

AMÉRICO CAMPOS FILHO

ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL
DE ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO
PARA OBTENÇÃO DE MODELO MATEMÁTICO

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "DOUTOR EM ENGENHARIA".

Orientador: Prof. Péricles Brasiliense Fusco

São Paulo

Dezembro de 1987

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Péricles Brasiliense Fusco, pela segura orientação e pelos ensinamentos ministrados no transcurso deste trabalho.

À Prof^a Leda Carmen Wulff Gobetti, do CPGEC da UFRGS, pelo permanente interesse e colaboração ao longo de toda a realização deste trabalho.

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, do DEC da PUC/RJ, pelas sugestões feitas e pelo material bibliográfico fornecido.

Ao Prof. Ademar Gilberto Groehs, do CPGEC da UFRGS, pelo auxílio na parte computacional.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela atenção dispensada.

Aos órgãos que proporcionaram o auxílio financeiro.

Aos colegas, pelo convívio e cooperação dada no decorrer deste trabalho.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - OS FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	5
2.1 - Introdução	5
2.2 - Os modelos de elementos finitos	7
2.3 - Definições fundamentais	8
2.4 - O modelo compatível linear	11
3 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	15
3.1 - Introdução	15
3.2 - O concreto	16
3.3 - O aço	17
3.4 - A aderência entre o concreto e o aço	18
3.4.1 - Generalidades	18
3.4.2 - Os elementos de aderência	19
3.4.3 - Modelos sem os elementos especiais de aderência .	22
3.5 - A fissuração do concreto	23
4 - AS LEIS CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS: O CONCRETO E O <u>A</u>	

ÇO	27
4.1 - Introdução	27
4.2 - As propriedades básicas do concreto e do aço	27
4.2.1 - O concreto	27
4.2.1.1 - O concreto sob carregamento uniaxial	28
4.2.1.2 - O concreto sob carregamento biaxial	30
4.2.1.3 - O concreto sob carregamento triaxial	33
4.2.2 - O aço	34
4.3 - O modelo constitutivo para o concreto	35
4.3.1 - Generalidades	35
4.3.2 - O modelo constitutivo proposto por Ottosen	37
4.3.2.1 - Fundamentos do modelo	37
4.3.2.2 - O índice de não-linearidade	37
4.3.2.3 - As relações tensão-deformação	39
4.3.2.4 - Critério de ruptura	44
4.3.2.5 - Verificação experimental	47
4.4 - O modelo constitutivo para o aço	56
5 - O COMPORTAMENTO DO CONCRETO ARMADO FISSURADO	58
5.1 - Fundamentos	58
5.2 - O modelo para os mecanismos de transmissão de esforços através das fissuras sem participação da armadura	60
5.2.1 - A formulação do modelo analítico	60
5.2.2 - Comparação entre teoria e resultados experimentais	71
5.2.3 - Análise paramétrica do engrenamento dos agregados	73
5.3 - O modelo para os mecanismos de transmissão de esforços através das fissuras com participação da armadura	75

5.3.1 - Generalidades	75
5.3.2 - As componentes envolvidas na transmissão dos esforços	76
5.4 - O modelo para descrever o comportamento do concreto armado fissurado	79
5.4.1 - Introdução	79
5.4.2 - A relação tensão-deslocamento para uma única fissura	79
5.4.2.1 - Uma fissura no concreto simples	79
5.4.2.2 - Uma fissura no concreto armado	80
5.4.3 - A relação entre tensões e deformações no concreto armado fissurado	81
6 - A FLUÊNCIA E A RETRAÇÃO DO CONCRETO	89
6.1 - Conceitos básicos	89
6.2 - O comportamento uniaxial do concreto ao longo do tempo	89
6.2.1 - Generalidades	89
6.2.2 - A fluência	90
6.2.2.1 - Hipóteses	90
6.2.2.2 - A determinação do coeficiente de fluência	91
6.2.3 - A retração	98
6.2.4 - Idade corrigida	100
6.2.5 - Espessura fictícia da peça	101
6.2.6 - Formulação geral	101
6.3 - O comportamento multiaxial do concreto ao longo do tempo	103
6.4 - A determinação das deformações devidas à fluência e à retração em peças de concreto armado	109
7 - O PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA O ESTUDO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	111

7.1 - Introdução	111
7.2 - Os algoritmos para a solução do problema	113
7.2.1 - Solução via método incremental	113
7.2.2 - Solução via método iterativo	114
7.3 - Cálculo das matrizes de rigidez dos elementos de concreto armado	116
7.3.1 - Fundamentos	116
7.3.2 - A matriz de rigidez para a armadura	118
7.3.3 - A matriz de rigidez para o concreto	124
7.3.3.1 - O concreto não fissurado	124
7.3.3.2 - O concreto fissurado	126
8 - A FORMULAÇÃO PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO	132
8.1 - Fundamentos	132
8.2 - Os elementos para o concreto	135
8.3 - Os elementos para a armadura	138
9 - A FORMULAÇÃO PARA O ESTADO TRIPLO DE TENSÃO	145
9.1 - Fundamentos	145
9.2 - O elemento para o concreto	148
9.3 - O elemento para a armadura	149
10 - ANÁLISE PARAMÉTRICA DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL	154
10.1 - Introdução	154
10.2 - A influência do nível de discretização	154
10.3 - Comparação dos algoritmos de solução	158
10.4 - A influência das propriedades mecânicas do concre <u>to</u> to	162
10.5 - Os fatores que influenciam o comportamento ao lon <u>go</u> go do tempo das peças de concreto armado	166

VII

11 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DO CISALHAMENTO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO	171
11.1 - Introdução	171
11.2 - A influência da armadura de cisalhamento	172
11.3 - A influência da largura da alma	174
12 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ABERTURA NA ALMA	196
12.1 - Introdução	196
12.2 - As características das vigas	196
12.3 - Análise dos resultados	199
13 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DE VIGAS CONTÍNUAS DE CONCRETO ARMADO	209
13.1 - Introdução	209
13.2 - As características das vigas	209
13.3 - Análise dos resultados	213
14 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DO COMPORTAMENTO AO LONGO DO TEMPO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	225
14.1 - Introdução	225
14.2 - As características das vigas	225
14.3 - Análise dos resultados	228
15 - ANÁLISE TRIDIMENSIONAL: ESTUDO DE UMA LAJE DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA A UMA CARGA CONCENTRADA	237
15.1 - Introdução	237
15.2 - As características da laje	237
15.3 - Análise dos resultados	239
16 - CONCLUSÕES	242
ANEXO A - FUNDAMENTOS SOBRE O CRITÉRIO DE RUPTURA PARA O CONCRETO	244

VIII

A.1 - Generalidades	244
A.2 - Os invariantes de tensão	245
A.3 - Os invariantes de deformação	250
A.4 - Características da superfície de ruptura do concreto	252
ANEXO B - EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA A DETERMINAÇÃO DOS VALORES DAS FUNÇÕES E PARÂMETROS DE FLUÊNCIA E RETRAÇÃO CONFORME O CEB	254
ANEXO C - UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL NA VERSÃO EM FORTRAN IV PARA O SISTEMA BURROUGHS A10	256
C.1 - Introdução	256
C.2 - A linguagem orientada	256
C.3 - A utilização dos comandos	259
C.4 - A sintaxe dos comandos	261
C.5 - Exemplo de utilização dos comandos	266
ANEXO D - UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL NA VERSÃO EM FORTRAN 77 PARA MICRO-COMPUTADORES COMPATÍVEIS COM O IBM-PC	270
D.1 - Introdução	270
D.2 - Os comandos da linguagem orientada	270
D.3 - Exemplo de utilização dos comandos	275
BIBLIOGRAFIA	279

SINOPSE

Este trabalho apresenta um modelo computacional para a análise de peças de concreto armado, utilizando o método dos elementos finitos. Este modelo considera a fluência e a retração do concreto, a transmissão de esforços através das fissuras e o deslizamento que ocorre entre o concreto e a armadura junto a uma fissura.

ABSTRACT

This work presents a computer model to reinforced concrete elements analysis by finite element method. This model considers creep and shrinkage of concrete, shear transfer in cracks and slip displacement between concrete and reinforcement near a crack.

NOTAÇÕES

Letras romanas maiúsculas

- A - área; parâmetro
- A_c - área da seção transversal geométrica da peça
- A_s - área da seção transversal da armadura
- B - parâmetro
- B_{ij} - elemento da matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto
- B_i^s - elemento do vetor que relaciona a deformação na armadura com os deslocamentos nodais do elemento de concreto
- C - parâmetro
- C_{ij} - elemento da inversa da matriz constitutiva
- D - parâmetro de pós-ruptura no modelo constitutivo para o concreto; parâmetro; diâmetro de agregado
- D_{ij} - elemento da matriz constitutiva
- $D_{máx}$ - diâmetro máximo dos agregados
- E - módulo de deformação longitudinal
- E_c - módulo de deformação longitudinal do concreto; módulo de deformação longitudinal secante do concreto correspondente à f_c

E_{cm}	- módulo de deformação longitudinal médio do concreto
E_f	- módulo de deformação longitudinal secante do concreto na ruptura para estado triaxial de tensão
E_S	- módulo de deformação longitudinal secante
E_s	- módulo de deformação longitudinal do aço
E_0	- módulo de deformação longitudinal inicial
F	- ação
F_{ij}	- elemento da matriz de flexibilidade
G	- módulo de deformação transversal; módulo de fundação; referente ao sistema global de coordenadas
H_i	- função de forma para o elemento de armadura
I	- momento de inércia
I_i	- invariante do tensor de tensão σ_{ij}
J	- jacobiano
J_i	- invariante do tensor de tensão anti-esférico s_{ij}
K	- módulo de compressibilidade
K_{ij}	- elemento da matriz de rigidez
L	- referente ao sistema local de coordenadas
L_i	- coordenada normalizada
M	- momento fletor
N	- força normal
N_i	- função de forma para o elemento de concreto
P	- carga concentrada
S	- superfície; referente a valor secante
S_0	- superfície de contorno em que as forças aplicadas são conhecidas
S_u	- superfície de contorno em que os deslocamentos são conhecidos
T	- temperatura; referente a valor tangente

- T_{ij} - elemento da matriz de tensão
 U - umidade relativa do ambiente; deslocamento
 V - volume

