aplicadas de modo geral a um problema qualquer, pois para estes casos as recomendações usuais devem ser consideradas.

Neste trabalho, empregaram-se elementos de casca poliédrica clássicos baseados na teoria de Kirchhoff ou na teoria de Mindlin, alguns destes disponíveis no sistema GAELI, em conjunto com outros elementos implementados. Realizou-se uma série de testes considerável, como pode ser verificado no capítulo 3 e em MORSCH (1997b), de modo a ser possível estabelecer-se algumas conclusões a respeito desta alternativa. Na seqüência deste capítulo é apresentado um resumo da teoria necessária para compreender o funcionamento dos elementos implementados.

2.2 ELEMENTOS DE CASCA POLIÉDRICA

Os elementos de casca poliédrica são obtidos pela combinação de um elemento de *estado plano de tensões* (EPT), também chamado elemento de membrana; com um de *placa* conforme ilustrado na figura (2.1). Estes elementos têm um bom desempenho, mas apresentam deficiências no caso de uniões de elementos coplanares e na interpretação dos resultados em estruturas complexas.

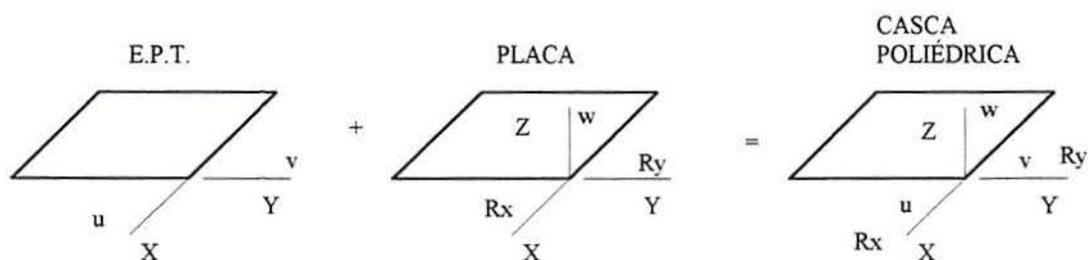


Figura (2.1) - Procedimento para obtenção de um elemento de casca poliédrica.

Nestes elementos, o problema de EPT é descrito pelos deslocamentos u e v , e o problema de placa é descrito pelo deslocamento w e pelas rotações R_x e R_y . A minimização da energia potencial total, para cada um dos problemas, leva a matriz de rigidez do elemento, e permite obter as forças nodais devido aos deslocamentos. Os dois problemas são tratados de modo independente já que os deslocamentos prescritos pelas forças no plano não afetam as deformações de flexão e vice-versa (ZIENKIEWICZ & TAYLOR – 1991a).

2.3 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA O ELEMENTO DE MEMBRANA

As funções de interpolação correspondentes ao problema de membrana são as conhecidas *funções bilineares* para o elemento de 4 nós, e as *funções Serendipity quadráticas* para o elemento de 8 nós (anexo **B**). Estas funções são escritas em termos das variáveis ξ e η , que definem o sistema de coordenadas normalizadas local do elemento, figura (2.2). Este elemento tem todos os seus lados iguais a 1, e a origem do seu sistema de referência está localizado no centróide dele. O uso das funções de interpolação aqui definidas para a obtenção da matriz **B** e da matriz de rigidez **K** segue o procedimento padrão para elementos do tipo isoparamétrico (ZIENKIEWICZ & TAYLOR - 1991b).

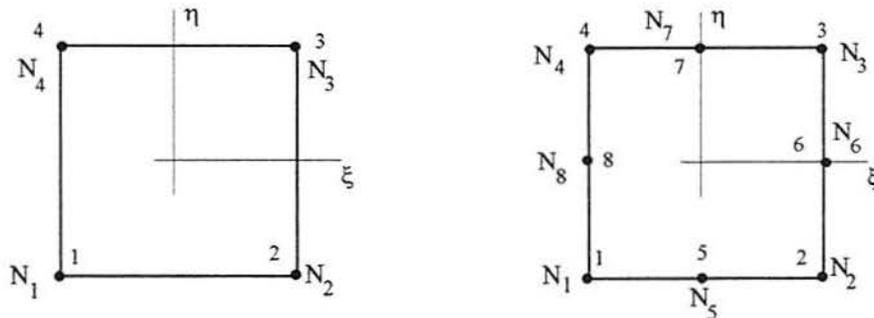


Figura (2.2) - Sistema de coordenadas locais do elemento.

Indicou-se na figura a numeração dos nós e a correspondência entre estes e as funções de interpolação.

2.4 ELEMENTOS DE PLACAS

As funções de interpolação utilizadas para representar a flexão de placas, na sua maioria, devem satisfazer os requisitos da *teoria de Kirchhoff* ou os da *teoria de Mindlin*. No anexo **B** encontra-se um resumo destas teorias, no qual se enfatiza o aspecto da facilidade de implementação de novos elementos. Apresenta-se agora um resumo das características básicas dos elementos estudados, entre as quais as funções de interpolação empregadas. Quase a totalidade destes elementos são do tipo Mindlin porque a necessidade de se cumprir apenas a continuidade C_0 nos deslocamentos e rotações de modo independente permite que sejam utilizados um grande número de possibilidades de esquemas de interpolação.

2.4.1 DKQ (*Discrete Kirchhoff Quadrilateral*)

O elemento DKQ, (BATOZ & TAHAR - 1982), é um quadrilátero com 4 nós, baseado na teoria de Kirchhoff. Ele é considerado por alguns autores como o melhor do gênero que já foi implementado (KATALI - 1993). A sua formulação está baseada na discretização da

energia de deformação desprezando-se o efeito do corte. Os deslocamentos w são definidos, através de função cúbica, apenas nos lados do elemento. Os deslocamentos angulares são interpolados por polinômios quadráticos. Com estas considerações a convergência para a teoria de placas finas é obtida para qualquer razão de aspecto e espessura. Segundo o autor, para um esquema de integração numérica com 2x2 pontos de Gauss verifica-se que o elemento apresenta apenas 3 modos de energia nula para os casos de elementos retangulares, elementos distorcidos e elementos com razão de lado e espessura variando de 50 a 10^6 .

O DKQ é um dos elementos padrões do sistema GAELI, no qual foi implementado com um processo aproximado de cálculo de cortante, que não consta no artigo original dele. A matriz de rigidez dele é integrada de modo exato com 3 x 3 pontos de Gauss. O elemento resultante apresenta bons resultados sendo praticamente insensível a distorções. O elemento de casca equivalente é obtido combinando-se o DKQ com o elemento de EPT de 4 nós.

2.4.2 Serendipity Quadrático - MINDLIN

Elemento quadrilátero com 8 nós que aplica as funções de interpolação Serendipity quadráticas, (HINTON - 1984), (ZIENKIEWICZ & TAYLOR - 1991b), e é indicado neste texto como SQ (Serendipity Quadrático). O SQ é um elemento padrão do GAELI. A sua matriz de rigidez é obtida por integração seletiva: 3x3 pontos de Gauss para os termos de flexão, e 2x2 pontos de Gauss para os de corte. O cortante é obtido nos pontos de integração considerando-se estes valores como os dos nós. O elemento resultante não apresenta modos espúrios de energia nula e tem um bom comportamento quanto a distorções. O elemento de casca equivalente é obtido combinando-se o SQ com o elemento de EPT quadrático.

2.4.3 Lagrange Quadrático - Mindlin

Elemento quadrilátero de nove nós, figura (2.3), que utiliza as funções de interpolação de Lagrange (anexo B). Ele é indicado ao longo do texto como LQ (Lagrange Quadrático).

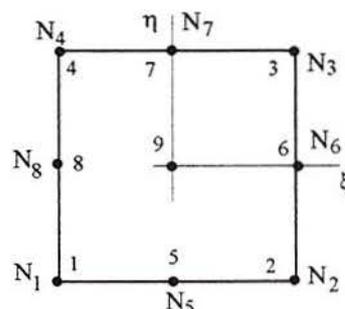


Figura (2.3) - Representação do elemento Lagrangiano Quadrático.

Indicou-se na figura a numeração dos nós e a correspondência entre estes e as funções de interpolação.

Devido à falta de compatibilidade com a entrada de dados do GAELI, deve-se eliminar o nó central deste elemento através de um processo de condensação estática, (BATHE – 1982), o que é possível por que ele não possui nenhuma ligação com outros elementos. A expressão (2.1) resume a idéia desta operação, na qual os termos entre parênteses são a rigidez e a carga equivalente (nesta expressão representa-se a condensação do grau de liberdade \mathbf{u}_c).

$$\left(\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{K}_{cb}\right)\mathbf{u}_b = \left(\mathbf{f}_b - \mathbf{K}_{bc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{f}_c\right) \quad (2.1)$$

Embora o processo de condensação não apresente problemas, do ponto de vista da análise estática linear, o mesmo não ocorre quando são consideradas cargas dinâmicas. A justificativa para esta afirmação; segundo alguns autores (MACNEAL & HARDER - 1992); é que no caso dinâmico o nó passa a ter significado físico. Isto é confirmado realizando-se um processo de condensação na equação de equilíbrio dinâmica conforme equações (2.2) a (2.4).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bc} \\ \mathbf{M}_{cb} & \mathbf{M}_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_b \\ \ddot{\mathbf{u}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{K}_{cc}^{-1}(\mathbf{f}_c - \mathbf{M}_{cb}\ddot{\mathbf{u}}_b - \mathbf{M}_{cc}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_{cb}\mathbf{u}_b) \quad (2.3)$$

$$\left(\mathbf{M}_{bb} - \mathbf{K}_{bc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{M}_{cb}\right)\ddot{\mathbf{u}}_b + \left(\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{K}_{cb}\right)\mathbf{u}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{M}_{bc}\ddot{\mathbf{u}}_c - \mathbf{K}_{bc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}[\mathbf{f}_c + \mathbf{M}_{cc}\ddot{\mathbf{u}}_c] \quad (2.4)$$

Nota-se que a condensação não eliminou a aceleração dos graus de liberdade condensados $\ddot{\mathbf{u}}_c$, o que somente pode ser feito de modo aproximado.

A matriz do rigidez do elemento LQ implementado é calculada com uma integração seletiva igual ao do SQ. Com isto, o LQ tem apenas um modo de energia nula que pode ser eliminado com uma a integração completa. Porém, neste caso, o elemento deve ser utilizado apenas na análise de placas espessas. O elemento de casca equivalente é obtido combinando-se o LQ com um elemento de EPT que use as mesmas funções de interpolação.

2.4.4 Serendipity com 1 e 2 Níveis de Funções Bolha

Os estudos realizados sobre o *método p* demonstraram que os elementos de ordem superior associados a uma integração correta e uma boa representação da geometria têm um rendimento excelente. Uma função com uso crescente na melhoria da qualidade das funções de interpolação é a bolha (SZABÓ & SAHRMANN - 1988). PINSKY & JASTI (1989) obteve

bons resultados usando funções bolha para melhorar o comportamento de seu elemento. Estas funções tem como característica se anularem em todos os lados do elemento, tendo valores não nulos apenas no seu interior (BABUSKA et al. - 1989).

Nesta linha de trabalho, desenvolveu-se um elemento que combina as funções de interpolação do SQ com os dois primeiros níveis de funções bolha apresentadas em (2.5).

$$\begin{aligned} N_9 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \\ N_{10} &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)\xi \\ N_{11} &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)\eta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Estas funções foram introduzidas no elemento SQ através do processo de adição de modos incompatíveis (ZIENKIEWICZ & TAYLOR - 1991a), (BATHE - 1982). A expressão (2.6) ilustra como é feita a aplicação das funções para um grau de liberdade.

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i + \sum_{i=1}^3 N_{8+i} \alpha_i \quad (2.6)$$

Nesta expressão, α_i são as componentes dos deslocamentos, que não são associadas com pontos nodais (elas podem ser associadas a nós internos). Estas componentes são eliminadas por condensação estática. A matriz de rigidez do elemento é calculada com um esquema de integração com 3x3 pontos de Gauss, e o vetor de cargas é calculado usando-se apenas as funções Serendipity padrão. As funções bolha são aplicadas na formulação de EPT e placa. O elemento resultante deste processo equivale a um de 11 nós, e é referenciado no texto como SM2b (Serendipity Modificado - 2 níveis de funções bolha).

Desenvolveu também um elemento semelhante ao SM2b, que usa apenas o primeiro nível de função bolha ou seja a função N_9 apresentada em (2.5). O restante do processo de implementação é idêntico ao do elemento anterior. O elemento resultante é indicado no texto como SM1b (Serendipity Modificado - 1 nível de função bolha).

2.5 PROCEDIMENTO DE TRABALHO

Uma vez estabelecidos os elementos a serem adotados, seguiu-se o processo padrão para implementação de novos elementos no sistema GAELI (MORSCH – 1997a). Após a implementação destes, exaustivos testes foram realizados para se verificar o comportamento dos elementos no estudo do problema do empenamento. Estes testes estão apresentados no capítulo 3 e em MORSCH (1997b).

3. USO DE ELEMENTOS DE CASCA POLIÉDRICA COM RAZÃO DE ASPECTO ELEVADA NO ESTUDO DE PERFIS ABERTOS SUJEITOS A TORÇÃO

Os testes ilustrados neste capítulo fornecem um conjunto de dados razoáveis para descrever a influência do aumento da razão de aspecto em problemas que envolvam empenamento por torção de perfis de seção transversal aberta (MORSCH & GROEHS - 1996). Estes exemplos não são encontrados na bibliografia, logo os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas ou com soluções obtidas com malhas mais refinadas. Estes testes estão divididos em dois grupos de acordo com os objetivos de cada um deles. Em alguns exemplos apresentados a seguir são utilizadas figuras ilustrando a distribuição de tensões em toda a estrutura. Caso a estrutura ilustrada contenha mais de um plano geométrico, esta representação torna-se apenas qualitativa já que o cálculo de tensões médias nos nós entre elementos, que pertencem a planos distintos, introduz erro na representação das tensões conforme exemplificado na figura (3.1). A solução deste problema é fazer o cálculo das tensões médias nos nós por planos ou seja seleciona-se todos os elementos que são paralelos a um certo plano geométrico e executa-se o cálculo das tensões apenas para estes elementos. Este processo pode ser feito de modo semi-automático através do pós-processador do GAELI ou de modo automático calculando-se as tensões médias nos nós por um processo de suavização de tensões por planos (AYMONE - 1996).

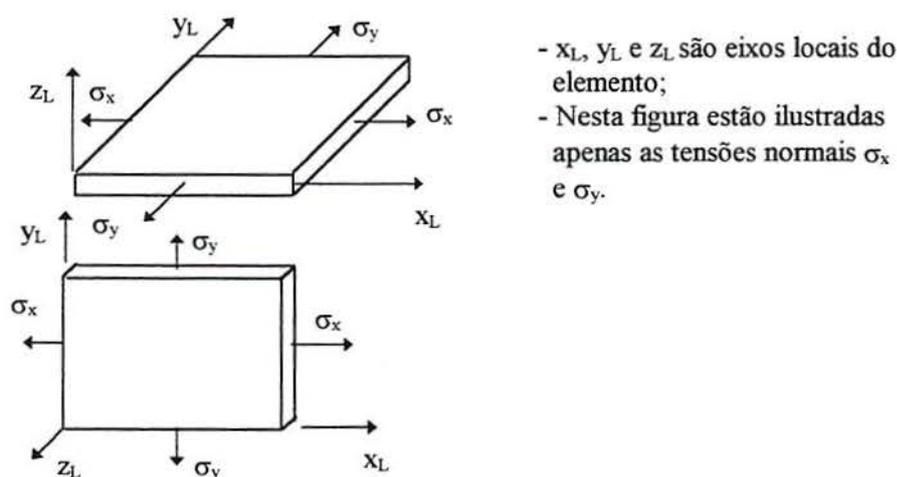


Figura (3.1) - Exemplo de erro no cálculo das tensões médias nos nós de elementos que pertencem a distintos planos geométricos.

Neste exemplo a tensão σ_y do elemento vertical é erroneamente somada com a tensão σ_y do elemento horizontal quando se calculam as tensões médias nos nós.

3.1 EXEMPLO COM EMPENAMENTO RESTRINGIDO

O exemplo deste item considera uma viga I engastada submetida a um carregamento que causa torção. Em MORSCH (1997b) encontram-se o mesmo tipo de caso analisado em perfis C, cantoneira e Z. As soluções numéricas obtidas são comparadas com as respectivas soluções analíticas, cuja fórmula geral está apresentada no anexo A.

3.1.1 Perfil I

Considera-se a viga ilustrada na figura (3.2.a) sujeita a um binário conforme figura (3.2.b). O material da viga é aço com módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^5$ MPa e $\nu = 0,3$. A seção transversal tem área de 6076 mm^2 , momento de inércia de $2,617 \times 10^6 \text{ mm}^4$, constante C (anexo A) igual a $2,602 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$, constante de empenamento $\Gamma = 5,445 \times 10^8 \text{ mm}^6$ e constante de torção $J_T = 9166,67 \text{ mm}^4$.

A figura (3.2.c) mostra a distribuição da tensão σ_x correspondente à solução analítica, na seção do engaste. Esta distribuição é válida para todas as seções transversais da viga. Os pontos médios das abas e da alma estão sujeitos a uma tensão de corte $\tau = 57,4$ MPa, constante ao longo da viga, devido ao momento torçor da solução de St. Venant.

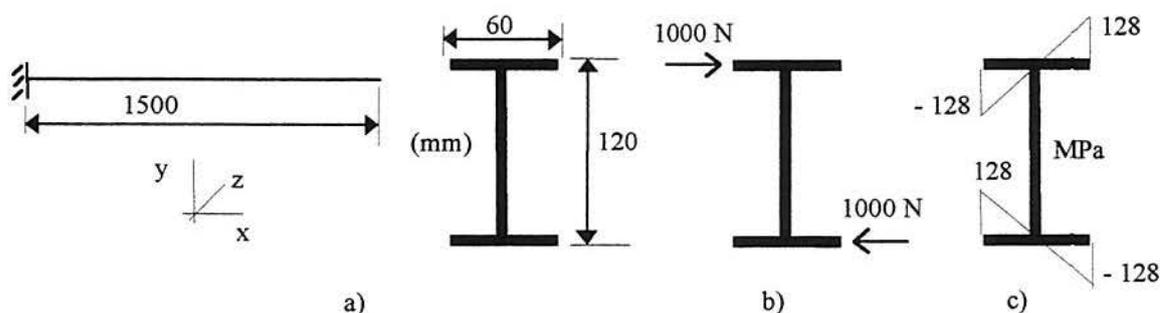


Figura (3.2) – Viga I submetida a torção.

a) Características da viga.

b) Viga I submetida a um momento torçor.

c) Distribuição da tensão σ_{xw} (MPa) no engaste.

Neste problema foram utilizadas as malhas ilustradas nas figuras (3.3), (3.4) e (3.5) que modelam a altura da alma do perfil com três, dois e um elemento respectivamente. Nestas figuras, NE é o número de elementos, NN é o número de nós, r.a.f. é a razão de aspecto dos elementos usados para modelar o flange (mesa) do perfil e r.a.a. é a razão de aspecto dos elementos usados para modelar o alma do perfil. É importante salientar que o DKQ não apresentou bons resultados devido à formulação do elemento de EPT que é linear. Logo, os resultados a seguir analisados consideram apenas elementos de 8 nós.

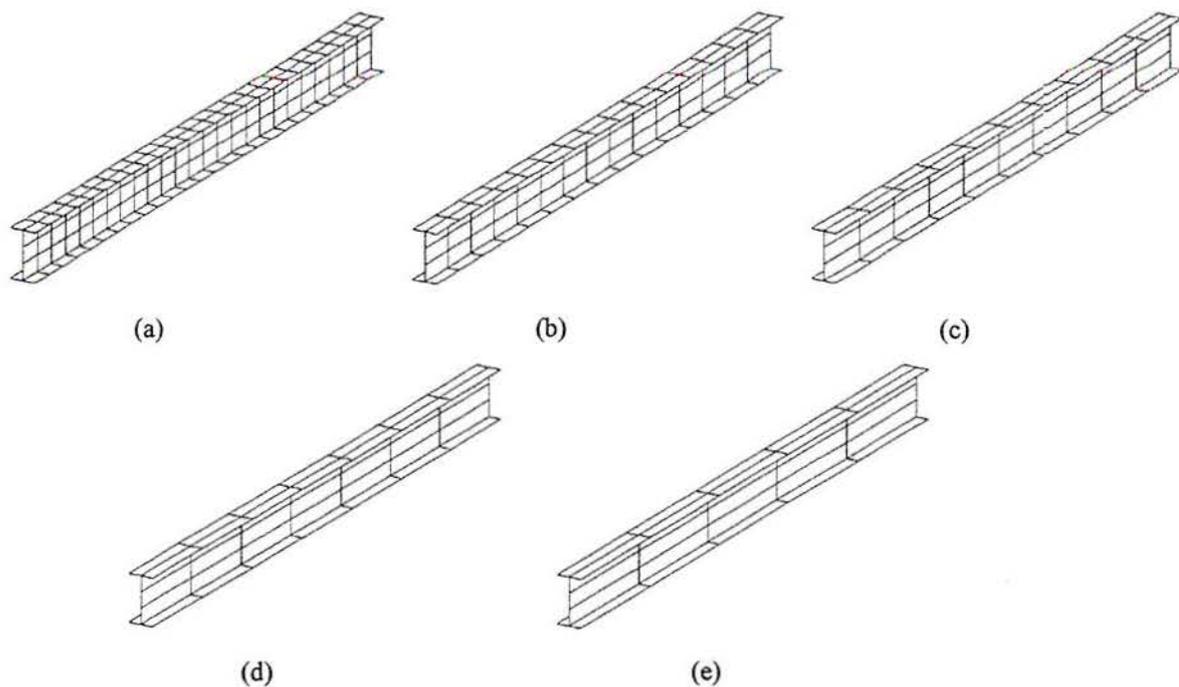


Figura (3.3) - Malhas utilizadas com 3 elementos representando a altura da alma.

- (a) Malha I8A: $NE = 175$, $r.a.f. = 2$, $r.a.a. = 1.6$.
- (b) Malha I8B: $NE = 105$, $r.a.f. = 3.3$, $r.a.a. = 2.7$.
- (c) Malha I8C: $NE = 70$, $r.a.f. = 5$, $r.a.a. = 4.1$.
- (d) Malha I8D: $NE = 49$, $r.a.f. = 7.1$, $r.a.a. = 4.8$.
- (e) Malha I8E: $NE = 35$, $r.a.f. = 10$, $r.a.a. = 8.1$.

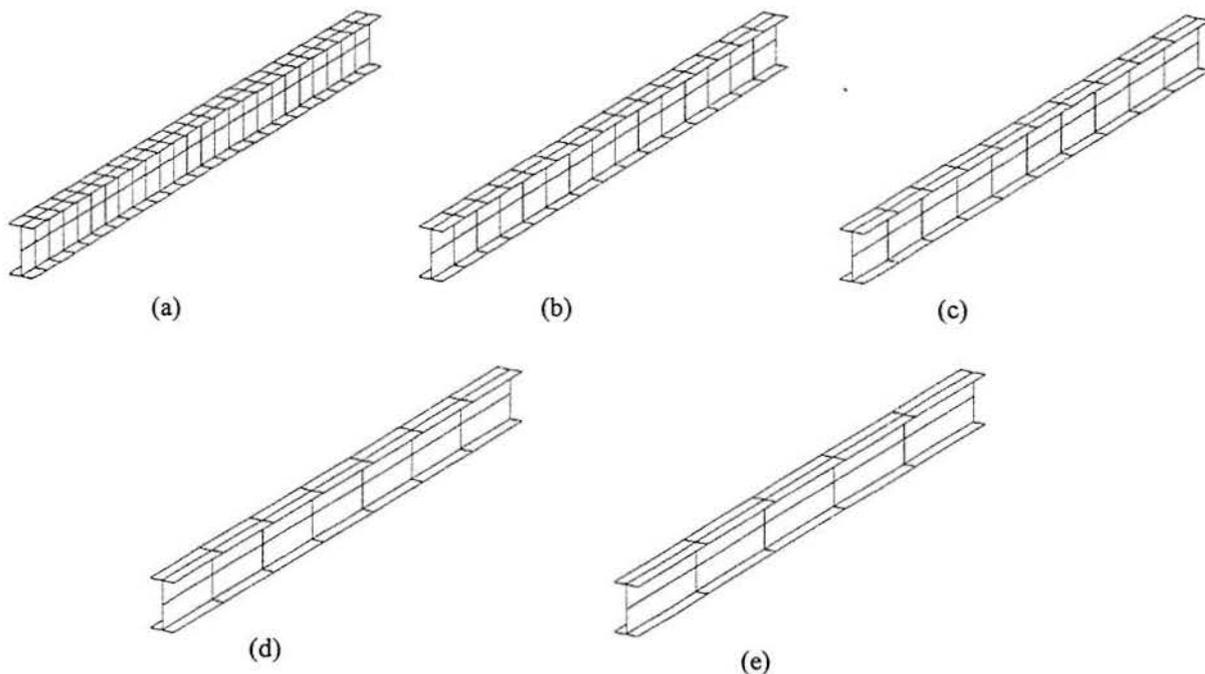


Figura (3.4) - Malhas utilizadas com 2 elementos representando a altura da alma.

- (a) Malha IA2.
- (b) Malha IB2.
- (c) Malha IC2.
- (d) Malha ID2.
- (e) Malha IE2.

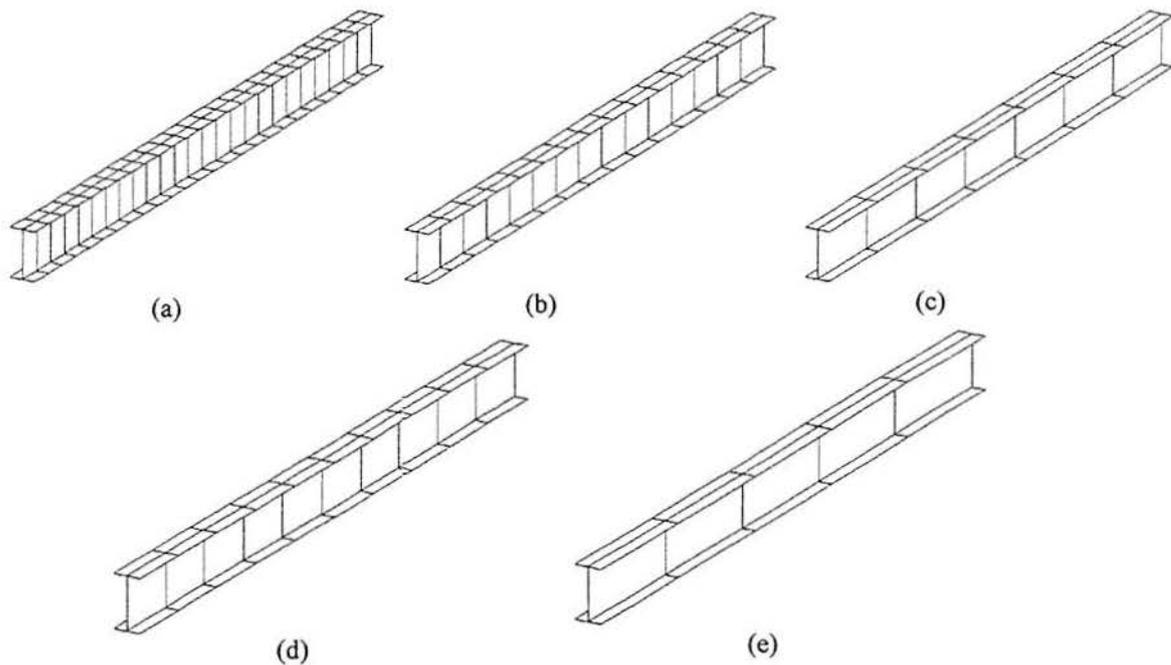


Figura (3.5) - Malhas utilizadas com um elemento representando a altura da alma.
 (a) Malha I8A1.
 (b) Malha I8B1.
 (c) Malha IC1.
 (d) Malha ID1.
 (e) Malha IE1.

Os resultados obtidos apresentaram uma grande sensibilidade das reações quanto ao aumento da razão de aspecto dos elementos. Porém, o campo de deslocamentos e de tensões não sofreram alterações significativas. Este problema foi corrigido alterando-se as condições de contorno para que apenas as translações dos nós do engaste fossem fixas. Vale dizer que a integração 2×2 forneceu bons resultados no engaste mesmo com o aumento da razão de aspecto, mas os resultados ao longo da viga perderam a uniformidade com o aumento da mesma. Este comportamento foi reduzido com uma integração 3×3 . Além disso, os testes realizados permitiram verificar que o uso de um elemento na alma fornece bons resultados para o perfil I submetido a torção; elementos com $r.a. \leq 10$ conseguem descrever a tensão σ_x devida ao empenamento; as tensões no flange, devido à formulação de placa, são muito baixas e as tensões na alma devido à formulação de EPT não são bem representadas embora sejam baixas.

A figura (3.6) ilustra a distribuição da tensão σ_x , maior valor positivo, ao longo da viga obtida pelas malhas indicadas na figura (3.3) utilizando-se o elemento SQ. As malhas IA1 a IE1 e IA2 a IE2 foram usadas para se pesquisar um número mínimo de elementos necessários para modelar a alma. Notou-se que estas malhas não causaram mudanças no comportamento dos resultados no flange do perfil. O uso de apenas um elemento na altura da alma fornece bons resultados, como ilustram as figuras (3.7) e (3.8).

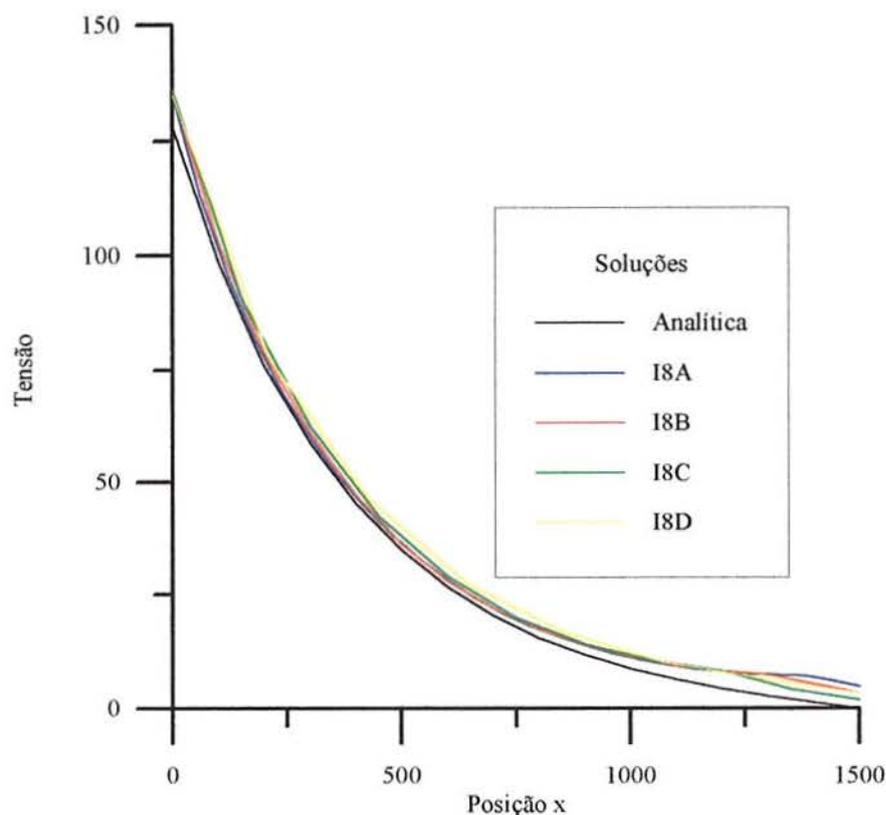


Figura (3.6) - Tensão σ_x [MPa] ao longo da aba para várias malhas usando o elemento SQ. A malha I8E não foi considerada na solução por fornecer resultados fora do padrão das demais malhas.

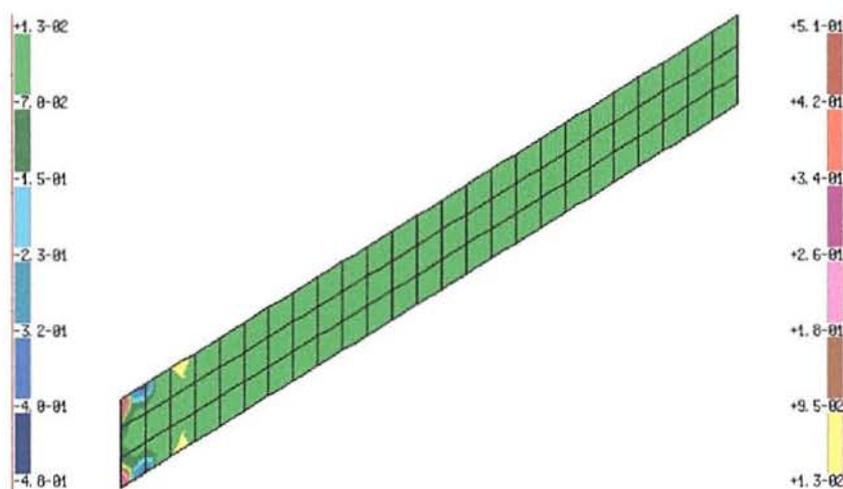


Figura (3.7) - Distribuição da tensão σ_x [MPa] na alma para a malha I8A. São empregados 3 elementos para modelar a altura da alma.

Este problema foi também analisado com elementos LQ, SM2b e SM1b. A figura (3.9) compara os resultados obtidos por todos elementos de casca, utilizando a malha I8A, com a solução teórica. Por este gráfico verifica-se que o elemento LQ fornece valores mais conservativos que os demais, que possuem um comportamento muito semelhante.

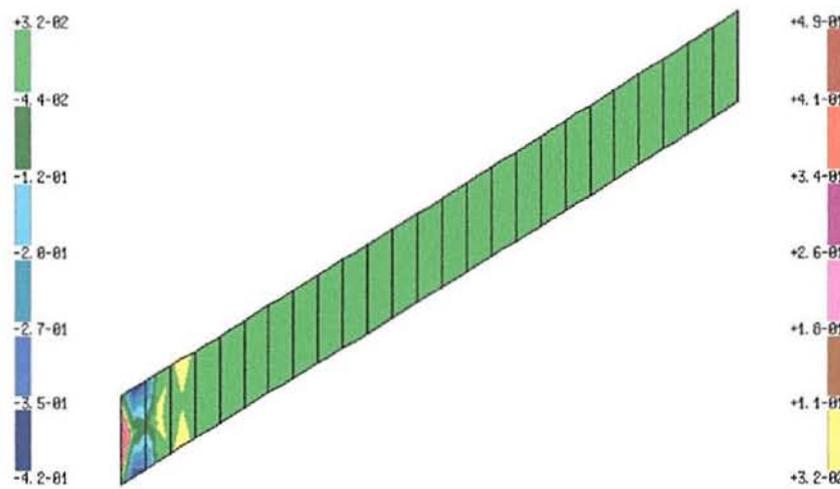


Figura (3.8) - Distribuição da tensão σ_x [MPa] na alma para a malha I8A1. É empregado um elemento para modelar a altura da alma.

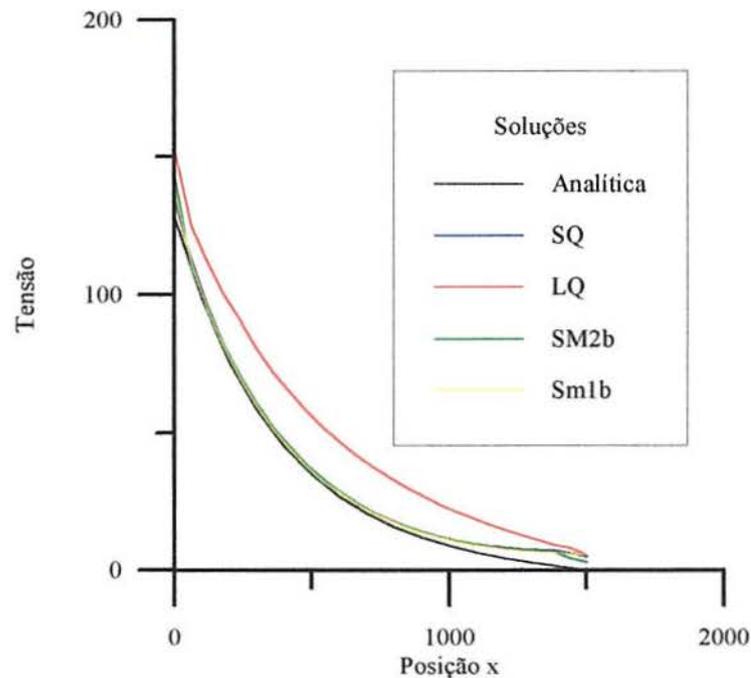


Figura (3.9) - Comparação da solução entre elementos. Tensão em MPa.

3.2 EXEMPLOS COM EMPENAMENTO SEMI-RESTRINGIDO

Os resultados obtidos nos exemplos apresentados a seguir são comparados com um modelo de barras de pórtico espacial para se verificar a relevância do empenamento na estruturas estudadas.

3.1.1 Ligação em T

Considera-se duas vigas C ligadas entre si formando um ângulo de 90° , conforme figura (3.10a), submetidas a um binário aplicado na extremidade livre da barra A. As

dimensões do perfil C, que são válidas para ambas as vigas, estão especificadas na figura (3.10b). Os perfis são feitos de aço com módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^5$ MPa e $\nu = 0,3$.

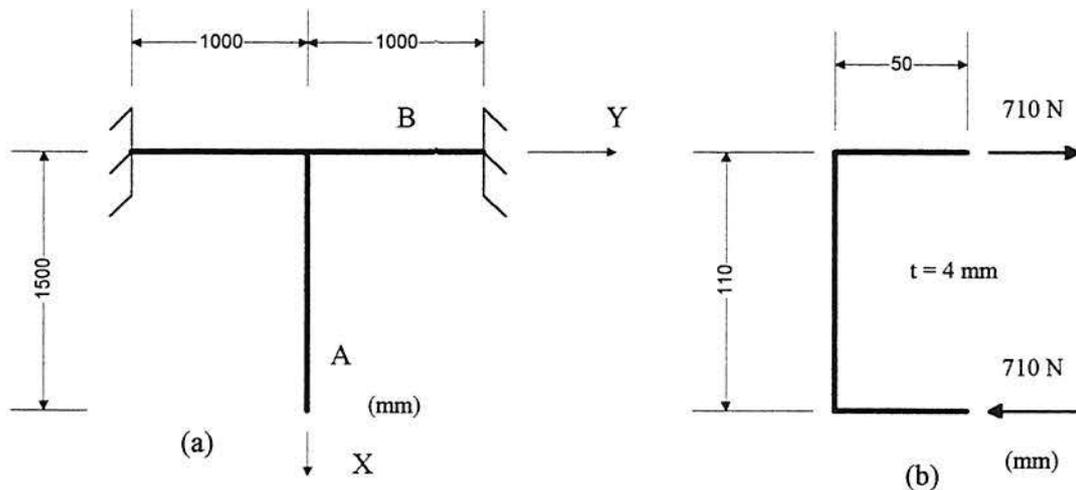


Figura (3.10) - Detalhamento da estrutura.

a) Esquema da estrutura.

b) Seção na extremidade livre da viga A.

Não há solução analítica para este caso porque o empenamento está parcialmente restringido. Considerou-se para efeito de análise duas formas distintas de representação da união entre as vigas. A primeira delas, figura (3.11a), considera que a ligação é feita através de soldagem entre as paredes, sendo colocado um enrijecedor representado pela parede 1. No segundo caso, figura (3.11b), uma viga é encaixada na outra. Neste caso, não foram consideradas as pequenas diferenças de cotas necessárias para esta montagem, simplesmente utilizou-se os elementos de placa, que correspondem às paredes 2 e 3 com espessura dupla.

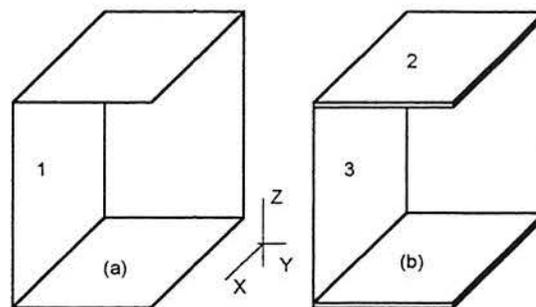


Figura (3.11) - Tipos de ligação utilizados.

Este exemplo foi analisado utilizando-se malhas com razão de aspecto assumindo os valores 2, 4 e 8. A figura (3.12) ilustra as malhas empregadas, e a figura (3.13) ilustra a deformada da ligação. Na realidade, foram utilizadas duas malhas com $r.a. = 2$ alterando-se apenas o tipo de ligação entre as barras conforme figura (3.11).

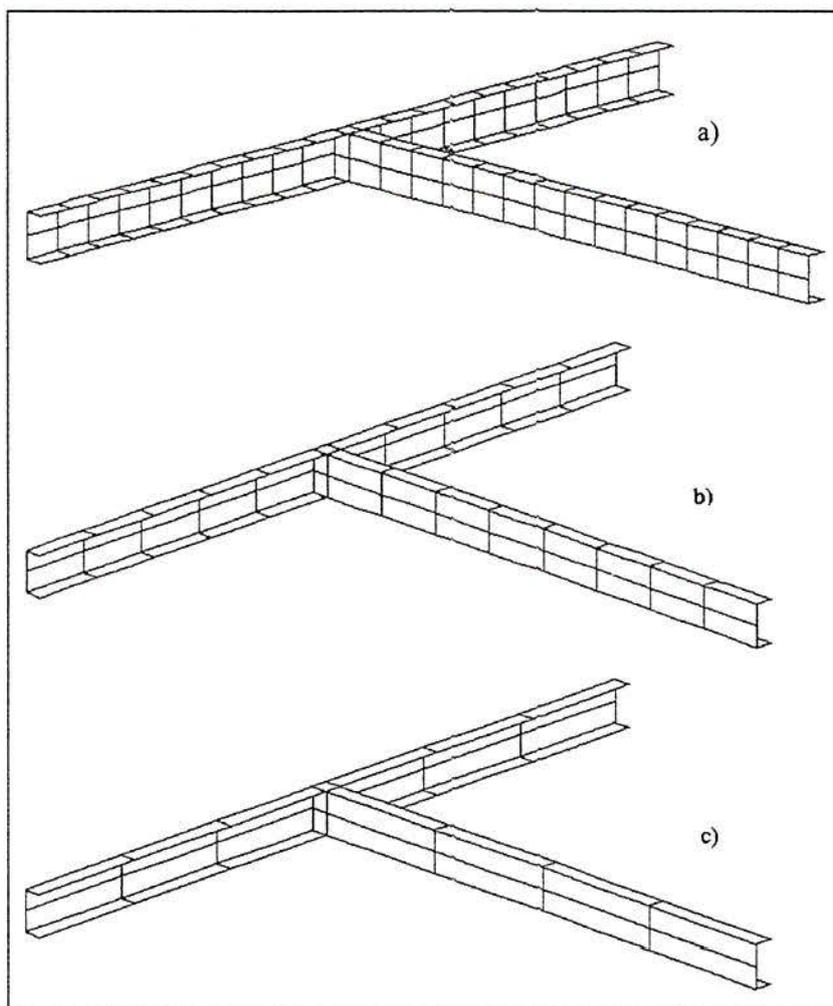


Figura (3.12) - Malhas utilizadas no modelamento da ligação T.

- a) Malha com 517 nós e 146 elementos, r.a. = 2.
- b) Malha com 278 nós e 77 elementos, r.a. = 4.
- c) Malha com 167 nós e 46 elementos, r.a. = 8.

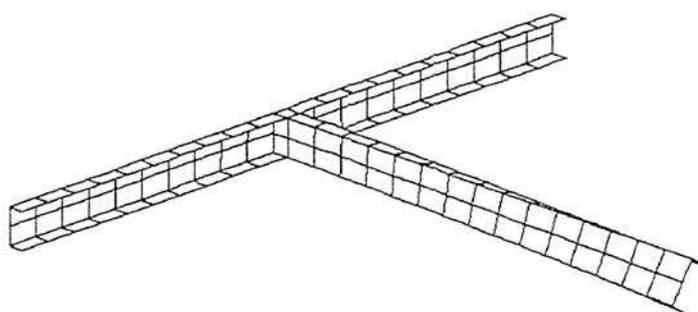


Figura (3.13) - Deformada da estrutura.

A figura (3.14) ilustra a distribuição qualitativa da tensão de von Mises considerando-se a solução obtida pela malha (a) utilizando-se o elemento LQ. A figura (3.14a) corresponde à solução usando uma ligação do tipo (a), e a figura (3.14b) corresponde aos resultados utilizando uma ligação do tipo (b). Cabe salientar que estas tensões são calculadas

considerando-se as tensões de membrana e as tensões devidas aos momentos de placa nas suas faces positivas*. Por estes resultados nota-se que a influência dos tipos de ligações considerados é pequena.

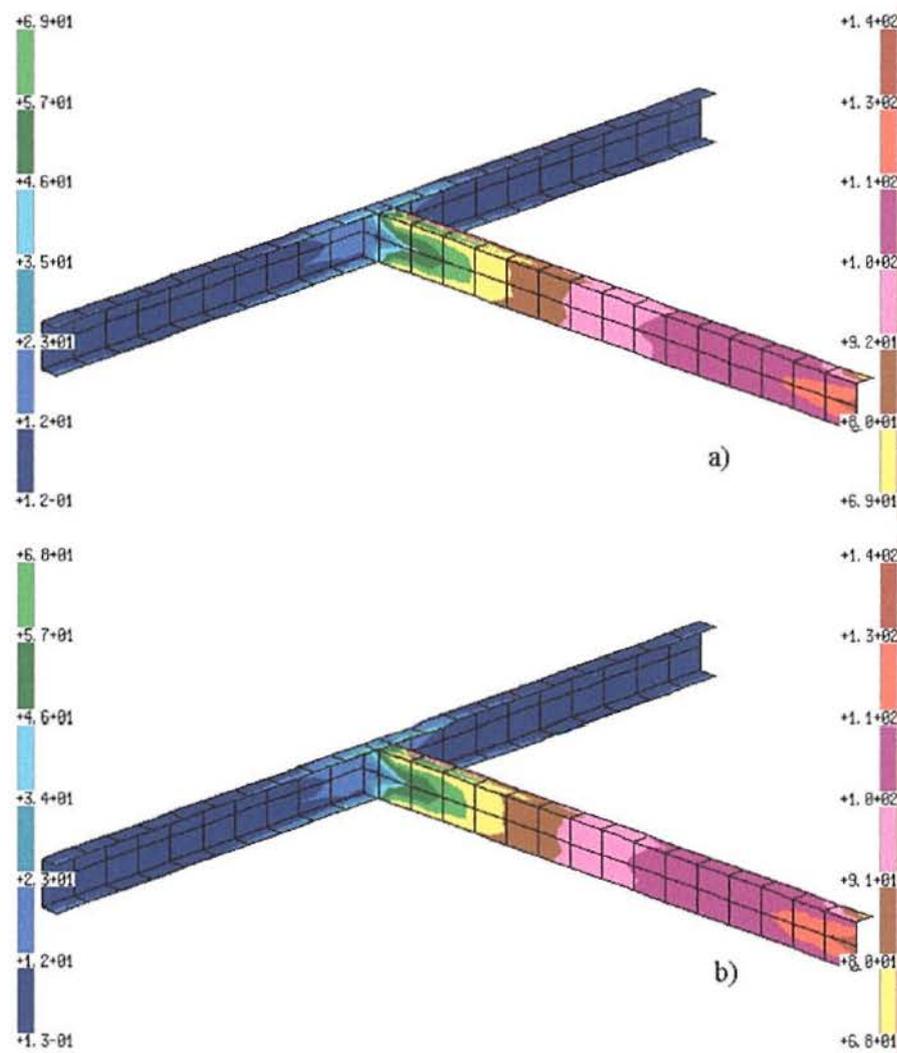


Figura (3.14) - Distribuição qualitativa da tensão de von Mises (MPa).

- a) Malha (a), ligação (a), r.a. = 2.
b) Malha (a), ligação (b), r.a. = 2.

A figura (3.15) ilustra a distribuição qualitativa da tensão equivalente correspondente às malhas (b) e (c) considerando o tipo de ligação (a). Nota-se que até a malha (b) se obtém uma boa resposta. Verificou-se que a transmissão das tensões de uma viga para a outra é bastante influenciada pela distorção dos elementos.

* O termo face positiva indica o plano do elemento identificado com meia espessura positiva em relação a um plano de referência que passa na metade da espessura do elemento. Esta meia espessura é medida no eixo Z local do elemento.

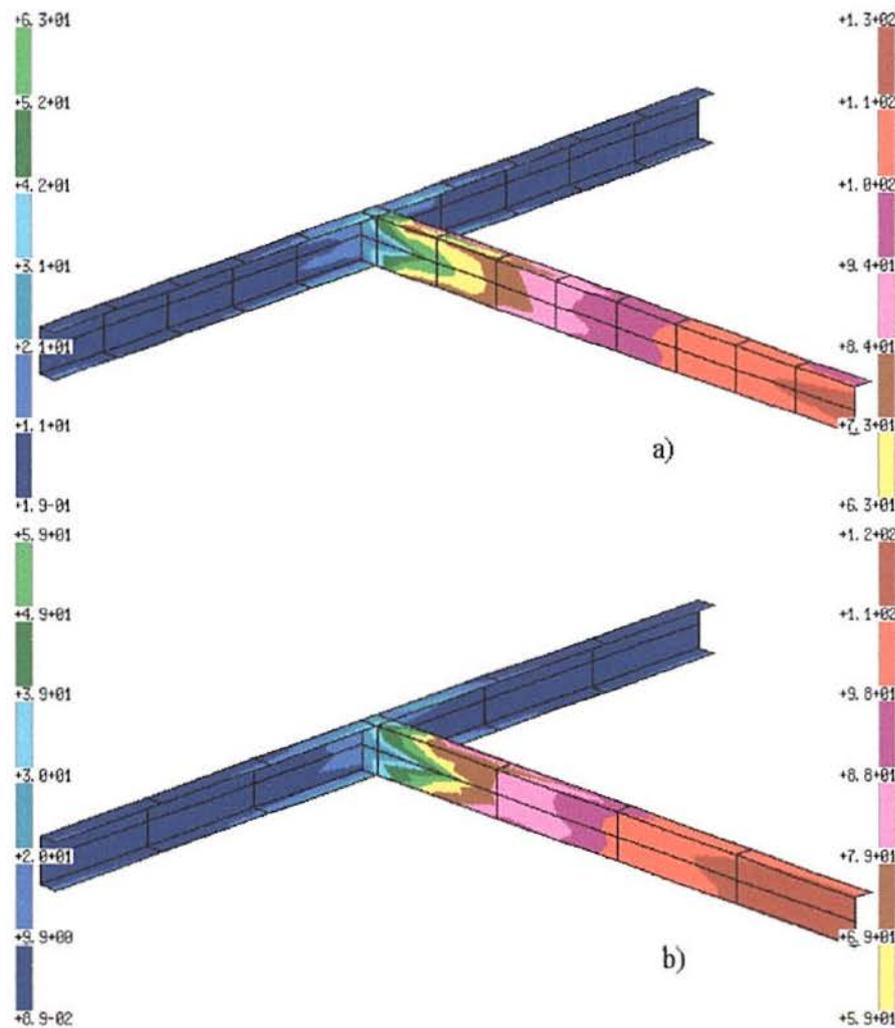


Figura (3.15) - Distribuição qualitativa da tensão equivalente (MPa).

- a) Malha (b), ligação (a).
 b) Malha (c), ligação (a).

A figura (3.16) ilustra a distribuição qualitativa da tensão de von Mises, determinada através de um processo de suavização de tensões por planos (AYMONE - 1996). Estes resultados correspondem à malha (a) e ao tipo de ligação (a). A figura (3.17) ilustra o mesmo tipo de distribuição de tensões para a malha (a) considerando a ligação entre vigas do tipo (b).

Verificou-se neste exemplo, que os resultados apresentados em tensões de von Mises sofrem menor influência do aumento da razão de aspecto. O que ocorre na realidade é uma redistribuição dos valores das tensões de forma que a tensão equivalente permaneça aproximadamente a mesma. Além disso, verificou-se ser mais efetivo reduzir o número de elementos empregados no modelamento da seção transversal do que utilizar elementos com razão de aspecto mais elevada.

Foram realizados outros testes variando-se a espessura da chapa do perfil e o comprimento das barras, nos quais se verificou que com o aumento da espessura, a

importância do empenamento é reduzida. Além disso, com o aumento do comprimento das barras o efeito do empenamento passa a ficar mais concentrado nos nós.

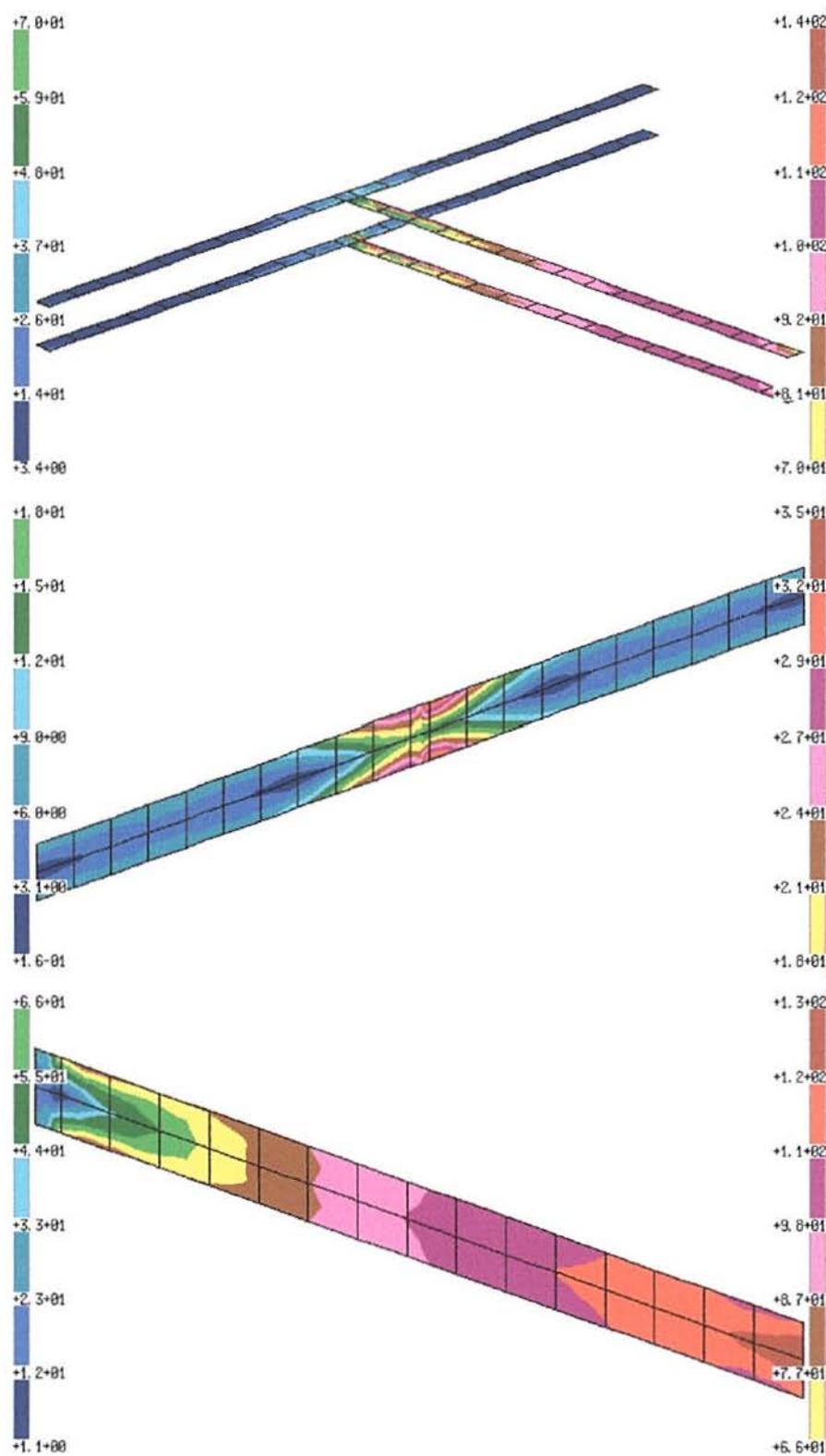


Figura (3.16) - Tensão de von Mises por planos [MPa] - malha (a), ligação (a).

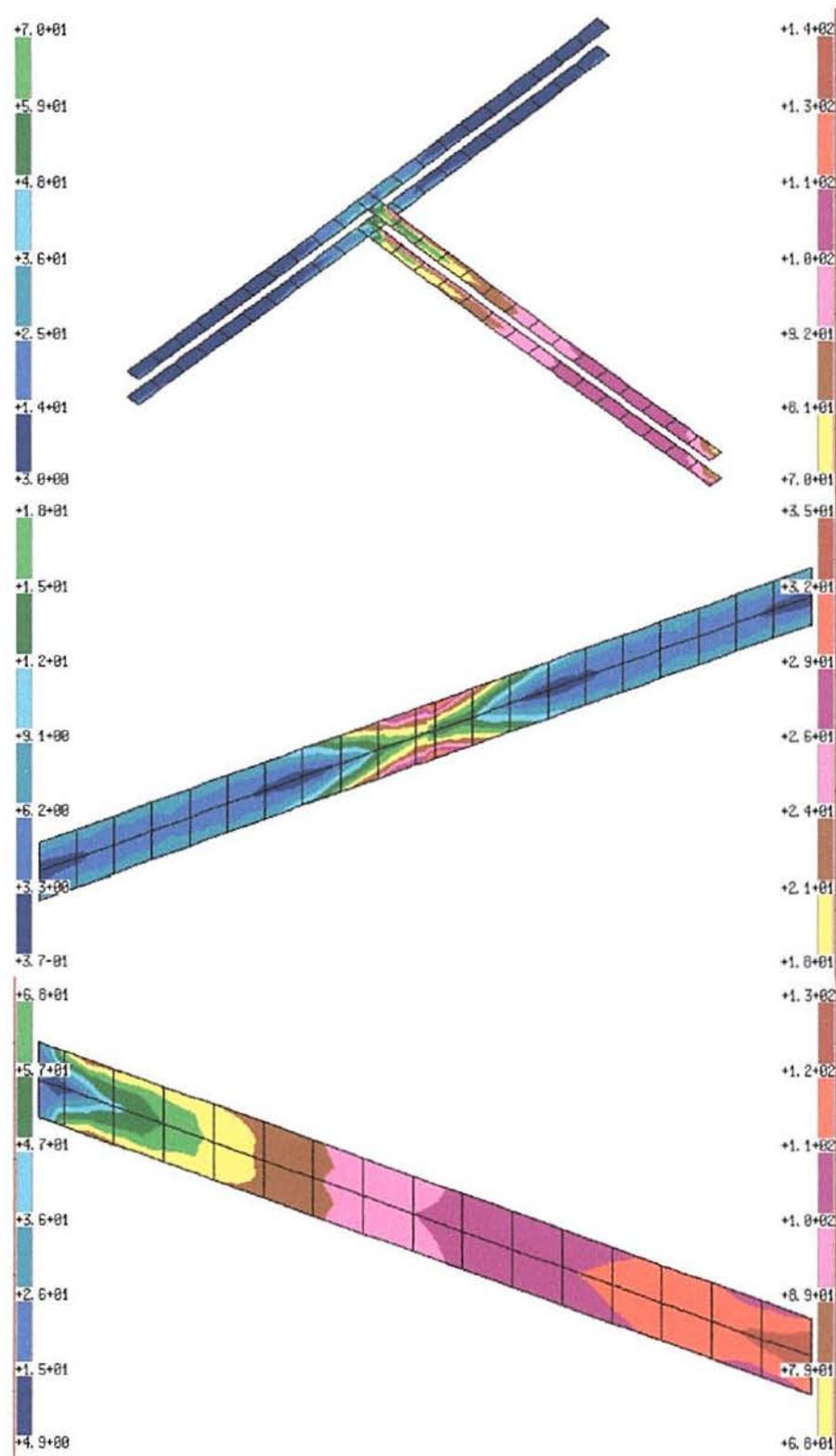


Figura (3.17) - Tensão de von Mises por planos [MPa] - malha (a), ligação (b).

3.2.2 Estrutura Tipo Grelha

Considera-se o chassi simplificado, figura (3.18), com 3 extremidades engastadas e uma livre. Na última, atua uma carga que provoca um efeito de torção na estrutura.

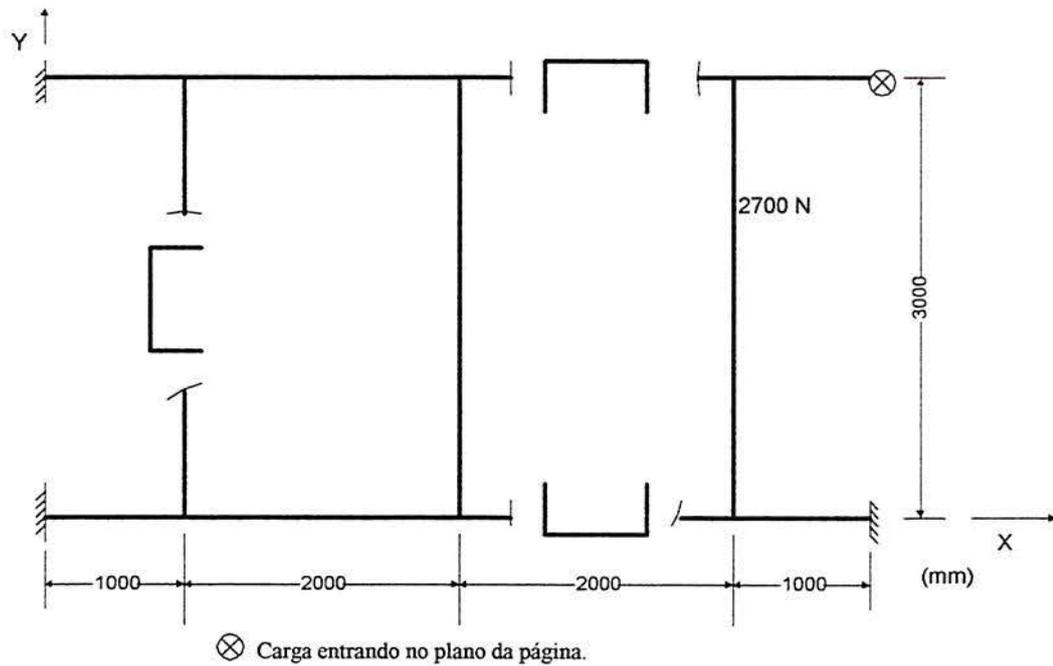


Figura (3.18) - Estrutura do chassi.

Todas as barras do chassi são representadas por um perfil C (110x50x4 mm) de aço com módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^5$ MPa e $\nu = 0,3$. As posições de montagem dos perfis estão indicadas na figura (3.18).

A seção transversal do perfil C foi modelada com dois modos de distribuição dos elementos na seção, que estão ilustrados na figura (3.19). O esquema 1x2x1 emprega um elemento na aba e dois elementos na alma do perfil. Já o esquema 1x1x1 utiliza um elemento na aba e um na alma do perfil.

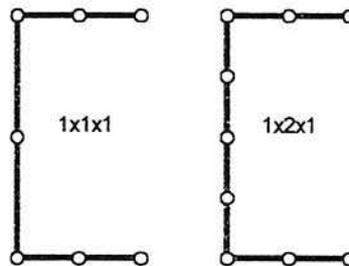


Figura (3.19) - Esquema de modelamento da seção transversal.

A figura (3.20) ilustra as malhas de elementos de casca e o modelo de barras, que foram utilizadas neste exemplo. Cada uma das malhas de casca foram construídas com os elementos SQ, LQ e SM1b. Porém, como o comportamento destes elementos foi semelhante, optou-se por apresentar apenas os resultados referentes ao elemento SQ.

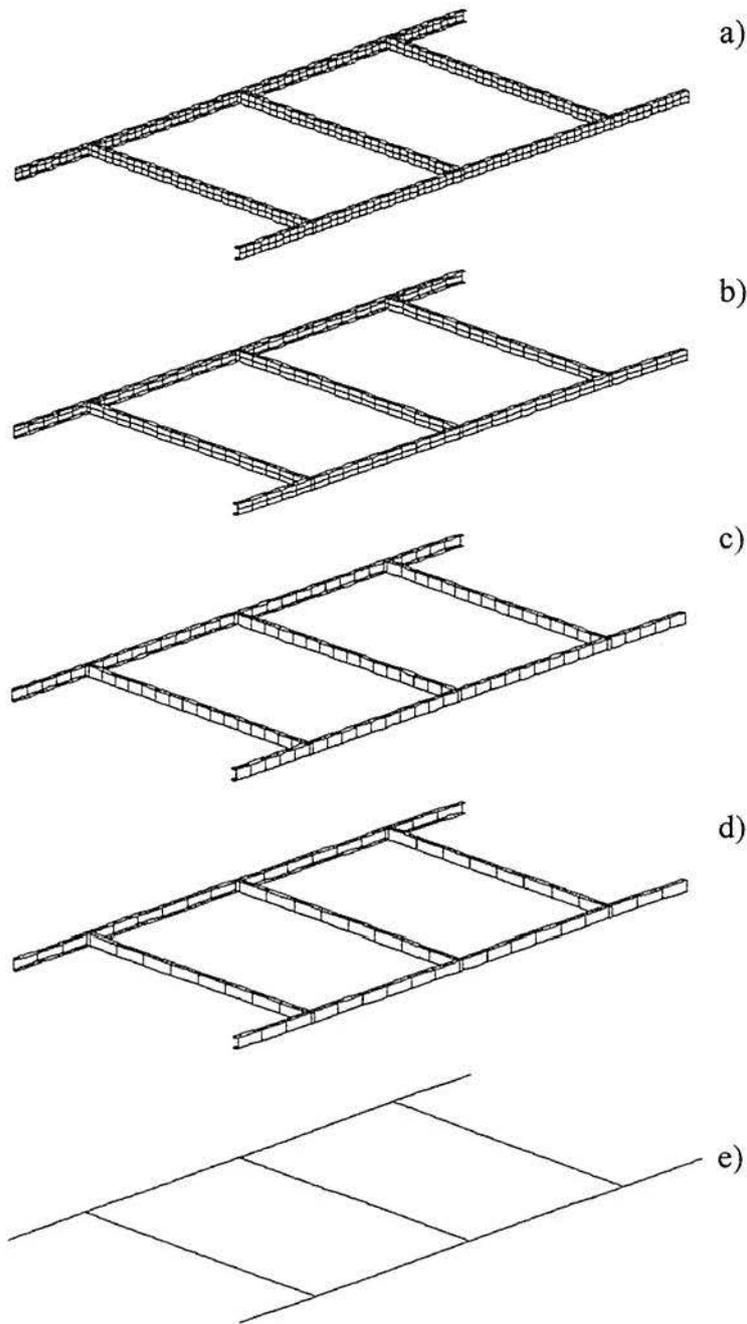


Figura (3.20) - Malhas empregadas no modelamento da grelha.

- a) Malha (a). Utiliza esquema 1x2x1 para modelar a seção transversal, r.a.a. = 1.82, r.a.f= 2.
- b) Malha (b). Utiliza esquema 1x2x1 para modelar a seção transversal, r.a.a. = 3.6, r.a.f= 4.
- c) Malha (c). Utiliza esquema 1x1x1 para modelar a seção transversal, r.a.a. = 1.8, r.a.f= 4.
- d) Malha (d). Utiliza esquema 1x1x1 para modelar a seção transversal, r.a.a. = 3, r.a.f= 6.7.
- e) Modelo de barras de pórtico espacial.

A tabela (3.2) apresenta algumas características das malhas utilizadas na qual **NGL** é o número de graus de liberdade do problema, **Banda** é a largura de banda do sistema após reordenação, **RIT** é o espaço de disco ocupado em Mbytes pelo arquivo da matriz de rigidez do sistema, **RIG** é o espaço de disco ocupado em Mbytes pelo arquivo de rigidez dos

elementos e **Tempo** é o tempo necessário para análise completa em um microcomputador 486 DX4-100 com 8 Mbytes de memória.

Tabela (3.1) - Características das malhas utilizadas.

Malha	NE	NN	NGL	Banda	RIT	RIG	Tempo
a	876	3039	18234	480	42	8.2	24 m 42 s
b	468	1611	9666	480	22	4.4	13 m 3 s
c	348	1253	7158	366	14.5	3.2	7 m 55 s
d	204	725	4350	390	8.2	1.9	4 m 17 s
barras	60	59	342	36	$\cong 0$	$\cong 0$	14 s

A figura (3.21) ilustra a deformada da estrutura correspondente ao carregamento indicado no início do problema. As duas regiões marcadas por um círculo fornecem ângulo de distorção máximo, ver tabela (3.2).

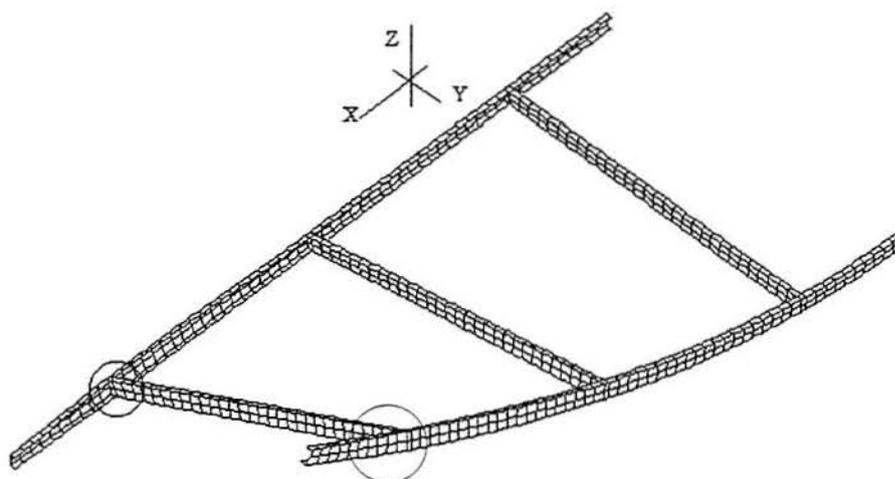


Figura (3.21) - Deformada da estrutura.

Esta tabela apresenta alguns valores máximos obtidos utilizando-se as malhas especificadas. As colunas 2, 3 e 4 apresentam os valores máximos dos deslocamentos nas direções X, Y e Z. A coluna 5 apresenta os valores do ângulo de distorção máximo. A coluna 6 apresenta os valores da tensão equivalente máxima. A última linha da tabela corresponde ao modelo do chassi utilizando elementos de pórtico espacial.

Tabela (3.2) - Resultados gerais da análise.

Os deslocamentos dx_{\max} , dy_{\max} e dz_{\max} estão em mm e o giro ϕ_{\max} em rad.

Malha	dx_{\max}	dy_{\max}	dz_{\max}	ϕ_{\max}	$\sigma_{eq_{\max}}$ [N/mm ²]
a	8.2	8.6	610	0.16	580
b	8.2	8.4	600	01.6	570
c	8.2	8.3	600	0.16	570
d	8.2	8.2	600	0.15	560
barras			618	0.155	524

A figura (3.22) ilustra a distribuição qualitativa das tensões σ_x obtidas através da soma das tensões de membrana com as tensões de placa, sendo estas calculadas na face positiva da placa (MORSCH - 1991). Nota-se neste problema que estas tensões são as dominantes.

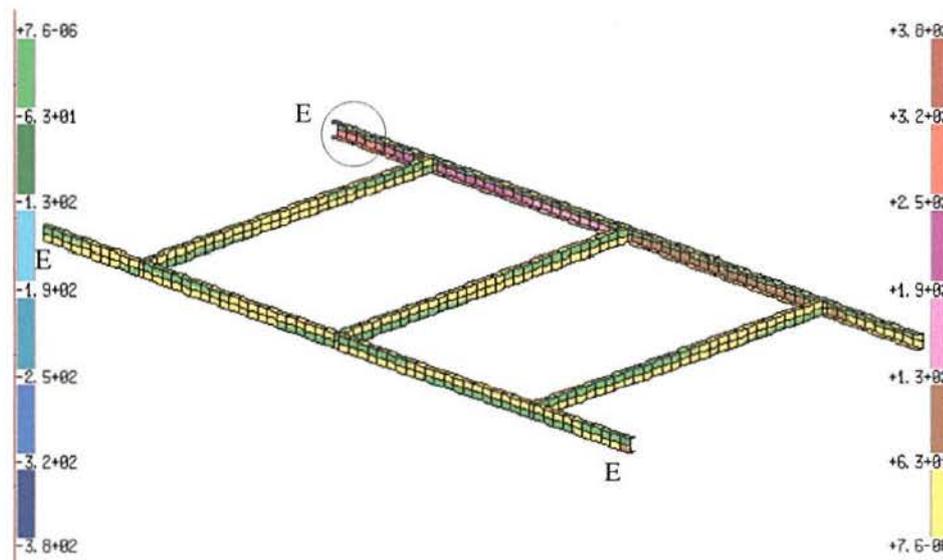


Figura (3.22) – Distribuição qualitativa da tensão σ_x [MPa] - malha (a).

A região marcada pelo círculo fornece tensão σ_x máxima.

A letra E indica que a extremidade está engastada.

A figura (3.23) ilustra a distribuição qualitativa da tensão de von Mises no chassi correspondente à malha (a). Estas tensões são calculadas considerando-se as tensões de membrana e as tensões de placa determinadas na face positiva desta. A região de tensão máxima está indicada nesta figura e corresponde ao extremo oposto da extremidade livre. A figura (3.24) ilustra, com mais detalhe, esta região de concentração de tensão. Pode-se notar que o valor máximo da tensão de von Mises ocorre próximo ao engaste.

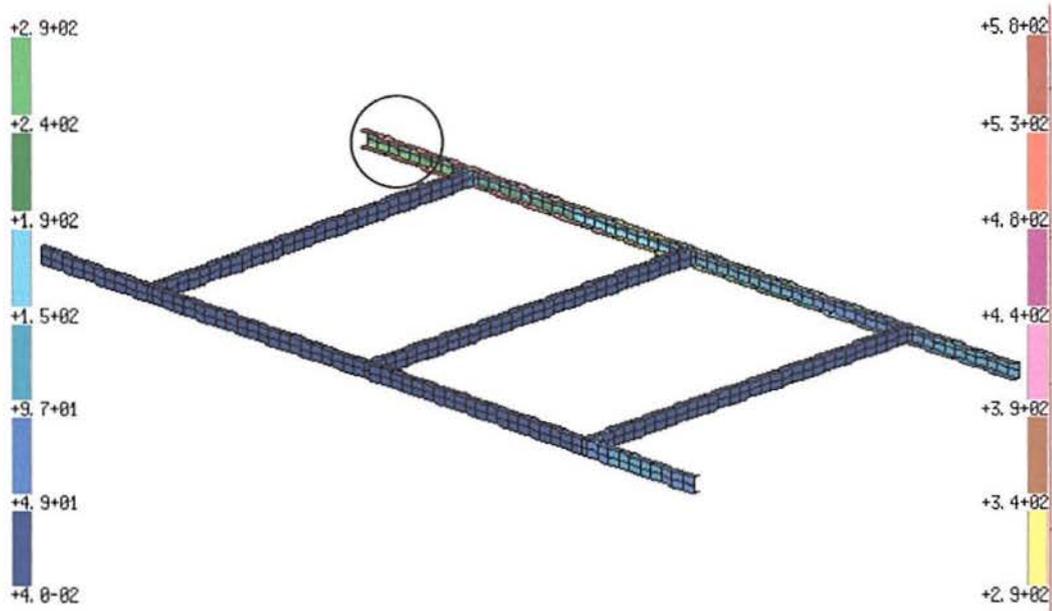


Figura (3.23) – Distribuição qualitativa da tensão de von Mises [MPa] - malha (a).
A região marcada pelo círculo fornece tensão σ_x máxima.

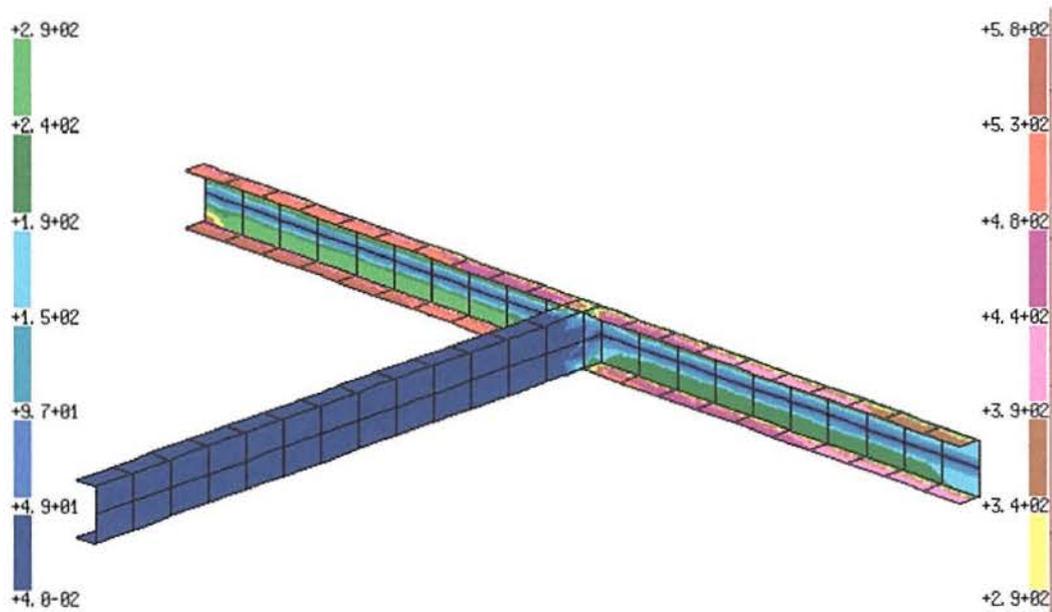


Figura (3.24) - Detalhe da região de tensão de von Mises máxima [MPa] - malha (a).

Como a distribuição da tensão equivalente em toda a peça, não sofre alterações significativas, a medida que se altera a malha de elementos, apresenta-se a seguir; figuras (3.25a), (3.25b) e (3.25c); apenas o detalhe da região de máximo, para as malhas (b), (c), e (d).

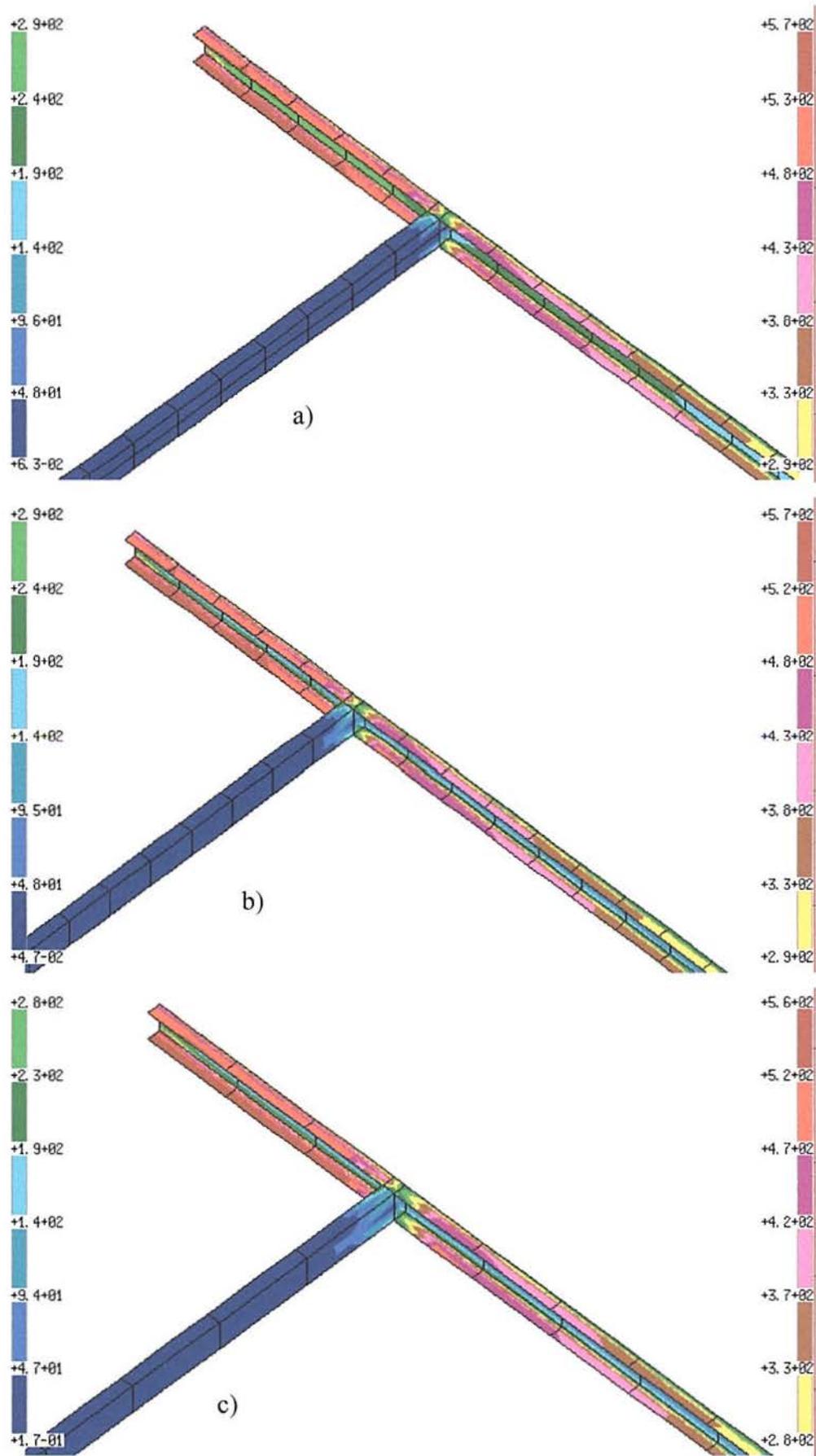


Figura (3.25) - Detalhe da região de tensão de von Mises máxima [MPa].
 a) Malha (b). b) Malha (c). c) Malha (d).

Pelas figuras anteriores, nota-se que não ocorrem alterações significativas nos valores apresentados. Tomando-se os resultados fornecidos pela malha (a) como exatos, defini-se um erro relativo a estes valores fazendo-se $\varepsilon = [(a) - (malha)] / (a)$, na qual (malha) indica os valores fornecidos pelas malhas (b), (c) e (d). Deste modo, as malhas (b) e (c) têm um erro relativo de 1,72% e a malha (d) de 3,4%. Além disso, a região afetada por estes valores máximos, nas quatro malhas, é quase a mesma. Logo, pela tabela (3.1), pode-se notar a importância do aumento da razão de aspecto dos elementos como ferramenta para redução de espaço de disco utilizado e do tempo de análise. Comparando-se os resultados das malhas (a) e (d) nota-se uma redução de 80% no espaço de disco ocupado, e uma redução de 83% no tempo de análise sem haver um comprometimento na qualidade dos resultados obtidos.

Comparando-se agora a solução apresentada pela malha (a) com o modelo de barras, figura (3.33), verifica-se que a região onde ocorrem as tensões máximas é a mesma da figura (3.30). Além disso, o erro relativo comparando-se estes dois resultados é de 9,64%.

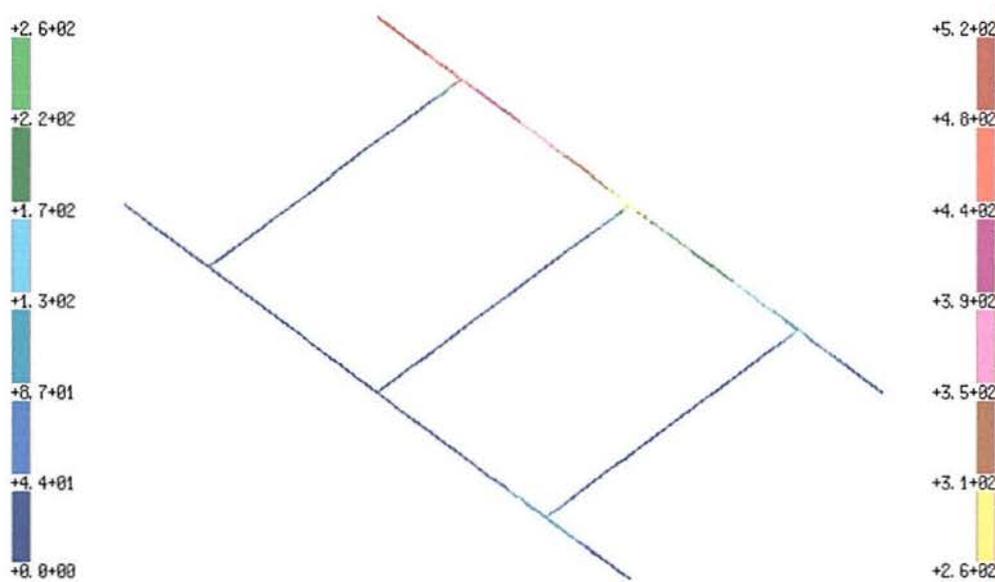


Figura (3.26) - Tensão de von Mises [MPa] - modelo de barras.

Conforme comentado no início deste capítulo, os resultados apresentados nas figuras (3.22) a (3.25) são qualitativos devido ao erro de representação. Para eliminar-se este erro fez-se o cálculo das tensões médias através de um processo de suavização de tensões por planos (AYMONE - 1996). Procedendo deste modo, as figuras (3.27) e (3.28) ilustram as distribuições da tensão de von Mises no plano horizontal e nos planos de perfil e frontal do chassi. Comparando-se o valor da tensão máxima, fornecida nestas figuras, com o valor obtido pelo modelo de barras, verifica-se um erro relativo de 9,6%.

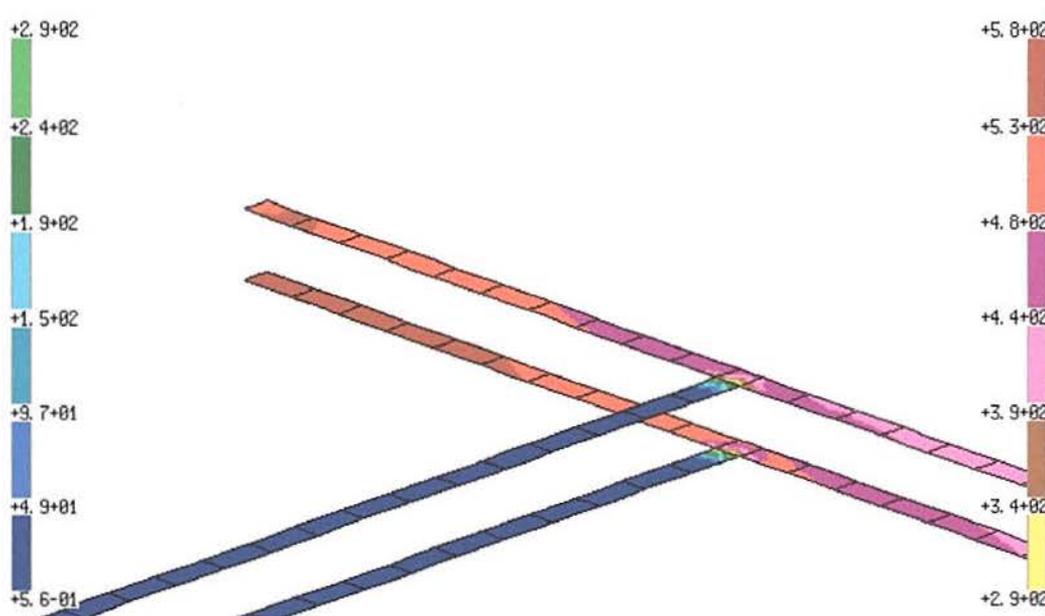


Figura (3.27) - Tensão de von Mises [MPa] no plano horizontal - malha (a).

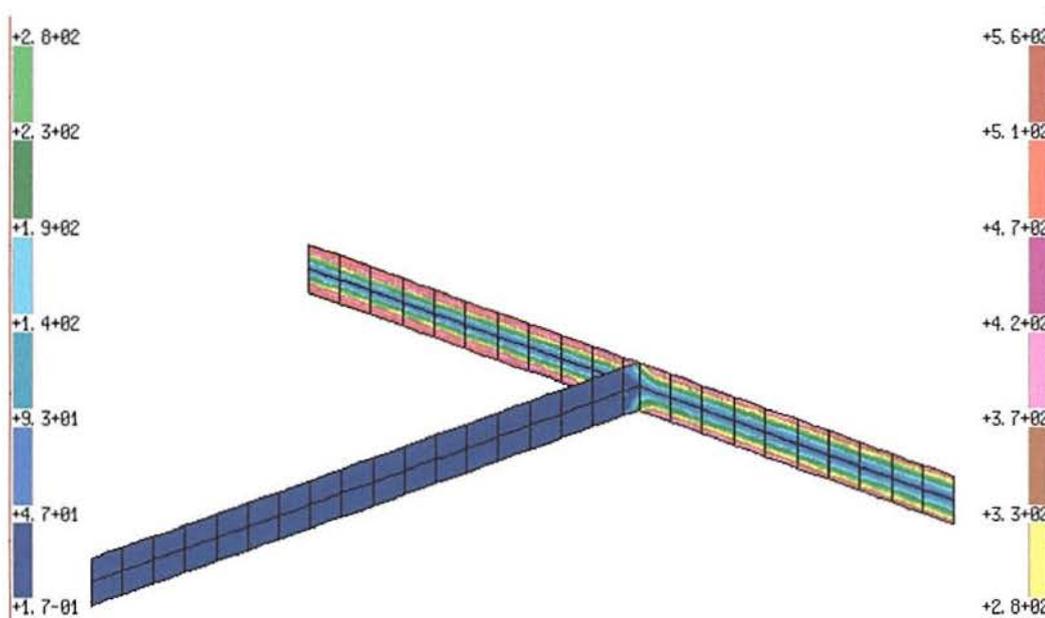


Figura (3.28) - Tensão de von Mises [MPa] no plano vertical - malha (a).

Verifica-se que a malha (a) tem um erro médio de 0,35%, o que mostra que esta é uma boa malha. Neste exemplo, o empenamento não teve uma importância significativa. Entre outros motivos, o modelo de barras conseguiu representar bem o problema, apesar de existirem perfis de seção aberta, porque as dimensões da junção são pequenas se comparadas com os comprimentos das barras. Além disso, as ligações de todas as barras ocorrem segundo as linhas médias destas, o que não é particularmente verdadeiro nos chassis comerciais.

3.2.3 Estrutura Tipo Caixa

A figura (3.29) ilustra uma estrutura que representa, de modo simplificado, o sistema de quadros que existe num ônibus. Este exemplo foi originalmente apresentado por BOÉSSIO (1992). Todas as cotas representadas nesta figura são medidas em relação às superfícies médias das chapas que formam a estrutura.

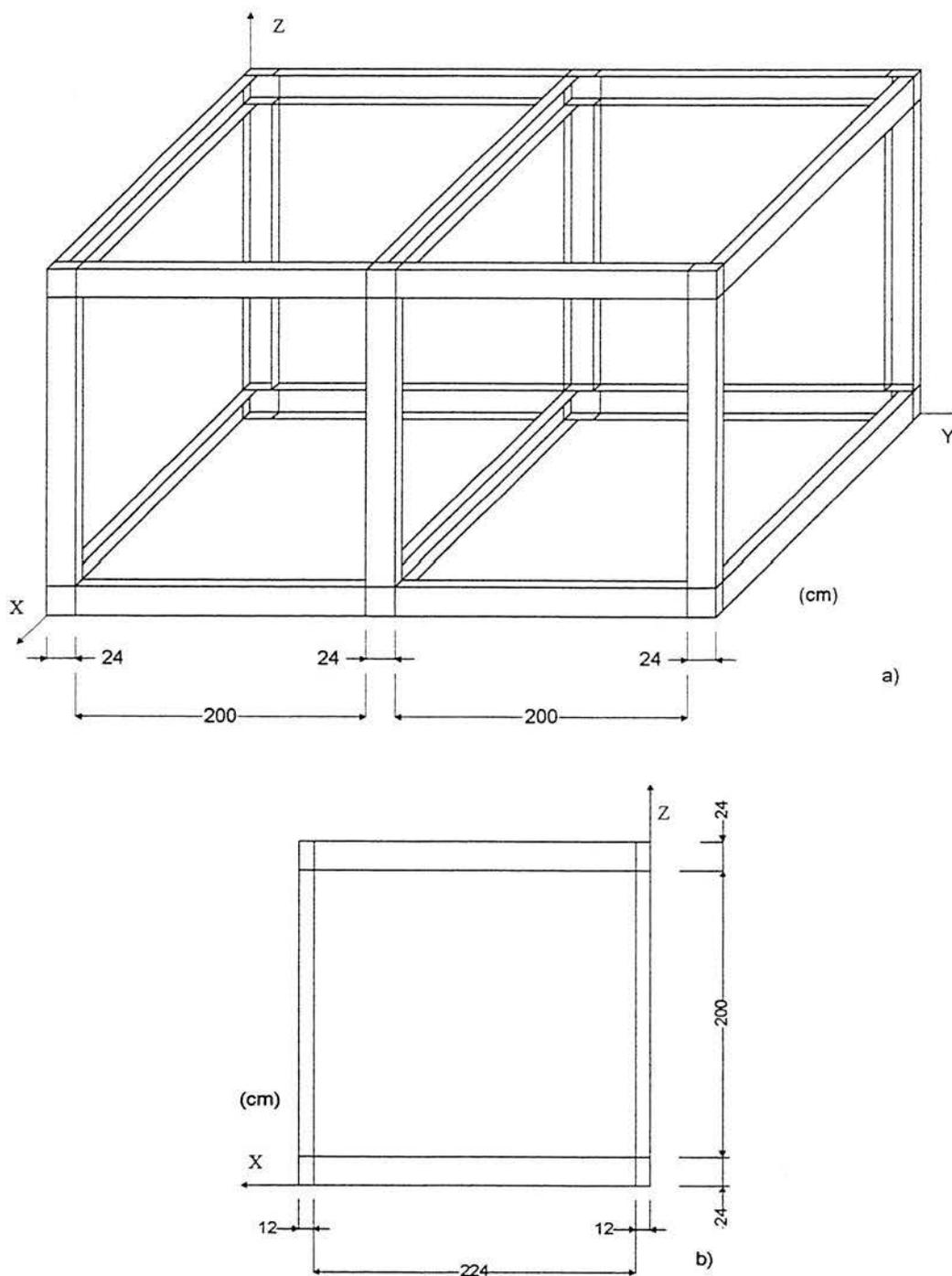


Figura (3.29) - Estrutura tipo caixa.

- a) Perspectiva da estrutura com detalhes de montagem.
 b) Vista lateral da estrutura.

Todas as barras da estrutura são construídas com um perfil C 250x125x10 mm feito de aço com $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ e $\nu = 0,3$. Como o modelamento é feito a partir das superfícies médias, a alma do perfil passa a ser de 240 mm e a aba passa a ser de 120 mm.

A figura (3.30) apresenta, através de um esquema simplificado, a vinculação da estrutura bem como as cargas que atuam nesta. Os nós ou ligações das barras, que formam a estrutura, estão indicados através de numeração entre parênteses. Na verdade, cada uma destas ligações corresponde a 8 nós de elementos de casca como está ilustrado na figura (3.31).

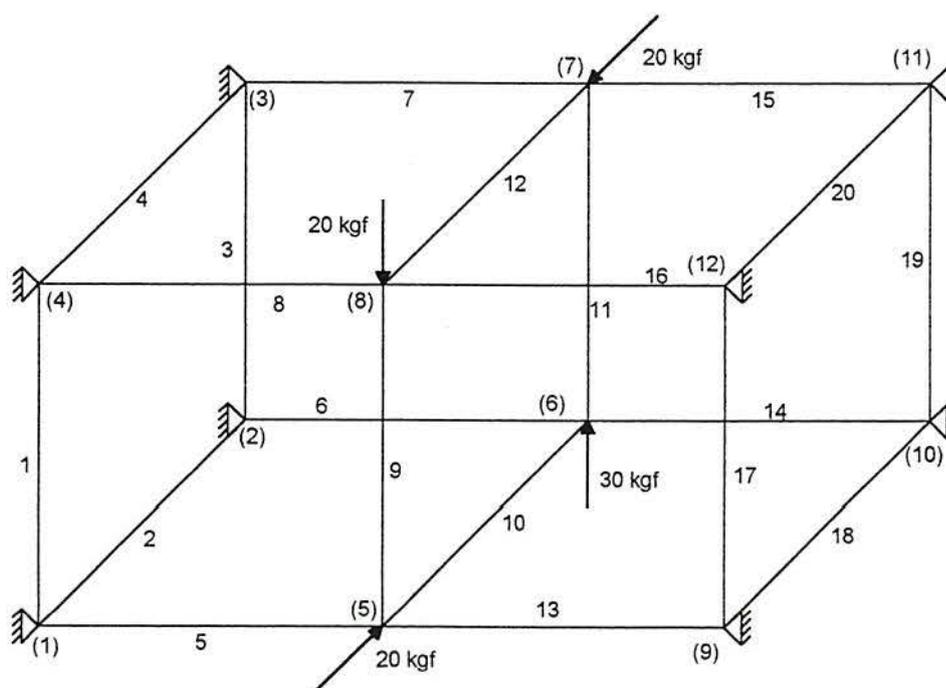


Figura (3.30) - Vinculação e carregamento da estrutura.

Esta ilustração foi desenhada tendo como base uma figura semelhante obtida em BOÉSSIO (1992). As forças estão representadas em kgf por questão de coerência com o trabalho original.

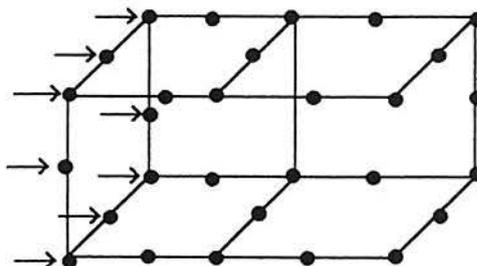


Figura (3.31) - Detalhe do modelamento das juntas.

Cada um dos nós restritos têm apenas os graus de liberdade de translação presos ficando as rotações livres (BOÉSSIO - 1992). Aplica-se um carregamento que cria um efeito de torção combinado com flexão. A figura (3.31) mostra que a carga é distribuída em todos os nós da ligação que pertencem à face na qual atua a carga. O mesmo tipo de esquema é utilizado na

aplicação das condições de contorno. Esta mesma figura ilustra o modelamento da união entre os perfis que foi empregada neste exemplo.

Na análise deste problema foram utilizadas malhas com razão de aspecto assumindo os valores 2, 4 e 8. Além disso, fez-se também um modelo da estrutura com elementos de pórtico espacial. Estas malhas estão ilustradas na figura (3.32).

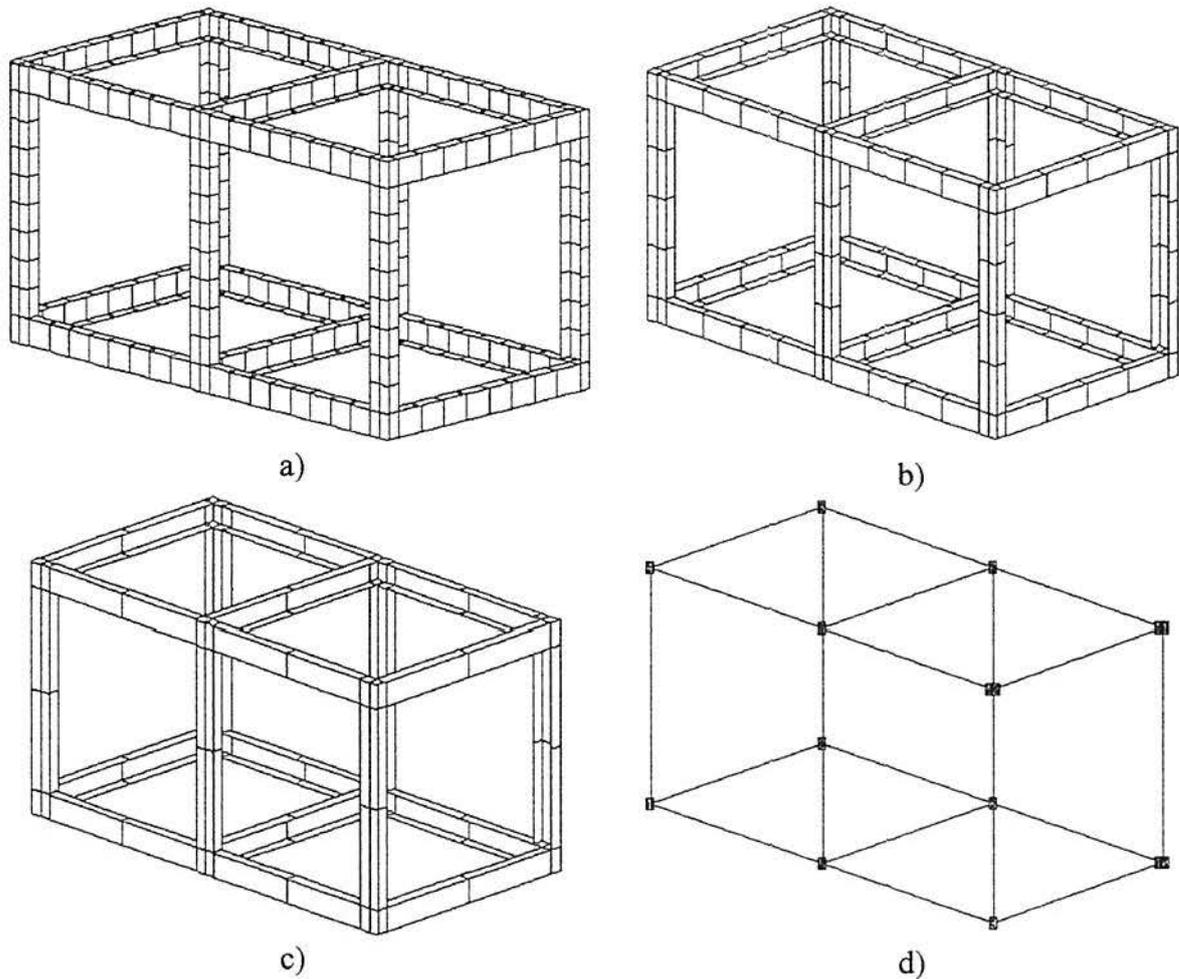


Figura (3.32) - Malhas empregadas.

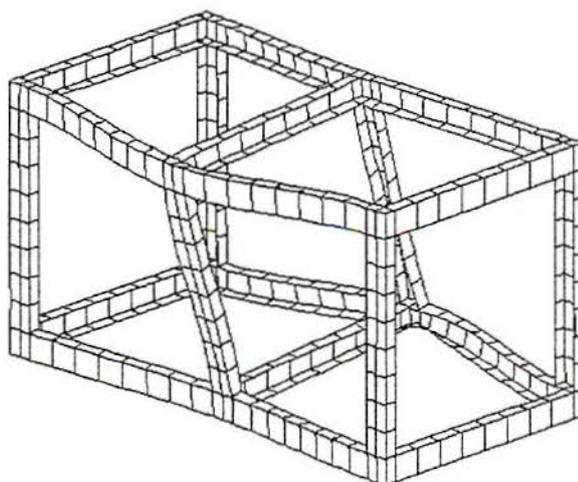
- a) Malha com r.a. = 2.
- b) Malha com r.a. = 4.
- c) Malha com r.a. = 8.
- d) Modelo de barras.

As características gerais de cada uma destas malhas estão apresentadas na tabela (3.3). As posições das colunas RIT e RIG correspondentes a malha de barras foram preenchidas com zero por que estes valores são muito pequenos se comparados com os das demais linhas. A coluna Tempo corresponde ao tempo de CPU de um 486 DX4-100 com 8 Mb de memória RAM. Nesta tabela, pode-se notar que a diferença entre os tempos de solução utilizando-se a malha a) e a malha c), que é de aproximadamente 4, é da ordem do aumento da razão de aspecto.

Tabela (3.3) - Características das malhas empregadas.

Malha	NE	NN	NGL	Banda	RIT	RIG	Tempo
a	612	2112	12672	708	48.2	5.7	31 m 48 s
b	348	1160	6960	708	27.1	3.2	18 m 10 s
c	216	684	4104	564	13.4	2	8 m 16 s
barra	20	12	72	30	≈ 0	≈ 0	0.2 s

Apresentam-se a seguir um resumo dos resultados obtidos usando-se malhas com o elemento SQ. Estes resultados são expressos por distribuições de tensão σ_x e σ_{eq} na estrutura. Para efeito de comparação das soluções obtidas por diferentes malhas, considera-se como “exato” os resultados fornecidos pela malha a), o que permite calcular um erro relativo. Com finalidade apenas ilustrativa, a figura (3.33) apresenta uma deformada da estrutura.

Figura (3.33) - Deformada da estrutura para a malha com $ra.= 2$.

As figuras (3.34a), (3.34b) e (3.34c) ilustram a distribuição qualitativa da tensão σ_x para as malhas a), b) e c). Verifica-se que a representação das tensões σ_x apresenta um erro para os valores máximos de 19% para a malha b) e de 47% para a malha c). Este erro não é propagado para a tensão equivalente porque ocorre um aumento das tensões σ_y e τ_{xy} , o que compensa o mesmo.

As figuras (3.35a), (3.35b) e (3.35c) ilustram a distribuição qualitativa da tensão de von Mises na estrutura, e as figuras (3.36a), (3.36b) e (3.36c) detalham a distribuição qualitativa desta tensão na região de valor máximo. Verificou-se que a malha a) obteve bons resultados, mesmo em regiões de concentração de tensões. O mesmo ocorreu com as malhas b) e c), que tiveram um erro relativo inferior a 6% para os valores máximos.

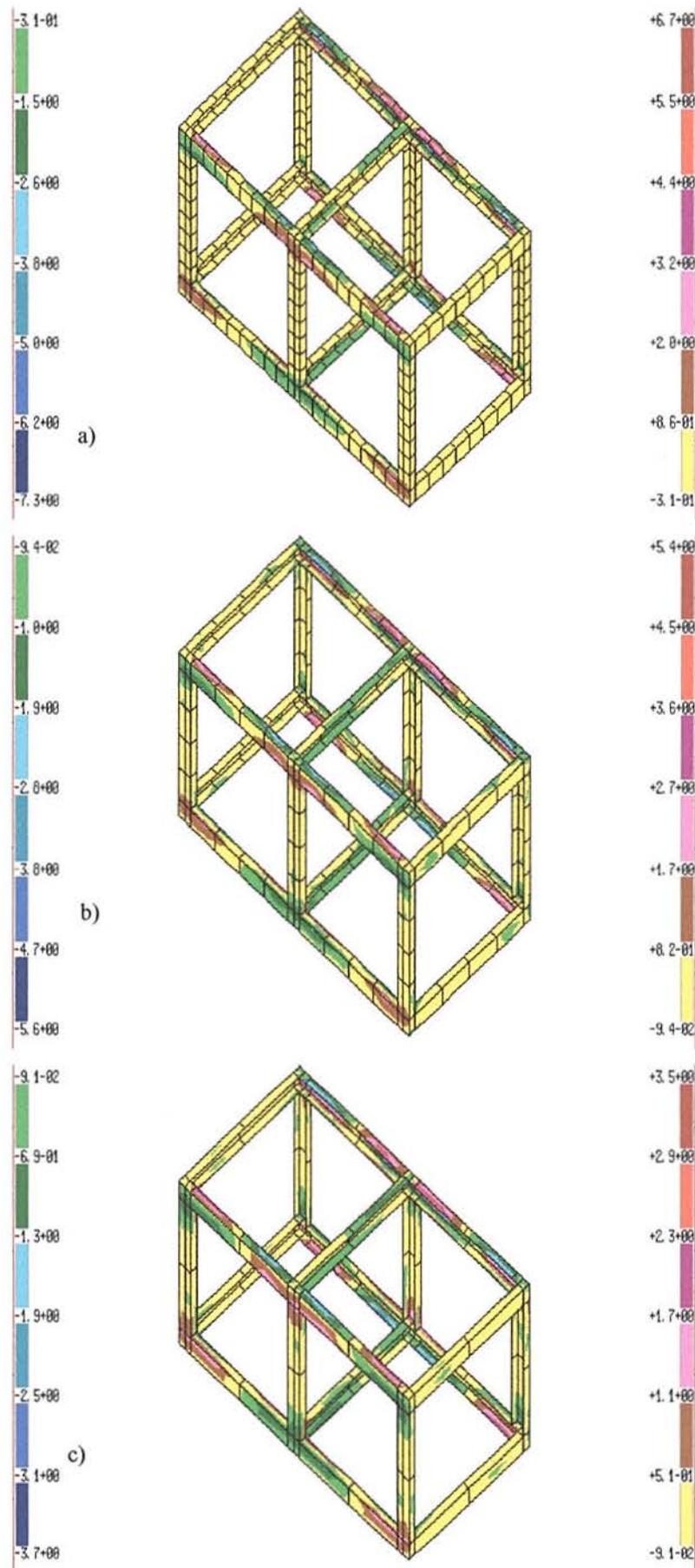


Figura (3.34) - Distribuição qualitativa da tensão σ_x [kgf/cm²]
 a) Malha com r.a.= 2. b) Malha com r.a.= 4 c) Malha com r.a.= 8

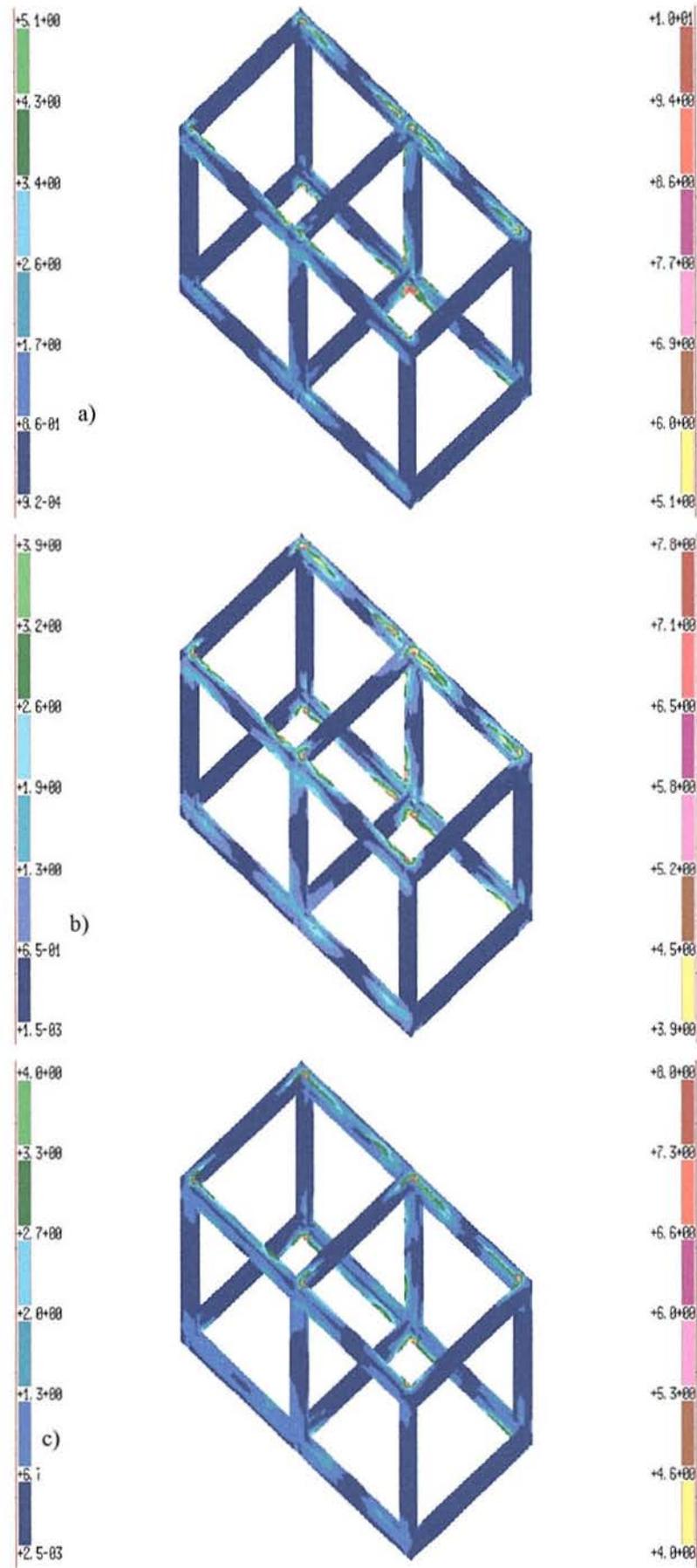


Figura (3.35) - Distribuição qualitativa da tensão de von Mises [kgf/cm^2].
 a) Malha com r.a. = 2 b) Malha com r.a. = 4 c) Malha com r.a. = 8

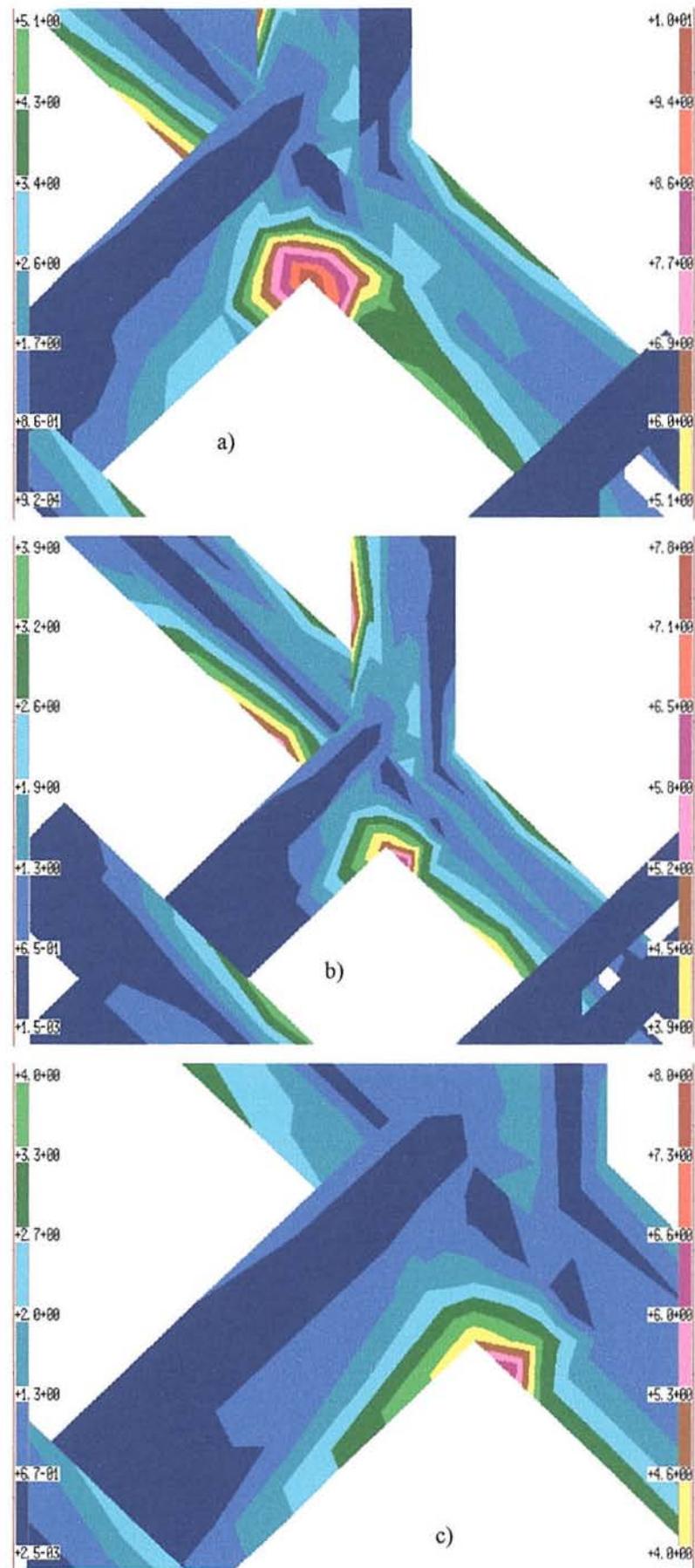


Figura (3.36) - Distribuição da tensão de von Mises $[\text{kgf}/\text{cm}^2]$ no nó 6
 a) Malha com r.a. = 2 b) Malha com r.a. = 4 c) Malha com r.a. = 8

Este problema também foi analisado pelo modelo de pórtico espacial apresentado na figura (3.32d). As tensões nos nós foram calculadas, para as coordenadas locais indicadas na figura (3.37), empregando o esquema apresentado em MORSCH (1991).

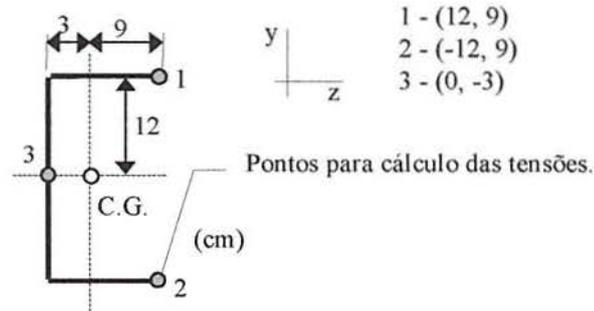


Figura (3.37) - Pontos para cálculo das tensões.

Para executar o cálculo das tensões, o GAELI exige o fornecimento de uma tensão equivalente para o material. Utilizou-se a tensão de escoamento do aço ASTM A36 (240 MPa). A figura (3.38) ilustra a distribuição das tensões de von Mises no modelo de barras.

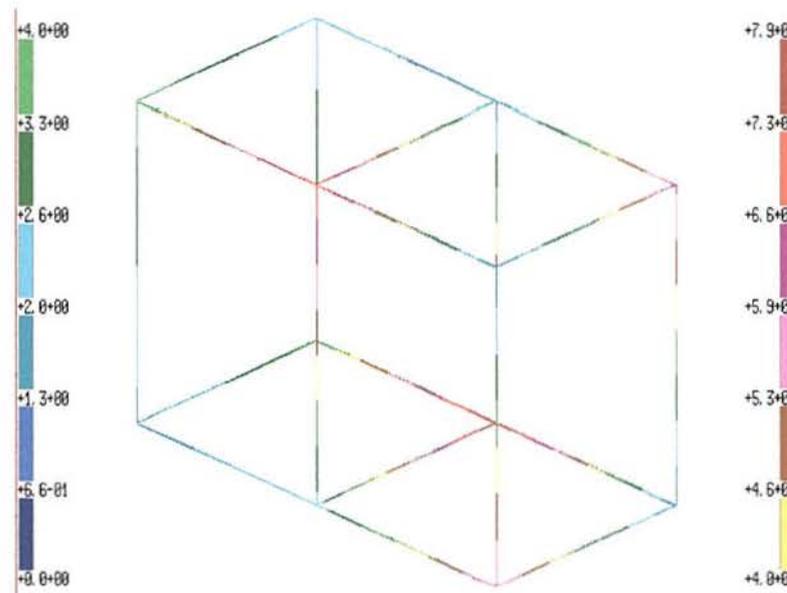


Figura (3.38) - Distribuição de tensões de von Mises máximas [kgf/cm²].

Verifica-se que a tensão equivalente máxima vale 7,92 kgf/cm² e ocorre no nó 6, ver figura (3.37). Comparando-se este resultado com 10 kgf/cm², valor máximo aproximado fornecido pela figura (3.36a), tem-se um erro relativo de 20,8%.

Conforme comentado no início deste capítulo, os resultados apresentados nas figuras (3.34), (3.35) e (3.36) estão sujeitos a erros de representação. Para eliminar-se este erro fez-se o cálculo das tensões e a representação das mesmas por planos, obtendo-se a figura (3.39).

Verifica-se pela mesma, que a tensão de von Mises máxima ocorre no plano a), mais especificamente no nó 6, o que coincide com os resultados anteriormente apresentados. A figura (3.40) ilustra um detalhe desta região de tensão máxima. Comparando-se este resultado com o da figura (3.36a), pode-se notar a influência do erro de representação já que a malha utilizada, em ambas as figuras, é a mesma.

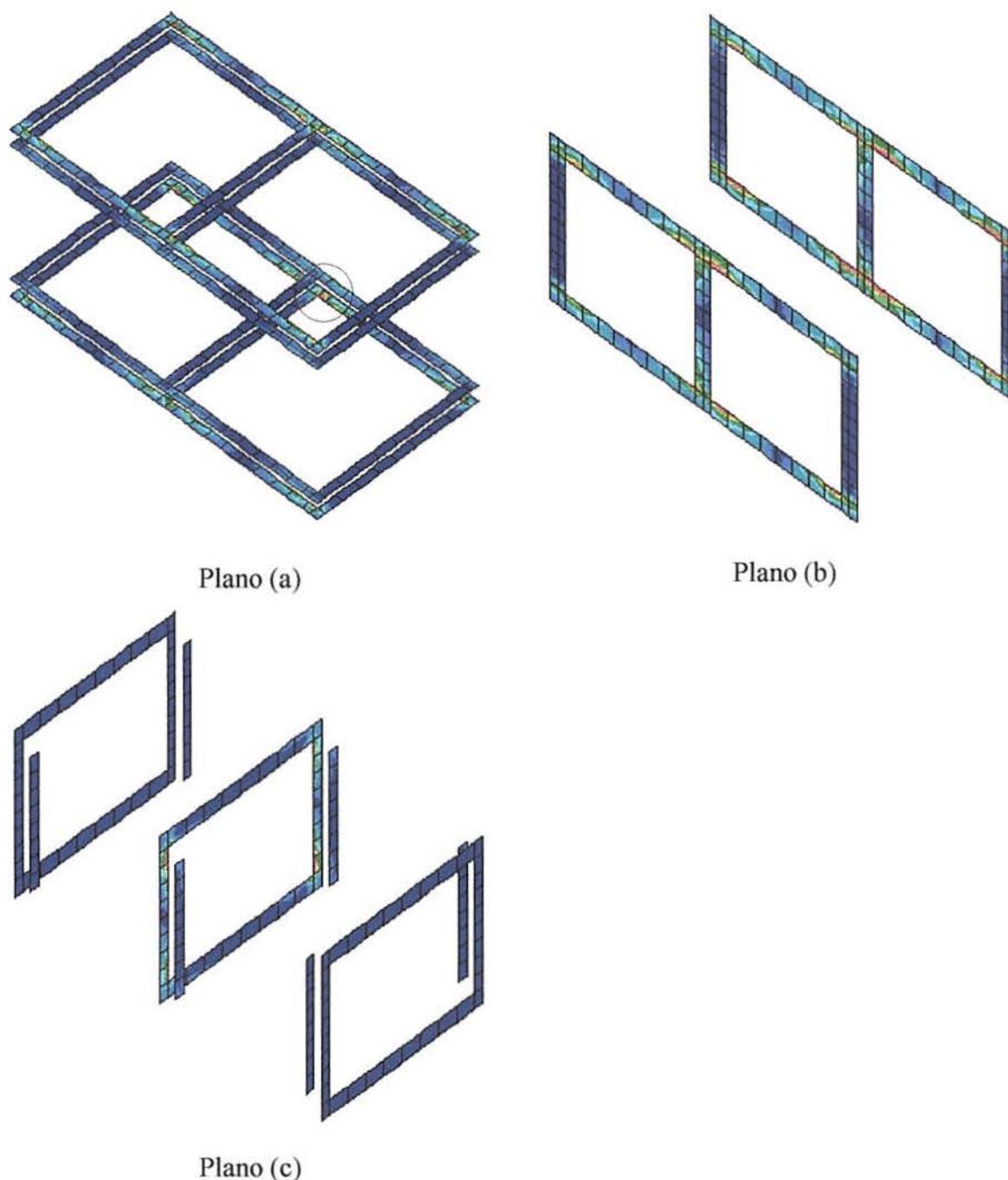


Figura (3.39) - Distribuição da tensão de von Mises por planos [kgf/cm^2].

O procedimento de cálculo adotado é semi-automático. O usuário deve fornecer a lista dos elementos que são paralelos a um dos planos geométricos existentes na estrutura. Depois disto, o procedimento para cálculo das tensões equivalentes e representação destas usa os mesmos comandos comuns do GAELI (GROEHS & SANTOS - 1990).

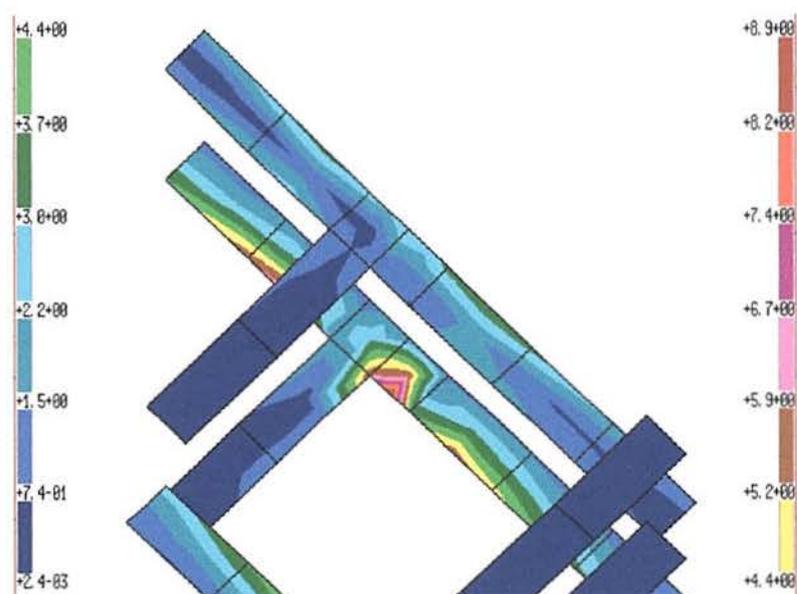


Figura (3.40) - Distribuição da tensão de von Mises [kgf/cm²] - detalhe da ligação 6.

Comparando-se a tensão equivalente máxima, 8,9 kgf/cm², obtida na figura (3.40) com a tensão correspondente obtida na figura (3.38), tem-se um erro relativo, assumindo-se o modelo de cascas como exato, de 11%.

Calculando-se agora as tensões médias nos nós por um processo de suavização de tensões por planos (AYMONE – 1996), que é mais correto do que o processo usualmente utilizado para o cálculo das tensões médias nos nós, obtém-se a distribuição de tensão equivalente apresentada na figura (3.41).

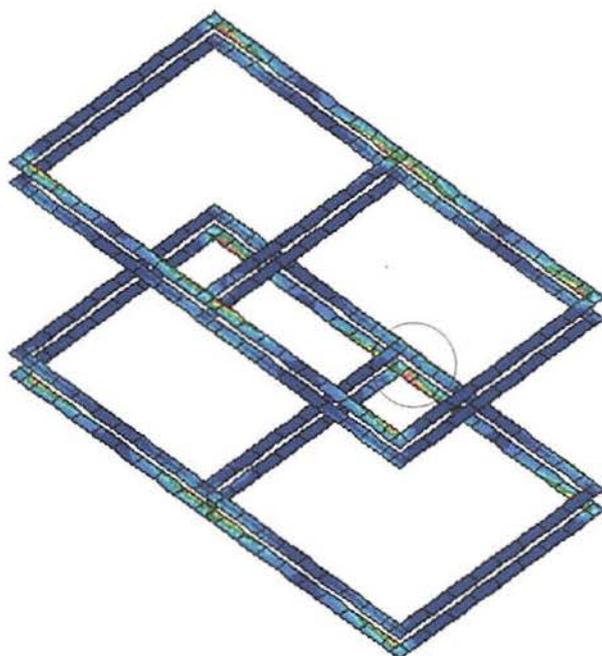


Figura (3.41) - Tensão de von Mises, suavizada por planos, no plano horizontal.

A figura (3.42) apresenta um detalhe da região de tensão de von Mises máxima, nó 6, que está indicada na figura anterior. Comparando-se esta tensão, $8,5 \text{ kgf/cm}^2$, com o valor máximo obtida pelo modelo de barras obtém-se um erro relativo de 6,8%.

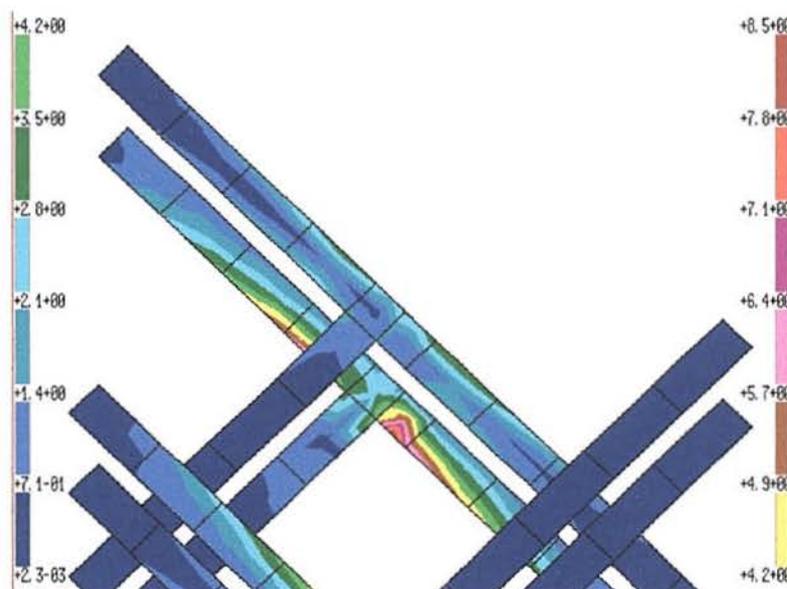


Figura (3.42) – Detalhe da tensão de von Mises [kgf/cm^2] no nó 6.

Analisando-se a distribuição da estimativa de erro da malha verifica-se que a malha a) apresenta um erro médio de 2,98%, e um erro máximo de 21% localizado na região das juntas. Portanto, pode-se considerar que a malha a) de elementos de casca apresenta resultados razoáveis podendo ser considerada uma boa malha a não ser na região das juntas. Verifica-se também que o empenamento restringido não é importante neste exemplo devido à pequena diferença de resultados entre o modelo de casca e o modelo de barras. Isto ocorre porque o perfil usado tem uma espessura de 10 mm, o que aumenta consideravelmente a sua rigidez. Entretanto é de se esperar que empregando malhas mais refinadas na região das juntas, os valores das tensões sofram um aumento.

3.3 CONCLUSÕES RELATIVAS AOS ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

Os elementos de casca de 4 nós tiveram um fraco desempenho devido às funções de interpolação usadas para o EPT. Os elementos SC, LC e SM1b tiveram desempenhos semelhantes. Os deslocamentos são melhor descritos pelos elementos LC e SM1b, mas quanto às tensões não há grandes diferenças nos resultados obtidos. Os elementos LC e SM1b são mais lentos no processamento do que o SC devido ao processo de condensação estática. O elemento SM2b tem o melhor comportamento quanto aos deslocamentos, porém, tem

resultados instáveis em tensões, para os casos de torção, devido à introdução da segundo nível de funções bolha.

A utilização de elementos de casca permite analisar de melhor forma o problema do empenamento restringido. O uso de elementos com razão de aspecto maior que 1 não exerce muita influência nos resultados obtidos em deslocamentos. A mesma observação é válida para a tensão σ_x para os casos de estruturas planas.

Nos casos com empenamento totalmente restringido, ocorre um erro comparando-se a solução teórica com a numérica, na região próxima ao engaste, que não é reduzido com a utilização de malhas mais refinadas, mantendo-se a característica de malha uniforme. Entretanto, este problema não é grave já que a grande maioria das ligações são elásticas.

Quanto ao uso de elementos finitos, em estruturas planas, com razão de aspecto maior que 1 notou-se que a formulação de EPT utilizando as funções Serendipity, para elemento de 8 nós, é bastante robusta. Estes elementos suportam razões de aspecto até maiores que 10 sem grandes comprometimentos nos resultados. A formulação de placa; neste caso se incluem os elementos DKQ, SC, LC SM1b e SM2b; fornece resultados mais modestos quanto ao uso de razões de aspecto maiores. Considerando-se como critério a não alteração dos valores máximos de tensões equivalentes e a manutenção, de modo aproximado, da forma de distribuição das mesmas, pode-se dizer que o valor máximo recomendado da r.a. é em torno de 4. Considerando-se apenas a não alteração dos valores máximos das tensões equivalentes este valor pode ser elevado até 10 para os casos de flexão, e até a faixa entre 8 e 10 para os casos de torção.

No caso de estruturas tridimensionais a influência do aumento da razão de aspecto é bastante grande. Não se recomenda o uso de razões maiores que 4 para se ter uma distribuição das tensões σ_x razoável. Para as tensões equivalentes, segundo os resultados obtidos, pode-se empregar elementos com razão de aspecto de até 8.

A representação da torção em perfis é mais difícil do que a flexão quando se trabalha com elementos finitos. Notou-se influência nos resultados, referentes à torção, causada pelo tipo de perfil. Constatou-se que a análise de perfis do tipo Z é mais crítica que a de perfis C que, por sua vez, é mais crítica que a de perfis I (MORSCH – 1997b). É provável que este comportamento tenha relação com as características de simetria destas seções.

4. ANÁLISE DE VEÍCULO SUBMETIDO À CARGAS DE EXCITAÇÃO NA BASE

As cargas dinâmicas que atuam num ônibus, em condições normais de uso, são causadas pelas irregularidades nas pistas de rodagem e pelas acelerações longitudinais e laterais. A formulação desenvolvida neste capítulo atende ao primeiro caso visando realizar uma análise de fadiga do veículo. No formulário a ser apresentado serão utilizados conceitos relativos ao uso da transformada de Fourier e da *função densidade espectral de potência* (que pode estar abreviada como **FDEP**), que estão apresentados sucintamente no anexo E. Textos mais completos a respeito deste assunto encontram-se em BENDAT & PIERSOL (1966), YANG (1986), RIERA (1989), CLOUGH & PENZIEN (1993), NEWLAND (1993).

4.1 CONSIDERAÇÕES CINEMÁTICAS

Inicialmente define-se as irregularidades da pista que são representadas pela coordenada Z . Considera-se que estas são função apenas das coordenadas cartesianas no plano da pista, ou seja $Z = f(x, y)$, conforme figura (4.1). Considera-se que o veículo analisado realiza um *movimento retilíneo uniforme* com velocidade horizontal V . Esta é uma hipótese padrão, já que levar em conta a realização de um movimento retilíneo acelerado ou de um movimento circular uniforme dificulta a aplicação do método do comprimento de onda, item 4.2, logo estas considerações não serão abordadas neste trabalho.

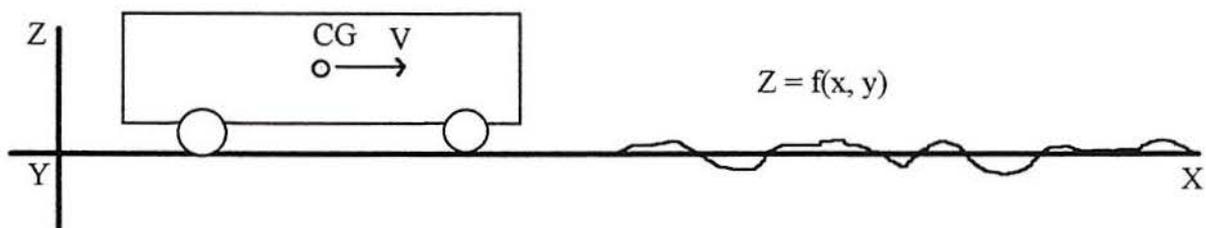


Figura (4.1) - Esquema para determinação da velocidade e aceleração vertical.

O deslocamento do veículo sobre a pista é equivalente, em termos de movimento relativo, a supor a pista deslocando-se ficando o veículo parado. Com isto as irregularidades da base induzem o deslocamento vertical da roda. A velocidade vertical desta é determinada

derivando-se o seu deslocamento no tempo ou seja derivando-se Z em relação ao tempo. Aplicando-se a regra da derivada em cadeia, e sabendo-se que a velocidade na direção y é nula, $\frac{dy}{dt} = 0$, obtém-se a equação (4.1) que pode ser reescrita utilizando-se a velocidade horizontal V conforme a equação (4.2).

$$Z' = \frac{d f(x,y)}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (4.1)$$

$$Z' = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot V \quad (4.2)$$

A aceleração vertical é calculada como sendo a derivada da velocidade em relação ao tempo. Aplicando-se a regra da derivada em cadeia duas vezes, e levando em conta ainda que o veículo não possui aceleração horizontal, $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = 0$, se realizam as operações indicadas em (4.3), e se obtém a expressão final (4.4).

$$Z'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \cdot V + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \cdot V$$

$$Z'' = V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \cdot \frac{dy}{dt} \right] \quad (4.3)$$

$$Z'' = V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \cdot \frac{dx}{dt} \right]$$

$$Z'' = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \cdot V^2 \quad (4.4)$$

Pelas expressões (4.2) e (4.4) nota-se que a velocidade e a aceleração verticais são funções das irregularidades da pista e da velocidade horizontal. Portanto, para cada uma das rodas do veículo haverá uma entrada distinta de deslocamento, velocidade e aceleração verticais. Entretanto, uma vez que este realiza movimento retilíneo, pode-se dizer que a história de entrada das rodas situadas num mesmo lado do veículo são iguais havendo apenas uma pequena defasagem de tempo entre elas, que é igual a distância entre eixos do veículo dividida pela velocidade V do mesmo.

Neste trabalho adota-se a hipótese de contato pneu-pista do tipo pontual ou seja o efeito do tamanho da zona de contato, o que gera uma média local com um campo aleatório não é considerado.

4.2 DESCRIÇÃO DA PISTA DE ROLAMENTO

Uma pista de rodagem com irregularidades aleatórias pode ser caracterizada por um campo aleatório estacionário desde que as grandes irregularidades, como buracos na pista, sejam tratadas separadamente (DODDS & ROBSON - 1973). Neste texto, a pista é descrita por um espectro de potência das irregularidades que considera a mesma como realizações de um *campo aleatório gaussiano isotrópico bidimensional e homogêneo* (o termo homogêneo indica que o campo é ergódico). Este modelo considera a superfície da rodovia como sendo uma função aleatória de duas variáveis: x , medido ao longo da rodovia, e y , medido ao largo da rodovia, conforme ilustrado na figura (4.2) (DODDS & ROBSON - 1973).

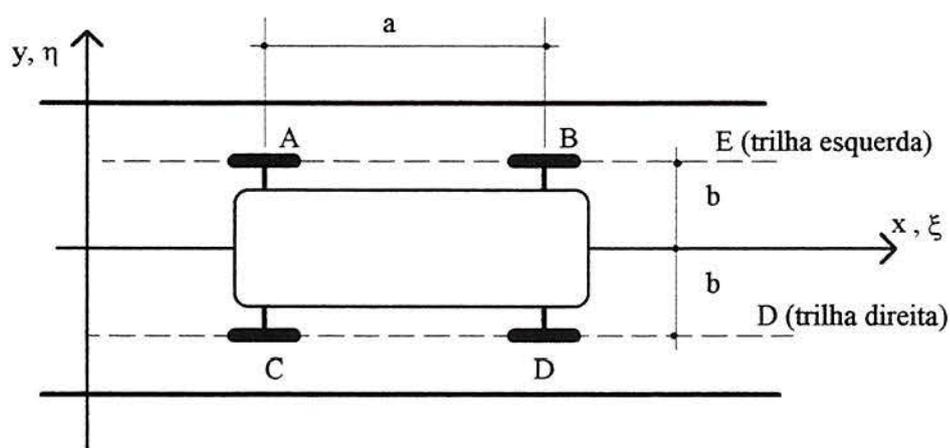


Figura (4.2) - Descrição da pista.

No caso de uma excitação aleatória com distribuição gaussiana e com média zero somente é necessário determinar, a partir do histórico da excitação, os momentos de segunda ordem (espectros de potência) para obter uma descrição estatística suficiente do processo.

Um veículo de quatro rodas andando numa pista é submetido a 4 deslocamentos impostos, um em cada roda. A descrição da superfície da pista deve ser completa o suficiente para representar os deslocamentos impostos e as correlações entre eles. As propriedades desta superfície podem ser obtidas por medições tomadas de uma única trilha, ao longo da pista, já que as propriedades estatísticas são as mesmas em todas as direções (Hipótese Isotrópica).

Quando a superfície da pista de rodagem pode ser considerada como realizações de um campo aleatório, uma função de correlação bidimensional fornece a descrição estatística necessária. Esta função é determinada pela medição do perfil da superfície num plano fixo, direção longitudinal, definindo-se o deslocamento $Z(x_r, y_r)$ para todos os pontos (x_r, y_r) . A partir destes valores pode-se obter a função de correlação geral conforme (4.5).

$$R(x_r, y_r; x_s, y_s) = E[Z(x_r, y_r) \cdot Z(x_s, y_s)] \quad (4.5)$$

O estabelecimento desta função de autocorrelação é um processo bastante trabalhoso tanto para aquisição de dados quanto para o cálculo da mesma. Assumindo-se agora que as irregularidades da superfície da pista são um campo aleatório gaussiano bidimensional e homogêneo, pode-se definir a função de correlação bidimensional como

$$R(\xi, \eta) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y Z(x, y) Z(x + \xi, y + \eta) dx dy \quad (4.6)$$

que pode ser reescrita como

$$R(\xi, \eta) = E[Z(x, y) \cdot Z(x + \xi, y + \eta)]. \quad (4.7)$$

Assumindo-se agora que o processo também é isotrópico ou seja que este tem simetria circular, obtém-se alguns resultados interessantes. Fazendo-se $\xi = 0$ e $\eta = 0$ na equação (4.7) se obtém a função de autocorrelação nas direções x e y conforme (4.8).

$$R_x(\xi) = R(\xi, 0), R_y(\eta) = R(0, \eta) \quad (4.8)$$

As correlações cruzadas entre os deslocamentos nas duas trilhas, definidas por $y = b$ e $y = -b$, podem ser expressas por (4.9), na qual o índice D representa a trilha direita e E a trilha esquerda,

$$R_{DE} = E[Z_D(x) \cdot Z_E(x + \xi)] = E[Z(x, -b) \cdot Z(x + \xi, b)] = R(\xi, 2b) \quad (4.9)$$

e pelo mesmo raciocínio se obtém (4.10).

$$R_{ED} = E[Z_E(x) \cdot Z_D(x + \xi)] = E[Z(x, b) \cdot Z(x + \xi, -b)] = R(\xi, -2b) \quad (4.10)$$

Entretanto, a função de autocorrelação $R(\xi, \eta)$ deve ser simétrica em ξ e η , logo das expressões (4.9) e (4.10) pode-se concluir que

$$R_{DE}(\xi) = R_{ED}(\xi) = R_{DE}(-\xi) \quad (4.11)$$

o que implica que a correlação cruzada entre deslocamentos tomados em duas trilhas paralelas e separadas pela distância $2b$ (bitola) é igual. Isto implica que o espectro de potência cruzado $S_{DE}(n)$ deve ser um valor real expresso, como exemplo, por

$$S_{DE}(n) = S_{ED}(n) = S_c(n) \quad (4.12)$$

na qual n é o número de onda que está definido em (4.21).

Como o processo é homogêneo, a função de autocorrelação do perfil de irregularidades ao longo de uma linha reta qualquer deve ter uma forma idêntica ao perfil de irregularidades de uma outra reta qualquer paralela a primeira, logo, pode-se escrever a (4.13) e a correspondente relação espectral (4.14)

$$R_E(\xi) = R_D(\xi) \quad (4.13)$$

$$S_E(n) = S_D(n) = S(n) \quad (4.14)$$

na qual $S_E(n)$ e $S_D(n)$ são os espectros de potência das irregularidades das trilhas esquerda e direita expressos em termos do número de onda.

A isotropia requer que $R(\xi, 0) = R(0, \eta)$ para $\xi = \eta$ e que a relação (4.15) se verifique. As variáveis ρ e θ , usadas nesta relação, estão definidas na figura (4.3). As equações (4.10) e (4.15) implicam na expressão (4.16).

$$R(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R(\rho) \quad (4.15)$$

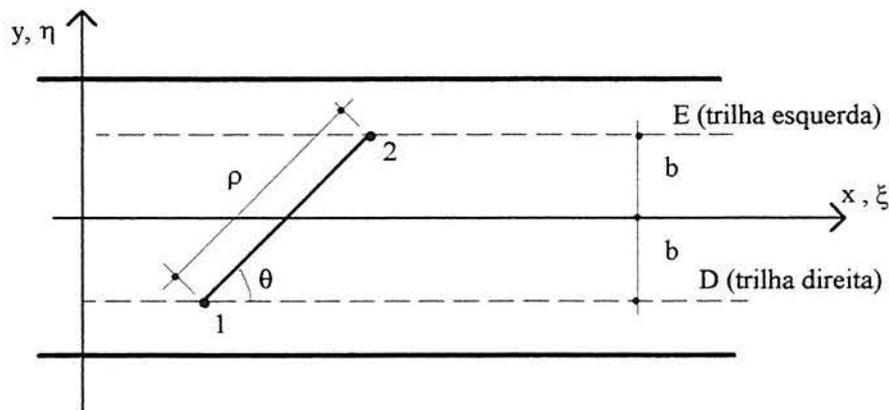


Figura (4.3) - Parâmetros para descrever a superfície de uma pista bidimensional.

$$R_{ED}(\xi) = R(\rho) = R(\sqrt{\xi^2 + 4b^2}) \quad (4.16)$$

O espectro de potência unilateral dos perfis $Z_D(x)$ e $Z_E(x)$ das duas trilhas separadas pela distância $2b$ é determinado pela (4.17). Logo, conhecendo-se a função de autocorrelação $R(\xi)$ para uma única trilha na direção x , conhece-se a forma de $R(\rho)$ em outra direção bastando aplicar a equação (4.16). Neste caso, o espectro de potência cruzado é determinado pela expressão (4.18).

$$G(n) = \int_{-\infty}^{\infty} 2R(\xi) e^{-2i\pi n \xi} d\xi \quad (4.17)$$

$$G_c(n) = \int_{-\infty}^{\infty} 2R_{ED}(\xi) e^{-2i\pi n \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} 2R(\rho) e^{-2i\pi n \xi} d\xi, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + 4b^2} \quad (4.18)$$

DODDS & ROBSON (1973) definem uma função de coerência como sendo

$$g(n) = \frac{G_c(n)}{G(n)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} 2R(\sqrt{\xi^2 + 4b^2}) e^{-2i\pi n \xi} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} 2R(\xi) e^{-2i\pi n \xi} d\xi} \quad (4.19)$$

Em aplicações práticas pode-se dizer que $g(n)$ tende à unidade para pequenos números de onda e tende a zero para grandes números de onda.

Não se espera que as pistas de rodagem sejam *homogêneas e isotrópicas*. Porém, a isotropia usada em conjunto com um espectro único do perfil das irregularidades medido diretamente, leva a valores de coerências entre os perfis de diferentes trilhas, que se aproximam bastante das coerências estabelecidas por medição. Logo, espera-se que funções de coerência obtidas a partir da isotropia sejam uma expressão próxima da realidade. Esta é uma hipótese utilizável dentro da maioria das aplicações (KAMASH & ROBSON - 1977b).

4.2.1 Espectro de Potência de uma Trilha

Representando-se por λ [m]* o comprimento de onda das irregularidades da estrada, pode-se representar o número de onda φ [rd/m] pela (4.20). Por definição obtém-se o número de onda n [ciclos/m] através da relação (4.21).

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.20)$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} \quad (4.21)$$

Como o veículo se move com uma velocidade constante V [m/s], um comprimento de onda λ é coberto num tempo ou período T definido pela relação (4.22), e sabendo-se que a frequência circular é definida como $\omega = 2\pi/T$ pode-se escrever a relação (4.23).

* Em alguns casos, coloca-se em destaque no texto a unidade de uma variável através da notação: [unidade].

$$T = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi}{\phi V} \quad (4.22)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} V = 2\pi n V \quad (4.23)$$

Para uma determinada trilha a **FDEP** unilateral, $G_z(n)$, das irregularidades é definido através da relação (4.24) que calcula o valor quadrático médio.

$$E[Z^2] = \int_0^{\infty} G_z(n) dn \quad (4.24)$$

Para se expressar $G_z(n)$ em função da frequência circular utiliza-se a (4.23), de modo que $dn = d\omega/2\pi V$, na expressão (4.24) obtendo-se a (4.25).

$$E[Z^2] = \frac{1}{2\pi V} \int_0^{\infty} G_z(n) d\omega = \frac{1}{4\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} G_z(n) d\omega \quad (4.25)$$

Sabendo-se que o valor quadrático médio do deslocamento Z corresponde à área da curva do espectro de potência conforme expressão (4.26), e considerando-se o resultado (4.25), conclui-se que a relação entre a **FDEP** bilateral $S_z(\omega)$ e a **FDEP** unilateral $G_z(n)$ é dada pela expressão (4.27).

$$E[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega \quad (4.26)$$

$$S_z(\omega) = \frac{1}{4\pi V} G_z(n) \quad (4.27)$$

O modelo isotrópico utilizado é amplamente empregado com espectros de perfis previamente estabelecidos. Várias propostas para descrições analíticas de espectro de perfis foram feitas as quais podem ser utilizadas para representar diferentes tipos de estradas (ASHMORE & HODGES - 1992). Uma delas, baseada num espectro obtido através de um grande número de medições, é

$$\begin{aligned} G_z(n) &\propto n^{-w_1}, \quad 0 \leq n \leq n_0 \\ G_z(n) &\propto n^{-w_2}, \quad n \geq n_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que w_1 e w_2 recebem valores conforme o tipo de estrada e n_0 é um comprimento de onda especificado (normalmente $1/2\pi$ ciclos/m, o que corresponde a um comprimento de onda de 6,3 m, o qual é utilizado em técnicas de construção de pistas). No entanto, a expressão (4.28)

não é de uso prático. Esta expressão foi substituída pela (4.29) na qual $G_z(n)$ é a **FDEP** das irregularidades, em $m^3/ciclo$, $w = 2,5$ e c é obtido em função da estrada conforme tabela (4.1). As unidades da constante c são compatíveis com as demais unidades desta expressão. O comportamento desta função é assintótico com relação aos dois eixos, figura (4.4.a), e representa uma reta num gráfico em escala logarítmica conforme figura (4.4.b). Para auxiliar a escolha da constante c a tabela (4.1) fornece uma faixa de valores para o desvio padrão das irregularidades, $\psi_{irreg.}$, que é calculado conforme o anexo F (KAMASH & ROBSON – 1977a).

$$G_z(n) = c \cdot n^{-w} \quad (4.29)$$

Tabela (4.1) - Obtenção de c .

Tipo de Estrada	Qualidade da Estrada	$\psi_{irreg.}$ (cm)	c ($\times 10^{-8}$)
auto-estradas	muito boa	0,58 a 1,15	2 - 8
	boa	1,15 a 2,31	8 - 32
estradas principais	muito boa	0,58 a 1,15	2 - 8
	boa	1,15 a 2,31	8 - 32
	média	2,31 a 4,62	32 - 128
estradas secundárias	pobre	4,62 a 9,13	128 - 500
	média	2,31 a 4,62	32 - 128
	pobre	4,62 a 9,13	128 - 500
	muito pobre	9,13 a 22,4	500 - 3000

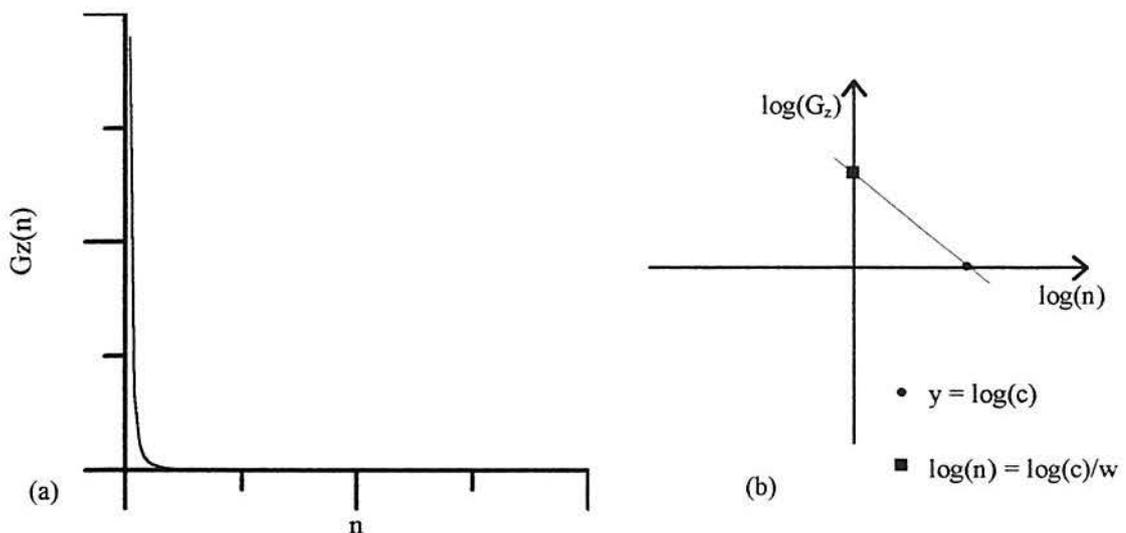


Figura (4.4) - Representação da **FDEP** das irregularidades em função de n .

O gráfico apresentado na figura (4.5) ilustra a variação da função de coerência $g(n)$. Este gráfico foi construído para valores usuais de w e para uma bitola $2b = 1,2$ m. A tabela (4.2) é útil para interpolar este gráfico para fins de programação. Pode-se notar que o valor de $g(n)$ para $n < 0,01$ é 1 e para $n > 0,8$ é zero. Para obter-se os valores de $g(n)$ para outras bitolas deve-se empregar um número de onda corrigido n_{eq} , equação (4.30), para entrar na tabela (4.2) ou no gráfico (4.5).

$$n_{eq} = n \frac{b}{0,6} \quad (4.30)$$

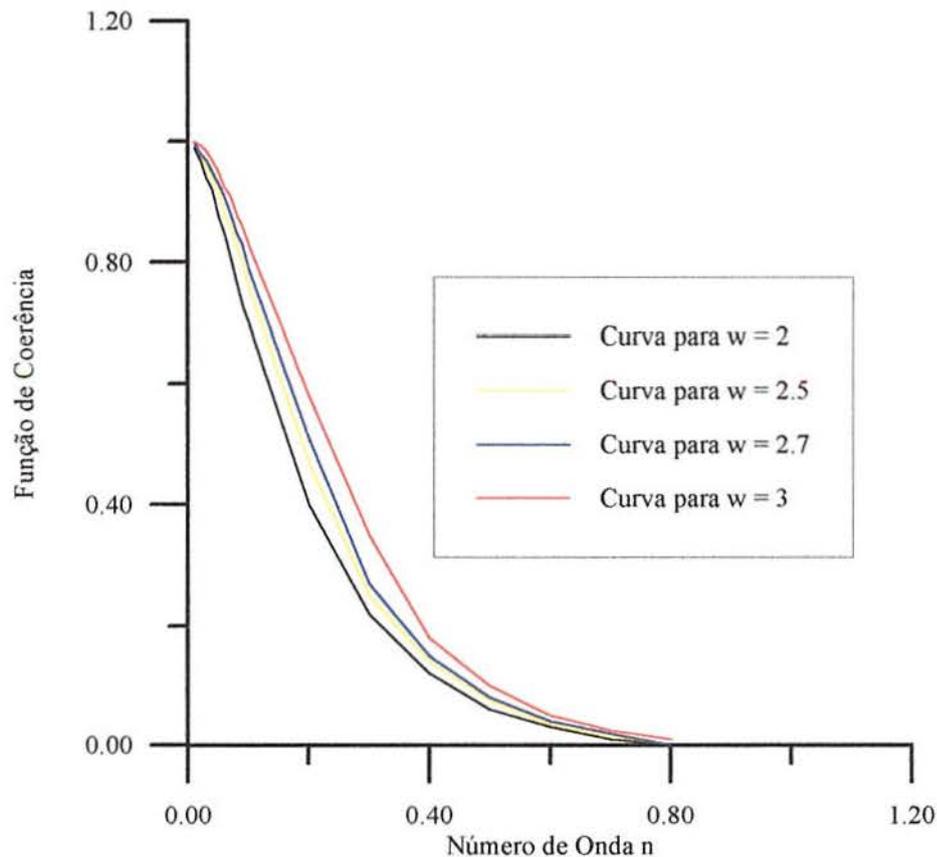


Figura (4.5) - Variação da função de coerência com w .
Da esquerda para direita $w = 2; 2,5; 2,7; 4$.

Pela figura (4.5) pode-se notar que a função de coerência é fracamente afetada pela troca de valores de w dentro da faixa de valores relevantes na prática, $2 \leq w \leq 3$, por este motivo emprega-se o valor médio da faixa ou seja 2,5 na equação (4.29).

Tabela (4.2) - Dados para interpolação de $g(n)$.

n	w = 2	w = 2,5	w = 2,7	w = 3
0,01	0,99	1,00	1,00	1,00
0,02	0,97	0,98	0,98	0,995
0,03	0,94	0,96	0,97	0,985
0,04	0,92	0,94	0,95	0,97
0,05	0,875	0,92	0,93	0,95
0,06	0,85	0,88	0,91	0,925
0,07	0,81	0,86	0,88	0,91
0,08	0,77	0,83	0,85	0,88
0,09	0,73	0,80	0,83	0,885
0,1	0,7	0,76	0,79	0,83
0,2	0,4	0,47	0,51	0,58
0,3	0,22	0,25	0,27	0,35
0,4	0,12	0,14	0,15	0,18
0,5	0,06	0,075	0,08	0,10
0,6	0,05	0,035	0,04	0,05
0,7	0,01	0,015	0,02	0,025
0,8	0	0	0	0,01
0,9	0	0	0	0
1	0	0	0	0

4.2.2 Intervalo de Validade da Função $G_z(n)$

A equação (4.29) somente é aplicável sobre uma faixa de números de onda limitada. Em virtude das amostras serem feitas num comprimento limitado de estrada, no qual pode-se esperar qualquer grau de uniformidade, o espectro não pode ser bem definido em números de onda muito baixos. Por outro lado, as técnicas de medição não cobrem altos números de onda. Porém, quando são usados perfis de uma única trilha, como base de uma resposta espectral, são importantes apenas as propriedades compreendidas num intervalo restrito de número de onda, que corresponde a um intervalo de freqüências, o qual limita o espectro da resposta de interesse, e pode ser diferente para distintas aplicações. Na maioria destas, é suficiente considerar freqüências entre 0,5 Hz a 50 Hz e velocidades do veículo entre 5 m/s e 50 m/s. Como a freqüência [Hz] é expressa por $f = n \cdot V$ conclui-se que para os intervalos de freqüência e velocidades citados corresponde um intervalo para n de 0,01 ciclos/m a 10 ciclos/m, ou seja, com uma relação entre o maior e menor número de onda igual a 1000. Qualquer parte do espectro da pista fora desta faixa não influi na previsão da resposta dentro da faixa de interesse. Do mesmo modo, se a descrição da superfície da pista usa o espectro e espectro cruzado de duas trilhas paralelas, suas propriedades fora desta faixa de valores são irrelevantes (KAMASH & ROBSON - 1977a). De modo geral, se assumi que a expressão (4.29) é aplicável a todos os n ou assume-se que ela vale zero para os números de onda mais baixos e mais altos. Porém, indo mais a fundo na questão, nota-se que um espectro de

potência descrito pela (4.29), é inaceitável por dois motivos. Em 1º lugar, a sua validade em números de onda muito baixos é duvidosa. Em 2º lugar, ela viola as condições de admissibilidade já que resulta numa integral sem limites. Admite-se que a expressão (4.29) somente é válida para $0,01 \leq n \leq 10$. Logo, pode-se considerar que a **FDEP** $G_z(n)$ vale zero fora deste intervalo, mas esta hipótese gera incompatibilidade com o modelo isotrópico (KAMASH & ROBSON - 1977b), que é evitada considerando-se que $G_z(n)$ é constante para todo o número de onda menor que 0,01. A expressão (4.31) resume estas conclusões.

$$G_z(n) = \begin{cases} cn_a^{-w}, & 0 \leq n \leq 0,01 \\ cn^{-w}, & 0,01 \leq n \leq 10 \\ 0, & 10 \leq n \end{cases} \quad (4.31)$$

Como adota-se a hipótese de contato pontual entre pneu e pista pode-se considerar que as irregularidades com λ contidos na zona de contato pneu-pista real não têm influência no processo. Tomando-se, para fins de raciocínio, a área de contato de um pneu de ônibus rodoviário descarregado, tem-se que ela vale aproximadamente 30x25 cm. Logo, todos os λ inferiores a 0,3 m ($n = 3,33$) não têm influência na resposta. Portanto, o intervalo de número de onda considerados é $[0,01 ; 3,33]$. Evidentemente os valores considerados são médios já que a área de contato é função da carga do veículo e da calibração dos pneus.

4.2.3 Relação entre as Densidades Espectrais que Atuam numa mesma Trilha

Como o veículo roda sobre trilhas, figura (4.2), se conclui que uma irregularidade da via, que excita uma roda dianteira do veículo, também irá agir na roda traseira após um intervalo de tempo que vale $\Delta t = a/V$, em que a é a distância entre eixos definida na figura (4.2). Logo, pode-se estabelecer uma relação entre as **FDEP** dos deslocamentos da roda dianteira (expoente d) e roda traseira (expoente t) numa mesma trilha conforme expressões (4.32) e (4.33), cujas deduções estão feitas no anexo E. Pelos resultados obtidos nota-se que a **FDEP** dos deslocamentos na roda dianteira é igual ao da roda traseira, e que as **FDEP** cruzadas entre a roda dianteira e a roda traseira são iguais ao espectro de potência dos deslocamentos da roda dianteira.

$$S_{zz}^d(\omega) = S_{zz}^t(\omega) \quad (4.32)$$

$$S_{zz}^d(\omega) = S_{zz}^{td}(\omega) = S_{zz}^{dt}(\omega) \quad (4.33)$$

4.3 A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Deseja-se obter a equação de movimento que representa um veículo de quatro rodas se deslocando sobre uma pista com irregularidades. Para tal considera-se o caso de uma estrutura com múltiplos apoios submetida a excitação na base. A formulação apresentada a seguir considera a possibilidade de movimento independente de cada um dos apoios, o que causa o surgimento de deslocamentos e tensões pseudoestáticas (Este termo se aplica para representar todas as grandezas geradas pelo deslocamento estático da base. Em alguns textos usa-se a expressão *quasi-estático* no seu lugar). Estas últimas devem ser consideradas junto com os efeitos da resposta dinâmica devida às forças inerciais. A formulação é obtida considerando-se a estrutura dividida em duas partes. A primeira parte é formada por todos os nós que não pertencem à base. Já a segunda parte é formada apenas pelos nós que pertencem à base, que no caso deste trabalho serão sempre quatro. Sendo assim, pode-se expressar o vetor de deslocamentos de toda a estrutura, figura (4.6), como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

na qual \mathbf{u}_t reúne os deslocamentos totais correspondentes aos graus de liberdade não bloqueados e não submetidos à excitação de apoio. Os deslocamentos \mathbf{u}_b correspondem aos graus de liberdade cujo movimento é imposto pelo solo com o qual mantém contato*. A equação que nos permite relacionar deslocamentos, velocidades e acelerações dos diversos graus de liberdade é dada pela (4.35) (CLOUGH & PENZIEN - 1993).

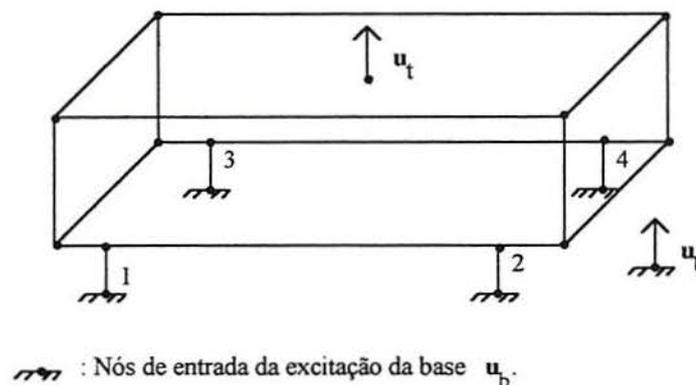


Figura (4.6) - Estrutura com múltiplos apoios submetida a uma excitação na base.
 1 - 4 : Elementos da suspensão tais como molas e amortecedores.
 \mathbf{u}_t : Deslocamento total dos nós da carroceria e chassi.

* Neste trabalho os vetores e matrizes são representados em negrito.

♦ A formulação apresentada não considera a possibilidade de uma roda perder o contato com o solo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_{cb} \\ \mathbf{M}_{bc} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{cb} \\ \mathbf{C}_{bc} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cb} \\ \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

A equação (4.35) expressa as forças de equilíbrio apenas em termos dos graus de liberdade da resposta, não havendo forças externas que correspondam a estes deslocamentos. A expressão para a carga de excitação na base é obtida separando-se o efeito de movimento do suporte dos valores de resposta, e transferindo estes termos para o lado direito da equação. Para isto, os deslocamentos absolutos \mathbf{u}_t são decompostos, conforme (4.36), na soma dos deslocamentos relativos \mathbf{u} devidos à resposta dinâmica com os deslocamentos pseudoestáticos \mathbf{u}_s , que são produzidos no restante da estrutura devido ao deslocamento estático da base \mathbf{u}_b .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Para o caso estático o deslocamento total é igual ao deslocamento pseudoestático, o que é observado fazendo todas as derivadas em relação ao tempo iguais a zero na expressão (4.35). Com este procedimento, obtém-se (4.37) na qual \mathbf{R}_s representa as reações pseudoestáticas.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cb} \\ \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Da primeira linha da (4.37) escreve-se a (4.38) a partir da qual pode-se determinar os deslocamentos pseudoestáticos \mathbf{u}_s , executando-se a operação indicada na (4.39) na qual \mathbf{G}_{cb} é a matriz dos coeficientes de influência.

$$\mathbf{K}_{cc} \mathbf{u}_s + \mathbf{K}_{cb} \mathbf{u}_b = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cb} \mathbf{u}_b = \mathbf{G}_{cb} \mathbf{u}_b \quad (4.39)$$

Substituindo a relação (4.36) na primeira linha da (4.35) obtém-se

$$\mathbf{M}_{cc} (\ddot{\mathbf{u}}_s + \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{M}_{cb} \ddot{\mathbf{u}}_b + \mathbf{C}_{cc} (\dot{\mathbf{u}}_s + \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{C}_{cb} \dot{\mathbf{u}}_b + \mathbf{K}_{cc} (\mathbf{u}_s + \mathbf{u}) + \mathbf{K}_{cb} \mathbf{u}_b = \mathbf{0} \quad (4.40)$$

a partir da qual, utilizando-se a expressão (4.38), e mantendo-se no lado esquerdo da equação resultante apenas os termos multiplicados pelos deslocamentos dinâmicos relativos \mathbf{u} , obtém-se a equação (4.41).

$$\mathbf{M}_{cc} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{cc} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{cc} \mathbf{u} = -\mathbf{M}_{cc} \ddot{\mathbf{u}}_s - \mathbf{M}_{cb} \ddot{\mathbf{u}}_b - \mathbf{C}_{cc} \dot{\mathbf{u}}_s - \mathbf{C}_{cb} \dot{\mathbf{u}}_b \quad (4.41)$$

Nesta expressão não há nenhum termo de rigidez no lado direito devido a definição da matriz de deslocamentos pseudoestáticos, expressão (4.38), a qual irá eliminar qualquer entrada associada com a componente de amortecimento viscoso proporcional à rigidez (CLOUGH & PENZIEN - 1993).

Considerando que a matriz \mathbf{G}_{cb} é constante no tempo, já que o problema estudado é linear, pode-se facilmente determinar as acelerações $\ddot{\mathbf{u}}_s$ e velocidades $\dot{\mathbf{u}}_s$ pseudoestáticas calculando-se as correspondentes derivadas da expressão (4.39). Substituindo-se estes resultados na (4.41) obtém-se a equação de movimento na sua forma final conforme (4.42).

$$\mathbf{M}_{cc}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{cc}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{cc}\mathbf{u} = (-\mathbf{M}_{cc}\mathbf{G}_{cb} - \mathbf{M}_{cb})\ddot{\mathbf{u}}_b + (-\mathbf{C}_{cc}\mathbf{G}_{cb} - \mathbf{C}_{cb})\dot{\mathbf{u}}_b \quad (4.42)$$

As reações nos apoios \mathbf{R}_b e as forças elásticas \mathbf{F}_c podem ser obtidas da (4.35) considerando apenas a parcela que envolve a matriz de rigidez ou seja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cb} \\ \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \\ \mathbf{R}_b \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Tomando-se a primeira equação desta parcela, decompondo-se os deslocamentos totais \mathbf{u}_t conforme (4.36) e utilizando-se o resultado (4.38) chega-se a (4.44). Nota-se que as forças elásticas dependem somente dos deslocamentos dinâmicos.

$$\mathbf{K}_{cc}\mathbf{u} = \mathbf{F}_c \quad (4.44)$$

Para determinar as reações nos apoios toma-se a segunda linha da (4.43) e aplica-se nesta as relações (4.36) e (4.39), obtendo-se como resultado a (4.45).

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{K}_{bc}\mathbf{u} + (\mathbf{K}_{bc}\mathbf{G}_{cb} + \mathbf{K}_{bb})\mathbf{u}_b = \mathbf{K}_{bc}\mathbf{u} + \mathbf{R}_s \quad (4.45)$$

A primeira parcela da expressão resultante corresponde às reações devido aos deslocamentos dinâmicos relativos e a segunda parcela corresponde às reações pseudoestáticas que já haviam sido definidas na segunda linha da (4.37).

4.3.1 Definição das Matrizes da Equação de Movimento

Analisando-se as matrizes de massa, amortecimento e rigidez utilizadas na expressão (4.42) com auxílio do esquema da figura (4.7) tem-se:

M_{cc}	M_{cb}	C_{cc}	C_{cb}	K_{cc}	K_{cb}
M_{bc}	M_{bb}	C_{bc}	C_{bb}	K_{bc}	K_{bb}

Figura (4.7) - Esquema das matrizes de massa, amortecimento e rigidez.

- M_{cc} é a matriz de massa do chassi e da carroceria. Nas posições da diagonal, correspondentes aos nós de ligação com a suspensão, está somada a contribuição da massa da suspensão;
- M_{cb} e M_{bc} representam o acoplamento de massa do chassi e carroceria com a suspensão;
- M_{bb} é a matriz de massa da suspensão. Ela representa a massa dos amortecedores, molas e demais elementos da suspensão, sendo essencialmente uma matriz diagonal;
- C_{cc} é a matriz de amortecimento do chassi e da carroceria. Nas posições da diagonal, correspondentes aos deslocamentos verticais dos nós de ligação com a suspensão, está somada a contribuição dos amortecedores da suspensão. Admite-se que os amortecedores são montados na posição vertical;
- C_{cb} e C_{bc} representam o acoplamento de amortecimento entre chassi e carroceria com a suspensão;
- C_{bb} é a matriz de amortecimento da suspensão. É representada por elementos de amortecedor, sendo necessariamente diagonal;
- K_{cc} é a matriz de rigidez do chassi e da carroceria. Nas posições da diagonal, correspondentes aos deslocamentos verticais dos nós de ligação com a suspensão, está somada a contribuição das molas da suspensão. Admite-se que as molas são montadas na posição vertical;
- K_{cb} e K_{bc} representam o acoplamento de rigidez entre chassi e carroceria com a suspensão;
- K_{bb} é a matriz de rigidez da suspensão. É representada por elementos de mola sendo, necessariamente diagonal.

Para o caso do problema em estudo, veículo com quatro rodas, o índice b utilizado nas matrizes acima representa até 24 colunas ou 24 linhas, conforme o caso, desde que se considere cada nó da estrutura correspondendo a seis graus de liberdade.

4.3.2 Considerações Práticas sobre a Equação de Movimento

Do ponto de vista prático, sabe-se que a matriz de massa diagonal conduz a resultados equivalentes aos obtidos com a matriz de massa consistente. Devido a isto, com o objetivo de simplificar a formulação serão utilizadas, neste trabalho, matrizes de massa diagonais.

Conseqüentemente as matrizes \mathbf{M}_{cb} e \mathbf{M}_{bc} podem ser consideradas nulas, logo a equação (4.42) pode ser reescrita como (4.46).

$$\mathbf{M}_{cc}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{cc}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{cc}\mathbf{u} = -\mathbf{M}_{cc}\mathbf{G}_{cb}\ddot{\mathbf{u}}_b - (\mathbf{C}_{cc}\mathbf{G}_{cb} + \mathbf{C}_{cb})\dot{\mathbf{u}}_b \quad (4.46)$$

4.3.3 Definição da Excitação

Denominando-se os deslocamentos impostos para cada uma das rodas como: \mathbf{u}_b^{ed} para a roda esquerda dianteira, ponto B da figura (4.2); \mathbf{u}_b^{et} para a roda esquerda traseira, ponto A da figura (4.2); \mathbf{u}_b^{dd} para a roda direita dianteira, ponto D da figura (4.2); e \mathbf{u}_b^{dt} para a roda traseira direita, ponto C da figura (4.2), e fazendo-se ainda

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b^{ed} &= \mathbf{e}_{ed}f_{ed}(t), \quad \dot{\mathbf{u}}_b^{ed} = \mathbf{e}_{ed}\dot{f}_{ed}(t), \quad \ddot{\mathbf{u}}_b^{ed} = \mathbf{e}_{ed}\ddot{f}_{ed}(t) & \mathbf{e}_{ed}^T &= [1\ 0\ 0\ 0] \\ \mathbf{u}_b^{et} &= \mathbf{e}_{et}f_{et}(t), \quad \dot{\mathbf{u}}_b^{et} = \mathbf{e}_{et}\dot{f}_{et}(t), \quad \ddot{\mathbf{u}}_b^{et} = \mathbf{e}_{et}\ddot{f}_{et}(t) & \mathbf{e}_{et}^T &= [0\ 0\ 1\ 0] \\ \mathbf{u}_b^{dd} &= \mathbf{e}_{dd}f_{dd}(t), \quad \dot{\mathbf{u}}_b^{dd} = \mathbf{e}_{dd}\dot{f}_{dd}(t), \quad \ddot{\mathbf{u}}_b^{dd} = \mathbf{e}_{dd}\ddot{f}_{dd}(t) & \mathbf{e}_{dd}^T &= [0\ 1\ 0\ 0] \\ \mathbf{u}_b^{dt} &= \mathbf{e}_{dt}f_{dt}(t), \quad \dot{\mathbf{u}}_b^{dt} = \mathbf{e}_{dt}\dot{f}_{dt}(t), \quad \ddot{\mathbf{u}}_b^{dt} = \mathbf{e}_{dt}\ddot{f}_{dt}(t) & \mathbf{e}_{dt}^T &= [0\ 0\ 0\ 1] \end{aligned} \quad (4.47)$$

na qual as diversas $f(t)$ são funções de excitação das rodas ou seja representam as irregularidades das rodovias. Com estas definições, o vetor \mathbf{u}_b e suas derivadas são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b &= \mathbf{u}_b^{ed} + \mathbf{u}_b^{et} + \mathbf{u}_b^{dd} + \mathbf{u}_b^{dt} \\ \dot{\mathbf{u}}_b &= \dot{\mathbf{u}}_b^{ed} + \dot{\mathbf{u}}_b^{et} + \dot{\mathbf{u}}_b^{dd} + \dot{\mathbf{u}}_b^{dt} \\ \ddot{\mathbf{u}}_b &= \ddot{\mathbf{u}}_b^{ed} + \ddot{\mathbf{u}}_b^{et} + \ddot{\mathbf{u}}_b^{dd} + \ddot{\mathbf{u}}_b^{dt} \end{aligned} \quad (4.48)$$

que substituídas no membro direito da (4.46) permite reescrevê-lo como

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{M}_{cc}\mathbf{G}_{cb}(\ddot{\mathbf{u}}_b^{ed} + \ddot{\mathbf{u}}_b^{et} + \ddot{\mathbf{u}}_b^{dd} + \ddot{\mathbf{u}}_b^{dt}) + (\mathbf{C}_{cc}\mathbf{G}_{cb} + \mathbf{C}_{cb})(\dot{\mathbf{u}}_b^{ed} + \dot{\mathbf{u}}_b^{et} + \dot{\mathbf{u}}_b^{dd} + \dot{\mathbf{u}}_b^{dt}) \quad (4.49)$$

e a expressão (4.46) pode ser reescrita como (4.50).

$$\mathbf{M}_{cc}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{cc}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{cc}\mathbf{u} = -\mathbf{p}(t). \quad (4.50)$$

4.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Para resolver a equação (4.50) será empregado o método modal. Os autovalores ω_n^2 e os autovetores \mathbf{q}_n são determinados sem consideração do amortecimento pela equação (4.51).

$$\mathbf{M}_{cc}\mathbf{q}_n = \frac{1}{\omega_n^2}\mathbf{K}_{cc}\mathbf{q}_n \quad (4.51)$$

A troca do sistema de coordenadas é feita conforme (4.52) na qual Φ é a matriz dos autovetores do sistema e \mathbf{y} é o vetor de coordenadas generalizadas resultantes da transformação. Os autovetores são normalizados conforme (4.53) na qual \mathbf{I} é a matriz identidade e Ω^2 é uma matriz diagonal que contém as frequências naturais ω_i ($i = 1, \dots, N$ modos de vibração), ordenadas em ordem crescente e elevadas ao quadrado.

$$\mathbf{u} = \Phi\mathbf{y}, \quad \Phi = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_N] \quad (4.52)$$

$$\Phi^T\mathbf{M}_{cc}\Phi = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \Phi^T\mathbf{K}_{cc}\Phi = \Omega^2 \quad (4.53)$$

Escrevendo-se a (4.50) em coordenadas generalizadas obtém-se

$$\mathbf{M}_{cc}\Phi\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{cc}\Phi\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_{cc}\Phi\mathbf{y} = -\mathbf{p}(t) \quad (4.54)$$

e pré-multiplicando esta expressão por Φ^T obtém-se a expressão (4.55) que pode ser reescrita, aplicando-se as propriedades de ortogonalidade dos autovetores, como (4.56).

$$\Phi^T\mathbf{M}_{cc}\Phi\ddot{\mathbf{y}} + \Phi^T\mathbf{C}_{cc}\Phi\dot{\mathbf{y}} + \Phi^T\mathbf{K}_{cc}\Phi\mathbf{y} = -\Phi^T\mathbf{p}(t) \quad (4.55)$$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{y}} + \Phi^T\mathbf{C}_{cc}\Phi\dot{\mathbf{y}} + \Omega^2\mathbf{y} = -\Phi^T\mathbf{p}(t) \quad (4.56)$$

A ortogonalidade dos autovetores com respeito à matriz de amortecimento de *Rayleigh*, não pode ser utilizada devido às perturbações localizadas introduzidas pelos amortecedores da suspensão em alguns elementos desta. Para resolver este problema faz-se

$$\mathbf{C}_{cc} = \mathbf{C}_{cc}^c + \mathbf{C}_{cc}^s \quad \text{em que} \quad \mathbf{C}_{cc}^c = a_k\mathbf{K}_{cc} + a_m\mathbf{M}_{cc} \quad (4.57)$$

, na qual \mathbf{C}_{cc}^c é a matriz de amortecimento da carroceria e chassi, que é obtida pelo método de *Rayleigh*, e \mathbf{C}_{cc}^s é a matriz de amortecimento da suspensão que contém, nas posições adequadas, os coeficientes de amortecimento dos amortecedores. É importante salientar que o correto na equação (4.57) seria fazer $\mathbf{C}_{cc}^c = a_k\mathbf{K}_{cc}^c + a_m\mathbf{M}_{cc}^c$, mas como os autovetores utilizados na análise, equação (4.51), são determinados com as matrizes \mathbf{K}_{cc} e \mathbf{M}_{cc} , emprega-se a relação (4.57), que não introduz erro se os fatores a_k e a_m forem calculados de modo correto. Substituindo-se a (4.56) na (4.57) pode-se escrever

$$\ddot{\mathbf{y}} + \Phi^T (\mathbf{C}_{cc}^c + \mathbf{C}_{cc}^s) \Phi \dot{\mathbf{y}} + \Omega^2 \mathbf{y} = -\Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (4.58)$$

e, aplicando-se a propriedade distributiva, já que a transformação para o espaço das coordenadas generalizadas é linear obtém-se a (4.59).

$$\ddot{\mathbf{y}} + \Phi^T \mathbf{C}_{cc}^c \Phi \dot{\mathbf{y}} + \Phi^T \mathbf{C}_{cc}^s \Phi \dot{\mathbf{y}} + \Omega^2 \mathbf{y} = -\Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (4.59)$$

Como a matriz \mathbf{C}_{cc}^c é montada pelo procedimento de *Rayleigh*, pode-se dizer que os autovetores são ortogonais a esta matriz, logo tem-se

$$\Phi^T \mathbf{C}_{cc}^c \Phi \dot{\mathbf{y}} = 2\Xi\Omega \quad (4.60)$$

na qual Ξ é uma matriz diagonal cujos elementos são os coeficientes de amortecimento relativo modal ξ_i ($i = 1, \dots, N$). Substituindo-se esta relação na (4.59) obtém-se a (4.61).

$$\ddot{\mathbf{y}} + 2\Xi\Omega \dot{\mathbf{y}} + \Phi^T \mathbf{C}_{cc}^s \Phi \dot{\mathbf{y}} + \Omega^2 \mathbf{y} = -\Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (4.61)$$

Como os autovetores obtidos em (4.51) não são ortogonais à matriz \mathbf{C}_{cc}^s , o produto $\Phi^T \mathbf{C}_{cc}^s \Phi$ gera uma matriz não diagonal que não permite desacoplar o sistema de equações.