Letras romanas minúsculas

- a - parâmetro; comprimento; área
 b - parâmetro; coordenada; força de corpo
 c - coordenada; referente ao concreto
 d - altura útil da peça
 f - resistência; força distribuída; função; flecha
 f_c - resistência à compressão do concreto
 f_{cd} - resistência de cálculo do concreto
 f_{cj} - resistência média do concreto à compressão, prevista para a idade de j dias
 f_{ck} - resistência característica do concreto à compressão
 f_{cm} - resistência média do concreto à compressão
 f_{ct} - resistência à tração do concreto
 f_{ctk} - resistência característica do concreto à tração
 f_{2c} - resistência à compressão biaxial do concreto
 f_u - resistência última
 f_y - resistência de escoamento do aço
 f_{yc} - resistência de escoamento do aço à compressão
 f_{yd} - resistência de cálculo do aço
 f_{yk} - resistência característica do aço
 f_{yt} - resistência de escoamento do aço à tração
 h - altura; espessura; parâmetro
 h_{fic} - espessura fictícia
 i - índice
 j - índice

k	- rigidez; índice; constante
l	- comprimento
m	- referente à média
n	- normal
p	- probabilidade; energia potencial
q	- deslocamento; parâmetro
r	- deslocamento
r_{ij}	- elemento de uma matriz de rigidez
s	- espaçamento das fissuras; coordenada curvilínea; referente ao aço
s_m	- espaçamento médio das fissuras na configuração estabilizada
t	- transposto; transversal; tempo
t_0	- instante de aplicação do carregamento
u	- deslocamento; perímetro
v	- deslocamento
w	- deslocamento
x	- coordenada; parâmetro
y	- coordenada; parâmetro
z	- coordenada

Letras gregas maiúsculas

Δ	- deslocamento de corte; deslizamento; incremento
Σ	- somatório
Φ	- função de fluência

Letras gregas minúsculas

α	- ângulo; coeficiente
β	- índice de não-linearidade; coeficiente

β_d	- coeficiente relativo à deformação lenta reversível
β_f	- coeficiente relativo à deformação lenta irreversível
γ	- distorção específica; coeficiente
δ	- deslocamento; variação
δ_{ij}	- delta de Kronecker
ϵ	- deformação específica
ϵ_c	- deformação específica do concreto
ϵ_{cc}	- deformação específica do concreto por fluência
ϵ_{cca}	- deformação específica do concreto por fluência rápida
ϵ_{ccd}	- deformação específica do concreto por fluência lenta reversível
ϵ_{ccf}	- deformação específica do concreto por fluência lenta irreversível
ϵ_{cu}	- deformação específica última do concreto à compressão
ϵ_{cut}	- deformação específica última do concreto à tração
ϵ_i	- deformação principal
ϵ_s	- deformação específica do aço; deformação específica do concreto por retração
ϵ_v	- deformação volumétrica
ϵ_y	- deformação específica de escoamento do aço
ϵ_0	- deformação inicial
ζ	- parâmetro; coordenada normalizada
η	- coordenada normalizada
θ	- ângulo
κ	- parâmetro
λ	- parâmetro
μ	- coeficiente de atrito
ν	- coeficiente de Poisson
ν_f	- coeficiente de Poisson secante sobre a superfície de ruptura

ν_S	- coeficiente de Poisson secante
ν_0	- coeficiente de Poisson inicial
ξ	- coordenada normalizada
π	- funcional
ρ	- taxa geométrica de armadura
σ	- tensão normal
σ_c	- tensão normal no concreto
σ_i	- tensão principal
σ_m	- tensão média
σ_{oct}	- tensão normal octaédrica
σ_{pu}	- tensão última da pasta de cimento endurecida
σ_s	- tensão normal na armadura
σ_{sr}	- tensão normal na armadura, logo após a fissuração
σ_0	- tensão inicial
τ	- tensão tangencial
τ_{oct}	- tensão tangencial octaédrica
ϕ	- diâmetro de barra de armadura; coeficiente de fluência
ϕ_a	- coeficiente de fluência rápida
ϕ_d	- coeficiente de fluência lenta reversível
ϕ_f	- coeficiente de fluência lenta irreversível
χ	- coordenada normalizada

1 - INTRODUÇÃO

O concreto, armado ou protendido, é um dos mais importantes materiais de construção da engenharia estrutural. O projeto e a execução de novas estruturas de concreto requerem um avanço contínuo na investigação do seu comportamento.

O comportamento do material concreto armado é bastante complexo. Isto decorre dos seguintes aspectos:

- a resistência à tração do concreto é muito inferior à sua resistência à compressão;
- a relação entre tensões e deformações, já para níveis de tensão relativamente baixos, deixa de ser linear; além disto, a deformação não é dependente unicamente do estado corrente de tensão, mas, também, da história de tensões;
- o concreto apresenta fluência e retração; estes fenômenos dependem, entre outros fatores, da umidade ambiente e das dimensões do elemento estrutural;
- no concreto fissurado, os esforços podem ser transmitidos a través de uma fissura, dependendo da abertura da mesma;
- a aderência entre o aço da armadura e o concreto adjacente não é perfeita;
- as zonas de ancoragem da armadura apresentam um complexo funcionamento, com um estado tridimensional de tensão.

A análise tradicional de estruturas de concreto é baseada em ensaios de estruturas ou de peças estruturais em laboratórios. Os resultados obtidos, nesta forma de análise, são limitados, e, às vezes, de difícil interpretação. É necessária a existência de modelos matemáticos para complementar esta análise experimental e para possibilitar a generalização dos resultados para diferentes estruturas e formas de carregamento.

O objetivo deste trabalho é a obtenção de um modelo matemático, através do método dos elementos finitos, que possibilite esta análise. São desenvolvidas formulações para estados plano e triplo de tensão. O modelo considera a fluência e a retração do concreto, a transmissão de esforços através das fissuras e o deslizamento que ocorre entre o concreto e a armadura junto a uma fissura.

No capítulo 2, apresentam-se, com base no trabalho de Brebbia e Ferrante [22], os fundamentos do método dos elementos finitos e a formulação do modelo compatível linear. Como será visto em capítulos posteriores, a solução de um problema não-linear será alcançada através da resolução de sucessivos problemas lineares.

No capítulo 3, faz-se uma revisão das diversas formas já utilizadas para modelar o concreto armado através do método dos elementos finitos, a partir do que foi publicado pelo Comitê Euro-International du Béton [37]. Abordam-se os aspectos que dificultam a aplicação deste método na modelagem de um material não homogêneo como o concreto armado. Assim, discutem-se, neste capítulo, os modelos constitutivos para os materiais e as formas de modelagem da aderência entre o concreto e o aço e da fissuração do concreto.

No capítulo 4, descreve-se o comportamento experimental dos materiais isoladamente (o concreto e o aço), conforme um estudo de Chen [34], e apresentam-se as leis constitutivas adotadas, no presente trabalho, para simular estes comportamentos. Estas leis usam valores secantes dos parâmetros dos materiais.

O capítulo 5 analisa os mecanismos de transmissão de esforços no concreto armado fissurado, com base no trabalho de Walraven e Reinhardt [112]. A partir deste trabalho, estabelece-se a relação tensão-deformação para o concreto fissurado, que é empregada no modelo computacional desenvolvido.

No capítulo 6, é apresentado o procedimento de determinação das deformações por fluência e retração do concreto e a sua consideração dentro do modelo desenvolvido.

O capítulo 7 aborda os principais aspectos considerados na implementação computacional do modelo. São apresentados os algoritmos incremental e iterativo utilizados na solução do problema não-linear. Os dois algoritmos usam a rigidez secante. Mostra-se, ainda, neste capítulo, a forma de obtenção da matriz de rigidez para o elemento finito de concreto armado.

Nos capítulos 8 e 9, a formulação, apresentada de forma genérica no capítulo 7, é desenvolvida para os casos específicos de estados plano e triplo de tensão, respectivamente.

No capítulo 10, faz-se uma análise paramétrica dos resultados obtidos com a utilização do programa computacional. São estudados, neste capítulo, a influência do nível de discretização da malha de elementos finitos, o efeito dos algoritmos de solução do problema, a repercussão da variabilidade das propriedades mecânicas e dos fatores que afetam o comportamento ao longo do tempo do concreto.

Os capítulos 11 até 15 confrontam valores determinados através do modelo de elementos finitos com uma série de resultados experimentais. Estas comparações têm por finalidade comprovar a validade do modelo na simulação do comportamento de peças de concreto armado.

Finalmente, no capítulo 16, faz-se uma avaliação dos resultados do modelo computacional e das perspectivas desta forma de análise.

Adicionalmente, existem quatro anexos para complementar o conteúdo deste trabalho. O anexo A trata do critério de ruptura para o concreto, apresentando conceitos que são empregados no capítulo 4. O anexo B dá expressões alternativas às mostradas no capítulo 6 para a determinação das deformações por fluência e por retração do concreto. Estas expressões são propostas pelo Comité Euro-International du Béton em [43]. Os anexos C e D apresentam a forma de utilização do programa nas duas versões desenvolvidas, uma para o sistema Burroughs A10 e outra para micro-computadores compatíveis com o IBM-PC.

2 - OS FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - Introdução

Através do método dos elementos finitos, obtêm-se soluções aproximadas de muitos problemas de engenharia. Estas soluções aproximadas aparecem em termos de variáveis com um claro significado físico, o que torna o método bastante atraente.

O método dos elementos finitos é aplicável a um problema, cuja solução requer que um dado funcional π seja estacionário, isto é,

$$\delta\pi = 0 \quad (2.1)$$

A expressão (2.1) representa a solução exata para um problema contínuo, correspondendo a se achar as funções analíticas, que descrevem o comportamento das variáveis incógnitas, em termos das quais o problema foi formulado.

Aplicando-se o método dos elementos finitos, substitui-se o funcional exato π por um funcional aproximado π_a , em que as variáveis do problema são expressas em termos de funções de interpolação, ponderadas por parâmetros incógnitos. Geralmente, estes parâmetros estão associados com as variáveis do problema ou com alguma outra grandeza física.

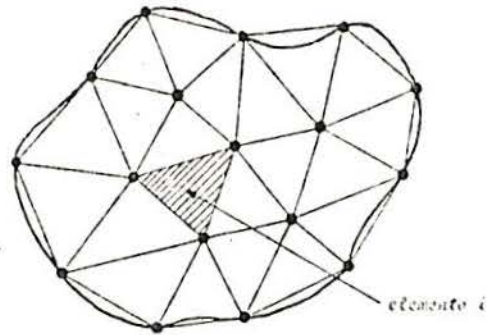


Fig. 2.1 - Discretização em elementos finitos

Para se utilizar o método, divide-se o domínio de integração em regiões ou elementos finitos, conforme mostra a Fig. 2.1.

No contorno de cada elemento e, eventualmente, dentro do próprio elemento, define-se um número de pontos nodais. Os parâmetros incógnitos são obtidos dos valores das variáveis do problema nestes pontos. Desta maneira, as expressões para as variáveis do problema ficam determinadas pela combinação linear das funções de interpolação, escolhidas adequadamente, multiplicadas por estes parâmetros nodais.

O valor do funcional aproximado π_a , sobre o domínio de integração, é o somatório dos valores obtidos para o funcional sobre cada elemento finito. Assim,

$$\pi_a = \sum_{i=1}^m \pi_{ai} \quad (2.2)$$

onde m é o número total de elementos.