Aplicando-se agora a transformada de Fourier na (4.61), para se resolver a mesma no domínio da frequência, e agrupando-se os termos comuns obtém-se a (4.62).

$$\left[-\omega^2 \mathbf{I} + i\omega(2\Xi\Omega + \Phi^T \mathbf{C}_{cc}^s \Phi) + \Omega^2 \right] \bar{\mathbf{Y}}(\omega) = -\Phi^T \bar{\mathbf{P}}(\omega) \quad (4.62)$$

Dividindo-se ambos os lados desta equação por ω^2 obtém-se a (4.63) que representa um sistema de equações lineares complexas a ser resolvido.

$$\left[\left(\frac{1}{\omega^2} \Omega^2 - \mathbf{I} \right) + \frac{i}{\omega} (2\Xi\Omega + \Phi^T \mathbf{C}_{cc}^s \Phi) \right] \bar{\mathbf{Y}}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \Phi^T \bar{\mathbf{P}}(\omega) \quad (4.63)$$

A solução deste sistema passa pelo cálculo da inversa da matriz entre colchetes, situada no lado esquerdo desta equação, conforme (4.64). O cálculo desta inversa resulta na matriz de resposta complexa do sistema $\bar{\mathbf{H}}(\omega)$ (conhecida como matriz de admitância complexa).

$$\bar{\mathbf{Y}}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \bar{\mathbf{H}}(\omega) \Phi^T \bar{\mathbf{P}}(\omega) \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{H}}(\omega) = \left[\left(\frac{1}{\omega^2} \Omega^2 - \mathbf{I} \right) + \frac{i}{\omega} (2\Xi\Omega + \Phi^T \mathbf{C}_{cc}^s \Phi) \right]^{-1} \quad (4.64)$$

A expressão resultante representa a solução usando-se todos os N autovetores da estrutura ou um número reduzido M , representando os modos mais baixos de vibração, de acordo com o grau de aproximação considerado aceitável. A grande vantagem do processo de solução adotado está no uso de um pequeno número de autovetores, que resulta numa matriz de ordem $M \times M$ que deve ser invertida para cada uma das frequências discretizadas dentro do intervalo considerado importante. Na prática, este processo resulta numa redução do esforço computacional para solução do problema. Na realidade, a solução adotada não calcula a inversa da matriz, mas este aspecto está tratado no capítulo 6. Aproximando-se, portanto, a solução com M autovetores pode-se representar os deslocamentos dinâmicos nas coordenadas geométricas e no domínio da frequência pela (4.65).

$$\bar{\mathbf{U}}(\omega) = \sum_{i=1}^M \mathbf{q}_i \bar{\mathbf{Y}}(\omega) \quad (4.65)$$

4.5 CÁLCULO DOS ESPECTROS DE POTÊNCIA

4.5.1 Espectro de Potência da Carga

Considerando-se a expressão (4.49) e as relações (4.47), define-se a transformada de Fourier da carga e a sua complexa conjugada como (4.66) e (4.67)

$$\bar{\mathbf{P}}(\omega) = \bar{\mathbf{A}}(\omega) (\mathbf{e}_{ed} \bar{F}_{ed} + \mathbf{e}_{et} \bar{F}_{et} + \mathbf{e}_{dd} \bar{F}_{dd} + \mathbf{e}_{dt} \bar{F}_{dt}) \quad (4.66)$$

$$\hat{\mathbf{P}}(\omega) = \hat{\mathbf{A}}(\omega) (\mathbf{e}_{ed} \hat{F}_{ed} + \mathbf{e}_{et} \hat{F}_{et} + \mathbf{e}_{dd} \hat{F}_{dd} + \mathbf{e}_{dt} \hat{F}_{dt}) \quad (4.67)$$

nas quais \bar{F} é a transformada das funções de excitação das rodas $f(t)$ e \hat{F} é a sua complexa conjugada, $\bar{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{A}}$ são definidos em (4.68) e (4.69). O espectro da carga é determinado pela expressão (4.70) que é escrita como (4.71).

$$\bar{\mathbf{A}}(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M}_{cc} \mathbf{G}_{cb} + i\omega (\mathbf{C}_{cc} \mathbf{G}_{cb} + \mathbf{C}_{cb}) \right] \quad (4.68)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M}_{cc} \mathbf{G}_{cb} - i\omega (\mathbf{C}_{cc} \mathbf{G}_{cb} + \mathbf{C}_{cb}) \right] \quad (4.69)$$

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{S}_p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{P} \hat{\mathbf{P}}^T \quad (4.70)$$

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{S}_p(\omega) = \overline{\mathbf{A}}(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\left(\mathbf{e}_{ed} \overline{F}_{ed} + \mathbf{e}_{et} \overline{F}_{et} + \mathbf{e}_{dd} \overline{F}_{dd} + \mathbf{e}_{dt} \overline{F}_{dt} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_{ed} \hat{F}_{ed} + \mathbf{e}_{et} \hat{F}_{et} + \mathbf{e}_{dd} \hat{F}_{dd} + \mathbf{e}_{dt} \hat{F}_{dt} \right) \right] \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \quad (4.71)$$

O produto de cada parcela da (4.71) dá origem a uma densidade espectral correspondente multiplicada pelo fator $1/2\pi$, que pode ser fatorado e simplificado com o correspondente fator do membro esquerdo desta expressão. Deste modo tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p(\omega) = \overline{\mathbf{A}} \cdot \left[\mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{ed}^T S_{ed|ed} + \mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{et}^T S_{et|ed} + \mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{dd}^T S_{dd|ed} + \mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{dt}^T S_{dt|ed} \right. \\ + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{ed}^T S_{ed|et} + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{et}^T S_{et|et} + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{dd}^T S_{dd|et} + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{dt}^T S_{dt|et} \\ + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{ed}^T S_{ed|dd} + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{et}^T S_{et|dd} + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{dd}^T S_{dd|dd} + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{dt}^T S_{dt|dd} \\ \left. + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{ed}^T S_{ed|dt} + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{et}^T S_{et|dt} + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{dd}^T S_{dd|dt} + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{dt}^T S_{dt|dt} \right] \cdot \hat{\mathbf{A}}^T \end{aligned} \quad (4.72)$$

que pode ser simplificada aplicando-se as hipóteses de *isotropia* e *homogeneidade*. Pelas expressões (4.14) e (4.32) obtém-se as relações (4.73) e (4.74), nas quais S_e e S_d são as densidades espectrais das pistas esquerda e direita.

$$S_{ed|ed} = S_{et|et} = S_{et|ed} = S_{ed|et} = S_e = S \quad (4.73)$$

$$S_{dd|dd} = S_{dt|dt} = S_{dt|dd} = S_{dd|dt} = S_d = S \quad (4.74)$$

De forma análoga, devido às expressões (4.12) e (4.33) obtém-se (4.75) e (4.76).

$$S_{ed|dd} = S_{et|dd} = S_{et|dt} = S_{ed|dt} = S_{ed} = S_c \quad (4.75)$$

$$S_{dd|ed} = S_{dt|ed} = S_{dd|et} = S_{dt|et} = S_{de} = S_c \quad (4.76)$$

Substituindo-se (4.73), (4.74), (4.75) e (4.76) na (4.72) obtém-se (4.77).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p(\omega) = \overline{\mathbf{A}} \cdot \left[\left(\mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{ed}^T + \mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{et}^T + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{ed}^T + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{et}^T + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{dd}^T + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{dt}^T + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{dd}^T + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{dt}^T \right) S \right. \\ \left. \left(+ \mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{dd}^T + \mathbf{e}_{ed} \mathbf{e}_{dt}^T + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{dd}^T + \mathbf{e}_{et} \mathbf{e}_{dt}^T + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{ed}^T + \mathbf{e}_{dd} \mathbf{e}_{et}^T + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{ed}^T + \mathbf{e}_{dt} \mathbf{e}_{et}^T \right) S_c \right] \hat{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Considerando agora as definições (4.47) para \mathbf{e}_{ed} , \mathbf{e}_{et} , \mathbf{e}_{dd} , \mathbf{e}_{cc} pode-se reescrever a expressão (4.77) como

$$\mathbf{S}_p(\omega) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \left[\left(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \right) S + \left(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T \right) S_c \right] \cdot \hat{\mathbf{A}}^T \quad (4.78)$$

na qual os vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , definidos na (4.79), são as excitações nas rodas sobre as pistas esquerda e direita.

$$\mathbf{e}_1^T = [1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{e}_2^T = [0 \ 1 \ 0 \ 1] \quad (4.79)$$

4.5.2 Espectro de Potência dos Deslocamentos Dinâmicos

Sabe-se que a relação entre o espectro de potência de excitação, $\mathbf{S}_p(\omega)$, e o espectro de potência de resposta, $\mathbf{S}_u(\omega)$, é dada por

$$\mathbf{S}_u(\omega) = \bar{\mathbf{H}}(\omega) \mathbf{S}_p(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \quad (4.80)$$

na qual $\bar{\mathbf{H}}(\omega)$ é a matriz de resposta complexa do sistema, definida pela expressão (4.81), e $\hat{\mathbf{H}}^T(\omega)$ é a matriz do complexo conjugado de $\bar{\mathbf{H}}(\omega)$.

$$\bar{\mathbf{H}}(\omega) = \left(\mathbf{K}_{cc} - \omega^2 \mathbf{M}_{cc} + i\omega \mathbf{C}_{cc} \right)^{-1} \quad (4.81)$$

Substituindo-se a (4.78) na (4.80) tem-se

$$\mathbf{S}_u(\omega) = \bar{\mathbf{H}}(\omega) \bar{\mathbf{A}}(\omega) \left[\left(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \right) S(\omega) + \left(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T \right) S_c(\omega) \right] \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \quad (4.82)$$

a qual, desenvolvendo o produto, fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u(\omega) = & \bar{\mathbf{H}}(\omega) \bar{\mathbf{A}}(\omega) \mathbf{e}_1 S(\omega) \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) + \bar{\mathbf{H}}(\omega) \bar{\mathbf{A}}(\omega) \mathbf{e}_2 S(\omega) \mathbf{e}_2^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \\ & + \bar{\mathbf{H}}(\omega) \bar{\mathbf{A}}(\omega) \mathbf{e}_1 S_c(\omega) \mathbf{e}_2^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) + \bar{\mathbf{H}}(\omega) \bar{\mathbf{A}}(\omega) \mathbf{e}_2 S_c(\omega) \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Definindo-se $\bar{\mathbf{X}}_1$ e $\hat{\mathbf{X}}_1$ conforme (4.84), $\bar{\mathbf{X}}_2$ e $\hat{\mathbf{X}}_2$ conforme (4.85), e lembrando-se a (4.19), pode-se reescrever a (4.83) como (4.86), na qual $g(n)$ indica $g(\omega/2\pi V)$.

$$\bar{\mathbf{X}}_1(\omega) = \bar{\mathbf{H}}(\omega) \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{X}}_1(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega) \hat{\mathbf{A}} \mathbf{e}_1 \quad (4.84)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_2(\omega) = \bar{\mathbf{H}}(\omega) \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{X}}_2(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega) \hat{\mathbf{A}} \mathbf{e}_2 \quad (4.85)$$

$$\mathbf{S}_u(\omega) = \left[\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_1^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_2^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_2^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_1^T \right) \right] S(\omega) \quad (4.86)$$

Comparando-se (4.64) com (4.84) e (4.85); considerando-se (4.78) e (4.79); nota-se que os vetores $\bar{\mathbf{X}}_1$ e $\bar{\mathbf{X}}_2$ são obtidos pela solução da equação (4.63). Mais especificamente, $\bar{\mathbf{X}}_1$ representa a parcela de $\mathbf{U}(\omega)$ devida a \mathbf{e}_1 e $\bar{\mathbf{X}}_2$ representa a parcela de $\mathbf{U}(\omega)$ devida a \mathbf{e}_2 .

4.5.3 Espectro de Potência dos Deslocamentos Pseudoestáticos

Determina-se o espectro de potência dos deslocamentos pseudoestáticos utilizando-se a equação (4.39) juntamente com a (4.47) obtendo

$$\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{G}_{cb} \left(\mathbf{e}^{ed} f^{ed} + \mathbf{e}^{et} f^{et} + \mathbf{e}^{dd} f^{dd} + \mathbf{e}^{dt} f^{dt} \right) \quad (4.87)$$

cuja transformada de Fourier e conjugado são obtidas pelas equações (4.88) e (4.89).

$$\bar{\mathbf{U}}_s(\omega) = \mathbf{G}_{cb} \left(\mathbf{e}^{ed} \bar{F}^{ed} + \mathbf{e}^{et} \bar{F}^{et} + \mathbf{e}^{dd} \bar{F}^{dd} + \mathbf{e}^{dt} \bar{F}^{dt} \right) \quad (4.88)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_s(\omega) = \mathbf{G}_{cb} \left(\mathbf{e}^{ed} \hat{F}^{ed} + \mathbf{e}^{et} \hat{F}^{et} + \mathbf{e}^{dd} \hat{F}^{dd} + \mathbf{e}^{dt} \hat{F}^{dt} \right) \quad (4.89)$$

Com estes resultados pode-se escrever

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{S}_{u_s}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{\mathbf{U}}_s(\omega) \hat{\mathbf{U}}_s(\omega)^T \quad (4.90)$$

a partir da qual, com o mesmo raciocínio que levou da (4.70) a (4.78), obtém-se a (4.91).

$$\mathbf{S}_{u_s}(\omega) = \left[\mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{G}_{cb}^T + \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{G}_{cb}^T + g(n) \left(\mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T \mathbf{G}_{cb}^T + \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T \mathbf{G}_{cb}^T \right) \right] S(\omega) \quad (4.91)$$

Definindo-se $\bar{\mathbf{X}}_{1s}$ e $\hat{\mathbf{X}}_{1s}$ pela (4.92), $\bar{\mathbf{X}}_{2s}$ e $\hat{\mathbf{X}}_{2s}$ pela (4.93), reescreve-se (4.91) como (4.94).

$$\bar{\mathbf{X}}_{1s} = \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_1, \quad \hat{\mathbf{X}}_{1s} = \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_1 \quad (4.92)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{2s} = \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_2, \quad \hat{\mathbf{X}}_{2s} = \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_2 \quad (4.93)$$

$$\mathbf{S}_{u_s} = \left[\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T \right) \right] S(\omega) \quad (4.94)$$

4.5.4 Espectro de Potência Cruzado dos Deslocamentos Dinâmicos e Pseudoestáticos

Pode-se escrever a transformada de Fourier da (4.50) como

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M}_{cc} + i\omega \mathbf{C}_{cc} + \mathbf{K}_{cc} \right] \bar{\mathbf{U}}(\omega) = -\bar{\mathbf{P}}(\omega) \quad (4.95)$$

que, lembrando a (4.80), permite obter $\bar{\mathbf{U}}(\omega)$ e sua conjugada complexa $\hat{\mathbf{U}}(\omega)$ como

$$\bar{\mathbf{U}}(\omega) = -\bar{\mathbf{H}}(\omega)\bar{\mathbf{P}}(\omega) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{U}}(\omega) = -\bar{\mathbf{H}}(\omega)\hat{\mathbf{P}}(\omega) \quad (4.96)$$

nas quais $\bar{\mathbf{P}}(\omega)$ e $\hat{\mathbf{P}}(\omega)$ estão definidos em (4.66) e (4.67). Determina-se, então, o espectro de potência cruzado através da (4.97).

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{S}_{uu_s}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{\mathbf{U}}_s(\omega) \hat{\mathbf{U}}(\omega)^T \quad (4.97)$$

Realizando-se o mesmo processo que levou da (4.70) a (4.78), e usando-se as expressões (4.89) e (4.96) na (4.97) obtém-se (4.98). Considerando-se (4.84), (4.85), (4.92) e (4.93) pode-se escrever a (4.99).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{uu_s}(\omega) = & \left[\mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) + \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \right. \\ & \left. + g \left(\mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) + \mathbf{G}_{cb} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{A}}^T(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \right) \right] \mathbf{S}(\omega) \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\mathbf{S}_{uu_s}(\omega) = \left[\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_1^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_2^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_2^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_1^T \right) \right] \mathbf{S}(\omega) \quad (4.99)$$

De modo análogo pode-se calcular o espectro de potência cruzado dado por

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{S}_{u_s u}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{\mathbf{U}}(\omega) \hat{\mathbf{U}}_s^T(\omega) \quad (4.100)$$

procedendo do mesmo modo usado para obter o espectro $\mathbf{S}_{uu_s}(\omega)$ chega-se (4.101).

$$\mathbf{S}_{u_s u}(\omega) = \left[\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_1^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_2^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_2^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_1^T \right) \right] \mathbf{S}(\omega) \quad (4.101)$$

4.5.5 Espectro de Potência dos Deslocamentos Totais

A partir da primeira equação da (4.36) determina-se a transformada de Fourier dos deslocamentos totais e seu complexo conjugado pela (4.102).

$$\bar{U}_t(\omega) = \bar{U}(\omega) + \bar{U}_s(\omega) \quad \text{e} \quad \hat{U}_t(\omega) = \hat{U}(\omega) + \hat{U}_s(\omega) \quad (4.102)$$

Logo, a densidade espectral dos deslocamentos totais pode ser escrita como

$$\frac{1}{2\pi} S_{u_t u_t}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{U}_t(\omega) \hat{U}_t^T(\omega) \quad (4.103)$$

,e substituindo-se a (4.102) na (4.103) obtém-se a (4.104), que desenvolvida leva a (4.105), na qual os termos $S_u(\omega)$, $S_{u_s u}(\omega)$, $S_{u u_s}(\omega)$ e $S_{u_s}(\omega)$ foram obtidos nos itens anteriores.

$$\frac{1}{2\pi} S_{u_t u_t}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\bar{U} \hat{U}^T + \bar{U} \hat{U}_s^T + \bar{U}_s \hat{U}^T + \bar{U}_s \hat{U}_s^T \right) \quad (4.104)$$

$$S_{u_t}(\omega) = S_u(\omega) + S_{u_s u}(\omega) + S_{u u_s}(\omega) + S_{u_s}(\omega) \quad (4.105)$$

4.5.6 Espectro de Potência das Solicitações

As solicitações $\mathbf{p}^e(t)$ de cada elemento são representadas pela equação (4.106) na qual o superíndice e indica elemento ou seja \mathbf{k}^e é a matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais, \mathbf{u}^e e \mathbf{u}_s^e são respectivamente os seus deslocamentos dinâmicos e pseudoestáticos, em coordenadas locais, dos nós pertencentes ao elemento selecionado.

$$\mathbf{p}^e(t) = \mathbf{k}^e \left[\mathbf{u}^e(t) + \mathbf{u}_s^e(t) \right] \quad (4.106)$$

Esta expressão é utilizada porque a equação (4.44) somente é válida a nível global. A nível local são geradas tensões pelos deslocamentos pseudoestáticos, que devem ser consideradas no processo de verificação das barras. Aplicando-se agora a definição da transformada de Fourier na (4.106) escreve-se a (4.107).

$$\bar{\mathbf{P}}^e(\omega) = \mathbf{k}^e \left[\bar{\mathbf{U}}^e(\omega) + \bar{\mathbf{U}}_s^e(\omega) \right], \quad \hat{\mathbf{P}}^e(\omega) = \mathbf{k}^e \left[\hat{\mathbf{U}}^e(\omega) + \hat{\mathbf{U}}_s^e(\omega) \right] \quad (4.107)$$

O espectro de potência das solicitações é definido pela (4.108). Substituindo-se nesta os resultados da (4.107) e desenvolvendo-se o produto resulta na expressão (4.109).

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{S}_{pp}^e(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\overline{\mathbf{P}}^e \hat{\mathbf{P}}^{eT} \right) \quad (4.108)$$

$$\mathbf{S}_p^e(\omega) = \mathbf{k}^e \left(\mathbf{S}_{u^e} + \mathbf{S}_{u^e u_s^e} + \mathbf{S}_{u_s^e u^e} + \mathbf{S}_{u_s^e} \right) \mathbf{k}^{eT} \quad (4.109)$$

Para se desenvolver esta expressão deve-se obter os valores de $\overline{\mathbf{U}}^e$, $\hat{\mathbf{U}}^e$, $\overline{\mathbf{U}}_s^e$ e $\hat{\mathbf{U}}_s^e$ das expressões (4.88), (4.89) e (4.96) que devem ser escritas a nível de elemento como:

$$\overline{\mathbf{U}}^e(\omega) = \overline{\mathbf{H}}^e(\omega) \overline{\mathbf{A}}^e(\omega) \left(\mathbf{e}^{ed} \overline{F}^{ed} + \mathbf{e}^{et} \overline{F}^{et} + \mathbf{e}^{dd} \overline{F}^{dd} + \mathbf{e}^{dt} \overline{F}^{dt} \right) \quad (4.110)$$

$$\hat{\mathbf{U}}^e(\omega) = \hat{\mathbf{H}}^e(\omega) \hat{\mathbf{A}}^e(\omega) \left(\mathbf{e}^{ed} \hat{F}^{ed} + \mathbf{e}^{et} \hat{F}^{et} + \mathbf{e}^{dd} \hat{F}^{dd} + \mathbf{e}^{dt} \hat{F}^{dt} \right) \quad (4.111)$$

$$\overline{\mathbf{U}}_s^e(\omega) = \mathbf{G}_{cb}^e \left(\mathbf{e}^{ed} \overline{F}^{ed} + \mathbf{e}^{et} \overline{F}^{et} + \mathbf{e}^{dd} \overline{F}^{dd} + \mathbf{e}^{dt} \overline{F}^{dt} \right) \quad (4.112)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_s^e(\omega) = \mathbf{G}_{cb}^e \left(\mathbf{e}^{ed} \hat{F}^{ed} + \mathbf{e}^{et} \hat{F}^{et} + \mathbf{e}^{dd} \hat{F}^{dd} + \mathbf{e}^{dt} \hat{F}^{dt} \right). \quad (4.113)$$

Cada uma das parcelas do lado direito da (4.109) está definida na (4.114).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{u^e} &= 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\overline{\mathbf{U}}^e \hat{\mathbf{U}}^e \right) \\ \mathbf{S}_{u^e u_s^e} &= 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\overline{\mathbf{U}}^e \hat{\mathbf{U}}_s^e \right) \\ \mathbf{S}_{u_s^e u^e} &= 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\overline{\mathbf{U}}_s^e \hat{\mathbf{U}}^e \right) \\ \mathbf{S}_{u_s^e u_s^e} &= 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\overline{\mathbf{U}}_s^e \hat{\mathbf{U}}_s^e \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

Representando por

$$\overline{\mathbf{X}}_1^e = \overline{\mathbf{H}}^e \overline{\mathbf{A}} \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{X}}_2^e = \overline{\mathbf{H}}^e \overline{\mathbf{A}} \mathbf{e}_2 \quad (4.115)$$

$$\overline{\mathbf{X}}_{1s}^e = \mathbf{G}_{cb}^e \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{X}}_{2s}^e = \mathbf{G}_{cb}^e \mathbf{e}_2 \quad (4.116)$$

em que, cada um dos vetores $\overline{\mathbf{X}}_1^e$, $\overline{\mathbf{X}}_2^e$, $\overline{\mathbf{X}}_{1s}^e$ e $\overline{\mathbf{X}}_{2s}^e$ são obtidos dos vetores $\overline{\mathbf{X}}_1$, $\overline{\mathbf{X}}_2$, $\overline{\mathbf{X}}_{1s}$ e $\overline{\mathbf{X}}_{2s}$ retirando-se destes os valores correspondentes aos nós e graus de liberdade do elemento. Repetindo-se agora o processo já feito, obtém-se (4.117), (4.118), (4.119) e (4.120).

$$\mathbf{S}_{u^e}(\omega) = \left[\overline{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \overline{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\overline{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \overline{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) \right] S(\omega) \quad (4.117)$$

$$\mathbf{S}_{u_i^e u_i^e}(\omega) = \left[\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \right] S(\omega) \quad (4.118)$$

$$\mathbf{S}_{u_i^e u_j^e}(\omega) = \left[\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) \right] S(\omega) \quad (4.119)$$

$$\mathbf{S}_{u_j^e}(\omega) = \left[\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \right] S(\omega) \quad (4.120)$$

4.5.7 Valores da Diagonal da Matriz Espectral dos Deslocamentos e Solicitações

Para se determinar os desvios padrões dos deslocamentos e solicitações necessita-se obter os valores das diagonais das matrizes, que são reais, definidas por (4.105) e (4.109).

Iniciando pelo cálculo dos termos da diagonal do espectro dos deslocamentos pode-se escrever; substituindo-se (4.86), (4.94), (4.99) e (4.101) na (4.105); a expressão (4.121).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{u_T}(\omega) = & \left\{ \left[\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_1^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_2^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_2^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_1^T \right) \right] + \right. \\ & \left[\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T \right) \right] + \\ & \left[\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_1^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_2^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_2^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_1^T \right) \right] + \\ & \left. \left[\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T \right) \right] \right\} S(\omega) \end{aligned} \quad (4.121)$$

Considerando-se válidas as relações (4.122) a (4.125)

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{B}_1 \quad , \quad \hat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A}_1 - i\mathbf{B}_1 \quad (4.122)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_2 + i\mathbf{B}_2 \quad , \quad \hat{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_2 - i\mathbf{B}_2 \quad (4.123)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{1s} = \mathbf{A}_{1s} \quad , \quad \hat{\mathbf{X}}_{1s} = \mathbf{A}_{1s} \quad (4.124)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{2s} = \mathbf{A}_{2s} \quad , \quad \hat{\mathbf{X}}_{2s} = \mathbf{A}_{2s} \quad (4.125)$$

nas quais $i = \sqrt{-1}$; \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_{1s} , \mathbf{A}_{2s} , \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 são matrizes de números reais; os termos da diagonal, $(\mathbf{S}_{u_t})_{jj}$, da (4.121) serão constituídos das seguintes parcelas:

$$\left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_1^T \right)_{jj} = (\mathbf{A}_1)_j^2 + (\mathbf{B}_1)_j^2 \quad \text{e} \quad \left(\bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_2^T \right)_{jj} = (\mathbf{A}_2)_j^2 + (\mathbf{B}_2)_j^2 \quad (4.126)$$

$$\left(\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T\right)_{jj} = (\mathbf{A}_{1s})_j^2 \quad \text{e} \quad \left(\bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T\right)_{jj} = (\mathbf{A}_{2s})_j^2 \quad (4.127)$$

$$\left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_1^T\right)_{jj} = 2(\mathbf{A}_1)_j (\mathbf{A}_{1s})_j \quad \text{e} \quad \left(\bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_2^T\right)_{jj} = 2(\mathbf{A}_2)_j (\mathbf{A}_{2s})_j \quad (4.128)$$

$$g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_2^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_1^T\right)_{jj} = 2g(n) \left[(\mathbf{A}_1)_j (\mathbf{A}_2)_j + (\mathbf{B}_1)_j (\mathbf{B}_2)_j \right] \quad (4.129)$$

$$g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_1^T\right)_{jj} = 2g(n) (\mathbf{A}_1)_j (\mathbf{A}_{2s})_j \quad (4.130)$$

$$g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_2^T + \bar{\mathbf{X}}_2 \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T\right)_{jj} = 2g(n) (\mathbf{A}_{1s})_j (\mathbf{A}_2)_j$$

$$g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^T + \bar{\mathbf{X}}_{2s} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^T\right)_{jj} = 2g(n) (\mathbf{A}_{1s})_j (\mathbf{A}_{2s})_j \quad (4.131)$$

que substituídas na (4.121) nos permitem escrever os elementos da diagonal como a (4.132).

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{S}_{u_t}\right)_{jj} = & \left\{ (\mathbf{A}_1)_j^2 + (\mathbf{B}_1)_j^2 + (\mathbf{A}_2)_j^2 + (\mathbf{B}_2)_j^2 + (\mathbf{A}_{1s})_j^2 + (\mathbf{A}_{2s})_j^2 \right. \\ & + 2 \left[(\mathbf{A}_1)_j (\mathbf{A}_{1s})_j + (\mathbf{A}_2)_j (\mathbf{A}_{2s})_j \right] + 2g(n) \left[(\mathbf{A}_1)_j (\mathbf{A}_2)_j + (\mathbf{B}_1)_j (\mathbf{B}_2)_j \right. \\ & \left. \left. + (\mathbf{A}_1)_j (\mathbf{A}_{2s})_j + (\mathbf{A}_{1s})_j (\mathbf{A}_2)_j + (\mathbf{A}_{1s})_j (\mathbf{A}_{2s})_j \right] \right\} S(\omega) \end{aligned} \quad (4.132)$$

Para determinar os valores da diagonal da matriz espectral das solicitações, expressão (4.109), procede-se da mesma forma anterior. Fazendo:

$$\bar{\mathbf{F}}_1^e = \mathbf{k}^e \bar{\mathbf{X}}_1^e = \mathbf{C}_1 + i\mathbf{D}_1 \quad , \quad \hat{\mathbf{F}}_1^e = \mathbf{k}^e \hat{\mathbf{X}}_1^e = \mathbf{C}_1 - i\mathbf{D}_1 \quad (4.133)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_2^e = \mathbf{k}^e \bar{\mathbf{X}}_2^e = \mathbf{C}_2 + i\mathbf{D}_2 \quad , \quad \hat{\mathbf{F}}_2^e = \mathbf{k}^e \hat{\mathbf{X}}_2^e = \mathbf{C}_2 - i\mathbf{D}_2 \quad (4.134)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{1s}^e = \mathbf{k}^e \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e = \mathbf{C}_{1s} \quad , \quad \hat{\mathbf{F}}_{1s}^e = \mathbf{k}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^e = \mathbf{C}_{1s} \quad (4.135)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{2s}^e = \mathbf{k}^e \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e = \mathbf{C}_{2s} \quad , \quad \hat{\mathbf{F}}_{2s}^e = \mathbf{k}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^e = \mathbf{C}_{2s} \quad (4.136)$$

nas quais $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_{1s}, \mathbf{C}_{2s}, \mathbf{D}_1$ e \mathbf{D}_2 são matrizes de números reais; pode-se obter, após algum trabalho algébrico, os termos da diagonal de \mathbf{S}_p^e através da (4.137).

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{S}_p^e\right)_{jj} = & \left\{ (\mathbf{C}_1)_j^2 + (\mathbf{D}_1)_j^2 + (\mathbf{C}_2)_j^2 + (\mathbf{D}_2)_j^2 + (\mathbf{C}_{1s})_j^2 + (\mathbf{C}_{2s})_j^2 \right. \\ & + 2 \left[(\mathbf{C}_1)_j (\mathbf{C}_{1s})_j + (\mathbf{C}_2)_j (\mathbf{C}_{2s})_j \right] + 2g(n) \left[(\mathbf{C}_1)_j (\mathbf{C}_2)_j + (\mathbf{D}_1)_j (\mathbf{D}_2)_j \right. \\ & \left. \left. + (\mathbf{C}_1)_j (\mathbf{C}_{2s})_j + (\mathbf{C}_{1s})_j (\mathbf{C}_2)_j + (\mathbf{C}_{1s})_j (\mathbf{C}_{2s})_j \right] \right\} S(\omega) \end{aligned} \quad (4.137)$$

4.5.8 Espectro das Tensões Normais

A tensão normal em elementos de pórtico é obtida considerando-se os dois momentos fletores e o esforço normal atuante levando-se em conta o ponto da seção onde se deseja calcular esta tensão. Considera-se que o esforço normal ocupa a primeira posição no vetor de solicitações do nó e que os momento fletores ocupam a quinta e sexta posições. Estas posições são representadas pelos índices 1, 5 e 6. Denomina-se W_1 o inverso da área da seção transversal; W_5 e W_6 o inverso do módulo resistente à cada flexão. Com estas considerações, a partir da (4.106) se estabelece uma equação para determinar as tensões normais tal como

$$\sigma_N = \mathbf{k}_5^e (\mathbf{u}^e + \mathbf{u}_s^e) W_5 + \mathbf{k}_6^e (\mathbf{u}^e + \mathbf{u}_s^e) W_6 + \mathbf{k}_1^e (\mathbf{u}^e + \mathbf{u}_s^e) W_1 \quad (4.138)$$

na qual \mathbf{k}_1^e , \mathbf{k}_5^e e \mathbf{k}_6^e representam a primeira, quinta e sexta colunas respectivamente da matriz de rigidez do elemento. É importante ressaltar que esta expressão é válida para ambos os nós da conectividade. A transformada de Fourier da (4.138) e seu complexo conjugado são dadas pelas equações (4.139) e (4.140).

$$\bar{\sigma}(\omega) = \mathbf{k}_5^e (\bar{\mathbf{U}}^e + \bar{\mathbf{U}}_s^e) W_5 + \mathbf{k}_6^e (\bar{\mathbf{U}}^e + \bar{\mathbf{U}}_s^e) W_6 + \mathbf{k}_1^e (\bar{\mathbf{U}}^e + \bar{\mathbf{U}}_s^e) W_1 \quad (4.139)$$

$$\hat{\sigma}(\omega) = \mathbf{k}_5^e (\hat{\mathbf{U}}^e + \hat{\mathbf{U}}_s^e) W_5 + \mathbf{k}_6^e (\hat{\mathbf{U}}^e + \hat{\mathbf{U}}_s^e) W_6 + \mathbf{k}_1^e (\hat{\mathbf{U}}^e + \hat{\mathbf{U}}_s^e) W_1 \quad (4.140)$$

Logo, o espectro das tensões normais será obtido pela (4.141).

$$\frac{1}{2\pi} S_\sigma(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\bar{\sigma} \hat{\sigma}) \quad (4.141)$$

Substituindo-se a (4.139) e (4.140) na (4.141), e lembrando a expressão (4.105) obtém-se a (4.142).

$$\begin{aligned} S_\sigma = & W_5 \mathbf{k}_5^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_5^{eT} W_5 + W_5 \mathbf{k}_5^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_6^{eT} W_6 \\ & + W_5 \mathbf{k}_5^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_1^{eT} W_1 + W_6 \mathbf{k}_6^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_5^{eT} W_5 \\ & + W_6 \mathbf{k}_6^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_6^{eT} W_6 + W_6 \mathbf{k}_6^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_1^{eT} W_1 \\ & + W_1 \mathbf{k}_1^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_5^{eT} W_5 + W_1 \mathbf{k}_1^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_6^{eT} W_6 \\ & + W_1 \mathbf{k}_1^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_1^{eT} W_1 \end{aligned} \quad (4.142)$$

Organizando-se a (4.142) por linhas, imagine que cada parcela separada pelo operador + corresponde a uma linha, pode-se verificar que as linhas 2 e 4, 3 e 7, 6 e 8 podem ser combinadas como é feito a seguir para as linhas 2 e 4. Considerando-se os resultados (4.86), (4.94), (4.99) e (4.101) pode-se escrever

2ª linha + 4ª linha =

$$\begin{aligned}
& S(\omega) \left\{ W_5 \mathbf{k}_5^e \left[\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \right. \right. \\
& \bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) + \\
& \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \\
& \left. \left. \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \right] \mathbf{k}_6^{eT} W_6 + \right. \\
& W_6 \mathbf{k}_6^e \left[\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \right. \\
& \bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) + \\
& \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \\
& \left. \left. \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \right] \mathbf{k}_5^{eT} W_5 \right\} \quad (4.143)
\end{aligned}$$

Lembrando as expressões (4.133) a (4.136) pode-se escrever

$$\bar{F}_1^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \bar{\mathbf{X}}_1^e = (C_1)_5 + i(D_1)_5, \quad \hat{F}_1^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \hat{\mathbf{X}}_1^e = (C_1)_5 - i(D_1)_5 \quad (4.144)$$

$$\bar{F}_2^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \bar{\mathbf{X}}_2^e = (C_2)_5 + i(D_2)_5, \quad \hat{F}_2^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \hat{\mathbf{X}}_2^e = (C_2)_5 + i(D_2)_5 \quad (4.145)$$

$$\bar{F}_{1s}^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e = (C_{1s})_5, \quad \hat{F}_{1s}^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^e = (C_{1s})_5 \quad (4.146)$$

$$\bar{F}_{2s}^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e = (C_{2s})_5, \quad \hat{F}_{2s}^{e5} = \mathbf{k}^{e5} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^e = (C_{2s})_5 \quad (4.147)$$

nas quais \bar{F}_1^{e5} , \bar{F}_2^{e5} , \bar{F}_{1s}^{e5} e \bar{F}_{2s}^{e5} representam valores correspondentes à quinta posição nos arranjos $\bar{\mathbf{F}}^{1e}$, $\bar{\mathbf{F}}^{2e}$, $\bar{\mathbf{F}}_s^{1e}$ e $\bar{\mathbf{F}}_s^{2e}$ respectivamente. O mesmo raciocínio se aplica às posições 1 e 6 bem como aos complexos conjugados correspondentes a cada um destes valores. Escrevendo-se a (4.143) em função das variáveis \bar{F} e \hat{F} , definidas nas expressões anteriores, obtém-se a (4.148).

2º linha + 4º linha =

$$\begin{aligned}
 S(\omega)W_5W_6 \left\{ \left[\overline{F}_1^{e5} \hat{F}_1^{e6} + \overline{F}_2^{e5} \hat{F}_2^{e6} + g(n) \left(\overline{F}_1^{e5} \hat{F}_2^{e6} + \overline{F}_2^{e5} \hat{F}_1^{e6} \right) + \right. \right. \\
 \overline{F}_1^{e5} \hat{F}_{1s}^{e6} + \overline{F}_2^{e5} \hat{F}_{2s}^{e6} + g(n) \left(\overline{F}_1^{e5} \hat{F}_{2s}^{e6} + \overline{F}_2^{e5} \hat{F}_{1s}^{e6} \right) + \\
 \overline{F}_{1s}^{e5} \hat{F}_1^{e6} + \overline{F}_{2s}^{e5} \hat{F}_2^{e6} + g(n) \left(\overline{F}_{1s}^{e5} \hat{F}_2^{e6} + \overline{F}_{2s}^{e5} \hat{F}_1^{e6} \right) + \\
 \left. \left. \overline{F}_{1s}^{e5} \hat{F}_{1s}^{e6} + \overline{F}_{2s}^{e5} \hat{F}_{2s}^{e6} + g(n) \left(\overline{F}_{1s}^{e5} \hat{F}_{2s}^{e6} + \overline{F}_{2s}^{e5} \hat{F}_{1s}^{e6} \right) \right] + \right. \\
 \left[\overline{F}_1^{e6} \hat{F}_1^{e5} + \overline{F}_2^{e6} \hat{F}_2^{e5} + g(n) \left(\overline{F}_1^{e6} \hat{F}_2^{e5} + \overline{F}_2^{e6} \hat{F}_1^{e5} \right) + \right. \\
 \overline{F}_1^{e6} \hat{F}_{1s}^{e5} + \overline{F}_2^{e6} \hat{F}_{2s}^{e5} + g(n) \left(\overline{F}_1^{e6} \hat{F}_{2s}^{e5} + \overline{F}_2^{e6} \hat{F}_{1s}^{e5} \right) + \\
 \overline{F}_{1s}^{e6} \hat{F}_1^{e5} + \overline{F}_{2s}^{e6} \hat{F}_2^{e5} + g(n) \left(\overline{F}_{1s}^{e6} \hat{F}_2^{e5} + \overline{F}_{2s}^{e6} \hat{F}_1^{e5} \right) + \\
 \left. \left. \overline{F}_{1s}^{e6} \hat{F}_{1s}^{e5} + \overline{F}_{2s}^{e6} \hat{F}_{2s}^{e5} + g(n) \left(\overline{F}_{1s}^{e6} \hat{F}_{2s}^{e5} + \overline{F}_{2s}^{e6} \hat{F}_{1s}^{e5} \right) \right] \right\} \quad (4.148)
 \end{aligned}$$

Empregando-se as expressões (4.144) a (4.147) na (4.148) pode-se escrever a (4.149).

2º linha + 4º linha =

$$\begin{aligned}
 2S(\omega)W_5W_6 \left[(C_1)_5(C_1)_6 + (D_1)_5(D_1)_6 + (C_2)_5(C_2)_6 + (D_2)_5(D_2)_6 + (C_{1s})_5(C_{1s})_6 + \right. \\
 (C_{1s})_5(C_1)_6 + (C_2)_5(C_{2s})_6 + (C_{2s})_5(C_2)_6 + (C_{1s})_5(C_{1s})_6 + (C_{2s})_5(C_{2s})_6 + \\
 \left. g(n) \left[(C_1)_5(C_2)_6 + (D_1)_5(D_2)_6 + (C_2)_5(C_1)_6 + (D_2)_5(D_1)_6 + (C_{2s})_6(C_1)_5 + \right. \right. \\
 \left. \left. (C_2)_5(C_{1s})_6 + (C_{1s})_5(C_2)_6 + (C_{2s})_5(C_1)_6 + (C_{2s})_6(C_{1s})_5 + (C_{1s})_6(C_{2s})_5 \right] \right] \quad (4.149)
 \end{aligned}$$

De modo análogo, procede-se com a terceira e sétima linhas e com a sexta e oitava linhas. A primeira, quinta e nona linhas dão origem, cada uma delas, a uma expressão do tipo (4.149) multiplicada pelo correspondente fator W_1 , W_6 ou W_5 elevado ao quadrado. Deste modo, obtém-se a expressão do espectro da tensão normal conforme (4.150)*.

$$\begin{aligned}
 S_\sigma = S(\omega) \left\{ \sum_{i=1,5,6} W_i^2 \left[(C_1)_i^2 + (D_1)_i^2 + (C_2)_i^2 + (D_2)_i^2 + (C_{1s})_i^2 + (C_{2s})_i^2 + 2((C_1)_i(C_{1s})_i + \right. \right. \\
 (C_2)_i(C_{2s})_i) + 2g(n) \left[(C_1)_i(C_2)_i + (D_1)_i(D_2)_i + (C_1)_i(C_{2s})_i + (C_{1s})_i(C_2)_i + \right. \\
 \left. \left. (C_{1s})_i(C_{2s})_i \right] + 2 \sum_{\substack{k=5,5,6 \\ j=6,1,1}} W_k W_j \left[(C_1)_k(C_1)_j + (D_1)_k(D_1)_j + (C_2)_k(C_2)_j + (D_2)_k(D_2)_j \right. \right. \\
 \left. \left. + (C_1)_k(C_{1s})_j + (C_{1s})_k(C_1)_j + (C_2)_k(C_{2s})_j + (C_{2s})_k(C_2)_j + (C_{1s})_k(C_{1s})_j \right. \right. \\
 \left. \left. + (C_{2s})_k(C_{2s})_j + g(n) \left[(C_1)_k(C_2)_j + (D_1)_k(D_2)_j + (C_2)_k(C_1)_j + (D_2)_k(D_1)_j \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + (C_1)_k(C_{2s})_j + (C_2)_k(C_{1s})_j + (C_{1s})_k(C_2)_j + (C_{2s})_k(C_1)_j + (C_{1s})_k(C_{2s})_j + \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + (C_{2s})_k(C_{1s})_j \right] \right] \right\} \quad (4.150)
 \end{aligned}$$

* Nesta expressão o índice i assume os valores 1, 5, 6; o índice k assume os valores 5, 5 e 6; e o índice j assume os valores 6, 1 e 1.

4.5.9 Espectro de Potência das Tensões Tangenciais

Considera-se que as tensões tangenciais τ são causadas apenas pelo momento torçor sendo, então, desprezada as influências do esforço cortante. Para organização da equação (4.151) considera-se que o momento torçor ocupa a quarta posição no vetor de solicitações do nó, representado pelo índice 4, e que W_4 é o inverso do módulo resistente à torção.

$$\tau = \mathbf{k}^{e4} (\mathbf{u}^e + \mathbf{u}^{se}) W_4 \quad (4.151)$$

A transformada de Fourier e o complexo conjugado da (4.151) ficam definidas como (4.152) a partir da qual pode-se escrever o espectro de potência das tensões τ como (4.153).

$$\bar{\tau}(\omega) = \mathbf{k}^{e4} (\bar{\mathbf{U}}^e + \bar{\mathbf{U}}^{se}) W_4 \quad \text{e} \quad \hat{\tau}(\omega) = \mathbf{k}^{e4} (\hat{\mathbf{U}}^e + \hat{\mathbf{U}}^{se}) W_4 \quad (4.152)$$

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{S}_\tau(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\bar{\tau} \hat{\tau}) \quad (4.153)$$

Substituindo-se a (4.152) na (4.153), e lembrando a expressão (4.105) obtém-se a (4.154).

$$\mathbf{S}_\tau = W_4 \mathbf{k}_4^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_4^{eT} W_4 \quad (4.154)$$

Empregando-se (4.86), (4.94), (4.99) e (4.101) na (4.154) obtém-se a (4.155).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\tau(\omega) = S(\omega) \left\{ W_4 \mathbf{k}_4^e \left[\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \right. \right. \\ \left. \bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) + \right. \\ \left. \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \right. \\ \left. \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \right] \mathbf{k}_4^{eT} W_4 \left. \right\} \quad (4.155) \end{aligned}$$

Lembrando as expressões (4.133) a (4.136) pode-se escrever

$$\bar{F}_1^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \bar{\mathbf{X}}_1^e = (C_1)_4 + i(D_1)_4 \quad , \quad \hat{F}_1^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \hat{\mathbf{X}}_1^e = (C_1)_4 - i(D_1)_4 \quad (4.156)$$

$$\bar{F}_2^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \bar{\mathbf{X}}_2^e = (C_2)_4 + i(D_2)_4 \quad , \quad \hat{F}_2^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \hat{\mathbf{X}}_2^e = (C_2)_4 - i(D_2)_4 \quad (4.157)$$

$$\bar{F}_{1s}^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e = (C_{1s})_4 \quad , \quad \hat{F}_{1s}^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \hat{\mathbf{X}}_{1s}^e = (C_{1s})_4 \quad (4.158)$$

$$\bar{F}_{2s}^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e = (C_{2s})_4, \quad \hat{F}_{2s}^{e4} = \mathbf{k}^{e4} \hat{\mathbf{X}}_{2s}^e = (C_{2s})_4 \quad (4.159)$$

nas quais \bar{F}_1^{e4} , \bar{F}_2^{e4} , \bar{F}_{1s}^{e4} e \bar{F}_{2s}^{e4} são os valores correspondentes à quarta posição nos arranjos $\bar{\mathbf{F}}^{1e}$, $\bar{\mathbf{F}}^{2e}$, $\bar{\mathbf{F}}_s^{1e}$ e $\bar{\mathbf{F}}_s^{2e}$. O mesmo raciocínio se aplica aos complexos conjugados de cada um destes valores. Escrevendo-se a (4.155) em função das variáveis \bar{F} e \hat{F} tem-se

$$\begin{aligned} S_\tau(\omega) = S(\omega)W_4^2 & \left[\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_1^{e4} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_2^{e4} + g(n) \left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_2^{e4} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_1^{e4} \right) + \right. \\ & \bar{F}_1^{e4} \hat{F}_{1s}^{e4} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_{2s}^{e4} + g(n) \left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_{2s}^{e4} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) + \\ & \bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_1^{e4} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_2^{e4} + g(n) \left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_2^{e4} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_1^{e4} \right) + \\ & \left. \bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{e4} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{e4} + g(n) \left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{e4} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.160)$$

que pode ser reescrita, utilizando-se as definições (4.156) a (4.159), como (4.161).

$$\begin{aligned} S_\tau(\omega) = S \cdot W_4^2 & \left[(C_1)_4^2 + (D_1)_4^2 + (C_2)_4^2 + (D_2)_4^2 + (C_{1s})_4^2 + (C_{2s})_4^2 + 2((C_1)_4 (C_{1s})_4 \right. \\ & + (C_2)_4 (C_{2s})_4) + 2g(n) ((C_1)_4 (C_2)_4 + (D_1)_4 (D_2)_4 + (C_1)_4 (C_{2s})_4 + (C_{1s})_4 (C_2)_4 \\ & \left. + (C_{1s})_4 (C_{2s})_4) \right] \end{aligned} \quad (4.160)$$

4.5.10 Espectro de Potência das Tensões Equivalentes

As tensões em um ponto de um elemento de barra são representadas por um estado biaxial de tensões. Logo, elas devem ser transformadas numa tensão equivalente de modo que se possa fazer considerações sobre, por exemplo, a segurança da barra. Neste trabalho, adotou-se a tensão equivalente de von Mises (ver capítulo 5) cuja expressão, particularizada para um estado biaxial de tensões, está apresentada em (4.161).

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (4.161)$$

Como σ e τ são variáveis aleatórias tem-se que a tensão equivalente σ_{eq} é um processo aleatório função de duas variáveis. O cálculo do espectro da (4.161) não é trivial visto que temos uma raiz de uma soma de quadrados. A solução adotada é expandir esta expressão em série de Taylor, em torno do seu valor médio, truncando-se esta no seu termo linear. Isto é possível porque considera-se σ e τ como variáveis estacionárias (hipótese feita no início deste

capítulo) ou seja a sua média não é função do tempo. A equação (4.162) apresenta esta série na qual a função que fornece σ_{eq} está representada por $f(\sigma, \tau)$, σ_m e τ_m representam os valores médios de σ e τ . O termo $f(\sigma_m, \tau_m)$, é a própria tensão equivalente média σ_{eqm} .

$$\sigma_{eq} \cong f(\sigma_m, \tau_m) + (\sigma - \sigma_m) \frac{\partial f(\sigma_m, \tau_m)}{\partial \sigma} + (\tau - \tau_m) \frac{\partial f(\sigma_m, \tau_m)}{\partial \tau} \quad (4.162)$$

Calculando-se as derivadas indicadas em (4.162) obtém-se

$$\frac{\partial f(\sigma_m, \tau_m)}{\partial \sigma} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2}} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eqm}} \quad (4.163)$$

$$\frac{\partial f(\sigma_m, \tau_m)}{\partial \tau} = \frac{3\tau_m}{\sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2}} = \frac{3\tau_m}{\sigma_{eqm}} \quad (4.164)$$

e substituindo-se estes resultados na (4.162), colocando-se σ_{eqm} em evidência, obtém-se

$$\sigma_{eq}(t) \cong \frac{1}{\sigma_{eqm}} (\sigma_{eqm}^2 - \sigma_m^2 - 3\tau_m^2 + \sigma_m \sigma(t) + 3\tau_m \tau(t)) \quad (4.165)$$

na qual σ_{eqm}^2 equivale a $\sigma_m^2 + 3\tau_m^2$, logo estes termos são eliminados resultando a (4.166).

$$\sigma_{eq}(t) \cong \frac{1}{\sigma_{eqm}} [\sigma_m \sigma(t) + 3\tau_m \tau(t)] \quad (4.166)$$

A transformada de Fourier da (4.166) e seu par Complexo ficam definidos como

$$\bar{\sigma}_{eq}(\omega) \cong \frac{1}{\sigma_{eqm}} [\sigma_m \bar{\sigma}(\omega) + 3\tau_m \bar{\tau}(\omega)] \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_{eq}(\omega) \cong \frac{1}{\sigma_{eqm}} [\sigma_m \hat{\sigma}(\omega) + 3\tau_m \hat{\tau}(\omega)] \quad (4.167)$$

e o espectro de potência da tensão equivalente pode ser escrita como

$$\frac{1}{2\pi} S_{\sigma_{eq}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\bar{\sigma}_{eq} \hat{\sigma}_{eq}) \quad (4.168)$$

a qual pode ser reescrita, utilizando-se a expressão (4.167), como

$$S_{\sigma_{eq}}(\omega) = \frac{1}{\sigma_{eqm}^2} \left\{ \sigma_m^2 S_{\sigma}(\omega) + 3\sigma_m \tau_m [S_{\sigma\tau}(\omega) + S_{\tau\sigma}(\omega)] + 9\tau_m^2 S_{\tau}(\omega) \right\} \quad (4.169)$$

em que $S_\sigma(\omega)$ é o espectro de potência das tensões normais, definido em (4.150); $S_\tau(\omega)$ é o espectro de potência das tensões tangenciais, definido em (4.160); e $S_{\sigma\tau}(\omega)$ e $S_{\tau\sigma}(\omega)$ são os espectros de potência cruzados das tensões normais e tangenciais.

A função definida em (4.166) teve sua qualidade testada em vários exemplos, tais como o ilustrado na tabela (4.3). O resultado exposto nesta tabela é semelhante ao obtido nos demais exemplos, e por ele conclui-se que a expressão (4.166) aproxima bem a tensão de von Mises. Entretanto, quando $\sigma_m = 0$ e/ou $\tau_m = 0$ os resultados não são bons, mas isto não é preocupante por que esta situação é rara na prática.

Tabela (4.3) – Teste da função (4.166).

As tensões estão expressas em MPa. Os valores médios das tensões das colunas 1, 2 e 3 desta tabela são 6 MPa, 3,28 MPa e 8,27 MPa, os quais são utilizados para definir a função aproximada.

σ	τ	σ_{eq}	σ_{eq} - aproximada	Erro (%)
2	1	2,64	2,64	0
4	2	5,29	5,28	0,19
6	4	9,16	9,11	0,54
10	5	13,22	13,2	0,15
7	4	9,85	9,83	0,2
5	3	7,21	7,19	0,27
8	4	10,58	10,56	0,18

4.5.11 Espectro de Potência Cruzado das Tensões Normais e Tensões Tangenciais

As densidades espectrais cruzadas são determinadas pela expressão (4.170). Usando-se as definições (4.139), (4.140) e (4.152) na (4.170), e lembrando-se a (4.105) escreve-se as expressões (4.171) e (4.172).

$$\frac{1}{2\pi}S_{\sigma\tau}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}(\bar{\tau}\hat{\sigma}) \quad , \quad \frac{1}{2\pi}S_{\tau\sigma}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}(\bar{\sigma}\hat{\tau}) \quad (4.170)$$

$$S_{\sigma\tau}(\omega) = W_4 \mathbf{k}_4^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_5^{eT} W_5 + W_4 \mathbf{k}_4^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_6^{eT} W_6 + W_4 \mathbf{k}_4^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_1^{eT} W_1 \quad (4.171)$$

$$S_{\tau\sigma}(\omega) = W_5 \mathbf{k}_5^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_4^{eT} W_4 + W_6 \mathbf{k}_6^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_4^{eT} W_4 + W_1 \mathbf{k}_1^e (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_{uu_s} + \mathbf{S}_{u_s u} + \mathbf{S}_{u_s}) \mathbf{k}_4^{eT} W_4 \quad (4.172)$$

Substituindo-se (4.86), (4.94), (4.99) e (4.101) na (4.171) e (4.172) obtém-se

$$\begin{aligned}
S_{\sigma\tau}(\omega) = & \sum_{i=1,5,6} \left\{ W_4 \mathbf{k}_i^e \left[\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} \right. \right. \\
& + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) + \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \\
& \left. \left. + \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \right] \mathbf{k}_i^{eT} W_i \right\} S(\omega) \quad (4.173)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\tau\sigma}(\omega) = & \sum_{i=1,5,6} \left\{ W_i \mathbf{k}_i^e \left[\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} \right) + \bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} \right. \right. \\
& + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_1^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_2^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) + \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_1^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_2^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \\
& \left. \left. + \bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + g(n) \left(\bar{\mathbf{X}}_{1s}^e \hat{\mathbf{X}}_{2s}^{eT} + \bar{\mathbf{X}}_{2s}^e \hat{\mathbf{X}}_{1s}^{eT} \right) \right] \mathbf{k}_4^{eT} W_4 \right\} S(\omega) \quad (4.174)
\end{aligned}$$

que são reescritas como (4.175) e (4.176), a partir das relações (4.144) a (4.147) e (4.156) a (4.159).

$$\begin{aligned}
S_{\sigma\tau}(\omega) = & \sum_{i=1,5,6} W_4 W_i \left[\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_2^{ei} + g(n) \left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_1^{ei} \right) + \bar{F}_1^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} \right. \\
& + g(n) \left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \bar{F}_2^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} \right) + \bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_2^{ei} + g(n) \left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} \right) \\
& \left. + \bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + g(n) \left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} \right) \right] S(\omega) \quad (4.175)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\tau\sigma}(\omega) = & \sum_{i=1,5,6} W_4 W_i \left[\bar{F}_1^{ei} \hat{F}_1^{e4} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_2^{e4} + g(n) \left(\bar{F}_1^{ei} \hat{F}_2^{e4} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_1^{e4} \right) + \bar{F}_1^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} \right. \\
& + g(n) \left(\bar{F}_1^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) + \bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_1^{e4} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_2^{e4} + g(n) \left(\bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_2^{e4} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) \\
& \left. + \bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} + g(n) \left(\bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) \right] S(\omega) \quad (4.176)
\end{aligned}$$

Fazendo-se agora a soma dos espectros cruzados, ou seja (4.175) mais (4.176), com o objetivo de eliminar os termos complexos da expressão final, obtém-se

$$\begin{aligned}
S_{\sigma\tau}(\omega) + S_{\tau\sigma}(\omega) = & \sum_{i=1,5,6} W_4 W_i \left\{ \left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \bar{F}_1^{ei} \hat{F}_1^{e4} \right) + \left(\bar{F}_2^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_2^{e4} \right) + \right. \\
& g(n) \left[\left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \bar{F}_1^{ei} \hat{F}_2^{e4} \right) + \left(\bar{F}_2^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_1^{e4} \right) \right] + \\
& \left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \bar{F}_1^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) + \left(\bar{F}_2^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} \right) + \\
& g(n) \left[\left(\bar{F}_1^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \bar{F}_1^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} \right) + \left(\bar{F}_2^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \bar{F}_2^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) \right] + \\
& \left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_1^{e4} \right) + \left(\bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_2^{e4} \right) + \\
& g(n) \left[\left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_2^{e4} \right) + \left(\bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_1^{e4} \right) \right] + \\
& \left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) + \left(\bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} \right) + \\
& \left. g(n) \left[\left(\bar{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \bar{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4} \right) + \left(\bar{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \bar{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4} \right) \right] \right\} S(\omega) \quad (4.177)
\end{aligned}$$

Considerando-se as expressões (4.144) a (4.147) e (4.156) a (4.159), e as seguintes relações:

$$\left(\overline{F}_1^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \overline{F}_1^{ei} \hat{F}_1^{e4}\right) = 2(C_1)_4(C_1)_i + 2(D_1)_4(D_1)_i \quad (4.178)$$

$$\left(\overline{F}_2^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \overline{F}_2^{ei} \hat{F}_2^{e4}\right) = 2(C_2)_4(C_2)_i + 2(D_2)_4(D_2)_i \quad (4.179)$$

$$\left(\overline{F}_1^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \overline{F}_1^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4}\right) = 2(C_1)_4(C_{1s})_i \quad \text{e} \quad \left(\overline{F}_2^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \overline{F}_2^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4}\right) = 2(C_2)_4(C_{2s})_i \quad (4.180)$$

$$\left(\overline{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \overline{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_1^{e4}\right) = 2(C_{1s})_4(C_1)_i \quad \text{e} \quad \left(\overline{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \overline{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_2^{e4}\right) = 2(C_{2s})_4(C_2)_i \quad (4.181)$$

$$\left(\overline{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \overline{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4}\right) = 2(C_{1s})_4(C_{1s})_i \quad \text{e} \quad \left(\overline{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \overline{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4}\right) = 2(C_{2s})_4(C_{2s})_i \quad (4.182)$$

$$g(n) \left[\left(\overline{F}_1^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \overline{F}_1^{ei} \hat{F}_2^{e4}\right) + \left(\overline{F}_2^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \overline{F}_2^{ei} \hat{F}_1^{e4}\right) \right] = 2g(n) \left[(C_1)_4(C_2)_i + (C_2)_4(C_1)_i + (D_1)_4(D_2)_i + (D_2)_4(D_1)_i \right] \quad (4.183)$$

$$g(n) \left[\left(\overline{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \overline{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4}\right) + \left(\overline{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \overline{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4}\right) \right] = 2g(n) \left[(C_{1s})_4(C_{2s})_i + (C_{2s})_4(C_{1s})_i \right] \quad (4.184)$$

$$g(n) \left[\left(\overline{F}_1^{e4} \hat{F}_{2s}^{ei} + \overline{F}_1^{ei} \hat{F}_{2s}^{e4}\right) + \left(\overline{F}_2^{e4} \hat{F}_{1s}^{ei} + \overline{F}_2^{ei} \hat{F}_{1s}^{e4}\right) + \left(\overline{F}_{1s}^{e4} \hat{F}_2^{ei} + \overline{F}_{1s}^{ei} \hat{F}_2^{e4}\right) + \left(\overline{F}_{2s}^{e4} \hat{F}_1^{ei} + \overline{F}_{2s}^{ei} \hat{F}_1^{e4}\right) \right] = 2g(n) \left[(C_1)_4(C_{2s})_i + (C_{2s})_4(C_1)_i + (C_2)_4(C_{1s})_i + (C_{1s})_4(C_2)_i \right] \quad (4.185)$$

nas quais o índice i assume os valores 1, 5 e 6, pode-se escrever a expressão (4.186), que nos fornece a soma dos espectros de potência cruzados das tensões normais com as tangenciais. Empregando-se este resultado em conjunto com (4.150) e (4.160) na (4.169) se obtém uma estimativa para a função de densidade espectral de potência das tensões equivalentes.

$$S_{\sigma\sigma}(\omega) + S_{\tau\tau}(\omega) = 2 S(\omega) \sum_{i=1,5,6} \left\{ W_4 W_i \left[(C_1)_4(C_1)_i + (D_1)_4(D_1)_i + (C_2)_4(C_2)_i + (D_2)_4(D_2)_i + (C_1)_4(C_{1s})_i + (C_2)_4(C_{2s})_i + (C_{1s})_4(C_1)_i + (C_{2s})_4(C_2)_i + (C_{1s})_4(C_{1s})_i + (C_{2s})_4(C_{2s})_i + g(n) \left[(C_1)_4(C_2)_i + (D_1)_4(D_2)_i + (C_2)_4(C_1)_i + (D_2)_4(D_1)_i + (C_1)_4(C_{2s})_i + (C_2)_4(C_{1s})_i + (C_{1s})_4(C_2)_i + (C_{2s})_4(C_1)_i + (C_{1s})_4(C_{2s})_i + (C_{2s})_4(C_{1s})_i \right] \right] \right\} \quad (4.186)$$

5. PROCESSO PARA VERIFICAÇÃO DA ESTRUTURA À FADIGA

Apresenta-se um método de verificação da estrutura de um ônibus à *fadiga de alto ciclo*, item 5.1.2, que use os resultados obtidos pela formulação do capítulo 4. O objetivo deste estudo é obter uma estimativa da vida útil deste veículo através do uso da teoria clássica de fadiga (*Stress-Life Approach*) cujos fundamentos são encontrados em SHIGLEY (1963), JUVINALL (1967), JUVINALL (1983), SURESH (1998), NORTON (1998).

A idéia central do método proposto é dividir as cargas que atuam no ônibus em dois conjuntos. O primeiro conjunto é formado por cargas que possam ser consideradas estáticas, e o segundo é formado por cargas dinâmicas aleatórias geradas pelas irregularidades da pista de rodagem. São consideradas cargas estáticas, o peso próprio do ônibus mais a sua capacidade de carga máxima. Utiliza-se a carga máxima do veículo por ser a favor da segurança, e porque esta não varia no tempo. Na realidade, as forças que formam a carga do ônibus, que são os passageiros mais a sua bagagem, são variáveis no tempo, além de terem natureza aleatória, mas isto não será considerado neste estudo.

Com as cargas do 1º grupo faz-se uma análise estática linear do veículo considerando este apoiado nas quatro rodas. As tensões resultantes desta análise são adotadas como as tensões médias que atuam no veículo. Na realidade, adotar as tensões estáticas como tensões médias nem sempre é verdadeiro, mas este artifício é bastante usado na prática (JUVINALL - 1983), (COLLINS - 1993), e facilita muito a operacionalização da formulação proposta.

Com as cargas do 2º grupo faz-se uma análise no domínio da frequência, que obtém os desvios padrões das componentes variáveis dos deslocamentos, solicitações e tensões.

Combinando-se os resultados dos dois grupos, figura (5.1), com um tratamento estatístico adequado, obtém-se uma variação de tensão equivalente à variação real, a partir da qual faz-se a análise de fadiga.

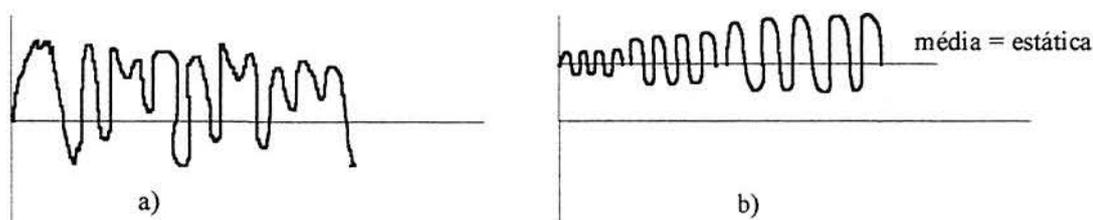


Figura (5.1) - Esquema da representação simplificada das tensões.
a) Resposta real das tensões. b) Resposta proposta no trabalho.

O processo de verificação à fadiga proposto considera apenas a possibilidade de falha das barras (perfis) que formam a estrutura. Não é considerada a possibilidade de falha dos nós (juntas de ligação). Esta hipótese simplificativa é analisada com maior detalhe no item 5.7.

5.1 DEFINIÇÕES GERAIS

5.1.1 Cargas que Provocam Fadiga

Qualquer tensão que varie no tempo pode potencialmente provocar falha por fadiga. As características destas tensões variam substancialmente de acordo com a aplicação enfocada. De modo geral, as tensões variáveis no tempo são divididas em dois grupos que são o das tensões de amplitude constante e o das tensões de amplitude variável.

As tensões de amplitude constante estão normalmente têm natureza determinística e estão relacionadas com máquinas rotativas. Elas são classificadas como flutuante, repetida e alternante. A figura (5.2) ilustra estas tensões, na qual σ_a e σ_m são as tensões alternante e média, σ_{max} e σ_{min} é a tensão máxima, σ_{min} é a tensão mínima e $\Delta\sigma$ é a faixa de variação de tensão (*stress range*).

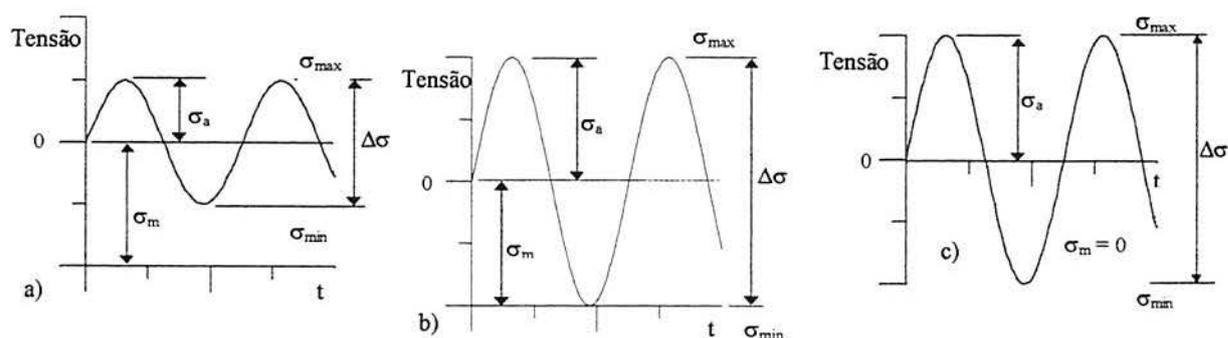


Figura (5.2) - Classificação das tensões com amplitude constante.

a) Tensão flutuante; b) Tensão repetida; c) Tensão alternante.

A tensão alternante σ_a e a faixa de variação de tensão, utilizadas nos gráficos desta figura, são calculadas conforme as seguintes equações:

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \qquad \sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

As tensões de amplitude variável, figura (5.3), estão normalmente associadas, entre outros casos, com tráfego de veículos, com vento agindo nas asas de aviões, com ondas agindo em plataformas marítimas. Estas tensões geralmente têm uma frequência de atuação variável, o que faz com que elas tenham, na maioria das vezes, uma natureza aleatória, que será mais ou menos intensa de acordo com as características da carga. As tensões associadas ao tráfego de um veículo têm amplitude e frequência variáveis, sendo de natureza aleatória.

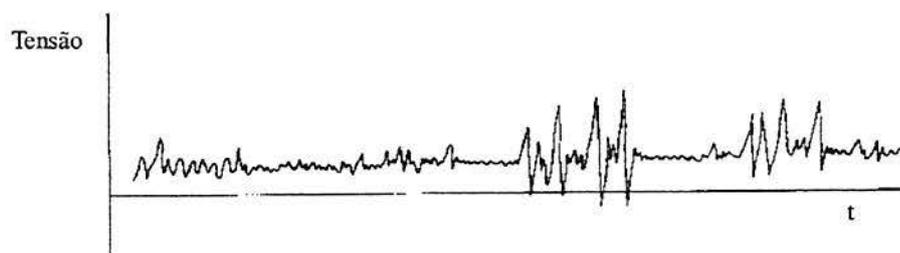


Figura (5.3) - Tensão com amplitude e frequência variável de natureza semi-aleatória. (NORTON - 1998)

5.1.2 Regimes de Fadiga

Os regimes de fadiga são identificados como de alto ciclo (*High-Cycle Fatigue* – HCF) ou de baixo ciclo (*Low-Cycle Fatigue* – LCF) com base no número de ciclos de tensão que são aplicados numa peça durante o seu tempo de serviço. A fadiga de alto ciclo está relacionada com tensões baixas, deformações elásticas e um grande número de ciclos até a falha da peça. Já a fadiga de baixo ciclo está relacionada com tensões altas, deformação plástica significativa em cada ciclo e um pequeno número de ciclos até a falha da peça.

Não há uma linha divisória definida entre os dois regimes, mas neste trabalho considera-se fadiga de alto ciclo a partir de 10^3 ciclos de tensão (NORTON – 1998). Quando se aplica a fadiga de alto ciclo, é usual uma abordagem a partir dos diagramas σ - N , sendo as tensões obtidas por uma análise elástica linear. Já quando se aplica a fadiga de baixo ciclo é usual trabalhar com diagramas ϵ - N empregando-se uma análise não linear.

5.1.3 Processos do Tipo Banda Estreita e Banda Larga

Para se estimar a vida útil de uma estrutura submetida a cargas de natureza aleatória, é fundamental identificar se esta carga tem as características de um processo tipo banda larga, figura (5.4.a), ou tipo banda estreita, figura (5.4.b).

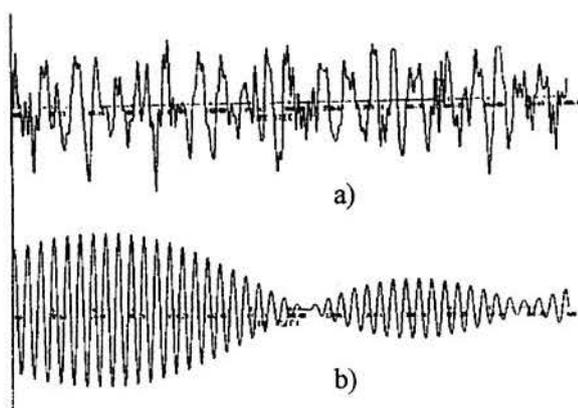


Figura (5.4) - Exemplo de processo banda larga e banda estreita.

a) Processo banda larga. b) Processo banda estreita.

De modo geral, um processo banda estreita tem um espectro de potência descrito dentro de uma faixa estreita de freqüências, figura (5.5a), e um processo banda larga tem um espectro de potência descrito ao longo de uma faixa larga de freqüências, figura (5.5b).

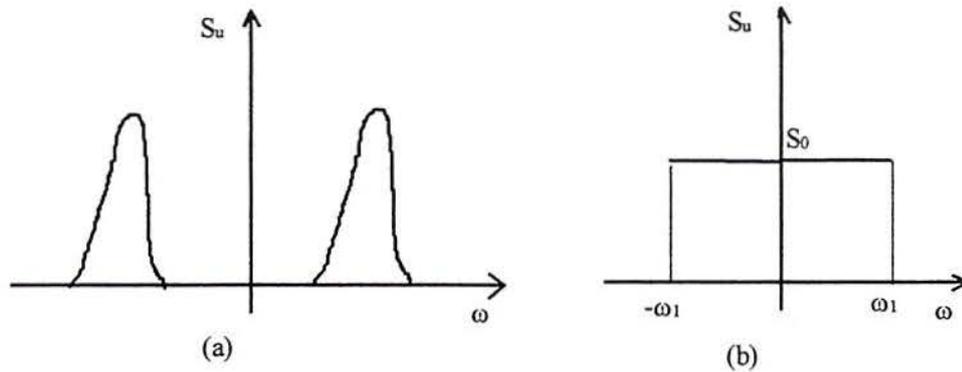


Figura (5.5) - Classificação dos processos conforme sua banda de freqüência.

(a): Exemplo de f.d.e.p. do tipo banda estreita. (b): Exemplo de f.d.e.p. do tipo banda larga (este processo é conhecido como ruído branco por faixas).

Segundo CLOUGH & PENZIEN (1993), o tipo de processo é identificado pelo parâmetro ε , proposto por *Cartwright* e *Longuet-Higgins*, que está definido na expressão (5.1), na qual M_0 , M_2 e M_4 , são os momentos do espectro definidos em (5.2) fazendo-se $n = 0$, $n = 2$ e $n = 4$.

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{M_2^2}{M_0 M_4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\omega) \omega^n d\omega \quad (5.2)$$

Quando ε tende a zero o processo tende a uma largura de banda infinitamente estreita que aproxima um processo harmônico simples. Quando o processo é um ruído branco ou um ruído branco por faixas ε vale $2/3$. O caso limite de $\varepsilon = 1$ é aproximado colocando-se um sinal de alta freqüência e baixa amplitude no topo de um sinal de baixa freqüência e com banda limitada.

Uma vez identificado o tipo de processo pode-se adotar o método que forneça a melhor aproximação para a vida útil. Uma característica importante dos processos de banda estreita é que estes podem ser aproximados como uma função senoidal de amplitude variável, o que é bastante útil para se determinar o equacionamento que obtém os máximos de um processo.

5.1.4 Vida Útil

Define-se a vida útil de uma peça como a vida esperada, em uso contínuo, para a mesma sem apresentar falha. Neste caso, consideram-se as falhas causadas exclusivamente pelo processo de fadiga. Não são consideradas as falhas devidas a defeitos de fabricação nem as devidas ao desgaste natural do equipamento.

5.2 DEFINIÇÃO DAS CURVAS DE WÖHLER - LIMITE DE FADIGA

As curvas de Wöhler, curvas σ - N , são obtidas através de ensaio, flexão rotativa ou compressão e tração (*push-pull*), em laboratório usando-se corpos de prova normalizados. Estes ensaios são realizados aplicando-se no corpo de prova uma tensão σ , que oscila com amplitude constante, até que se verifique a falha, e se registre o número de ciclos N . As curvas resultantes são escritas na forma $N\sigma_n^m = 10^a$, que em coordenadas logarítmicas corresponde a

$$\log \sigma_n = \frac{1}{m}(a - \log N) \quad (5.3)$$

na qual σ_n é a resistência a fadiga em n ciclos, m e a são parâmetros obtidos pelos resultados experimentais usando-se mínimos quadrados. A figura (5.6) ilustra uma curva σ - N , que a curva é aproximada por uma ou mais retas. Cada uma destas curvas têm uma probabilidade de sobrevivência dos corpos de prova associada (COLLINS - 1993), (JUVINALL - 1967).

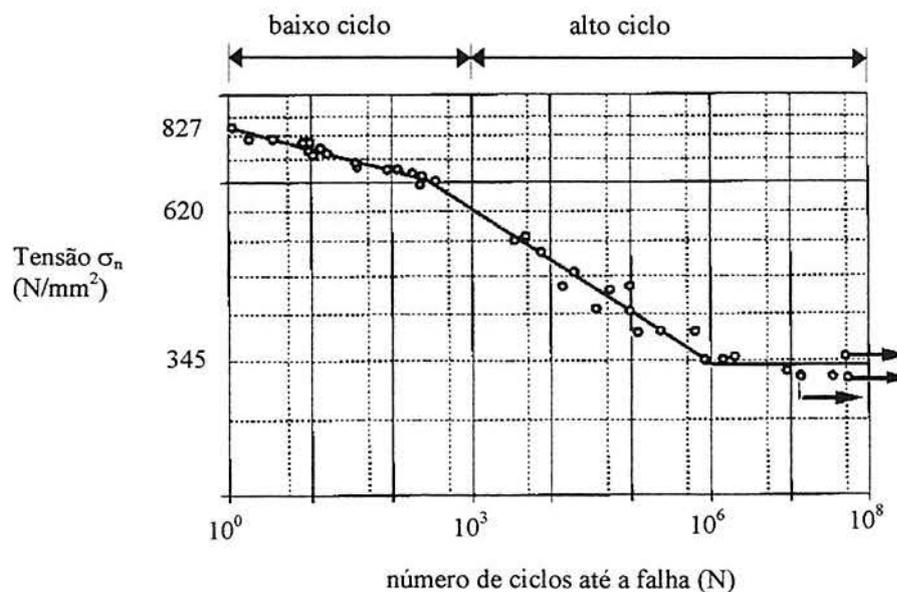


Figura (5.6) Exemplo de curva σ - N .
(NORTON - 1998)

Curva σ - N correspondente a um ensaio tipo *push-pull* para o aço AISI 4130. Na figura pode-se identificar a transição entre a região de fadiga de baixo ciclo (LCF) e alto ciclo, bem como o limite de fadiga do material.

O resultado de maior importância prática que se obtém de uma curva $\sigma-N$ é o limite de fadiga do material (corpo de prova) $\sigma_{f_{cp}}$, que é definido como a máxima tensão alternante que este suporta sem apresentar falha independente do número de ciclos de carga. Para a maioria dos aços têm-se um limite de fadiga definido, que normalmente é encontrado na faixa entre 10^6 e 10^7 ciclos. O limite de fadiga adotado neste trabalho é o correspondente a um ensaio de flexão alternada. Caso este valor seja obtido por um ensaio do tipo *push-pull* deve ser utilizado um fator de correção que é encontrado na literatura (NORTON - 1998).

5.2.1 Estimativa de uma Curva $\sigma-N$

Quando não se dispõe de dados experimentais, adotam-se relações empíricas para a construção da curva $\sigma-N$. Em primeiro lugar deve-se estabelecer a região do diagrama correspondente à fadiga de alto ciclo, que para a maioria dos autores; (NORTON - 1998), (SAE - 1997), (COLLINS - 1993); é considerada a partir de 10^3 ciclos. O segundo passo é obter o valor da tensão alternante σ_{10^3} , correspondente a 10^3 ciclos, pela relação de *Manson*: $\sigma_{10^3} = 0,9 \cdot \sigma_r$, em que σ_r é a tensão de ruptura do material. Esta relação tem ampla aceitação prática, sendo adotada na maior parte das publicações (NORTON - 1998).

O limite de fadiga do material $\sigma_{f_{cp}}$ é estimado por relações empíricas baseadas na tensão de ruptura, dureza Brinell e na composição química do material. Para aços com baixo teor de carbono; caso do ASTM A36, faz-se $\sigma_{f_{cp}} = 0,5 \cdot \sigma_r$. O número de ciclos correspondente ao limite de fadiga é aproximado, pela maioria dos autores, como 10^6 ciclos (SAE - 1997), (COLLINS - 1993), (SHIGLEY & MISCHKE - 1986).

A curva $\sigma-N$ é, então, aproximada unindo-se os dois pontos anteriormente calculados por uma reta, como ilustrado na figura (5.7). A curva resultante corresponde a uma probabilidade de sobrevivência de 50% dos corpos de prova (SAE - 1997).

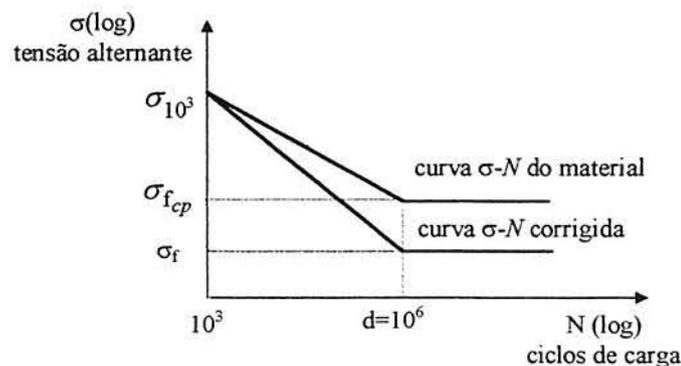


Figura (5.7) - Curva $\sigma-N$ em escala logarítmica.

A partir desta curva $\sigma-N$ pode-se determinar os parâmetros m e a , utilizados na equação (5.3), através da relação (5.4). Trocando-se nesta expressão σ_f por $\sigma_{f_{cp}}$ se obtém m e a correspondentes a curva do material não corrigida.

$$m = \frac{\log\left(\frac{d/10^3}{\sigma_{10^3}/\sigma_f}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_{10^3}}{\sigma_f}\right)} \quad \text{e} \quad a = m \cdot \log(\sigma_{10^3}) + 3 \quad (5.4)$$

Tanto a curva $\sigma-N$ obtida por ensaio quanto a obtida através de relações empíricas, devem ser corrigidas porque as situações de uso real do material não apresentam as condições ideais exigidas para os corpos de prova. Esta correção é feita sobre o limite de fadiga conforme ilustrado na figura (5.7) (NORTON - 1998).

5.2.2 Correção do Limite de Fadiga do Material dos Perfis

Apresenta-se a seguir os fatores de correção do limite de fadiga, que têm utilidade neste trabalho. Outros fatores de correção, que não se aplicam ao caso em estudo, são encontrados em NORTON (1998), SAE (1997), JUVINALL (1983).

O primeiro fator de correção com efeito significativo no limite de fadiga é o acabamento superficial, já que o corpo de prova tem um acabamento superficial a nível de espelhamento. Para outros acabamentos aplica-se um fator K_a , que pode ser obtido por gráficos, como da figura (5.8).

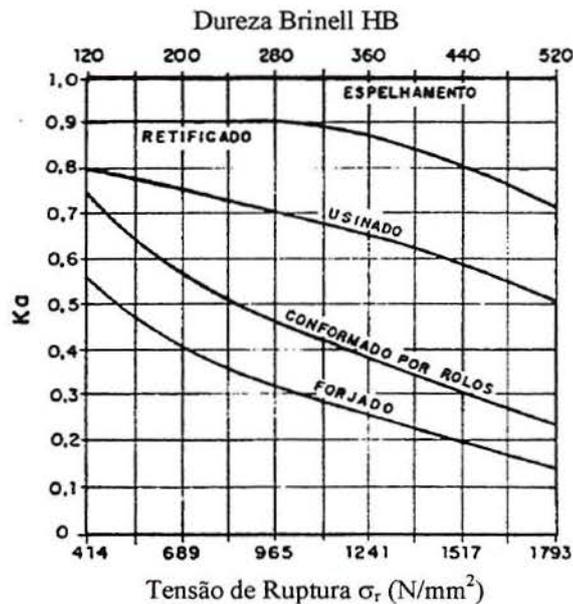


Figura (5.8) - Gráfico para obtenção do coeficiente de acabamento superficial. (MORSCH - 1991), (JUVINALL - 1967).

Observa-se que o fator K_a é função da dureza em escala Brinell ou da tensão de ruptura σ_r do material e do processo de fabricação da peça. No caso dos ônibus, as barras tubulares usadas nas carrocerias são todas com costura, sendo fabricadas por conformação a frio e depois soldadas. Para o processo de conformação a frio usa-se a mesma curva de acabamento usinado. Em NORTON (1998), obtém-se as funções que interpolam a figura (5.8).

O corpo de prova adotado nos ensaios tem um diâmetro da ordem de 8 mm. Quando a peça analisada tem um diâmetro superior a este, aplica-se um fator de escala K_b para levar em conta que partes maiores falham com níveis de tensões menores, devido à maior probabilidade de existência de defeitos no material. Há várias propostas para obtenção de um fator de escala (NORTON - 1998), mas optou-se pelo método utilizado por *Shigley*, apresentado na expressão (5.5)

$$\begin{aligned} \text{Para } d \leq 8 \text{ mm} & : K_b = 1 \\ \text{Para } 8 \text{ mm} \leq d \leq 250 \text{ mm} & : K_b = 1,189 \cdot d^{-0,097} \\ \text{Para } d > 250 \text{ mm} & : K_b = 0,6 \end{aligned} \quad (5.5)$$

,que é válido para elementos cilíndricos. Para elementos não cilíndricos, *Kuguel* adota um diâmetro equivalente calculado com base na área correspondente a 95% da tensão máxima que atua na seção. Como a tensão é distribuída linearmente ao longo do diâmetro da viga rotativa, tem-se que a área com tensão superior a 95% da tensão máxima, A_{95} , está localizada entre os diâmetros $0,95 d$ e $1,0 d$, conforme figura (5.9), e é calculada por (5.6). O diâmetro equivalente, a ser utilizado em (5.5), é então determinado por (5.7).

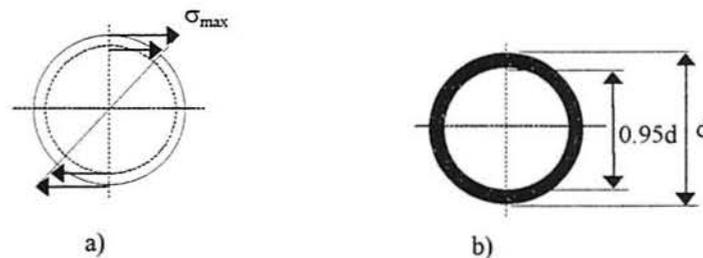


Figura (5.9) - Método para determinação do diâmetro equivalente.

a) Distribuição da tensão.

b) Área acima de 95% da tensão máxima.

$$A_{95} = \pi \left[\frac{d^2 - (0,95 \cdot d^2)}{4} \right] = 0,0766d^2 \quad (5.6)$$

$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0,0766}} \quad (5.7)$$

Para as seções usadas neste trabalho, figura (5.10), a área A_{95} é calculada conforme (5.8), (5.9) e (5.10), que correspondem aos casos a), b) e c) da figura (5.10). Nota-se que A_{95} é função do eixo de flexão. Como adota-se o critério da tensão equivalente para tratar fadiga, perde-se o controle deste eixo. Neste caso, se emprega o A_{95} que gerar o menor fator de escala.

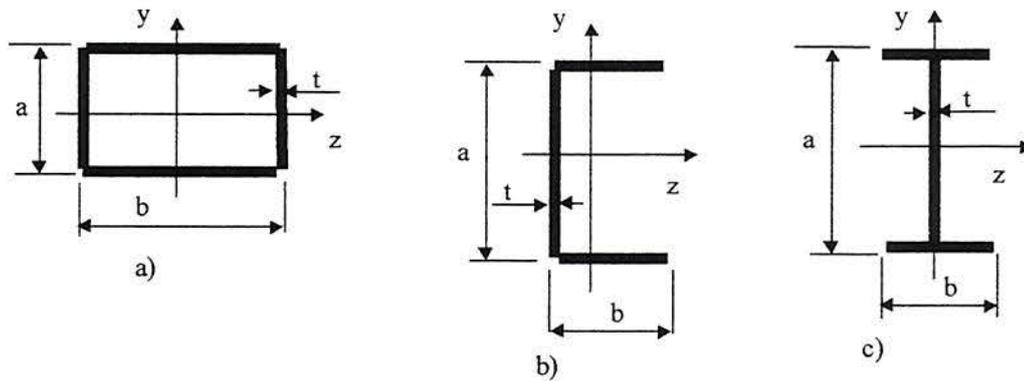


Figura (5.10) - Seções consideradas no trabalho.

- a) Seção Caixão;
- b) Seção C;
- c) Seção I.

$$\begin{aligned} \text{Eixo Z-Z : } A_{95} &= 0,05ab \quad \text{se } t > 0,025a \\ \text{Eixo Y-Y : } A_{95} &= 0,05ab \quad \text{se } t > 0,025b \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Eixo Z-Z : } A_{95} &= 0,05ab \quad \text{se } t > 0,025a \\ \text{Eixo Y-Y : } A_{95} &= 0,05a \cdot z_g + t(b - z_g) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Eixo Z-Z : } A_{95} &= 0,05ab \quad \text{se } t > 0,025a \\ \text{Eixo Y-Y : } A_{95} &= 0,15bt \end{aligned} \quad (5.10)$$

A curva $\sigma-N$ obtida por relações empíricas corresponde à uma probabilidade de sobrevivência de 50% dos corpos de prova, ou seja se escolhermos um ponto pertencente a esta curva, e aplicarmos este valor de tensão num conjunto de corpos de prova, o valor esperado para o número de corpos sobreviventes é de 50% do total do conjunto. Mesmo quando se obtém uma única curva $\sigma-N$ para o material através de ensaio, costuma-se associar a esta também uma probabilidade de 50%. Esta variabilidade das propriedades do material pode ser considerada por um coeficiente de confiabilidade K_c . Este fator é calculado assumindo-se um desvio padrão D para o limite de fadiga de 8% e uma confiabilidade de 50% para o material (SHIGLEY - 1963), A tabela (5.1) apresenta os valores do coeficiente de confiabilidade obtidos pela equação (5.11). É importante ressaltar que nos estudos que adotam análise de confiabilidade, o uso do coeficiente K_c é desnecessário.

$$K_c = 1 - 0,08 \cdot D \quad (5.11)$$

Tabela (5.1) - Coeficientes de confiabilidade.

Relação de Sobrevivência (%)	90	95	99	99,9	99,99
Fator de Multiplicação do desvio padrão	1,3	1,6	2,3	3,1	3,7
K_c	0,896	0,872	0,816	0,752	0,704

Os perfis tubulares usados nas carrocerias são costurados pelo processo de *solda de alta frequência*. Logo, pode ocorrer uma redução no limite de fadiga devido a concentração de tensão na região da solda (K_{solda}). Porém, a informação prática que se dispõe é que este tipo de solda gera uma zona de material afetada muito pequena. Logo, o fabricante não recomenda redução nas propriedades mecânicas (tensão de ruptura escoamento) do perfil (informação obtida com a empresa Zamproгна). Por outro lado, comparando-se as curvas $\sigma-N$, usadas pelo EUROCODE 3 (1993), para perfis tubulares com e sem costura, nota-se uma redução de 12,5% no limite de fadiga do perfil (que corresponde a um $K_{solda} = 0,875$) quando se considera este com costura. Estas curvas são baseadas em dados experimentais, mas os coeficientes de segurança e confiabilidade imbutidos nelas não são conhecidos. De qualquer modo, na falta de dados experimentais este é o melhor dado disponível.

Uma vez determinados os coeficientes anteriores pode-se calcular o limite de fadiga da barra pela expressão (5.12), que considera o limite de fadiga do corpo de prova aproximado como $0,5 \cdot \sigma_r$.

$$\sigma_f = K_a K_b K_c \cdot K_{solda} \cdot 0,5 \cdot \sigma_r \quad (5.12)$$

Evidentemente o processo aqui apresentado é aproximado. Na realidade, o limite de fadiga do corpo de prova é uma variável aleatória com distribuição log-normal. Os fatores K_a e K_b também têm comportamento aleatório, como indicam SHIGLEY & MISCHKE (1986) que fornecem os seus valores médios e desvios padrões. Portanto, um procedimento mais realista passa necessariamente por uma análise de confiabilidade.

Um fator de considerável importância, que não foi considerado, é a concentração de tensão devido à forma da união das barras e tensões residuais devidas ao processo de montagem da estrutura. De modo geral, estes fatores somente podem ser determinados por análise experimental. A exceção a esta regra é o coeficiente de concentração de tensões no nó, que pode ser estimado por uma análise da união com um modelo de elementos finitos (capítulos 2 e 3). Esta concentração de tensões também pode ser levada em conta através das

curvas σ - N de projeto, para vários tipos de juntas soldadas, apresentadas no EUROCODE 3 (1993). No entanto, este fator não foi considerado no estudo por que não é considerada a possibilidade de falha das juntas conforme comentado no início deste capítulo. No item 5.7 são apresentados maiores detalhes sobre esta questão.

5.3 O MODELO DE DANO

A falha provocada por uma excitação aleatória ocorre como um resultado da combinação dos efeitos de ciclos de tensões com amplitudes diferentes de modo que os gráficos σ - N não são aplicados de modo direto. Até o momento, não há conhecimento suficiente do mecanismo básico de fadiga para ser possível aplicar os resultados dos ensaios com amplitude de tensão constante para o caso de tensões variando de forma aleatória. Várias hipóteses foram apresentadas com o objetivo de analisar o que ocorre sob condições de carregamento aleatório. A mais conhecida delas é a *regra linear do dano acumulado* de *Palmgren-Miner* (proposta por Palmgren, na Suécia, em 1924, e por Miner, de forma independente, nos Estados Unidos em 1945). Esta regra estabelece que se n_i ciclos de tensões com amplitude σ ocorrem, e se N_i é o número de ciclos necessários para ocorrer falha neste mesmo nível de tensão, então, a fração de dano causada por n_i ciclos vale n_i/N_i . Este resultado está melhor representado na figura (5.11). Logo, a falha é esperada quando a soma de todas as frações de dano for igual a um, conforme expressão (5.13). Nesta expressão, k é o número de diferentes níveis de tensão numa seqüência específica de carregamento e i é o i ésimo nível de tensão nesta seqüência de carregamento.

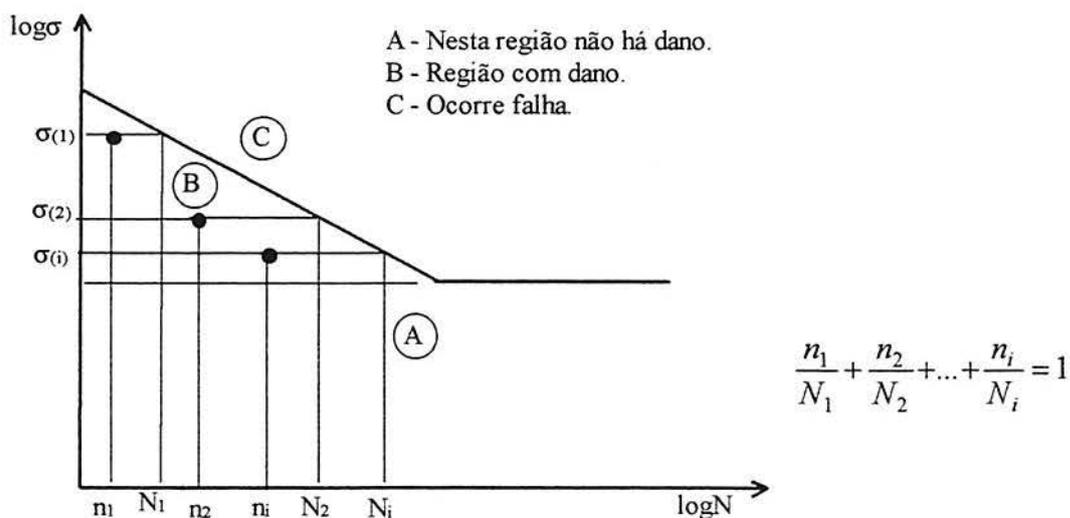


Figura (5.11) - Esquema mostrando o funcionamento da Regra de Miner.

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (5.13)$$

A maior deficiência da regra de Miner é que ela não considera o efeito de seqüência na aplicação da carga ou seja

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_i}{N_i} = \frac{n_i}{N_i} + \dots + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_1}{N_1} \quad (5.14)$$

e, além disso, o dano é acumulado na mesma taxa correspondente ao nível de tensão dado sem considerar a história de carga anterior ou seja o processo é linear. Nota-se, através de ensaios, que seqüências de carga decrescente fazem com que a soma indicada em (5.13) seja inferior a 1 ($\cong 1/4$). Já seqüências de carga crescente fazem com que a mesma soma seja superior a 1 ($\cong 4$). Estas tendências são observadas principalmente em corpos de prova com chanfros. Em ensaios com cargas semi-aleatórias esta soma pode variar entre 0,6 e 1,6. De modo geral, quanto mais aleatórias forem as características das cargas, mais o somatório irá se aproximar da unidade (COLLINS - 1993). No entanto, se o processo aleatório tem banda larga tem-se indicações sobre a necessidade de correção do somatório apresentado em (5.13). Por outro lado, quando a carga é um processo aleatório Gaussiano com banda estreita, não há seqüência de carga definida (FUCHS & STEPHENS - 1980).

Entretanto, quando os ensaios são realizados com estruturas inteiras, verifica-se que a seqüência de carga tem uma influência contrária da verificada nos ensaios de corpos de prova. Seqüências de carga crescente causam mais dano que as seqüências decrescentes das mesmas cargas. Este paradoxo ainda não foi claramente explicado, mas está certamente relacionado com as tensões residuais introduzidas nos componentes e na estrutura por concentrações de tensões nas uniões e descontinuidades da estrutura. Sabe-se que a aplicação e relaxação de tensões altas resulta num campo de tensão residual de compressão em regiões de concentração de tensões. Aplicando-se depois uma tensão mais baixa tem-se menos dano do que se a tensão residual não existisse. Logo, mesmo um simples ciclo de tensão muito alta pode ter grande importância na falha por fadiga (COLLINS - 1993).

A regra de Miner foi descrita por alguns autores como uma ficção útil, mas ainda é a melhor aproximação disponível. Grande parte das críticas à esta regra são baseadas em interpretações determinísticas de uma relação estocástica. Os termos N_1 , N_2 , N_i e seus recíprocos n_1 , n_2 , n_i , bem como a soma destes, são distribuições aproximadamente do tipo log-normal. Logo, a falha é probabilística e coeficientes de confiabilidade podem ser obtidos (WIRSCHING-1995), (SHIGLEY & MISCHKE - 1986). De modo geral, quanto mais

aleatório for o comportamento das tensões, melhor será o resultado fornecido pela regra de Miner. Logo, não é compensador a implementação de regras de dano mais complexas para estes casos.

Escrevendo-se agora a regra de Miner considerando-se a tensão σ como uma variável continua obtém-se a (5.15) na qual $n(\sigma)d\sigma$ representa o número de ciclos de carga com amplitude de tensão no intervalo $(\sigma, \sigma+d\sigma)$, $N(\sigma)$ é o número de ciclos que o material suporta na amplitude σ e D é o dano causado ao material. Esta expressão é reescrita conforme (5.16), indicando o caráter aleatório do dano D e de $n(\sigma)$ através do uso dos valores esperados $E[D]$, $E[n(\sigma)]$ e indicando que $N(\sigma)$ é uma grandeza determinística (YANG - 1986).

$$D = \int_0^{\infty} \frac{n(\sigma)d\sigma}{N(\sigma)} \quad (5.15)$$

$$E[D] = \int_0^{\infty} \frac{E[n(\sigma)]d\sigma}{N(\sigma)} \quad (5.16)$$

Na verdade, considerando-se as variações nas propriedades do material; tensão de escoamento, tensão de ruptura, limite de fadiga; $N(\sigma)$ passa também a ser representado aproximadamente por uma distribuição do tipo log-normal. Para se obter $E[n(\sigma)]$ faz-se necessário o emprego da teoria de ultrapassagens.

5.3.1 Consideração do Dano abaixo do Limite de Fadiga

A aplicação da regra de Miner implica que tensões inferiores ao limite de fadiga, determinado com tensões de amplitude constante, não causam dano porque se $N \rightarrow \infty$ então $n/N \rightarrow 0$, o que se provou não ser correto quando se trabalha com tensões de amplitude variável. Nota-se que as tensões mais elevadas podem propagar uma trinca até um comprimento crítico, tal que tensões inferiores ao limite de fadiga também possam causar dano (BRANCO et al. - 1986). Este é um tema sem consenso existindo diversas propostas para o assunto, das quais se destacam as ilustradas na figura (5.12). A curva **A** desta figura ilustra o diagrama padrão σ - N comentado no item 5.2.1. Esta curva não considera dano abaixo do limite de fadiga sendo o procedimento padrão adotado no projeto de elementos de máquinas. A norma DIN 15018, que trata de elementos de elevação, utiliza esta abordagem. A curva **B** é obtida prolongando-se a reta r até 2×10^7 ciclos, definindo-se, então, uma tensão limite abaixo da qual não ocorre dano (este valor de tensão é denominado como *cut-off limit*). Esta abordagem foi utilizada por alguns códigos de projeto, mas está em desuso.

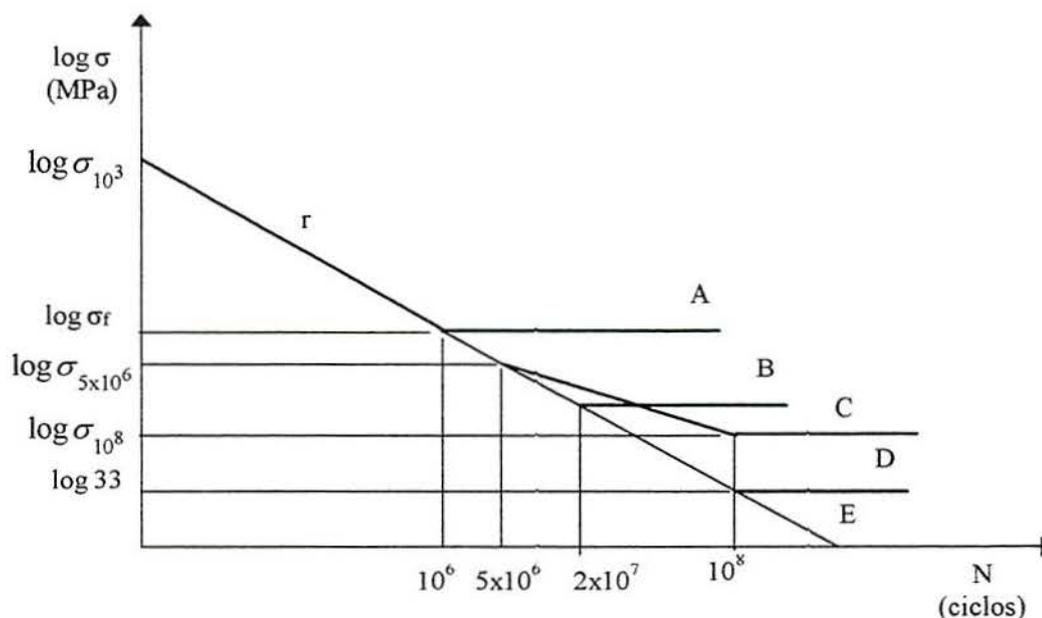


Figura (5.12) - Curvas para consideração do dano abaixo do limite de fadiga.

A curva **C** é obtida pelo prolongamento da reta *r* até 5×10^6 ciclos. A partir deste ponto traça-se uma nova reta, com declividade menor que a anterior, até 10^8 ciclos. Traça-se a seguir uma reta horizontal obtendo uma nova tensão limite. Este tipo de curva é adotada no projeto de estruturas soldadas pelos códigos EUROCODE 3 e BS-5400, os quais alteram o fator *m* da reta, equação (5.3), para $m+2$. A curva **D** é obtida prolongando-se a reta *r* até um nível de tensão baixo, usualmente 33 MPa, traçando-se a partir daí uma reta horizontal. Este procedimento não é mais utilizado nos códigos atuais. A curva **E** é obtida prolongando-se a reta *r* até a interseção com o eixo das abcissas. Das curvas apresentadas, destacam-se as curvas **E** e **D** como as mais conservativas. Por outro lado, o uso da curva **A** pode parecer contra a segurança.

Como há falta de consenso neste assunto optou-se por um esquema que permite ao usuário adotar uma curva do tipo **A**, **C** ou **E**. Vale ressaltar que o uso de qualquer uma das curvas anteriores pode ser feito com mínimas alterações no formulário apresentado a seguir.

5.4 ANÁLISE DE ULTRAPASSAGENS

O texto a seguir apresenta sucintamente os aspectos teóricos relevantes para este trabalho. Uma abordagem mais completa pode ser encontrada em diversas publicações (BREBBIA & WALKER - 1979), (YANG - 1986), (RIERA - 1989), (NEWLAND - 1993), (CLOUGH & PENZIEN - 1993).

5.4.1 Análise de Ultrapassagem num Processo de Banda Estreita

Deseja-se saber o número de cruzamentos em um processo x ou seja quantos ciclos têm amplitudes maiores que $x = a$, figura (5.13), durante um período T . Quando o processo é estacionário, o número esperado de cruzamentos por unidade de tempo é constante. Logo, o número total de cruzamentos com derivada positiva, N_a^+ , é apenas uma função de T e de uma frequência média de cruzamentos com derivada positiva em $x = a$ que é representada por v_a^+ .

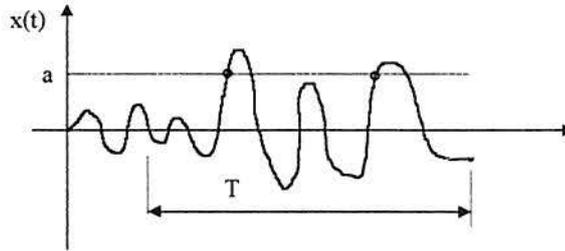


Figura (5.13) - Cruzamentos em a com derivada positiva.

Demonstra-se que para um processo de banda estreita, v_a^+ e N_a^+ valem

$$v_a^+ = \int_0^{\infty} p(a, \dot{x}) \dot{x} d\dot{x} \quad , \quad N_a^+ = v_a^+ T \quad (5.17)$$

na qual $p(a, \dot{x})$ é a distribuição de probabilidade da combinação de x com \dot{x} , ver figura (5.14), para $x = a$ (BREBBIA & WALKER - 1979).

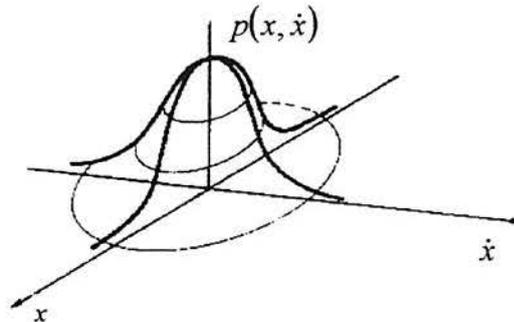


Figura (5.14) - Distribuição de probabilidade de x e \dot{x} .
(BREBBIA & WALKER - 1979)

Como o processo é estacionário, x e sua derivada \dot{x} são não correlacionadas. Logo $p(x, \dot{x}) = p(x)p(\dot{x})$.

Considerando-se que a distribuição $p(x, \dot{x})$ é Gaussiana tem-se

$$p(a, \dot{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_{xx}}} e^{-a^2/2\psi_{xx}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_{\dot{x}\dot{x}}}} e^{-\dot{x}^2/2\psi_{\dot{x}\dot{x}}} \right) \quad (5.18)$$

em que $\psi_{\dot{x}\dot{x}}$ e ψ_{xx} são os valores *rms* de \dot{x} e x .• Substituindo-se a (5.18) na (5.17) obtém-se a (5.19).

$$v_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\psi_{\dot{x}\dot{x}}}{\psi_{xx}} e^{-a^2/2\psi_{xx}^2} \quad (5.19)$$

Fazendo-se $a = 0$ nesta equação se obtém a frequência de cruzamento do nível zero v_0^+ [Hz]

$$v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\psi_{\dot{x}\dot{x}}}{\psi_{xx}} \quad (5.20)$$

que também pode ser escrita, em função das densidades espectrais, como

$$v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\int \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega}{\int S_{xx}(\omega) d\omega} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M_2}{M_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.21)$$

que para o caso específico de um processo banda estreita, com frequência característica ω_0 , pode ser escrita como (5.22).

$$v_0^+ = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (5.22)$$

5.4.2 Distribuição de Picos num Processo de Banda Estreita

Deseja-se saber o número de picos de um processo x entre a e $a+da$ como ilustrado na figura (5.15). Seja $p_p(a)$ a probabilidade que um valor de pico, escolhido aleatoriamente, esteja no intervalo a e $a+da$, logo a probabilidade da existência de pico, que exceda a , vale:

$$P(x > a) = \int_a^\infty p_p(x) dx. \quad (5.23)$$

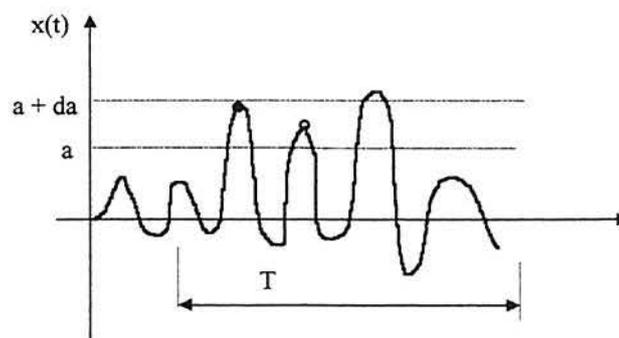


Figura (5.15) - Distribuição de picos para banda estreita.

• O símbolo ψ representa também o desvio padrão já que todas as variáveis em estudo têm média zero. Adotou-se ψ para evitar confusão com o símbolo σ empregado para representar tensões.

Para um processo de banda estreita sabe-se que, em média, se terá $\nu_0^+ T$ ciclos num tempo T (já que um cruzamento positivo em $x = 0$ ocorre para cada ciclo completo). Destes ciclos apenas $\nu_a^+ T$ terão picos excedendo $x = a$. Logo a proporção de ciclos com picos excedendo a será ν_a^+ / ν_0^+ . Desta relação tem-se

$$\int_a^\infty p_p(a) da = \frac{\nu_a^+}{\nu_0^+} \quad (5.24)$$

que diferenciada com relação a a fica:

$$-p_p(a) = \frac{1}{\nu_0^+} \frac{d}{da} (\nu_a^+). \quad (5.25)$$

Para um processo Gaussiano, no qual $\nu_a^+ = \nu_0^+ e^{-a^2/2\psi_x^2}$, ter-se-á após substituir e simplificar

$$p_p(a) = \frac{a}{\psi_x^2} e^{-a^2/2\psi_x^2}, \quad 0 \leq a \leq \infty \quad (5.26)$$

que representa uma distribuição de *Rayleigh* cujo gráfico está ilustrado na figura (5.16).

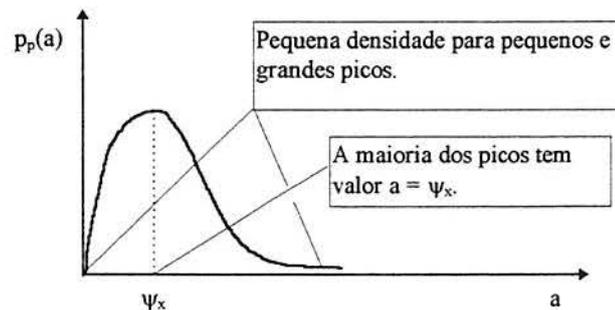


Figura (5.16) - Representação da distribuição de *Rayleigh*.

5.4.3 Distribuição de Picos num Processo Geral

No item anterior assumiu-se que o processo em estudo era Gaussiano e banda estreita. Vamos agora verificar se a consideração de banda estreita é válida.

Neste caso, um máximo é definido como $\dot{x} = 0$ e $\ddot{x} < 0$. Quando o processo é banda estreita, a frequência ν_0^+ e a frequência de máximos ν_m são iguais. A frequência de $\dot{x} = 0$, indicada por $\nu_{\dot{x}=0}^+$ também é igual a ν_m , o qual pode ser calculado substituindo-se x por \dot{x} e \dot{x} por \ddot{x} na (5.19). Assumindo-se $\dot{x} = a = 0$ obtém-se a (5.27).

$$\nu_m = \frac{1}{2\pi} \frac{\psi_{\ddot{x}}}{\psi_{\dot{x}}} \quad (5.27)$$

Para um processo qualquer, a frequência de máximos é dada por

$$\nu_m = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\int \omega^4 S_{\ddot{x}}(\omega) d\omega}{\int \omega^2 S_{\dot{x}}(\omega) d\omega} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M_4}{M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.28)$$

, que pode ser comparada com a frequência de cruzamento em zero ν_0^+ . Caso as duas frequências não forem iguais, o processo não é banda estreita (a relação ν_m/ν_0^+ é chamada fator de irregularidade α). A razão para a discrepância é que para um processo não banda estreita não pode-se assumir que x varia como uma função seno com amplitude variável já que componentes de diferentes frequências podem produzir máximos adicionais conforme ilustrado na figura (5.4.a).

5.4.4 Distribuição de Picos num Processo de Banda Larga

Para um processo do tipo banda larga a probabilidade de termos um máximo entre $a + da$ e a é dada por $p(a)da$ sendo que

$$p(a) = \frac{\nu_m(a)}{\nu_{mT}} \quad (5.29)$$

na qual $\nu_m(a)$ é a frequência média dos máximos com $x = a$ e ν_{mT} é a frequência média de todos os máximos entre $x = -\infty$ e $x = \infty$.

Pode-se demonstrar (BREBBIA & WALKER - 1979) que

$$\nu_m(a) = \frac{\sqrt{M_4}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{M_0 M_2}} \left[\varepsilon e^{\left(\frac{1}{2} \frac{a^2}{M_0 \varepsilon^2} \right)} + (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{\sqrt{M_0}} \int_{-\infty}^{\frac{a}{M_0 \varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \quad (5.30)$$

e

$$\nu_{mT} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M_4}{M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.31)$$

, o que permite obter a (5.32).

$$p(a) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sqrt{M_0}} \left[\varepsilon e^{\left(\frac{1-a^2}{2M_0\varepsilon^2}\right)} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \frac{a}{\sqrt{M_0}} e^{\left(\frac{1-a^2}{2M_0}\right)} \int_{-\infty}^{\frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \quad (5.32)$$

A probabilidade acumulada de x exceder um determinado valor a é dada pela (5.33). As equações (5.32) e (5.33) estão representadas nas figuras (5.17) e (5.18).

$$P(a) = \int_a^{\infty} p(x) dx \quad (5.33)$$

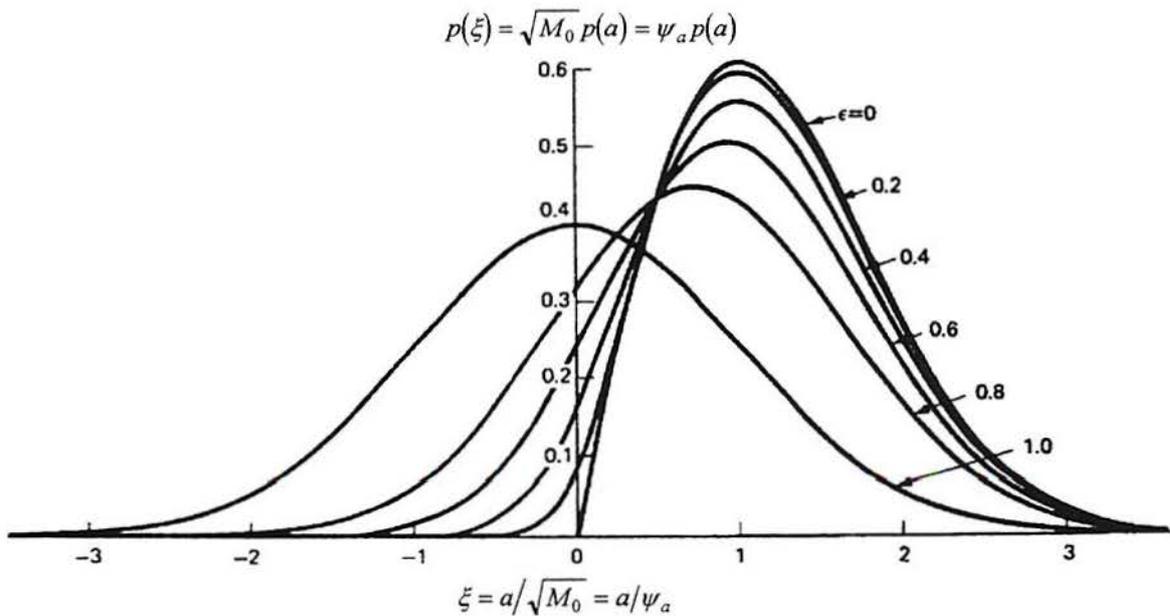


Figura (5.17) - Função de distribuição de probabilidade dos máximos para diferentes valores da largura ε . (BREBBIA-1979).

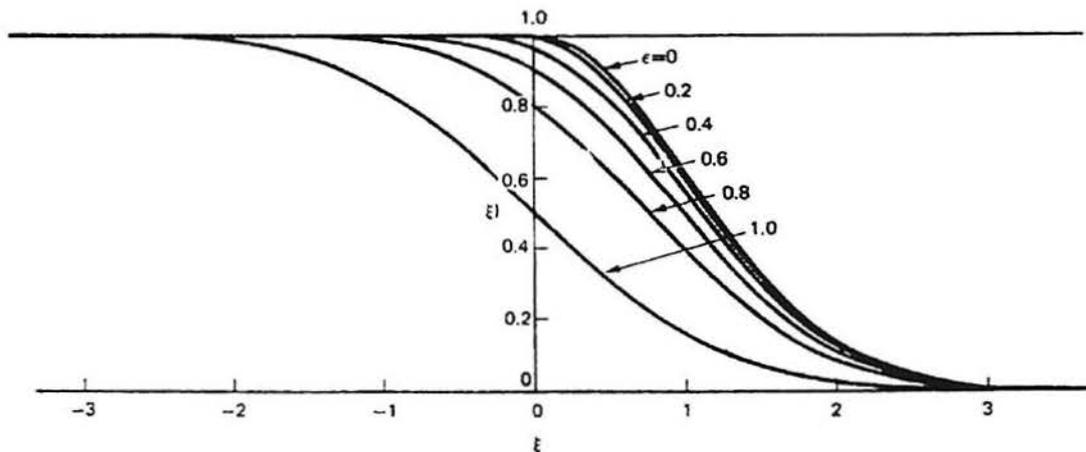


Figura (5.18) - Função de probabilidade acumulada $P(\xi)$ para diferentes valores de ε . (BREBBIA-1979).

Pela equação (5.32) nota-se que para $\varepsilon = 0$, processo com banda estreita, $p(a)$ é uma distribuição de *Rayleigh*, conforme item 5.3.2, e para um processo com $\varepsilon = 1$, processo com banda larga ideal, $p(a)$ é uma distribuição de *Gauss* (BREBBIA & WALKER - 1979).

5.5 ESTIMATIVA DA VIDA ÚTIL EM PROCESSOS DE BANDA ESTREITA E BANDA LARGA

Para um processo do tipo banda estreita, sabe-se que num tempo T deverá existir na média $\nu_0^+ T$ ciclos de tensões com uma probabilidade $p(\sigma)d\sigma$ de ocorrerem picos na faixa de tensões $(\sigma, \sigma+d\sigma)$. Substituindo-se este resultado em (5.16) obtém-se a (5.34).

$$E[D] = (\nu_0^+ T) \int_0^{\infty} \frac{1}{N(\sigma)} p(\sigma) d\sigma \quad (5.34)$$

Fazendo-se $E[D] = 1$ obtém-se a (5.35), na qual $p(\sigma)$ representa a distribuição de *Rayleigh* apresentada na (5.26). Esta expressão pode ser usada para avaliar a vida útil de uma peça ou estrutura

$$T = \frac{1}{\nu_0^+ \int_0^{\infty} \frac{1}{N(\sigma)} p(\sigma) d\sigma} \quad (5.35)$$

Os resultados fornecidos por (5.35) estão sujeitos a erros estatísticos devido a essência aleatória das tensões aplicadas, que podem ser calculadas de modo aproximado, e a erros experimentais devido ao não conhecimento do mecanismo de fadiga que não podem ser calculados. Na prática, aplicando-se esta expressão, que é válida para $\varepsilon = 0$, em qualquer processo sabe-se que o valor fornecido por ela varia entre $0,3T$ a $3T$ (NEWLAND - 1993).

A expressão adotada para estimar a vida útil, no caso de um processo com banda larga, também é a (5.35). Neste caso, $p(\sigma)$ representa uma das curvas ilustradas na figura (5.18) conforme o valor de ε . Para se usar a (5.35) admite-se que o número de ciclos num nível de tensão σ é calculado em função da frequência ν_0^+ . Isto equivale a aproximar, com relação ao número de ciclos, o processo banda larga da forma como aparece a linha tracejada na figura (5.19). Esta proposta apresenta melhores resultados a medida que ε se aproxima de zero. Para valores de ε mais próximos da unidade, os resultados tendem a ser de pior qualidade.

Para os casos de ε próximo a um, a melhor solução é o uso de simulação numérica em conjunto com técnicas de contagem eficientes (por exemplo *rainflow*) (COLLINS - 1993). O

problema é que com uma amplitude de tensão aleatória, o que é contado como um ciclo de carga não é muito claro. Este tipo de abordagem não é utilizada neste trabalho por que optou-se por fazer toda a análise no domínio da frequência. Uma alternativa a este procedimento pode ser encontrada em LÜ (1998).

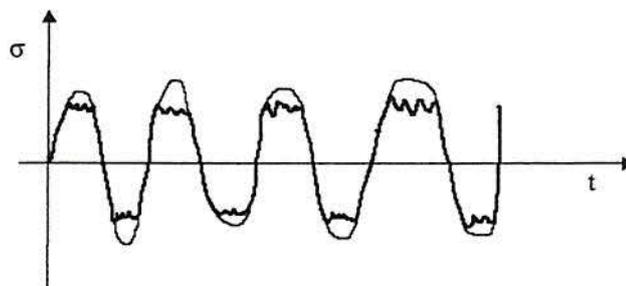


Figura (5.19) - Contagem do número de ciclos de tensão em função de ν_0^+ .

5.6 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE CICLOS $N(\sigma)$

O número de ciclos $N(\sigma)$ deve ser calculado considerando-se o efeito das tensões médias e do estado biaxial de tensões.

5.6.1 Influência das Tensões Médias

Os ensaios realizados para obter uma curva σ - N padrão aplicam cargas totalmente alternantes, figura (5.2.c), ou seja com média zero. Sabe-se que tensões médias σ_m positivas reduzem o limite de fadiga do material, enquanto tensões médias negativas têm efeito contrário. Recomenda-se que esta influência seja detectada através de ensaio com tensão média não nula. A figura (5.20) ilustra de modo geral a influência das tensões médias no limite de fadiga do material (COLLINS - 1993).

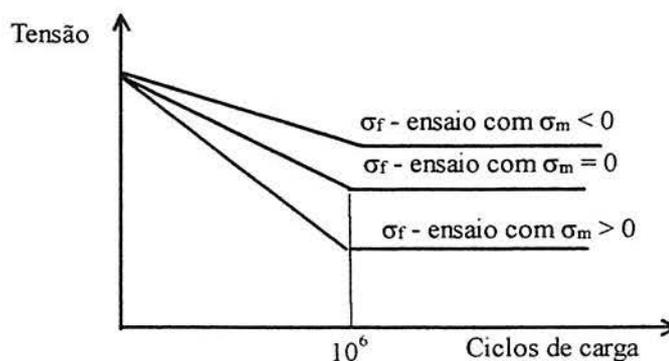


Figura (5.20) - Efeito da tensão média σ_m no ensaio para determinação do limite de fadiga.

Quando não se dispõem de dados experimentais específicos do problema, a influência das tensões médias não nulas é estimada por relações empíricas. Entre as relações mais aceitas estão as retas de Soderberg e Goodman, a parábola de Gerber, a elipse de Gough e a relação Elíptica. A figura (5.21) ilustra um diagrama de Haigh* normalizado no qual estão representadas estas relações. Destas expressões, a mais adotada no desenvolvimento de projetos é a reta de Goodman. A reta de Soderberg teve seu uso reduzido por ser conservativa, e a relação parabólica de Gerber e a relação Elíptica são utilizadas para comparação de resultados experimentais. Já a elipse de Gough é usada pelo código ASME no dimensionamento de eixos. Cada uma destas curvas deve ser traçada para um número de ciclos fixo, ou seja elas são válidas para uma vida constante, logo na figura (5.21) representa-se no eixo vertical a resistência a fadiga para n ciclos σ_n e não o limite de fadiga σ_f .

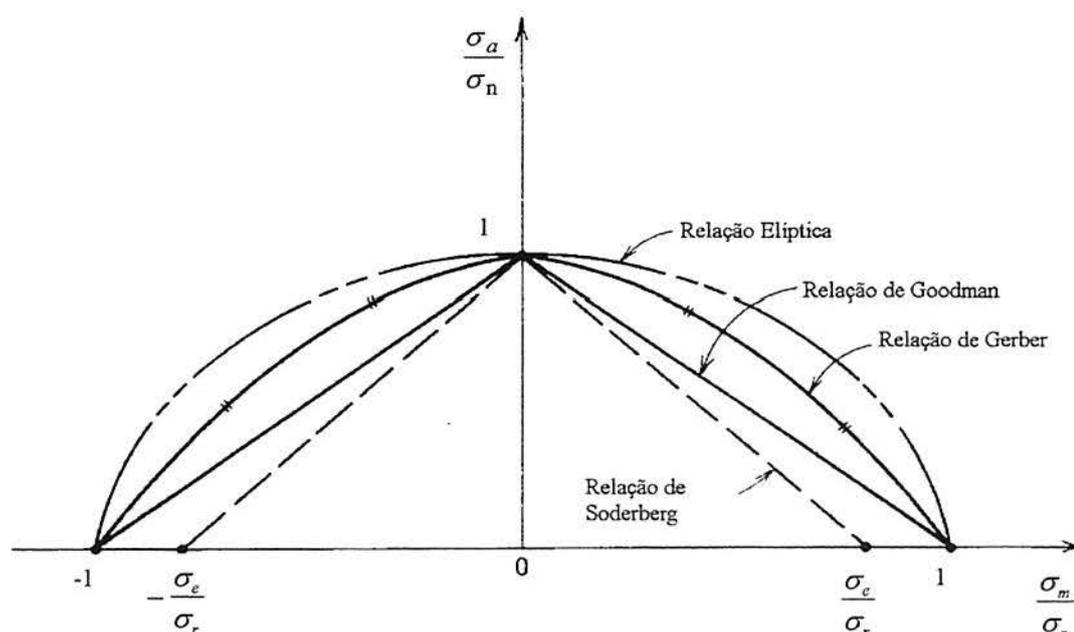


Figura (5.21) - Relações empíricas para estimar o efeito das tensões σ_m na falha por fadiga. (COLLINS - 1993).

Outra forma de se operar com a reta de Goodman é traçar o diagrama de Smith, figura (5.22), e trabalhar em função das tensões máxima e mínima (COLLINS - 1993). Os pontos que se encontram dentro do plano delimitado pelo conjunto de retas desta figura não apresentam falha. Este tipo de gráfico também deve ser traçado para um número de ciclos N fixo.

Neste trabalho, optou-se por empregar a reta de Goodman, equação (5.36), embora a mesma seja mais conservativa que a relação de Gerber e a relação Elíptica, por ser a relação empírica mais utilizada atualmente.

* Diagrama de Haigh: representa-se no eixo x as tensões médias e no eixo y as tensões alternantes.

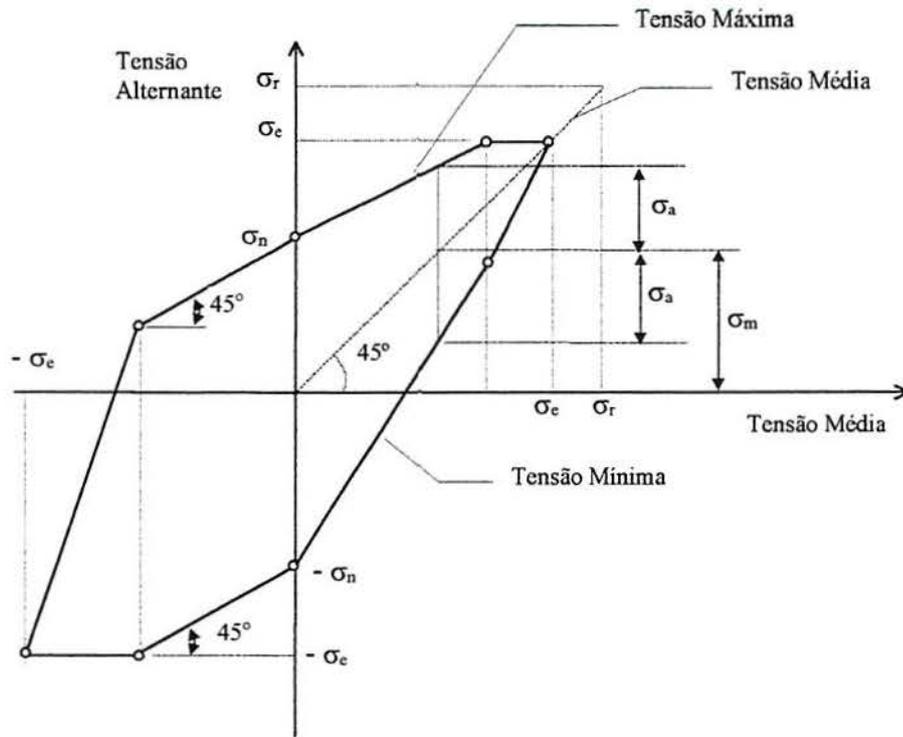


Figura (5.22) - Diagrama de Smith.

Este gráfico apresenta os valores limites de todas as componentes das tensões para uma tensão média particular (σ_e - tensão de escoamento).

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_n} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} = 1 \quad (5.36)$$

A relação de Goodman empregada, complementada com o critério de falha por escoamento no primeiro ciclo, está apresentada na figura (5.23). Este é equivalente ao diagrama de Smith, porém utilizando-se as tensões alternantes e médias.

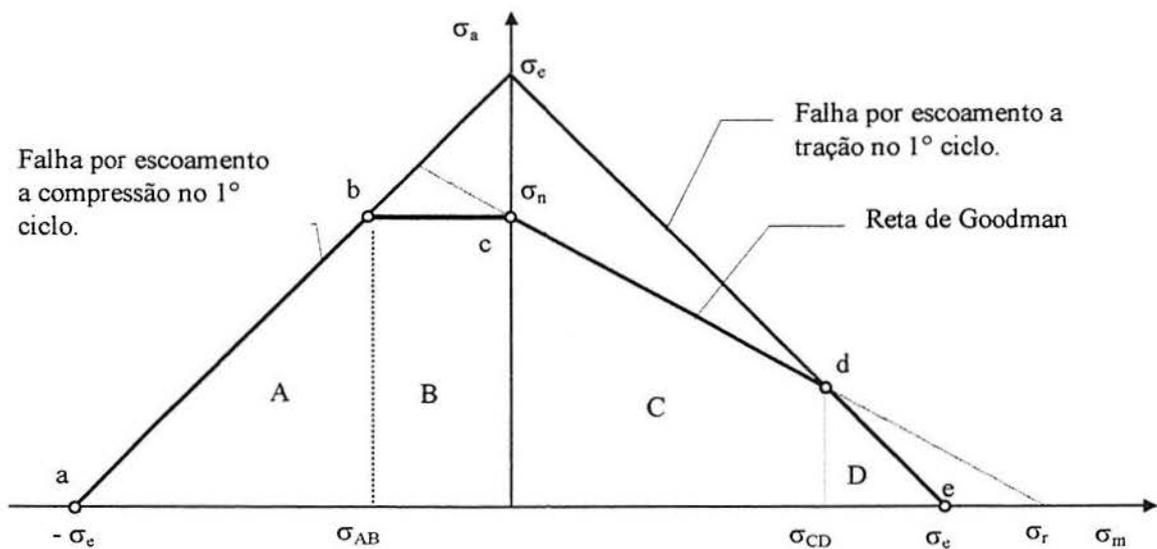


Figura (5.23) - Diagrama modificado de Goodman.

As tensões médias são marcadas no eixo horizontal e as alternantes no vertical.

Para se obter o diagrama modificado de Goodman, traça-se duas retas unindo os pontos $(0, \sigma_e)$, $(\sigma_e, 0)$ e $(0, \sigma_n)$, $(-\sigma_e, 0)$. A 1ª reta ilustra a falha por escoamento a tração no 1º ciclo, e a 2ª reta ilustra a falha por escoamento a compressão no 1º ciclo. Traça-se, então, uma reta que une os pontos $(0, \sigma_n)$ e $(\sigma_r, 0)$ que é a relação de Goodman. Para encerrar, traça-se uma reta horizontal passando pelo ponto $(0, \sigma_n)$ até a interseção com a reta de falha por compressão. A rigor esta reta deveria ser representada pelo prolongamento tracejado da reta de Goodman, mas convencionou-se traçar a linha mais conservativa **cb** para representar a linha de falha na região de compressão. Deste modo ignora-se os efeitos benéficos da tensão média negativa considerando que esta situação é idêntica ao caso com tensão média nula (NORTON - 1998).

A superfície de falha é definida pelas retas que unem os vértices **abcde**. Todos os pontos que se encontram dentro desta superfície não apresentam falha até N ciclos. O diagrama resultante é dividido em quatro regiões indicadas pelas letras A, B, C, D. O conjunto de expressões (5.37) apresenta os intervalos de cada uma destas regiões, bem como a sua equação da superfície de falha. A expressão (5.38) define σ_{AB} e σ_{CD} utilizados na (5.37).

$$\begin{aligned}
 \text{A) Para } -\sigma_e \leq \sigma_m \leq \sigma_{AB} & \text{ tem-se } \sigma_a = \sigma_m + \sigma_e \\
 \text{B) Para } \sigma_{AB} \leq \sigma_m \leq 0 & \text{ tem-se } \sigma_a = \sigma_n \\
 \text{C) Para } 0 \leq \sigma_m \leq \sigma_{CD} & \text{ tem-se } \sigma_a = \sigma_n - \sigma_m \sigma_n / \sigma_r \\
 \text{D) Para } \sigma_{CD} \leq \sigma_m \leq \sigma_e & \text{ tem-se } \sigma_a = \sigma_m - \sigma_e
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\sigma_{AB} = \sigma_n - \sigma_e, \quad \sigma_{CD} = \frac{\sigma_e - \sigma_n}{(1 - \sigma_n / \sigma_r)} \tag{5.38}$$

5.6.2 Influência do Estado Biaxial de Tensões

As relações apresentadas no item anterior são válidas para estado uniaxial de tensões. Num estado multiaxial o procedimento usado é trabalhar com uma grandeza equivalente que transforme este estado num uniaxial. O caminho que se tem adotado é trabalhar com tensões equivalentes, que devem ser calculadas para as tensões médias e para as alternantes (COLLINS - 1993). Esta abordagem é adotada pela maioria dos autores devido à complexidade e custos de produzir resultados experimentais para este tipo de situação. Vale dizer que não há ainda consenso sobre a melhor forma de prever a falha por fadiga num estado multiaxial de tensões principalmente se as direções das tensões principais variarem ao longo do ciclo. Apresenta-se a seguir os métodos mais usuais, dentro de uma abordagem de nível macro, para determinar estas tensões equivalentes. Nos métodos apresentados nos itens a), b), c) e d) considera-se que as tensões σ e τ estão em fase.

a) **Método de Juvinall** (JUVINALL - 1967)

Adota para tensão equivalente média a tensão principal de maior valor absoluto, mantendo-se o sinal original da tensão, e como tensão equivalente alternante adota a tensão de von Mises, expressão (5.39), na qual σ_{xa} e τ_{xya} são as tensões alternantes normal e tangencial.

$$\sigma_{eq_a} = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2} \quad (5.39)$$

b) **Método de Shigley** (SHIGLEY - 1963)

Adota para tensão equivalente média e alternante a tensão de von Mises. Para o caso das componentes médias, substitui-se as tensões alternantes da (5.39) pelos seus respectivos valores médios. Este critério tem o inconveniente de perder o sinal das tensões médias (apenas as regiões C e D da figura (5.24) são utilizadas).

c) **Método de Sines** (FUCHS - 1980)

Sines comprovou através de ensaios experimentais, que as tensões tangenciais médias não têm influência no processo de fadiga do material. Por isso, ele adota como tensão equivalente média o primeiro invariante de tensões que é dado pela expressão $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$. Para o caso de elementos de barra com o eixo x local orientado segundo a direção da barra sabe-se que $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Logo, o primeiro invariante de tensões é igual ao valor da tensão σ_x . Para a tensão equivalente alternante utiliza-se a tensão de von Mises.

d) **Método de Collins** (COLLINS – 1993)

Adota para tensão equivalente média e equivalente alternante a tensão de Tresca $\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$. A vantagem deste critério é que ele não perde o sinal das tensões médias.

e) **Tensões Equivalentes SEQA e SALT** (SAE – 1997)

Estes critérios devem ser empregados apenas nos casos com estado biaxial de tensões provocado por flexão/esforço axial e por torção fora de fase. Além disso, as funções que descrevem o comportamento das tensões σ e τ devem ser *periódicas e síncronas*.

A tensão equivalente SEQA; equação (5.40), na qual $Q = 2\tau_{xya}/\sigma_{xa}$; combina as tensões σ e τ com o ângulo de fase ϕ que há entre elas. Quando σ e τ estão em fase, este critério se reduz a tensão de von Mises. Este critério é usado também para as tensões médias.

$$SEQA = \frac{\sigma_{xa}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{3}{4}Q^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2}Q^2 \cos(2\phi) + \frac{9}{16}Q^4}} \quad (5.40)$$

A tensão equivalente SALT, equação (5.41), combina os mesmos parâmetros da SEQA porém quando σ e τ estão em fase, este critério se reduz a tensão de Tresca. Este critério deve ser utilizado também para as componentes médias.

$$SALT = \frac{\sigma_{xa}}{\sqrt{2}} \sqrt{1+Q^2 + \sqrt{1+2Q^2 \cos(2\phi)+Q^4}} \quad (5.41)$$

Ambos os critérios quando usados nas condições para os quais foram idealizados fornecem resultados conservadores, sendo a tensão SALT mais conservadora que a SEQA.

f) Método de Langer para Eixos Principais Móveis (FUCHS & STEPHENS – 1980)

Considera como critério de falha a tensão tangencial alternante máxima, podendo o mesmo ser utilizado num estado tridimensional de tensões com direções principais variáveis ao longo do ciclo. Para o caso em estudo considera-se conhecidos os sinais de σ e τ ao longo de um período de tempo. Deve-se procurar nestes sinais, instantes de tempo que produzam um máximo ou um mínimo em ambas as tensões. Estes valores de tensões são chamados de σ_i e τ_i . Definem-se então pseudo-tensões como $\sigma_{ps}(t) = \sigma(t) - \sigma_i$ e $\tau_{ps}(t) = \tau(t) - \tau_i$. Calculam-se as tensões principais destas pseudo-tensões para cada instante de tempo, bem como as suas respectivas diferenças. A metade da maior diferença é a tensão SALT. A partir das tensões principais pode-se calcular também a tensão de von Mises. Este procedimento é adotado pelo código ASME para dimensionamento de vasos de pressão e caldeiras. Embora este método seja bastante genérico, o mesmo está baseado na escolha das tensões i . Normalmente deve-se testar mais de um ponto com esta função. Observa-se que este método pode subestimar os resultados principalmente quando empregado em registros longos (SAE – 1997).

Como neste trabalho vai se desenvolver a análise de fadiga a partir dos espectros de potência das tensões normais e tangenciais, não se dispondo de informações sobre a fase das tensões σ e τ , optou-se por considerar que estas estão em fase, o que é uma boa aproximação sendo, em geral, conservativa (COLLINS - 1993), (NORTON - 1998). Dos métodos já apresentados, adotaram-se os de *Sines* e de *Shigley*, que são os mais amplamente utilizados. Vale dizer que o primeiro é mais conservador que o outro porque ele considera o efeito das tensões tangenciais médias no cálculo da tensão equivalente média e, além disso, despreza as regiões A e B da figura (5.24) que são mais favoráveis do que as regiões C e D.

Considerar que as tensões σ e τ estão em fase é evidentemente uma hipótese simplista, que permite analisar o problema sem recorrer a processos mais sofisticados, os quais poderiam até não ser aplicáveis devido às proporções do problema.

5.6.3 Processo de Cálculo

Para o cálculo do número de ciclos $N(\sigma)$ considera-se uma curva σ - N definida conforme (5.3). Esta curva pode ser do tipo **A**, **C** ou **E** conforme ilustrado na figura (5.12). Caso se adote uma curva do tipo **C** deve-se calcular os novos valores de m e a , conforme (5.42), que definem a reta entre 5×10^6 e 10^8 ciclos. A tensão $\sigma_{5 \times 10^6}$ está ilustrada na figura (5.12) e é calculada pela (5.3) fazendo-se $N = 5 \times 10^6$ (EUROCODE 3 – 1993).

$$m_1 = m + 2 \quad , \quad a_1 = (m + 2) \log(\sigma_{5 \times 10^6}) + \log(5 \times 10^6) \quad (5.42)$$

Considera-se também um ponto P a ser verificado no qual atuam uma tensão equivalente média σ_{qm} e uma tensão equivalente alternante σ_{qa} .

O primeiro passo é obter uma tensão alternante pura σ_{qap} que seja equivalente às tensões σ_{qm} e σ_{qa} . Para tal traça-se a reta de Goodman, unindo os pontos $(\sigma_r, 0)$ e $(\sigma_{qm}, \sigma_{qa})$, e prolongando-se a reta até a interseção com o eixo vertical determinando σ_{qap} conforme figura (5.24). Calcula-se esta tensão pela (5.43), que é obtida substituindo-se σ_n por σ_{qap} , σ_m por σ_{qm} e σ_a por σ_{qa} na (5.36). Quando a tensão $\sigma_{qm} < 0$ então $\sigma_{qap} = \sigma_{qa}$. Isto é feito para se obter um resultado coerente com o trecho bc da figura (5.23).

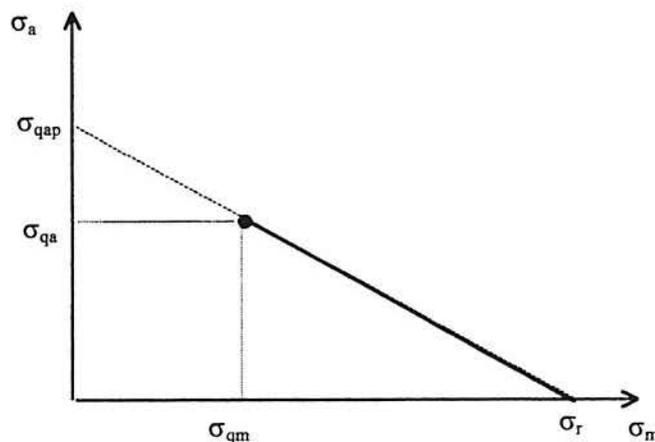


Figura (5.24) - Determinação da tensão alternante pura σ_{qap} .

$$\sigma_{qap} = \frac{\sigma_{qa}}{1 - \frac{\sigma_{qm}}{\sigma_r}} \quad (5.43)$$

Com a tensão σ_{qap} determina-se o número de ciclos $N(\sigma)$ pelas expressões (5.44), (5.45) e (5.46) para os casos das curvas **A**, **C** e **E** da figura (5.12).

$$\begin{aligned} \log N &= a - m \log \sigma_{qap} & \text{para } \sigma_{qap} > \sigma_f \\ N &= \infty & \text{para } \sigma_{qap} \leq \sigma \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \log N &= a - m \log \sigma_{qap} & \text{para } \sigma_{qap} \geq \sigma_{5 \times 10^6} \\ \log N &= a_1 - m_1 \log \sigma_{qap} & \text{para } 10^8 < \sigma_{qap} < \sigma_{5 \times 10^6} \\ N &= \infty & \text{para } \sigma_{qap} \leq \sigma_{10^8} \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \log N &= a - m \log \sigma_{qap} & \text{para } \sigma_{qap} > 1 \text{ MPa} \\ N &= \infty & \text{para } \sigma_{qap} \leq 1 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Estas expressões são obtidas simplesmente isolando-se N na expressão (5.3) tendo em conta a (5.43). A tensão de 1 MPa aplicada na expressão (5.46) consiste numa simplificação da situação limite da curva E, que está descrita na (5.43), com finalidade de evitar problemas numéricos. Do ponto de vista prático, esta solução fornece o mesmo resultado da curva E. A tensão σ_{10^8} , utilizada na (5.45), que é a tensão limite abaixo da qual não ocorre dano por fadiga na curva C, está definida na figura (5.12) e é calculada pela (5.47).

$$\log \sigma_{10^8} = \frac{1}{m_1} (a_1 - \log 10^8) \quad (5.47)$$

Aplicando-se o resultado das expressões (5.44) a (5.46) na (5.35) pode-se de estimar a vida útil para um ponto P . Para que a formulação aqui apresentada seja considerada válida devem ser verificadas as condições $\sigma_{qa} \leq \sigma_{10^3}$ e $v_0^+ T \geq 1000$.

5.6.4 Método Alternativo para o Cálculo do Dano num Estado Biaxial de Tensões

O EUROCODE 3 (1993) calcula o dano num estado biaxial de tensões considerando separadamente o dano causado por cada uma das tensões. O dano total é então computado pela expressão (5.48)

$$D_\sigma + D_\tau \leq 1 \quad (5.48)$$

na qual D_σ e D_τ são os danos calculados pela (5.13) para as tensões normais e tangenciais. Com este procedimento evita-se os cálculos antes apresentados de tensões equivalentes, porém faz-se necessário a construção de um gráfico do tipo τ - N , o que pode ser evitado se as tensões tangenciais forem transformadas em tensões equivalentes de von Mises permitindo então que se trabalhe com gráficos σ - N (NORTON –1998).

5.7 FADIGA DE ESTRUTURAS SOLDADAS

Toda a análise apresentada neste capítulo considera apenas a possibilidade de falha dos elementos de barra que formam o modelo, ou seja a possibilidade de falha dos nós do modelo, que representam as uniões das barras, não é considerada. Numa estrutura com uniões soldadas, que é o caso de um ônibus, esta hipótese não é verdadeira na maior parte dos casos. De modo geral, verifica-se que numa estrutura soldada é mais comum a falha nas juntas do que nas barras. Isto ocorre devido a tensões residuais de montagem, concentração de tensão devido a forma da junta, concentração de tensão devido a descontinuidade geométrica do cordão de solda e concentração de tensão devido ao processo de soldagem. Estes fatores fazem com que a resistência a fadiga das juntas soldadas seja inferior à dos perfis que formam estrutura. Este é assunto complexo, logo pretende-se apresentar aqui apenas algumas considerações sobre o mesmo. Para maiores detalhes sugere-se a leitura de BRANCO (1986).

A resistência a fadiga de uma junta soldada é afetada por diversos fatores, entre os quais pode-se citar: a geometria da junta (ex. topo a topo, de canto, tubular), a distribuição de tensões, o material e estado metalúrgico, o nível de tensões do ciclo, a tensão média do ciclo de tensões, o espectro de tensões, o meio ambiente (corrosão), as tensões residuais, defeitos de soldagem (BRANCO – 1986). Para fazer a verificação de fadiga de uma junta praticamente todas as normas trabalham com as curvas σ -N.

As curvas σ -N empregadas são definidas experimentalmente para cada tipo de junta. A análise dos resultados experimentais e a definição das curvas σ -N é feita com base em alguns pressupostos (BRANCO – 1986):

- a) A fadiga de longa duração de aços estruturais é independente da resistência estática do material;
- b) A análise estatística foi feita com base em resultados de corpos de prova individuais;
- c) Para cada tipo ou classe de junta, ver EUROCODE 3 (1993), considera-se que os resultados experimentais podem ser representados por uma reta em coordenadas $\log \sigma$ - $\log N$, sendo a reta calculada por regressão linear;
- d) A resistência a fadiga é controlada unicamente pela faixa de tensões (*stress range*) no caso de estruturas soldadas não tratadas termicamente, sendo independente da razão de tensões aplicadas.

O item a) indica que não há vantagem em se empregar materiais com maior resistência estática em estruturas soldadas. Neste sentido as curvas utilizadas nas normas são normalmente correspondentes ao aço St 44.2 (aproximadamente um ASTM A36). No entanto, as normas alemãs consideram alguma influência da resistência estática do material usado na

estrutura. O item b) indica que as curvas consideram apenas o detalhe e não a estrutura no qual ele é montado, o que é evidentemente necessário por uma limitação prática. Porém a consequência disto é que as tensões residuais de montagem não são consideradas. O item c) indica um aspecto comum a todas as normas, que é a divisão dos diferentes tipos de juntas em diversas classes. Verifica-se que o fator mais importante, que condiciona a resistência a fadiga da estrutura é a forma da junta soldada e a correspondente curva σ -N. O item d) considera que as estruturas soldadas contêm elevadas tensões residuais, logo não há influência das tensões médias ou da razão de tensões. Este é sem dúvida um item questionável. Quando as tensões médias são significativas, caso de um mau dimensionamento estático, a sua influência certamente não é desprezível. Além disso, se as tensões médias forem de compressão sabe-se que a sua influência aumenta a resistência a fadiga. Esta hipótese não considera os tratamentos de relaxação de tensões que podem ser aplicados. Neste sentido, as normas alemãs consideram o efeito das tensões médias.

A partir das considerações realizadas obtém-se as curvas σ -N para diversos tipos de detalhes. Nota-se que estas curvas têm $m = 3$ ou $m = 5$ (EUROCODE 3 – 1993) independente da resistência estática do material. Segundo BRANCO (1986) estas curvas têm uma probabilidade de sobrevivência dos corpos de prova imbutida de 97,5%, e um coeficiente de segurança também está imbutido nelas.

Portanto, para se considerar a possibilidade de falha das juntas das barras que formam um ônibus deve-se implementar uma norma de dimensionamento de estruturas soldadas. Neste sentido sugere-se o EUROCODE 3 (1993). Uma dificuldade que surge, nesta abordagem, é a provável necessidade de ensaiar tipos de juntas que não estejam consideradas na norma. Vale salientar que não deve-se apenas implementar as curvas σ -N, mas sim todo o procedimento de verificação da norma.

A partir das ponderações feitas, conclui-se que o procedimento resultante da não consideração da possibilidade de falha das juntas é uma análise de nível macro, já que a verificação das juntas considera apenas o detalhe. Neste sentido, estas análises complementam uma a outra, não sendo necessariamente excludentes. Por exemplo, se uma barra falha por fadiga é certo que a união dela também irá falhar. Por outro lado, se uma barra não falha por fadiga, não se pode afirmar que a sua união não irá falhar. Já se a união falha por fadiga, as dimensões da barra deverão ser revistas ou deverá ser feito um reforço na ligação. Concluindo, a hipótese adotada neste estudo é válida, mas a análise resultante dela deve ser complementada com uma verificação das uniões soldadas.

6. IMPLEMENTAÇÃO DA ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Apresenta-se a seguir os aspectos técnicos necessários para transformar a formulação exposta nos capítulos 4 e 5 num código computacional.

6.1 SOLUÇÕES ADOTADAS

6.1.1 Cálculo das Solicitações Médias, Autovetores e Autovalores

As solicitações médias são obtidas através de uma análise estática linear considerando o ônibus com carga máxima e apoiado em todas as rodas. Esta análise é feita no sistema GAELI e as tensões médias são obtidas no programa de análise de fadiga.

Os autovalores e autovetores são determinados num programa a parte (anexo J), podendo também ser obtidos no sistema GAELI. Em ambos os casos deve-se indicar o número de autovalores a ser determinado, que deve ser superior ao número que se deseja usar no programa de análise. Isto é necessário porque, em geral, três autovetores são perdidos devido ao modelamento dos elementos de mola (anexo J). Os autovetores a serem desconsiderados devem ter a sua indicada na entrada de dados auxiliar (item 6.3).

6.1.2 Cálculo da Matriz dos Coeficientes de Influência

A matriz dos coeficientes de influência, definida em (4.39), é obtida resolvendo-se o sistema de equações resultante, $\mathbf{K}_{cc}\mathbf{u}_s = -\mathbf{K}_{cb}\mathbf{u}_b$, 4 vezes considerando-se, em cada vez, apenas o movimento de uma única roda. Para isto, o vetor \mathbf{u}_b é montado colocando-se o valor 1 na posição correspondente ao movimento vertical de um dos pneus. O produto deste vetor pela matriz \mathbf{K}_{cb} vai gerar um vetor \mathbf{u}_c , que armazena a coluna da matriz \mathbf{K}_{cb} correspondente a linha do vetor \mathbf{u}_b que representa a posição do pneu. A expressão (6.1) ilustra esta operação. Este vetor é usado como termo independente do problema $\mathbf{K}_{cc}\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_c$. A solução deste sistema de equações é feito pela rotina SOLUC, que usa o método de solução direta de Gauss particularizado para o caso de matriz positiva definida e banda simétrica. O procedimento de solução utilizado é uma rotina padrão que pode ser encontrada na bibliografia indicada (PRESS et. al - 1996), (BATHE - 1982). A resposta deste sistema *com o sinal trocado* é o vetor de deslocamentos pseudoestáticos \mathbf{u}_s , que é utilizado para obter qualquer combinação do movimento vertical das rodas do veículo.

$$\begin{bmatrix} x & x & k_{13} & x & x & x \\ x & x & k_{23} & x & x & x \\ x & x & k_{33} & x & x & x \\ x & x & k_{43} & x & x & x \\ x & x & k_{53} & x & x & x \\ x & x & k_{63} & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \\ k_{53} \\ k_{63} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

6.1.3 Montagem do Vetor de Cargas do Sistema de Equações Lineares Complexas

Escreve-se o vetor de cargas do sistema de equações a ser resolvido, expressão (4.63), na forma em que é realmente usado, antes da aplicação da transformada de Fourier ou seja:

$$-\Phi_n^T \left\{ \mathbf{M}_{cc} \mathbf{G}_{cb} \ddot{\mathbf{u}}_b + \left[(a_k \mathbf{K}_{cc} + a_m \mathbf{M}_{cc} + \mathbf{C}_{cc}^s) \mathbf{G}_{cb} + (a_k \mathbf{K}_{cb} + a_m \mathbf{M}_{cb} + \mathbf{C}_{cb}^s) \right] \dot{\mathbf{u}}_b \right\}. \quad (6.2)$$

O termo $a_m \mathbf{M}_{cb}$ desta equação vale $\mathbf{0}$ porque usa-se matriz de massa diagonal. Os termos $a_k \mathbf{K}_{cc} \mathbf{G}_{cb} \dot{\mathbf{u}}_b + a_k \mathbf{K}_{cb} \dot{\mathbf{u}}_b$ se anulam conforme item 4.3, o que é comprovado calculando-se a derivada com relação ao tempo, expressão (6.3), das equações (4.38) e (4.39).

$$\mathbf{K}_{cc} \dot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{K}_{cb} \dot{\mathbf{u}}_b = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{G}_{cb} \dot{\mathbf{u}}_b \quad (6.3)$$

Com estas conclusões, aplicando-se a transformada de Fourier na (6.2) e dividindo-se a equação resultante por ω^2 , para ficar coerente com a (4.63), pode-se escrever a (6.4).

$$-\frac{1}{\omega^2} \Phi_n^T \left\{ -\omega^2 \mathbf{M}_{cc} \mathbf{G}_{cb} + i\omega \left[(a_m \mathbf{M}_{cc} + \mathbf{C}_{cc}^s) \mathbf{G}_{cb} + \mathbf{C}_{cb}^s \right] \right\} \bar{\mathbf{U}}_b(\omega) \quad (6.4)$$

Ainda é possível uma simplificação nesta expressão se levarmos em conta que a matriz de amortecimento de um amortecedor tem a forma apresentada em (6.5).

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Logo, a matriz \mathbf{C}_{cc}^s tem apenas 4 posições não nulas, de valor c , localizadas na diagonal principal, correspondentes ao grau de liberdade z dos nós da carroceria nos quais são montados os amortecedores, e a matriz \mathbf{C}_{cb}^s tem 4 posições não nulas de valor $-c$. Considerando que a matriz \mathbf{G}_{cb} vale 1 para o grau de liberdade z correspondente a posição do apoio, pode-se escrever o processo apresentado em (6.6), que representa um sistema hipotético com 2 apoios e com os nós com 3 graus de liberdade.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 1 & G_{22} \\ G_{31} & G_{32} \\ G_{41} & G_{42} \\ G_{51} & 1 \\ G_{61} & G_{62} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \cdot G_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c \cdot G_{51} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Examinando-se a (6.6), nota-se que a influência da matriz C_{cb}^s no vetor de cargas é eliminada por algumas posições da matriz $C_{cc}^s G_{cb}$. O mesmo comportamento é verificado em estruturas com 4 apoios e com 6 graus de liberdade por nó. Chamando-se a matriz resultante da operação (6.6) de C_{cb}^{mod} , pode-se facilmente calcular as suas posições não nulas. Basta tomar o coeficiente de amortecimento c de um dos amortecedores e multiplicar pelas posições da mesma linha da matriz G_{cb} , evitando a coluna desta matriz correspondente ao apoio que se está tomando. Logo, escreve-se a equação (6.7) que indica o modo de calcular as cargas. Nota-se que o vetor de cargas resultante possui uma parte real e uma parte imaginária.

$$-\frac{1}{\omega^2} \Phi_n^T \left\{ -\omega^2 M_{cc} G_{cb} + i\omega \left[a_m M_{cc} G_{cb} + C_{cb}^{\text{mod}} \right] \right\} \bar{U}_b(\omega) \quad (6.7)$$

Na solução da expressão (4.63) são considerados dois vetores de cargas, e_1 e e_2 , que estão definidos em (4.79), os quais devem ser montados aplicando-se o *princípio da superposição dos efeitos*. O vetor e_1 combina a excitação no pneu dianteiro esquerdo com o pneu traseiro esquerdo, e o vetor e_2 combina a excitação no pneu dianteiro direito com o pneu traseiro direito. Como o vetor de cargas tem termos dependentes da frequência, ele deve ser obtido para cada uma das frequências discretas do intervalo de integração.

6.1.4 Solução do Sistema de Equações Lineares Complexas

Substituindo-se o vetor de cargas (6.7) na expressão (4.63) obtém-se a (6.8) que representa o sistema de equações a ser resolvido.

$$\left[\left(\frac{1}{\omega^2} \Omega^2 - I \right) + \frac{i}{\omega} \left(2\Xi\Omega + \Phi^T C_{cc}^s \Phi \right) \right] \bar{Y}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \Phi^T \left\{ -\omega^2 M_{cc} G_{cb} + i\omega \left[a_m M_{cc} G_{cb} + C_{cb}^{\text{mod}} \right] \right\} \bar{U}_b(\omega) \quad (6.8)$$

A parte real da (6.8) é formada por uma matriz diagonal, e a parte imaginária é formada por uma matriz simétrica cheia. Para solução deste problema do tipo $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, usou-se uma rotina padrão, (BATHE - 1982) particularizada para o caso de matriz \mathbf{A} simétrica. Como o número de equações é, a princípio, pequeno, não se usou nenhum processo para otimização da solução. A adaptação desta rotina para resolver um sistema de equações complexas é feita declarando-se as matrizes com o comando *complex(8)*, o que indica que a parte real e imaginária do número complexo têm dupla precisão. Assim o tratamento dos números complexos é feito de modo automático pelo compilador *fortran* (CHAPMAN – 1998). A chamada da rotina empregada é feita pelo comando:

```
CALL SOLVE(AR,AI,BR,BI,B1R,B1I,N,NV)
```

em que **AR** e **AI** são as partes real e imaginária da matriz a ser decomposta, **BR** e **BI** são as partes real e imaginária do vetor de termos independentes \mathbf{e}_1 , **B1R** e **B1I** são as partes real e imaginária do vetor de termos independentes \mathbf{e}_2 , N é o número de equações e NV é o número de conjuntos de termos independentes. Estas matrizes são do tipo real, mas elas são transformadas em matrizes complexas pelo comando *dcmplx* (as matrizes reais **AR** e **AI** são unidas gerando a matriz complexa **A**). A resposta complexa do sistema é separada nas suas partes real e imaginária pelos comandos *dreal* e *dimag*. A solução deste sistema é armazenada nos próprios vetores de carga. Esta rotina é utilizada para obter a solução do sistema para cada uma das frequências discretas do intervalo de integração.

6.1.5 Cálculo dos Desvios Padrões

O desvio padrão de uma variável aleatória é calculado integrando-se o espectro de potência da mesma, expressões (4.24) e (4.26), obtendo desta forma o valor médio quadrático. Extraindo-se a raiz quadrada deste se obtém o valor *rms* da respectiva variável, o qual para um processo com média zero é igual ao desvio padrão desta (anexo E). Logo, para o cálculo do desvio padrão, por exemplo, das tensões normais procede-se conforme (6.9).

$$\sigma_{rms} = \psi_{\sigma} = \sqrt{\int_0^{\infty} 2S_{\sigma} d\omega} \quad (6.9)$$

No caso dos deslocamentos totais e das solicitações, os desvios padrões são calculados apenas para as posições das diagonais das respectivas matrizes. A equação (6.10) ilustra o processo para o cálculo das solicitações.

$$(\psi_{sol})_{jj} = \sqrt{\int_0^{\infty} 2(S_{pp}^e)_{jj} d\omega} \quad (6.10)$$

Os espectros de cada uma destas variáveis foram colocados em função do espectro das irregularidades, equação (4.29), da pista de rolamento, logo deve-se estabelecer um esquema de integração que considere as características desta função que está apresentada na (6.11).

$$S_z(\omega) = \frac{c}{4\pi V} \left(\frac{\omega}{2\pi V} \right)^{-2,5} \quad (6.11)$$

Nota-se que $S_z(\omega)$ é função da velocidade do veículo, que é constante. Porém, o veículo pode operar em diversas velocidades tais como numa faixa entre 20 km/h e 100 km/h. Logo, devem ser fornecidos valores discretos de velocidades tais como: 20, 40 e 80 km/h. Para cada um destes valores é necessário indicar o tempo médio de ocorrência do mesmo, em percentual, durante um ano. A figura (6.1) ilustra uma distribuição de velocidade e os valores discretos usados para representá-la. Esta faixa de velocidades, os valores discretos delas e a probabilidade de ocorrência das mesmas, devem ser estabelecidas por especialistas ou por medições experimentais. A resposta do espectro é dada pela soma destas parcelas de diferentes velocidades multiplicadas pelos seus fatores de ocorrência.

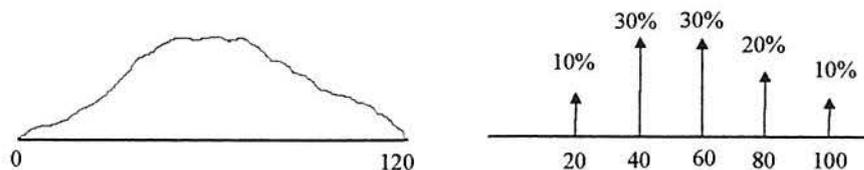


Figura (6.1) - Exemplo de distribuição da velocidade do veículo.

A figura (6.2) ilustra qualitativamente a função (6.11) que deve ser integrada levando-se em conta os aspectos discutidos em 4.2.2. A integração deve ser realizada entre as frequências ω_{\min} e ω_{\max} . A frequência ω_{\min} varia com a velocidade de modo que $\omega_{\min} = 2\pi \cdot 0,01 V$. Já a frequência ω_{\max} é obtida em função da velocidade do veículo como $\omega_{\max} = 2\pi \cdot 10 V$ ou em função da frequência superior da função de ganho do veículo como $\omega_{\max} = 2\pi f$. Para o caso mais usual, $f = 50$ Hz, tem-se $\omega_{\max} \cong 314$ rad/s. A frequência ω_{\max} também pode ser definida pela área de contato pneu-via, ver item 4.2.2, como $\omega_{\max} = 2\pi \cdot 3,33 \cdot V$. Logo, conclui-se que para cada velocidade discreta do veículo vai existir um diferente intervalo de frequências discretas de integração devido a variabilidade de ω_{\min} .

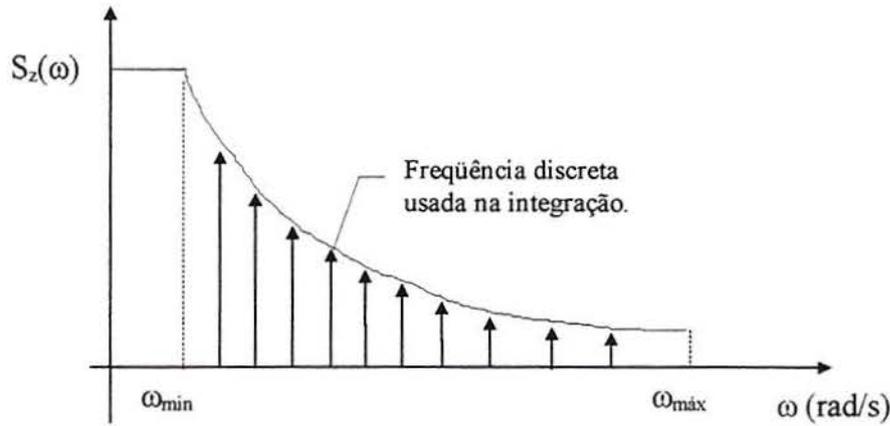


Figura (6.2) - Representação qualitativa da f.d.e.p. das irregularidades. Este figura não está em escala e nem a curva corresponde a situação real.

6.1.6 Integração dos Espectros de Potência

Os espectros de potência a serem integrados não são funções simples, logo faz-se necessário controlar o processo de integração através do cálculo do valor *rms* do espectro das irregularidades, que tem solução analítica. Considerando-se a função (6.11), no intervalo $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ e aplicando-se o processo apresentado no anexo F, obtém-se a solução analítica, expressão (6.12), em que c é a constante definida na tabela (4.1).

$$\psi^2 = 666,64 \cdot c \quad (6.12)$$

Para se escolher o tipo de integração testou-se o método de *Newton-Cotes*; fórmulas fechadas com $\alpha = 1$ (Trapézio), $\alpha = 2$ (Simpson), $\alpha = 4$ e $\alpha = 6$; e o método de *Gauss-Legendre* (GROEHS - 1979). Adotou-se $c = 32 \times 10^{-8}$, ou seja $\psi^2 = 2,133 \times 10^{-4}$. O número de pontos necessários para a integração foi obtido assumindo-se um erro relativo ϵ máximo de 10%. A tabela (6.1) apresenta o número de pontos de integração, ψ^2 e ϵ para cada um dos métodos.

Tabela (6.1) - Comparação dos métodos de integração.

Método	Pontos	ψ^2 (m ²)	ϵ (%)
Trapézio	1500	$2,33 \times 10^{-4}$	9,5
Simpson	801	$2,33 \times 10^{-4}$	9,5
$\alpha = 4$	721	$2,33 \times 10^{-4}$	9,5
$\alpha = 6$	661	$2,34 \times 10^{-4}$	9,7
Gauss-Legendre	50	$2,1 \times 10^{-4}$	4,4

Segundo os resultados obtidos, o melhor processo é o de Gauss-Legendre por utilizar um menor número de pontos. Este esquema de integração foi testado para outros valores de c e

em todos os casos o erro relativo foi inferior a 5%. Logo, recomenda-se empregar em todos os casos 50 pontos de integração. Com a escolha do método de Gauss-Legendre as frequências de integração são estabelecidas pelo código através da expressão (6.13), na qual W_i são os pesos e z_i são os pontos de base que variam no intervalo (-1, 1). Os pesos e os pontos de base são gerados automaticamente pelo programa através da rotina *GAULEG* (PRESS et. al - 1996).

$$\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} f(\omega) d\omega \cong \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2} \sum_{i=0}^n W_i \cdot f\left(\frac{z_i(\omega_{\max} - \omega_{\min}) + \omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}\right) \quad (6.13)$$

6.1.7 Cálculo das Tensões

Para o cálculo das tensões considera-se que todos os elementos de pórtico utilizados para modelar o veículo têm seção transversal do tipo caixão, C ou I. A seção caixão é empregada na carroceria, embora possa ser encontrada no chassi, e as seções C e I são utilizadas exclusivamente no chassi.

As tensões são determinadas no sistema local do elemento que é o mesmo das solicitações. O cálculo das tensões é feito, desprezando os esforços cortantes, utilizando-se as fórmulas clássicas da Resistência dos Materiais conforme (6.14)

$$\sigma_x = \pm \frac{F_x}{A_x} \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}, \quad \tau_{xy} = \frac{M_x}{W_t} \quad (6.14)$$

nas quais A_x é a área da seção transversal da barra; I_z e I_y são os momentos de inércia calculados em relação aos eixos locais Z_L e Y_L , que são os eixos principais centrais de inércia da seção; y e z são as distâncias nos eixos Y_L , Z_L em relação ao ponto onde se quer calcular a tensão; W_t é o módulo resistente a torção. Nestas expressões, os momentos fletores M_z e M_y , e o esforço normal F_x geram tensões normais, e o momento torçor M_x gera tensões de corte.

As solicitações são lidas com a convenção de sinais do GAELI, ilustrada na figura (6.3). Para que as tensões calculadas a partir destas solicitações tenham valores corretos faz-se necessário trocar o sinal de algumas solicitações. O esforço normal F_x deve ter o seu sinal invertido para o 1º nó da conectividade porque se F_x é positivo a tensão gerada é de compressão. O momento M_z deve ter o seu sinal trocado no 2º nó da conectividade. Conclui-se isto analisando a figura (6.4), que ilustra as regiões de tração e compressão numa seção considerando o momento M_z com sua orientação positiva para ambos os nós da conectividade.

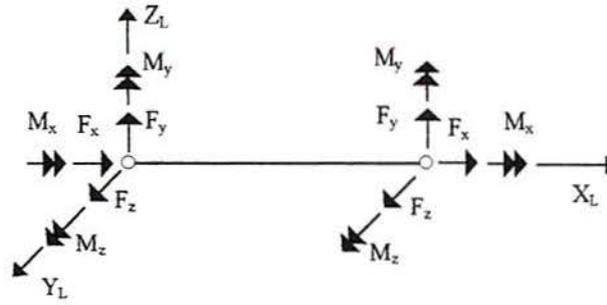


Figura (6.3) - Orientação positiva das solicitações fornecidas pelo sistema GAELI. Em barras de pórtico espacial o eixo X_L sempre é orientado segundo a direção da barra e no sentido da conectividade. Já os eixos Y_L e Z_L têm a sua orientação definida pelo ângulo β (GROEHS & SANTOS- 1990).

Comparando-se estes sinais com os da tabela (6.2), em função dos sinais de M_z e W_z , nota-se que os sinais da tensão para o 2º nó são o inverso da figura (6.4).

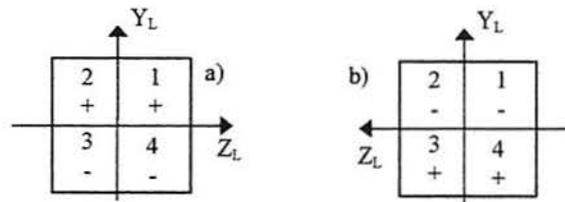


Figura (6.4) - Regiões de tração e compressão para o momento M_z .

- a) Resultados para o primeiro nó da conectividade.
b) Resultados para o segundo nó da conectividade.

Tabela (6.2) - Sinais da tensão σ em função de M_z e W_z .

Região	Nó 1			Nó 2		
	M_z	W_z	σ	M_z	W_z	σ
1	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+
3	+	-	-	+	-	-
4	+	-	-	+	-	-

O momento M_y deve ter o seu sinal trocado no 1º nó do elemento, e o módulo resistente deve ter o sinal trocado no 2º nó do elemento. Conclui-se isto através da figura (6.5), que apresenta as regiões de tração e compressão numa seção transversal considerando o momento M_y com sua orientação positiva para ambos os nós da conectividade.

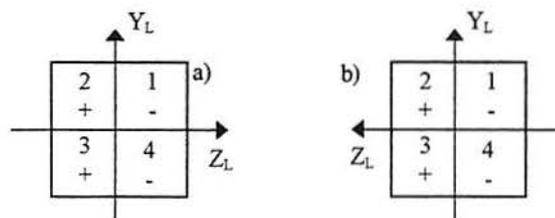


Figura (6.5) - Regiões de tração e compressão para o momento M_y .

- a) Resultados para o primeiro nó da conectividade.
b) Resultados para o segundo nó da conectividade.

Pela tabela (6.3) nota-se que os sinais da tensão para o 1º nó são o inverso da figura (6.5). Além disso, o sinal do módulo W_y deve ser modificado em função da inversão do sistema de referência conforme figura (6.5b).

Tabela (6.3) - Sinais da tensão σ em função de M_y e W_y .

Região	Nó 1			Nó 2		
	M_y	W_y	σ	M_z	W_y	σ
1	+	+	+	+	-	-
2	+	-	-	+	+	+
3	+	-	-	+	+	+
4	+	+	+	+	-	-

O momento M_x deve ter o sinal invertido para o primeiro nó já que este momento, embora positivo para o GAELI, é negativo na convenção da resistência dos materiais.

Por uma questão de conveniência, alterou-se os sinais dos módulos resistentes. A figura (6.6) ilustra os pontos de verificação, para cada uma das seções, bem como os dados necessários; a , b e t ; para defini-las.