Para um dado elemento i , as variáveis do problema são expressas em termos das funções de interpolação conhecidas e de parâmetros desconhecidos α_j , com $j = 1, 2, \dots, k_i$ (onde k_i é o número de parâmetros desconhecidos do elemento i). Deste modo, tem-se

$$\pi_a(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m \pi_{ai}(\alpha_j) \quad (2.3)$$

A solução exata, dada pela expressão (2.1), é substituída por uma aproximada, na qual a primeira variação

de π_a deve ser igual a zero sobre o domínio de integração. Assim,

$$\delta \pi_a = 0 \quad (2.4)$$

ou

$$\sum_{i=1}^m \delta \pi_{ai}(\alpha_j) = 0 \quad (2.5)$$

ou

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\partial \pi_{ai}(\alpha_j)}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (2.6)$$

Esta última expressão é um conjunto de equações simultâneas, cuja solução fornecerá os valores dos parâmetros α_j . Usando estes valores e as funções de interpolação, podem-se calcular os valores das variáveis do problema em qualquer ponto do domínio de integração.

2.2 - Os modelos de elementos finitos

A formulação atual do método dos elementos finitos foi introduzida em meados dos anos cinquenta. Foi aplicado o método matricial dos deslocamentos a problemas de estado plano de tensão, usando elementos triangulares e retangulares. Esta formulação, bem como outras anteriores, não era, ainda, baseada nas equações de campo da mecânica dos meios contínuos.

Apenas na década dos sessenta, um estudo mais aprofundado dos princípios variacionais permitiu uma generalização do método. Assim, dos diferentes princípios variacionais foi possível derivar os diversos modelos de elementos finitos.

No caso particular dos problemas da mecânica dos sólidos, conforme apresentado por Ferrante em [22], pode-se empregar quatro diferentes formulações do método, diferenciando pelo princípio variacional utilizado e pelo tipo de comportamento local admitido para cada elemento. Estas formula-

ções, chamadas de modelos de elementos finitos, são o modelo compatível, o modelo de equilíbrio, o modelo híbrido e o modelo misto.

O modelo compatível é derivado do princípio da energia potencial mínima. Admitem-se campos de deslocamentos contínuos sobre cada elemento e preserva-se a compatibilidade de deslocamentos entre os elementos. As incógnitas deste problema são os deslocamentos nodais. Este modelo, conhecido por método dos deslocamentos ou da rigidez, foi o escolhido para a formulação desenvolvida neste trabalho.

2.3 - Definições fundamentais

Seja um corpo tridimensional, conforme aparece na Fig. 2.2. O domínio de integração do problema é chamado de V . A superfície de contorno S é composta de duas partes: uma em que os deslocamentos são conhecidos, chamada S_u e outra em que as forças aplicadas são conhecidas, chamada S_σ .

Cada ponto do domínio de integração V está submetido a um estado de tensão σ e a um estado de deformação ϵ . Emprega-se a notação $\{ \}$ para indicar um vetor; $[\]$ para indicar uma matriz e o índice "t" para indicar a transposta. Um vetor, representado por $\{ \}$, é um vetor-coluna, enquanto que $\{ \}^t$ é um vetor-linha.

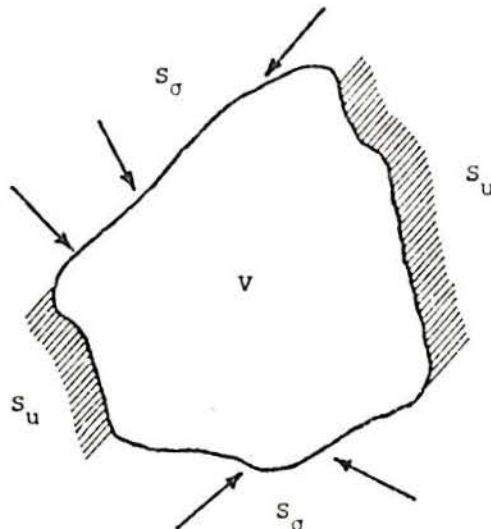


Fig. 2.2 - Corpo genérico tridimensional

Usando esta notação, têm-se

$$\{\sigma\}^t = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \} \quad (2.7)$$

e

$$\{\varepsilon\}^t = \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \} \quad (2.8)$$

O deslocamento de qualquer ponto é definido por suas componentes, através do vetor deslocamento

$$\{u\}^t = \{ u_x \quad u_y \quad u_z \} \quad (2.9)$$

As componentes de deslocamento u_x, u_y, u_z serão, nos capítulos seguintes, referenciadas por u, v, w .

As forças de corpo atuando em um ponto do volume V e as cargas aplicadas na superfície de contorno S_σ são definidas pelos vetores

$$\{b\}^t = \{ b_x \quad b_y \quad b_z \} \quad (2.10)$$

e

$$\{p\}^t = \{ p_x \quad p_y \quad p_z \} \quad (2.11)$$

As deformações iniciais ε^0 e as tensões iniciais σ^0 , caso estiverem presentes, são definidas pelos vetores

$$\{\varepsilon^0\}^t = \{ \varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \varepsilon_z^0 \quad \gamma_{xy}^0 \quad \gamma_{xz}^0 \quad \gamma_{yz}^0 \} \quad (2.12)$$

e

$$\{\sigma^0\}^t = \{ \sigma_x^0 \quad \sigma_y^0 \quad \sigma_z^0 \quad \tau_{xy}^0 \quad \tau_{xz}^0 \quad \tau_{yz}^0 \} \quad (2.13)$$

A solução do problema vai envolver as equações diferenciais de equilíbrio, as relações deformações-deslocamentos e a equação constitutiva do material.

As equações de equilíbrio são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

com $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

As relações deformações-deslocamentos, para o caso de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos), são dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.15)$$

com $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ e $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$.

As equações constitutivas dos materiais, no caso de linearidade física, são dadas, genericamente, pela expressão

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^0\}) \quad (2.16)$$

Esta relação pode ser escrita em sua forma inversa

$$\{\epsilon\} = [C] (\{\sigma\} - \{\sigma^0\}) \quad (2.17)$$

2.4 - O modelo compatível linear

O modelo compatível é baseado no princípio da energia potencial mínima. Sendo π_p a energia potencial total, pelo princípio da energia potencial mínima, tem-se que

$$\delta\pi_p = 0 \quad (2.18)$$

ou

$$\begin{aligned} \delta\pi_p = \int_V \{\delta\epsilon\}^t [D] \{\epsilon\} dV - \int_V (\{\delta\epsilon\}^t [D] \{\epsilon^0\} + \\ + \{\delta u\}^t \{b\}) dV - \int_{S_\sigma} \{\delta u\}^t \{p\} dS = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Seja um corpo subdividido em elementos finitos. A hipótese básica deste modelo é que os deslocamentos, em qualquer ponto do elemento, podem ser representados por uma função em termos de parâmetros desconhecidos. Assim, para um elemento i , pode-se escrever que

$$\{u\} = [A] \{\alpha\} \quad (2.20)$$

onde $[A]$ é uma matriz função da posição e $\{\alpha\}$ é um vetor de parâmetros a determinar do elemento i .

Representando por $\{U^i\}$, o vetor de deslocamentos nodais do elemento i , tem-se

$$\{U^i\} = [C] \{\alpha\} \quad (2.21)$$

onde $[C]$ é uma matriz quadrada de constantes. Esta matriz, caso possa ser invertida, resulta em

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{U^i\} \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.20), vem

$$\{u\} = [A] [C]^{-1} \{U^i\} \quad (2.23)$$

ou

$$\{u\} = [N] \{U^i\} \quad (2.24)$$

com

$$[N] = [A] [C]^{-1} \quad (2.25)$$

onde a matriz [N] contém as funções de interpolação.

Utilizando-se as relações deformações-deslocamentos em (2.24), obtém-se

$$\{\epsilon\} = [B] \{U^i\} \quad (2.26)$$

Substituindo as expressões (2.24) e (2.26) em (2.19), resulta para o elemento i

$$\begin{aligned} \delta \pi_{P_i} &= \int_{V_i} \{\delta U^i\}^t [B]^t [D] [B] \{U^i\} dV - \\ &- \int_{V_i} (\{\delta U^i\}^t [B]^t [D] \{\epsilon^0\} + \{\delta U^i\}^t [N]^t \{b\}) dV - \\ &- \int_{S_\sigma} \{\delta U^i\}^t [N]^t \{p\} dS \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como os deslocamentos $\{U^i\}$ e suas variações $\{\delta U^i\}$ não dependem da posição, tem-se

$$\begin{aligned} \delta \pi_{P_i} &= \{\delta U^i\}^t \{ (\int_{V_i} [B]^t [D] [B] dV) \{U^i\} - \\ &- \int_{V_i} ([B]^t [D] \{\epsilon^0\} + [N]^t \{b\}) dV - \\ &- \int_{S_\sigma} [N]^t \{p\} dS \} \end{aligned} \quad (2.28)$$

A expressão (2.28) pode ser escrita na forma

$$\delta \pi_{P_i} = \{\delta U^i\}^t ([K^i] \{U^i\} + \{P^i\}) \quad (2.29)$$

onde $[K^i]$ é a matriz de rigidez do elemento e é dada por

$$[K^i] = \int_{V_i} [B]^t [D] [B] dV \quad (2.30)$$

e $\{P^i\}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes do elemento dado por

$$\begin{aligned} \{P^i\} = \int_{V_i} ([B]^t [D] \{\epsilon^0\} + [N]^t \{b\}) dV + \\ + \int_{S_o} [N]^t \{p\} dS \end{aligned} \quad (2.31)$$

A solução global exige que

$$\delta \pi_P = \sum_{i=1}^m \delta \pi_{P_i} = 0 \quad (2.32)$$

onde m é o número total de elementos.

Considerando-se que as variações dos deslocamentos $\{\delta U^i\}^t$ são arbitrárias, obtém-se

$$\sum_{i=1}^m ([K^i] \{U^i\} - \{P^i\}) = 0 \quad (2.33)$$

ou

$$\sum_{i=1}^m [K^i] \{U^i\} = \sum_{i=1}^m \{P^i\} \quad (2.34)$$

A expressão (2.34) pode ser escrita na forma

$$[K] \{U\} = \{P\} \quad (2.35)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez total, $\{U\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\{P\}$ é o vetor de cargas nodais.

Antes de resolver o sistema de equações, dado pela expressão (2.35), as condições de contorno devem ser

introduzidas no problema.

Resolvido o sistema, obtém-se o vetor $\{U\}$, que contém as componentes dos deslocamentos de todos os nós. Então, podem-se calcular as tensões em qualquer ponto de um elemento, pela expressão

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^0\}) = [D] ([B] \{U^i\} - \{\epsilon^0\}) \quad (2.36)$$

3 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 - Introdução

O método dos elementos finitos tem se destacado como o mais poderoso método de análise estrutural. Atualmente, encontra-se perfeitamente estabelecido para o estudo de estruturas compostas de material homogêneo e isotrópico. Entretanto, surge uma série de dificuldades, quando este método é aplicado a um material não homogêneo, tal qual o concreto armado.