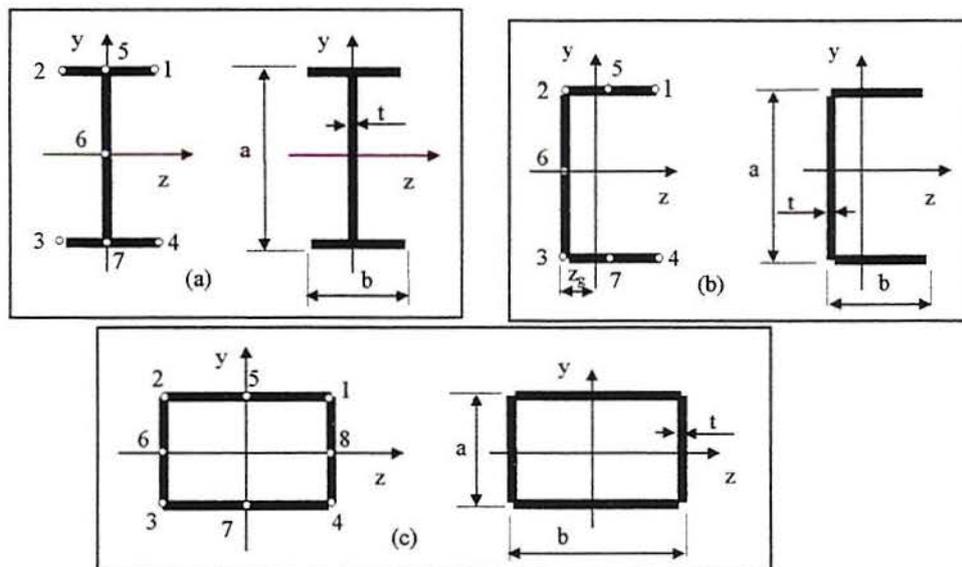


Figura (6.6)- Pontos significativos e dados necessários para o cálculo das tensões.

A regra geral para determinação dos pontos de verificação é considerar o ponto central e de extremo de cada um dos segmentos que formam a seção. No caso do perfil C deve-se determinar a posição do centro de gravidade z_g através da (6.15).

$$z_g = \frac{(a-2t) \cdot t/2 + b^2}{a-2t+2b} \quad (6.15)$$

A tabela (6.4) ilustra os valores dos módulos resistentes, para cada uma das seções usadas, nos seus respectivos pontos de verificação, definidos na figura (6.6). No programa empregaram-se os valores inversos dos módulos resistentes. Logo, basta multiplicar este valor pela sua respectiva solicitação para se ter uma tensão. Com isto evita-se o erro de divisão por zero, que ocorreria quando usa-se diretamente os valores de W , nos pontos que têm $W = 0$.

Por coerência com os sinais das tensões médias, a troca de sinais também deve ser aplicada nas expressões que determinam os espectros de potência das tensões normal, equivalente e tangencial; mais especificamente nas expressões (4.150), (4.185) e (4.160).

Tabela (6.4) - Valores do módulos resistentes.

Perfil	W_x	W_y	W_z
Caixão	$W_{x_{1-8}} = 2t \cdot (a-t)(b-t)$	$W_{y_{1,8,4}} = \frac{2I_y}{b}$ $W_{y_{2,3,6}} = -\frac{2I_y}{b}$ $W_{y_{5,7}} = 0$	$W_{z_{1,2,5}} = \frac{2I_z}{a}$ $W_{z_{3,4,7}} = -\frac{2I_z}{a}$ $W_{z_{6,8}} = 0$
C	$W_{x_{5-7}} = \frac{t^2}{3}(2b+a-2t)$ $W_{x_{1-4}} = 0$	$W_{y_{1,4}} = \frac{I_y}{b-z_g}$ $W_{y_{2,3,6}} = -\frac{I_y}{z_g}$ $W_{y_{5,7}} = \frac{I_y}{b/2-z_g}$	$W_{z_{1,2,5}} = \frac{2I_z}{a}$ $W_{z_{3,4,7}} = -\frac{2I_z}{a}$ $W_{z_6} = 0$
I	$W_{x_{5-7}} = \frac{t^2}{3}(2b+a-2t)$ $W_{x_{1-4}} = 0$	$W_{y_{1,8,4}} = \frac{2I_y}{b}$ $W_{y_{2,3}} = -\frac{2I_y}{b}$ $W_{y_{5-7}} = 0$	$W_{z_{1,2,5}} = \frac{2I_z}{a}$ $W_{z_{3,4,7}} = -\frac{2I_z}{a}$ $W_{z_6} = 0$

6.1.8 Cálculo da Vida Útil

Para um processo de banda estreita, a distribuição de picos é uma distribuição de *Rayleigh*. Para cada velocidade do veículo tem-se um desvio padrão da resposta em termos de tensões, que representa a componente alternante da tensão. Como esta resposta tem média zero a distribuição resulta na (6.16).

$$p_p(a) = \frac{a}{\psi_\sigma^2} e^{-a^2/2\psi_\sigma^2} \quad (6.16)$$

Se a tensão vale $m\psi_\sigma$, sendo m um número positivo que multiplica o desvio padrão, obtém-se a (6.17) que está ilustrada pela figura (6.7).

$$p_p(m\psi_\sigma) = \frac{m}{\psi_\sigma} e^{-m^2/2} \quad (6.17)$$

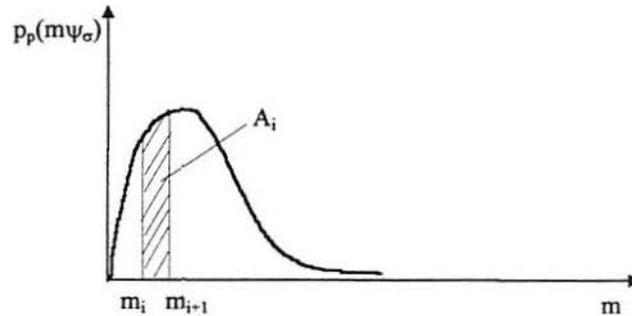


Figura (6.7) - Divisão da distribuição de *Rayleigh* em faixas.

Logo, a probabilidade de ter-se uma tensão $\sigma > m\psi_\sigma$ é dada pela (6.18), e a probabilidade da tensão σ estar no intervalo $m_1\psi_\sigma \leq \sigma \leq m_2\psi_\sigma$ é dada pela (6.19).

$$P(\sigma > m\psi_\sigma) = \int_m^\infty m e^{-\frac{m^2}{2}} dm = e^{-\frac{m^2}{2}} \quad (6.18)$$

$$P(m_1\psi_\sigma \leq \sigma \leq m_2\psi_\sigma) = e^{-\frac{m_1^2}{2}} - e^{-\frac{m_2^2}{2}} \quad (6.19)$$

Considerando que cada faixa destacada é representada por uma tensão média σ_i dada pela (6.19), logo pode-se dividir a distribuição num número de faixas, no caso 10 faixas, que vão ser usadas no cálculo do dano. A tabela (6.5), obtida através da (6.19), apresenta a probabilidade da tensão σ_i estar na faixa A_i .

Tabela (6.5) – Probabilidade da tensão σ_i estar na faixa A_i .

$m_i - m_{i+1}$	Prob($\sigma_i \in A_i$) [%]
0 - 0,5	11,75
0,5 - 1	27,6
1 - 1,5	28,19
1,5 - 2	18,93
2 - 2,5	9,14
2,5 - 3	3,28
3 - 3,5	0,89
3,5 - 4	0,19
4 - 4,5	0,03
4,5 - 5	0,004

Para cada velocidade do veículo, ver capítulo 5, pode-se calcular um número de ciclos $v_0^+ T$, no qual T é a duração total em segundos desta velocidade ao longo de um ano, ver figura (6.1). Logo, o número de ciclos por ano associado ao intervalo de tensões σ_i vale

$$n_i = A_i v_0^+ T \quad (6.20)$$

e o dano acumulado para a velocidade escolhida é dado pela soma

$$D_j = \sum_{i=1}^{10} \frac{n_{i,j}}{N_i} \quad (6.21)$$

em que D_j é o dano na velocidade j , o índice i é o número de faixas em que foi dividida a distribuição, e N_i é o número de ciclos que causa falha por fadiga associado a tensão σ_i . O dano total gerado por todas as velocidades discretas do veículo é dado pela soma dos danos de cada uma das velocidades. Aplicando-se a regra de Miner obtém-se a vida útil em anos pela (6.22) em que $NTPV$ é o número total de parcelas de velocidade.

$$T_{anos} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} D_i} \quad (6.22)$$

Para um processo com banda larga, o raciocínio é semelhante ao já apresentado com a ressalva que, neste caso, trabalha-se com as figuras (5.18) e (5.19) ao invés da distribuição de *Rayleigh*. Para se usar estes gráficos, considera-se um processo m tal que:

$$m = x / \sqrt{M_0} \quad (6.23)$$

Nota-se que ξ , figuras (5.18) e (5.19), é um valor de um processo m obtido dividindo-se todo valor do processo x pelo seu desvio padrão ($\sqrt{M_0} = \psi_x$). Logo, m tem desvio padrão 1.

Trocando-se na (5.32) a por ξ e $\sqrt{M_0}$ por 1 obtém-se $p(\xi) = \sqrt{M_0} p(a)$ ou seja

$$p(\xi) = p(\psi_x \xi) \psi_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\varepsilon e^{-\frac{\xi^2}{2\varepsilon^2}} + \xi \sqrt{1-\varepsilon^2} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \quad (6.24)$$

e a probabilidade acumulada $P(\xi)$ é dada por

$$P(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} p(m) dm \quad (6.25)$$

ou lembrando-se da (6.23) pode-se escrever $dm = dx/\psi_x$, e pela (6.24) tem-se que $p(m) = \psi_x p(m\psi_x)$, que substituídos na (6.23) fornece a expressão (6.26).

$$P(\xi) = \int_a^\infty \psi_x p(m\psi_x) \frac{1}{\psi_x} dx = \int_a^\infty p(x) dx = P(a) = P(\xi\psi_x) \quad (6.26)$$

Deste modo se aplica a figura (5.19) para obter os valores das probabilidades acumuladas de $P(\xi\psi_x)$, tabela (6.6), para diferentes ξ_i , que são os m_i do processo de banda estreita. As posições desta tabela têm o mesmo significado que na tabela (6.5). Para os casos de $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon = 1$, os valores são obtidos pelas fórmulas das distribuições. Os campos sombreados desta tabela foram obtidos por extrapolação devido à dificuldade de obtenção destes valores do gráfico.

Tabela (6.6) - Probabilidade em percentual da tensão σ_i estar na faixa A_i .
No programa faz-se uma interpolação linear entre as curvas mais próximas para o caso de ε não tabelado.

Faixa	Interv.	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.4$	$\varepsilon = 0.6$	$\varepsilon = 0.8$	$\varepsilon = 1$
1	0 - 0,5	11,75	15	17	17	20	19,1
2	0,5 - 1	27,6	25	24	23	21	15
3	1 - 1,5	28,19	28	26	23	18	9
4	1,5 - 2	18,93	18	17	16	13	4,4
5	2 - 2,5	9,14	10	10	9	8	1,7
6	2,5 - 3	3,28	2,89	2,16	1,43	0,72	0,5
7	3 - 3,5	0,89	0,89	0,67	0,45	0,22	0,112
8	3,5 - 4	0,19	0,19	0,14	0,10	0,05	0,020
9	4 - 4,5	0,03	0,03	0,022	0,015	0,008	0,003
10	4,5 - 5	0,004	0,004	0,003	0,002	0,001	

A extrapolação é feita associando-se às colunas 4, 5, 6 e 7 desta tabela os pesos 4, 3, 2, 1 e 0,5. As posições com sombreado menos intenso são preenchidas multiplicando-se o valor da coluna 3, correspondente a mesma linha do campo que se deseja preencher, pelo peso da respectiva coluna dividido por 4 (por exemplo, para a faixa 7 e $\varepsilon = 0,4$ deve-se fazer $0,89 \cdot 3/4$ que é igual a 0,67). Já as posições com sombreado mais intenso são calculadas subtraindo do valor do peso correspondente à coluna, a soma das posições da mesma coluna abaixo deste campo (por exemplo, para $\varepsilon = 0,4$ fica $3 - (0,67 + 0,14 + 0,022 + 0,003)$). Vale a pena citar que somente estão sendo consideradas as probabilidades para $m = \xi > 0$, de modo a não levar em conta os máximos negativos porque estes não provocam falha por fadiga. Logo, o produto $m\psi_\sigma$ deve ser maior que zero, o que exige que m seja maior que zero.

6.1.9 Verificação da Falha por Fadiga num Estado Biaxial de Tensões

No item 5.6.2 comentou-se sobre a dificuldade de se tratar a falha por fadiga num estado multiaxial de tensões. Por este motivo optou-se por implementar quatro propostas de análise para que se possa verificar os prós e contras de cada uma delas. As propostas implementadas no código são:

- 1) Trabalhar apenas com a tensão normal desprezando-se a contribuição da tensão de corte;
- 2) Trabalhar com a tensão equivalente, mas empregar o espectro de potência da tensão normal para fins de obtenção das características da distribuição;
- 3) Trabalhar com a tensão equivalente e com uma estimativa do seu respectivo espectro de potência;
- 4) Considerar o dano provocado pelas tensões normais e tangenciais de modo independente e depois somá-los conforme procedimento indicado no EUROCODE 3 (1993).

A primeira proposta considera um estado uniaxial de tensões. Ela deve fornecer bons resultados se as tensões tangenciais não forem significativas. A segunda proposta considera as tensões tangenciais apenas como um fator majorador das tensões normais. Na terceira proposta considera-se o espectro de potência aproximado que foi deduzido no item 4.5.10. Nas propostas 2 e 3 considera-se ainda que a tensão equivalente média pode ser determinada pelo método de *Sines* ou de *Shigley*. A última proposta usa a soma de dois estados uniaxiais de tensões para obtenção de um estado biaxial. Logo, o programa apresenta como resposta quatro distribuições de dano e vida útil para o veículo.

6.1.10 Verificação da Falha num Ponto

A seguir apresenta-se o procedimento adotado para testar a segurança de um ponto de verificação, bem como calcular o número de ciclos N_i usado na (6.21).

Primeiro Passo: Testar falha por escoamento simples.

Neste teste compara-se o valor absoluto da tensão equivalente média σ_{qm} que atua no ponto com a tensão de escoamento σ_e do elemento. Havendo falha os demais passos são desnecessários.

Segundo Passo: Obter $\sigma_{v_0^+T}$.

Determinar o valor da resistência a fadiga correspondente ao número de ciclos v_0^+T que atua a tensão alternante σ_{qa} ou seja $\sigma_{v_0^+T}$ conforme (6.27).

$$\begin{array}{l}
 \text{Curva A} \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } v_0^+ T < 10^6 \rightarrow \log \sigma_{v_0^+ T} = \frac{1}{m} (a - \log v_0^+ T) \\ \text{Para } v_0^+ T \geq 10^6 \rightarrow \sigma_{v_0^+ T} = \sigma_f \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Curva C} \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } v_0^+ T \leq 5 \times 10^6 \rightarrow \log \sigma_{v_0^+ T} = \frac{1}{m} (a - \log v_0^+ T) \\ \text{Para } 5 \times 10^6 < v_0^+ T < 10^8 \rightarrow \log \sigma_{v_0^+ T} = \frac{1}{m_1} (a_1 - \log v_0^+ T) \\ \text{Para } v_0^+ T \geq 10^8 \rightarrow \sigma_{v_0^+ T} = \sigma_{10^8} \end{array} \right. \quad (6.27) \\
 \\
 \text{Curva E} \left\{ \log \sigma_{v_0^+ T} = \frac{1}{m} (a - \log v_0^+ T) \text{ desde que } \log v_0^+ T \geq a \right.
 \end{array}$$

Terceiro Passo: Testar falha por escoamento no primeiro ciclo.

Inicialmente traça-se a reta de Goodman modificada para $v_0^+ T$ ciclos de tensão, conforme item 5.6.1, obtendo-se a figura (6.8). Traça-se, então, uma reta que passa pela origem e pelo ponto $(\sigma_{qm}, \sigma_{qa})$. A interseção desta reta com a superfície de falha determina o ponto de projeto. Com a posição deste ponto obtém-se um valor de tensão alternante σ_{AG} que deve ser comparado com σ_{qa} para verificar a segurança do ponto de teste.

A tensão σ_{qa} usada neste passo é o desvio padrão da respectiva tensão calculado conforme (6.9). Adotou-se este valor porque ele corresponde ao da maioria dos picos, figura (5.17) e faixas 2 e 3 da tabela (6.6). Porém, como nem todos os picos de tensões tem este valor, este passo é apenas um indicativo de falha que complementa a verificação do ponto.

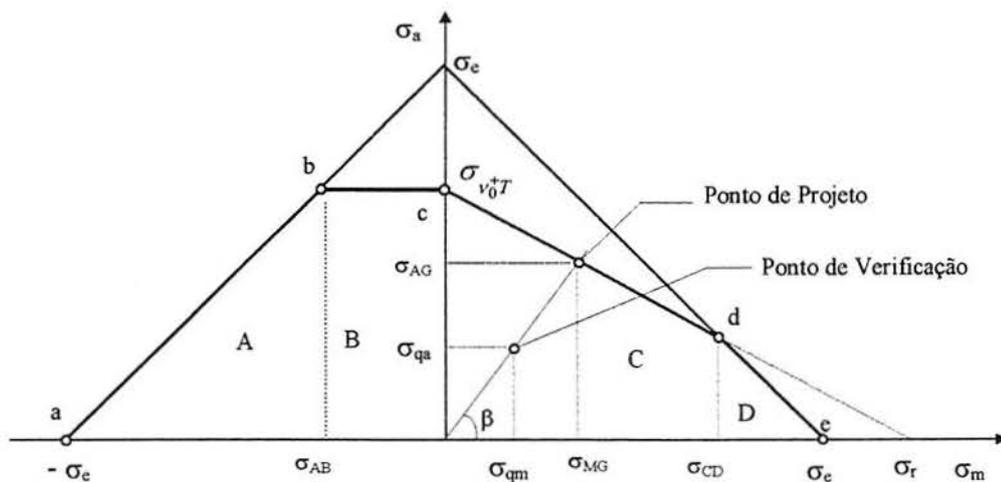


Figura (6.8) - Uso do Diagrama de Goodman na verificação de um ponto.

Cálculo do ponto de projeto através da Linha de Goodman modificada

A equação para obter a tensão σ_{AG} depende da região da superfície de falha que está o ponto de projeto. Colocando-se a expressão (5.37) em função das tensões σ_{qm} e σ_{qa} obtém-se as expressões (6.28) e (6.29). A primeira delas testa a falha por escoamento no 1º ciclo (região A – compressão e região D – tração) e a segunda delas testa a falha por fadiga.

$$\text{Região A: } \sigma_{AG} = \frac{\sigma_e}{1 - \frac{\sigma_{qm}}{\sigma_{qa}}} \quad ; \quad \text{Região D: } \sigma_{AG} = \frac{\sigma_e}{1 + \frac{\sigma_{qm}}{\sigma_{qa}}} \quad (6.28)$$

$$\text{Região B: } \sigma_{AG} = \sigma_{v_0^+T} \quad ; \quad \text{Região C: } \sigma_{AG} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_{v_0^+T}} + \frac{\sigma_{qm}}{\sigma_r \sigma_{qa}}} \quad (6.29)$$

Caso o ponto de projeto esteja nas regiões B ou C esta verificação é desnecessária porque ela é feita de forma mais completa no próximo passo. Caso o ponto de projeto esteja nas regiões A ou D e ocorra falha, o próximo passo é então desnecessário. Porém se não ocorre falha o próximo passo é executado para computar o dano embora a possibilidade de falha por fadiga seja pequena neste caso.

Quarto Passo: Calcular o número de ciclos N_i .

Para cada uma das 10 faixas que dividem a distribuição de probabilidade calcula-se uma tensão σ_{qa} média fazendo-se $m\psi_{\sigma_q}$ em que m é a média dos valores da 2ª coluna da tabela (6.6) para a faixa que está sendo tratada. Com esta tensão, executa-se o procedimento apresentado no item 5.6.3, o que permite computar o dano pela (6.21).

6.2 ORGANIZAÇÃO MACRO DO CÓDIGO

6.2.1 Programa Principal

O quadro (6.1) ilustra o algoritmo do programa em pseudocódigo e também apresenta de modo resumido a função de cada uma das subrotinas. Neste quadro, n_{tpv} é o número total de parcelas de velocidade, $nfreq$ é o número de frequências para a integração, $freq$ é o vetor de frequências para integração, qx é o vetor de coordenadas dos pontos de Gauss, w_{sup} e w_{inf} são os limites superior e inferior do intervalo de integração. O cálculo dos deslocamentos pseudoestáticos e das suas respectivas solicitações é feito uma única vez independente da frequência e da velocidade do veículo.

Quadro (6.1) - Algoritmo do programa principal.

```

Leitura dos Dados
GAULEG ! Obtém os pontos de integração de Gauss e seus respectivos pesos
TENME ! Calcula as tensões médias: normal, tangencial e de von Mises
FORMK ! Obtém a matriz de rigidez do elemento, e monta a matriz de rigidez global
MAMASSA ! Monta a matriz de massa do elemento, e a matriz de massa global
MACON ! Soma massas concentradas na matriz de massa
APOIO2 ! Aplica condições de contorno, obtém a matriz de coeficientes de influência, calcula o
vetor de forças de entrada;
AMORTEC ! Calcula a matriz de amortecimento reduzida.
PRODFI (obtém as cargas reais nos modos de vibração)
PRODFI (obtém as cargas imaginárias nos modos de vibração)
CALCDEPS ! Calcula os deslocamentos pseudoestáticos
DESCON ! Descondensa vetor
CALCFPS ! Calcula as solicitações pseudoestáticas
Para j =1 até ntpv
  Para i=1até nfreq (calcula as frequências para integração)
    freq(i)=(qx(i)*(wsup-winf)+wsup+winf)/2
  Fim do laço
  CADESGE ! Calcula pelo Método Modal a resposta do veículo.
  CALCADE ! Obtém os deslocamentos a partir dos deslocamentos generalizados - vetor e1
  CALCADE ! Obtém os deslocamentos a partir dos deslocamentos generalizados - vetor e2
  DESCON ! Descondensa vetor cader cadei
  DESCON ! Descondensa vetor cader2 cadei2
  CALCFOR ! Calcula as solicitações nos nós - vetor e1
  CALCFOR ! Calcula as solicitações nos nós - vetor e2
  ESPECTRO ! Calcula o espectro das irregularidades da estrada
  CALCFCO ! Calcula o fator de coerência
  CALCSDES1 ! Obtém os termos da diagonal da matriz espectral dos deslocamentos
  CALCDPDES ! Calcula o valor quadrático médio dos deslocamentos
  CALCSSOL ! Calcula o espectro das solicitações
  CALCSSID ! Calcula os espectros das tensões
  CALCDPSOL ! Calcula o valor quadrático médio das solicitações
  CALCDPSID ! Calcula o valor quadrático médio das tensões
Fim do laço
DESVIO
Gravar resultados intermediários
FADIGA – tensão normal
FADIGA – Método 1 (Shigley)
FADIGA – Método 1 (Sines)
FADIGA – Método 2 (Shigley)
FADIGA – Método 2 (Sines)
FADIGA1 – ! Faz análise de fadiga aplicando critérios do EUROCODE 3
Saída de Resultados
Fim

```

6.2.2 Subrotinas FADIGA e FADIGA1

As subrotinas FADIGA e FADIGA1 são responsáveis pela estimativa da vida útil do veículo. Para isto, cada um das barras que formam a estrutura tem seus nós representados por até 8 pontos de verificação. Cada um destes pontos é testado quanto a falha por escoamento simples, escoamento no primeiro ciclo e por fadiga. Quando não ocorre falha no ponto fornece-se o dano e a respectiva vida útil em anos.

A falha num elemento é dada pelo apontador **IFAL** que é organizado num número de linhas igual ao número de elementos e em 4 colunas. Na primeira coluna, $IFAL(i, 1)$, se indica o tipo da falha com os códigos: **0** - não há falha, **1** - falha por escoamento simples, **2** - falha por escoamento no primeiro ciclo e **3** - falha por fadiga. Na segunda coluna, $IFAL(i, 2)$, indica-se o nó do elemento que ocorre a falha. O código **1** indica falha no primeiro nó da conectividade e o código **2** indica falha no segundo nó. A falha em ambos os nós é indicada por **12**. Na terceira coluna, $IFAL(i, 3)$, se indica para o primeiro nó o último ponto que sofre falha, e na quarta coluna, $IFAL(i, 4)$, indica-se para o segundo nó o último ponto que sofre falha. Também é identificado o dano máximo por elemento e o ponto onde este ocorre.

A rotina FADIGA tem duas possibilidades de superfície de falha, que é controlada pelo apontador ISUP. A superfície de Goodman-von Mises é indicada com $ISUP = 0$, e a superfície de Goodman-Sines é indicada com $ISUP = 1$. Nesta rotina, o cálculo é controlado pelo indicador ICASO. Quando $ICASO = 0$ usa-se apenas a tensão normal (esta opção somente é possível com $ISUP = 1$), se $ICASO = 1$ considera-se a tensão equivalente com as estatísticas da tensão normal e se $ICASO = 2$ usa-se a tensão equivalente com as suas próprias estatísticas aproximadas. Quando ICASO igual a 1 ou 2 trabalha-se com ISUP assumindo os valores 0 ou 1. Estas combinações são feitas automaticamente obtendo 5 processos de cálculo. Cada um destes fornece uma estimativa da vida útil do veículo. O quadro (6.2) apresenta um algoritmo resumido da rotina FADIGA no qual NP é o número de pontos a serem verificados num nó. O laço I2 é realizado sobre as faixas que dividem a distribuição, no caso adotaram-se 10 faixas.

O tipo de curva σ -N adotada; as alternativas são as curvas **A**, **C** e **E** ilustradas na figura (5.13); é dado pelo indicador TIPCUR com os códigos 1, 2 e 3 para as curvas **A**, **C** e **E** respectivamente.

A rotina FADIGA1 aplica o EUROCODE 3 para o cálculo do dano. Os danos provocados pelas tensões normais e tangenciais são calculados de modo independente. As tensões tangenciais são transformadas em tensões normais através da relação de von Mises

(NORTON – 1998) para se evitar trabalhar com diagramas do tipo τ -N. São calculadas frequências de ultrapassagens e correspondentes números de cruzamentos em zero para cada uma das tensões. Como o dano é computado separadamente não é considerada a influência das tensões tangenciais médias no processo de fadiga (ver 5.6.2). O quadro (6.3) apresenta um resumo desta rotina.

Quadro (6.2) - Algoritmo resumido da rotina FADIGA.

```

Para I = 1 até NELEM
  Ler as tensões de escoamento, ruptura e limite de fadiga do elemento I
  Calcula parâmetros da curva  $\sigma$ -N adotada (curva: A, C e E ilustradas na figura (5.13))
  Para J = 1 até NNE
    Para K = 1 até NP
      Obter o valor da tensão média conforme valor de ISUP (0 – Shigley, 1 – Sines)
      Verificar a falha por Escoamento Simples
      DANOT=0 (inicializa a variável que acumula o dano no ponto de verificação)
      Para I1 = 1 até NTPV
        Se ICASO = 0 então
          Faz a tensão equivalente alternante  $\sigma_{qa}$  igual ao desvio padrão da tensão normal
          Calcula  $\epsilon$  e  $\nu_0^+$  em função dos momentos  $M_0$ ,  $M_2$  e  $M_4$  da tensão  $\sigma$ 
        Se ICASO = 1 então
          Calcula a tensão alternante equivalente  $\sigma_{qa}$ 
          Calcula  $\epsilon$  e  $\nu_0^+$  em função dos momentos  $M_0$ ,  $M_2$  e  $M_4$  da tensão  $\sigma$ 
        Se ICASO = 2 então
          Calcula a tensão alternante equivalente  $\sigma_{qa}$ 
          Calcula  $\epsilon$  e  $\nu_0^+$  em função dos momentos  $M_0$ ,  $M_2$  e  $M_4$  da tensão  $\sigma_q$ 
        Fim do Se
        Se  $\sigma_{qa} = 0$  então
          Fazer o dano no ponto igual a zero
          Ir para o próximo ponto K
        Fim do Se
        Interpolar a função de distribuição de probabilidade
        Calcular o número de cruzamentos em zero da tensão NTC
        Se NTC > 1000 então
          Calcula  $\sigma_{nv}$  de acordo com a curva  $\sigma$ -N adotada.
          Testar a falha por escoamento no 1º ciclo conforme ISUP e ICASO
          Se ocorrer falha por escoamento no primeiro ciclo, ir para o próximo nó J
        Para I2 = 1 até 10
          Obter o valor da tensão alternante,  $\sigma_{qam}$ , correspondente a faixa i2 da distribuição
          Calcular a tensão alternante pura  $\sigma_{qap}$ 
          Obter o número de ciclos pela curva  $\sigma$ -N adotada
          calcular o dano acumulado
        Fim do Laço I2
      Fim do Se
    Fim do Laço I1
  Armazenar o dano total no ponto
  Verificar a falha por dano
Fim do Laço K
Fim do Laço J
Fim do laço I
Identificar o ponto com maior dano
Determinar o dano máximo para cada elemento

```

Quadro (6.3) - Algoritmo resumido da rotina FADIGA1.

```

Para I = 1 até NELEM
  Ler as tensões de escoamento, ruptura e limite de fadiga do elemento I I
  Calcula parâmetros da curva  $\sigma$ -N adotada (curva: A, C e E ilustradas na figura (5.13))
  Para J = 1 até NNE
    Para K = 1 até NP
      Obter o valor da tensão normal média e da tensão tangencial média
      Verificar a falha por Escoamento Simples
      Fazer o dano no ponto igual a zero
      Para I1 = 1 até NTPV
        Obter a tensão normal alternante e a tensão tangencial alternante
        Calcular  $\epsilon$  para a tensão normal e  $\epsilon$  para a tensão tangencial
        Calcular  $v_0^+$  para a tensão normal e  $v_0^+$  para a tensão tangencial
        Interpolar a função de distribuição de probabilidade da tensão normal
        Interpolar a função de distribuição de probabilidade da tensão tangencial
        Calcular o número de cruzamentos em zero para a tensão normal (NTCN) e para a tensão tangencial (NTCT)
        Se NTCN  $\leq$  1000 então NTCN = 0
        Se NTCT  $\leq$  1000 então NTCT = 0
        Para I2 = 1 até 10
          Calcula a tensão normal alternante pura correspondente a faixa i2 da distribuição
          Calcula o número de ciclos NCN pela curva  $\sigma$ -N adotada
          Calcula o número de ciclos NCT pela curva  $\sigma$ -N adotada (tensão tangencial)
          Calcula o dano total somando o dano das tensões normais com o das tensões tangenciais
        Fim do Laço I2
      Fim do Laço I1
    Armazenar o dano total no ponto
    Verificar a falha por numero de ciclos elevado
  Fim do Laço K
Fim do Laço J
Fim do laço I
Identificar o ponto com maior dano
Determinar o dano máximo para cada elemento

```

Nesta rotina NCN é o número de ciclos, calculado pelas expressões (5.50) a (5.52), para o caso da tensão normal e NCT é o número de ciclos obtido pelas mesmas expressões para o caso da tensão tangencial.

6.3 ENTRADA DE DADOS

O fornecimento dos dados principais é realizado no sistema GAELI, e os dados complementares são fornecidos num programa de entrada auxiliar.

6.3.1 Dados Principais

No sistema GAELI são fornecidas as coordenadas, conectividades, restrições, propriedades, constantes e cargas estáticas.

- **Coordenadas:** Devem ser informadas obrigatoriamente em metros. Os nós correspondentes aos pneus ou seja os apoios devem ser os últimos a serem especificados.
- **Conetividades:** Na planilha de conetividades deve-se informar por último o nome dos elementos que representam as molas.
- **Restrições:** Os nós restritos são fornecidos obrigatoriamente na seguinte ordem: pneu esquerdo dianteiro, pneu direito dianteiro, pneu esquerdo traseiro e pneu direito traseiro. A figura (6.9) ilustra esta ordem. É importante ressaltar que todos os graus de liberdade correspondentes aos pneus devem estar restritos.

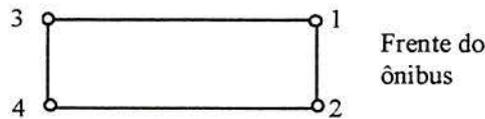


Figura (6.9) - Ordem de fornecimento dos nós restritos.

- **Propriedades:** Na oitava coluna (Prop. T_y) da planilha de propriedades, figura (6.10), informa-se o tipo de seção transversal que corresponde ao elemento de barra. As opções possíveis são: 1 para seção caixão, 2 para seção C e 3 para seção I. Este campo está sendo usado com um significado distinto do interpretado pelo GAELI. É importante lembrar que os elementos de mola são modelados com elementos de pórtico espacial. Logo, é necessário o fornecimento momentos de inércia próximos de zero.

NL	NOL	Prop. AX	Prop. IZ	Prop. IY	Prop. IX	Prop. BE	Prop. WT	Prop. IY
1	0	+0.00E+00						

Propriedades			Max.	20
PGUP	PGDR	ESC	Util.	1
-Fornecer ou Alterar			DISP.	19
CTR	Elin	lap		
MORSCHNFADIGANTESTE				
ALT	Froc	Dal		
ALT	fitl	Ger	Tipo Pr.	5
G A E L I				

Figura (6.10) - Planilha de propriedades.

- **Constantes:** Devem ser fornecidas no sistema N-m. É obrigatório o fornecimento do peso próprio do material porque este valor é utilizado no cálculo dos autovalores e autovetores.

- Cargas Estáticas: As cargas estáticas devem ser fornecidas obrigatoriamente em N. São admitidas cargas do tipo nodal, concentrada, distribuída e peso próprio.

Para a obtenção dos autovalores e autovetores pelo GAELI deve-se informar o número de autovalores desejado (limitado a 20 por vez), o fator de conversão γ [N/m³] - ρ [kg/m³] e o método de análise. O fator de conversão vale 9,806 para o sistema N-m. Quanto ao método de análise, recomenda-se utilizar *subespaços*. Os dados necessários para a análise no programa a parte estão indicados no anexo J.

Para a análise de fadiga são necessários dados extras a respeito do perfil metálico e das propriedades do material, que são fornecidas na planilha ilustrada na figura (6.11).

NL	NOL	Ten. Adm.	Y Pt.1	Z Pt.1	Y Pt.2	Z Pt.2	Y Pt.3	Z Pt.3
1	0	+0.00E+00						

Verif. de Estruturas										Max.	20																																																
PGUF	PGOR	ESC	-Fornecer ou Alterar		Representar		Arquivos			Util.	1																																																
<table border="1"> <tr> <td>ESC</td> <td>Fluc</td> <td>Esc</td> <td>MS</td> <td>Car</td> <td>Deformada</td> <td>Fluc</td> <td>Fluc</td> <td>Fluc</td> <td>Fluc</td> <td>DISP.</td> <td>19</td> </tr> <tr> <td>MORSCH</td> <td>FADIGA</td> <td>TESTE</td> <td>Fluc</td> <td>Car</td> <td>Gera</td> <td>Lista</td> <td>Fluc</td> <td>Fluc</td> <td>Fluc</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Fluc</td> <td>Tipo Pr.</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Fluc</td> <td>Estatica</td> <td></td> </tr> </table>										ESC	Fluc	Esc	MS	Car	Deformada	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	DISP.	19	MORSCH	FADIGA	TESTE	Fluc	Car	Gera	Lista	Fluc	Fluc	Fluc			Fluc	Tipo Pr.	5	Fluc	Estatica		GAELI																			
ESC	Fluc	Esc	MS	Car	Deformada	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	DISP.	19																																																
MORSCH	FADIGA	TESTE	Fluc	Car	Gera	Lista	Fluc	Fluc	Fluc																																																		
Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Tipo Pr.	5																																																
Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Fluc	Estatica																																																	

Figura (6.11) - Tela para especificação de dados extras da seção transversal.

Esta planilha teve os significados dos seus campos alterados. Na primeira coluna, deve-se informar o nome do elemento. Com relação ao perfil deve-se informar as dimensões a , b e t , obrigatoriamente em milímetros, que estão definidas na figura (6.6), nas colunas 3, 4 e 5 respectivamente. Com relação ao material deve-se informar o valor da tensão de escoamento, tensão de ruptura e limite de fadiga corrigido nas colunas 6, 7 e 8 respectivamente. Estes valores de tensão devem ser fornecidos obrigatoriamente em MPa (N/mm²).

Os detalhes relativos aos recursos da entrada de dados do GAELI, bem como a forma de operá-la no fornecimento dos dados necessários à análise não é tema deste trabalho. Logo, recomenda-se uma leitura do manual deste sistema (GROEHS & SANTOS - 1990).

6.3.2 Dados Fornecidos no Programa Auxiliar

Os demais dados necessários para a análise espectral e análise de fadiga devem ser fornecidos numa entrada de dados auxiliar que vai gerar um arquivo texto de extensão *.dad* (com o mesmo nome de arquivo utilizado no GAELI). A tela principal desta entrada auxiliar está ilustrada na figura (6.12).

The screenshot shows the 'Entrada Auxiliar' window with the following sections and fields:

- Dados para Integração:** N. Autovalores, N. Freq. Integr. (50), Lim. Inf. Integr., Lim. Sup. Integr. (300).
- Espectro das Irregularidades:** Constante c, Exponente w (2-3) (25), Desvio Padrão (cm), Tipo de estrada, Qualidade da Estrada.
- Distribuição da Velocidade:** Número de Parcelas (máx 5), Velocidade (Km/h), % de Ocorrência num Ano (rows 1-5).
- Amortecedores:** Table with columns 'Nó' and 'Const. de Amortec.' for nodes DE, DD, TE, TD.
- Amortecimento da Carroceria:** Amort. Relat. Geral, Fator Matriz de Massa.
- Dados para Gravação:** Drive (c: [LISZT]), Nome do Arquivo, File Explorer showing C:\Arquivos de programa\Microsoft Visual Stuc\VB98\Setup, Template, Wizards.
- Unidades:** Escolha o Sistema, Tipo de Curva S-N.
- Bitola do Veículo (m):** Input field.
- Buttons:** Descarta Autovalor, Amortecimento Modal Diferenciado, Gera Arquivo, Lista de nos, Lista de elementos.

Figura (6.12) - Tela principal da entrada de dados auxiliar.

Como qualquer programa em *windows* o funcionamento desta entrada se dá com o uso do *mouse* e teclado.

Os principais dados que devem ser fornecidos neste programa estão divididos em cinco conjuntos que definem os parâmetros da integração, espectro de irregularidades, distribuição de velocidades, amortecedores e amortecimento da carroceria.

Os parâmetros para a integração são o número de autovalores utilizados na análise, número de frequências discretas ou número de pontos de Gauss adotados para a integração (recomenda-se o uso de 50 frequências discretas), limite inferior e limite superior de integração em rad/s (recomenda-se o limite superior de 300 rad/s). No campo do limite

inferior pode-se optar entre o valor 0 ou deixar o campo em branco. Neste último caso, o programa adota como limite inferior a frequência representada na figura (6.2).

Os parâmetros para definir o espectro das irregularidades são o coeficiente de rugosidade (constante c) adotado em função do tipo de estrada e da qualidade da mesma, e o expoente do espectro da rodovia cujo valor padrão é 2,5 (este valor deve estar no intervalo entre 2 e 3). Caso não se consiga estabelecer o valor da constante c , o programa pode estimar o seu valor com base no desvio padrão das irregularidades ou com base em dados qualitativos como tipo e qualidade da rodovia. Neste caso, o programa adota para c o valor médio da tabela (4.1) correspondente ao tipo e da qualidade da rodovia.

Nos parâmetros relativos à distribuição da velocidade especifica-se o número de parcelas de velocidades adotadas para o veículo, e para cada uma delas indica-se a velocidade correspondente em km/h e um valor percentual que indica o número de segundos por ano que esta velocidade ocorre.

Os parâmetros para definir os amortecedores são os nomes dos nós do chassi aos quais eles estão ligados e as constantes de amortecimento. Este nós devem ser indicados na seguinte ordem: dianteiro esquerdo, dianteiro direito, traseiro esquerdo e traseiro direito.

O amortecimento da carroceria é definido por uma constante de amortecimento relativo geral. Caso este valor seja diferente de zero, o mesmo é adotado como a constante de amortecimento modal para todos os modos de vibração. Caso contrário, estes valores devem ser fornecidos em planilha específica. Deve-se informar também a constante que multiplica a matriz de massa para o cálculo da matriz de amortecimento de *Rayleigh*.

O tipo de curva σ -N (na tela está S-N) utilizado na análise deve ser indicado no menu de rolagem. As opções são a curva σ -N padrão, curva A da figura (5.13), curva σ -N proposta pelo EUROCODE 3 (1993), curva C da figura (5.13) e a curva E ilustrada na figura (5.13).

Fornece-se também a bitola do ônibus em metros, o sistema de unidades usado no problema, a vida útil desejada, em anos, para o veículo e os dados para gravação do arquivo.

Este programa tem 5 teclas de comando que são acionadas para descartar autovalores, fornecer os coeficientes de amortecimento modal (deve ser fornecido para cada um dos modos de vibração usados na análise), informar os nós que terão resultados intermediários gravados (item opcional), informar os elementos que terão resultados intermediários gravados (item opcional) e gerar o arquivo de dados. Os dados necessários para descartar os autovalores são o número de autovalores a serem descartados e o código que identifica os

mesmos. Como o volume de resultados intermediários é grande recomenda-se que a lista de nós e elementos fornecida seja reduzida (não mais de 10 nós ou elementos).

Deve-se fornecer num arquivo texto (extensão *.mas*), que tem a mesma organização dos demais arquivos de entrada do GAELI (GROEHS & SANTOS – 1990), a lista de nós com massa concentrada. Além dos dados anteriores, o programa deve ler também os autovalores, autovetores, solicitações médias e uma nova ordem dos nós para minimização da banda, que é calculada pelo GAELI.

6.4 SAÍDA DE RESULTADOS

Os resultados obtidos pelo procedimento proposto podem ser divididos em dois grupos. O primeiro formado pelos resultados correspondentes ao carregamento médio e o segundo formado pelos resultados correspondentes à análise no domínio da frequência.

A análise estática com o carregamento médio fornece como resultados deslocamentos, reações e solicitações que podem ser visualizados no GAELI. O mesmo ocorre com os autovalores e autovetores. Todos estes resultados podem ser pós-processados (cálculo de tensões equivalentes, coeficientes de risco) no mesmo sistema (neste sentido, sugere-se a leitura do manual do GAELI) (GROEHS & SANTOS – 1990).

Para o cálculo das tensões equivalentes no sistema GAELI é necessário o fornecimento das coordenadas, em sistema local, de até 3 pontos de verificação por nó. Esta exigência torna o fornecimento destas coordenadas bastante trabalhoso caso se deseje controlar os resultados obtidos utilizando-se por exemplo o conceito de simetria. Para se evitar o fornecimento destas coordenadas fez-se um programa que lê as solicitações médias e calcula as tensões equivalentes de von Mises, bem como os coeficientes de risco, para todos os pontos padrões de verificação (item 6.1.7). Estes resultados podem ser representados graficamente em um programa específico (item 6.4.1).

O segundo grupo de resultados pode ser dividido em três subgrupos, que são os dos resultados correspondentes apenas à análise no domínio da frequência, resultados intermediários e os resultados correspondentes à análise de fadiga.

A análise no domínio da frequência fornece como principais resultados os desvios padrões de deslocamentos e solicitações, os quais podem ser publicados utilizando-se o pós-processador do GAELI. Com este objetivo o código implementado altera o número de carregamentos no arquivo de extensão *.inf* para NTPV+1 e libera o acesso a NTPV+1 carregamentos para o pós-processador. Com esta organização os resultados médios

correspondem ao carregamento 1 e os demais NTPV conjuntos de resultados estão organizados nos “carregamentos” subsequentes. Deste modo, estes resultados podem ser representados no pós-processador. Para se visualizar um novo conjunto de resultados, na tela de saída de deslocamentos ou solicitações, basta pressionar a tecla *Esc* e após as teclas *Alt+L*.

O programa grava resultados intermediários para uma lista de nós e elementos previamente fornecida. Os resultados gravados são os espectros de potência dos deslocamentos (extensão *.i01*), solicitações (extensão *.i02*), tensão normal (extensão *.i03*), tensão tangencial (extensão *.i04*) e tensão equivalente (extensão *.i05*). Além disso, são gravadas as características das distribuições da tensão normal (extensão *.i06*), tangencial (extensão *.i07*) e equivalente (extensão *.i08*), bem como as tensões médias (extensão *.i09*).

A análise de fadiga fornece um arquivo com a lista dos elementos que apresentaram falha, identificando também o tipo de falha que ocorre, os nós e os pontos de verificação que falharam, bem como o respectivo dano nestes pontos. Apresenta-se também um resumo dos resultados; vida útil em anos, dano máximo, nome do elemento, nome do nó e ponto de verificação; para o ponto mais crítico. Estes dados são gravados para os 6 tipos de análise possíveis no arquivo de extensão *.fal*. Quando não há dano na estrutura, o que pode ocorrer quando as tensões são muito baixas (abaixo de σ_n para a curva A e abaixo de σ_{10^8} para a curva C), indica-se uma vida útil simbólica de 100 anos. Na realidade, a vida do veículo neste caso deve ser estabelecida por outros critérios tais como desgaste natural do veículo.

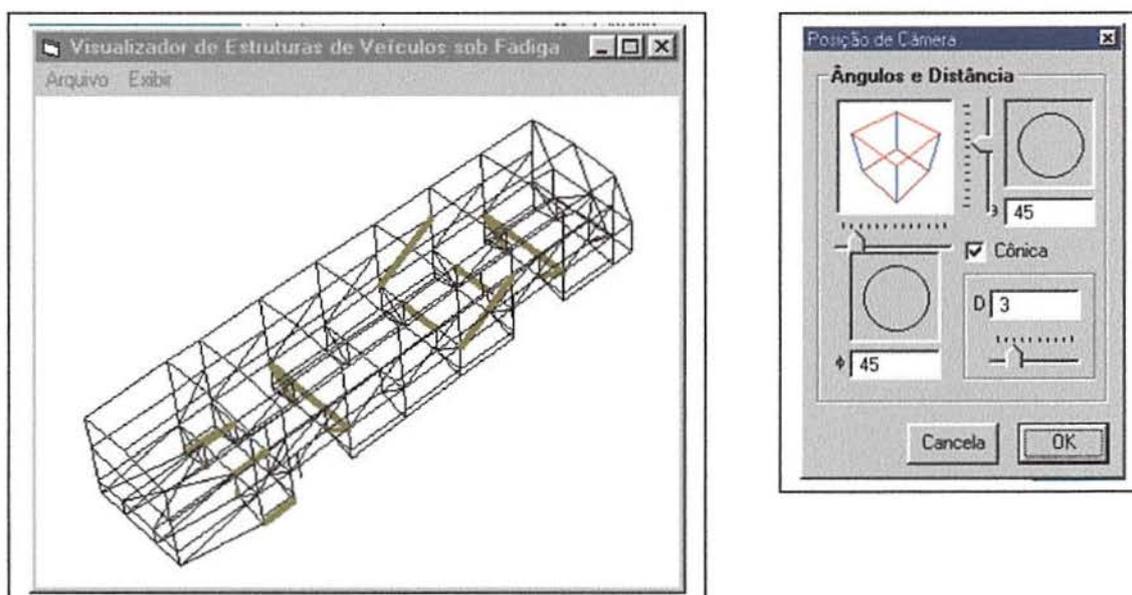
Para cada tipo de análise grava-se um arquivo com o dano máximo por elemento (extensões *.da1, ..., .da6*) e um arquivo com o coeficiente de risco do elemento (extensões *.rs1, ..., .rs6*), cujos resultados podem ser visualizados no módulo de representação. O coeficiente de risco é obtido pelo produto do dano máximo no elemento com a vida útil, em uso contínuo, desejada para o veículo.

Quando ocorre falha no elemento esta é identificada com a convenção apresentada no item 6.2.2. Nos casos de falha por escoamento ou escoamento no 1º ciclo, o dano é representado pelo código 1×10^6 , o que corresponde a uma vida útil nula.

Em um programa a parte pode ser representada graficamente a distribuição de dano no veículo, bem como a lista dos elementos que apresentam falha.

6.4.1 Visualizador Gráfico dos Resultados

Resultados específicos da análise de fadiga tais como: distribuição de dano, vida útil, e indicação das barras que apresentam falha, são representados num módulo a parte. Fez-se necessário o desenvolvimento deste módulo para se evitar alterar o pós-processador do GAELI e também por não se dispor de programas comerciais que façam a representação desejada para elementos de barra. O programa resultante foi desenvolvido *em Visual Basic for Windows* usando programação orientada a objeto¹. A figura (6.13a) ilustra a tela principal



do programa, e a figura (6.13b) ilustra os comandos para posicionamento da câmera sintética.

Figura (6.13) – Módulo Visualizador.

O comando *Arquivo* vasculha as pastas indicadas e apresenta os arquivos de extensão .rsc que nelas existirem. Após a seleção do arquivo é feita a representação do modelo com a posição de câmera padrão. As grandezas dano, vida útil, coeficiente de risco têm a sua distribuição ilustrada através de uma tabela de cores. Esta distribuição de cores é feita por elemento ou seja considera-se, por exemplo, o pior caso de coeficiente de risco para o elemento e seleciona-se a sua cor correspondente. Elementos que não apresentam valores significativos para a grandeza representada são desenhados com uma espessura de linha inferior ao dos demais. O controle do título da escala e do número de faixas de cores adicionadas pode ser feito

¹ Todos os objetos relativos a representação do modelo e posicionamento da câmera sintética foram fornecidos pelo Prof. Fábio Gonçalves Teixeira do Departamento de Expressão Gráfica da Arquitetura – UFRGS.

sem dificuldade através da alteração de poucos parâmetros no código do programa de visualização.

6.5 LINGUAGEM ADOTADA

O programa implementado foi desenvolvido em *fortran* num padrão intermediário entre o *fortran 77* e o *fortran 95*. Não se adotou o padrão mais atual por que o compilador empregado (*Visual Fortran 5.0*) não otimiza tão bem os códigos desenvolvidos com este formato. Porém, tomou-se o cuidado de eliminar da programação todos os comandos do *fortran 77* que foram declarados obsoletos (CHAPMAN - 1998), de modo que a passagem deste formato para o do *fortran 90* pode ser feita apenas trocando o formato fixo por livre, a letra C (indica comentário) por ! e o símbolo * (indica continuação de linha) por &. Esta troca de formato passa a ser vantajosa nas versões mais atuais dos compiladores.

7. MODELAMENTO DE UM ÔNIBUS SIMPLIFICADO

Apresenta-se o modelamento de um ônibus simplificado. Embora este veículo não exista tomou-se o cuidado de se empregar dados coerentes com a realidade. Para efeito de comparação de resultados fez-se dois modelos do veículo. O primeiro com elementos de casca no chassi e pórtico na carroceria, e o segundo apenas com elementos de pórtico.

7.1 MODELO MATEMÁTICO UTILIZADO

A carroceria do ônibus é modelada com elementos de pórtico padrão, já que as barras que a formam têm seção tubular. Neste caso, a influência do empenamento causado pela torção é reduzida devido à maior rigidez das barras e a pequena relação entre as dimensões das juntas e os comprimentos das respectivas barras. Além disso, é de se esperar que as maiores solicitações presentes na carroceria sejam representadas por momentos fletores.

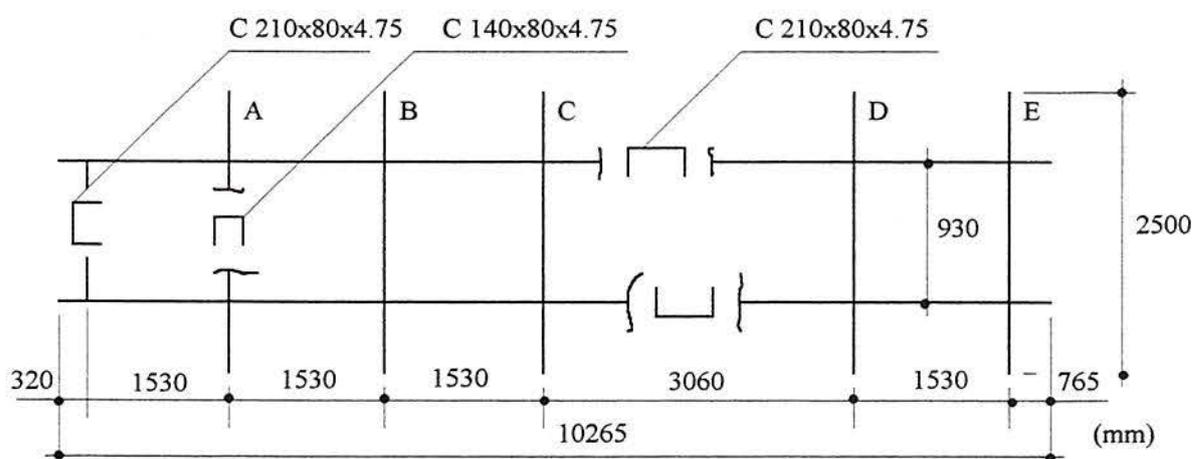
Com relação ao chassi, a rigor, é necessário o uso de elementos de casca porque este utiliza perfis de seção aberta, e as dimensões das juntas comparadas com os comprimentos das barras não são desprezíveis. Além disso, a torção num chassi pode ser igual ou superior aos momentos fletores. Somado a isto, as longarinas do chassi têm seção variável, e nem todas as barras que o formam se ligam nas suas linhas médias (BEERMANN - 1989).

Entretanto, se o objetivo da análise é a carroceria, o uso de elementos de pórtico para modelar o chassi é suficiente para que se tenha uma descrição da rigidez deste. Este tipo de modelo é adequado para as fábricas de ônibus já que estas recebem o chassi do veículo pronto devendo apenas montar a carroceria nele. Além disso, é cada vez mais comum a montagem de ônibus monobloco ou seja sem uma estrutura definida do tipo chassi. Este tipo de solução é utilizada em veículos com o motor traseiro, mas não é ainda uma solução padrão.

Neste trabalho as juntas de ligação das barras que formam a carroceria e as ligações entre a carroceria e o chassi não são modeladas, ver item 5.7. Logo, toda a análise feita com este modelo fornece bons resultados para as barras porém para os nós (juntas de ligação) os resultados devem ser considerados aproximados. Neste sentido, Quando se faz necessário o uso de elementos de barra em conjunto com elementos de casca deve-se tomar alguns cuidados nas ligações destes elementos sob pena de se cometer erros graves. Este assunto está tratado com maior detalhe no anexo H.

7.2 DESENVOLVIMENTO DO MODELO

A figura (7.1) ilustra um esquema do chassi do ônibus hipotético. As duas longarinas do chassi têm seção transversal constante ao longo de todo o seu comprimento, o mesmo valendo para todas as barras transversais. As barras A, B, C, D e E possuem a mesma seção transversal cuja posição de montagem está indicada no esquema abaixo. O veículo analisado tem dois eixos: o dianteiro localizado na posição média entre as travessas A e B, e o eixo traseiro localizado na posição média entre as travessas D e E.



Obs. As barras transversais A, B, C, D, E possuem o mesmo tipo de montagem.

Figura (7.1) - Esquema do chassi simplificado (sem escala).
As barras transversais A, B, C, D, E têm o mesmo tipo de montagem.
As dimensões adotadas tem como base o chassi B10M de fabricação VOLVO.

Para a geração da malha de elementos de casca, de modo mais otimizado, fez-se o modelamento do chassi com 3 peças básicas, que foram modeladas no *módulo gerador* (GROEHS & SANTOS - 1990) a partir das definições dos contornos e regiões que formam as mesmas. Estas peças estão ilustradas nas figuras (7.2a), (7.2b) e (7.2c). As partes do chassi que elas representam estão indicadas na figura (7.3). Para cada uma destas peças é gerada uma malha básica que são posteriormente usadas pelo *módulo corretor* para se realizar o modelamento de toda a peça (GROEHS & SANTOS - 1990).

A geração do chassi é feita unindo-se a peça 1 na 2. Depois toma-se novamente a peça 2 e translada-se a mesma duas vezes. No conjunto resultante deve então ser unida a peça 3. Concluído este processo toma-se novamente a peça 2, que deve ser translada mais duas vezes, com passos distintos, de modo a se obter de forma completa uma metade do chassi. A geração é finalizada com uma simetria em torno do eixo representado na figura (7.3). A malha de elementos de casca resultante está apresentada na figura (7.4). Optou-se pelo emprego de elementos de 4 nós para reduzir o número de nós da malha.

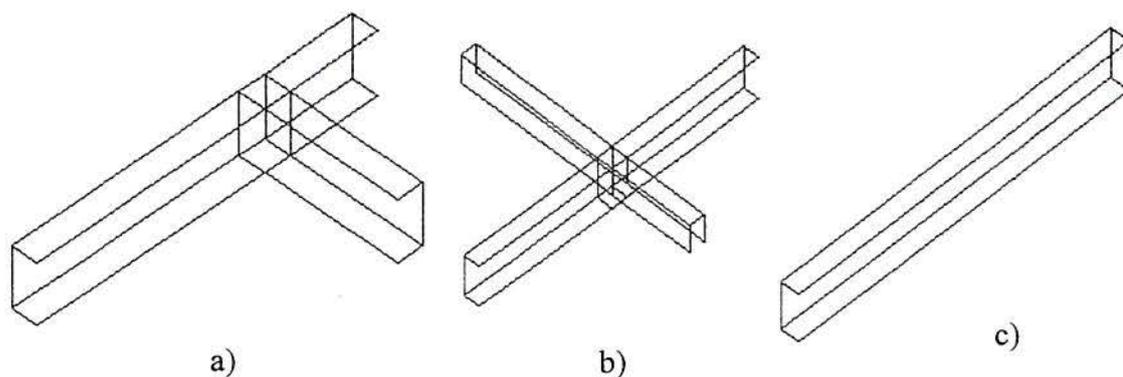


Figura (7.2) - Peças básicas para o modelamento do chassi.

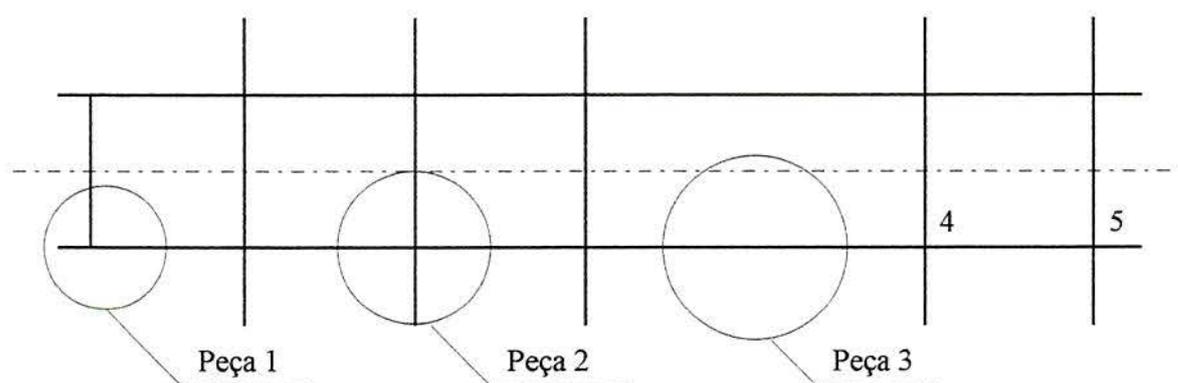


Figura (7.3) - Identificação das peças básicas no chassi.

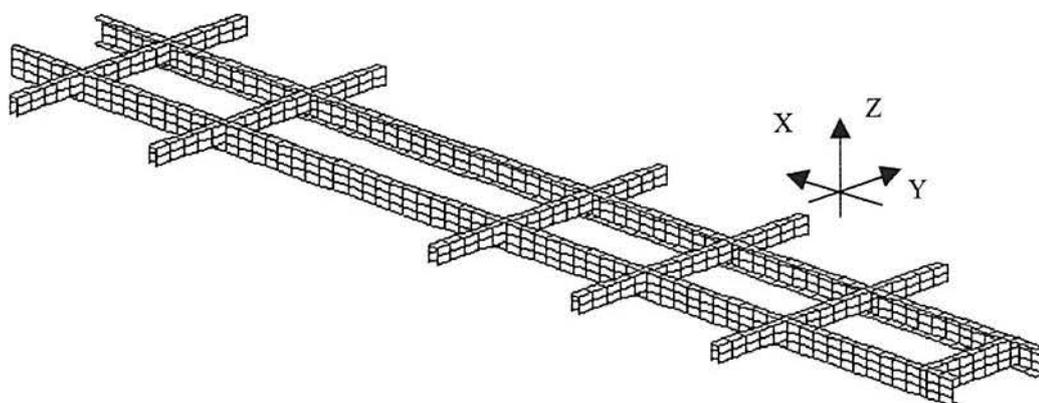


Figura (7.4) - Representação da malha resultante.

O próximo passo é o modelamento da carroceria do ônibus, o qual é iniciado pela parte inferior da mesma. A ligação do chassi com a carroceria é estabelecida por um conjunto de quadros como o representado na figura (7.5). As dimensões básicas do quadro e a disposição deles estão indicadas nas figuras (7.6) e (7.7) respectivamente.

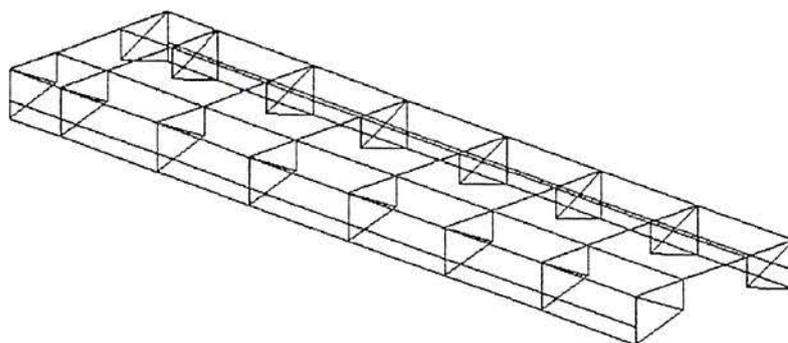


Figura (7.5) - Conjunto de ligação carroceria-chassi.

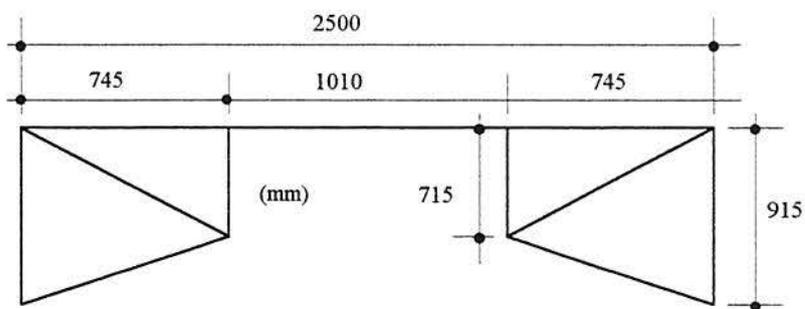


Figura (7.6) - Quadro de ligação carroceria-chassi (sem escala).



Figura (7.7) - Disposição dos quadros de ligação carroceria- chassi.

O modelo de barras é gerado em arquivo separado do chassi, os quais são unidos de modo automático pelo *módulo corretor* que já elimina os nós coincidentes. A malha resultante desta operação está ilustrada na figura (7.8).

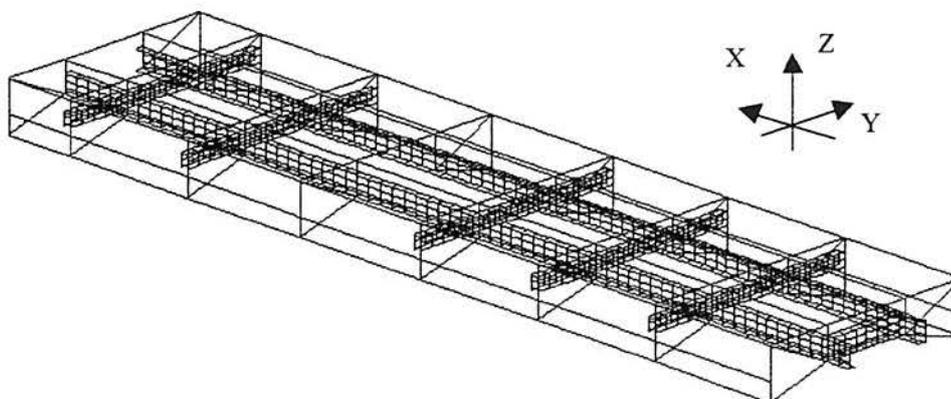


Figura (7.8) - Detalhe da ligação do chassi com a parte inferior da carroceria.

Os quadros de ligação ilustrados nesta figura transmitem as cargas do piso do veículo para o chassi. Além disso, é de consenso prático que este conjunto de barras enrijece de modo considerável o chassi. Na posição de cada um dos quadros da figura (7.7) é ligado um pórtico, como o da figura (7.9), que já está modelado para ser montado no chassi. Cada um destes pórticos é montado a partir do quadro de ligação ilustrado na figura (7.6). As ligações entre cada um destes quadros são feitas por barras longitudinais conforme figura (7.10) que fornece as cotas complementares necessárias para concluir o modelamento das laterais do veículo.

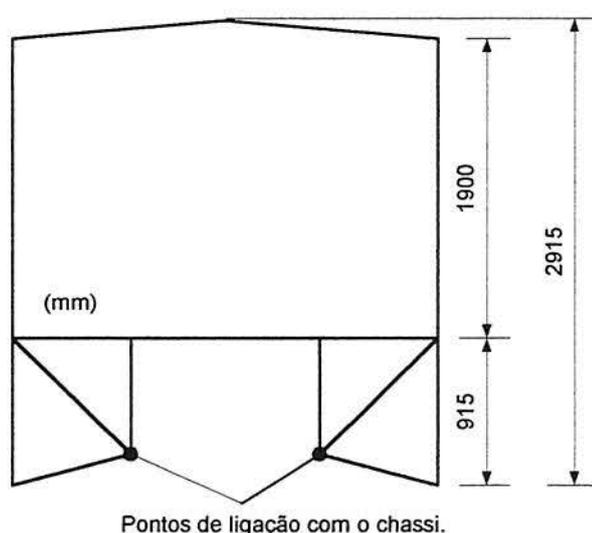


Figura (7.9) - Detalhamento do pórtico básico.

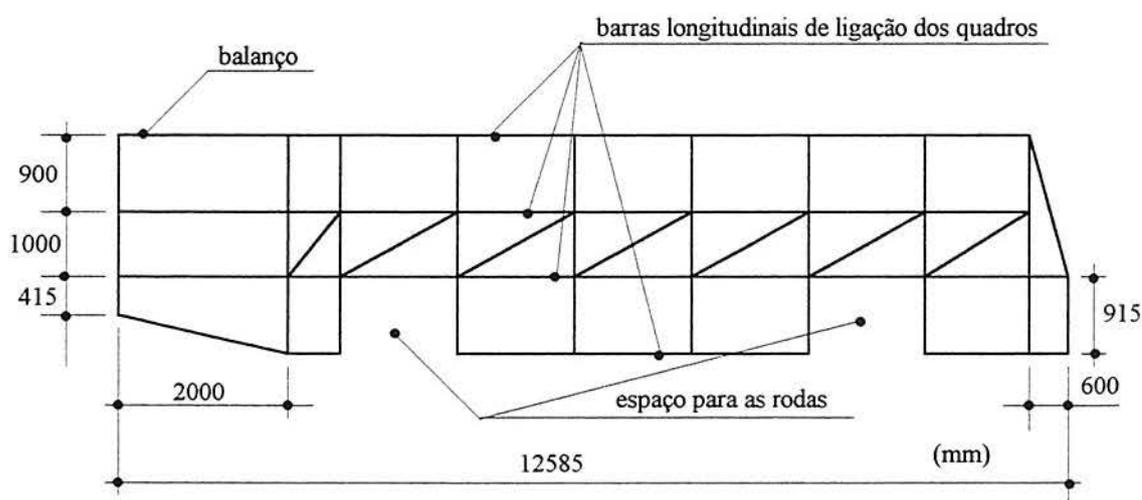


Figura (7.10) - Vista lateral da carroceria.

Com finalidade de manter o modelo simétrico, não foi representada a porta de acesso ao veículo. Além disso, empregou-se uma geometria simplificada para a frente e traseira deste. Na parte traseira utilizou-se um balanço de 2000 mm com um conjunto de barras

tramadas conforme figura (7.11). Nesta região, a altura da carroceria é reduzida de 600 mm para evitar impactos desta contra objetos devido ao trabalho da suspensão.

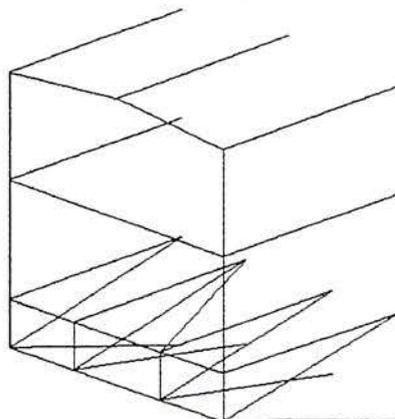


Figura (7.11) - Detalhe do balanço traseiro do ônibus.

O resultado final da geração da estrutura da carroceria é um modelo com um plano de simetria, que está ilustrado na figura (7.12). Unindo-se a carroceria com o chassi, figura (7.4), se obtém a malha final, figura (7.13), que possui 1206 elementos de casca, 422 elementos de pórtico espacial e um total de 1562 nós. Nesta malha já estão considerados os 4 elementos de mola. O mesmo ônibus modelado apenas com elementos de pórtico espacial tem uma malha com 461 elementos e 254 nós (como a malha resultante é muito semelhante à da figura (7.12) não se fez uma representação da mesma).

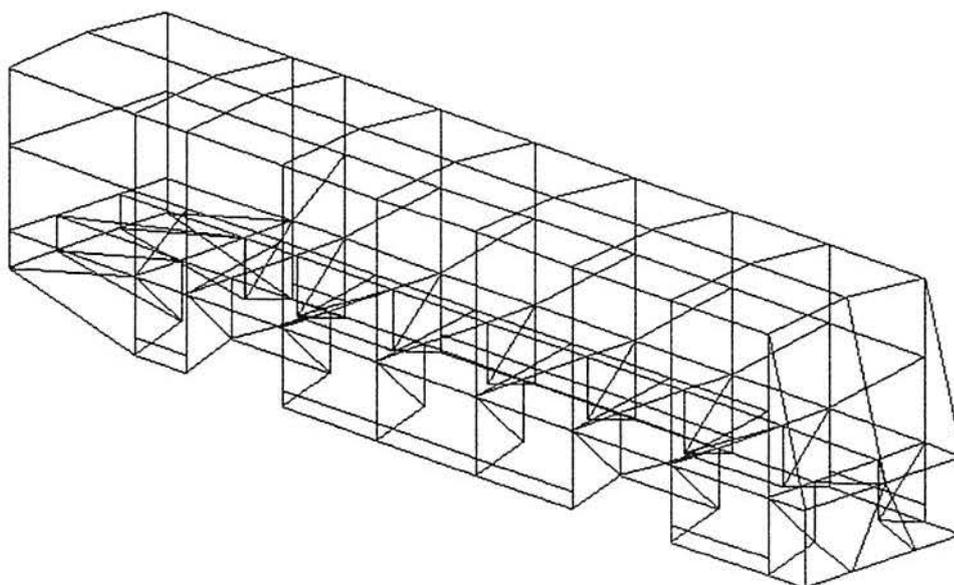


Figura (7.12) - Malha da carroceria.

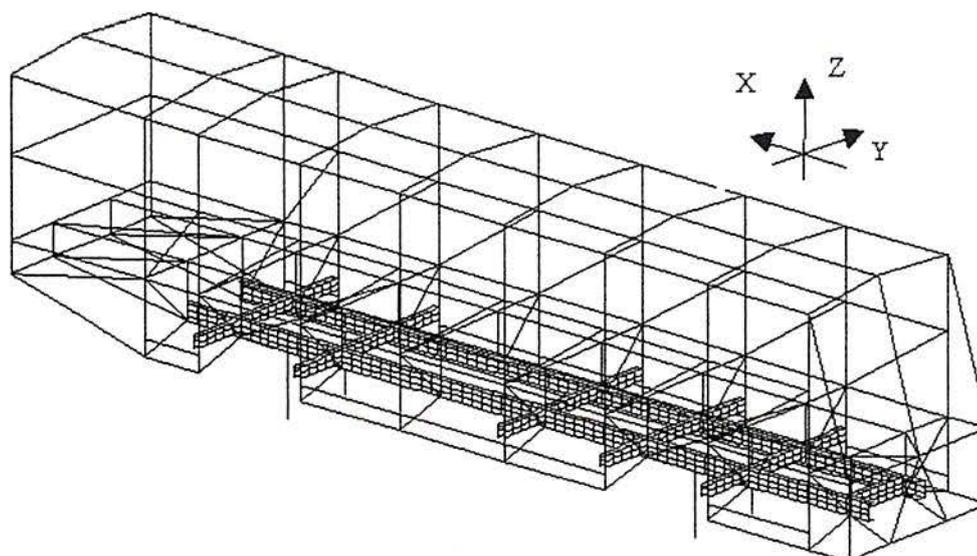


Figura (7.13) – Malha resultante.

Adotou-se para todas as barras que formam a carroceria, uma seção transversal tubular padrão de dimensões 40x40x3 mm, que estão dentro da faixa de valores usados na prática que são de 35 a 60 mm para a base, de 40 a 100 mm para a altura, e de 1,9 a 2,65 mm para espessura.

7.2.1 Materiais

No chassi adotou-se o aço SAE 1045 com tensão de escoamento de 350 MPa, $E = 2,06 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, $G = 7,92 \times 10^4$ MPa e $\gamma = 76977$ N/m³. Este material certamente tem características mecânicas superiores do que o usado na prática, sendo escolhido para compensar as dimensões das seções dos perfis do chassi, que são um pouco inferiores das usadas na prática. Na carroceria, considerou-se que todas as barras são feitas de aço ASTM-A36 com tensão de escoamento de 250 MPa, $E = 2,06 \times 10^5$ MPa, $G = 7,92 \times 10^4$ MPa, $\nu = 0,3$ e $\gamma = 76977$ N/m³.

7.2.2 Aplicação das Cargas e Massas Concentradas

Considerando-se que o veículo modelado é do tipo rodoviário, adotou-se para ele um peso de 98,06 kN (10 tf) correspondente ao veículo descarregado. Adotando-se para o veículo uma carga máxima de 42,96 kN (4,4 tf), que corresponde ao peso de 48 pessoas (com peso médio de 70 kgf) mais 9,8 kN (1 tf) de bagagem, tem-se para o veículo carregado um peso de 141,2 kN (14,4 tf) que é um valor próximo do que se encontra na realidade (um ônibus rodoviário pesa em torno de 16 tf). Dividindo-se o peso do veículo descarregado entre o chassi e a carroceria, adotou-se 49,03 kN (5 tf) para cada uma das partes (esta divisão foi realizada com base no peso do chassi Volvo B10M que é de 5,47 tf).

O peso do chassi inclui motor, caixa de mudanças, suspensão pneumática, tanque para combustível, pneus com rodas. O modelo do chassi em elementos de barra ou casca tem um peso de 4,53 kN. Logo tem-se um peso de 44,5 kN que deve ser aplicado ao chassi. Como estes elementos fazem parte do veículo, o peso deles é aplicado sobre a forma de massas concentradas. Deste modo, considera-se o efeito desta inércia nos modos de vibração, bem como as cargas correspondentes, *mg* no caso da análise do carregamento médio, e *ma* no caso do carregamento devido às irregularidades do pavimento. Para se aplicar esta massa dividiu-se o chassi em 6 regiões; frente, eixo dianteiro, motor, intermediária, eixo traseiro e traseira; conforme figura (7.14). A massa de 4538 kg é então dividida da seguinte forma:

- Frente : 150 kg (valor arbitrado);
- Eixo dianteiro: 650 kg (260 kg correspondente às rodas e o restante arbitrado);
- Motor : 2130 kg (1700 kg para motor e 430 kg para combustível);
- Intermediária : 220 kg (130 para o estepe e o restante arbitrado);
- Eixo traseiro : 1200 kg (520 kg correspondente às rodas e o restante arbitrado);
- Traseira : 188 kg (arbitrado).

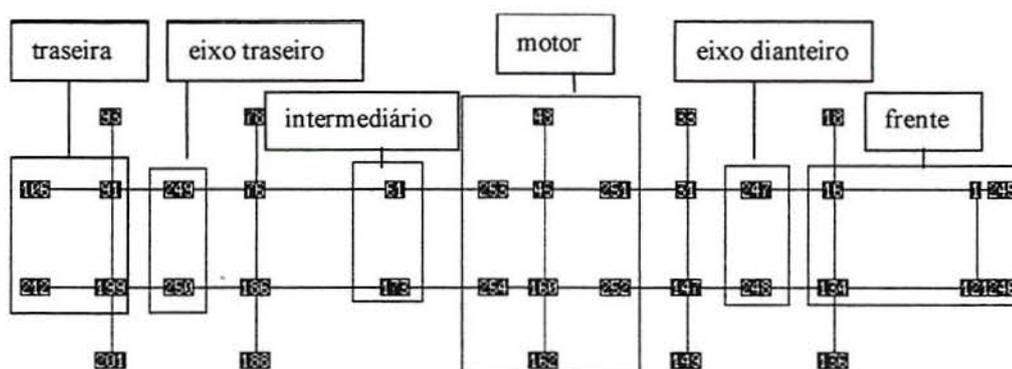


Figura (7.14) – Distribuição das massas no chassi.

As massas dos eixos dianteiro e traseiro não são aplicadas no modelo porque elas não se localizam no chassi. A figura (7.15a) ilustra um modelo de suspensão traseira que pode confirmar isto. O modelo teórico da suspensão seria da forma indicada na figura (7.15b), mas como neste trabalho não é considerada a influência da rigidez de mola e amortecimento dos pneus, tudo se passa como se o sinal das irregularidades fosse aplicado diretamente nos eixos dianteiro e traseiro. Neste caso, as massas dos eixos não exercem influência no modelo.

A distribuição de massa na carroceria é bem mais complexa do que no chassi. Sabe-se que a massa do modelo de barras da carroceria vale 1237 kg, logo tem-se uma massa de 3763 kg para ser distribuída nele.

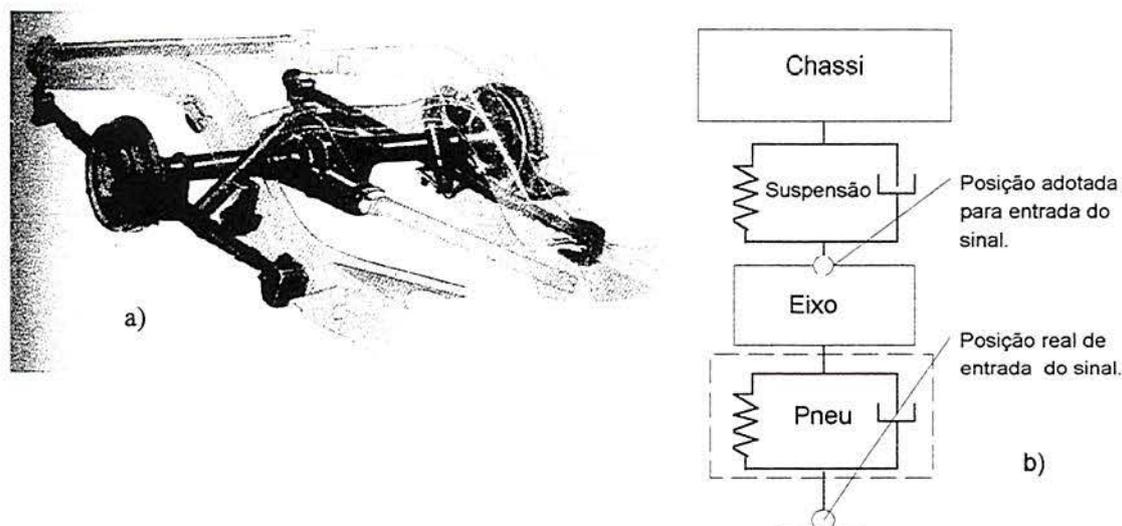


Figura (7.15) – Modelo para representação da suspensão.
 a) Suspensão traseira tipo *Hotchkiss* (GILLESPIE – 1992).
 b) Modelo teórico para representação da suspensão.

Para simplificar o modelo optou-se por quantificar a massa apenas dos componentes com posição identificável no modelo. Sendo assim tem-se uma massa de 1584 kg correspondente a 48 poltronas (cada poltrona tem massa de 33 kg – dado fornecido pela empresa COMIL) que atua no piso do ônibus. Também no piso atua a massa do banheiro que é de 130 kg. No teto tem-se 252 kg do porta pacotes. Considerando-se estes valores resta uma massa de 1797 kg que é distribuída na carroceria. Esta massa é distribuída de modo uniforme entre os nós que pertencem ao teto, laterais, piso interno, piso do porta-malas. Com este critério foram selecionados 198 nós, o que corresponde a uma massa de 9,1 kg/nó. É claro que este critério cumpre apenas a finalidade de simplificar o modelo.

Na carroceria tem-se também a atuação de cargas que são o peso dos passageiros e das bagagens. O peso dos passageiros (32,95 kN) é distribuído entre os nós do piso interno, que somam 47 nós, o que corresponde a uma carga de 701 N/nó. O peso das bagagens (9,8 kN) distribuído entre os nós do piso do porta-malas, que somam 16 nós, o que corresponde a uma carga de 612,8 N/nó. A ação destas forças é considerada apenas no cálculo das tensões médias ou seja o efeito da inércia das massas correspondentes a elas não é considerado. Este procedimento se justifica porque, em primeiro lugar, estas cargas são acidentais. Em segundo lugar, como se está interessado no movimento vertical do veículo, as massas das pessoas e bagagens não podem contribuir na inércia do veículo porque não estão completamente ligadas a ele.

7.2.3 Elementos de Mola e Amortecedor

Considerando-se o ônibus com carga máxima e apoiado nas quatro rodas tem-se que as 4 reações são aproximadamente iguais a 30 kN. Isto ocorre porque o motor do veículo está mais próximo do eixo dianteiro e também porque a distribuição de massa adotada é mais concentrada nesta parte do veículo. Adotando-se molas pneumáticas tem-se uma rigidez de mola da ordem de 195 N/mm para a carga especificada. Considerando-se uma majoração da reação de 50% para levar em conta efeitos dinâmicos adotou-se 300 N/mm para as molas das suspensões dianteiras e traseiras.

Os elementos de mola são representados por barras de pórtico espacial com 0,8 metros de comprimento. Como a constante k é obtida pela relação $k = EA/l$ faz-se necessário o cálculo de uma área fictícia. Para isto adotou-se $E = 2,06 \times 10^5$ MPa obtendo-se, então, uma área fictícia de $1,165 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ para as molas. As demais propriedades; I_z , I_y e I_x ; destes elementos de pórtico fictícios devem ter valores desprezíveis.

A constante de amortecimento equivalente C foi calculada pela expressão (7.1), na qual K é a constante de mola equivalente, M é a massa total do veículo e ξ é a razão de amortecimento. Na falta de melhores informações, adotou-se $\xi = 0,4$, que é a razão de amortecimento mais comum em veículos (GILLESPIE – 1992). Obtido o valor de C , o mesmo deve ser dividido proporcionalmente ao coeficiente de rigidez de mola correspondente. Fazendo isto obtém-se para os amortecedores um coeficiente de 24514 N.s/m.

$$C = 2\sqrt{M \cdot K} \cdot \xi = 2 \cdot \sqrt{12520 \text{ kg} \cdot 1200000 \text{ N/m}} \cdot 0,4 = 98058 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad (7.1)$$

Observações:

No modelo resultante não se considerou a influência da área envidraçada devido à falta de dados práticos necessários para aplicação do procedimento apresentado no anexo I.

Verificou-se na prática que conforme a escolha dos pequenos valores para os momentos de inércia I_z , I_y e I_x , pode-se ter uma perturbação numérica nos resultados. Este assunto está tratado no anexo K.

8. ANÁLISE ESTÁTICA DO ÔNIBUS SIMPLIFICADO

Apresenta-se a seguir a análise estática do ônibus modelado no capítulo 7, cujo objetivo é comparar o modelo que usa apenas elementos de barra com o que usa elementos de barra e casca. Deseja-se testar a eficácia dos critérios de verificação mais adotados numa estrutura de ônibus com o objetivo de eliminar a necessidade de uma análise de fadiga.

Considera-se a estrutura do ônibus submetida aos carregamentos a) e d), que estão especificados no item 1.6. No modelo de barras é falha é identificada por um coeficiente de risco que é definido como o inverso do coeficiente de segurança ou seja tensão no ponto de verificação dividida pela tensão de escoamento do material.

8.1 CASO NORMAL

Neste tipo de carregamento, considera-se o veículo apoiado sobre todas as rodas com a sua capacidade máxima de carga. Os nós que representam as rodas tem todos os seus graus de liberdade fixos como está representado na figura (8.1).

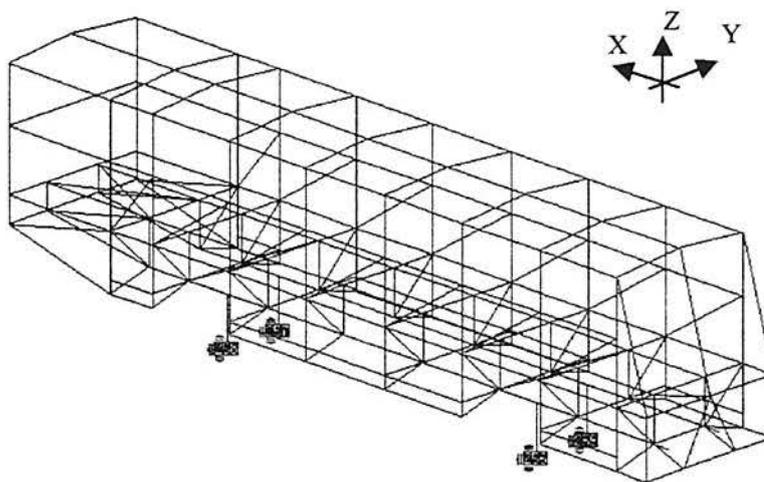


Figura (8.1) - Vinculação para o caso normal.
Os nós 255, 256, 257 e 258 representam os pneus.

O maior deslocamento apresentado no modelo é da ordem de 10 cm e ocorre na direção Z. O modelo tem um rebaixamento quase uniforme com uma pequena tendência mais acentuada na parte dianteira em função da forma como foi distribuída a massa do mesmo.

As figuras (8.2a) e (8.2b) ilustram a distribuição de coeficiente de risco para o caso do modelo de barras e modelo misto. Estes coeficientes são calculados com base na tensão de von Mises, que é obtida para até 8 pontos de verificação por nó do elemento. Este cálculo é feito num programa a parte que obtém tensões apenas para o caso estático.

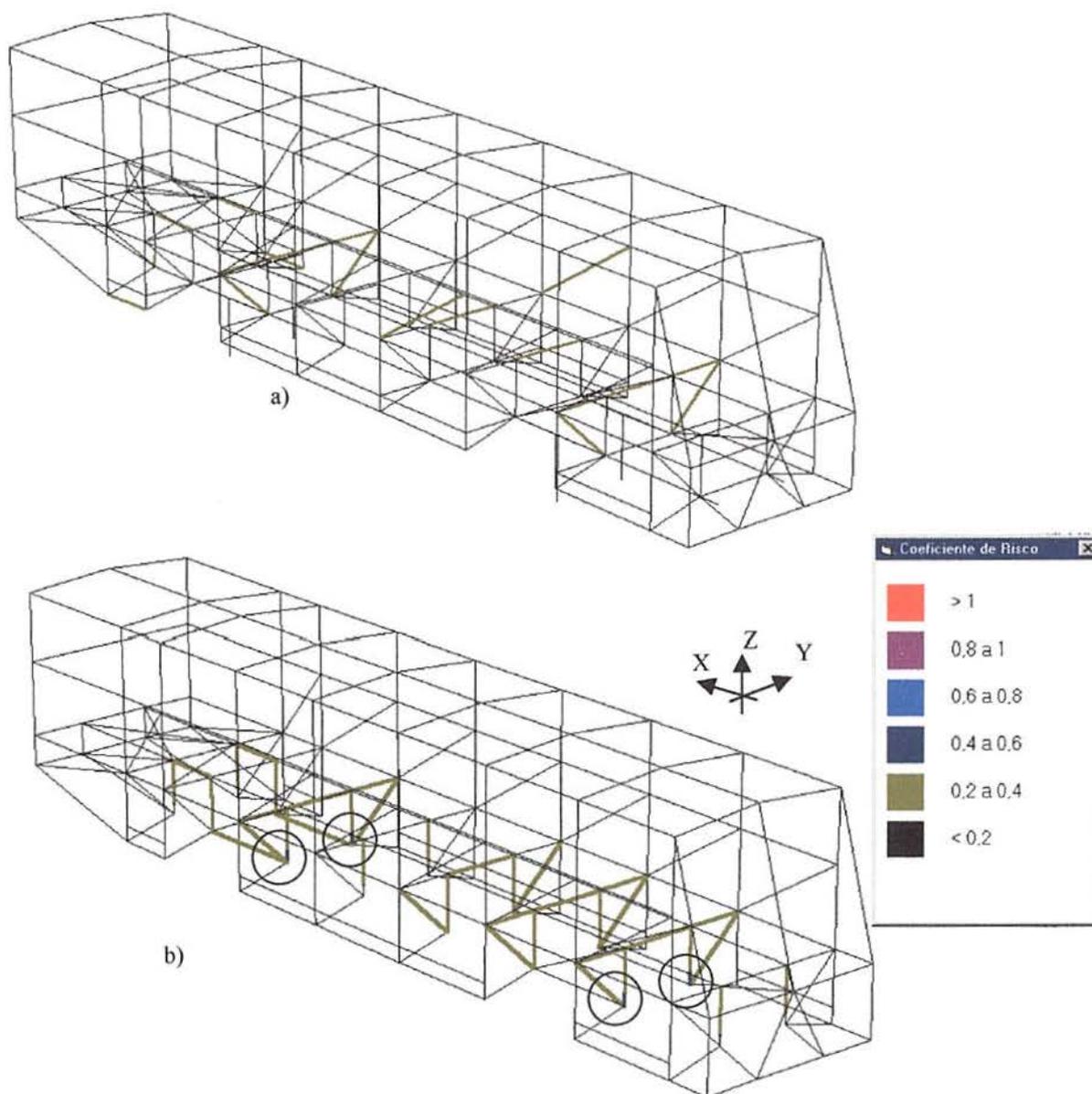


Figura (8.2) – Distribuição de coeficiente de risco – caso 1.
 a) Modelo de barras;
 b) Carroceria do modelo misto

Comparando-se os resultados apresentados nota-se que o conjunto de barras que se encontra numa faixa de risco entre 0,2 e 0,4 não é o mesmo. Porém estas pequenas diferenças não são significativas se forem encaradas do ponto de vista de dimensionamento ou verificação das barras. Como justificativas para elas pode-se citar que a forma como as massas concentradas; motor, tanque de combustível, transmissão; foram distribuídas no chassi não é a mesma para

os dois modelos devido às características próprias dos elementos. Efetivamente nota-se que as maiores diferenças ocorrem em barras ligadas ao chassi, porque nestas regiões tem-se uniões entre elementos de barra e casca, que geram perturbações localizadas nos resultados (anexo H). O caso máximo desta perturbação ocorre em 4 segmentos de barra, com risco na faixa 0,4 a 0,6, que estão destacados na figura (8.2b) envoltos em círculos. Desprezando-se estes valores, o risco máximo para o modelo misto vale 0,36 e para o modelo de barras vale 0,25. A influência do tipo de modelo empregado nos resultados correspondentes ao chassi pode ser observada na figura (8.3), que apresenta a distribuição da tensão de von Mises nesta estrutura.

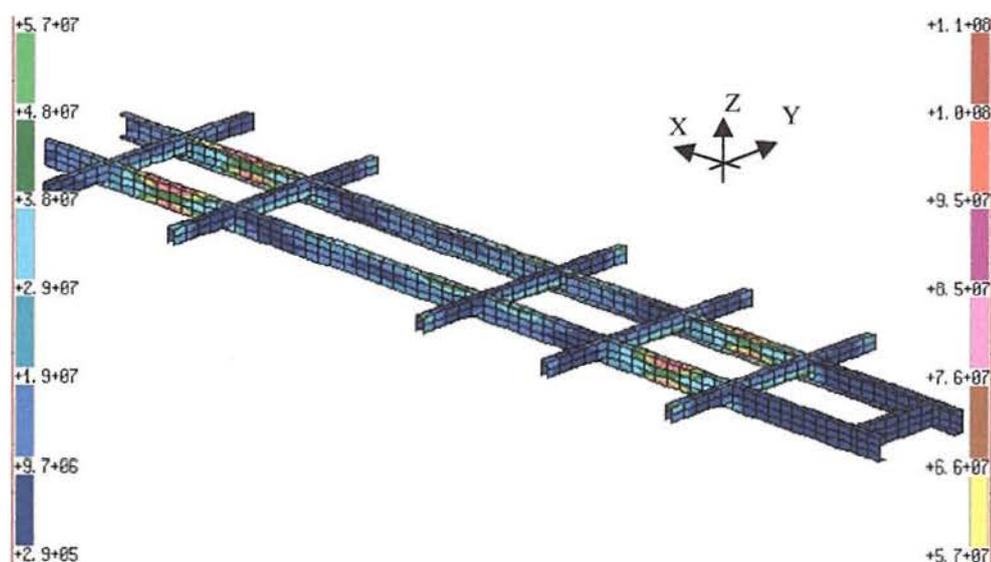


Figura (8.3) – Tensão de von Mises, em N/m^2 , para o chassi – caso 1.

Estas tensões são calculadas, considerando-se as tensões de membrana e as tensões devidas aos momentos fletores de placa, na superfície positiva da placa. Para obter os valores em MPa deve-se dividi-los por 10^6 . O coeficiente de risco equivalente é obtido dividindo-se estes valores por 350 MPa.

A maior parte do chassi está submetida a uma tensão inferior a 48 MPa (risco igual a 0,14). Comparando-se estes valores com os resultados da figura (8.2a), que indicam risco no chassi inferior a 0,2, conclui-se que não há diferenças significativas nos resultados apresentados pelos dois modelos. A exceção ocorre nos elementos próximos das regiões de ligação das molas, mas já se comentou que estes valores devem ser encarados com cautela.

Considerando-se apenas os resultados dos elementos de barra, o ônibus tem um coeficiente de segurança 4. Este valor indica que algumas barras poderiam ter a sua espessura de parede reduzida já que normalmente se trabalha na indústria com segurança 3 para este caso de carga. Os resultados obtidos por este modelo serão utilizados como valores médios na análise de fadiga que será posteriormente apresentada.

8.2 CASO DE TORÇÃO – REMOÇÃO DE UM APOIO DIANTEIRO

Considera-se o veículo com a mesma carga do item 8.1 porém apoiado sobre 3 rodas. De acordo com o item 1.6 removeu-se as restrições do nó 255 que está representado na figura (8.1). Com este carregamento o veículo é submetido a uma flexo-torção como ilustrado na figura (8.4). O objetivo deste tipo de carregamento é procurar simular, através de uma análise estática, o efeito provocado na carroceria quando uma roda cai num buraco.

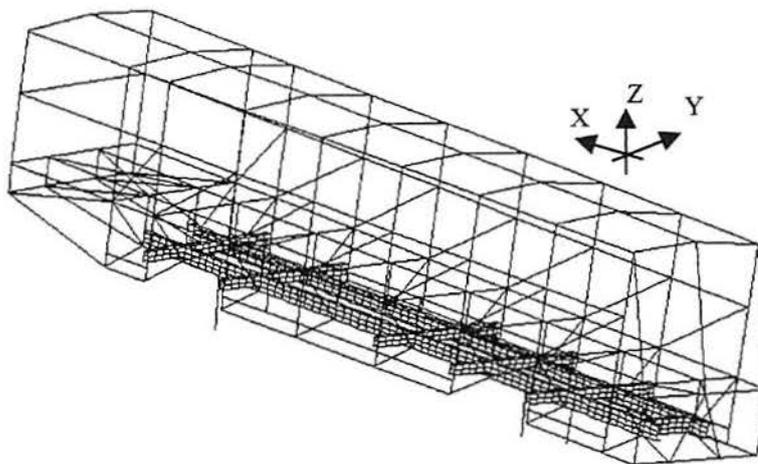


Figura (8.4) – Deformada do modelo misto – caso 2.

Observando-se os deslocamentos nota-se que o modelo misto apresenta deslocamentos menores, da ordem de 1,5%, que os apresentados no modelos de barras.

As figuras (8.5a) e (8.5b) ilustram a distribuição de coeficientes de risco na carroceria para o caso do modelo de barras e modelo misto. Comparando-se os resultados obtidos verifica-se que eles são bastante próximos. Novamente nas barras ligadas ao chassi se concentram as maiores diferenças entre os resultados apresentados. Comparando-se apenas os valores máximos, o modelo de barras indica a falha de 4 elementos na região do teto e o modelo misto indica a falha dos mesmos 4 mais um, que no modelo de barras está na faixa imediatamente inferior.

Considerando-se apenas o modelo de barras, o conjunto que falhou é representado pelos elementos: 193, 209, 225 e 241. As barras que têm coeficiente de risco entre 0,8 e 1 são representadas pelos elementos: 9, 25, 41, 57, 73, 89, 102, 105, 121, 156, 157, 162, 163, 164, 257, 273 e 339. Esta lista de elementos será utilizada para comparar os resultados fornecidos por este critério de cálculo com os fornecidos pela verificação de fadiga.

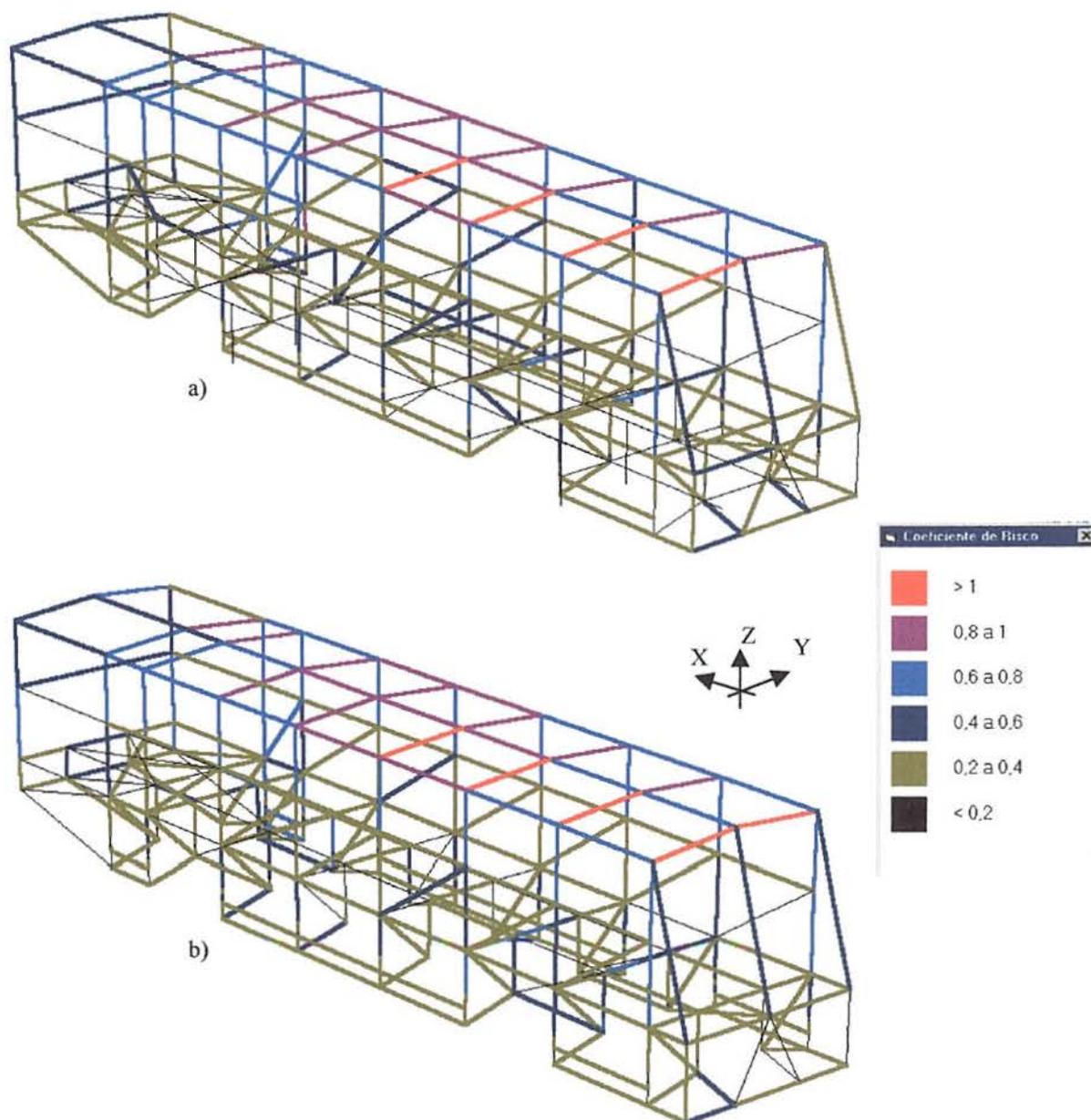


Figura (8.5) – Distribuição de coeficiente de risco – caso 2.

a) Modelo de barras.

b) Carroceria do modelo misto.

Pelo critério de cálculo adotado todas as barras com risco superior a 0,6 deveriam ter as suas seções transversais reforçadas. Como o modelo analisado tem condição de simetria, todas as barras simétricas às que apresentaram condições de risco, também devem ser alteradas.

A figura (8.6) ilustra a distribuição da tensão de von Mises no chassi. Verifica-se que as tensões são baixas com exceção das regiões dos apoios. O risco indicado pelo modelo de barras para o chassi é inferior a 0,2. Neste caso, valem as observações feitas no item anterior.

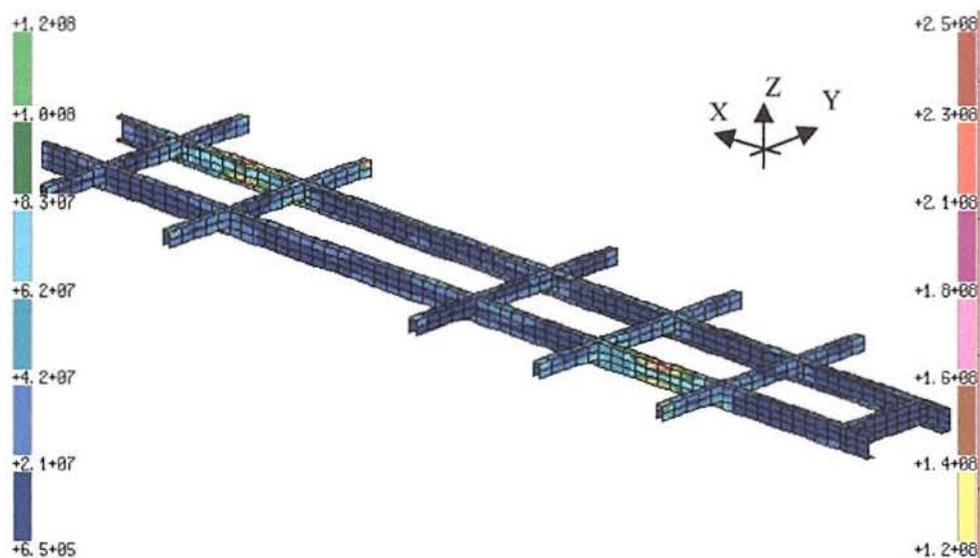


Figura (8.6) – Resultados para o chassi – caso 2.

8.3 CASO DE TORÇÃO – REMOÇÃO DE UM APOIO TRASEIRO

Considera-se o veículo com a mesma carga do item 8.1 porém apoiado sobre as duas rodas dianteiras e uma traseira, removeu-se as restrições do nó 257, que está representado na figura (8.1). Vale dizer que embora não se tenha recomendação teórica sobre este caso de carga, ele é normalmente considerado na indústria. A figura (8.7) ilustra a deformada do modelo para esta situação de carga.

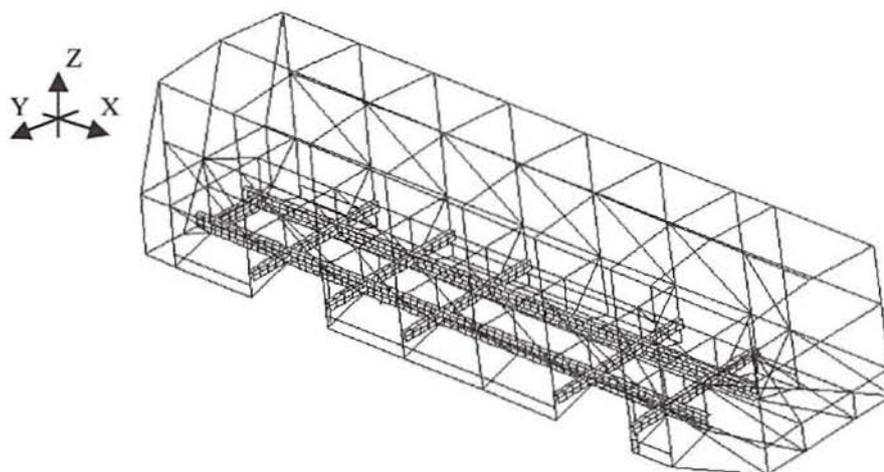


Figura (8.7) – Deformada do modelo – caso 3.

As figuras (8.8a) e (8.8b) ilustram a distribuição de coeficientes de risco na carroceria para o caso do modelo de barras e modelo misto respectivamente.

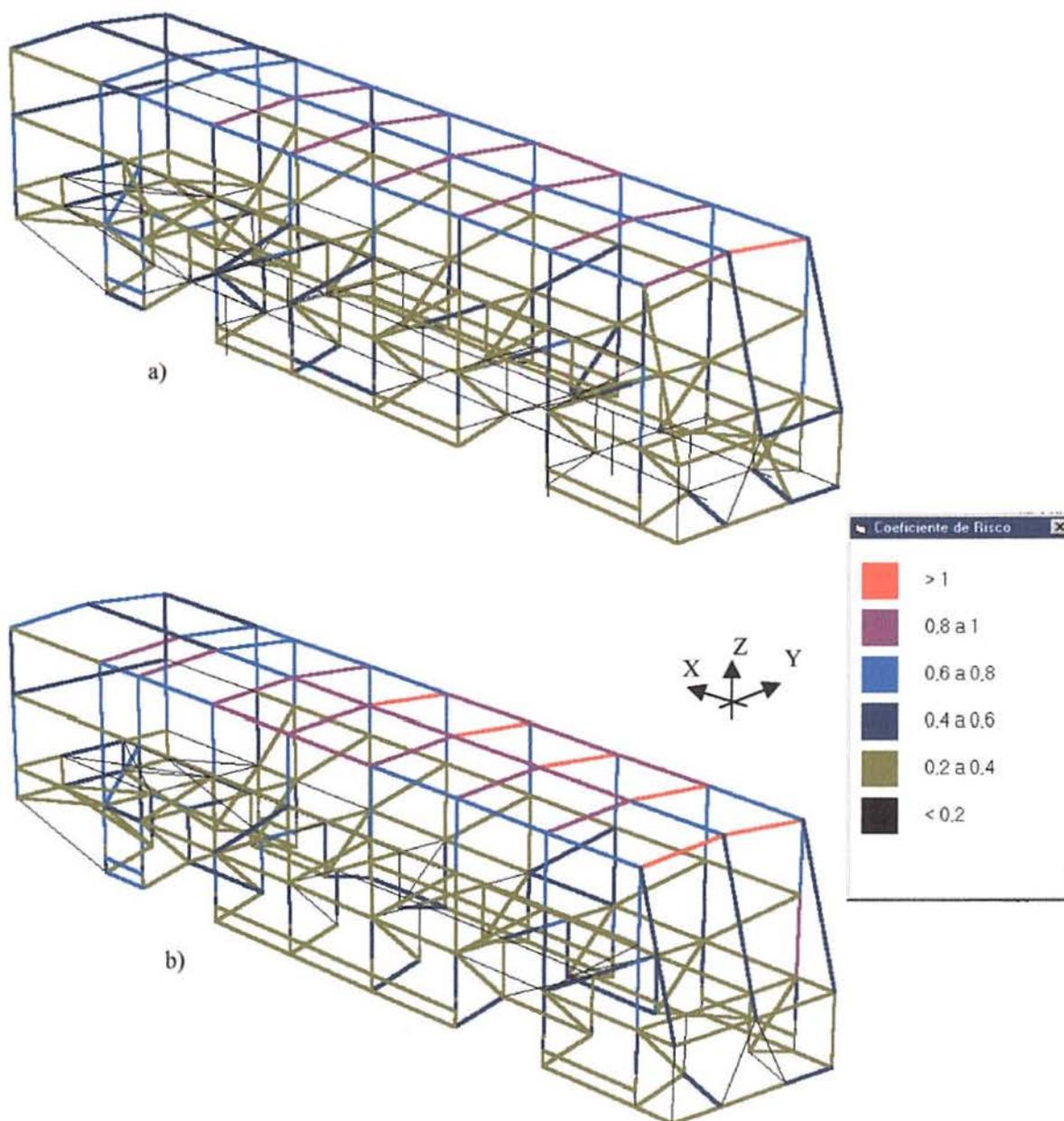


Figura (8.8) – Distribuição de coeficiente de risco – caso 3.
 a) Modelo de barras.
 b) Carroceria do modelo misto.

Pode-se notar que os resultados obtidos são bastante próximos. O modelo misto indicou falha em 6 elementos enquanto o modelo de barras indicou falha em apenas 1. Considerando-se que os demais elementos estão na faixa de risco imediatamente inferior, ambos resultados são válidos porque indicam que as seções dos elementos devem ser modificadas. Novamente nas barras ligadas ao chassi se concentram as maiores diferenças entre os resultados apresentados.

A figura (8.9) ilustra a distribuição da tensão de von Mises no chassi. Verifica-se que as tensões são baixas com exceção das regiões dos apoios. O risco indicado pelo modelo de barras para o chassi é inferior a 0,2. Neste caso, valem as observações feitas no item 8.1.

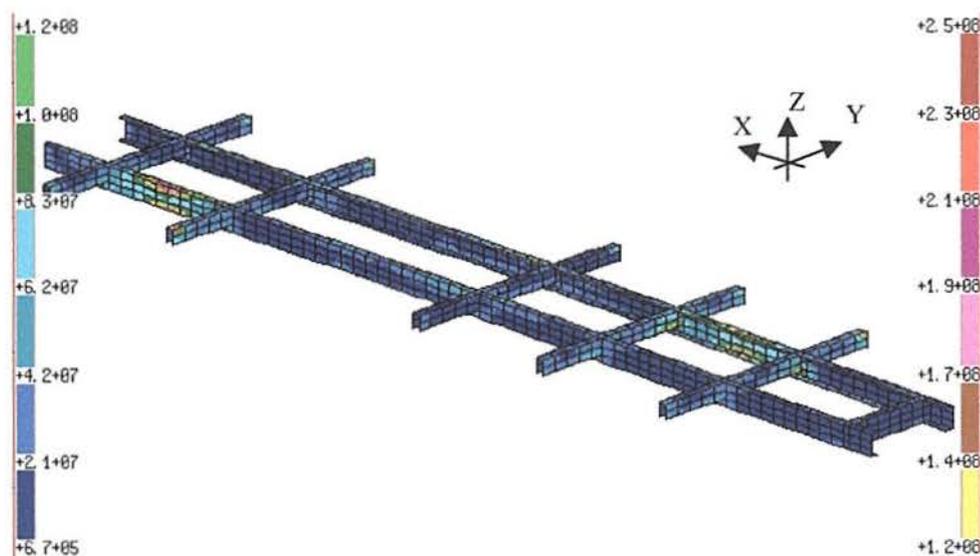


Figura (8.9) - Resultados para o chassi – caso 3.

Analisando-se apenas os resultados fornecidos pelo modelo de barras, apenas o elemento 9 falhou. Elementos com risco entre 0,8 e 1, e que não apresentaram situação de risco no caso anterior, são os elementos 155, 193, 209, 225 e 241.

8.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Com base nos resultados indicados no item 8.1 o ônibus apresenta condições de segurança podendo se reduzir as dimensões das seções transversais de diversas barras. Por outro lado os itens 8.2 e 8.3 indicam que diversas barras devem ter as suas seções transversais reforçadas. Com relação a estes resultados é importante lembrar que eles são obtidos através da tentativa de simular o veículo com uma roda caindo num buraco, logo, o procedimento adotado pode ter características conservativas. De qualquer modo, o processo de verificação aqui apresentado é o que costuma ser feito nas análises padrão de estruturas de ônibus. Vale a pena citar, que a partir destes resultados se poderia iniciar um processo de otimização da estrutura.

9. APLICAÇÕES DO PROGRAMA PARA ANÁLISE DE FADIGA

9.1 EXEMPLOS FUNCIONAIS

Apresenta-se a seguir alguns exemplos de pequeno porte que têm apenas a função de testar o correto funcionamento do código implementado.

9.1.1 Exemplo 1

Considera-se a estrutura com dupla simetria ilustrada na figura (9.1). Todas as barras que a formam têm seção transversal do tipo tubular retangular com dimensões 40x40x2,65 mm, e suas propriedades são $A = 3,96 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $I_z = I_y = 9,25 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ e $I_x = 1,38 \times 10^{-7} \text{ m}^4$. Estas barras são feitas de aço com $E = 2,06 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $G = 7,92 \times 10^4 \text{ MPa}$, $\gamma = 76977 \text{ N/m}^3$, $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 400 \text{ MPa}$. Todas as barras têm $\sigma_{nf} = 112 \text{ MPa}$. Os elementos de mola têm rigidez $K_{mola} = 2000 \text{ N/m}$, o que corresponde a uma área fictícia igual a $7,767 \times 10^{-8} \text{ m}^2$. Para representar os momentos de inércia destes elementos deve-se usar valores baixos, por exemplo $I_z = I_y = I_x = 1 \times 10^{-15} \text{ m}^4$, no entanto, conforme os valores adotados, pode-se ter efeitos numéricos desagradáveis (anexo **K**). Os amortecedores, que são representados pelos elementos de mola, têm constante de amortecimento $C = 2000 \text{ Ns/m}$.

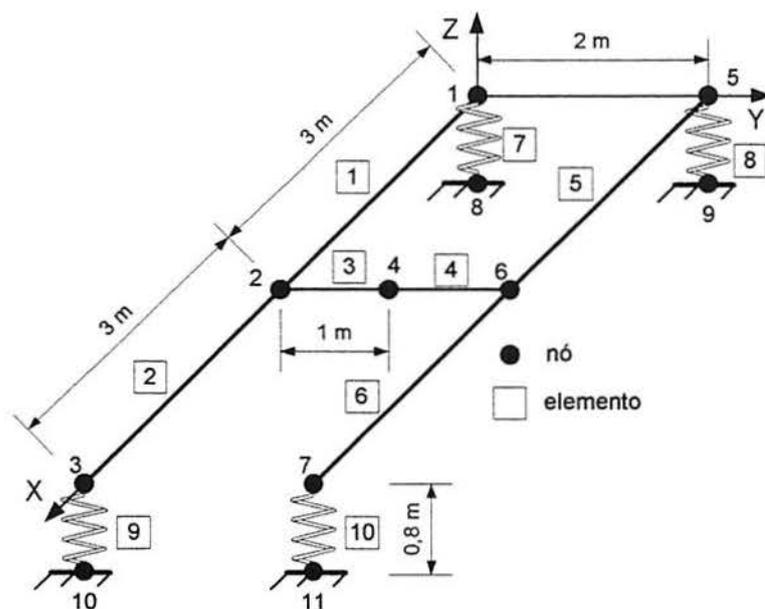


Figura (9.1) – Esquema da estrutura do exemplo 1.

As tensões médias são obtidas por uma análise estática do problema considerando apenas cargas nodais, na direção Z, de -250 N, -500 N e -250 N aplicadas aos nós 2, 4 e 6. Todos os graus de liberdade dos nós 8, 9, 10 e 11 são considerados fixos.

Para a análise de autovetores considera-se a distribuição de massa usual nos elementos e mais massas concentradas de 200 kg, 400 kg e 200 kg aplicadas aos nós 2, 4 e 6.

Determinaram-se 66 autovetores através da rotina **DEVCSB** (anexo J) dos quais os 3 primeiros são espúrios e os próximos 24 correspondem aos graus de liberdade fixos (o índice de performance da rotina foi de 0,023, ver anexo J). Os 6 primeiros autovetores, dos 39 restantes, estão ilustrados na figura (9.2). A frequência natural mais alta vale $\omega_{39} = 4495,1$ rad/s, e a mais próxima do limite superior do intervalo de integração é a $\omega_{15} = 321,2$ rad/s.

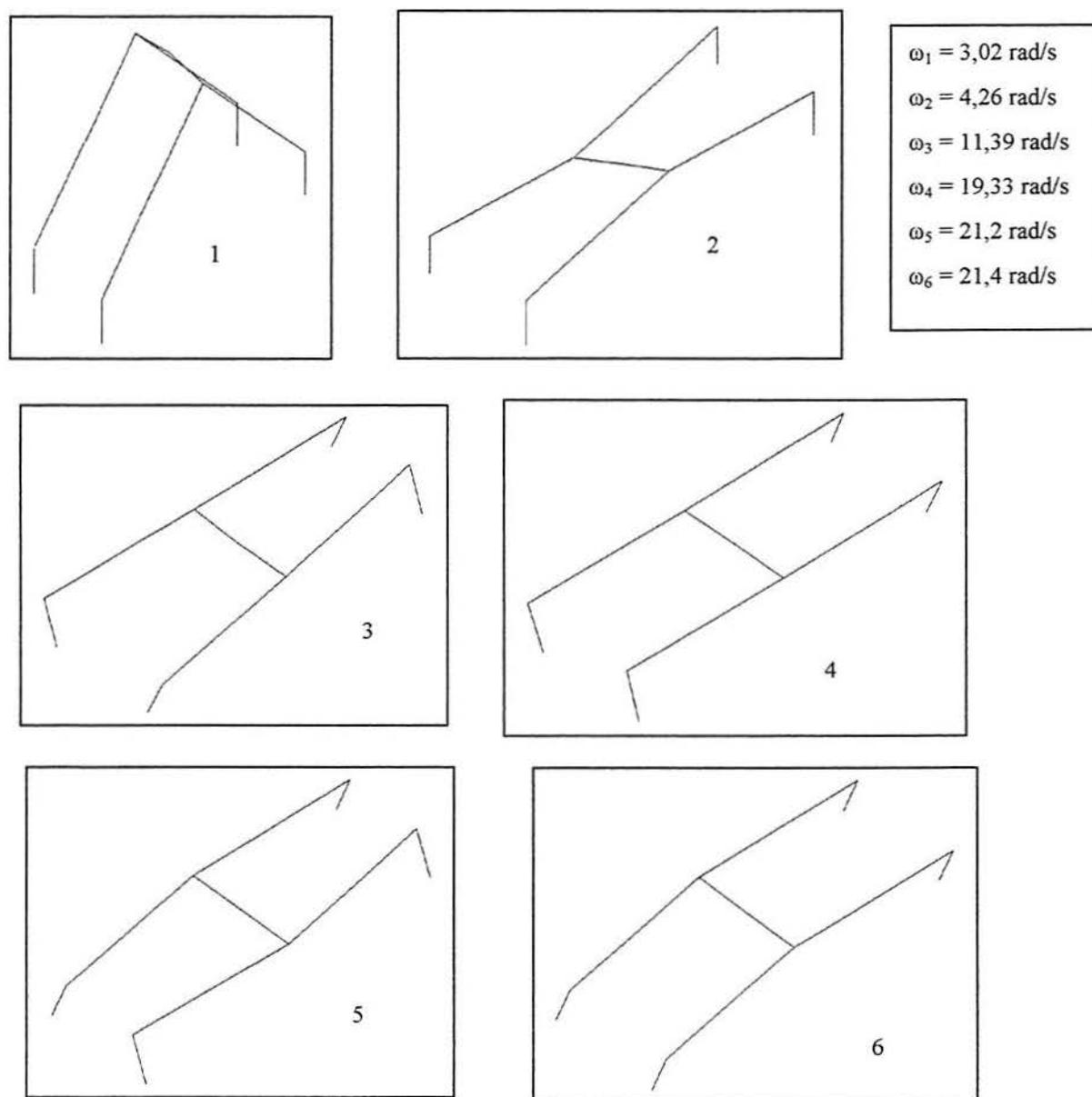


Figura (9.2) – Modos de vibração numerados e representados em ordem crescente.

Da análise estática obtém-se os deslocamentos médios na direção Z; $dz_1 = dz_3 = dz_5 = dz_7 = -0,0125$ m, $dz_2 = dz_6 = -0,1306$ m e $dz_4 = -0,1349$ m. Um dos nós com maiores solicitações é o nó 2 do elemento 1 com momento $M_z = 750$ Nm.

Para a análise espectral, o intervalo de frequências de interesse é $(\omega_{\min}, 300)$ rad/s e são usados 50 pontos de integração neste intervalo. O espectro de potência das irregularidades é definido com $w = 2,5$ e $c = 20 \times 10^{-8}$. A velocidade do modelo é de 80 km/h. Adota-se para coeficiente de amortecimento $\xi = 0,05$ para todos os modos de vibração. A matriz de amortecimento estrutural é montada fazendo-se $a_m = 0,268$, valor este obtido substituindo-se ω_1 , ω_7 e ξ na (9.1) (CLOUGH & PENZIEN – 1993).

$$\begin{pmatrix} a_m \\ a_k \end{pmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_7 + \omega_1} \begin{pmatrix} \omega_7 \omega_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot 0,05}{23,736 + 3,02} \begin{pmatrix} 23,736 \cdot 3,02 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,268 \\ 3,737 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

A análise de fadiga é feita sobre a curva σ -N com dano contínuo. A vida útil, em uso contínuo, desejada é de 3 anos.

Para testar a convergência do método de solução modal verificou-se as variações dos resultados em desvio padrão dos deslocamentos e solicitações. A tabela (9.1) apresenta a variação do deslocamento na direção Z.

Tabela (9.1) – Variações do desvio padrão dos deslocamentos d_z [m] em função do número de autovetores usado na solução do teste 1.

Nº autov	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6	nó 7
1	0,01147	0,02039	0,01147	0,02063	0,01147	0,02039	0,01147
5	0,01149	0,02026	0,01149	0,02063	0,01149	0,02026	0,01149
10	0,01147	0,02039	0,01147	0,02063	0,01147	0,02039	0,01147
15	0,01149	0,02052	0,01149	0,02077	0,01149	0,02052	0,01149
20	0,01149	0,02052	0,01149	0,02077	0,01149	0,02052	0,01149
39	0,01149	0,02052	0,01149	0,02077	0,01149	0,02052	0,01149

Nota-se que a partir da solução com 15 autovetores não há mais alterações nos valores dos desvios dos deslocamentos d_z . Comparando-se a solução com 5 autovetores e a com 15, tem-se que a maior diferença relativa entre elas é de 1,26%, o que indica que a solução com 5 autovetores já é uma boa aproximação segundo este critério.

As variações dos desvios padrões das solicitações do elemento 1, nó 2 estão ilustradas na tabela (9.2) (os mesmos valores encontram-se nos nós dos elementos 2, 5 e 6 em função da

simetria do problema). Novamente, a partir da solução com 15 autovetores não há mais alterações significativas nos valores obtidos. Comparando-se a solução com 5 autovetores e a com 15 tem-se uma diferença relativa de 4,2% na solicitação M_z .

Tabela (9.2) - Variações do desvio padrão das solicitações; para o elemento 1, nó 2; em função do número de autovetores usado na solução.

F_x , F_y e F_z em N; M_x , M_y e M_z em Nm.

Nº autov	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
1	$1,592 \times 10^{-5}$	34,9	$7,387 \times 10^{-6}$	$3,071 \times 10^{-4}$	$2,22 \times 10^{-5}$	104,7
5	$1,566 \times 10^{-5}$	34,32	$1,764 \times 10^{-6}$	$1,239 \times 10^{-5}$	$5,292 \times 10^{-6}$	103
10	$1,592 \times 10^{-5}$	34,9	$7,387 \times 10^{-6}$	$3,071 \times 10^{-4}$	$2,22 \times 10^{-5}$	104,7
15	$1,636 \times 10^{-5}$	35,79	$7,394 \times 10^{-6}$	$2,978 \times 10^{-4}$	$2,221 \times 10^{-5}$	107,5
20	$1,636 \times 10^{-5}$	35,83	$7,394 \times 10^{-6}$	$2,975 \times 10^{-4}$	$2,221 \times 10^{-5}$	107,5
39	$1,636 \times 10^{-5}$	35,83	$7,394 \times 10^{-6}$	$2,975 \times 10^{-4}$	$2,221 \times 10^{-5}$	107,5

O quadro (9.1) ilustra as variações das características das distribuições da tensão normal para o elemento 1, nó 2, pontos de verificação 1 e 6.

Quadro (9.1) - Variação dos momentos da distribuição da tensão normal para o elemento 1; nó 2; pontos de verificação 1 e 6.

Neste quadro M_0 , M_2 e M_4 são os momentos das distribuições, Eps é ϵ , $Freq.0$ é a frequência de ultrapassagem em zero, $Freq.max$ é a frequência de pico e $Dist$ é o fator de distorção.

1 Autovetor							
Ponto	M_0	M_2	M_4	Eps	$Freq.0$	$Freq.max$	$Dist.$
1	0.51E+15	0.21E+17	0.32E+21	1.00	1.03	19.43	18.87
6	0.23E+02	0.89E+04	0.16E+09	0.99	3.13	21.04	6.72
5 Autovetores							
Ponto	M_0	M_2	M_4	Eps	$Freq.0$	$Freq.max$	$Dist.$
1	0.50E+15	0.14E+17	0.15E+21	1.00	0.85	16.66	19.62
6	0.12E+01	0.35E+02	0.38E+06	1.00	0.85	16.66	19.62
10 Autovetores							
Ponto	M_0	M_2	M_4	Eps	$Freq.0$	$Freq.max$	$Dist.$
1	0.51E+15	0.21E+17	0.32E+21	1.00	1.03	19.43	18.87
6	0.23E+02	0.89E+04	0.16E+09	0.99	3.13	21.04	6.72
15 Autovetores							
Ponto	M_0	M_2	M_4	Eps	$Freq.0$	$Freq.max$	$Dist.$
1	0.54E+15	0.24E+17	0.31E+21	1.00	1.05	18.39	17.49
6	0.23E+02	0.88E+04	0.16E+09	0.99	3.10	21.20	6.83
20 Autovetores							
Ponto	M_0	M_2	M_4	Eps	$Freq.0$	$Freq.max$	$Dist.$
1	0.54E+15	0.19E+17	0.14E+21	1.00	0.95	13.64	14.34
6	0.23E+02	0.88E+04	0.16E+09	0.99	3.11	21.21	6.83
39 Autovetores							
Ponto	M_0	M_2	M_4	Eps	$Freq.0$	$Freq.max$	$Dist.$
1	0.54E+15	0.19E+17	0.14E+21	1.00	0.95	13.64	14.34
6	0.23E+02	0.88E+04	0.16E+09	0.99	3.11	21.21	6.83

A partir da solução com 15 autovetores o momento M_0 não sofre alteração de valor, mas os momentos M_2 e M_4 somente têm os seus valores estabilizados com 20 autovetores.

Os resultados obtidos pela análise de fadiga indicam que nenhuma barra sofre falha. A tabela (9.3) faz um resumo do relatório de falha considerando o cálculo do dano conforme o EUROCODE 3, ver item 5.6.4. Vale salientar que os valores obtidos para os demais processos são iguais aos da tabela. Isto ocorre porque as tensões tangenciais são baixas neste exemplo.

Tabela (9.3) – Influência do número de autovetores empregados nos principais resultados da análise de fadiga.

Os valores apresentados nesta tabela correspondem ao ponto com dano máximo. A vida útil é fornecida em anos de uso contínuo.

Nº autov	Vida Útil	Dano Máximo	Elemento	Nó	Ponto
5	3,2	0,31	1	2	3
15	2	0,5	1	2	4
39	2,2	0,45	1	2	3

No entanto, se considerarmos como critério de falha o não atendimento da vida útil desejada, tem-se outros resultados. A vida útil obtida pela solução com 5 autovetores indica que a estrutura seria aprovada. Porém, as soluções com 15 e 39 autovetores indicam que a estrutura não atende ao critério da vida útil. A diferença relativa, entre estas soluções, com relação à vida útil é de 10%. Estes resultados mostram que não basta controlarmos os desvios padrões dos deslocamentos e solicitações para dizermos que uma solução é uma boa aproximação. Com finalidade de ilustrar os resultados obtidos, a figura (9.3) mostra a distribuição do coeficiente de risco na estrutura correspondente à solução com 39 autovetores.

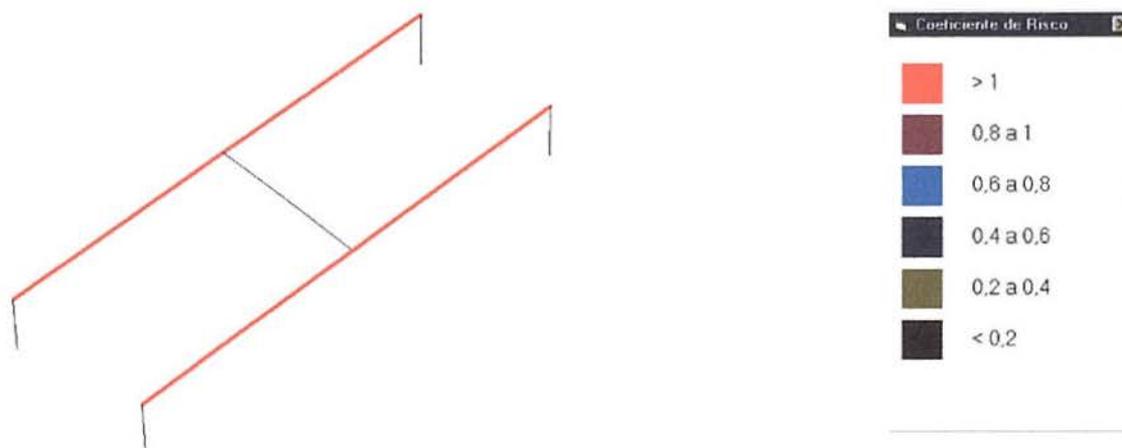


Figura (9.3) – Distribuição do coeficiente de risco no modelo.

O valor real do coeficiente de risco é $3/2,2 = 1,36$.

9.1.2 Exemplo 2

Considera-se a estrutura com simetria simples ilustrada na figura (9.4). Todas as barras que a formam têm seção do tipo tubular retangular com dimensões 40x40x2,65 mm. As propriedades da seção e as constantes do material destas barras estão fornecidas no item 9.1.1. As molas têm rigidez $K_{\text{mola}} = 2000 \text{ N/m}$, o que corresponde a uma área fictícia de $7,767 \times 10^{-8} \text{ m}^2$. Para os momentos de inércia das molas usa-se $I_z = I_y = I_x = 1 \times 10^{-15} \text{ m}^4$. Os amortecedores têm constante de amortecimento $C = 2000 \text{ Ns/m}$.

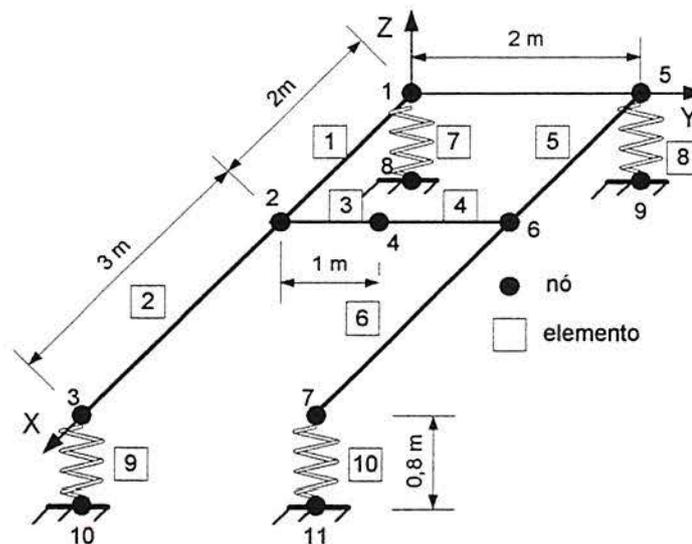


Figura (9.4) - Esquema da estrutura do exemplo 2.

As tensões médias são obtidas de uma análise estática considerando apenas cargas nodais, na direção Z, de -250 N, -500 N e -250 N aplicadas nos nós 2, 4 e 6 respectivamente. Todos os graus de liberdade dos nós 8, 9, 10 e 11 são considerados fixos. Para a análise de autovetores considera-se a distribuição de massa usual nos elementos e massas concentradas de 200 kg, 400 kg, 200 kg, 20 kg e 20 kg aplicadas aos nós 2, 4, 6, 3 e 7 respectivamente.

Da análise de autovetores, obtiveram-se 66 modos de vibração dos quais os 3 primeiros são espúrios e os próximos 24 correspondem aos graus de liberdade fixos, logo restam 39 modos de vibração úteis. Para as frequências naturais obteve-se $\omega_1 = 3,94 \text{ rad/s}$ e $\omega_{39} = 4496,7 \text{ rad/s}$. A frequência natural mais próxima do limite superior do intervalo de integração (300 rad/s) é a $\omega_{13} = 312,5 \text{ rad/s}$.

Da análise estática obtém-se os deslocamentos médios na direção Z; $dz_1 = dz_5 = -0,015 \text{ m}$, $dz_3 = dz_7 = -0,01 \text{ m}$, $dz_2 = dz_6 = -0,076 \text{ m}$ e $dz_4 = -0,08 \text{ m}$. Um dos nós com maiores solicitações é o nó 2 do elemento 1; $F_y = -300 \text{ N}$ e $M_z = 600 \text{ Nm}$.

Para a análise espectral, o intervalo de frequências de interesse é $(\omega_{\min}, 300)$ rad/s e são utilizados 50 pontos de integração neste intervalo. O espectro de potência das irregularidades é definido com $w = 2,5$ e $c = 5 \times 10^{-8}$. A velocidade do modelo é de 100 km/h. Adota-se para coeficiente de amortecimento $\xi = 0,05$ para todos os modos de vibração. A matriz de amortecimento estrutural é montada fazendo-se $a_m = 0,3936$, valor este obtido substituindo-se ω_1 , ω_{39} e ξ na (9.1). A análise de fadiga é feita sobre a curva σ -N com dano contínuo. A vida útil desejada em uso contínuo é de 3 anos.

A convergência do método de solução modal está apresentada nas tabelas (9.4) e (9.5). A primeira ilustra as variações do desvio padrão dos deslocamentos d_z em função do número de autovetores, e a segunda ilustra as variações do desvio padrão das solicitações do elemento 1, nó 2.

Tabela (9.4) - Variações do desvio padrão dos deslocamentos d_z [m] em função do número de autovetores usado na solução do exemplo 2.

Nº autov	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6	nó 7
1	0,00645	0,01592	0,00609	0,01669	0,00645	0,01592	0,00609
5	0,006433	0,01602	0,006076	0,0167	0,006433	0,01602	0,006076
10	0,006505	0,01621	0,005942	0,01688	0,006505	0,01621	0,005942
13	0,00625	0,01663	0,006009	0,01731	0,00625	0,01663	0,006009
20	0,00625	0,01663	0,006009	0,01731	0,00625	0,01663	0,006009
39	0,00625	0,01663	0,006009	0,01731	0,00625	0,01663	0,006009

Tabela (9.5) - Variações do desvio padrão das solicitações; para o elemento 1, nó 2; em função do número de autovetores usado na solução do exemplo 2.

F_x , F_y e F_z em N; M_x , M_y e M_z em Nm.

Nº autov	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
1	$1,55 \times 10^{-5}$	58,71	$2,489 \times 10^{-6}$	$2,052 \times 10^{-4}$	$4,977 \times 10^{-5}$	117,4
5	$1,568 \times 10^{-5}$	59,5	$5,836 \times 10^{-6}$	$3,094 \times 10^{-5}$	$1,168 \times 10^{-6}$	119
10	$1,538 \times 10^{-5}$	60,43	$5,513 \times 10^{-6}$	$2,264 \times 10^{-4}$	$1,103 \times 10^{-5}$	120,9
13	$1,656 \times 10^{-5}$	62,49	$5,88 \times 10^{-6}$	$2,411 \times 10^{-4}$	$1,176 \times 10^{-5}$	125,1
20	$1,657 \times 10^{-5}$	62,49	$5,88 \times 10^{-6}$	$2,411 \times 10^{-4}$	$1,176 \times 10^{-5}$	125,1
39	$1,656 \times 10^{-5}$	62,59	$5,88 \times 10^{-6}$	$2,411 \times 10^{-4}$	$1,177 \times 10^{-5}$	125,2

Verifica-se que a partir de 13 autovetores o processo de solução se estabiliza. Comparando-se a solução com 10 autovetores contra a de 13 autovetores tem-se uma diferença relativa no desvio padrão dos deslocamentos de aproximadamente 2,5%. Considerando o desvio padrão

das solicitações mais significativas a diferença relativa entre estas soluções fica em 3,2%. As diferenças entre as soluções com 13 e 39 autovetores são mínimas.

O quadro (9.2) ilustra as variações das características das distribuições da tensão normal para o elemento 1; nó 2; pontos de verificação 1 e 6. Nota-se que embora o momento M_0 apresente o mesmo valor a partir da solução com 13 autovetores, o mesmo não ocorre com os momentos M_2 e M_4 . Tomando-se como base para comparação os resultados do ponto 1, e comparando-se a solução com 13 autovetores contra a de 39 autovetores tem-se uma diferença relativa de 4,5% no momento M_2 , 38,5% no M_4 , 2,3% na Freq.0 e 14,6% na Freq.max. Destes valores, os que têm influência direta na análise de fadiga são o momento M_0 e as frequências de ultrapassagem.

Quadro (9.2) – Variações das características das distribuições da tensão normal para o elemento 1; nó 2; pontos de verificação 1 e 6.

1 Autovetor							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.64E+15	0.16E+17	0.10E+21	1.00	0.79	12.72	16.15
6	0.11E+01	0.26E+02	0.17E+06	1.00	0.79	12.72	16.15
5 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.66E+15	0.22E+17	0.23E+21	1.00	0.91	16.48	18.03
6	0.63E+01	0.20E+04	0.30E+08	0.99	2.86	19.27	6.74
10 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.68E+15	0.20E+17	0.13E+21	1.00	0.85	13.09	15.33
6	0.56E+01	0.14E+04	0.25E+08	0.99	2.54	21.09	8.30
13 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.73E+15	0.23E+17	0.18E+21	1.00	0.89	14.28	16.02
6	0.64E+01	0.15E+04	0.25E+08	0.99	2.42	20.73	8.57
20 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.73E+15	0.22E+17	0.14E+21	1.00	0.88	12.71	14.51
6	0.64E+01	0.15E+04	0.25E+08	0.99	2.42	20.72	8.57
39 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.73E+15	0.22E+17	0.13E+21	1.00	0.87	12.46	14.36
6	0.64E+01	0.15E+04	0.25E+08	0.99	2.42	20.72	8.57

Da análise de fadiga verifica-se que nenhuma das barras sofrem falha. Os resultados obtidos por todos os processos de cálculo são iguais porque as tensões tangenciais não são significativas. A tabela (9.6) apresenta um resumo do relatório de falha correspondente ao ponto com pior dano considerando o método de cálculo do EUROCODE 3. Nota-se que as soluções com 13 e 39 autovetores obtém praticamente o mesmo resultado para a vida útil (os resultados somente são iguais em função da formatação para impressão do número).

Tabela (9.6) - Influência do número de autovetores empregados nos principais resultados da análise de fadiga do exemplo 2.

Os valores apresentados nesta tabela correspondem ao ponto com dano máximo. A vida útil é fornecida em anos de uso contínuo.

Nº autov	Vida Útil	Dano Máximo	Elemento	Nó	Ponto
1	3,4	0,3	2	2	4
5	2,7	0,37	1	2	3
10	2,6	0,38	1	2	3
13	2,1	0,49	1	2	3
39	2,1	0,48	1	2	3

Considerando-se como critério de falha o não atendimento da vida útil desejada, que no caso é de 3 anos, verifica-se que todas as soluções apresentam o mesmo tipo de resposta com exceção da que usa apenas um autovetor. Com finalidade de ilustrar os resultados obtidos, a figura (9.5) mostra a distribuição do coeficiente de risco na estrutura correspondente a solução com 39 autovetores (o valor real do coeficiente de risco é $3/2,1 = 1,43$).

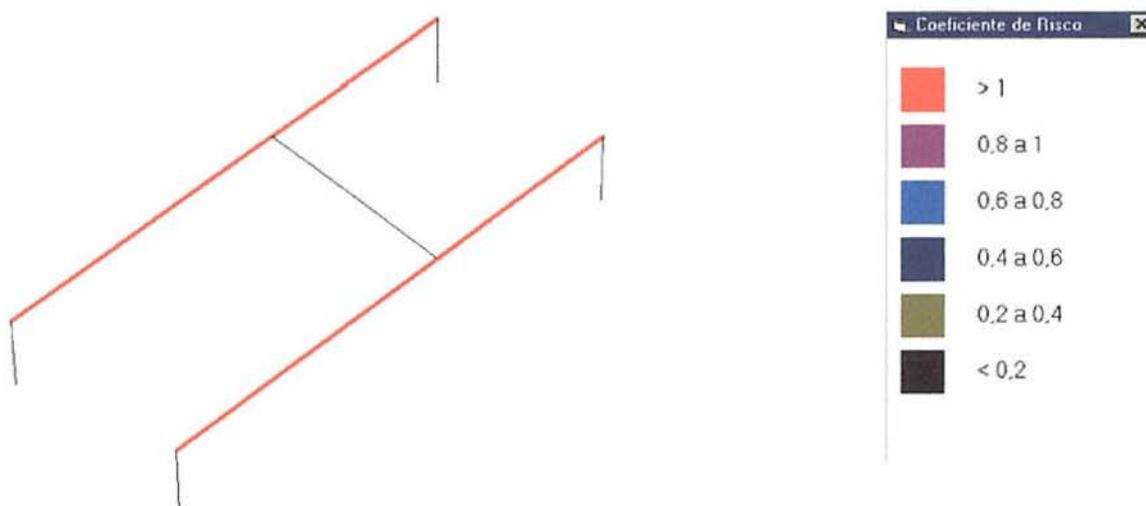


Figura (9.5) - Distribuição do coeficiente de risco no modelo do exemplo 2.

9.1.3 Exemplo 3

Considera-se a estrutura espacial com simetria simples mostrada na figura (9.6). Todas as barras que a formam têm seção do tipo tubular retangular com dimensões 40x40x2,65 mm. As propriedades da seção e as constantes do material destas barras estão apresentadas no item 9.1.1. As molas têm rigidez $K_{mola} = 2000$ N/m, o que corresponde a uma área fictícia de $7,767 \times 10^{-8}$ m². Para os momentos de inércia das molas usa-se $I_z = I_y = I_x = 1 \times 10^{-15}$ m⁴. Os amortecedores têm constante de amortecimento $C = 2000$ Ns/m.

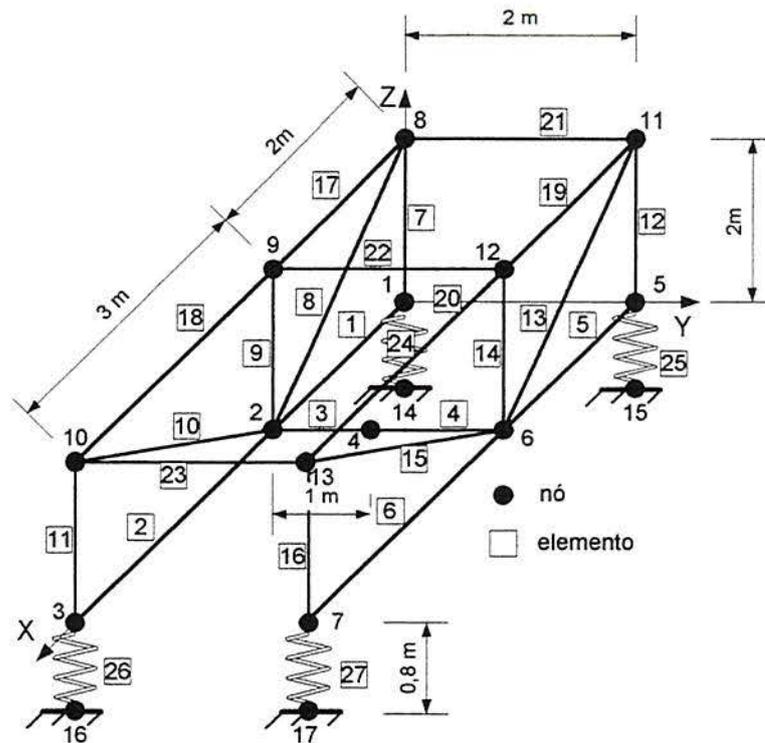


Figura (9.6) - Esquema da estrutura do exemplo 3.

As tensões médias são obtidas de uma análise estática considerando cargas de peso próprio e cargas nodais, na direção Z , de -250 N, -500 N e -250 N aplicadas aos nós 2, 4 e 6. Além disso, nos nós 8 a 13 também se aplica uma carga de -50 N na direção Z . Os graus de liberdade dos nós 8, 9, 10 e 11 são fixos. Para a análise de autovetores adota-se a distribuição de massa usual nos elementos e massas concentradas de 200 kg, 400 kg e 200 kg aplicadas aos nós 2, 4 e 6. Além disso, nos nós 3, 7, 10 e 13 aplica-se uma massa concentrada de 20 kg.

Da análise de autovetores, obtiveram-se 75 modos de vibração úteis. Para as frequências naturais obteve-se $\omega_1 = 8,35$ rad/s e $\omega_{75} = 4493,5$ rad/s. A frequência natural mais próxima do limite superior do intervalo de integração é a $\omega_{14} = 328,3$ rad/s.

Da análise estática obtém-se os deslocamentos médios na direção Z ; $dz_1 = -0,0399$ m, $dz_2 = -0,0372$ m, $dz_3 = -0,033$ m, $dz_4 = -0,0391$ m, $dz_8 = -0,0399$ m, $dz_9 = -0,0372$ m e $dz_{10} = -0,0328$ m. O restante dos nós apresentam resultados iguais aos seus correspondentes nós simétricos. O maior momento fletor é $M_z = 161,3$ Nm e ocorre no elemento 3, nó 4.

Para a análise espectral, o intervalo de frequências de interesse é $(\omega_{\min}, 300)$ rad/s e são utilizados 50 pontos de integração neste intervalo. O espectro de potência das irregularidades é definido com $w = 2,5$ e $c = 5 \times 10^{-8}$. A velocidade do modelo é de 100 km/h. Adota-se para coeficiente de amortecimento $\xi = 0,05$ para todos os modos de vibração. A matriz de amortecimento estrutural é montada fazendo-se $a_m = 0,8334$, valor este obtido

substituindo-se ω_1 , ω_{75} e ξ na (9.1). A análise de fadiga é feita sobre a curva σ -N com dano contínuo. A vida útil desejada em uso contínuo é de 3 anos.

A convergência do método de solução modal está ilustrada na tabela (9.7) através das variações do desvio padrão dos deslocamentos d_z em função do número de autovetores. Nota-se que, a partir de 30 autovetores, praticamente não há mais alteração nos valores tabelados. Comparando-se a solução com 14 autovetores contra a de 75 autovetores tem-se uma diferença relativa nos resultados de aproximadamente 0,032%.

Tabela (9.7) - Variações do desvio padrão dos deslocamentos d_z [m] em função do número de autovetores usado na solução do exemplo 3.

Os correspondentes nós simétricos apresentaram os mesmos valores de deslocamentos tabelados.

N Autov.	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 8	Nó 9	Nó 10
5	0,006402	0,006327	0,006217	0,006362	0,006403	0,006327	0,006217
10	0,006374	0,006308	0,006211	0,006424	0,006375	0,006308	0,006211
14	0,006374	0,006307	0,006211	0,006424	0,006374	0,006307	0,006211
30	0,006373	0,006308	0,00621	0,006425	0,006373	0,006308	0,006211
50	0,006373	0,006308	0,00621	0,006425	0,006373	0,006308	0,006211
75	0,006372	0,006308	0,00621	0,006425	0,006373	0,006308	0,006211

A tabela (9.8) ilustra as variações do desvio padrão das solicitações para o elemento 3, nó 4. Nota-se que a partir de 50 autovetores as alterações nos valores são mínimas. Comparando-se as soluções com 14 e 75 autovetores tem-se uma diferença relativa máxima de 0,2%. Logo, por estes critérios a solução com 14 autovetores é uma boa aproximação.

Tabela (9.8) - Variações do desvio padrão das solicitações do elemento 3, nó 4] em função do número de autovetores usado na solução do exemplo 3.

F_x , F_y e F_z em N; M_x , M_y e M_z em Nm.

N. Autovetores	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
5	9,182	38,75	4,57	0,3471	0,7278	23,72
10	19,58	84,26	16,36	0,3799	9,052	51,48
14	19,65	84,26	16,66	0,3857	9,096	51,48
30	19,65	84,4	16,68	0,3895	9,102	51,55
50	19,67	84,39	16,67	0,3892	9,097	51,55
75	19,67	84,42	16,67	0,3888	9,097	51,57

O quadro (9.3) apresenta as variações das características das distribuições da tensão normal para o elemento 3, nó 4. Nota-se que o momento M_0 fica estável a partir da solução com 14 autovetores. Comparando-se as soluções com 14 e 75 autovetores tem-se uma diferença relativa de 0,22% na frequência de ultrapassagem em zero e 1,37% na frequência de pico. Estes valores confirmam que a solução com 14 autovetores é uma boa aproximação.

Quadro (9.3) - Variações das características das distribuições da tensão normal para o elemento 3; nó 4; pontos de verificação 1 e 2, em função do número de autovetores usado na solução do exemplo 3.

5 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.26E+14	0.79E+16	0.12E+21	0.99	2.79	19.73	7.08
2	0.26E+14	0.95E+16	0.16E+21	0.99	3.02	20.83	6.89
10 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.13E+15	0.98E+17	0.16E+21	0.73	4.43	6.50	1.47
2	0.13E+15	0.87E+17	0.13E+21	0.75	4.16	6.25	1.50
14 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.13E+15	0.98E+17	0.16E+21	0.73	4.44	6.46	1.45
2	0.13E+15	0.87E+17	0.14E+21	0.75	4.16	6.30	1.52
30 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.13E+15	0.99E+17	0.17E+21	0.73	4.45	6.53	1.47
2	0.13E+15	0.87E+17	0.14E+21	0.77	4.17	6.48	1.56
50 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.13E+15	0.99E+17	0.17E+21	0.73	4.44	6.51	1.46
2	0.13E+15	0.87E+17	0.15E+21	0.78	4.18	6.64	1.59
75 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.13E+15	0.99E+17	0.17E+21	0.73	4.45	6.55	1.47
2	0.13E+15	0.88E+17	0.15E+21	0.78	4.17	6.62	1.59

Os resultados obtidos pela análise de fadiga indicam que nenhuma barra sofre falha. Além disso, verifica-se que o modelo satisfaz o critério da vida útil desejada independente do número de autovetores utilizados. A tabela (9.9) compara os resultados obtidos pelas soluções com 14 e 75 autovetores.

Tabela (9.9) - Influência do número de autovetores empregados nos principais resultados da análise de fadiga do exemplo 3.

Os valores apresentados nesta tabela correspondem ao ponto com dano máximo. A vida útil é fornecida em anos de uso contínuo.

Nº autov	Vida Útil	Dano Máximo	Elemento	Nó	Ponto
14	131,9	0,0076	3	4	3
75	132	0,0076	3	4	3

A vida útil obtida, 132 anos, evidentemente não é a real do modelo. Neste caso, a vida fica limitada pelo desgaste natural. Considerando que a situação simulada representa a realidade de uso do modelo, a conclusão que se obtém é que a estrutura deste deve ser reprojetaada, já que o maior coeficiente de risco, neste caso, vale 0,023.

9.1.4 Observações Gerais

A tabela (9.10) ilustra os principais resultados dos exemplos anteriores. A segunda coluna desta tabela ilustra o número de autovetores usados tendo como limite a frequência ω_{lim} , que é a 1ª frequência natural do modelo maior que o limite superior do intervalo de integração. A 3ª coluna faz a razão entre a 2ª coluna e o número total de autovetores do modelo. A 4ª coluna mostra o erro que há, em termos de vida útil, entre a solução com o conjunto de autovetores limitado por ω_{lim} e solução com o conjunto total de autovetores.

Tabela (9.10) – Comparativo dos resultados obtidos nos três exemplos.

Exemplo	n° ω_{lim}	n° ω_{lim} / n° total	Erro (%)
1	15	0,38	9,09
2	13	0,33	2,08
3	14	0,19	0,07

Observa-se que uma boa aproximação é obtida quando se usa um conjunto de autovetores que cubra todo o intervalo de integração. Isto ocorre porque o espectro de resposta do modelo é função da matriz de admitância complexa do sistema $\bar{\mathbf{H}}(\omega)$ e do espectro de excitação, equação (4.80). Como o espectro de excitação é definido dentro do intervalo de integração, item 4.2.2 e 6.1.5, conclui-se que as frequências naturais fora do intervalo não deveriam afetar os resultados. No entanto, esta situação não é verificada pelos valores expostos na tabela. Embora os erros para os exemplos 2 e 3 sejam pequenos, o erro no problema 1 já é razoável. Isto ocorre porque usa-se o método modal como processo de solução ou seja trabalha-se com uma matriz $\bar{\mathbf{H}}(\omega)$ aproximada, que é função do número de autovetores utilizado. Logo, ao usarmos frequências naturais fora do intervalo de integração estaremos influenciando na resposta pois estaremos modificando a aproximação desta matriz.

Portanto, o conjunto mínimo de autovetores a ser usado deve cobrir o intervalo de integração, para que se possa ter alguma garantia de uma boa aproximação nos resultados finais.

9.2 ANÁLISE DO ÔNIBUS SIMPLIFICADO

Inicialmente esta análise foi desenvolvida de modo completo considerando-se os momentos de inércia I_x , I_y e I_z dos elementos de mola iguais a $1 \times 10^{-15} \text{ m}^4$. No entanto, verificou-se problemas de perturbação numérica nos resultados, o que fez com que estas inércias fossem alteradas para $1 \times 10^{-10} \text{ m}^4$ (ver anexo K).

9.2.1 Cálculo dos Autovalores e Autovetores

Considera-se o veículo apoiado nas quatro rodas conforme figura (8.1). As massas dos passageiros e das bagagens não foram consideradas na obtenção dos autovalores. A hipótese feita considera que estas massas não estão completamente ligadas ao veículo, considerando o movimento vertical, logo elas não contribuem na inércia deste.

Os autovalores foram determinados pelo programa apresentado no anexo J. Aplicou-se um deslocamento (*shift*) igual a 100 nos autovalores para se evitar a singularidade da matriz de rigidez. Foram determinados 1548 autovalores dos quais os 3 primeiros são espúrios e os próximos 24 correspondem aos graus de liberdade fixos (o índice de performance da rotina foi de 0,024). A frequência natural mais baixa encontrada é $\omega_1 = 5,06 \text{ rad/s}$ e a mais alta é $\omega_{1521} = 422727,3 \text{ rad/s}$. A primeira frequência natural maior que o limite superior do intervalo de integração é $\omega_{94} = 314,3 \text{ rad/s}$.

O tempo necessário para resolver este problema num computador Pentium II 300 MHz com 192 Mb de memória é de 20 min e 56 s. Para se obter esta performance utilizou-se a lista de nós reordenada pelo GAELI, que resulta numa banda 198 (a banda original valia 1470 e o tempo de análise para o mesmo problema era em torno de 4 horas). É interessante registrar que inicialmente fez-se a determinação dos autovalores pela rotina DVFSB, a qual necessita da informação do intervalo de pesquisa. Empregou-se o intervalo (95, 98900) que cobre toda a faixa de integração. O tempo de operação, neste caso, foi de 24 min e 3 s. Este resultado leva a um certo contra-senso já que determinar um subconjunto de autovalores leva mais tempo do que determinar todo o conjunto. No entanto, a explicação para isto é que as rotinas utilizadas aplicam algoritmos distintos. Somente é vantagem usar a rotina DVFSB quando o número de autovalores for reduzido.

A figura (9.7) ilustra os primeiros oito modos de vibração do veículo colocados em ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo.

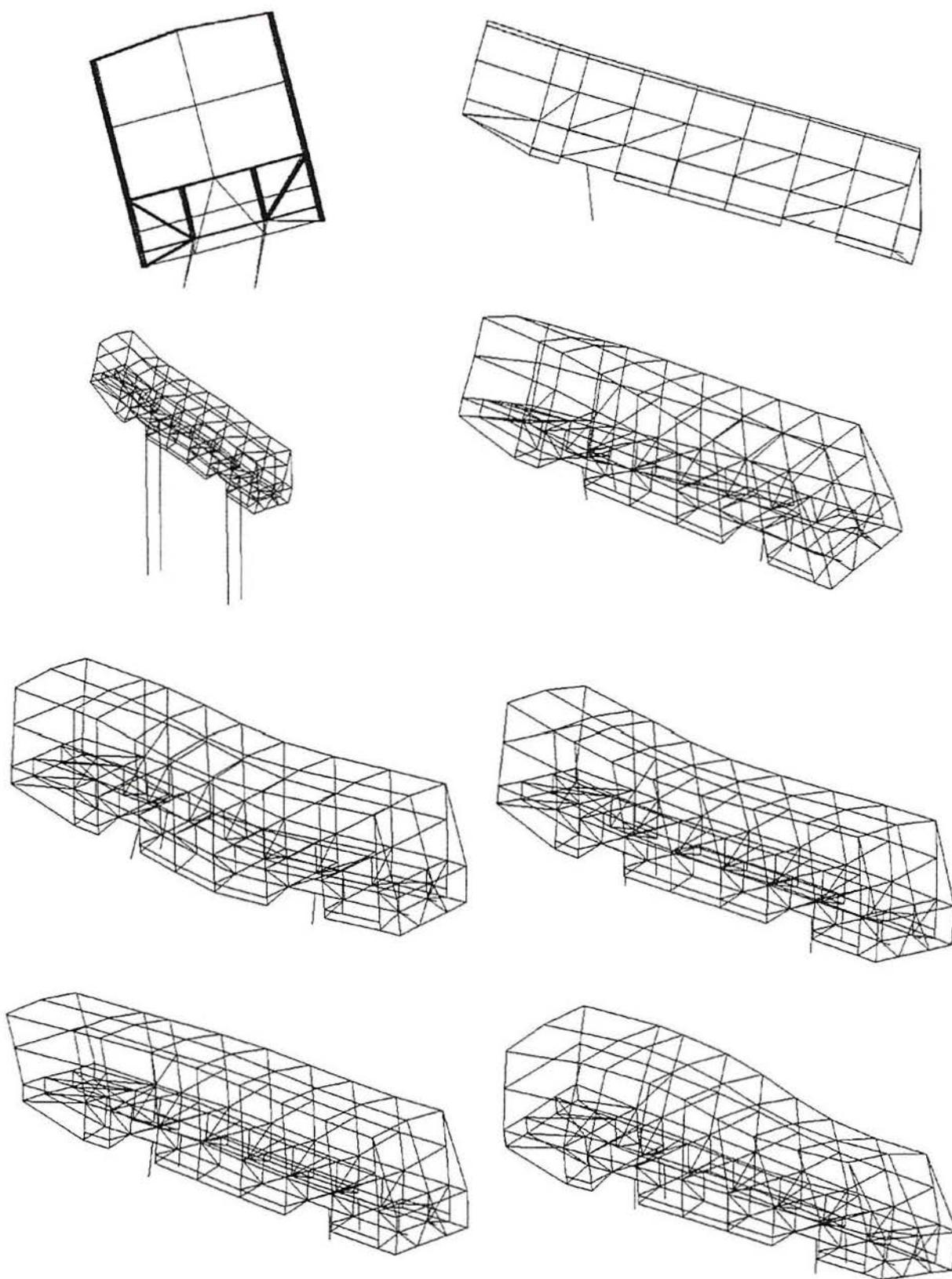


Figura (9.7) – Oito primeiros modos de vibração representados em ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo.

As frequências naturais dos modos de vibração ilustrados são $\omega_1 = 5,07$ rad/s, $\omega_2 = 10,75$ rad/s, $\omega_3 = 12$ rad/s, $\omega_4 = 16,15$ rad/s, $\omega_5 = 24,95$ rad/s, $\omega_6 = 31,45$ rad/s, $\omega_7 = 33,97$ rad/s e $\omega_8 = 36,97$ rad/s.

9.2.2 Dados Extras para a Análise de Fadiga

O limite de fadiga do material em 10^6 ciclos é definido pelos procedimentos apresentados em 5.2.2. O coeficiente de acabamento superficial K_a adotado corresponde à fabricação por usinagem. Ele é obtido pela função de interpolação apresentada em NORTON (1998). Para o aço ASTM A36 ($\sigma_r = 450$ MPa) tem-se $K_a = 4,51 \cdot 450^{-0,265} = 0,89$, e para o aço SAE 1045 ($\sigma_r = 670$ MPa) tem-se $K_a = 4,51 \cdot 670^{-0,265} = 0,8$. O coeficiente de escala K_b para uma seção tubular 40x40x3 mm vale 0,88. Para as longarinas e primeira travessa do chassi $K_b = 0,776$. Para as demais travessas do chassi $K_b = 0,78$. O coeficiente de confiabilidade, para uma confiança de 99% nas propriedades dos materiais, vale 0,816. Considerando-se ainda o fator de redução do limite de fadiga, devido ao tubo ser fabricado com costura, pode-se aproximar o mesmo como:

- Para o aço ASTM A36 $\sigma_f = 0,89 \cdot 0,88 \cdot 0,816 \cdot 0,875 \cdot 0,5 \cdot 450 = 126$ MPa ;
- Para o aço SAE 1045 $\sigma_f = 0,89 \cdot 0,776 \cdot 0,816 \cdot 0,875 \cdot 0,5 \cdot 760 = 187$ MPa (longarinas e primeira travessa do chassi);
- Para o aço SAE 1045 $\sigma_f = 0,89 \cdot 0,78 \cdot 0,816 \cdot 0,875 \cdot 0,5 \cdot 760 = 188$ MPa (demais travessas do chassi).

Considerando-se o aço ASTM A36, as constantes que definem a curva σ - N são $m = 5,916$ e $a = 18,4262$ para a curva σ - N padrão, que é válida entre 10^3 e 10^6 ciclos, e para a curva EUROCODE 3 válida entre 10^3 e 5×10^6 ciclos. Para o segundo trecho desta curva, válido entre 5×10^6 e 10^8 ciclos, as constantes m e a valem 7,916 e 22,391. Ainda para esta curva, a tensão abaixo da qual não ocorre dano (*cut-off limit*) vale 65,7 MPa.

O número de frequências adotadas para integração é 50. A frequência ω_{\min} é calculada automaticamente e $\omega_{\max} = 300$ rad/s. A bitola do veículo é igual a 1,01 m. Os nós pertencentes ao chassi, nos quais estão ligados os amortecedores são o 247, 248, 249 e 250. Considera-se o coeficiente de amortecimento igual 0,05*, para todos os modos de vibração. O indicador do sistema de unidades vale 1 (N-m). O tipo de curva σ - N adotado, quando não indicado outro tipo, é o padrão. O coeficiente a_m é determinado pela expressão (9.1) empregando as frequências naturais ω_1 , ω_{1521} e coeficiente de amortecimento modal.

* Os amortecimentos modais podem ser determinados experimentalmente através de técnicas de análise modal. Para isto é necessária a instrumentação de um protótipo para ensaios em laboratório ou em serviço normal em tráfego urbano ou rodoviário.

A vida útil desejada para o ônibus é de 10 anos, mas deve-se indicar para o programa uma vida com uso contínuo. Para tal considera-se o veículo como de uso rodoviário executando 3 trechos de 4 horas por dia de modo que a taxa de uso fica em 50%. Considerando ainda um dia por mês para fins de manutenção tem-se no final de 10 anos o equivalente a 4 meses de veículo parado. Logo, a vida útil desejada é de 4,7 anos de uso contínuo.

9.2.3 Definição do Espectro das Irregularidades do Pavimento

A especificação da constante c em função de valores estabelecidos para o desvio padrão das irregularidades do pavimento e de um intervalo de velocidades tecnicamente compatível é de vital importância porque eles definem a excitação a que está submetido o veículo. Não se pode desejar que um ônibus com projeto padrão trafegue a 120 km/h num pavimento em péssimas condições sem apresentar problemas.

Na falta de dados mais realísticos, considera-se o veículo deslocando-se em 3 tipos de pavimentos. Em todos os casos usa-se $w = 2,5$. Os demais dados estão especificados a seguir:

- Auto-estrada ou estrada principal muito boa: $c = 5 \times 10^{-8}$. Para este caso adotam-se as velocidades 80, 100 e 120 km/h com as respectivas probabilidades de 50%, 40% e 10%;
- Auto-estrada ou estrada principal boa: $c = 20 \times 10^{-8}$. Para este caso adotam-se as velocidades 80, 90 e 100 km/h com as respectivas probabilidades de 50%, 40% e 10%;
- Estrada principal ou estrada secundária média: $c = 80 \times 10^{-8}$. Para este caso adotam-se as velocidades 60, 70 e 80 km/h com as respectivas probabilidades de 30%, 40% e 30%.

Inicialmente vai-se determinar a vida útil do veículo para cada um destes conjuntos de dados. No entanto, a situação mais realística de uso é uma combinação destes três conjuntos como por exemplo considerando-se probabilidades de ocorrência de 40%, 40% e 20% para o primeiro, segundo e terceiro conjunto de dados respectivamente. Como todo o processo de análise é linear, uma vez obtidos os resultados para cada tipo de pavimento pode-se estabelecer facilmente combinações entre estes.

Um aspecto interessante é que considerando o limite superior de integração de 300 rad/s e as velocidades adotadas para o veículo, tem-se que os menores comprimentos de onda das irregularidades são de 0,7 m, 0,6 m e 0,5 m para os três tipos de pavimentos definidos anteriormente.

9.2.4 Análise Espectral

Para testar a convergência do método modal considerou-se o veículo trafegando com velocidade constante de 100 km/h numa via com $c = 5 \times 10^{-8}$. A verificação da convergência foi realizada considerando-se as variações do desvio padrão dos deslocamentos, solicitações e momentos das distribuições da tensão normal. A tabela (9.11) ilustra os resultados obtidos para o nó 9.

Tabela (9.11) – Variações do desvio padrão dos deslocamentos do nó 9 em função do número de autovetores utilizado na solução.

Os desvios padrões dos deslocamentos estão representados em metros e os das rotações em radianos.

Nº Autov.	D_x	D_y	D_z	R_x	R_y	R_z
30	$7,899 \times 10^{-5}$	$3,166 \times 10^{-3}$	$6,273 \times 10^{-3}$	$1,27 \times 10^{-3}$	$2,905 \times 10^{-5}$	$6,525 \times 10^{-5}$
60	$7,926 \times 10^{-5}$	$3,166 \times 10^{-3}$	$6,273 \times 10^{-3}$	$1,274 \times 10^{-3}$	$3,042 \times 10^{-5}$	$7,013 \times 10^{-5}$
94	$7,827 \times 10^{-5}$	$3,167 \times 10^{-3}$	$6,276 \times 10^{-3}$	$1,274 \times 10^{-3}$	$2,961 \times 10^{-5}$	$7,044 \times 10^{-5}$
150	$7,918 \times 10^{-5}$	$3,169 \times 10^{-3}$	$6,277 \times 10^{-3}$	$1,275 \times 10^{-3}$	$3,041 \times 10^{-5}$	$7,077 \times 10^{-5}$
300	$7,897 \times 10^{-5}$	$3,169 \times 10^{-3}$	$6,277 \times 10^{-3}$	$1,275 \times 10^{-3}$	$3,02 \times 10^{-5}$	$7,084 \times 10^{-5}$
500	$7,892 \times 10^{-5}$	$3,17 \times 10^{-3}$	$6,277 \times 10^{-3}$	$1,276 \times 10^{-3}$	$3,014 \times 10^{-5}$	$7,096 \times 10^{-5}$
800	$7,913 \times 10^{-5}$	$3,17 \times 10^{-3}$	$6,278 \times 10^{-3}$	$1,276 \times 10^{-3}$	$3,028 \times 10^{-5}$	$7,017 \times 10^{-5}$

Nota-se que a partir de 150 autovetores os valores tabelados sofrem alterações mínimas. Mesmo comparando-se as soluções com 94 e 800 autovetores tem-se uma diferença relativa de 2,2%, o que indica que solução com 94 autovetores é uma boa aproximação.

A tabela (9.12) ilustra as variações do desvio padrão das solicitações do elemento 9, nó 9, em função do número de autovetores usado na análise.

Tabela (9.12) - Variações do desvio padrão das solicitações do elemento 9, nó 9 em função do número de autovetores usado na análise.

Os desvios de F_x , F_y e F_z estão expressos em N e os dos momentos em Nm.

Nº Autov	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
30	2,824	5,508	10,67	0,4279	8,742	3,54
60	23,73	6,74	18,04	0,5945	12,74	4,099
94	22,06	6,81	16,78	0,5886	12,05	4,138
150	22,13	6,827	16,85	0,588	12,1	4,15
300	23,16	6,835	16,86	0,5881	12,11	4,156
500	22,14	6,85	16,86	0,588	12,12	4,165
800	22,13	6,857	16,88	0,5881	12,14	4,169

Comparando-se as soluções com 94 e 800 autovetores tem-se uma diferença relativa de 0,74% para o pior caso, o que também indica que a solução com 94 autovetores é uma boa aproximação segundo este critério.

O quadro (9.4) ilustra as variações das características das distribuições da tensão normal dos pontos de verificação 1 e 2 do nó 9, elemento 9.

Quadro (9.4) – Características das distribuições da tensão normal nos pontos 1 e 2 do nó 9, elemento 9.

Neste quadro M0, M2 e M4 são os momentos das distribuições, Eps é ϵ , Freq.0 é a frequência de ultrapassagem em zero, Freq.max é a frequência de pico e Dist é o fator de distorção.

30 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.19E+13	0.48E+16	0.33E+20	0.80	7.92	13.21	1.67
2	0.49E+13	0.56E+16	0.17E+20	0.79	5.38	8.86	1.65
60 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.52E+13	0.75E+17	0.19E+22	0.65	19.19	25.36	1.32
2	0.86E+13	0.90E+17	0.24E+22	0.77	16.32	25.80	1.58
94 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.46E+13	0.74E+17	0.20E+22	0.63	20.30	26.19	1.29
2	0.79E+13	0.86E+17	0.24E+22	0.78	16.61	26.45	1.59
150 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.46E+13	0.75E+17	0.20E+22	0.63	20.27	26.15	1.29
2	0.80E+13	0.87E+17	0.24E+22	0.78	16.58	26.40	1.59
300 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.46E+13	0.75E+17	0.20E+22	0.63	20.26	26.15	1.29
2	0.80E+13	0.87E+17	0.24E+22	0.78	16.55	26.38	1.59
500 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.46E+13	0.75E+17	0.20E+22	0.63	20.25	26.16	1.29
2	0.80E+13	0.87E+17	0.24E+22	0.78	16.54	26.40	1.60
800 Autovetores							
Ponto	M0	M2	M4	Eps	Freq.0	Freq.max	Dist.
1	0.46E+13	0.75E+17	0.20E+22	0.63	20.25	26.16	1.29
2	0.80E+13	0.87E+17	0.24E+22	0.78	16.54	26.40	1.60

Nota-se que a partir da solução com 150 autovetores as alterações nas características das distribuições das tensões normais são mínimas para os dois pontos considerados (Neste ponto

o leitor deve considerar que os dados expostos no quadro são obtidos de um arquivo formatado, o que pode mascarar pequenas variações nos valores principalmente dos momentos M_0 , M_2 e M_4). Comparando-se as soluções com 94 e 800 autovetores tem-se um erro relativo de 1,33% em M_2 , 0,25% na frequência de ultrapassagem em zero e 0,11% na frequência de pico. Estes resultados confirmam que a solução com 94 autovetores é uma boa aproximação.

Um outro aspecto das soluções apresentadas que vale a pena ser comentado é o tempo de processamento. A tabela (9.13) ilustra a evolução do tempo necessário para realizar uma análise espectral, num computador Pentium II-300 MHz com 192 Mbytes de memória, em função do número de autovetores usados na solução.

Tabela (9.13) – Tempo de processamento [s] para realizar uma análise espectral num computador Pentium II-300 MHz com 192 Mbytes de memória.

N. Autov	30	60	94	150	300	500	800
Tempo	6,5	7,8	10,6	20,2	72,4	382,2	1784

Para até 300 autovetores o tempo de solução é baixo. A partir deste ponto o tempo de solução começa a aumentar bastante podendo, conforme o número de autovetores adotado, ser mais vantagem resolver o problema completo no domínio da frequência do que empregar o método modal. Vale salientar que a maior parte deste tempo é consumido na solução dos sistemas para desacoplar as equações de movimento (no caso da solução com 800 autovetores é necessário resolver 50 vezes um sistema 800×800). O tempo gasto na análise de fadiga, que não é função do número de autovetores utilizado, é de apenas 16 s não sendo portanto significativo.

9.2.5 Análise de Fadiga

Apresenta-se a seguir os resultados obtidos para as três vias definidas em 9.2.3. Todos os resultados apresentados correspondem a uma solução empregando 150 autovetores. Em todas as vias foram testados os três tipos de curva σ -N.

O resultado obtido para a primeira via de rolamento, considerando a curva σ -N padrão, é que nenhum elemento do modelo foi danificado. O mesmo resultado se obtém para a curva σ -N empregada pelo EUROCODE 3. O quadro (9.5) exemplifica um resumo do relatório de dano que se obtém para este caso.

Quadro (9.5) – Exemplo do relatório de dano do veículo considerando a primeira via de rolamento e a curva σ -N padrão.

RELATORIO DE DANO	
Curva S-N Padrao	
Dano - Tensao Normal	
Resultados para o Pior Ponto	
Vida Util (anos):	100.0
Dano Maximo	: 0.00E+00
Elemento	: 0.
No	: 0.
Ponto	: 0.
Nenhum elemento foi danificado. Troque a curva S-N	

Considerando a curva σ -N com dano contínuo tem-se um dano máximo igual a 0,0035. A figura (9.8) ilustra a distribuição do coeficiente de risco no veículo adotando-se esta curva.

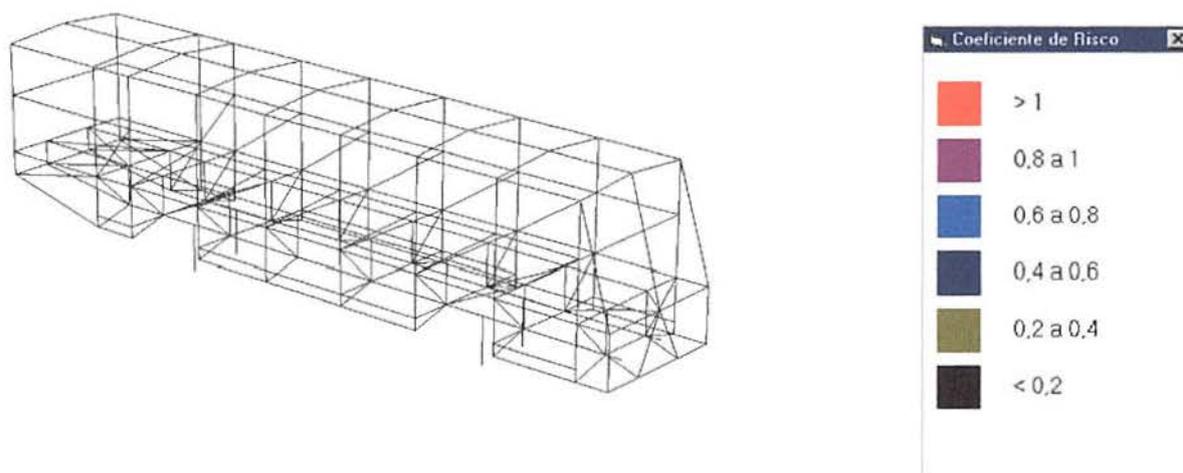


Figura (9.8) – Coeficiente de risco para o veículo rodando na primeira via considerando a curva σ -N com dano contínuo.

O resultado prático obtido pelas três curvas σ -N é o mesmo, ou seja o nível de dano nas barras do veículo é mínimo ou inexistente. Logo, a vida útil do veículo não é limitada pelo processo de fadiga, mas sim por um desgaste natural dos seus componentes. É interessante notar que os resultados obtidos por todos processos de verificação de falha por fadiga é o mesmo. Isto ocorreu porque as tensões tangenciais apresentam valores baixos se comparadas com as tensões normais.

O resultado obtido para a segunda via de rolamento, considerando a curva σ -N padrão, é que nenhum elemento do modelo foi danificado. Já adotando-se a curva σ -N usada pelo EUROCODE 3 tem-se um dano máximo igual a $0,88 \times 10^{-3}$. No entanto, adotando-se a curva σ -N com dano contínuo tem-se um dano máximo igual a 0,14. O quadro (9.6) compara os

resumos dos relatórios de falha para estes casos, e a figura (9.9) ilustra a distribuição do coeficiente de risco no veículo quando se usa a curva σ -N com dano contínuo.

Quadro (9.6) – Resumos dos relatórios de falha do veículo considerando a segunda via de rolamento e as curvas σ -N do tipo EUROCODE e com dano contínuo.

Curva Eurocode	Curva S-N com Dano Continuo
Resultados para o Pior Ponto	Resultados para o Pior Ponto
Vida Util (anos): ilimitada	Vida Util (anos): 7.1
Dano Maximo : 0.88E-03	Dano Maximo : 0.14E+00
Elemento : 28.	Elemento : 28.
No : 27.	No : 27.
Ponto : 4.	Ponto : 4.