No caso das estruturas de concreto armado, entre os fatores que dificultam a obtenção de um modelo preciso para descrever o seu comportamento, destacam-se: a natureza não homogênea do material; a resposta não-linear do material ao carregamento; o deslizamento que ocorre entre o concreto e a armadura com a destruição progressiva da aderência entre os dois materiais e a influência da fissuração progressiva.

Fundamentalmente, o concreto armado é composto por dois materiais: o concreto e o aço. A baixa resistência à tração do concreto, frente à sua resistência à compressão, torna complexo o comportamento do concreto armado, mesmo para baixos níveis de carregamento. Deste modo, é essencial que o

modelo computacional descreva adequadamente a transmissão dos esforços de tração entre o concreto e as barras da armadura.

3.2 - O concreto

As propriedades do concreto são influenciadas por diversos fatores, tais como: a temperatura, a idade, a fluência, a retração, a velocidade e a duração do carregamento.

Para descrever o comportamento do concreto, por uma análise através do método dos elementos finitos, é necessário que se determine a sua relação tensão-deformação a partir de ensaios. Têm-se, por exemplo, os resultados de ensaios obtidos por Kupfer [70] e sua posterior formulação analítica feita por Link [75], válidas para carregamentos monótonos (Fig. 3.1 e Fig. 3.2).

Anteriormente, muitos autores empregavam hipóteses simplificadas para descrever a relação tensão-deformação do concreto. Entretanto, nas análises mais recentes, usam-se relações baseadas em resultados experimentais.

Em geral, admite-se que o comportamento do concreto sob tração segue uma lei tensão-deformação elástica-linear, sendo a ruptura definida pela resistência à tração. O

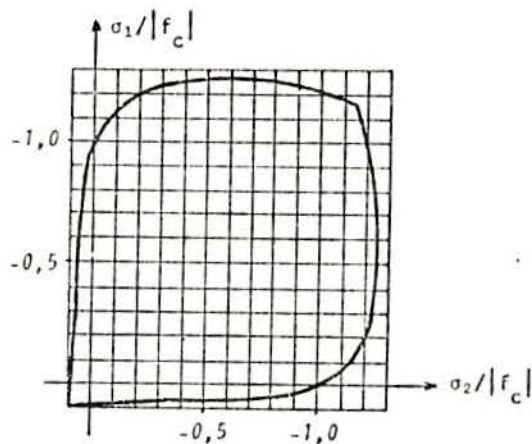


Fig. 3.1 - Critério de ruptura do concreto sob um estado biaxial de tensão dos ensaios de Kupfer

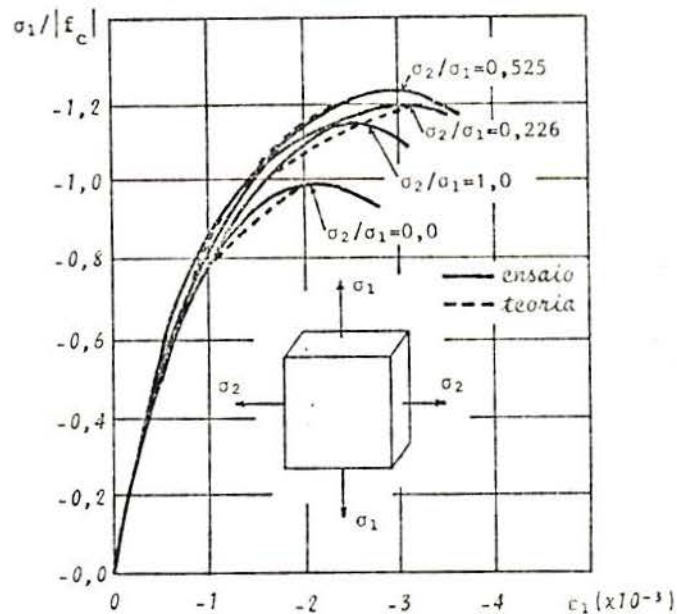


Fig. 3.2 - Relações tensão-deformação do concreto: comparação dos resultados dos ensaios de Kupfer e a formulação analítica de Link

comportamento pós-ruptura à tração do concreto pode ser representado por um modelo de ruptura frágil ou por um de ruptura suave contínua.

Em anos recentes, a mecânica do fraturamento não-linear tem sido usada para o estudo da ruptura por tração do concreto. Em alguns modelos, estudam-se umas poucas fissuras discretas, que se propagam ao longo do contorno dos elementos (por exemplo, Nilson [90]) ou dentro dos elementos (por exemplo, Grootenboer, Leijten e Blaauwendraad [60]). Mais recentemente, foram desenvolvidas aproximações contínuas para o modelo de fissuração, que permitem que as fissuras se propaguem em qualquer direção dentro dos elementos (por exemplo, Bazant e Gambarova [15]). Estes últimos modelos não sofrem muita dependência da escolha da malha.

3.3 - O aço

As barras de aço nas estruturas de concreto armado resistem basicamente a esforços na sua própria direção.

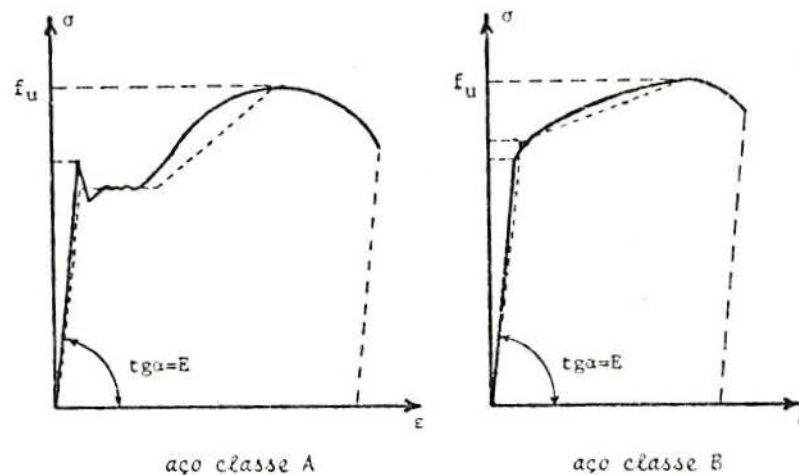


Fig. 3.3 - Relações tensão-deformação para o aço

Assim, é suficiente conhecer as propriedades do aço em estado de tensão uniaxial. A Fig. 3.3 mostra diagramas tensão-deformação típicos dos aços utilizados: aços resfriados naturalmente e encruados a frio. Em geral, admite-se para o aço um comportamento bilinear.

3.4 - A aderência entre o concreto e o aço

3.4.1 - Generalidades

O comportamento carga-deslocamento do concreto armado é fortemente influenciado pela interação dos seus dois componentes: o concreto e o aço. A aderência entre estes materiais é que torna possível a transmissão de esforços. Pode-se dividir os mecanismos de aderência em três componentes: a adesão química, o atrito e o engrenamento mecânico entre o aço e o concreto.

O efeito da aderência evidencia-se a partir da fissuração do concreto. No estado não-fissurado, o carregamento produz tensões principais de tração e compressão nos materiais. Com o aumento da carga, atinge-se a resistência à tração do concreto. Neste momento, ocorre uma ruptura local do material e a fissura se forma. Após a fissuração, as tensões de tração normais à fissura, que eram inicialmente transmitidas pelo concreto, passam a ser transmitidas pela armadura. A

transferência das tensões do concreto para o aço é feita pelos mecanismos de aderência.

A qualidade da aderência é decisiva para a distribuição e para a abertura das fissuras. Ela depende das características das barras da armadura (conformação superficial e diâmetro), da resistência do concreto, da história de carga (especialmente se ocorrerem cargas cíclicas) e das tensões normais à superfície da barra.

A incorporação da aderência nos cálculos através do método dos elementos finitos depende da forma de conectar os elementos de aço aos de concreto. Existem duas maneiras distintas para se modelar esta ligação. Na primeira, usam-se elementos especiais de aderência. Nestes, as propriedades da aderência são modeladas por suas relações tensões-deslocamentos. Da segunda maneira, os elementos de aço e concreto são ligados diretamente. Neste caso, admite-se completa compatibilidade entre aço e concreto, e modifica-se a lei do material (concreto ou aço), para considerarem-se os mecanismos de interação.

A escolha da forma de modelar a aderência depende do problema específico a ser analisado. O uso de elementos especiais de aderência requer grande esforço computacional. Portanto seu emprego só se justifica nos casos em que as tensões de aderência são de particular interesse (por exemplo, estudo de zonas de ancoragem). Em geral, no cálculo de estruturas completas, assume-se completa compatibilidade entre o concreto e a armadura, e modela-se o efeito da aderência indiretamente, incrementando-se a rigidez à tração.

3.4.2 - Os elementos de aderência

Neste item, descreve-se, brevemente, os três tipos básicos de elementos de aderência encontrados na literatura.

O elemento de aderência mais simples é o elemento "ligação de aderência" (bond link), desenvolvido por Ngo e Scordelis [88]. Este elemento, que é mostrado na Fig.

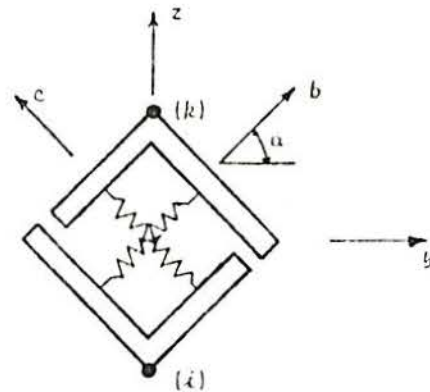


Fig. 3.4 - O elemento "ligação de aderência"

3.4, conecta um nó do elemento de concreto com um nó do elemento de aço adjacente. O elemento não tem dimensão física, ou seja, as coordenadas dos nós ligados coincidem.

O elemento consiste de duas molas, uma paralela e uma normal ao eixo longitudinal da barra de armadura. A mola paralela relaciona as tensões locais de aderência com o deslizamento. A sua rigidez k_b , chamada de módulo de deslizamento, é estimada a partir de valores experimentais de ensaios de arrancamento, podendo seguir leis lineares ou não-lineares. A mola normal ao eixo da armadura transmite o esforço normal entre a armadura e o concreto. É importante para modelar o efeito de pino da armadura. Em problemas em que este efeito pode ser negligenciado, toma-se um valor grande para k_c . Caso contrário, a rigidez k_c deve ser determinada experimentalmente.

Nilson, em [90], sugeriu um refinamento para este elemento, distinguindo entre elementos dentro da massa de concreto e elementos próximos à face de uma fissura, que exibem comportamentos significativamente diferentes.

A segunda maneira de modelar a aderência, no cálculo por elementos finitos, é empregando "elementos de contato" (contact elements), desenvolvidos por Schäfer [102]. Estes elementos (Fig. 3.5) ligam os nós de um elemento de aço com os nós correspondentes do elemento de concreto adjacente.