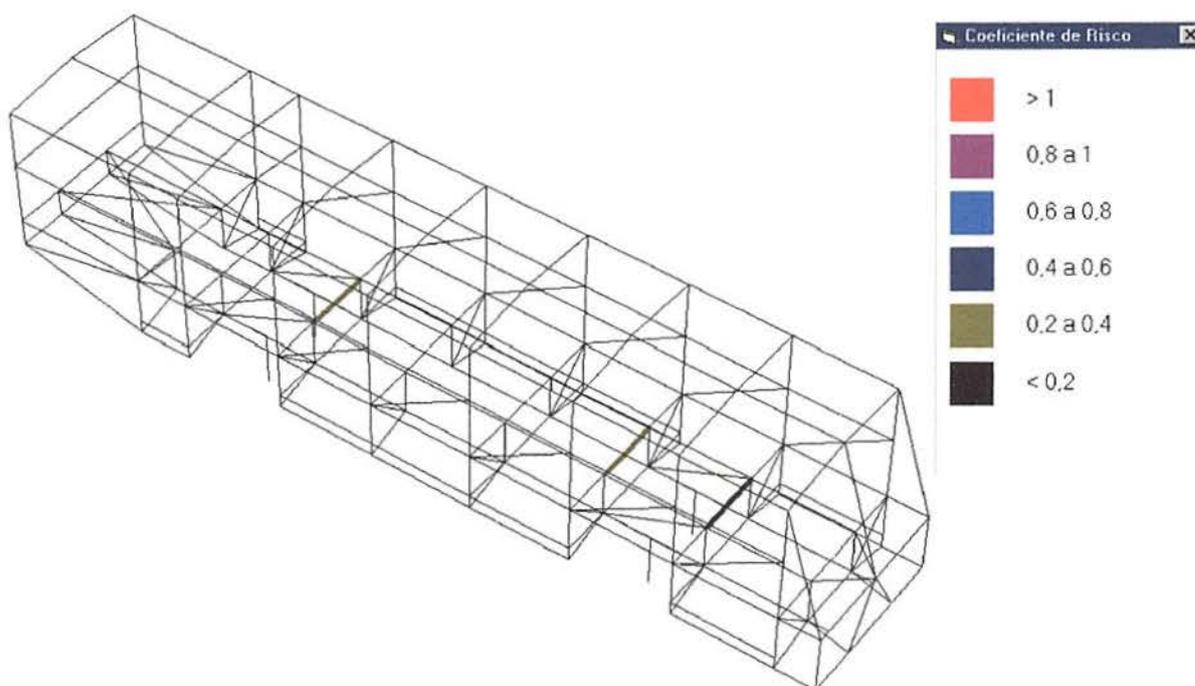


Figura (9.9) - Coeficiente de risco para o veículo rodando na segunda via considerando a curva σ -N com dano contínuo.

Embora o resultado prático obtido pelas três curvas σ -N seja o mesmo, não há falha por fadiga e o veículo satisfaz a vida útil desejada, há diferenças consideráveis se observarmos os resultados em termos de dano. A curva σ -N fornece resultados conservativos a favor da segurança e a curva σ -N padrão fornece resultados conservativos contra a segurança. Novamente os resultados obtidos para todos os processos de verificação de falha por fadiga foram os mesmos.

Considerando-se a terceira via de rolamento e a curva σ -N padrão verifica-se que nenhum elemento sofre falha por fadiga. O dano máximo é de 0,015, vida útil de 67,7 anos, e

ocorre no elemento 28, nó 27. Já usando-se a curva σ -N do tipo EUROCODE, o dano máximo que ocorre no veículo é igual a 1,4, o que corresponde a uma vida útil de 0,7 anos. O quadro (9.7) apresenta parte do relatório de falha, que corresponde a verificação de falha que utiliza apenas a tensão normal. Vale dizer que os demais critérios de verificação obtém os mesmos resultados. Com finalidade ilustrativa, a figura (9.10) mostra a distribuição do coeficiente de risco no veículo para o caso estudado.

Quadro (9.7) – Resumo do relatório de falha correspondente à 3ª via de rolamento e curva σ -N do tipo EUROCODE

RELATORIO DE DANO						
Curva Eurocode						
Dano - Tensao Normal						
Elemento	Tipo de Falha	No	P(no1)	P(no2)	Dano	Dano
28	3	2	0	4	0.00E+00	0.14E+01
212	3	2	0	3	0.00E+00	0.14E+01
Resultados para o Pior Ponto						
Vida Util (anos):	0.7					
Dano Maximo	: 0.14E+01					
Elemento	: 28.					
No	: 27.					
Ponto	: 4.					

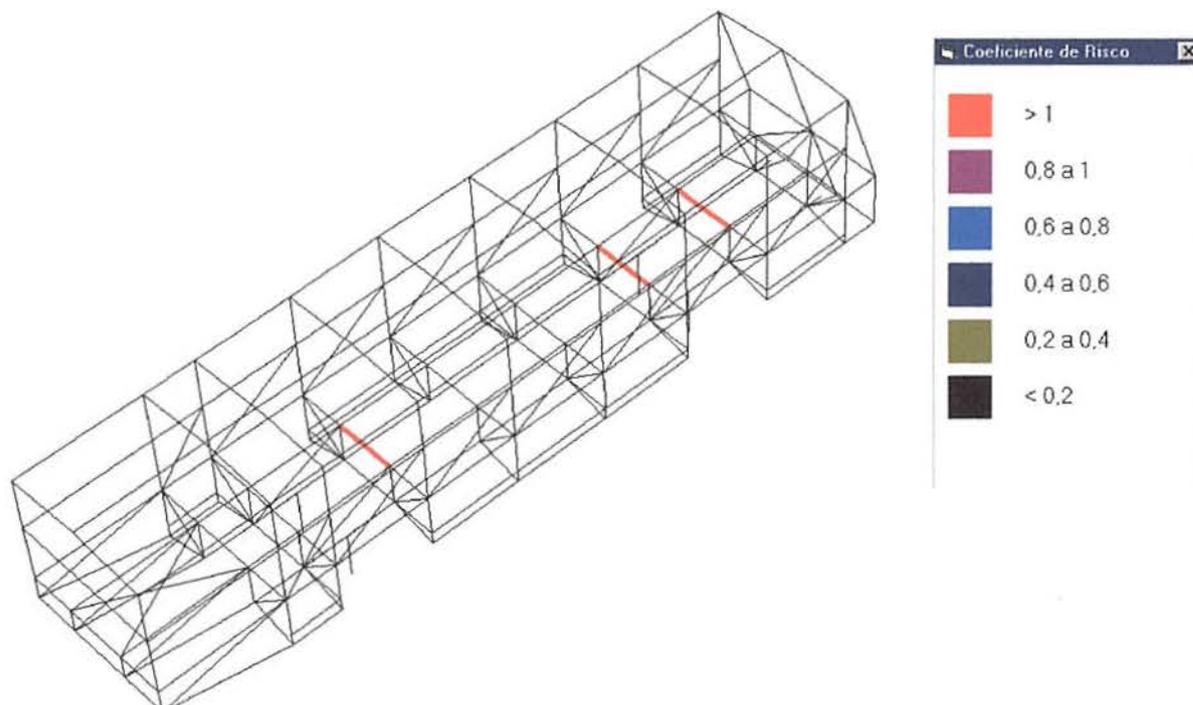


Figura (9.10) – Coeficiente de risco para o veículo rodando na 3ª via e considerando a curva σ -N do tipo EUROCODE.

Considerando-se agora a curva σ -N com dano contínuo tem-se um número maior de elementos que apresentam falha. O quadro (9.8) apresenta a lista dos elementos que falharam,

e a tabela (9.14) apresenta os resultados do pior ponto para cada uma das formas de verificação de falha.

Quadro (9.8) – Lista dos elementos que falharam considerando o veículo trafegando na 3ª via e adotando-se a curva σ -N com dano contínuo.

RELATORIO DE DANO						
Curva S-N com Dano Continuo						
Dano - Tensao Normal						
Elemento	Tipo de Falha	No	P(no1)	P(no2)	Dano	Dano
28	3	2	0	7	0.00E+00	0.21E+01
44	3	2	0	7	0.00E+00	0.11E+01
92	3	2	0	4	0.00E+00	0.24E+01
212	3	2	0	7	0.00E+00	0.21E+01
228	3	2	0	7	0.00E+00	0.11E+01
276	3	2	0	3	0.00E+00	0.24E+01

Para se montar esta tabela retirou-se a formatação do arquivo do relatório de falha de modo que as pequenas diferenças entre os processos de verificação de falha por fadiga ficassem aparentes. Os resultados obtidos são bastante semelhantes devido aos baixos valores das tensões tangenciais. Nesta tabela, a coluna intitulada Ten. Normal indica o cálculo do dano usando apenas a tensão normal. Na coluna intitulada Shigley – 1 estão os resultados do método de Shigley para obtenção das tensões equivalentes. As estatísticas utilizadas no cálculo são as da tensão normal. A coluna intitulada Shigley – 2 difere da anterior por usar a distribuição da tensão equivalente para obter as estatísticas necessárias ao cálculo. As colunas Sines – 1 e Sines – 2 indicam métodos iguais aos das duas colunas anteriores com exceção da forma para determinar as tensões equivalentes. A coluna intitulada Euro. indica o método usado pelo EUROCODE3.

Tabela (9.14) – Resultados obtidos para o pior ponto considerando o veículo trafegando na 3ª via e adotando-se a curva σ -N com dano contínuo.

A vida útil está indicada na tabela em anos. Comparando-se o dano de aproximadamente 3,5 com o dano correspondente ao elemento 28 no quadro (9.8) verifica-se que eles são distintos porque os pontos de verificação são distintos. Isto ocorre devido ao código que armazena apenas o último ponto de verificação do nó que apresentou falha, porém para obtenção do dano máximo todos os pontos de verificação são testados.

	Ten. Normal	Shigley - 1	Shigley – 2	Sines - 1	Sines – 2	Euro.
Vida útil	0,2824936	0,2824685	0,2824685	0,2824685	0,2824685	0,2824936
dano	3,539904	3,540218	3,540218	3,540218	3,540218	3,539904
elemento	28	28	28	28	28	28
nó	27	27	27	27	27	27
ponto	4	4	4	4	4	4

Complementando os resultados obtidos, a figura (9.11) ilustra a distribuição do coeficiente de risco para o caso do veículo trafegando na 3ª via, adotando-se a curva σ -N com dano contínuo e o critério de verificação de falha do EUROCODE.

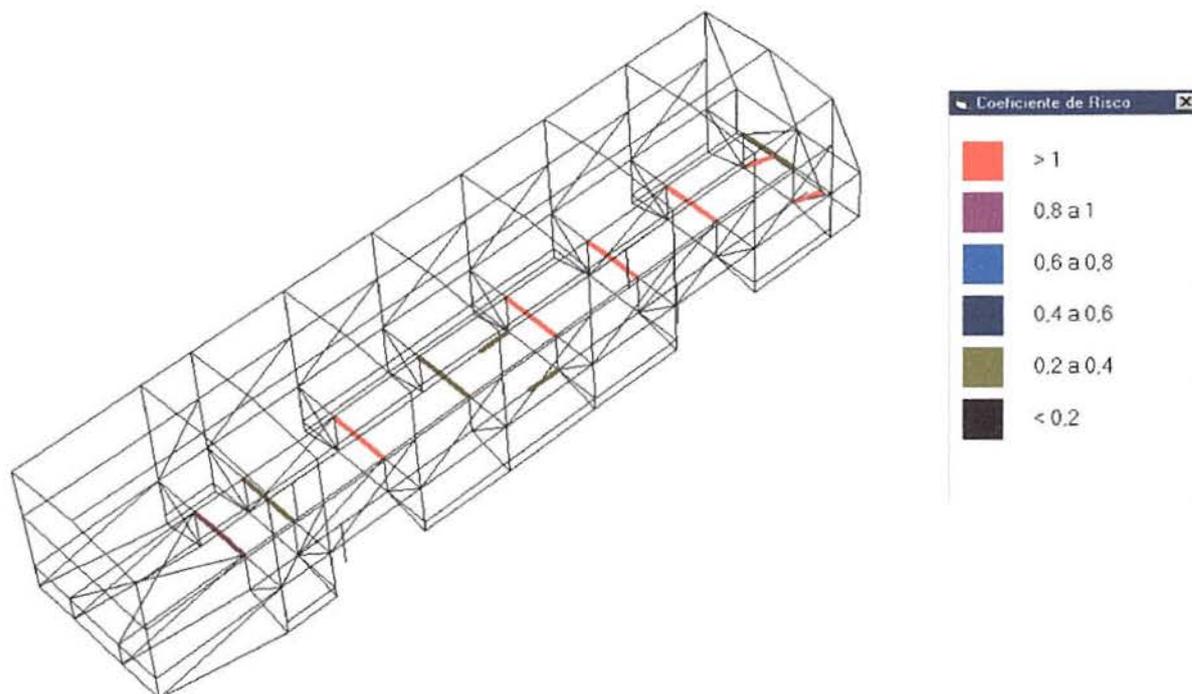


Figura (9.11) – Coeficiente de risco para o veículo rodando na 3ª via e considerando a curva σ -N com dano contínuo.

Combinando-se os resultados obtidos para as três vias de rolamento; considerando-se as probabilidades de ocorrência de cada uma delas, que foram estabelecidas em 9.2.3; obtém-se uma estimativa de vida útil mais realista para o veículo. Considerando que o dano máximo ocorre no mesmo elemento para as três vias de rolamento pode-se estimar o dano máximo da estrutura fazendo-se

$$dano = \frac{0,4 \cdot 0,0035 + 0,4 \cdot 0,14 + 0,2 \cdot 3,54}{1} = 0,765$$

o que corresponde a vida útil de 1,3 anos e um coeficiente de risco (razão entre o dano calculado e o dano correspondente à vida desejada) igual a 3,6. Neste caso, o veículo não sofre falha por fadiga, mas também não satisfaz a vida útil desejada.

9.2.6 Influência dos Elementos da Suspensão

Neste item apresenta-se alguns resultados que ilustram a importância dos elementos da suspensão, molas e amortecedores, bem como o modo de atuação destes.

Uma aproximação muito, é desprezar a influência dos termos de amortecimento no lado direito da (4.46), que são os termos imaginários da expressão (6.7). Para testar o efeito desta simplificação considera-se o ônibus trafegando na 2ª via de rolamento com as velocidades especificadas no item 9.2.3. Esta análise está dividida em duas partes.

Na primeira parte não se considera apenas a influência dos amortecedores da suspensão no vetor de cargas complexo. Para esta situação, a vida útil do veículo sofre uma redução de 7,1 anos de vida útil para 1,6 anos, o que corresponde a um dano igual a 0,62. A figura (9.12) ilustra a distribuição do coeficiente de risco para este caso.

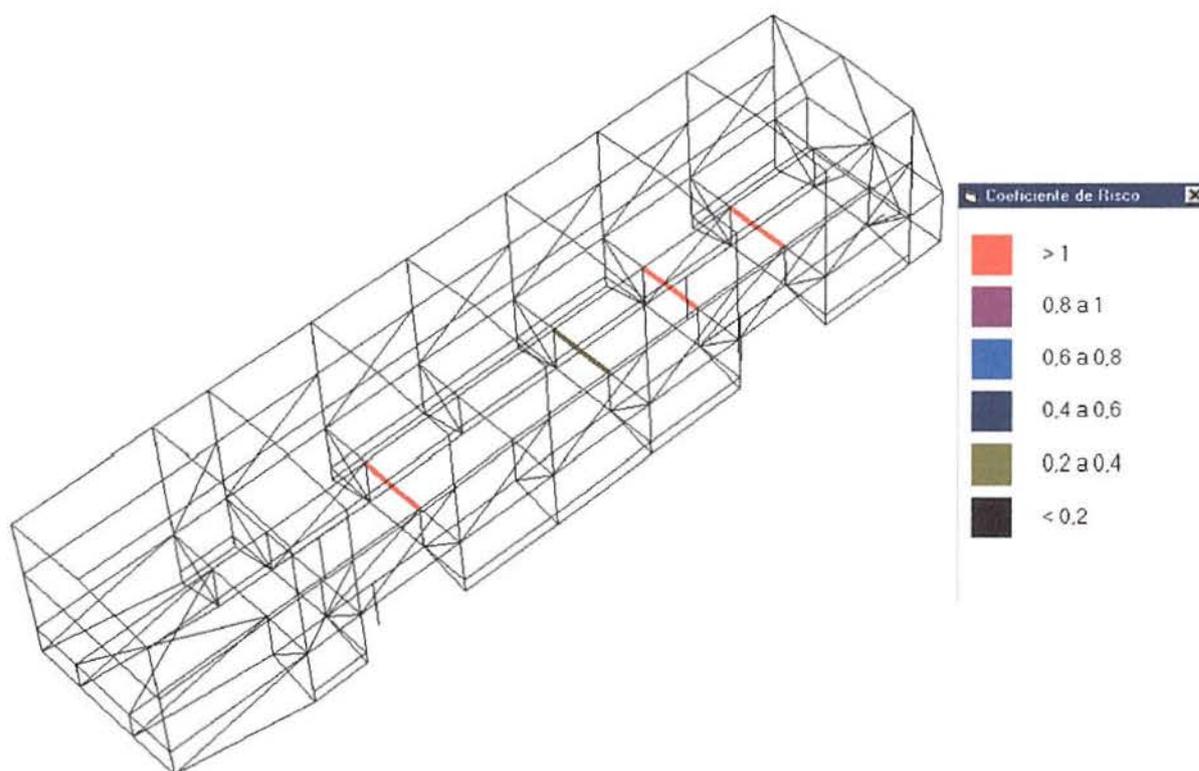


Figura (9.12) – Coeficiente de risco para o veículo rodando na 2ª via, adotando a curva σ -N com dano contínuo e desconsiderando a influência dos amortecedores no vetor de cargas.

Pelos resultados obtidos verifica-se que a não consideração das forças dos amortecedores no vetor de cargas fornece resultados conservativos a favor da segurança. Isto ocorre porque os termos que são função dos amortecedores atuam nas componentes imaginárias do vetor de cargas. Além disso, estes termos têm sinal contrário ao das forças de inércia que são as componentes reais do vetor de cargas. Do ponto de vista mecânico, os resultados obtidos são coerentes já que cabe aos amortecedores limitar a ação das molas e conseqüentemente limitar as vibrações do veículo. Considerando-se o nó de ligação da mola dianteira direita com o chassi, nó 248, tem-se um desvio padrão do deslocamento na direção Z $d_z = 1,227 \times 10^{-2}$ m se

não considerarmos a influência dos amortecedores no vetor de cargas, e considerando-se esta influência tem-se $d_z = 1,205 \times 10^{-2}$ m. Por outro lado, os desvios padrões das solicitações dos elementos, que têm ligação com as molas, são um pouco maiores quando se considera a influência dos amortecedores no vetor de cargas.

Na segunda parte não é considerada apenas a influência do amortecimento estrutural (parcela proporcional à matriz de massa) no vetor de cargas. Verifica-se que a influência destas cargas é bastante pequena uma vez que os resultados obtidos são iguais aos apresentados no quadro (9.6). A diferença relativa entre os danos calculados em ambos os casos é da ordem de 0,04%.

Adotando-se molas mais macias (200 N/mm) e alterando-se as constantes dos amortecedores, equação (7.1), para $C = 20016$ Ns/m obtém-se uma vida útil de 18,3 anos, o que corresponde a um dano máximo igual 0,055. Este resultado confere com a prática ou seja suspensões macias transmitem menos vibrações para a estrutura do veículo e seus ocupantes.

9.2.7 Observações Gerais

Pelos resultados obtidos, o veículo seria aprovado caso fosse trafegar somente nas rodovias 1 e 2, e seria reprovado se fosse trafegar somente na rodovia 3. Comparando-se estes resultados com os obtidos no caso normal da verificação estática, item 8.1, conclui-se que o processo usual de dimensionamento; considerar o veículo com carga máxima, apoiado nas quatro rodas e aplicar coeficiente de segurança 3; é conservativo para o veículo rodando nas rodovias 1 e 2, mas é um critério não satisfatório se o veículo rodar na rodovia 3 ou se aplicarmos uma combinação das três rodovias com as probabilidades de ocorrência já estabelecidas. Nota-se também que os casos de verificação de torção não identificaram as barras que falharam por fadiga como sendo de risco. É bem verdade que a função destes casos é simular uma roda do veículo caindo num buraco, e não identificar falha por fadiga.

Como era de se esperar, há uma grande influência das características da rodovia nos resultados finais. Neste sentido, faz-se necessária uma pesquisa mais aprofundada que verifique a existência de espectros de potência das irregularidades das estradas brasileiras ou que se faça um levantamento experimental destes. Desde que se mantenha a hipótese de isotropia, a implementação de outro espectro de potência no código é simples.

Das três curvas σ - N implementadas nota-se que a curva padrão não tem utilidade no processo de verificação. Isto ocorre por que os níveis de tensão são normalmente inferiores ao limite de fadiga, o que não provoca dano para esta abordagem. O resultado é uma estimativa

perigosamente otimista da vida útil do veículo. Já as curvas tipo EUROCODE ou tipo dano contínuo apresentam bons resultados. Evidentemente, a curva com dano contínuo apresenta resultados mais conservadores contra a estrutura. Porém, esta característica pode ser controlada se for estabelecido um nível de tensão abaixo do qual não ocorre dano, o que é de fácil implementação no código.

Comparando-se os resultados entre as curvas EUROCODE e dano contínuo, verifica-se uma diferença considerável no dano resultante obtido por elas. Esta diferença pode ser justificada pela declividade distinta das curvas a partir de 5×10^6 ciclos e/ou pelas tensões inferiores a 65,7 MPa (cut-off limit) as quais são geradas pelas frequências mais altas das irregularidades. Para testar a questão da declividade da curva é interessante implementar uma segunda curva de dano contínuo que use as mesmas declividades da curva EUROCODE. Quanto ao dano provocado por tensões inferiores a 65,7 MPa, é provável que o modelamento do pneu na suspensão do veículo venha a reduzir estas diferenças.

Dos métodos implementados para verificação de falha nota-se que o EUROCODE e o método da tensão normal obtém os mesmos resultados quando as tensões tangenciais são baixas, logo o segundo processo pode ser eliminado. O espectro de potência aproximado da tensão equivalente apresentou bons resultados. No caso de tensões tangenciais baixas ele praticamente reproduziu o espectro das tensões normais. Este resultado serve como indicativo para eliminar-se os métodos Shigley-1 e Sines-1, os quais usam o espectro de potência das tensões normais para obter as características da distribuição da tensão equivalente.

Como se pode observar, as tensões tangenciais foram baixas em todos os exemplos analisados, de modo que todos os critérios de verificação de falha forneciam resultados praticamente iguais. A causa disto é o modelo utilizado para descrever o espectro de potência das irregularidades da estrada. Ao se assumir um campo isotrópico, o espectro de potência da trilha esquerda fica igual ao da trilha direita, expressão (4.14), e com isto elimina-se a principal fonte geradora de torção no veículo. Considerando que a isotropia do campo corresponde a uma correlação entre as trilhas igual a 1, pode-se pensar em resolver este problema fornecendo-se uma correlação entre as trilhas diferente da unidade. É claro que isto iria provocar alterações razoáveis no formulário do capítulo 4.

Comprovando a prática, há uma grande influência dos elementos da suspensão nos resultados finais, vida útil do veículo. Neste sentido, faz-se necessário estudar um modelo de suspensão que leve em conta a ação dos pneus e a dependência dos amortecedores da frequência de excitação.

10. CONCLUSÃO

Analisando-se os objetivos propostos no início deste trabalho verifica-se que estes foram atingidos na maior parte dos casos.

O estudo do empenamento de perfis de seção aberta empregando elementos de casca forneceu material para escrever algumas conclusões interessantes como as que estão no item 3.3. Por outro lado, o estudo do empenamento em estruturas de ônibus, devido às novas técnicas construtivas, que usam apenas perfis de seção fechada, passou para um plano secundário de importância na carroceria do veículo. Mesmo no caso dos ônibus com chassi tradicional não se obtém uma diferença significativa nos resultados finais para as barras da carroceria a não ser as introduzidas pelas ligações entre os elementos de casca e barra. Entretanto, quando se está interessado nos resultados obtidos para o chassi ou quando se deseja analisar este separadamente, faz-se necessário o uso de elementos de casca. Porém, a tendência é que essa situação torne-se rara, já que as técnicas construtivas atuais não usam mais um chassi convencional, mas sim uma plataforma formada por barras de seção fechada.

Propôs-se uma estratégia para redução dos custos computacionais para a análise específica do empenamento, após um estudo das alternativas viáveis, através do uso elementos de casca alongados. Os resultados obtidos para estruturas planas foram bons, mas para estruturas tridimensionais eles não foram animadores. Entretanto, devido à tendência atual de usar perfis de seção fechada na carroceria perdeu-se a principal motivação deste estudo, que era o modelamento total da carroceria com elementos de casca. Logo, o desenvolvimento dele foi interrompido, mas algumas conclusões úteis estão apresentadas em 3.3, as quais servem de subsídios para os casos que não se enquadram no problema específico aqui tratado.

A obtenção de dados práticos com as empresas da área foi satisfatória. Aliás estes foram responsáveis por alterações nos rumos iniciais do trabalho. Comprovou-se a necessidade de intensa interação com a indústria quando o trabalho tem ênfase tecnológica.

O modelamento de uma estrutura de ônibus simplificada permitiu verificar que o processo convencional de geração da malha de elementos através do próprio sistema de elementos finitos não é muito eficaz. O modelamento de uma estrutura real de ônibus sem chassi

consome algo em torno de 1500 elementos e 800 nós, podendo levar mais de uma semana, em tempo integral, de trabalho de um especialista. Uma alternativa para reduzir este tempo seria gerar o modelo a partir de um desenho, em linhas de arame, feito em algum programa do tipo CAD. Porém este tipo de desenho não é normalmente executado na indústria.

Desenvolveu-se uma formulação apresentada para analisar a estrutura de um ônibus submetida a cargas dinâmicas de excitação na base. A escolha da teoria clássica de fadiga para estimar a vida útil do veículo deve ser encarada sob o ponto de vista de tornar viável, dentro da realidade da nossa indústria, a análise de problemas de grande porte, e de ser também uma teoria conhecida. É claro que esta escolha tem um preço a ser pago. Em alguns aspectos, nem sempre se adotou a alternativa mais correta ou moderna do ponto de vista teórico, mas sim a mais correta das alternativas viáveis dentro da proposta do trabalho. Por exemplo, a forma como as tensões normais e tangenciais foram combinadas é evidentemente uma aproximação simplista. Porém, hoje em dia, soluções mais corretas somente são possíveis com o uso de modelos de elementos finitos e mesmo assim com restrições. Neste sentido, vale dizer que não há, até hoje, nenhuma expressão de “nível macro” (por exemplo do tipo von Mises) que combine tensão normal e tangencial com comportamentos aleatórios.

A decisão de realizar a análise de fadiga baseado em resultados obtidos no domínio da frequência; mesmo quando esta introduziu dificuldades, como no caso do espectro de potência das tensões equivalentes; deve ser encarada como relacionada à linha do trabalho e à obtenção de um código eficiente em tempo de solução.

A decisão de não considerar a possibilidade de falha dos nós, ou melhor juntas de ligação, por fadiga deve ser encarada como uma primeira aproximação ao problema. Neste sentido, o objetivo foi obter um código mais amplo, o que nos permitiu colher resultados mais gerais sobre o comportamento da formulação. Evidentemente, do ponto de vista prático faz-se necessário considerar a possibilidade de falha dos nós, já que esta é mais comum do que a falha das barras propriamente ditas. Para se atingir este objetivo, sugere-se implementar o procedimento de verificação do EUROCODE 3 (1993).

Um dos pontos altos da análise no domínio da frequência é o tempo gasto na solução completa do problema, principalmente quando este é comparado com algoritmos que fazem a solução no domínio do tempo. O tempo total de uma análise completa do ônibus simplificado foi de aproximadamente 23 min, dos quais 21 min (num PII – 300 MHz com 192 Mb de memória)

foram gastos na obtenção dos autovalores e autovetores, 20 s na análise de fadiga e o restante na análise espectral. O tempo baixo da análise de fadiga é resultado do não emprego de rotinas de contagem do tipo *rainflow*, já que o número de ciclos de cada tensão é obtido diretamente dos momentos da distribuição da tensão.

A hipótese de *isotropia* adotada para o campo das irregularidades gerou solicitações de torção baixas no veículo. Como a análise é feita removendo-se as grandes irregularidades (buracos) é de se esperar que esta hipótese seja a mais próxima da realidade. No entanto, faz-se necessário um estudo que considere a influência dos buracos/sobressaltos na vida útil do veículo.

Verificou-se que o critério usual de projeto, baseado em análises estáticas, é bastante conservador para o veículo trafegando em rodovias bem conservadas (O desvio padrão das irregularidades da 1ª rodovia é igual a 0,9 cm. Tem-se indicação que até 0,87 cm seria o desvio padrão de pavimento de concreto.) e é conservativo quando o veículo roda em rodovias médias (O desvio padrão das irregularidades da 2ª rodovia é igual a 1,8 cm. Tem-se indicação que até 1,8 cm seria o desvio padrão de um calçamento de pedra em bom estado.). No entanto, o mesmo critério falha quando se considera rodovias em pior estado (O desvio padrão das irregularidades da 3ª rodovia é igual a 3,6 cm. Tem-se indicação que até 2,5 cm seria o desvio padrão de um calçamento de pedra em mau estado.). Estes resultados são observados na prática, já que freqüentemente as carrocerias de ônibus importados devem sofrer adaptações na sua estrutura para poder atender à vida útil especificada. Por outro lado, mesmo os robustos ônibus nacionais apresentam, com freqüência, falha de algumas barras/juntas de ligação por fadiga.

Com o encerramento deste trabalho obtém-se uma ferramenta computacional bastante útil para otimizar o tempo de desenvolvimento do projeto de um ônibus já que o tempo relacionado com as simulações é muito menor do que os relacionados com os testes dos protótipos. O código desenvolvido atingiu os objetivos esperados que era o de apresentar uma estimativa da vida útil do veículo com um bom embasamento teórico. É claro que diversas hipóteses simplificadoras foram adotadas para isto, logo não se pretende com este programa se encerrar a questão a respeito do assunto.

Finalmente, é importante lembrar que a fadiga de uma estrutura é um processo que certamente se inclui no conjunto dos mais aleatórios dentro da engenharia estrutural. Logo, considera-se um ótimo resultado se o programa implementado acertar o número inteiro de anos

até a falha de um ônibus. Melhor do que isto ficaria associado ao acaso e não ao mérito da formulação.

10.1 SUGESTÕES

As sugestões mais relevantes para dar continuidade a este trabalho são

- Abordar o mesmo problema deste trabalho empregando técnicas de simulação numérica do tipo *Monte Carlo*. Com este tipo de abordagem inclusive o modelo de fadiga pode ser mais sofisticado permitindo um estudo ciclo a ciclo e não apenas uma abordagem baseado num valor médio e desvio padrão para as tensões;
- Implementar um processo de otimização estática da estrutura do ônibus baseado em múltiplas verificações. Este módulo deve trabalhar com bancos de perfis que podem ser utilizados, bem como deve levar em consideração fatores construtivos, que exigem que determinados conjuntos de barras tenham as mesmas seções transversais;
- Levantamento dos espectros das irregularidades dos pavimentos nacionais;
- Tratar as irregularidades com duas trilhas de modo a gerar um maior efeito de torção no veículo. Uma solução para isto seria considerar um fator de correlação entre as trilhas;
- Tratar as grandes irregularidades (buracos/sobressaltos) como um processo aleatório com distribuição de *Poisson*. Com esta abordagem é possível obter uma formulação sem perder a característica de processo estacionário;
- Trabalhar com um modelo mais completo de suspensão que considere a ação dos pneus bem como a variabilidade do amortecimento em função da frequência;
- Implementar o processo apresentado em Lü (1998) para obter o número de ciclos que existe com um determinado nível de tensão;
- Implementar elementos de conexão elástica e de amortecimento;
- Implementar o procedimento de verificação do EUROCODE 3 que permite considerar a influência das juntas na análise;
- Implementar elementos de casca no programa de análise de fadiga de modo a ser possível modelar os reforços;

- Obter os dados necessários para a consideração da influência das áreas envidraçadas das janelas na análise;
- Aplicar o programa resultante na análise de uma estrutura real de um ônibus;
- Realizar ensaios experimentais com um ônibus instrumentado em serviço. Utilizar os dados experimentais obtidos via técnicas de análise modal; frequências, modos e amortecimentos modais; para realimentar o modelo teórico-computacional e com isto fazer re-análises do comportamento mecânico-estrutural e estimar a sua vida útil a fadiga;

ANEXO A - TEORIA DE VLASOV APLICADA AO CAPÍTULO 3

O problema da torção em perfis de seção transversal aberta é governado pela equação diferencial de 4ª ordem não homogênea com coeficientes constantes

$$E\Gamma \frac{d^4\phi}{dx^4} - GJ \frac{d^2\phi}{dx^2} = -m_t, \quad m_t = \frac{dM_t}{dx} \quad (\text{A.1})$$

na qual ϕ é o ângulo de torção da seção, E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, Γ é a constante de empenamento e J é a constante torção. No caso analisado o momento torçor M_t é constante, logo $m_t = 0$ e (A.1) pode ser reescrita como

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} - c^2 \frac{d\phi}{dx} = -\frac{M_t}{E\Gamma}, \quad c^2 = \frac{GJ}{E\Gamma} \quad (\text{A.2})$$

A solução de (A.2) é escrita como a soma de uma solução homogênea do tipo $\phi = \sum C_i e^{\alpha x}$ com uma solução particular do tipo $\phi = ax + b$. As constantes da equação resultante são determinadas de modo a satisfazerem as condições de contorno que são $\phi = 0$, $d\phi/dx = 0$ para o extremo engastado, e $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3\phi}{dx^3} - c^2 \frac{d\phi}{dx} = 0$ para o extremo livre. Somando-se as duas soluções resultantes obtém-se (A.3).

$$\phi = \frac{M_t}{GJc} \left[\tanh cl \cdot (\cosh cx - 1) - \sinh cx + cx \right] \quad (\text{A.3})$$

A tensão normal devida ao empenamento σ_{xw} é calculada por (A.4) na qual $2(w_0 - w)$ representa a função de variação da área setorial.

$$\sigma_{xw} = 2(w_0 - w)E \frac{d^2\phi}{dx^2} = 2(w_0 - w)E \frac{M_t \cdot c}{G \cdot J} \cdot \frac{\sinh[c(l-x)]}{\cosh cl} \quad (\text{A.4})$$

A maior dificuldade no cálculo é obter as propriedades da seção transversal, o que é feito através de tabelas, para seções padrão, ou através de integração numérica para uma seção aberta qualquer (SOKOL - 1989).

Obs. : A teoria apresentada neste anexo pode ser encontrada em forma completa nas publicações de VLASOV (1961) e ODEN & RIPPERGER (1981).

ANEXO B - INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES AO CAPÍTULO 2

B.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

As funções de interpolação (ou funções de forma) mais utilizadas no *método dos elementos finitos* são os polinômios de *Lagrange* ou as funções *Serendipity*, e mais raramente os polinômios de *Hermite* e *Chebyshev*. As funções de interpolação podem ser classificadas como padrão (*standard*) ou como hierárquicas.

B.1.1 Funções de Interpolação Padrão

As funções de interpolação padrão N_i são definidas de modo que estejam associadas às incógnitas a_i , que representam os valores da aproximação $\hat{\phi}$ nos nós, ou seja

$$\phi \cong \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (\text{B.1})$$

na qual N_i vale 1 para o nó $j = i$ e vale 0 para os nós $j \neq i$. Esta característica faz com que seja atribuído às incógnitas o significado físico de valores da função aproximada $\hat{\phi}$ nos nós ou seja $\hat{\phi}_i = a_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, as aproximações de ordem distintas devem usar funções de forma totalmente distintas. As funções mais usadas neste tipo de esquema são os polinômios de *Lagrange* e as funções *Serendipity*.

Os polinômios de *Lagrange* são gerados pela expressão (B.2), que é um polinômio de grau $m = n - 1$ em ξ , e tem valor unitário em $\xi = \xi_i$, e nulo para $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_n$. Nos casos bidimensionais; coordenadas ξ, η ; pode-se considerar funções de interpolação obtidas pelo produto de funções independentes de ξ e de η conforme (B.3).

$$N(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)} \quad (\text{B.2})$$

$$N(\xi, \eta) = N_m^i(\xi) \cdot N_n^j(\eta) \quad (\text{B.3})$$

Com este procedimento obtém-se as funções de interpolação bilineares, expressão (B.4) e as funções utilizadas no elemento quadrilátero quadrático, expressão (B.5).

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & , & \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) & , & \quad N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta-1) & , & \quad N_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta-1) & , & \quad N_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1) \\ N_4 &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta+1) & , & \quad N_5 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta-1) & , & \quad N_6 = \frac{1}{2}\xi(1-\eta^2)(\xi+1) \\ N_7 &= \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta+1) & , & \quad N_8 = \frac{1}{2}\xi(1-\eta^2)(\xi-1) & , & \quad N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A desvantagem destes polinômios é gerar um número grande de nós internos, e apresentar propriedades pobres na representação de curvas no caso de polinômios de grau mais elevado.

Por outro lado, as funções Serendipity têm a vantagem de gerar um número reduzido de nós internos, já que procura-se concentrar estes na fronteira do elemento sempre que possível. Os polinômios usados são do tipo cartesianos completos com a adição de pequenos termos. Estas funções foram originalmente descobertas por inspeção, mas o método de geração delas pode ser encontrado em ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1991b). A expressão (B.6) apresenta as funções Serendipity quadráticas.

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) & , & \quad N_2 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) & , & \quad N_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) & , & \quad N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) & , & \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B.1.2 Funções de Interpolação Hierárquicas

As funções hierárquicas foram introduzidas com o objetivo inicial de se criar elementos que permitissem a transição entre regiões aproximadas por funções de forma de graus distintos. No entanto, o seu uso mais útil se dá em processos de solução iterativa. Estas funções são definidas de modo que quando introduzidas na aproximação $\hat{\phi}$ não alterem as funções N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) preexistentes. Logo, as incógnitas a_i ($i > n$) associadas a estas funções perdem o significado físico de valores nodais da função aproximada. Para exemplificar esta propriedade considera-se uma solução com n graus de liberdade, que é refinada hierarquicamente através da introdução de novas variáveis a_m , logo tem-se

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{n+m} N_i a_i = \mathbf{N}_{n+m} \mathbf{a}_{n+m}. \quad (\text{B.7})$$

A equação básica deste problema, considerado estático elástico linear, é escrita, em forma matricial, como (B.5).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{mn} \\ \mathbf{K}_{mn} & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A matriz \mathbf{K}_{nn} e o vetor \mathbf{f}_n ficam inalterados, logo, as matrizes correspondentes a um nível de aproximação anterior são mantidas. Esta característica torna a solução iterativa bastante ágil por que também melhora o condicionamento da matriz.

Considera-se que o melhor conjunto de funções hierárquicas é aquele que resulta num sistema de equações diagonal. Este resultado é atingido de modo aproximado usando-se funções obtidas de um processo de integração de polinômios de Legendre (SZABÓ & BABUSKA - 1989). Para exemplificar este processo, aproxima-se um domínio unidimensional por duas funções lineares N_1 e N_2 definidas em (B.9).

$$\hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 \quad , \quad N_1 = 1/2(1-r) \quad , \quad N_2 = 1/2(1+r) \quad (\text{B.9})$$

Vai-se introduzir uma função hierárquica do 2º grau N_3 no esquema de interpolação conforme (B.10). Para isto, esta função deve satisfazer as condições $N_3(-1) = 0$ e $N_3(1) = 0$. A função (B.11), na qual α é um valor real qualquer (por exemplo 1) cumpre estas condições.

$$\hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 \quad (\text{B.10})$$

$$N_3 = \alpha \cdot (1-r)(1+r) \quad (\text{B.11})$$

O significado de a_3 é obtido calculando-se o valor da função em $r = 0$, o que fornece $a_3 = \hat{\phi}(r = 0) = -1/2(a_1 + a_2)$. A figura (B.1) indica que a_3 é a distância entre uma reta que passa pelos pontos a_1 e a_2 e a parábola definida pela função de forma

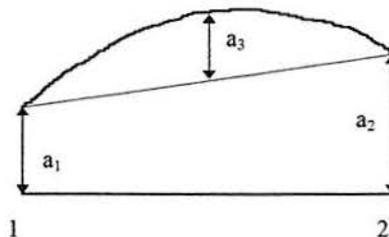


Figura (B.1) - Interpretação física de a_3 .

Analogamente ao que foi feito para o caso unidimensional também podem ser obtidas aproximações hierárquicas para um elemento bidimensional.

B.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO DE CASCA POLIÉDRICA

A matriz de rigidez de um elemento de casca poliédrica é montada a partir do correto posicionamento das submatrizes de EPT, que fornece os graus de liberdade u e v , e de placa; que fornece os graus de liberdade zeros w , R_x e R_y ; como ilustrado no quadro (B.1). A rotação R_z não entra como parâmetro na definição das deformações nem para EPT e tão pouco para placa. Esta rotação, que é relacionada a um momento fictício M_z , não é considerada no processo de minimização da energia podendo ser levada em conta, por simplicidade, preenchendo-se a matriz de rigidez local com um número adequado de zeros, que devem estar dispostos, na linha e na coluna correspondentes ao grau de liberdade R_z . Estes zeros são eliminados na rotação da matriz de rigidez local para o sistema de referência global. Porém, caso vários elementos coplanares concorram num nó, surge uma linha de zeros para a rotação R_z , que é eliminada depois de efetuada a transformação de coordenadas, mas fica uma dependência linear entre as variáveis que conduz à singularidade da matriz global. Este problema é eliminado colocando-se o valor 1 na diagonal principal sempre que todos os elementos que concorrem a um nó forem coplanares.

Quadro (B.1) - Organização da submatriz de rigidez de um nó de casca poliédrica.

	u	v	w	R _x	R _y	R _z
u	EPT	EPT	0	0	0	0
v	EPT	EPT	0	0	0	0
w	0	0	Placa	Placa	Placa	0
R _x	0	0	Placa	Placa	Placa	0
R _y	0	0	Placa	Placa	Placa	0
R _z	0	0	0	0	0	0

B.3 TEORIA DE KIRCHHOFF

A teoria de *Kirchhoff*, desenvolvida em 1850, admite que as retas normais à superfície média da placa na configuração original permanecem retas e normais à superfície média da placa na configuração deformada (ZIENKIEWICZ-1991b). Considera-se também que as tensões na direção normal ao plano definido pela placa são pequenas, estas tensões são da ordem de grandeza das cargas de superfície q que atuam na placa, e logo as deformações nesta direção podem ser desprezadas. Com estas considerações tem-se um *estado plano de tensões* para a placa, e uma distribuição linear de deformações ao longo da espessura. Dentro desta limitação, as soluções obtidas são válidas para placas finas com pequenos deslocamentos.

Para o caso em estudo, o estado de deformações da placa é totalmente descrito em termos do deslocamento transversal dos pontos da superfície média w . Logo, pode-se escrever a (B.12) na qual Φ é o vetor das funções de interpolação e U é o vetor de deslocamentos generalizados. A figura (B.2) ilustra a notação empregada em elementos de placa.

$$w = \Phi U \quad (\text{B.12})$$

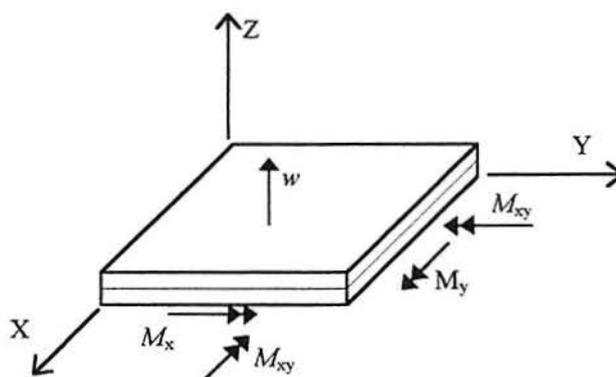


Figura (B.2) - Notação empregada em elementos de placa.

As deformações generalizadas são as curvaturas associadas com a flexão e torção da placa, e as respectivas tensões generalizadas são os momentos fletores e torçores definidos em (B.13).

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

O produto dos momentos pelas mudanças de curvatura é o trabalho interno avaliado dentro das hipóteses assumidas. Logo, a expressão para os trabalhos conterá termos com as derivadas segundas de w . Os critérios de convergência requerem a representação dos estados constantes das derivadas segundas, e a continuidade de w (continuidade C_0) e de suas derivadas primeiras (continuidade C_1). Estas exigências complicam notavelmente a obtenção de funções de forma adequadas, tanto que os primeiros elementos de placa fina eram do tipo *não conformes* ou seja não atendiam de modo completo os critérios de convergência.

B.4 TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

A teoria de *Reissner-Mindlin*, desenvolvida em 1945 por *Reissner* e em 1951, por um processo um pouco distinto, por *Mindlin*, considera os efeitos da deformação transversal

devido ao corte (ZIENKIEWICZ & TAYLOR - 1991b). As hipóteses principais desta teoria são considerar que as retas normais a superfície média da placa na configuração não deformada permanecem retas, mas não necessariamente normais a superfície média na configuração deformada; considerar que as tensões normais a superfície média da placa são desprezíveis de modo que o problema se reduz a um *estado plano de tensões*. Como na teoria de Kirchhoff, estes resultados são válidos para deslocamentos pequenos comparados à espessura da placa. A vantagem dos elementos tipo Mindlin é que as rotações destes são interpoladas de modo independente do deslocamento w , logo apenas a continuidade C_0 é necessária. Portanto, a implementação e desenvolvimento de um elemento baseado na teoria de Mindlin é bem mais simples do que a de um baseado na teoria de Kirchhoff. Devido a importância da teoria de Mindlin no desenvolvimento deste trabalho, apresenta-se um resumo sucinto da mesma. Textos mais completos são encontrados em HINTON (1984).

As variáveis básicas empregadas nesta formulação estão ilustradas na figura (B.2). Considera-se que as rotações $\theta_x(x,y)$ e $\theta_y(x,y)$ são independentes do deslocamento transversal $w(x,y)$. Logo as deformações por flexão e corte podem ser colocadas como

$$\begin{aligned} z\varepsilon_b &= z[\theta_{x,x}, \theta_{y,y}, (\theta_{x,y} + \theta_{y,x})]^T = z(\chi_x, \chi_y, \chi_{xy})^T \\ \varepsilon_s &= (w_x + \theta_x, w_y + \theta_y) = (\chi_{xz}, \chi_{yz}) \end{aligned} \quad (B.14)$$

na qual $\theta_{x,x} = \partial\theta_x/\partial x$, valendo a mesma regra para as demais derivadas; χ_x e χ_y são as curvaturas causadas pela flexão; χ_{xy} é a curvatura causada pela torção; χ_{xz} e χ_{yz} são as deformações transversais causadas pelo corte ou ângulos de corte. Para de material *anisotrópico*, considerando-se EPT, os momentos de flexão podem ser escritos como

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (B.15)$$

e as forças de corte podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{45} \\ D_{45} & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (B.16)$$

em que $D_{ij} = C_{ij}t^3/12$ para $i, j = 1, 2, 6$ e $D_{ij} = k_{ij}^2 C_{ij}t$ para $i, j = 4, 5$, sendo t a espessura da placa, C_{ij} o módulo de elasticidade para as condições de EPT e k_{ij}^2 os fatores de correção para o cortante. A energia potencial total para uma placa de Mindlin pode ser escrita como

$$V = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_b^T \mathbf{D}_b \varepsilon_b dx dy + \frac{1}{2} \iint \varepsilon_s^T \mathbf{D}_s \varepsilon_s dx dy - \iint w q dx dy - \int_S (M_n \theta_n + M_{ns} \theta_s + Q_n w) ds \quad (\text{B.17})$$

na qual q é a carga normal à superfície média da placa por unidade de área; M_n , M_{ns} e Q_n são os momentos e forças de corte por unidade de comprimento da porção S da fronteira da placa. Os termos da (B.17) representam a energia de deformação por flexão, energia de deformação por corte, energia potencial das cargas de superfície e energia potencial das solicitações na fronteira da placa. Para $D_{45} = 0$, a energia de deformação por corte é escrita como

$$\frac{1}{2} \iint [D_{55} (\theta_x + w_{,x})^2 + D_{44} (\theta_y + w_{,y})^2] dx dy = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_s^T \mathbf{D}_s \varepsilon_s dx dy \quad (\text{B.18})$$

que pode ser considerado como um termo de penalidade que leva gradativamente para as condições de placa fina $\chi_{xz} = \theta_x + w_{,x} = 0$ e $\chi_{yz} = \theta_y + w_{,y} = 0$ a medida que a espessura da placa é reduzida. São estes termos que causam o efeito de travamento (*locking*), nos elementos de Mindlin, quando a situação limite de placa fina é aproximada. A imposição destas restrições leva à obtenção de resultados mais rígidos para a placa com a conseqüente majoração dos valores relativos ao cortante. Para placas muito finas, a hipótese de Kirchhoff é quase exata ou seja as deformações por corte são quase nulas. Em tal caso, as distorções de corte têm valores muito pequenos estabelecendo uma quase dependência linear entre as rotações e as derivadas dos deslocamentos transversais. Estes parâmetros conduzem a um mau condicionamento do sistema de equações e a resultados errôneos. Logo, elementos tipo Mindlin têm resultados desapontadores para placas finas. Entretanto, esta afirmação somente é verdadeira, quando é usada a integração numérica exata em elementos Mindlin padrão, caso do elemento de 8 nós com funções Serendipity quadráticas. Na solução deste problema são usadas as técnicas de integração reduzida e integração seletiva (HINTON - 1984).

A integração reduzida consiste em integrar com um número de pontos aquém do necessário para avaliar de modo correto as funções interpoladoras. A escolha do esquema de integração segue duas regras. A primeira delas diz que um polinômio de ordem $(2n-1)$ é integrado de modo exato com n pontos de Gauss. A segunda diz que o esquema de integração deve avaliar corretamente o determinante do jacobiano do elemento ou seja deve avaliar bem a área ou o volume do elemento. Logo, para integrar as funções Serendipity quadráticas são necessários 3×3 pontos de Gauss, e para integrar de modo reduzido são necessários 2×2 pontos de Gauss. Usando-se integração reduzida em elementos isoparamétricos de Mindlin tem-se uma melhora no funcionamento destes com relação ao travamento, mas esta estratégia causa problemas no *rank* da matriz de rigidez.

Esta deficiência *rank*¹ da matriz é causada pela introdução de modos espúrios de energia nula (autovalores nulos). A matriz de rigidez de um bom elemento de placa, sem nenhum tipo de condição de vinculação aplicada, deve ter apenas 3 autovalores nulos que correspondem aos movimentos de corpo rígido do elemento. Para se obter o número de autovalores nulos de um elemento deve-se resolver um problema de autovalores do tipo $(\mathbf{K}^e - \lambda_i \mathbf{I})\phi_i = 0$ em que \mathbf{K}^e é a matriz de rigidez do elemento, λ_i são os autovalores e ϕ_i são os autovetores. Para melhorar o *rank* da matriz usa-se a técnica da *integração seletiva*, que consiste em avaliar os termos de flexão de modo completo enquanto os termos de corte são avaliados por um esquema reduzido. Este procedimento normalmente consegue reter o *rank* necessário para a matriz de rigidez. A tabela (B.1) mostra o número de autovalores nulos para elementos tipo usando vários esquemas de integração (um elemento de placa tem sempre 3 autovalores nulos).

Tabela (B.1) - Número de autovalores nulos para um elemento de placa de Mindlin sem condições de vinculação.
(HINTON-1984).

NNE	Completa	Seletiva	Reduzida
4	3	5	7
8	3	3	4
9	3	4	7
12	3	3	3
16	3	4	7

Com a integração seletiva, o elemento Serendipity de 8 nós não tem deficiência no rank, enquanto o elemento de Lagrange de 9 nós tem um autovetor nulo. O elemento de 4 nós, com funções de interpolação bilineares, tem dois autovalores nulos que o tornam muito sensível a distorções do tipo r.a. Vale mencionar que, em alguns casos, os modos de energia nula são não comunicantes entre os elementos não afetando os resultados de modo significativo. Porém, a existência de modos de energia nula deve sempre ser visto com suspeita.

Seguindo a exposição da formulação dos elementos placa, pode-se escrever os deslocamentos e rotações num ponto (ξ, η) num elemento típico com n nós como

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^e & 0 & 0 \\ 0 & -N_i^e & 0 \\ 0 & 0 & -N_i^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_i^e \\ \beta_{xi}^e \\ \beta_{yi}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i^e \mathbf{a}_i^e \quad (\text{B.19})$$

¹Rank ou Característica de uma matriz é a ordem da maior submatriz quadrada com determinante não nulo que pode ser obtida a partir da matriz original.

em que N_i^e são as funções de interpolação usadas para representar os deslocamentos w e as rotações normais β_x e β_y . As curvaturas podem então ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x}^e & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y}^e \\ 0 & -N_{i,y}^e & -N_{i,x}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_i^e \\ \beta_{xi}^e \\ \beta_{yi}^e \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_b = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{bi}^e \mathbf{a}_i^e \quad (\text{B.20})$$

na qual \mathbf{B}_{bi}^e é a matriz das curvaturas do elemento e . Já as deformações por corte são descritas pela expressão (B.21).

$$\begin{bmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x}^e & -N_i^e & 0 \\ N_{i,y}^e & 0 & -N_i^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_i^e \\ \beta_{xi}^e \\ \beta_{yi}^e \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Logo, desprezando as cargas pontuais, a contribuição para a energia potencial total do elemento e pode ser escrita como (B.22), que também pode ser colocada como (B.23)

$$V^e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \iint [\mathbf{a}_i^e]^T \left([\mathbf{B}_{bi}^e]^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj}^e + [\mathbf{B}_{si}^e]^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj}^e \right) dx dy \mathbf{a}_i^e \right) - \sum_{i=1}^n \iint [\mathbf{a}_i^e]^T [\mathbf{N}_i^e]^T \mathbf{q} dx dy \quad (\text{B.22})$$

$$V^e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\mathbf{a}_i^e]^T (\mathbf{K}_{bij}^e + \mathbf{K}_{sij}^e) \mathbf{a}_i^e - \sum_{i=1}^n [\mathbf{a}_i^e]^T \mathbf{f}_i^e \quad (\text{B.23})$$

na qual \mathbf{K}_{bij}^e e \mathbf{K}_{sij}^e são as contribuições para as submatrizes de rigidez do elemento associadas com as energias de deformação por flexão e corte. Usando-se a representação isoparamétrica para calcular as integrais indicadas em (B.25), escreve-se as coordenadas de um nó conforme (B.24) na qual x_i^e e y_i^e são as coordenadas do nó i .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^e & 0 \\ 0 & N_i^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i^e \\ y_i^e \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

A matriz do jacobiano do elemento e a sua inversa são determinadas conforme representação isoparamétrica padrão (HINTON – 1984). As derivadas das funções de forma no sistema cartesiano são obtidas pela regra da cadeia ($N_{i,x} = N_{i,\xi} \xi_x + N_{i,\eta} \eta_x$ e $N_{i,y} = N_{i,\xi} \xi_y + N_{i,\eta} \eta_y$). Expressando a área de um elemento como $dx dy = \det \mathbf{J} d\xi d\eta$, logo, as contribuições para a matriz de rigidez e vetor de cargas podem ser escritas como (B.25).

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{b_{ij}}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_{bi}^e]^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj}^e \det \mathbf{J} d\xi d\eta, \quad \mathbf{K}_{s_{ij}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_{si}^e]^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj}^e \det \mathbf{J} d\xi d\eta \\ \mathbf{f}_i^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}_i^e]^T q \det \mathbf{J} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

B.5 TENDÊNCIAS ATUAIS DOS ELEMENTOS DE PLACA

O desenvolvimento de elementos de placa não é um assunto fechado. Esforços contínuos são realizados por diversos pesquisadores na busca de uma formulação que resulte em boas características para o elemento (POLIT et al. - 1994). As principais características de um bom elemento de placa são:

- a) modelar adequadamente todos os tipos de placas nos quais os efeitos do corte transversal pode ser significativo ou não, sem apresentar travamento;
- b) não deve apresentar modos espúrios de energia nula a não ser os correspondentes aos movimentos de corpo rígido do elemento;
- c) os graus de liberdade do elemento devem ser os usualmente utilizados na Engenharia, tais como deslocamento transversal e rotações, devendo existir em todos os nós do elemento;
- d) deve apresentar boas características de convergência para placas finas e espessas. Deve ser preciso, com poucos graus de liberdade, sem apresentar oscilações.

Esta lista de características, embora reduzida, não é facilmente conquistada, por este motivo o desenvolvimento de novos elementos de placa é um assunto atual, haja visto o grande número de artigos publicados nas revistas especializadas. A seguir comenta-se as características de alguns dos “novos” elementos considerados significativos conforme opinião do autor.

HINTON (1984) propôs o elemento *heterosis* (termo usado na Genética para indicar a melhoria das características exibidas pelos híbridos em comparação com os pais) cuja idéia básica é interpolar o deslocamento transversal w com as funções Serendipity e as rotações com as funções Lagrangianas quadráticas. Deste modo, quando se usa integração seletiva elimina-se o autovetor nulo do elemento LQ, bem como travamento mesmo nas situações de placa muito fina. A grande vantagem deste elemento é ser de fácil implementação.

MACNEAL & HARDER (1992) propôs um elemento de 8 nós com funções de interpolação modificadas de modo a se obter as boas características do elemento LQ mantendo as do elemento SQ. Segundo o autor, a única vantagem comprovada do LQ é que ele pode passar nos testes de curvatura constante com geometria bilinear enquanto que o SQ não. Outra razão mencionada por vários autores (POLIT et al. - 1994) é que o SQ apresenta o travamento mais acentuado que o elemento de 9 nós. Para que o SQ tenha as características antes discutidas, aplica-se uma conveniente restrição de projeto que faz com que os deslocamentos do nó interno do LQ sejam uma combinação linear dos deslocamentos dos 8 nós externos. O elemento resultante apresenta melhores características que o SQ e é de simples implementação. O único custo computacional introduzido por este elemento é a decomposição de uma matriz 8x8 para o cálculo dos coeficientes para combinação linear dos deslocamentos.

ZIENKIEWICZ & XU (1993) desenvolveram o elemento de 4 nós que usa o conceito de interpolação unida (*Linked Interpolation*), equação (B.24), que difere da utilizada em elementos Mindlin, equação (B.23). Nestas expressões \bar{w} , $\bar{\theta}$, \bar{S} são parâmetros apropriados do deslocamento lateral, da rotação e do esforço cortante. A vantagem desta abordagem é que as funções de interpolação usadas para w são de ordem mais alta que as usadas para θ . Esta característica melhora o comportamento do elemento quando este é usado para modelar placas finas nas quais as rotações são função da derivada primeira do deslocamento w .

$$w = N_w \bar{w} \quad , \quad \theta = N_\theta \bar{\theta} \quad , \quad S = N_s \bar{S} \quad (2.26)$$

$$w = N_w \bar{w} + N_{w\theta} \bar{\theta} \quad , \quad \theta = N_\theta \bar{\theta} \quad , \quad S = N_s \bar{S} \quad (2.27)$$

Este elemento define a rotação num ponto interno usando uma função bolha, e o esforço cortante é constante no elemento. O elemento resultante é robusto e de fácil implementação, mas possui dois modos de energia nula sendo um destes comunicante. Dando seqüência a este trabalho, XU & ZIENKIEWICZ (1994) desenvolveram o elemento de quatro nós Q4Bla, de simples implementação, também baseado em interpolação unida. Este elemento usa 4 nós internos especificamente para a rotação. A função bolha foi substituída por quatro funções definidas nos nós. Este elemento não apresenta nenhum modo de energia nula e, tem uma boa performance em problemas de placas finas e espessas.

KATILI (1993) desenvolveu o elemento DKMQ (*Discrete Kirchhoff Mindlin Quadrilateral*) baseado no consagrado DKQ. O resultado obtido é um elemento de placa de 4 nós que não contém autovalores nulos, passa nos testes para placas finas e espessas utilizando malhas arbitrárias e não apresenta travamento. A implementação deste elemento segue a mesmo processo do DKQ sendo necessário a definição de uma série de variáveis auxiliares.

POLIT et al. (1994) propôs um elemento de 8 nós cuja matriz de rigidez de corte é obtida de modo inconsistente usando o *método do campo de deformações assumido* (*Assumed Strain Field Method*). O resultado é um elemento que pode ser utilizado para placas muito finas e para placas espessas sem apresentar travamento e autovalores nulos. Apresenta características de convergência muito boas para placas finas e espessas sendo também fortemente insensível a distorção da malha, mas é um elemento de implementação trabalhosa.

Em resumo, verifica-se que os novos elementos de placa estão baseados na teoria de Mindlin devendo apresentar comportamento que tende a teoria de Kirchhoff quando a espessura da placa é reduzida. A integração seletiva não é mais usada em todos os casos, e a integração reduzida somente é usada quando os autovalores nulos são eliminados por algum processo tais como o método do campo de deslocamentos.

ANEXO C TERMINOLOGIA RELACIONADA À CARROCERIA E CHASSI

Apresenta-se a seguir a terminologia empregada para os elementos que formam a carroceria e o chassi de um ônibus. Este material foi extraído da norma NBR 5533 - 1988 intitulada: "Veículos Rodoviários Automotores, Carroceria e Quadro do Chassi".

C.1 COMPONENTES DA CARROCERIA EM BRUTO DE ÔNIBUS

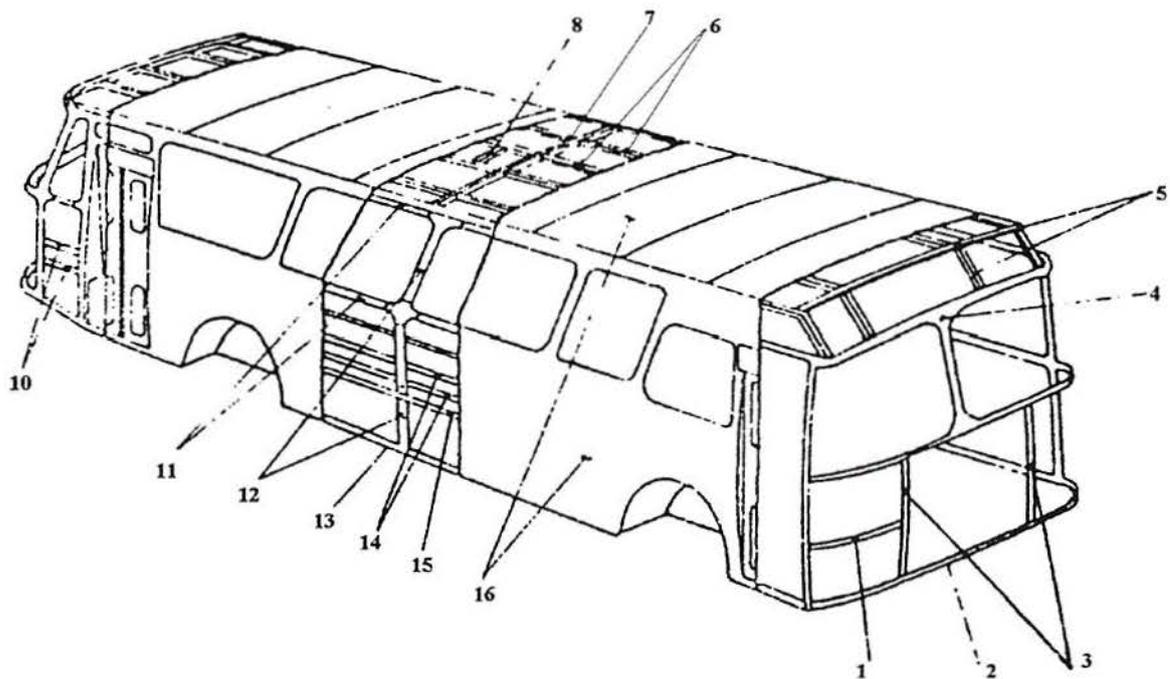


Figura (C.1) - Carroceria em bruto de ônibus.
(ABNT - NBR 5533 - 1988)

- 1 - Apoio curvo do chapeamento;
- 2 - Suporte do painel dianteiro;
- 3 - Coluna de grade de entrada do ar para o radiador
- 4 - Quadro do pára-brisa;
- 5 - Apoio da cúpula;
- 6 - Longarina do teto;
- 7 - Arco do teto;
- 8 - Apoio da canalizadora do ar
- 9 - Quadro da janela traseira;
- 10 - Reforço;
- 11 - Travessa de ligação das colunas;
- 12 - Coluna;
- 13 - Longarina da saia
- 14 - Apoio do chapeamento;
- 15 - Longarina do rodapé;
- 16 - Chapeamento

C.2 COMPONENTES DA PLATAFORMA DA CARROCERIA DE ÔNIBUS

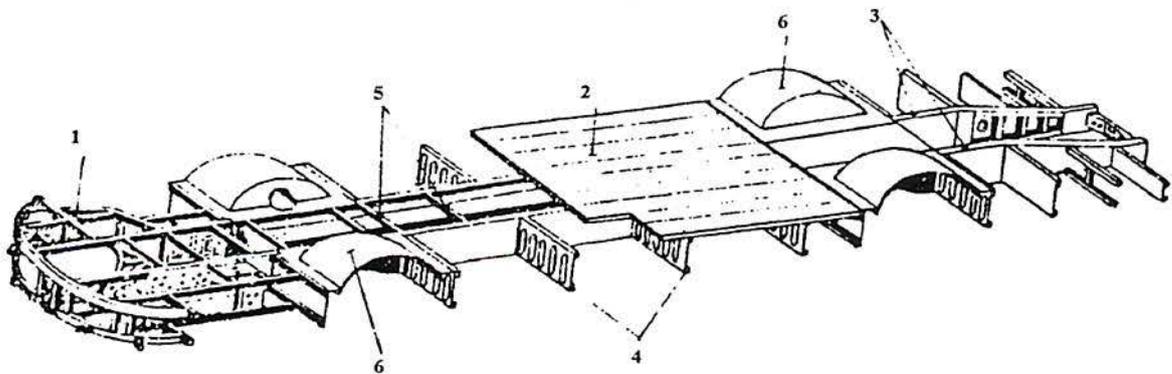


Figura (C.2) - Plataforma da carroceria de ônibus.
(ABNT - NBR 5533 - 1988)

- 1 - Estrutura dianteira;
- 2 - Assoalho;
- 3 - Longarina;
- 4 - Travessa de sustentação do assoalho;
- 5 - Travessa;
- 6 - Caixa da roda.

ANEXO D - EFEITO DO EMPENAMENTO EM SEÇÕES TUBULARES

O efeito do empenamento em seções fechadas de pequena espessura é menos importante que nas seções abertas. Efetivamente a rigidez a torção destas seções é muito maior que o das seções abertas. Entretanto, sabe-se que toda seção fechada; que não for circular ou tubular circular; está sujeita teoricamente ao empenamento. Em particular, a restrição do empenamento não leva geralmente a grandes momentos torçores. Porém, no caso de seções fechadas, deve ser garantida a compatibilidade nas juntas, de qualquer empenamento na seção da barra e da taxa de torção ao longo da barra, mesmo em seções livres dele. A questão passa a ser quando o empenamento é relevante?

A importância do empenamento em seções fechadas depende fundamentalmente do tamanho da junta de ligação em relação ao comprimento da barra. A solução analítica, mesmo para casos simples, deste tipo de problema não é trivial. As hipóteses empregadas para seções abertas, que a forma da seção transversal permanece constante e que as deformações de corte são desprezíveis, não são válidas para seções fechadas porque elas levam à deformações cinematicamente impossíveis. Neste caso, os deslocamentos adicionais provenientes da deformação da seção transversal devem ser somados aos correspondentes a uma seção aberta. O procedimento para análise de seções fechadas, mais especificamente seções retangulares, pode ser encontrado em BEERMANN (1989).

Apresenta-se a seguir exemplos que investigam a importância do empenamento em perfis tubulares retangulares. Nestes exemplos considera-se o caso de uma viga engastada livre submetida a torção. Em todos os problemas o material da viga é aço com $E = 2,1 \times 10^5$ MPa e $\nu = 0,3$. Comparam-se as soluções obtidas pelo uso de elementos de casca com a solução analítica considerando-se apenas a torção correspondente a solução de Saint Venant, a qual estabelece que o fluxo de corte é constante para todos os pontos da seção (ODEN & RIPPERGER - 1981). As tensões equivalentes são determinados pelo critério de von Mises.

Os elementos utilizados na análise são o elemento de 8 nós do sistema GAELI e o elemento *shell63*, de 4 nós, do sistema ANSYS (SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, 1992). Em todos os exemplos, as malhas de elementos finitos utilizadas foram definidas nas coordenadas da linha média da seção.

D.1 EXEMPLO 1

A figura (D.1) ilustra a geometria do problema. O momento torçor que atua na viga vale 1456785 Nmm. As tensões de corte e equivalente valem 5,6 MPa e 9,7 MPa para todos os pontos da seção. Este exemplo foi analisado originalmente por PAAVOLA (1992).

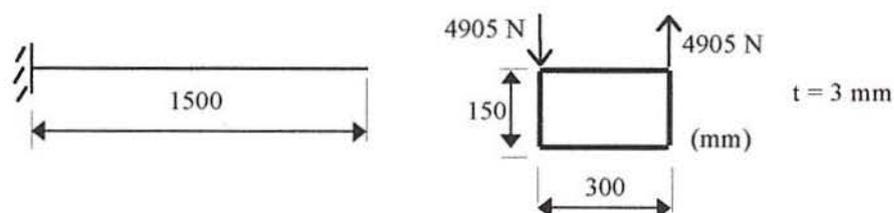


Figura (D.1) - Geometria do problema.

A figura (D.2) ilustra a malha deformada, as figuras (D.3) e (D.4) apresentam a distribuição da tensão σ_x e as figuras (D.5a) e (D.5b) ilustram a distribuição da tensão τ_{xy} , nas paredes horizontais e verticais do tubo.

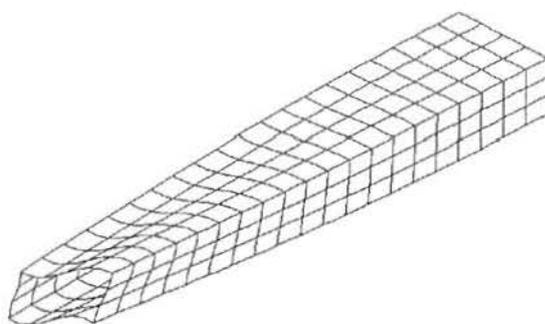


Figura (D.2) - Malha de elementos finitos empregada.

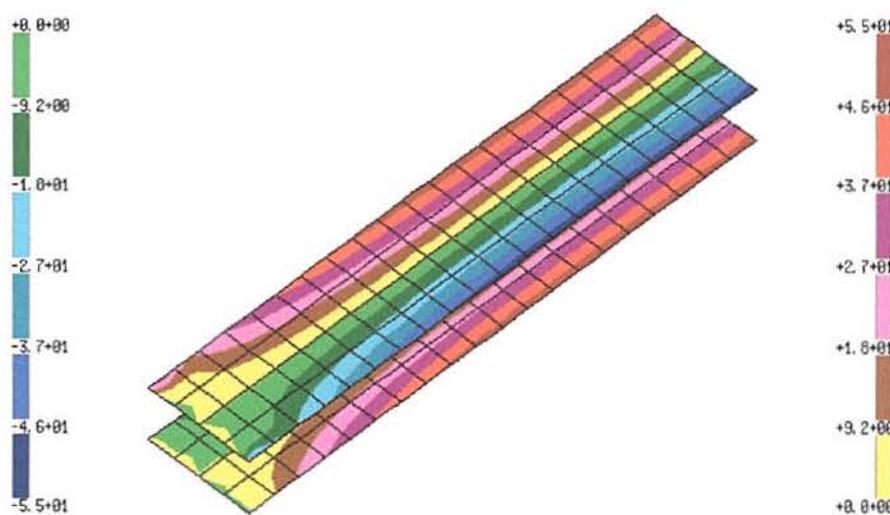


Figura (D.3) - Tensão σ_x [MPa] nas paredes horizontais do tubo.

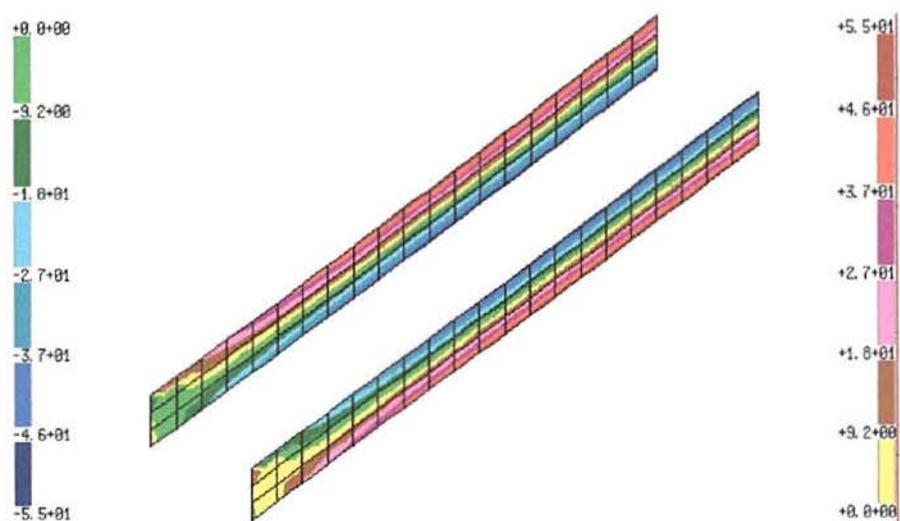


Figura (D.4) - Tensão σ_x [MPa] nas paredes verticais do tubo.

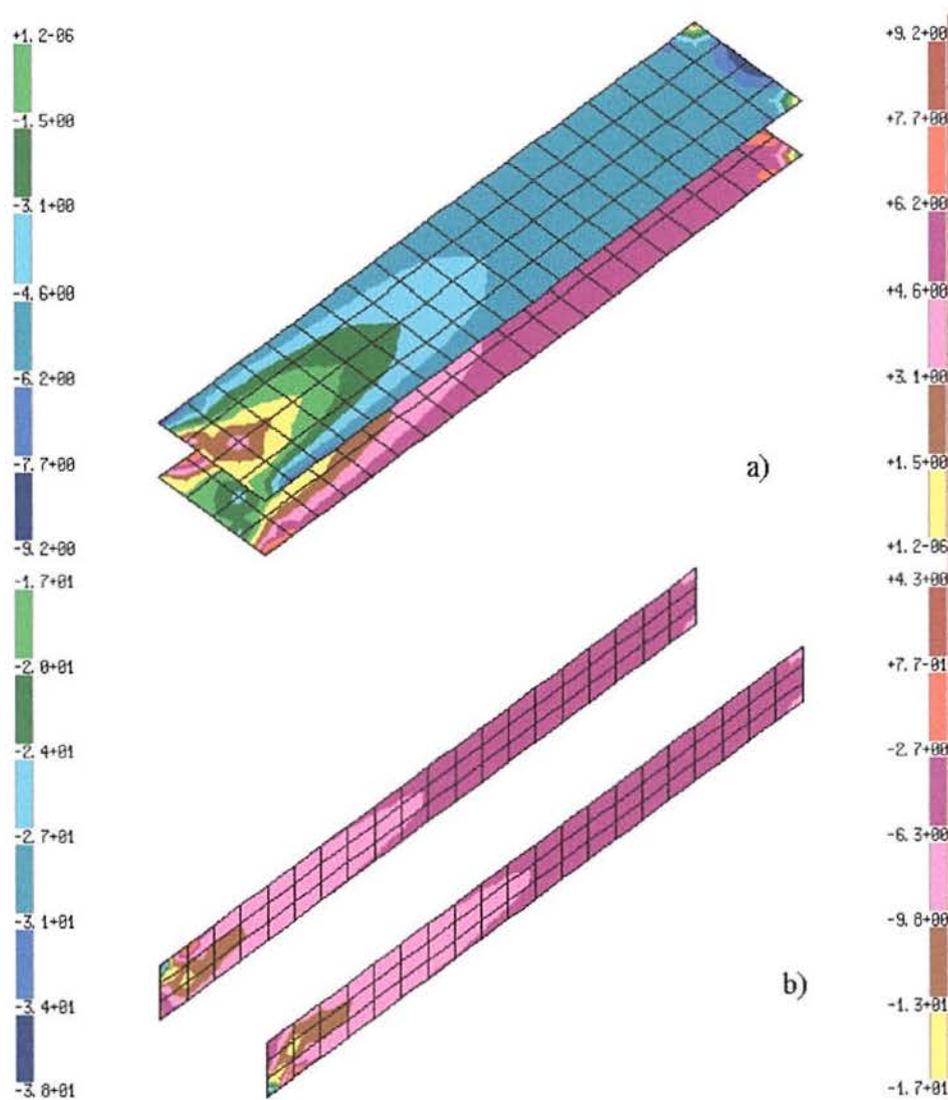


Figura (D.5) - Distribuição de tensão de corte [MPa] no tubo.

- a) Paredes horizontais.
b) Paredes verticais.

Pelos resultados obtidos verifica-se que as tensões σ_x são dominantes, o que indica que o empenamento é relevante. Este resultado é confirmado pela deformada da viga que não apresenta um comportamento de torção em todo o seu comprimento. Na realidade, o que ocorre é uma flexão localizada na região de aplicação das cargas.

D.2 EXEMPLO 2

Considera-se o problema anterior alterando-se apenas a espessura da parede do tubo para 6 mm. Logo, o momento torçor vale 1442070 Nmm, a tensão de corte vale 2,9 MPa, e a tensão equivalente vale 5 MPa para todos os pontos.

A figura (D.6) ilustra a malha deformada, e as figuras (D.7) e (D.8) apresentam as distribuições de tensões σ_x e τ_{xy} para as paredes horizontais do tubo. Nota-se que as tensões σ_x ainda são predominantes, portanto o empenamento é importante. Esta observação fica confirmada pela deformada da viga, que não apresenta um comportamento de torção pura.

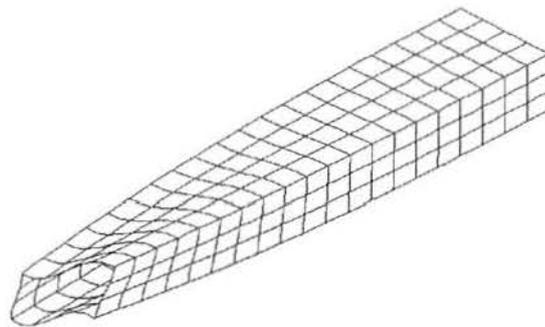


Figura (D.6) - Deformada da viga.

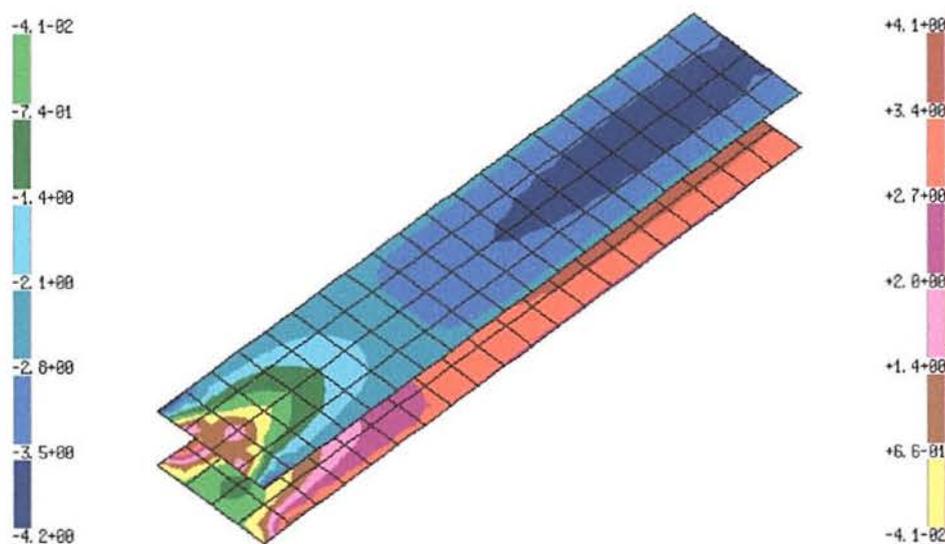


Figura (D.7) - Tensão σ_x [MPa] nas paredes horizontais do tubo.

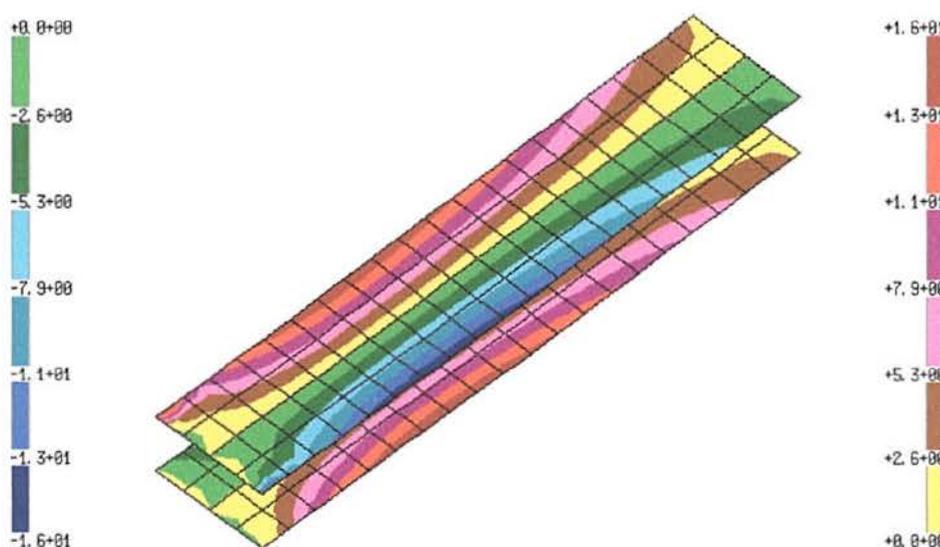


Figura (D.8) - Tensão τ_{xy} [MPa] nas paredes horizontais do tubo.

As dimensões do tubo considerado (150 mm x 300 mm) provavelmente foram escolhidas para tornar o efeito do empenamento preponderante. Porém, os resultados obtidos até aqui não são aplicáveis a estruturas de ônibus já que os perfis usados são mais compactos. As dimensões máximas dos tubos manufaturados são de 130 mm x 130 mm para tubos quadrados e 110 mm x 130 mm para tubos retangulares com espessura mínima de 2 mm.

D.3 EXEMPLO 3

As dimensões do perfil e da viga estão ilustradas na figura (D.9). O momento torçor vale 185000 Nmm, a tensão de corte vale 17,7 MPa e a tensão equivalente de von Mises vale 30,7 MPa.

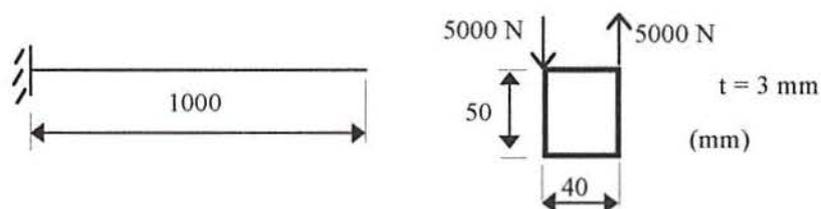


Figura (D.9) - Esquema da viga analisada.

Ao contrário dos exemplos anteriores, a viga apresenta um comportamento de torção generalizada ilustrado na figura (D.10). As figuras (D.11a), (D.11b) apresentam a distribuição das tensões σ_x e τ_{xy} para a parede horizontal do tubo. Nota-se que as tensões τ_{xy} são dominantes na maior parte da peça, mas as tensões σ_x têm valores relevantes da ordem de 60% das tensões τ_{xy} . Estas observações também se aplicam às paredes verticais do tubo.



Figura (D.10) - Malha de elementos finitos utilizada.

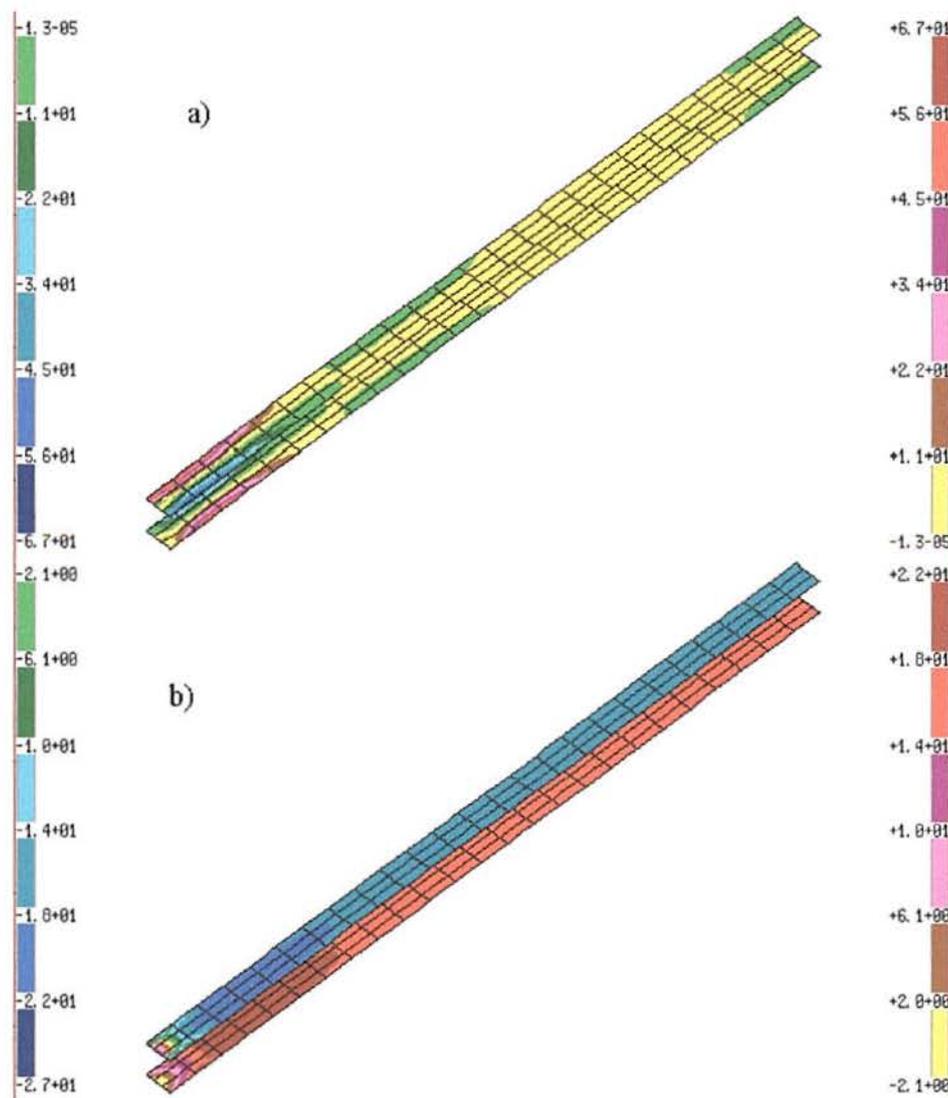


Figura (D.11) - Distribuições das tensões nas paredes horizontais do tubo.

a) Tensão σ_x [MPa].

b) Tensão τ_{xy} [MPa].

No sistema GAELI, regiões com grandes gradientes de tensões usam um número maior de cores enquanto regiões com baixos gradientes usam um número reduzido de cores, para representar a distribuição das tensões. Isto dificulta a interpretação dos resultados em regiões de baixo gradiente (neste problema as tensões σ_x variam de 0 a 11 MPa numa região importante do tubo). Uma solução para este caso é a representação dos resultados apenas na região de interesse da peça. Entretanto, optou-se por analisar o mesmo problema, ver resultados na figura (D.12), no sistema ANSYS.