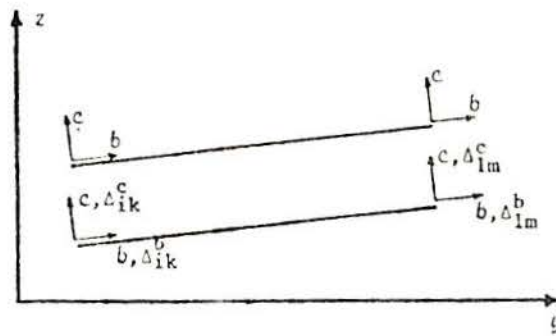


Fig. 3.5 - O elemento de contato linear

O elemento de contato tem ao menos dois nós duplos e o mesmo comprimento que o elemento conectado de armadura. Entre os nós duplos, estabelece-se uma função de interpolação para os deslocamentos relativos. Para um elemento de contato com dois nós duplos, esta função é linear, para três nós duplos é quadrática. Formulações de ordem superior são possíveis, mas não são geralmente usadas. Naturalmente, a ordem do elemento de contato deve ser compatível com a ordem dos elementos conectados de concreto e de armadura.

Para estabelecer a matriz de rigidez, tanto do elemento de contato, como do elemento de ligação, pode-se empregar uma função constante ou uma que dependa não-linearmente do deslizamento ou de outros fatores. Isto permite a consideração da influência da tensão no concreto adjacente, da fissuração e de outras não-linearidades.

A previsão "exata" dos valores das tensões de aderência pode ser feita apenas nos nós. As tensões de aderência entre os nós dependem, além dos valores nodais, da função de interpolação (linear ou quadrática) do elemento.

O terceiro grupo de elementos de aderência é o dos chamados "elementos da zona de aderência" (bond zone elements), desenvolvidos por Groot, Kusters e Monnier [59]. Estes elementos (Fig. 3.6) modelam o concreto na vizinhança da barra de armadura, adotando uma lei para o material que considera as propriedades especiais desta zona de aderência.

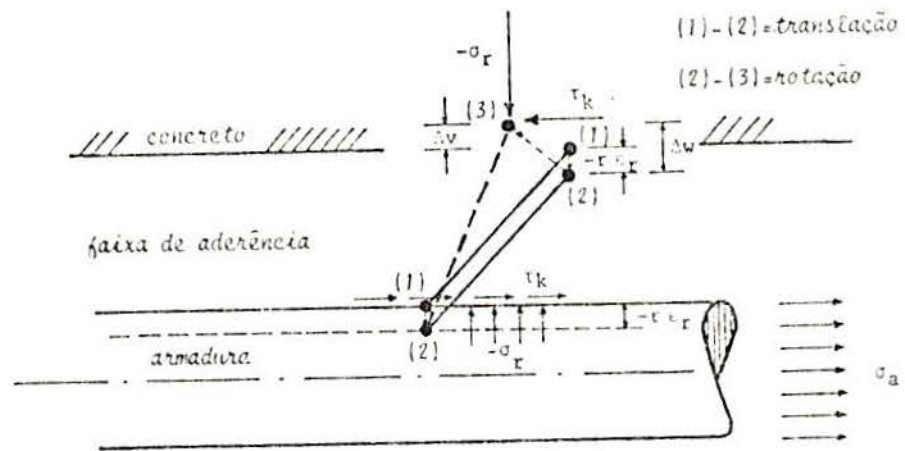


Fig. 3.6 - O elemento da zona de aderência

Neste modelo, a tensão de aderência τ é considerada como a soma da resistência ao deslizamento τ_0 e do engrenamento mecânico τ_k .

3.4.3 - Modelos sem os elementos especiais de aderência

Quando a tensão principal de tração no concreto atinge a sua resistência à tração, ocorre uma ruptura local, formando-se uma fissura. O concreto entre as fissuras continua resistindo a esforços de tração. Estes esforços são transmitidos ao concreto pelos mecanismos de aderência. Negligenciar esta capacidade de carga implica em subestimar significativamente a rigidez pós-fissuração a níveis de carga de serviço. Portanto, na análise de estruturas de concreto armado sob cargas de serviço, é fundamental a consideração da capacidade resistente do concreto entre as fissuras.

Em geral, este efeito é considerado indiretamente, modificando-se a lei material para o concreto ou para o aço. Algumas maneiras de fazer isto são:

- ajustando uma relação momento curvatura média;
- considerando uma armadura virtual adicional;

- introduzindo um ramo descendente suave na relação tensão-deformação do concreto sob tração;
- calculando as tensões na armadura em função de suas deformações médias.

Estes métodos indiretos são utilizados quando os elementos de concreto e aço são ligados diretamente nos nós. Este modo de considerar a rigidez à tração não permite qualquer previsão sobre deslizamento ou tensão de aderência.

3.5 - A fissuração do concreto

Como uma regra geral, as primeiras fissuras, que aparecem no concreto sob carga, são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto. As direções principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura. O valor destas tensões de corte depende das condições locais na fissura.

As tensões de corte podem ser transmitidas, através da fissura, por meio do engrenamento dos agregados das superfícies de concreto e pelo efeito de pino das barras da armadura. A transferência do esforço de corte através da fissura depende fortemente da abertura da fissura.

Antes de fissurar, o concreto é um material elástico-linear e isotrópico, e sua lei constitutiva pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Após a fissuração, o módulo de deformação, associado com a direção da maior tensão principal de tração σ_x , é igual a zero

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \alpha G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

onde α é um fator que reduz o módulo transversal G , após ocorrer a fissuração. A modificação do módulo transversal para o concreto fissurado é geralmente feita de uma das seguintes maneiras:

- a rigidez ao corte do estado não-fissurado é mantida inalterada após surgir a primeira fissura ($\alpha=1$);
- a rigidez ao corte é anulada após a fissuração ($\alpha=0$);
- o módulo transversal é reduzido por um fator prescrito constante ($0 < \alpha < 1$);
- o valor do módulo transversal é reduzido linearmente ou hiperbolicamente em função das deformações normais à fissura; com este último modo, obtêm-se as melhores aproximações do comportamento real.

Um esquema mais elaborado, para o cálculo da rigidez transversal do concreto armado fissurado, foi apresentado por Bazant, Gambarova [15] e Walraven, Reinhardt [112]. Baseado em dados experimentais, desenvolveu-se uma matriz de flexibilidade $[F^{cr}]$ para uma simples fissura

$$\begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{nn} & F_{nt} \\ F_{tn} & F_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

onde δ_n e δ_t são os deslocamentos reais da fissura nas direções normal e tangencial. As deformações médias, resultantes das fissuras distribuídas, são

$$\varepsilon_{nn}^{cr} = \delta_n / s(\varepsilon) \quad (3.4)$$

$$\gamma_{nt}^{cr} = 2 \varepsilon_{nt}^{cr} = \delta_t / s(\varepsilon)$$

com $s(\varepsilon)$ sendo o espaçamento médio das fissuras. Combinando-se as equações anteriores, obtêm-se a matriz $[C^{cr}]$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn}^{cr} \\ \varepsilon_{tt}^{cr} \\ \gamma_{nt}^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{nn} s^{-1}(\varepsilon) & 0 & F_{nt} s^{-1}(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 \\ F_{tn} s^{-1}(\varepsilon) & 0 & F_{tt} s^{-1}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{nn}^c \\ \sigma_{tt}^c \\ \tau_{nt}^c \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

ou, abreviadamente

$$\{\varepsilon^{cr}\} = [C^{cr}] \{\sigma^c\} \quad (3.6)$$

Obtêm-se as deformações médias do elemento de concreto armado fissurado somando-se as deformações do concreto entre as fissuras e as deformações devido às fissuras. Assim,

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{cr}\} + \{\varepsilon^c\} \quad (3.7)$$

$$\{\varepsilon^c\} = [C^c] \{\sigma^c\} \quad (3.8)$$

onde $[C^c]$ refere-se ao concreto entre as fissuras. A matriz para o concreto fissurado $[C]$ resulta da soma das duas matrizes $[C^{cr}]$ e $[C^c]$

$$[C] = [C^{cr}] + [C^c] \quad (3.9)$$

A lei constitutiva do material concreto armado fissurado $[D]$ é obtida combinando-se as equações constitutivas da armadura $[D^s]$ com a do concreto $[C]^{-1}$.

$$[D] = [D^s] + [C]^{-1} \quad (3.10)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.11)$$

Esta equação permite descrever a relação entre tensões e deformações em um elemento fissurado de concreto armado com fissuras distribuídas.

Uma variação deste último procedimento é o que foi adotado para modelar, neste trabalho, o comportamento do concreto fissurado. O procedimento adotado será apresentado no capítulo 5.

4 - AS LEIS CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS: O CONCRETO E O AÇO

4.1 - Introdução

Para uma análise precisa de uma estrutura de concreto armado, é necessário descrever realisticamente a relação entre tensões e deformações nos materiais. Desta maneira, as equações constitutivas, que traduzam o comportamento dos materiais, são de importância fundamental.

Antes de apresentar estas leis constitutivas, serão descritas as propriedades típicas do concreto e do aço, conforme foi apresentado por Chen em [34]. Estas propriedades são essenciais para o desenvolvimento de um modelo matemático, que reproduza o funcionamento dos materiais.

4.2 - As propriedades básicas do concreto e do aço

4.2.1 - O concreto

O concreto pode ser idealizado como um sistema de duas fases: uma matriz (a pasta de cimento endurecido) envolvendo um conjunto de partículas de agregado. A presença de microfissuras, especialmente na interface da pasta de cimento e dos agregados, é fundamental para o seu comportamento mecânico. A propagação destas microfissuras, durante o carregamento, produz o comportamento não-linear do concreto.

4.2.1.1 - O concreto sob carregamento uniaxial

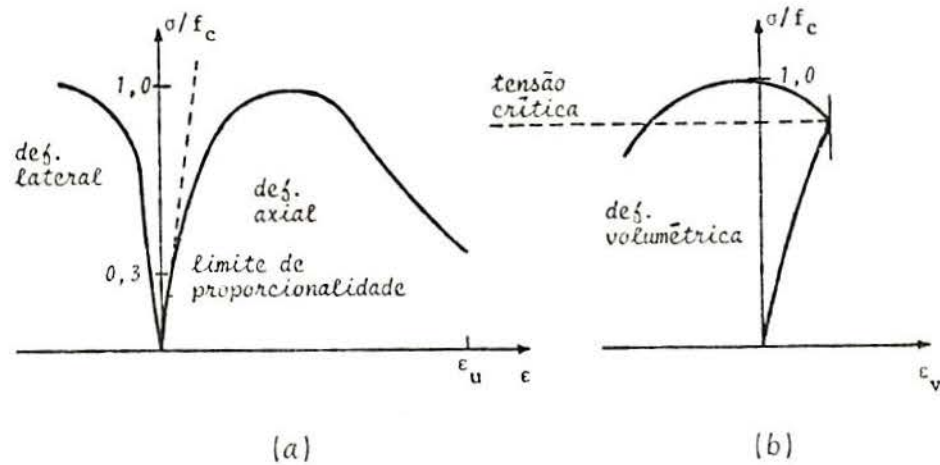


Fig. 4.1 - Relações típicas da tensão de compressão com as deformações axial, lateral e volumétrica

A Fig. 4.1(a) mostra uma relação tensão-deformação típica para o concreto comprimido axialmente. A curva apresenta um comportamento linear até cerca de 30% da tensão máxima de compressão f_c . A partir deste ponto, gradualmente aumenta a sua inclinação, até atingir o valor de f_c . Após este pico, a curva tensão-deformação passa a um ramo descendente, até atingir a deformação última ϵ_u , em que o esmagamento ocorre.

Na Fig. 4.1(b), está apresentada a relação da tensão com a deformação volumétrica, $\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$. Inicialmente, a mudança de volume é quase linear, até cerca de 0,75 a 0,9 f_c . Neste ponto, o sentido da variação de volume é invertido, resultando em uma dilatação nas proximidades de f_c . A tensão, na qual a deformação volumétrica, ϵ_v , é um mínimo, é chamada de tensão crítica.

As formas das curvas, mostradas na Fig. 4.1, estão intimamente relacionadas com os mecanismos internos de microfissuração progressiva. Para as tensões, até cerca de 30% de f_c , as fissuras existentes no concreto antes de entrar em carga (causadas por segregação, retração ou efeitos térmicos) permanecem inalteradas. Isto significa que a energia interna disponível é menor que a energia necessária para criar novas microfissuras.

Para tensões entre 30 e 50% de f_c , as microfissuras junto aos agregados começam a se estender. Nesta etapa, as fissuras na matriz continuam desprezáveis. A energia interna disponível é gasta na formação das fissuras junto aos agregados. A propagação da fissuração é estável, isto é, as fissuras alcançam rapidamente o seu comprimento final, quando a tensão é mantida constante.

Para tensões entre 50 e 75% de f_c , algumas das fissuras junto aos agregados começam a ligar-se através da matriz. Quando a tensão excede 0,75 de f_c , as fissuras continuam a propagar-se, mesmo se for mantida constante a carga. A energia interna disponível é maior do que a necessária para formar as fissuras, isto é, o sistema está instável. Neste nível de tensão, a tensão crítica é atingida.

A ruptura progressiva do concreto, nas proximidades de f_c , é causada pela microfissuração da matriz. Estas fissuras, ligadas às fissuras junto aos agregados, formam zonas internas microfissuradas. Com o aumento da deformação de compressão, segue o esmagamento do concreto e entra-se no ramo descendente do diagrama tensão-deformação. Nesta região, aparecem fissuras macroscópicas.

Conforme aparece na Fig. 4.2, as curvas tensão-deformação para o concreto tracionado são aproximadamente

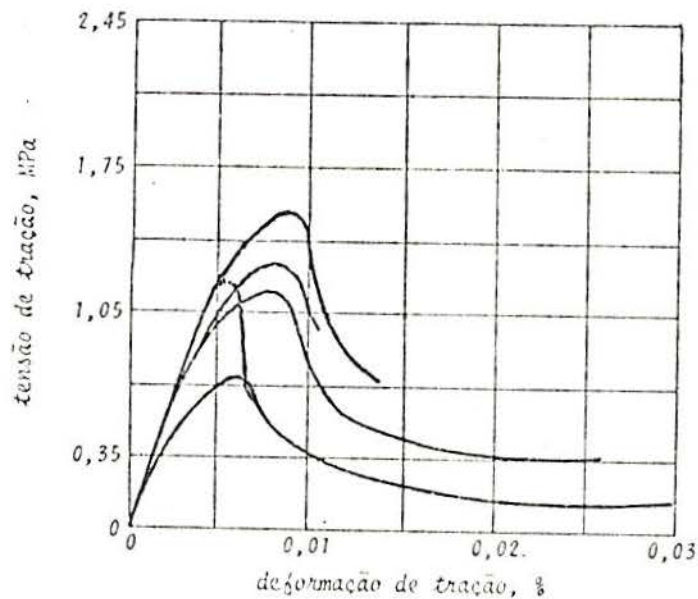


Fig. 4.2 - Curvas tensão-deformação para o concreto sob tração

lineares até altos níveis de tensão. Suas formas são semelhantes às das curvas de compressão. Isto era de esperar, pois aqui o aparecimento das microfissuras também é fundamental. Porém existem algumas diferenças.

Para tensões menores do que 60% da tensão f_{ct} , o aparecimento de microfissuras pode ser desconsiderado. A partir deste nível de tensão, as microfissuras junto aos agregados, começam a crescer. Esta etapa, contudo, é mais breve do que no caso de compressão. Quando a tensão de tração atinge 75% de f_{ct} , a propagação de fissuras torna-se instável.

A direção de propagação de fissuras para tração uniaxial é transversal à direção da tensão. O aparecimento e o crescimento de cada nova fissura reduz a área resistente, causando um aumento nas tensões e uma rápida propagação da fissuração.

4.2.1.2 - O concreto sob carregamento biaxial

Nos últimos anos, muitos estudos foram realizados sobre as propriedades mecânicas do concreto sob carregamento biaxial. Têm-se disponíveis diversos resultados experimentais considerando resistência, deformação e o comportamento das microfissuras do concreto sujeito a tensões biaxiais. As Fig. 4.3 a Fig. 4.5 apresentam resultados obtidos por Kupfer em [70].

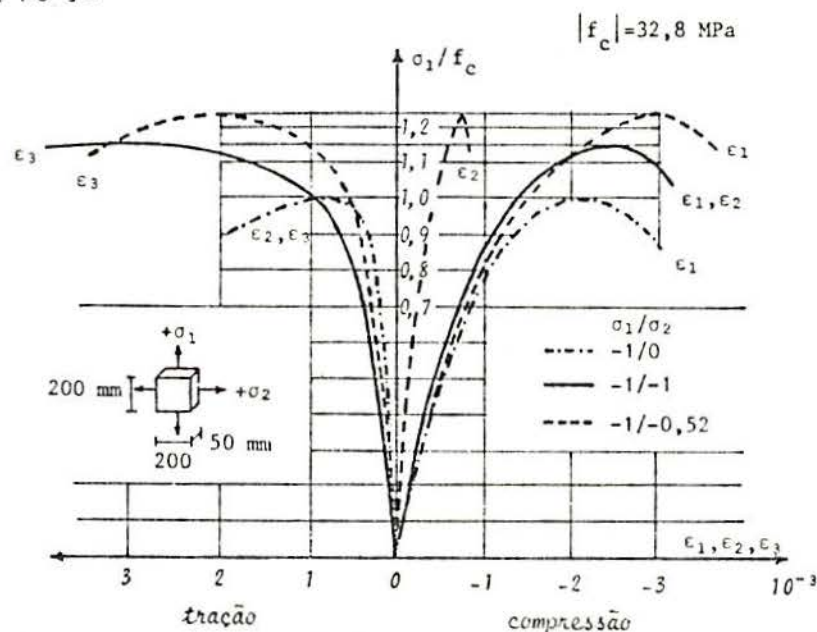


Fig. 4.3 - Curvas tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial

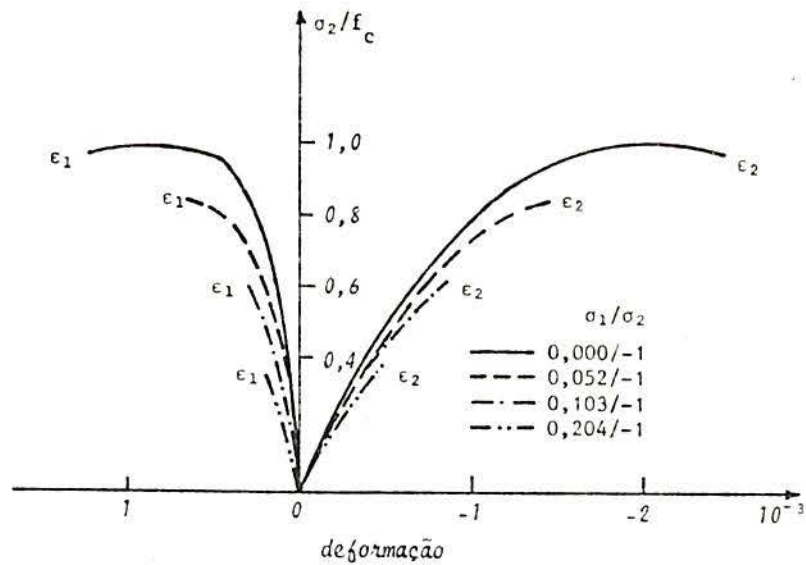


Fig. 4.4 - Curvas tensão-deformação para o concreto sob tração-compressão biaxial

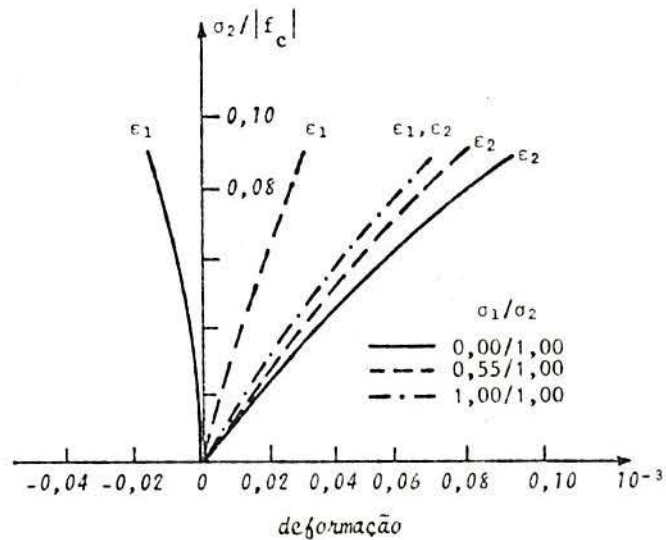


Fig. 4.5 - Curvas tensão-deformação para o concreto sob tração biaxial

Destes resultados, observa-se que a resistência máxima à compressão aumenta no estado de compressão biaxial. Este aumento é máximo, em torno de 25%, para a relação entre tensões $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$. Para $\sigma_2/\sigma_1 = 1$, este aumento se reduz para 16%. Sob tração-compressão biaxial, a resistência à compressão diminui quase linearmente, a medida que a tensão de tração é aumentada. Sob tração biaxial, a resistência é aproximadamente a mesma da tração uniaxial, conforme aparece na Fig. 4.6, de resultados experimentais de Kupfer [70].