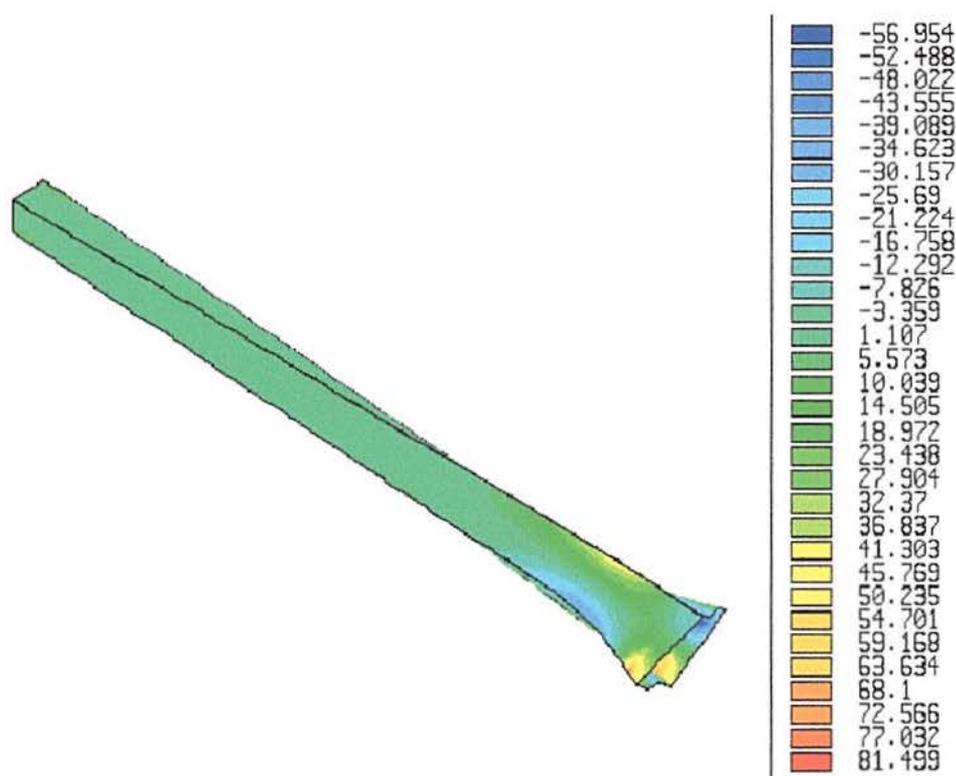


Figura (D.12) - Distribuição de tensão σ_x [MPa] no tubo obtido pelo sistema Ansys.

As tensões σ_x têm um valor em torno de 5 MPa para a maior parte da peça, o que corresponde a 28% das tensões τ_{xy} desta mesma região.

Este exemplo foi rodado no Centro Nacional de Supercomputação (CESUP - UFRGS).

D.4 EXEMPLO 4

Considera-se o problema anterior alterando-se a espessura do tubo para 1 mm. Logo, o momento torçor vale 195000 Nmm, a tensão τ_{xy} vale 51 MPa e a tensão de von Mises vale 88,3 MPa. As figuras (D.13), (D.14a) e (D.14b) apresentam a deformada da viga e as distribuições das tensões σ_x e τ_{xy} para as paredes horizontais do tubo.

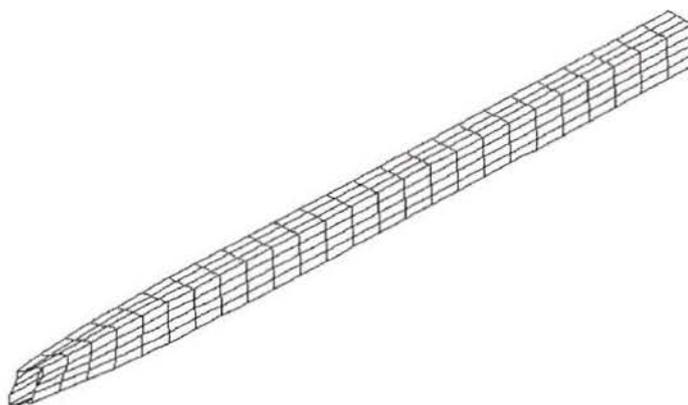


Figura (D.13) - Deformada da viga.

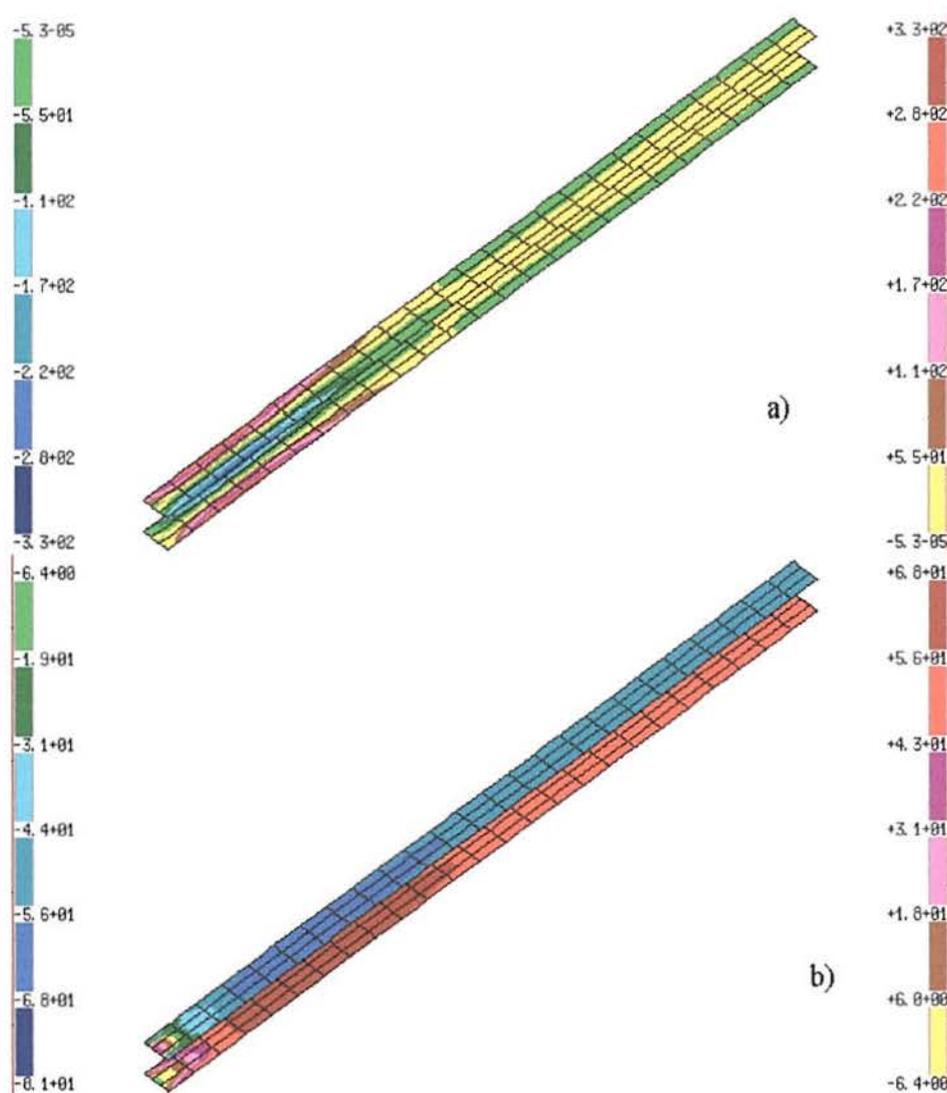


Figura (D.14) - Distribuições das tensões nas paredes horizontais do tubo.

- a) Tensão σ_x [MPa].
 b) Tensão τ_{xy} [MPa].

Pelos resultados obtidos, verifica-se que a viga não apresenta comportamento de torção. Nota-se que as tensões σ_x são da mesma ordem de valor ou superiores às tensões τ_{xy} .

D.5 OBSERVAÇÕES

O modo como as cargas foram aplicadas nos exemplos anteriores, de certa forma, favorece o empenamento. Verifica-se ser mais eficiente, para simular um efeito de torção, aplicar as cargas conforme figura (D.15). Os exemplos anteriores foram novamente analisados com esta forma de aplicação das cargas, que foram calculadas de modo a manter os valores originais dos momentos torçores, e admitindo-se o mesmo módulo para todas as forças. Por este critério, as cargas para os exemplos D.3 e D.4 valem 550,6 N e 554 N.

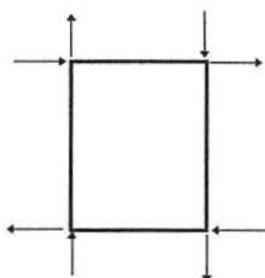


Figura (D.15) - Esquema alternativo para aplicação das cargas.

Nos exemplos D.1 e D.2 não ocorreram mudanças significativas nos resultados. Porém nos exemplos D.3 e D.4, os resultados tiveram alterações consideráveis como ilustram as figuras (D.16) e (D.17), exemplo D.3, e as figuras (D.18) e (D.19) correspondentes ao exemplo E.4.

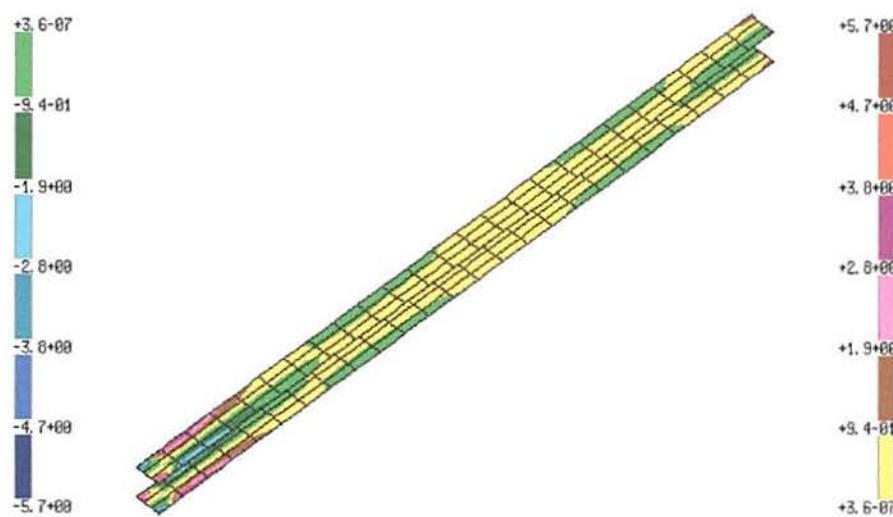


Figura (D.16) - Distribuição da tensão σ_x [MPa].

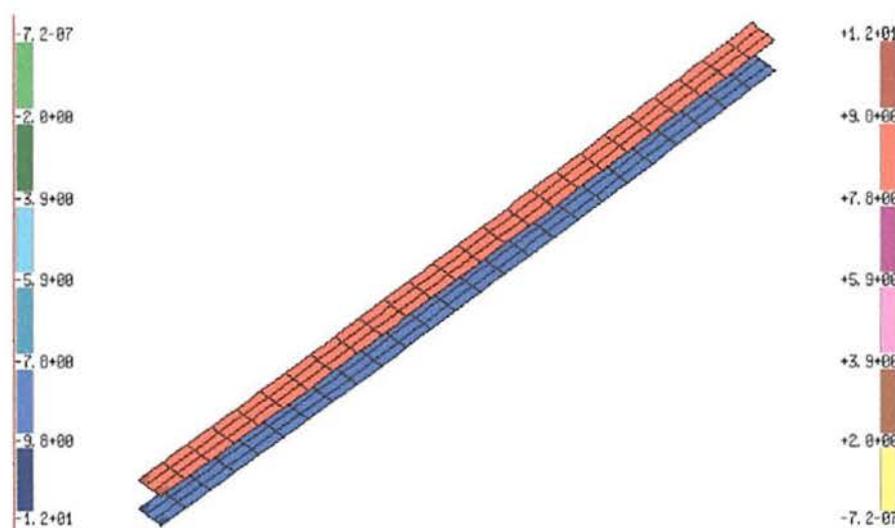


Figura (D.17) - Distribuição da tensão τ_{xy} [MPa].

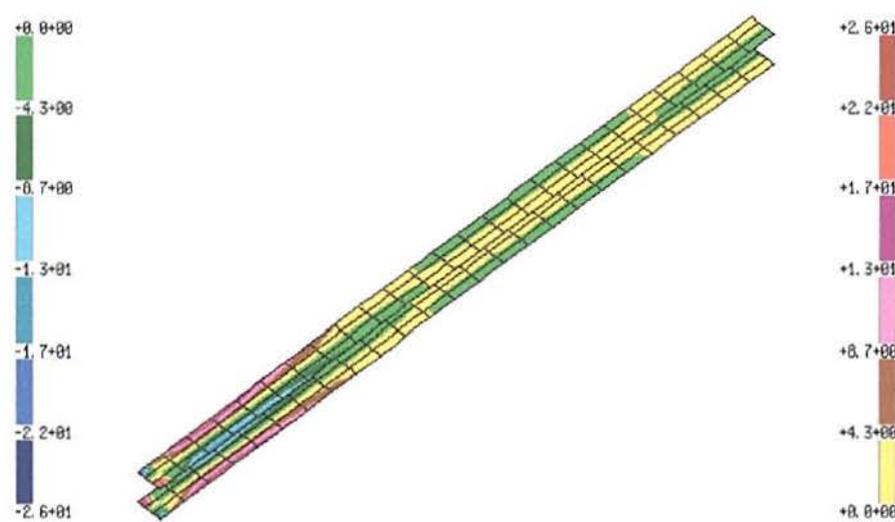


Figura (D.18) - Distribuição da tensão σ_x [MPa]

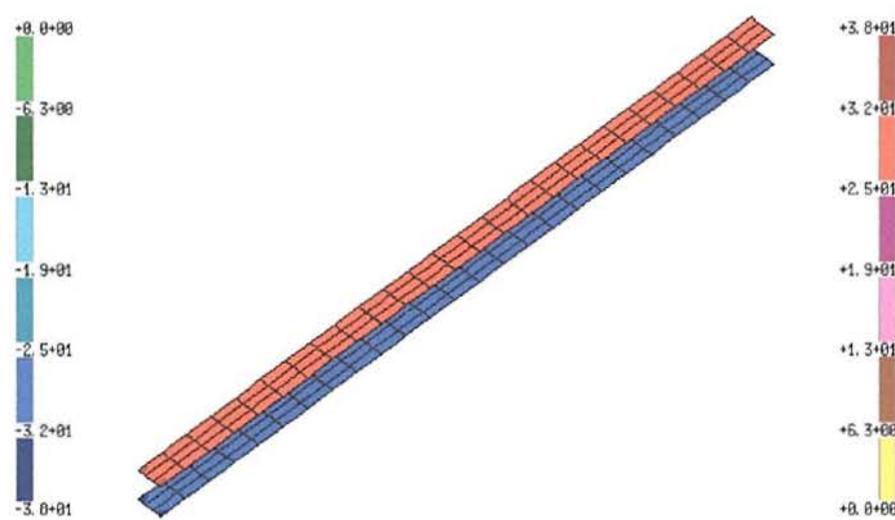


Figura (D.19) - Distribuição da tensão τ_{xy} [MPa]

No exercício **D.3** nota-se que as tensões σ_x têm valores pequenos, em torno de 1 MPa, para a maior parte da peça, o que corresponde a aproximadamente 10% da tensão de corte nesta região. No exercício **D.4**, as tensões σ_x representam 13% das tensões de corte na mesma região. Logo, conclui-se que o empenamento não é relevante nestes casos.

Concluindo, constatou-se que nos exemplos **D.1**, **D.2** e **D.4** o empenamento é relevante desde que se aplique as cargas da maneira inicialmente apresentada. Aplicando-se as cargas conforme figura (D.15) o empenamento deixa de ser relevante no exercício **D.4**.

A tabela (D.1) apresenta as características de cada exemplo realizado. Nesta tabela a e b são as dimensões da seção tubular, t é a espessura da parede do tubo e l é o comprimento da viga. Pode-se observar que a medida que as relações a/t , b/t e a/b tem o seu valor reduzido, ou seja a medida que a seção é mais compacta, o efeito de empenamento da seção é menos relevante. Pelos exemplos estudados verifica-se que as relações l/a e l/b não tem influência significativa nos resultados.

Tabela (D.1) - Características dos exemplos estudados.

Exemplo	a/t	b/t	l/a	l/b	a/b
1	100	50	10	5	2
2	50	25	10	5	2
3	16.7	13.3	20	25	1.25
4	50	40	20	25	1.25

Portanto, considerando-se as dimensões típicas das seções transversais empregadas em carrocerias de ônibus, 60x40x2.65 mm e 40x40x2.65 mm, conclui-se que o efeito do empenamento nestes perfis não é relevante.

ANEXO E - DEFINIÇÕES COMPLEMENTARES AO CAPÍTULO 4

As definições apresentadas tratam de processos aleatórios *estacionários e ergódicos*.

VALOR ESPERADO E VALOR QUADRÁTICO MÉDIO

Uma variável aleatória $x(t)$ tem o seu valor esperado e seu valor quadrático médio dados por (E.1) e (E.2). O valor quadrático médio representa a energia média associada a variável. Ele é o segundo momento não central de um processo aleatório sendo representado como $\psi^2 = \mu^2 + \sigma^2$. O valor *rms* (*root mean square*) de $x(t)$ é calculado por $\sqrt{\psi_x^2}$.

$$\eta_x = E[x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (\text{E.1})$$

$$\psi_x^2 = E[x^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (\text{E.2})$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

Defini-se a transformada de Fourier $\bar{X}(\omega)$ de $x(t)$ e a sua correspondente inversa pela expressão (E.3). Já o complexo conjugado $\hat{X}(\omega)$ é definido por (E.4).

$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (\text{E.3})$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{E.4})$$

Para o cálculo da transformada de Fourier de uma derivada de ordem r considera-se a expressão (E.5), e para o complexo conjugado correspondente considera-se (E.6).

$$\bar{F}\left(\frac{d^r x(t)}{dt^r}\right) = (i\omega)^r \bar{F}(x(t)) \quad (\text{E.5})$$

$$\hat{F}\left(\frac{d^r x(t)}{dt^r}\right) = (-i\omega)^r \hat{F}[x(t)] \quad (\text{E.6})$$

FUNÇÃO DE DENSIDADE ESPECTRAL

Aplicando-se as definições anteriores pode-se escrever

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega \quad (\text{E.7})$$

, e como o complexo conjugado é definido por (E.5), escreve-se (E.8).

$$E[x^2] = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega) \hat{X}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |\bar{X}(\omega)|^2 \right] d\omega \quad (\text{E.8})$$

Definindo-se o espectro S_{xx} como (E.9), implica que o valor quadrático médio pode ser definido como a área da função de densidade espectral conforme (E.10).

$$S_{xx} = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\bar{X}(\omega)|^2 \quad (\text{E.9})$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (\text{E.10})$$

A função de densidade espectral antes definida tem as seguintes propriedades:

- $S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$ e $S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$;
- $S_y(\omega) = \bar{H}(\omega) S_x(\omega) \hat{H}(\omega) = \|\bar{H}(\omega)\|^2$ no qual $x(t)$ é a excitação, $y(t)$ é a resposta, $\bar{H}(\omega)$ é a função de resposta complexa do sistema e $\hat{H}(\omega)$ é a sua conjugada complexa.

RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO E DENSIDADE ESPECTRAL

A função de autocorrelação é definida como (E.11) ou usando-se a definição de transformada inversa como (E.12).

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad (\text{E.11})$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt \quad (\text{E.12})$$

Operando-se em (E.12) e considerando (E.8) obtém-se as *relações de Weiner-Khichin*

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{E.13})$$

Do mesmo modo estabelece-se a relação entre a função de correlação cruzada e o espectro cruzado. Dadas duas funções $u(t)$ e $v(t)$, o valor esperado do produto delas é dado por (E.14).

$$E[u, v] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot v(t) dt \quad (\text{E.14})$$

Aplicando-se definições anteriores obtém-se (E.15).

$$E[u, v] = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \bar{V}(\omega) \cdot \hat{U}(\omega) \right] d\omega \quad (\text{E.15})$$

O integrando desta expressão é definido como espectro cruzado S_{uv} conforme (E.16). De forma análoga defini-se S_{vu} .

$$S_{uv} = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \bar{V}(\omega) \cdot \hat{U}(\omega) \right] \quad \text{e} \quad S_{vu} = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \bar{U}(\omega) \cdot \hat{V}(\omega) \right] \quad (\text{E.16})$$

Com estes resultados estabelece-se a relação entre a **FDEP** cruzada e a correlação cruzada entre duas variáveis $u(t)$ e $v(t)$ conforme (E.17). Usando-se nesta expressão a definição de pares de Fourier obtém-se (E.18).

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) v(t + \tau) dt \quad (\text{E.17})$$

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt \quad (\text{E.18})$$

Com raciocínio semelhante ao já empregado obtém-se (E.19) e (E.20).

$$R_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uv}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad S_{uv}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{E.19})$$

$$R_{vu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{vu}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad S_{vu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{vu}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{E.20})$$

A função de correlação tem algumas propriedades que são dignas de nota:

- $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$, ou seja a correlação é uma função par;

- $R_x(0) = \psi_x^2$, ou seja a correlação na origem é o valor quadrático médio;
- $R_x(\tau) \leq R_x(0)$, ou seja a correlação tem valor máximo na origem.

RELAÇÃO ENTRE AS FDEP QUE ATUAM NUMA MESMA TRILHA

Sabe-se que uma irregularidade da via, que excita uma roda dianteira do veículo, também irá agir na roda traseira após um intervalo de tempo que vale $\Delta t = a/V$, em que a é a distância entre eixos. Logo, pode-se relacionar as **FDEP** dos deslocamentos da roda dianteira (expoente d) e roda traseira (expoente t) numa mesma trilha.

A função de correlação das irregularidades particularizada para uma dimensão fica

$$R(\xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-x}^x Z(x)Z(x + \xi)dx. \quad (\text{E.21})$$

Fazendo-se $t = x/V$, $T = X/V$ e $\tau = \xi/V$, sendo $dx = Vdt$ obtém-se

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2TV} \int_{-T}^T Z(t)Z(t + \tau)Vdt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Z(t)Z(t + \tau)dt. \quad (\text{E.22})$$

Considerando a defasagem de tempo Δt entre a roda dianteira e a traseira sobre uma mesma trilha, e representando as funções de excitação das rodas (irregularidades das vias) por $f(t)$, pode-se escrever $f^d(t) = f^t(t + \Delta t)$ e $f^d(t + \Delta t) = f^t(t + \tau + \Delta t)$. Fazendo-se agora $Z(t) = f^t(t_1)$, em que $t_1 = t + \Delta t$ de modo que $dt_1 = dt$, pode-se escrever a autocorrelação da roda traseira $R^t(\tau)$ como

$$R^t(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^t(t + \Delta t)f^t(t + \Delta t + \tau)dt \quad (\text{E.23})$$

que pode ser reescrita conforme (E.24), a qual permite concluir que as autocorrelações da roda traseira e da roda dianteira são iguais.

$$R^t(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^d(t)f^d(t + \tau)dt = R^d(\tau) \quad (\text{E.24})$$

Levando em conta a expressão (E.13) conclui-se que as **FDEP** das funções de excitação das rodas dianteira e traseira são iguais ou seja $S_{ff}^d(\omega) = S_{ff}^t(\omega)$.

Considerando as definições anteriores a correlação entre a roda dianteira e traseira é escrita como (E.25) ou (E.26).

$$R^{td}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^t(t + \Delta t) f^d(t + \Delta t + \tau) dt \quad (\text{E.25})$$

$$R^{td}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^d(t) f^d(t + \Delta t + \tau) dt = R^d(\tau + \Delta t) \quad (\text{E.26})$$

Pela (E.26) concluí-se que a correlação entre a roda dianteira e traseira é igual a autocorrelação da roda dianteira defasada de Δt . Considerando (E.19) e que a **FDEP** da roda dianteira é real resulta $S_{ff}^d(\omega) = S_{ff}^{td}(\omega) = S_{ff}^{dt}(\omega)$.

ANEXO F - CÁLCULO DO DESVIO PADRÃO DA F.D.E.P. DA RODOVIA

A variância da função de densidade espectral de potência pode ser útil para auxiliar ao usuário na escolha da constante c apresentada na tabela (4.1). Para isto é necessário integrar a expressão (F.1), ver expressões (4.31) e (6.11).

$$\varphi^2 = 2 \left\{ \frac{c}{4\pi V (2\pi V)^{-2.5}} \left[\omega_{min}^{-2.5} \int_0^{\omega_{min}} d\omega + \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \omega^{-2.5} d\omega \right] \right\} \quad (F.1)$$

Operando-se nesta expressão obtém-se (F.2)

$$\varphi^2 = \frac{c}{(2\pi V)^{-1.5}} \left(\frac{2.5\omega_{min}^{-1.5} - \omega_{max}^{-1.5}}{1.5} \right) \quad (F.2)$$

e considerando que $\omega_{min} = 2\pi V n_a$ e $\omega_{max} = 2\pi V n_b$ pode-se escrever a expressão (F.3).

$$\varphi^2 = \frac{c}{1.5} (2.5n_a^{-1.5} - n_b^{-1.5}) \quad (F.3)$$

Analisando-se este resultado verifica-se que o desvio padrão das irregularidades não depende da velocidade do veículo, resultado esperado do ponto de vista físico. Além disso, ele é sempre positivo já que $n_a < n_b$. Utilizando-se os números de onda recomendados no texto principal ou seja $n_a = 0.01$ e $n_b = 10$ obtém-se a relação (F.4)

$$\varphi^2 = 1666.64 \cdot c \quad (F.4)$$

que pode ser utilizada para auxiliar na escolha de um valor para c através de uma comparação dos desvios padrões das irregularidades para diversos tipos de pavimentos.

ANEXO G - SISTEMA GAELI

O Projeto **GAELI**, Gerador e Analisador de Estruturas Lineares, (GROEHS & SANTOS - 1990), teve início em 1985 para micros *APPLE*. No começo desenvolveu-se um pequeno sistema com algumas possibilidades de geração e representação gráfica. Este projeto foi concluído em 1986 mostrando ser viável o desenvolvimento de sistemas de elementos finitos para micro-computador.

Com a chegada dos micros do tipo IBM-PC, e com a melhoria geral dos compiladores *Fortran*, *Basic* e *C*, iniciou-se em 1986 o projeto GAELI para IBM-PC, sob coordenação dos professores Ademar Gilberto Groehs e Maria Inês dos Santos, mantendo um desenvolvimento contínuo até 1996. Atualmente, apenas pequenas atualizações tem sido feitas no sistema.

O GAELI é um sistema de elementos finitos voltado para análise linear de estruturas. Ele foi totalmente escrito em *fortran 77* e roda em ambiente DOS. De modo geral, a sua entrada de dados é do tipo direta, empregando planilhas eletrônicas, com auxílio de vários comandos de geração automática. Algumas possibilidades de geração gráfica de dados e de geração de malhas estruturadas por regiões foram incorporadas.

O GAELI tem condições de resolver problemas estáticos e dinâmicos, dispondo para isto de recursos para integração no domínio do tempo pelos métodos de Newmark e diferença centrais e análise de autovalores e autovetores pelos métodos de Lanczos e Subespaços.

Quanto ao pós-processamento, este sistema faz visualização de resultados, deformadas, isograndezas, cortes; cálculo de tensões principais e equivalentes; verificação de tubulações industriais segundo a norma ANSI B31.3, verificação de estruturas a fadiga, verificação de estruturas de chapa dobrada. Além destes recursos, o GAELI tem condições de estimar a distribuição de erro numa malha de elementos finitos, e lançar uma nova malha de modo a reduzir o mesmo.

ANEXO H - LIGAÇÕES ENTRE CHASSI E CARROCERIA

As ligações chassi-carroceria são representadas no modelo matemático por uniões entre elementos de pórtico espacial e de casca. Embora o acoplamento destes dois tipos de elementos seja teoricamente possível, ambos têm os mesmos graus de liberdade, ele deve ser investigado com cuidado.

Do ponto de vista numérico, esta união pode apresentar problemas. Um elemento de casca poliédrica é obtido a partir da combinação de um elemento de estado plano de tensões, que na não considera a rotação no plano, com um elemento de placa. Por isto, quando todos os elementos de casca, que concorrem a um determinado nó, são coplanares, este nó possui na realidade cinco graus de liberdade, já que deve ser colocado o valor 1 na posição da diagonal principal correspondente ao grau de liberdade R_z (item 2.2). Ligando-se agora uma barra de pórtico espacial, figura (H.1), neste nó, de modo que ele seja perpendicular ao plano definido pelos elementos de casca que concorrem ao nó, irá se obter uma situação interessante.

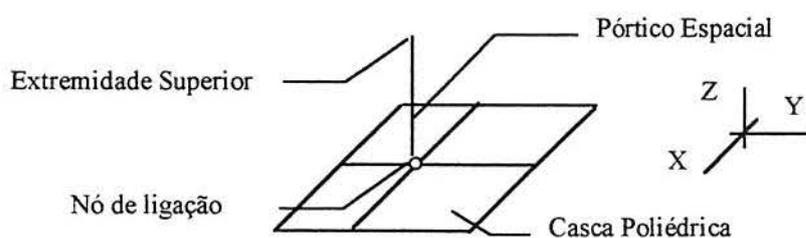


Figura (H.1) - Ligação ortogonal entre 1 elemento de barra e um plano de elementos de casca.

A barra de pórtico espacial tem rigidez nos graus de liberdade U_x , U_y , U_z , R_x , R_y , R_z , no entanto, os elementos de casca não apresentam rigidez no grau de liberdade R_z . Esta situação pode conduzir a erro matemático durante a solução do sistema de equações, matriz singular ou divisão por zero, desde que sejam verificadas algumas condições específicas:

- o elemento de barra deve ser ligado num nó cujo todos elementos de casca que concorram a este pertençam ao mesmo plano;
- o plano definido pelos elementos de casca deve ser paralelo a um dos três planos definidos pelo sistema de referência global;
- a extremidade superior do elemento de barra não pode estar ligada a nenhum outro elemento e nem ter condição de contorno que elimine o giro da barra em torno do seu eixo.

Este problema pode ser resolvido substituindo-se a formulação de EPT convencional por uma que considere a rotação no plano. Entretanto, este tipo de processo tem a desvantagem de exigir um maior tempo de cálculo para cada elemento. Outra solução é restringir o grau de liberdade R_z do nó, que faz a ligação da barra com a placa conforme figura (H.2a). Neste caso, não há nenhuma transmissão de torção da barra para a placa e vice-versa. Este artifício pode ou não introduzir erro na análise dependendo do tipo da estrutura. Além disso, pode-se empregar um conjunto de barras fictícias, com propriedades adequadas, que vão fazer a ligação da barra com a placa conforme figura (H.2b). O problema, neste caso, é determinação das propriedades destas barras.

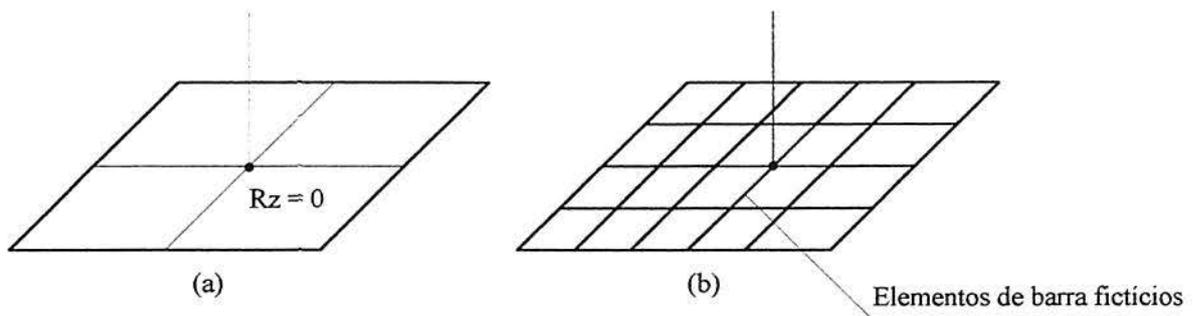


Figura (H.2) - Soluções para o problema de matriz singular.

A ligação entre elementos de barra e elementos de casca, do ponto de vista físico, é no mínimo questionável. A representação da união, quando se trabalha apenas com barras, é feita apenas por um nó comum a estas. Já quando se utiliza apenas elementos de casca, a ligação pode ser modelada da forma desejada. No entanto, quando se trabalha com os dois tipos de elementos, a ligação volta a ser feita apenas por um nó, embora um dos elementos desta ligação esteja modelado em detalhe. Esta situação faz com que todas as solicitações atuantes na barra sejam transmitidas para um único nó. Além disso, esta ligação provoca uma diferença de rigidez considerável entre o nó de ligação e os nós vizinhos da malha de elementos de casca, o que pode ocasionar problemas numéricos. Portanto, é de se esperar que os resultados obtidos na região de ligação entre chassi e carroceria sejam pobres.

Para se investigar este problema analisou-se um caso de junta padrão, entre carroceria e chassi, bastante utilizada nos ônibus. As malhas empregadas na análise estão apresentadas na figura (H.3). As duas primeiras malhas combinam o elemento de casca de 8 nós com pórtico espacial, e as demais malhas utilizam apenas elementos de casca.

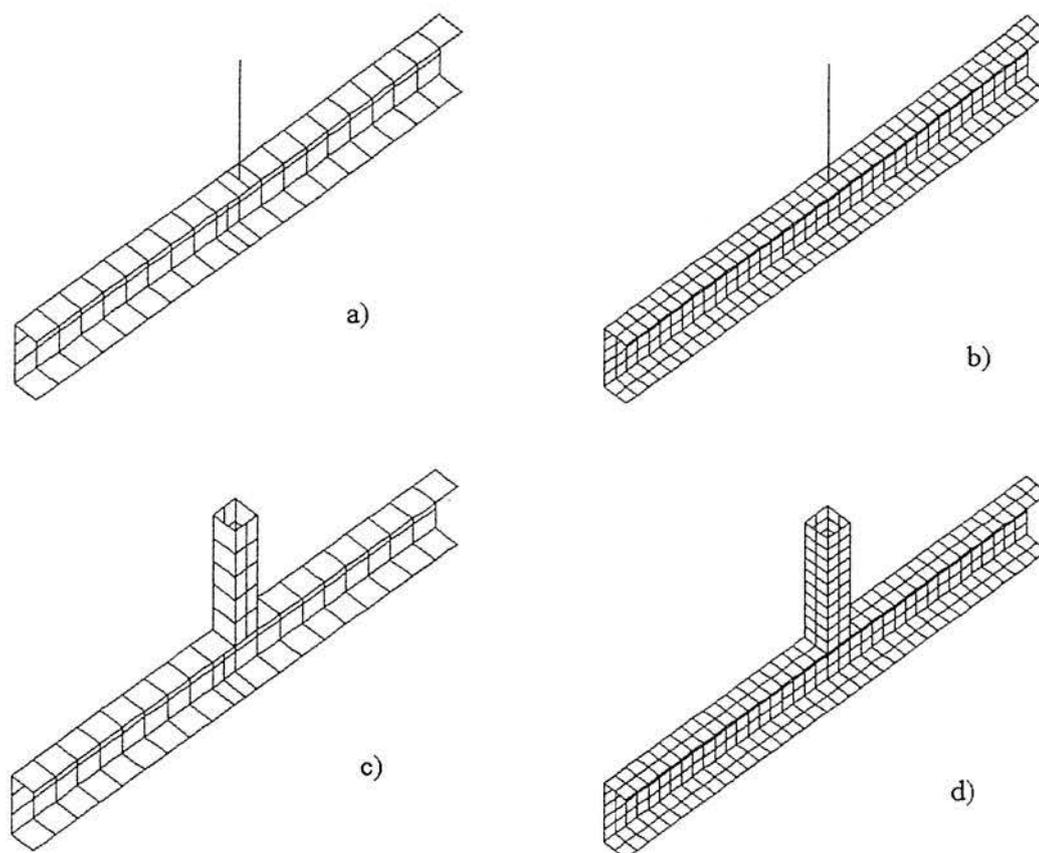


Figura (H.3) - Malhas utilizadas na análise da junta.

- a) Malha com 99 elementos de casca e 1 de pórtico espacial.
- b) Malha com 342 elementos de casca e 1 de pórtico espacial.
- c) Malha com 130 elementos de casca.
- d) Malha com 422 elementos de casca.

O material da estrutura é aço com $E = 2,1 \times 10^5$ MPa e $\nu = 0,3$. O perfil C tem dimensões 200x80x6 mm e comprimento de 1500 mm. O perfil caixão tem dimensões 80x80x3 mm e comprimento de 400 mm. A malha de elementos de casca é lançada nas coordenadas médias dos perfis. Aplicam-se nas extremidades da viga C condições de contorno de uma viga isostática. Para as malhas *a* e *b* da figura (H.3) faz-se necessário restringir o giro R_z do nó que liga a barra com os elementos de casca.

Para fins comparativos, aplica-se uma carga de compressão de 8000 N no perfil caixão. Os resultados apresentados a seguir correspondem à distribuição da tensão de von Mises na face superior de cada uma das placas que formam o perfil C. As figuras (H.4a), (H.4b), (H.5a) e (H.5b) apresentam os resultados, para a mesa superior do perfil, correspondentes às malhas *a*, *b*, *c* e *d* da figura (H.3) respectivamente.

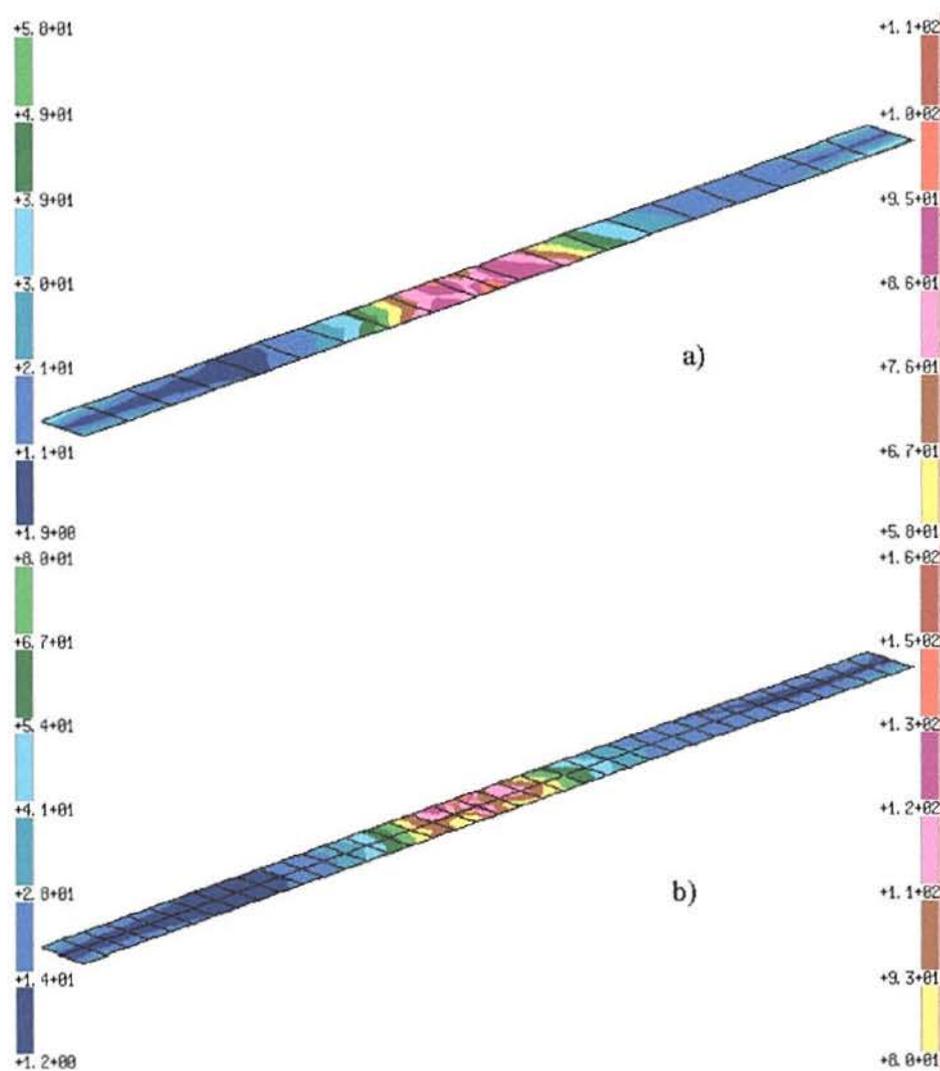


Figura (H.4) - Tensão de von Mises [MPa] na mesa superior do perfil C - malha mista.

a) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3a).

b) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3b).

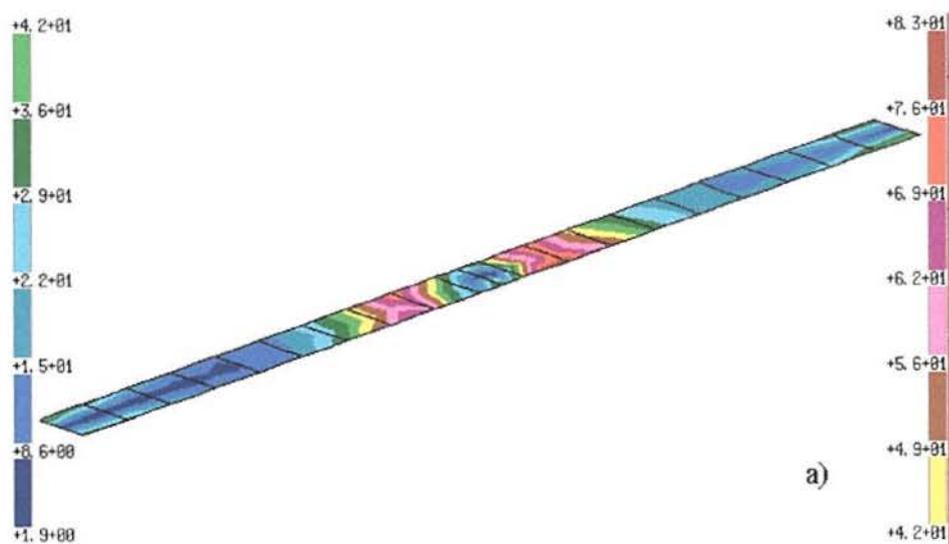


Figura (H.5) - Tensão de von Mises [MPa] na mesa superior do perfil C – figura (H.3.c).



Figura (H.6) - Tensão de von Mises [MPa] na mesa superior do perfil C – figura (H.3.d).

A tensão máxima na região da união para as figuras (H.4a) e (H.4b) vale 110 MPa e 160 MPa. Já para as figuras (H.5) e (H.6) a tensão máxima vale 42 MPa e 44 MPa. Comparando-se estes valores tem-se um erro relativo de 161,9% para as figuras (H.4a) e (H.5), e 263,6% para as figuras (H.4b) e (H.6).

As figuras (H.7), (H.8a), (H.8b) e (H.8c) ilustram a tensão de von Mises, na alma do perfil C, correspondente às malhas (H.3a), (H.3b), (H.3c) e (H.3d). Nota-se que a tensão máxima na região da união vale 190 MPa para a figura (H.7), e 220 MPa para a figura (H.8a). Já para as figuras (H.8b) e (H.8c) a tensão máxima nesta região vale 130 MPa e 170 MPa. Comparando-se estes valores máximos tem-se um erro relativo de 46% para as figuras (H.7) e (H.8b), e 29,4% para as figuras (H.8a) e (H.8c).

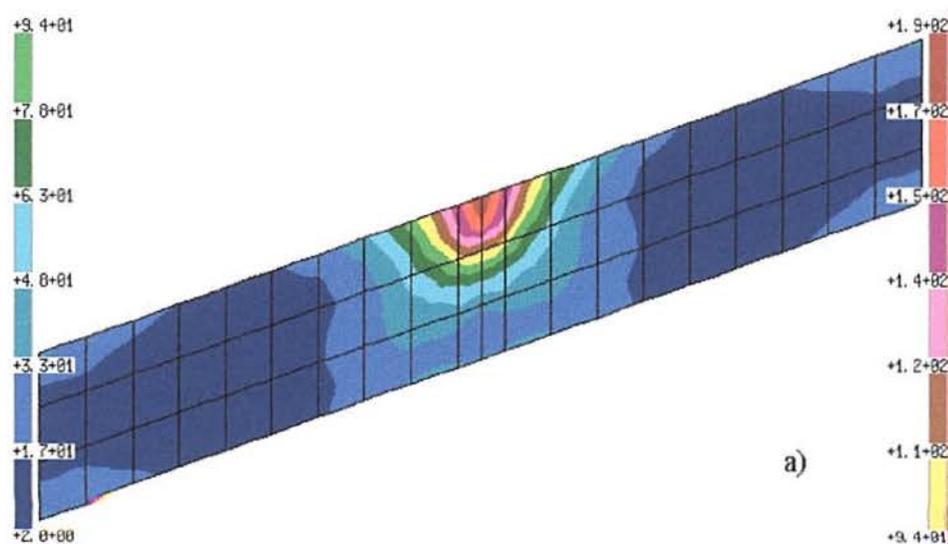


Figura (H.7) - Tensão de von Mises na alma do perfil C - malha da figura (H.3a).

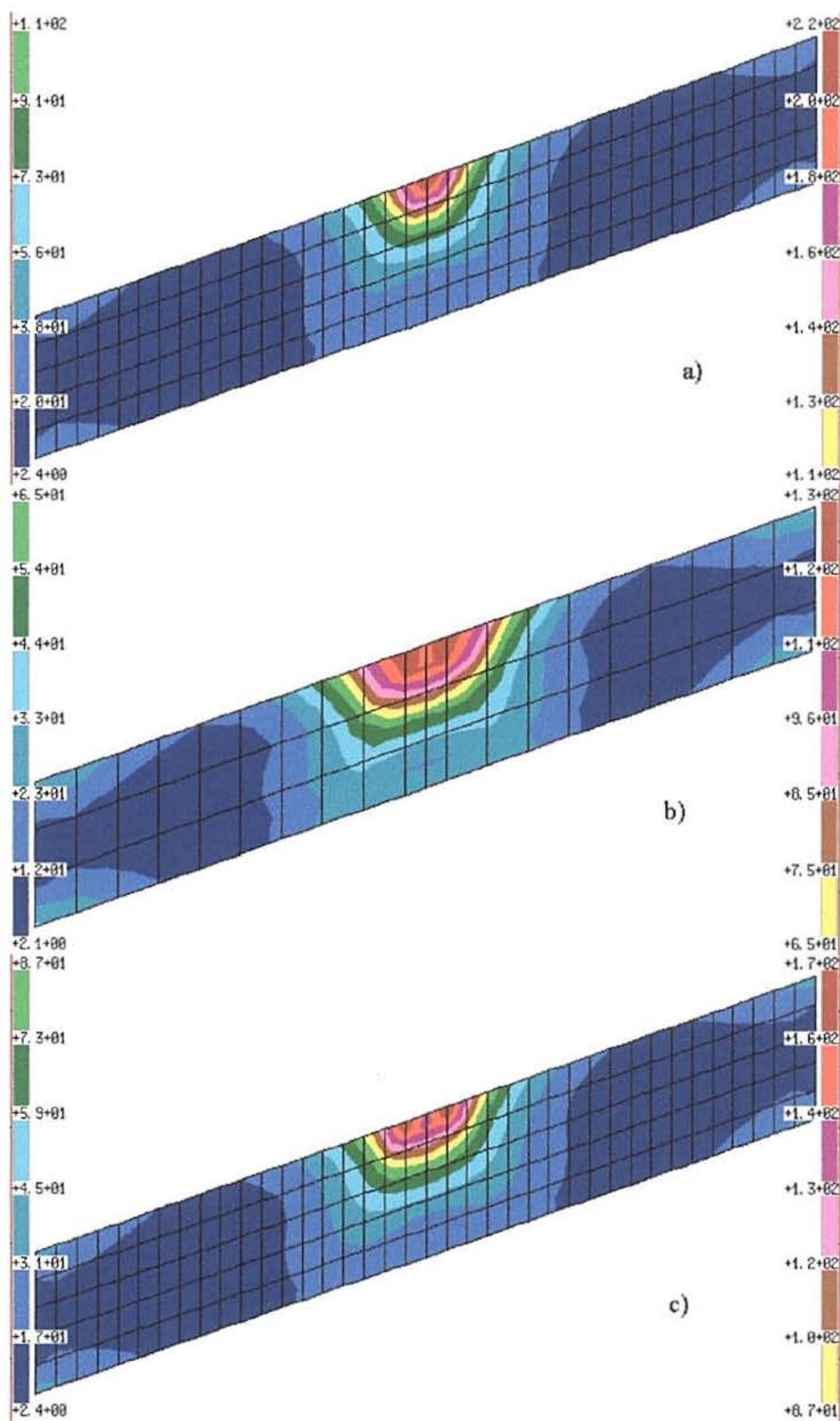


Figura (H.8) - Tensão de von Mises na alma do perfil C.

- a) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3b).
- b) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3c).
- c) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3d).

As figuras (H.9a), (H.9b), (H.10a) e (H.10b) ilustram a tensão de von Mises, na mesa inferior do perfil C, correspondente às malhas (H.3a), (H.3b), (H.3c) e (H.3d). Verifica-se que

a tensão máxima na região da união vale 34 MPa para a figura (H.9a) e 35 MPa para a figura (H.9b). Já para as figuras (H.10a) e (H.10b) a tensão máxima na região da união vale 30 MPa e 31 MPa. Comparando-se estes valores máximos tem-se um erro relativo de 13,3% para as figuras (H.9a) e (H.10a), e 12,9% para as figuras (H.9b) e (H.10b).

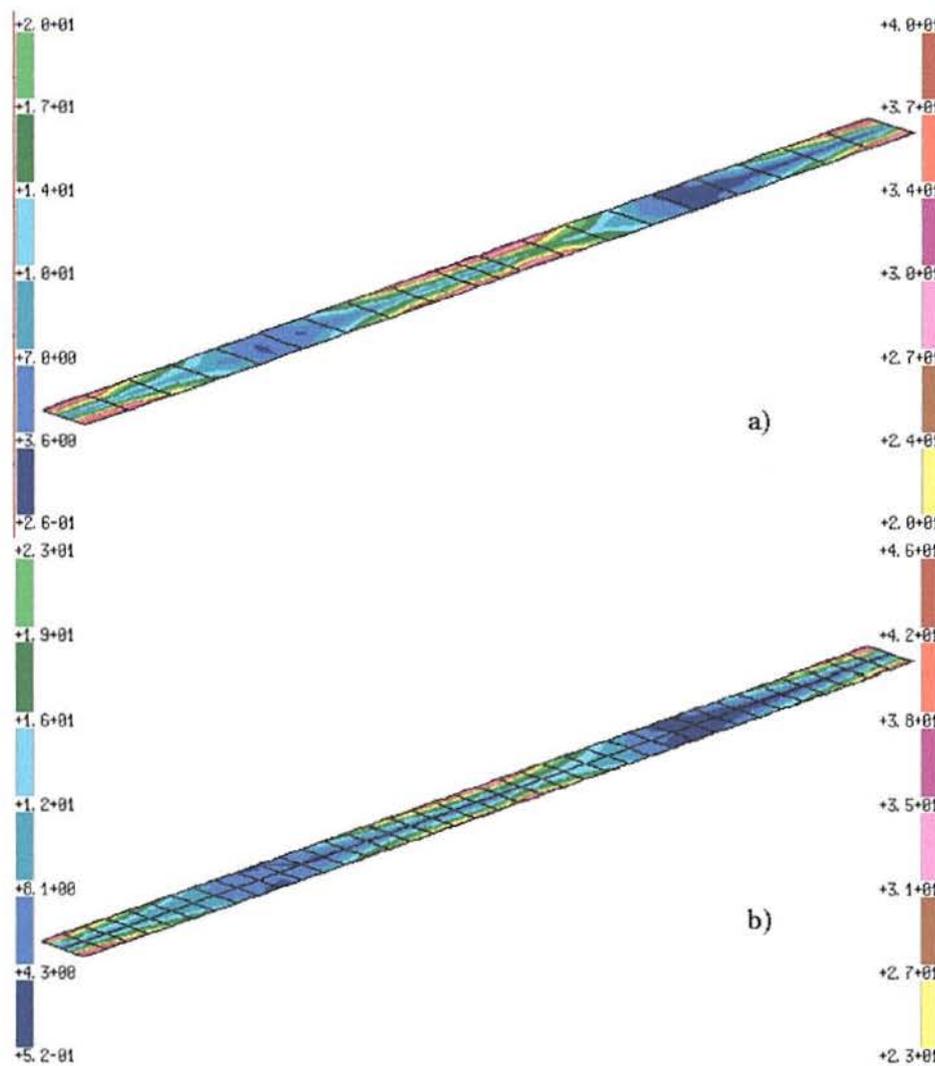


Figura (H.9) - Tensão de von Mises na mesa inferior do perfil C .

a) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3b).

b) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3c).

Verifica-se que para as três placas; mesa superior, alma e mesa inferior; a diferença nos resultados, entre a solução utilizando malha mista e a solução utilizando apenas elementos de casca, limita-se à região da união entre os perfis. A solução utilizando uma barra de pórtico espacial fornece sempre valores de tensão equivalente superiores ao da solução com apenas elementos de casca. Isto ocorre porque o esforço normal aplicado no perfil caixão está sendo transmitido apenas para um ponto da malha. Para se tentar melhorar estes resultados pode-se empregar barras fictícias como as ilustradas nas figuras (H.11a) e (H.11b).

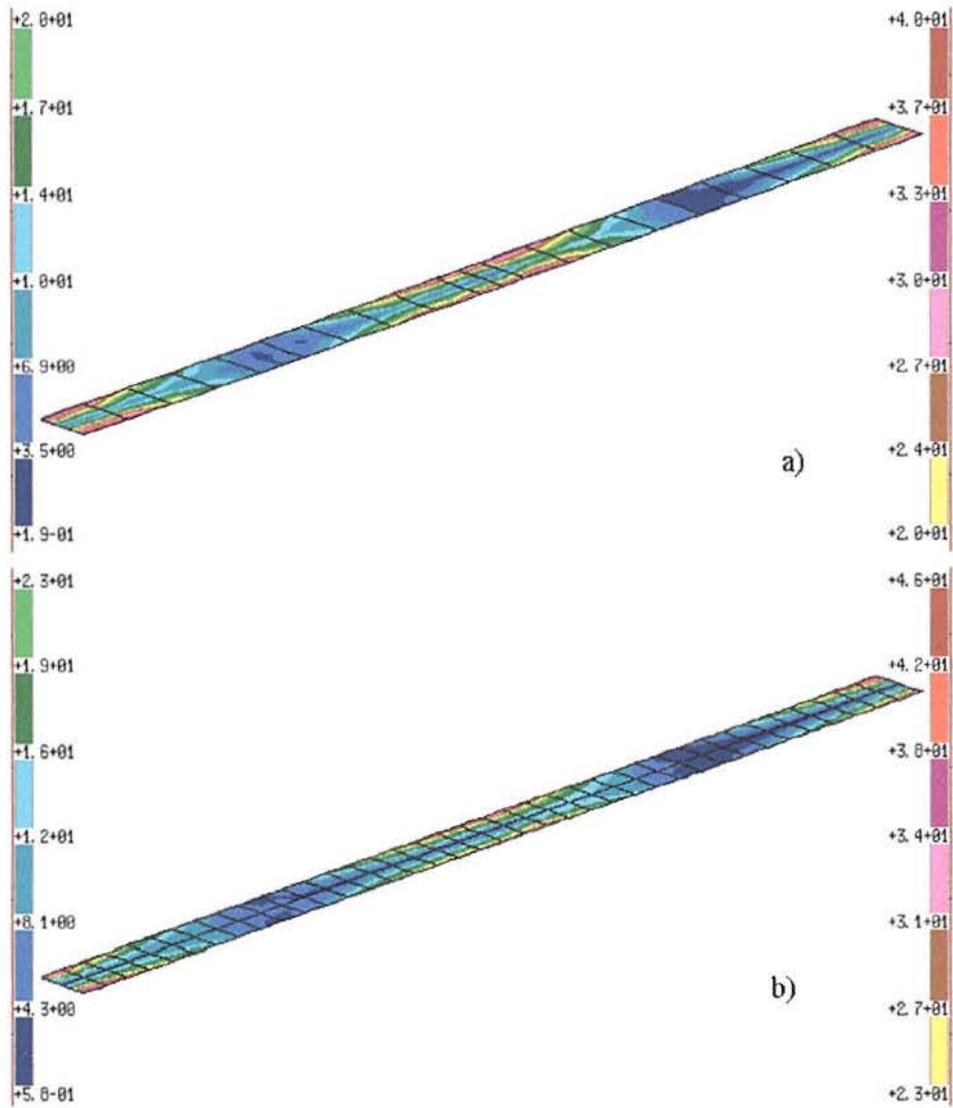


Figura (H.10) - Tensão de von Mises na mesa inferior do perfil C.

a) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3c).

b) Resultados correspondentes a malha da figura (H.3d).

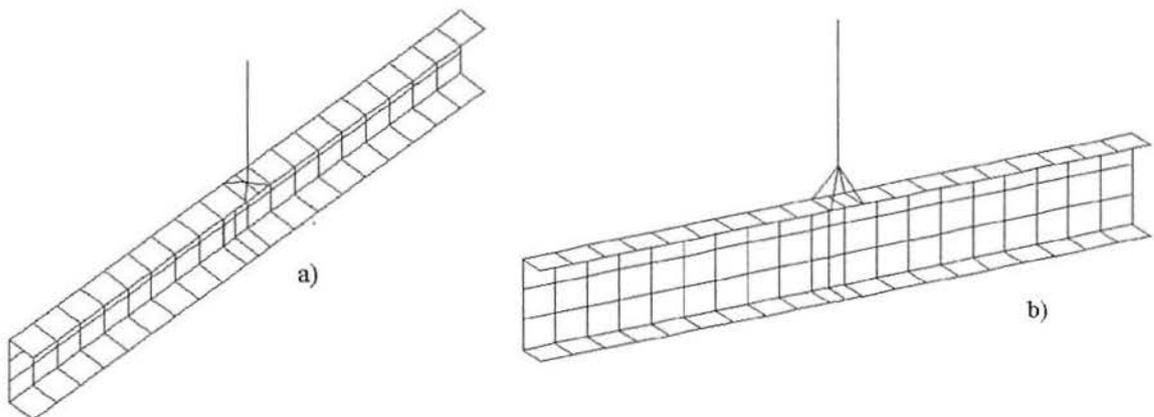


Figura (H.11) – Soluções alternativas com elementos fictícios.

No primeiro caso utilizam-se 4 elementos definidos no plano da mesa superior. Estes elementos ligam o nó central da união aos quatro nós de canto que definem a ligação. Para o cálculo das propriedades utilizaram-se valores iguais aos de uma seção circular com 5mm de diâmetro. Já no segundo caso, o perfil caixão foi um pouco encurtado, e se fez uma ligação deste perfil com os quatro nós de canto, que definem a ligação formando uma pirâmide. Para definição das propriedades empregou-se uma área elevada de 1×10^4 e demais propriedades com valores baixos (valor 2). Logo, estes elementos devem transmitir apenas esforço normal.

Os resultados obtidos, tensão de von Mises máxima na região da união, para a malha da figura (H.11a) foram 110 MPa para a mesa superior e 130 MPa para a alma. Já para a malha da figura (H.11b) obteve-se 92 MPa para a mesa superior e 170 MPa para a alma. Comparando-se estes valores com os das figuras (H.5) e (H.8b) verifica-se que o esquema adotado não melhorou os resultados na mesa superior, mas os resultados na alma do perfil tiveram uma melhora significativa. Para a figura (H.11a) tem-se um erro relativo de 161,9% na mesa superior e 0% na alma. Já para a figura (H.11b) tem-se um erro relativo de 119% na mesa superior e 30,7% na alma.

O grande problema do uso de elementos de barra fictícios é como determinar as propriedades destes de modo a representar a estrutura real de forma razoável? Critérios que considerem o funcionamento das uniões nem sempre levam a resultados razoáveis. Por outro lado, modelar toda a estrutura com casca tem os graves inconvenientes já mencionados neste trabalho. Uma solução, que deve ser investigada, é utilizar subestruturação, em um nível, para representar as uniões entre a carroceria e o chassi.

Do ponto de vista técnico recomenda-se continuar com o modelo de barras para a carroceria e casca para o chassi. Entretanto, os resultados nas uniões do chassi e carroceria devem ser examinados com cautela. Como se verificou no exemplo apresentado eles são, a princípio conservativos. Havendo falha nestas regiões recomenda-se modelar as mesmas localmente.

ANEXO I - EFEITO DAS JANELAS

Os ônibus, com grandes áreas envidraçadas nas paredes laterais, são consideravelmente enrijecidos pelas janelas de vidro devido a sua grande rigidez ao corte. O módulo de elasticidade do vidro vale $7,1 \times 10^4$ MPa, que é o mesmo do alumínio, mas o módulo de elasticidade transversal do vidro ($3,1 \times 10^4$ MPa) é superior que o do alumínio. Portanto, o vidro fornece uma considerável rigidez à distorção (BEERMANN - 1989).

A deformação por corte da vidraça, em seu próprio plano, com usualmente 6 mm de espessura, pode ser desprezada se comparada com a deformação do quadro da janela. Porém, a forma de ligação da vidraça com o quadro influi na divisão do corte entre os dois. É mais simples calcular o efeito do vidro ligado por cola do que usando os tradicionais moldes de borracha. A figura (I.1) ilustra a seção de uma ligação de vidraça que usa cola. A área útil ao corte do adesivo vale bd , mas as técnicas de montagem exigem mais cola entre a quina da vidraça e o quadro.

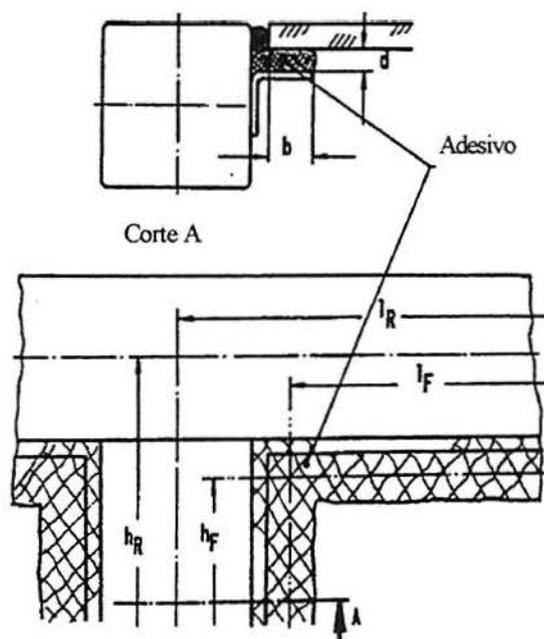


Figura (I.1) - Detalhe da ligação da vidraça.
(BEERMANN - 1989)

Assume-se que o quadro submetido a corte, irá se deformar como um paralelogramo, figura (I.2), enquanto a vidraça irá girar como um corpo rígido. Considerando que o ângulo de corte do quadro vale γ e a rotação da vidraça vale δ , a junta de adesivo é submetida a uma rotação por corte que vale $\gamma - \delta$. O adesivo é também tracionado ao longo do seu comprimento pelos

deslocamentos v_1 e v_h . O ângulo de rotação do vidro δ é encontrado por equilíbrio usando as propriedades de corte do adesivo.

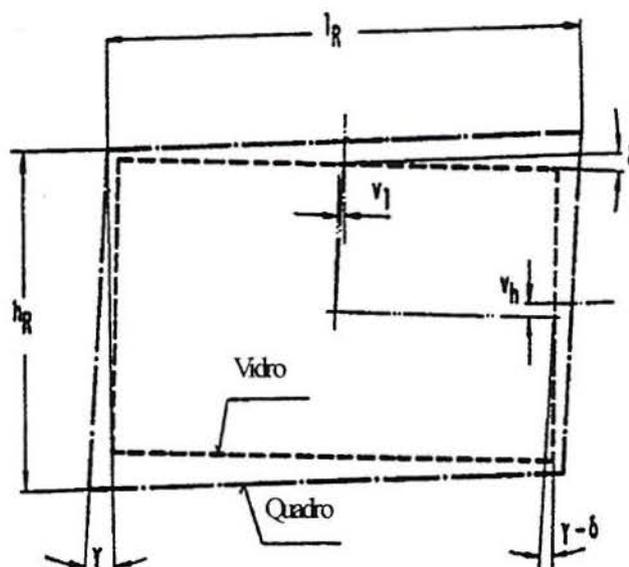


Figura (I.2) - Deslocamento relativo do vidro e do quadro sob deformação por corte. (BEERMANN - 1989)

A resistência ao corte da janela é aproximada por 2 elementos diagonais imaginários de mesmo material que o da estrutura principal, figura (I.3), que devem ter as extremidades rotuladas. A área destes elementos é dada pela expressão (I.1) na qual E é o módulo de elasticidade do material da estrutura e G_f é o módulo de elasticidade transversal do adesivo.

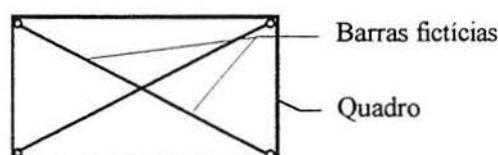


Figura (I.3) - Elementos de barra fictícios para representação do vidro.

$$A_d = \frac{G_f}{E} \frac{b}{4d} \left(\frac{l_f h_f}{l_r h_r} \right)^2 - \frac{l_f^2 + 10l_f h_f / 3 + h_f^2}{(l_f + h_f)^3} (l_r^2 + h_r^2)^{3/2} \quad (I.1)$$

Este método foi testado em ônibus com vidraças ligadas por adesivo. Notou-se que os momentos fletores nos pilares, quando se usa os moldes de borracha para prender o vidro, valem aproximadamente a metade dos medidos quando se usa adesivo. Em problemas dinâmicos, considerar a influência dos vidros é bem mais complexo, já que o módulo de elasticidade da cola pode assumir diversos valores em altas frequências. Este problema é resolvido com modelos viscoelásticos, mas com um custo computacional elevado.

ANEXO J - CÁLCULO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

A expressão (4.51) representa um caso generalizado de autovalores, que é geralmente indicado pela expressão $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$, o qual é de solução mais complexa. Considerando-se que a matriz de massa adotada na formulação é do tipo diagonal, pode-se transformar este caso num problema mais simples representado pela expressão $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Esta transformação é realizada conforme procedimento apresentado por CLOUGH & PENZIEN (1993).

O problema analisado ainda tem o agravante de apresentar três autovetores espúrios devido a forma como as molas da suspensão são modeladas. Os elementos que as representam têm rigidez apenas na direção da barra, o que introduz três condições de singularidade na matriz de rigidez, que correspondem aos deslocamentos de corpo rígido nas direções X_G e Y_G e rotação de corpo rígido em torno do eixo Z_G , conforme ilustrado na figura (J.1).

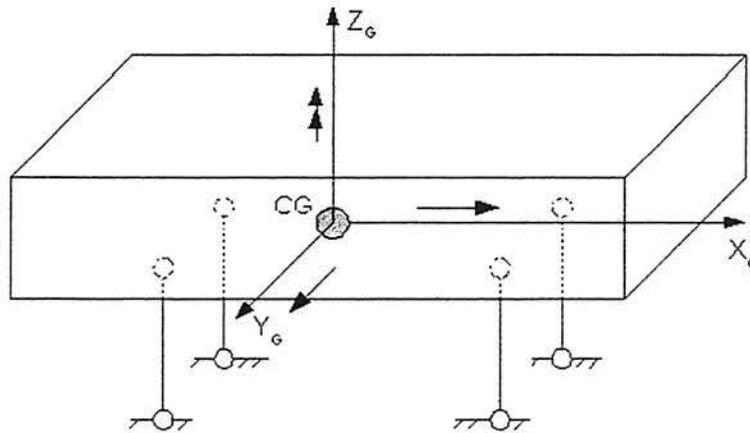


Figura (J.1)– Ilustração dos movimentos que podem ser realizados pelo centro de gravidade do veículo devido ao modelamento da suspensão.

X_G , Y_G e Z_G são eixos baricêntricos.

A solução para evitar problemas numéricos com estes autovetores é aplicar um deslocamento (*shift*) $\hat{\rho}$ nos autovalores (GROEHS – 1999).

O problema de autovalores tratado é representado pela expressão

$$\mathbf{K}_{cc}\mathbf{q}_n = \lambda_n\mathbf{M}_{cc}\mathbf{q}_n \quad (\text{J.1})$$

que pode ser reescrita como (J.2) bastando adicionar uma parcela $\hat{\rho}\mathbf{M}_{cc}\mathbf{q}_n$ a ambos os membros desta equação, obtendo uma matriz de rigidez equivalente que é positivo definida.

$$(\mathbf{K}_{cc} + \hat{\rho}\mathbf{M}_{cc})\mathbf{q}_n = (\lambda_n + \hat{\rho})\mathbf{M}_{cc}\mathbf{q}_n \quad (\text{J.2})$$

Aplicando-se agora uma decomposição do tipo $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{1/2}$ na matriz de massa do membro direito de (J.2), pode-se escrever

$$(\mathbf{K}_{cc} + \hat{\rho}\mathbf{M}_{cc})\mathbf{q}_n = (\lambda_n + \hat{\rho})\mathbf{M}_{cc}^{1/2}\mathbf{M}_{cc}^{1/2}\mathbf{q}_n \quad (\text{J.3})$$

Como \mathbf{M}_{cc} é uma matriz diagonal, $\mathbf{M}_{cc}^{1/2}$ é obtida simplesmente extraíndo-se a raiz quadrada de cada um dos termos de \mathbf{M}_{cc} . Fazendo-se agora $\mathbf{M}_{cc}^{1/2}\mathbf{q}_n = \hat{\mathbf{q}}_n$, e substituindo-se esta relação em (J.3) obtém-se

$$\mathbf{M}_{cc}^{-1/2}(\mathbf{K}_{cc} + \hat{\rho}\mathbf{M}_{cc})\mathbf{M}_{cc}^{-1/2}\hat{\mathbf{q}}_n = (\lambda_n + \hat{\rho})\hat{\mathbf{q}}_n \quad (\text{J.4})$$

e fazendo-se $\hat{\mathbf{K}}_{cc} = \mathbf{M}_{cc}^{-1/2}(\mathbf{K}_{cc} + \hat{\rho}\mathbf{M}_{cc})\mathbf{M}_{cc}^{-1/2}$ e $\kappa_n = (\lambda_n + \hat{\rho})$ obtém-se a expressão (J.5)

$$\hat{\mathbf{K}}_{cc}\hat{\mathbf{q}}_n = \kappa_n\hat{\mathbf{q}}_n \quad (\text{J.5})$$

Para a solução do problema representado pela expressão (J.5) fez-se um programa a parte que emprega a rotina **DVFSB** da biblioteca *IMSL*. Esta rotina calcula os autovalores e os seus correspondentes autovetores, num intervalo dado, para uma matriz real, banda e simétrica. Transformações ortogonais (Método de Householder) são utilizadas para reduzir a matriz $\hat{\mathbf{K}}_{cc}$ a uma matriz tridiagonal equivalente. Um algoritmo de biseção é utilizado para calcular os autovalores da matriz tridiagonal no intervalo fornecido. Iteração inversa e ortogonalização são utilizadas para calcular os autovetores da matriz banda simétrica. Para maiores detalhes teóricos sobre o procedimento utilizado ver PRESS et al. (1996).

Os procedimentos empregados pela rotina **DVFSB** estão baseados em rotinas da biblioteca *EISPACK*. Para se carregar a biblioteca *IMSL* deve-se acrescentar no código o comando: *use msimsl*. A chamada da rotina propriamente dita é feita com o comando

```
CALL DVFSB (N, MXEVAL, A, LDA, NCODA, ELOW, EHIGH, NEVAL, EVAL, EVEC
, LDEVEC)
```

no qual os parâmetros de chamada tem os seguintes significados:

- N : ordem da matriz **A** (dado);

- MXEVAL: número máximo de autovalores a serem calculados (dado);
- \mathbf{A} : matriz banda simétrica organizada como $\mathbf{A}(\text{NCODA}+1, N)$. A diagonal principal da matriz de rigidez é armazenada na última linha da matriz \mathbf{A} e as demais diagonais são armazenadas de forma decrescente na mesma matriz;
- LDA: dimensão principal da matriz \mathbf{A} (dado);
- NCODA : número de codiagonais da matriz \mathbf{A} (dado);
- ELOW : limite inferior do intervalo para procura dos autovalores (dado);
- EHIGH : limite superior do intervalo para procura dos autovalores (dado);
- NEVAL : número de autovalores encontrado (resultado);
- EVAL : vetor real de comprimento MXEVAL contendo os autovalores de \mathbf{A} , que se encontram no intervalo $[\text{ELOW}, \text{EHIGH}]$, em ordem decrescente de magnitude. Somente os primeiros NEVAL elementos são significativos (resultado);
- EVEC : matriz real contendo nas primeiras NEVAL colunas os autovetores associados com os autovalores armazenados em EVAL. Cada autovetor é normalizado de modo a ter um comprimento Euclédiano igual a um (resultado);
- LDEVEC : dimensão principal de EVEC (dado).

Os autovetores obtidos por esta rotina devem ser transformados pela relação (J.6) e depois ortonormalizados com relação à matriz de massa, expressão (J.7), para ficar coerente com a expressão (4.53).

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{M}_{cc}^{-1/2} \hat{\mathbf{q}}_n \quad (\text{J.6})$$

$$\mathbf{q}_n = \frac{\hat{\mathbf{q}}_n}{\sqrt{\hat{\mathbf{q}}_n^T \mathbf{M}_{cc} \hat{\mathbf{q}}_n}} \quad (\text{J.7})$$

Os autovalores obtidos por esta rotina precisam ser redeslocados para a posição original fazendo-se $\lambda_n = \kappa_n - \hat{\rho}$.

Como a matriz de massa adotada é diagonal, qualquer valor de $\hat{\rho}$ superior a zero, desde que conduza a uma rigidez fictícia razoável, deve evitar a singularidade da matriz de rigidez.

O desenvolvimento do código para executar as tarefas aqui descritas é relativamente simples, mas é bom lembrar que as condições de contorno devem ser aplicadas na matriz $\hat{\mathbf{K}}_{cc}$ senão o algoritmo falha. Além disso é aconselhável utilizar um valor elevado para MXEVAL por que se este valor for inferior ao número de autovalores existentes no intervalo de procura, irá ocorrer erro na rotina **DVFSB**.

Quando o número de autovalores a ser determinado é elevado, pode ser mais interessante trocar a rotina **DVFSB** pela **DEVCSB** que determina todos os autovetores e autovalores do sistema. Isto ocorre porque os procedimentos de cálculo são distintos. A rotina **DEVCSB** transforma a matriz do sistema numa tridiagonal equivalente (Método de Householder) e determina os autovetores e autovalores através do algoritmo QL com deslocamento (*shifts*) implícito (PRESS et al. – 1996). Pelo que a prática indica este processo é mais eficiente, nesta situação, do que o anteriormente comentado. A chamada desta rotina é feita pelo comando

```
CALL DEVCSB (N, A, LDA, NCODA, EVAL, EVEC, LDEVEC)
```

tendo os parâmetros os mesmos significados já apresentados.

Pode-se testar a qualidade dos resultados obtidos por estas rotinas verificando o índice de performance (SMITH et al. – 1976) delas. Este índice é obtido pela função **DEPISF** que é chamada pelo comando

```
PER = DEPISF(N, NEVAL, A, LDA, EVAL, EVEC, LDEVEC)
```

em que PER é uma variável do tipo REAL(8). O índice de performance τ está relacionado com o erro da análise. O seu valor exato depende da precisão numérica e do tipo de processador empregado, mas a performance de uma rotina de análise de autovetores é definida como excelente se $\tau < 1$, boa se $1 \leq \tau \leq 100$ e pobre se $\tau > 100$. Estas definições são arbitrárias, mas valores maiores para este índice servem de alerta quanto a existência de erro no cálculo. Conforme os próprios autores indicam a verificação feita por este índice não é completa. Podem ocorrer situações de análise que apresentem um baixo índice de performance, mas que tenham problemas numéricos nos autovalores.

ANEXO K SELEÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS DE MOLA

Os elementos de mola utilizados na suspensão deveriam ter uma matriz de rigidez do tipo $\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$ em que k é o coeficiente de mola, mas as molas são representadas de modo aproximado por elementos de pórtico espacial. Para isto escolhe-se valores para o módulo de elasticidade E , para a área da seção transversal A e para o comprimento do elemento L , de modo a se obter a constante da mola fazendo-se $k = EA/L$. Os demais termos da matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial deveriam ser pequenos para se aproximar um elemento de mola. Para isto os valores dos momentos de inércia I_x , I_y e I_z devem ser pequenos.

Inicialmente adotou-se $I_x = I_y = I_z = 1 \times 10^{-15} \text{ m}^4$ para os momentos de inércia das molas usadas no modelo do ônibus simplificado. Estes valores geram três quase singularidades na matriz de rigidez da estrutura (ler o anexo J) que obrigam o uso do artifício do deslocamento (*shift*) para se obter os autovalores e autovetores desta matriz. Porém, o efeito destas inércias não se restringe ao cálculo dos autovalores.

Uma etapa do código implementado é determinar a matriz dos coeficientes de influência G_{cb} que na verdade é formada por 4 vetores os quais se somados devem fornecer zero em todas as posições com exceção das correspondentes ao grau de liberdade Z . Na prática esta operação corresponde a um deslocamento unitário de corpo rígido do veículo. Quando as molas eram modeladas com os momentos de inércia já mencionados obtinha-se valores da ordem de 0,2 onde se deveria ter zero. Do mesmo modo, os resultados obtidos pelo sistema GAELI numa análise estática da modelo indicavam uma não simetria em deslocamentos da ordem de 0,7%, o que é muito para uma solução do tipo GAUSS.

Este problema foi resolvido fazendo-se $I_x = I_y = I_z = 1 \times 10^{-10} \text{ m}^4$. Com estes valores, os resultados obtidos pelo sistema GAELI correspondiam à simetria do modelo. Do mesmo modo, os valores resultantes da soma dos 4 vetores relacionados com a matriz G_{cb} , que deveriam ser zero, ficaram da ordem de 1×10^{-11} . Com estes novos valores dos momentos de inércia, não se verificou alterações significativas nos resultados dos elementos próximos das molas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS
1995, **NBR 13308 - Amortecedor da suspensão; Verificação do desempenho e durabilidade**. Rio de Janeiro.
- AYMONE, J.L.F.
1996, **Implementação de Estratégia de Refinamento tipo h sem Formação de Nós Irregulares no Sistema GAELI**. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- ASHMORE, S.C.; HODGES, H.C.
1992, **Dynamic Force Measurement Vehicle (DFMV) and its Application to Measuring and Monitoring Road Roughness, Vehicle, Tire, Pavement Interface**. ASTM STP 1164. Philadelphia. p.69-96.
- BABUSKA, I.; GRIEBEL, M.; PITKÄRANTA, J.
1989, **The Problem of Selecting the Shape Functions for a p-type finite element**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.28. p.1891-1908.
- BARBIERI, N.
1995, **Otimização Dinâmica de Veículos Automotivos**. Anais do XVI CILANCE. v.2. p.1169-1178. Curitiba, Paraná.
- BATHE, K.J.
1982, **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice Hall.
- BATOZ, J.L.; TAHAR, M.B.
1982, **Evaluation of a New thin plate quadrilateral element**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.18. p.1655-1678.
- BAZANT, Z.P.; NIMEIRE, M.E.
1973, **Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames**. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE. v.19. n. EM6. p.1259-1281.
- BEERMANN, H.J.
1989, **The Analysis of Commercial Vehicle**. Mechanical Engineering Publications Limited. 186p.
- BENDAT, J.S.; PIERSOL, A.G.
1966, **Measurement and Analysis of Random Data**. New York: John Wiley & Sons. 390p.
- BOÉSSIO, M.L.
1992, **Análise de Vigas de Seção Aberta pelo Método de Subestruturação em Múltiplos Níveis**. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- BRANCO, C.M., FERNANDES, A.A., CASTRO, P.T.
1986, **Fadiga de Estruturas Soldadas**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. 901p.
- BREBBIA, C.A., WALKER
1979, **Dynamic Analysis of Offshore Structures**. - London: Butterworths.

- CHAPMAN, S.J.
1998, **Fortran 90/95 for Scientists and Engineers**. New York: McGrawHill. 1.ed. 874p.
- CHEN, W.F.; BATSUTA, T.
1977, **Theory of Beam-Columns**. New York: McGrawHill, Inc. 2v.
- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J.
1993, **Dynamics of Structures**. New York: McGraw-Hill. 2.ed.
- COLLINS, J.A.
1993, **Failure of Materials in Mechanical Design**. New York: John Wiley & Sons. 2.ed. 629p.
- DODDS, C.J.; ROBSON, J.D.
1973, **The Description of Road Surface Roughness**, Journal of Sound and Vibration. n.31. p.175.
1970, **The Response of Vehicle Components to Random Road Surface Ondulations**. Proceedings of de 13° FISITA. Bruxelas.
- ETTOUNEY, M.M.; KIRBY, J.B.
1981, **Warping Restraint in Three-Dimensional Frames**. Journal of the Structural Division, ASCE, v.107. ST8. p.1643-1656.
- EUROCODE 3
1993, **Design of Steel Structures**. European Commiteee for Standardisation. Brussels. Part 1.1. 340 p.
- FAIRES, V.M.
1983, **Elementos Orgânicos de Máquinas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. 2.ed.
- FUCHS, H.O.; STEPHENS, R.I.
1980, **Metal Fatigue in Engineering**. New York: John Willey. 318p.
- GASPAR, O.
1978, **Teoria das Estruturas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil. 668p.
- GILLESPIE, T.D.
1992, **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. Warrendale: SAE. 493p.
- GROEHS, A.G.
1999, **Mecânica Vibratória**. São Leopoldo: Editora UNISINOS. 650p.
1979, **Introdução à Integração Numérica**. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Caderno Técnico nº 9. /79. 163p.
- GROEHS, A.G.; SANTOS, M.I.G.
1990, **Gaeli**; Gerador e Analisador de Estruturas Lineares. - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- HINTON, OWEN
1984, **Finite Element Software for Plates and Shells**. U.K.: Pineridge Press.
- JUVINALL, R.C.
1983, **Fundamentals of Machine Component Design**. New York: John Wiley & Sons. 652p.
1967, **Engineering considerations of Stress, Strain and Strength**. New York: McGraw-Hill. 613p.

- KAMASH, K.M.A.; ROBSON, J.D.
 1977a, **The Application of Isotropy in Road Surface Modelling.** Journal of Sound and Vibration. v.31. p.175.
 1977b, **Implications of Isotropy in Random Surfaces.** . Journal of Sound and Vibration. v.54. p.131-145.
- KANOK, W.
 1988, **Degenerate Elements for Combined Flexural and Torsional Analysis of Thin-walled Structures.** Journal of Structural Engineering. v.114. n.3. p.657-674.
- KATILI, I.
 1993, **A new discrete Kirchhoff-Mindlin Element based on Mindlin-Reissner Plate Theory and assumed shear strain fields; Part II: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.36. p.1885-1908.
- KRAHULA, J.L.
 1967, **Analysis of Bent and Twisted Bars Using Finite Element Method.** AIAA Journal. v.5. n.6. june. p.1194-1197.
- KULAKOWSKI, B.T.; CHI, M.C.; CHUN, L.
 1992, **Measurement and Modeling of Truck Tire Traction Characteristics, Vehicle, Tire, Pavement Interface.** Philadelphia: ASTM STP 1164. p.112-124.
- LÜ, P., ZHAO, B., YAN, J.
 1998, **Efficient Algorithm for Fatigue Life Calculations under Broad Band Based on Peak Approximation.** Journal of Engineering Mechanics. February. p.233-236.
- MACNEAL, R.H.; HARDER, R.L.
 1992, **Eight nodes or nine?.** International Journal for Numerical Methods Engineering. v.33. p.1049-1058.
- MORAIS, V.R.
 1993, **Análise de Estruturas de Barras de Paredes Finas de Seções Abertas.** Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- MORSCH, I.B.; GROEHS, A.G.
 1996, **Estudo do Problema do Empenamento em Perfis de Seção Aberta Utilizando Elementos de Casca Poliédrica.** XVII MECOM. Tucumán - Argentina.
- MORSCH, I.B.
 1997a, **Como Implementar Novos Elementos de Casca Plana no GAELI.** Relatório Interno. CEMACOM – UFRGS. p.5.
 1997b, **Exemplos de Análise de Perfis de Seção Aberta submetidos à Torção através de Elementos Finitos.** Relatório Interno. CEMACOM – UFRGS. p.11.
 1991, **Pós-Processador de Verificação Estrutural para o Sistema GAELI.** Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- NATHOO N.S.; HEALEY, A.J.
 1978, **Coupled Vertical-Lateral Dynamics of a Pneumatic Tired Vehicle; Part 1 and Part 2.** Journal of Dynamics Systems Measurements and Control. v.100. p.311.

- NEWLAND, D.E.
1993, **An Introduction to Random Vibrations Spectral and Wavelet Analysis**. 3.ed. 477p.
- NORTON, R.L.
1998, **Machine Design**. New Jersey: Prentice-Hall. 1048p.
- ODEN, J.T.; RIPPERGER, E.A.
1981, **Mechanics of Elastic Structures**. New York: Hemisphere Publishing Corporation. 2.ed.
- PAAVOLA, J.
1992, **A finite element technique for thin-walled girders**. Computers & Structures. v.44. n.1. p.159-175.
- PINSKY, P.M.; JASTI, R.V.
1989, **A mixed finite element formulation for Reissner-Mindlin plates based on the use of bubble functions**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.28. p.1677-1702.
- POELMAN, M.A.; WEIR, R.P.
1992, **Vehicle Fatigue Induced by Road Surface Roughness; Vehicle, Tire, Pavement Interface**. Philadelphia: ASTM STP 1164. p.97-111.
- POLIT, O.; TOURATIER, M.; LORY, P.
1994, **A New Eight-Node Quadrilateral Shear-Bending Plate Finite Element**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.37. p.387-411.
- PRESS, H.W., TEUKOLSKY, S.A., et al.
1996, **Numerical Recipes in Fortran 77**. Cambridge University Press. 933p.
- RIERA, J.D.
1989, **Análise de Sistemas Submetidos a Excitações Aleatórias; Parte I. Relatório Técnico RT-09**. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- ROBSON, J.D.
1978, **The Role of the Parkhilovskii Model in Road Description; Vehicle System Dynamics**. v.7. p.153-162
- SAE
1997, **Fatigue Design Handbook**. Warrendale. 3ª edição. 470p.
- SEBAALY, P.E.
1992, **Pavement Damage as Related to Tires, Pressures, Axe Loads, and Configurations, Vehicle, Tire, Pavement Interface**. Philadelphia: ASTM STP 1164. p.54-68.
- SHIGLEY, J.E.
1963, **Mechanical Engineering Design**. New York: McGraw-Hill. 613p.
- SHIGLEY, J.E.; MISCHKE, C.R.
1986, **Standard Handbook of Machine Design**. New York: McGraw-Hill. 996p.
- SMITH, B.T., BOYLE, J.M., DONGARRA, J.J., GARBOW, B.S.
1976, **Matrix Eingsystem Routines**. EISPACK Guide. New York
- SOKOL, L.
1989, **Calcul des Caractéristiques Géométriques de Torsion des Profils Ouverts à Parois Minces**. Revue Construction Métallique. n.1.

- SURESH, S.
1998, **Fatigue of Materials**. Cambridge: Cambridge University Press. 2.ed. 679 p.
- SWANSON ANALYSIS SYSTEMS
1992, **ANSYS User's Manual**. 5.ed.
- SZABÓ, B.A.; SAHRMANN, G.J.
1988, **Hierarchic Plate and Shell Models Based on p- Extension**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.26. p.1855-1881.
- SZABÓ, B.A.; BABUSKA, I.
1989, **Finite Element Analysis**. New York: Wiley&Sons.
- VLASOV, V.Z.
1961, **Thin-walled Elastic Beams**. Washington: Department of Commerce. 2.ed.
- WHEELER, P.M.
1993, **Geometric Element Technology; A Question of Accuracy**. Benchmark. Setember. p.38- 39.
- WIRSCHING, P.H.
1995, **Probabilistic Fatigue Analysis**. In: Sundararajan, C. **Probabilistic Structural Mechanics Handbook**. Chapman&Hall. p.146-165.
- XU, Z.; ZIENKIEWICZ, O.C., &
1994, **Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Elements; Part III: An Alternative Quadrilateral**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.36. p.1437-1443.
- YANG, C.Y.
1986, **Random Vibration of Structures**. New York: Jonh Willey & Sons. 294p.
- YANG, Y.B.
1986, **A structural Matrix for Geometric Nonlinear Analysis**. Journal of Structural Engineering. ASCE 112 (ST4). p.853-77.
1984, **Linear and Nonlinear Analysis of Space Frames with Nonuniform Torsion Using Interactive Computer Graphics**. Program of Computer Graphics and Department of Structural Engineering. Cornel University.
- YI, K.; HEDRICK, K.
1992, **The Use of Semi-Active Suspensions to Reduce Pavement Damage; Vehicle, Tire, Pavement Interface**. Philadelphia: ASTM STP 1164. p.1-13.
- YU
1973, **Cold-formed steel structures**. New York: McGraw Hill. 463p.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; XU, Z., &
1993, **Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Elements; Part I - Simple Quadrilateral**, International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.36. p.3043-3056.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.
1991a, **The Finite Element Method**. New York: McGraw-Hill. 2v. v.1. 4.ed.
1991b, **The Finite Element Method**. New York: McGraw-Hill. 2v. v.2. 4.ed.

ZIENKIEWICZ, O.C.; GAGO, S.R.; KELLY, D.W.

1983, **The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis.** Computers & Structures.
v.16. p.53-65.