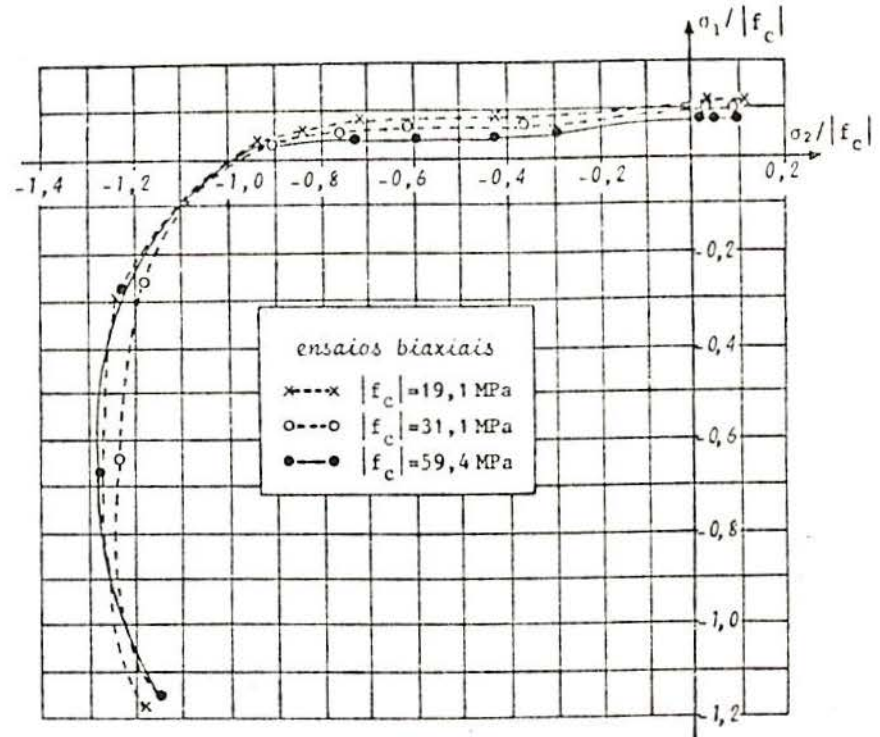


Fig. 4.6 - Envolvória de resistência biaxial do concreto

A ductilidade do concreto sob tensões biaxiais tem valores diferentes, se o estado de tensão é de compressão ou de tração. Segundo a Fig. 4.3, para compressão uniaxial ou biaxial, o encurtamento máximo é de cerca de 3×10^{-3} e o alongamento máximo varia de aproximadamente 2×10^{-3} a 4×10^{-3} . A ductilidade é maior sob compressão biaxial do que sob compressão uniaxial. Sob tração-compressão biaxial, os valores de ruptura das deformações principais de tração e compressão diminuem (Fig. 4.4). Sob tração uniaxial e biaxial (Fig. 4.5), a deformação principal máxima é da ordem de $0,08 \times 10^{-3}$.

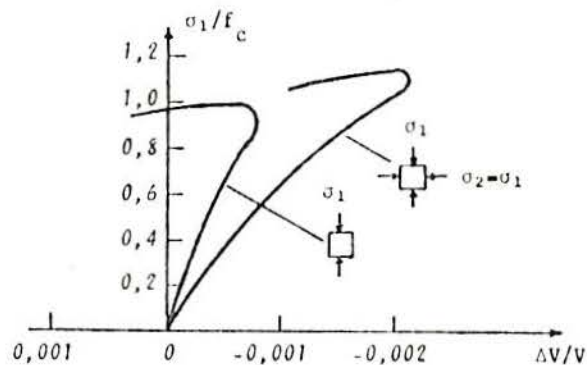


Fig. 4.7 - Curvas da variação de volume do concreto sob compressão uniaxial e biaxial

Conforme mostra a Fig. 4.7, nas proximidades da ruptura, ocorre um aumento de volume do concreto. Em geral, atribui-se esta dilatação ao progressivo crescimento das microfissuras do concreto.

4.2.1.3 - O concreto sob carregamento triaxial

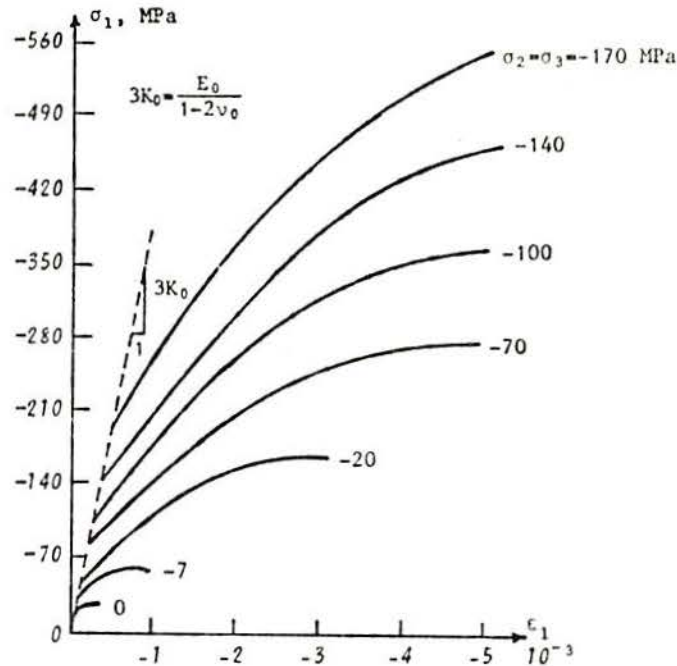


Fig. 4.8 - Relação tensão-deformação triaxial para o concreto

A Fig. 4.8 mostra curvas tensão-deformação típicas para o concreto, obtidas em ensaios triaxiais por Balmer, conforme [34]. Observa-se que a resistência axial cresce com o aumento das tensões confinantes. Para tensões confinantes elevadas, resistências extremamente altas são alcançadas.

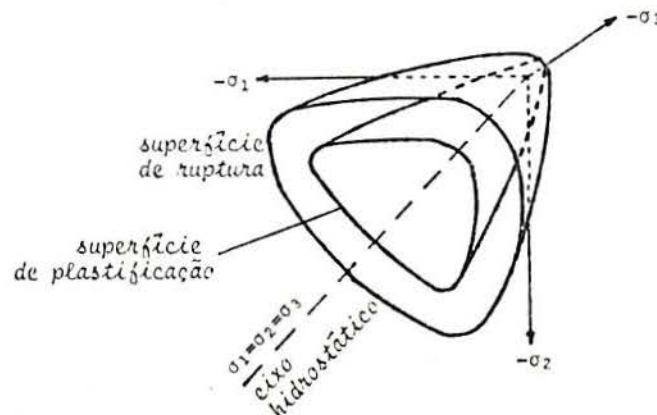


Fig. 4.9 - Superfície de ruptura esquemática do concreto no espaço de tensões tridimensionais

Sob carregamento triaxial, os ensaios indicaram que o concreto tem uma superfície de ruptura bem definida, que é função das três tensões principais. Se o concreto é considerado um material isotrópico, o limite de elasticidade e o limite de ruptura podem ser representados como superfícies no espaço de tensões principais tridimensionais (Fig. 4.9).

4.2.2 - O aço

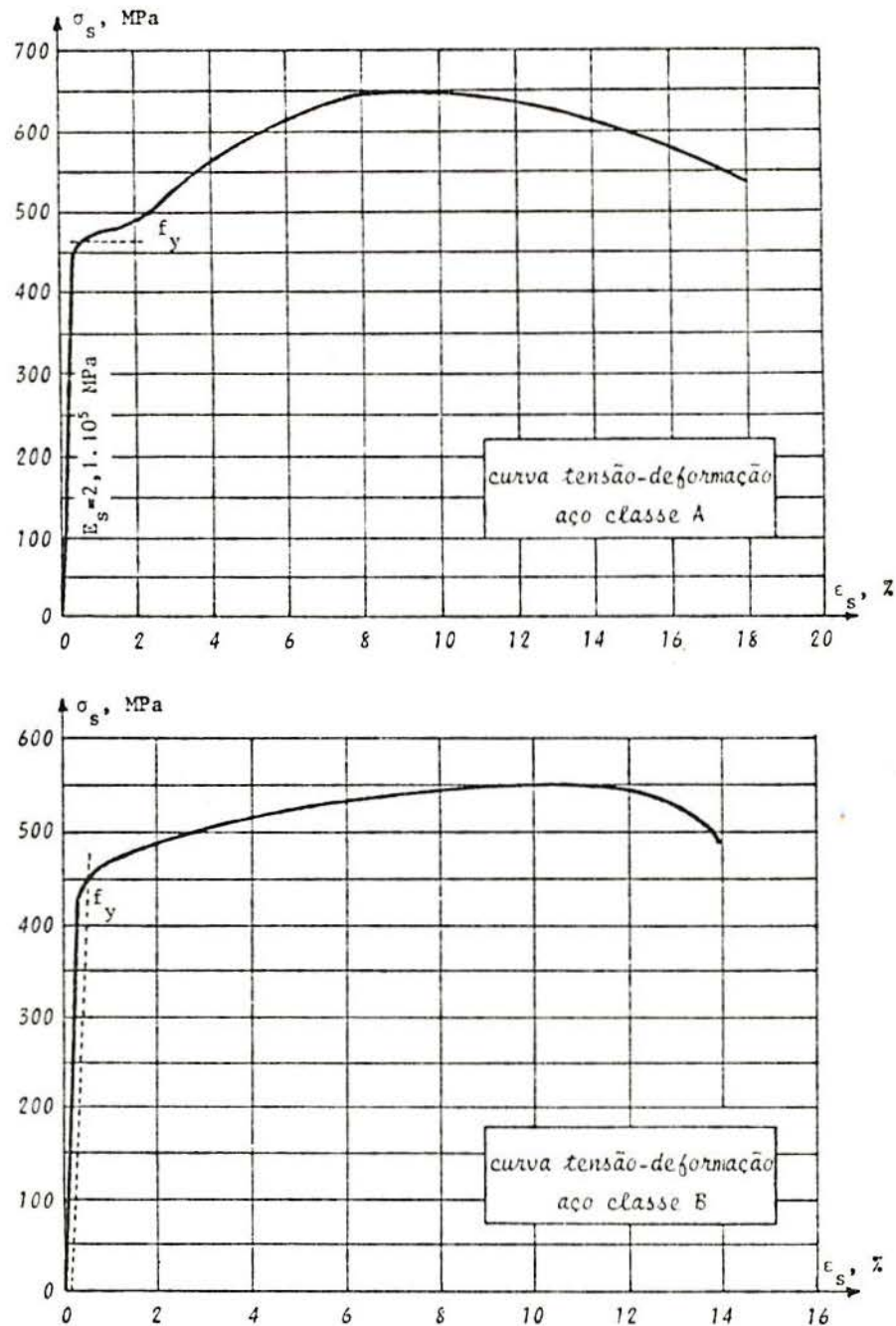


Fig. 4.10 - Diagramas tensão-deformação dos aços [65]

Devido à forma de utilização do aço nas peças de concreto armado, é suficiente conhecer o seu comportamento uniaxial. Basicamente, o diagrama tensão-deformação dos aços (Fig. 4.10) consta de um primeiro trecho retilíneo, com uma inclinação de 210000 MPa (módulo de deformação longitudinal). Neste trecho, o aço comporta-se como um material perfeitamente elástico.

Segue-se um trecho, em que as deformações são grandes para pequenos acréscimos no valor da tensão limite de elasticidade. Este escoamento do aço segue até uma deformação da ordem de 2%. Neste ponto, o diagrama toma uma forma curva, com grandes deformações, até atingir a ruptura, com deformações da ordem de 20%. As curvas tensão-deformação dos aços são praticamente iguais à tração e à compressão.

Nos aços encruados a frio, ao contrário dos aços com dureza natural, o patamar de escoamento não é bem definido. Eles apresentam, a partir do limite de elasticidade, um diagrama curvilíneo, continuamente crescente até a ruptura.

4.3 - O modelo constitutivo para o concreto

4.3.1 - Generalidades

O comportamento estrutural do concreto é extremamente complexo. Dependendo do estado de tensão, este comportamento pode ser dúctil ou frágil. Quando predominam as tensões de compressão, a relação tensão-deformação torna-se mais não-linear e ocorre dilatação nas proximidades da ruptura. Mesmo na compressão hidrostática resulta um comportamento não-linear. A construção de equações constitutivas, considerando todas estas características, é uma tarefa complicada.

Estudos experimentais têm mostrado que o funcionamento do concreto está intimamente ligado à propagação das microfissuras. Estas microfissuras são orientadas, principalmente, em uma direção perpendicular à da mínima tensão principal de compressão ou da máxima tensão principal de tração. Entretanto, por simplificação, o dano contínuo acumulado pode ser considerado isotrópico para a formulação de uma lei

constitutiva. Esta hipótese básica de isotropia não impede, porém, que anisotropias sejam introduzidas nos modelos. Basicamente, existem dois tipos de modelos para descrever o comportamento do concreto: os modelos plásticos e os modelos elásticos não-lineares.

Com base na teoria da plasticidade, existem diversos modelos considerando um material elasto-plástico perfeito, com superfície de ruptura e superfície de plastificação, como o proposto por Zienkiewicz, Valliappan e King [118]. Para considerar as não-linearidades presentes antes da ruptura, torna-se necessário usar modelos mais refinados, que levam em conta o endurecimento, como, por exemplo, o modelo proposto por Chen e Chen [32]. Entretanto, este modelo, como outros, negligencia o efeito do terceiro invariante de tensões.

Vários autores desenvolveram modelos elásticos, não-lineares, incrementais. Alguns destes modelos consideravam o concreto isotrópico, não admitindo que as tensões podiam introduzir anisotropias, como o apresentado em [97] por Romstad, Taylor e Herrmann. Outros consideram esta anisotropia, como o de Liu, Nilson e Slate [76] e o de Link [75], obtendo boas aproximações com os resultados experimentais.

Existem outros modelos elásticos, não-lineares, que usam os valores secantes dos parâmetros do material. Com o modelo de Kupfer, Hilsdorf e Rüschi [72] obtêm-se boas aproximações com valores de ensaios. Contudo este modelo é válido para estados de tensão de compressão biaxial apenas. Os modelos de Palaniswamy e Shah [95] e Cedolin, Crutzen e Dei Poli [30] são aplicáveis a estados de compressão triaxial, porém consideram só a influência de dois invariantes e são limitados a estados de tensão não próximos à ruptura.

A teoria endocrônica foi estendida para o concreto por Bazant e Bhat [9]. Características muito importantes, tais como dilatação, amolecimento e tensões de ruptura realistas são simuladas com este modelo, que se aplica ao estado multiaxial de tensão. Entretanto, supõe-se que a resposta à compressão hidrostática é linear. Além disto, o concreto é modelado somente a partir de sua resistência à compressão

uniaxial. Isto não é conveniente, uma vez que diferentes deformações de ruptura e rigidezes iniciais podem ser obtidas para concretos que apresentam a mesma resistência à compressão uniaxial.

4.3.2 - O modelo constitutivo proposto por Ottosen

4.3.2.1 - Fundamentos do modelo

O modelo constitutivo para o concreto proposto por Ottosen, [39] e [92], é baseado na elasticidade não-linear, usando valores secantes dos parâmetros do material. Este modelo apresenta uma série de aspectos positivos:

- inclui os efeitos dos três invariantes de tensão;
- considera a dilatação;
- as curvas tensão-deformação obtidas são contínuas;
- prevê realisticamente as tensões na ruptura;
- o modelo é aplicável a todos estados de tensão, inclusive nos que ocorrem tensões de tração.

Adicionalmente, este modelo é de simples utilização e requer para calibragem unicamente resultados experimentais, obtidos de ensaios uniaxiais tradicionais. Os valores calculados com o modelo têm boa concordância com os resultados experimentais, abrangendo uma ampla faixa de estados de tensão e diferentes tipos de concreto.

4.3.2.2 - O índice de não-linearidade

O índice de não-linearidade é uma medida da proximidade do estado corrente de carregamento com a superfície de ruptura. É importante observar que o termo ruptura, empregado aqui e ao longo deste item, refere-se à ruptura local do ponto considerado e não à ruptura global da peça. Assim, mesmo após o estado de tensão de um ponto atingir a superfície de ruptura, este ponto pode alcançar o equilíbrio, com uma redução do valor das componentes de tensão nele aplicadas. Esta redução será compensada pelo aumento de tensão nos pontos adjacentes.

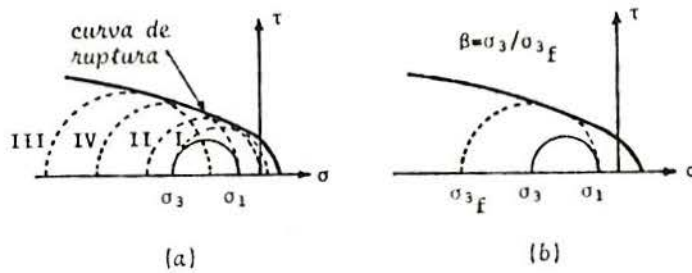


Fig. 4.11 - Diagramas de Mohr: (a) diferentes maneiras de alcançar a ruptura; (b) definição do índice de não-linearidade β

Para se determinar o índice de não-linearidade, primeiro é necessário definir a qual estado de ruptura, o estado de tensão corrente deve ser relacionado. A fim de ilustrar de forma simples este problema, adota-se o critério de ruptura de Mohr, mostrado na Fig. 4.11.

Conforme aparece na Fig. 4.11(a), onde o estado corrente de tensão é dado por σ_1 e σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), a ruptura pode ser alcançada, aumentando-se o valor de σ_1 (círculo I), ou mantendo-se fixo o valor médio $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ (círculo II). Em ambos os casos, ficam envolvidas tensões de tração. Uma avaliação de um estado de tensão de compressão uniaxial, por exemplo, envolveria a resistência à tração; o que não seria conveniente. Uma terceira possibilidade, dada pelo círculo III, onde todas as tensões são alteradas proporcionalmente, também é afastada, porque dependendo da forma da curva de ruptura, a ruptura pode não ser obtida, para alguns estados de tensão de compressão, localizados junto ao eixo hidrostático. Contudo, a ruptura pode ser sempre obtida, diminuindo-se o valor de σ_3 , como mostra o círculo IV. Este é o procedimento adotado neste modelo.

Como medida do estado corrente de tensão, adotou-se no modelo, o quociente da tensão corrente σ_3 , pelo valor correspondente da tensão de ruptura σ_{3f} (failure), mantendo-se constantes σ_1 e σ_2 , como mostra a Fig. 4.11(b). Ou seja, índice de não-linearidade é dado por

$$\beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_{3f}} \quad (4.1)$$

Assim, $\beta < 1$, $\beta = 1$ e $\beta > 1$ correspondem a estados de tensão localizados dentro, sobre e fora da superfície de ruptura, respectivamente.

Quando ocorrem tensões de tração, é necessário alterar a definição do índice de não-linearidade. O comportamento do concreto é tanto mais linear, quanto mais o estado de tensão envolva tensões de tração. Com este propósito, transforma-se o estado corrente de tensão $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, onde ao menos σ_1 é uma tensão de tração, superpondo uma pressão hidrostática $-\sigma_1$, obtendo-se um novo estado de tensão dado por $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3') = (0, \sigma_2 - \sigma_1, \sigma_3 - \sigma_1)$, isto é, um estado de compressão biaxial. Neste caso, β é definido como

$$\beta = \frac{\sigma_3'}{\sigma_{3f}'} \quad (4.2)$$

onde, σ_{3f}' é o valor de ruptura de σ_3' , com σ_1' e σ_2' constantes, isto é, o estado de tensão $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_{3f}')$ satisfaz o critério de ruptura.

4.3.2.3 - As relações tensão-deformação

Pode-se aproximar a curva tensão-deformação para um carregamento de compressão uniaxial através da expressão

$$-\frac{\sigma}{|f_c|} = \frac{-A \frac{\epsilon}{|\epsilon_c|} + (D-1) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2}{1 - (A-2) \frac{\epsilon}{|\epsilon_c|} + D \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2} \quad (4.3)$$

As tensões de tração e os alongamentos são considerados positivos; ϵ_c é a deformação correspondente a f_c (resistência cilíndrica à compressão uniaxial). O parâmetro A é definido por $A = E_0/E_c$ ($A > 4/3$), em que $E_c = f_c/\epsilon_c$. Os módulos de deformação longitudinal E_0 e E_c são o módulo inicial e o secante, correspondente à tensão f_c . O parâmetro D determina, principalmente, o comportamento do ramo descendente da curva tensão

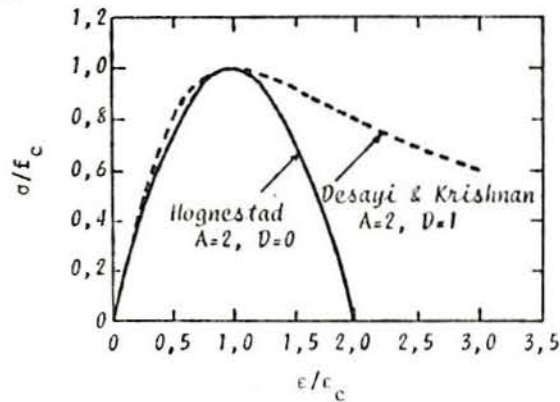


Fig. 4.12 - Controle do comportamento pós-ruptura por meio do parâmetro D

-deformação (fase de pós-ruptura). A Eq. (4.3) depende de quatro parâmetros: f_c , ϵ_c , E_0 e D . Assim, a inclinação da curva é E_0 na origem e nula na ruptura, onde $(\sigma, \epsilon) = (f_c, \epsilon_c)$ satisfaz a Eq. (4.3).

O ramo descendente da curva tensão-deformação não pode ser obtido do ensaio padrão de compressão uniaxial; é necessário realizar um ensaio com deformação controlada. O parâmetro D pode ser arbitrado dentro de certos limites: $(1 - A/2)^2 < D \leq 1 + A(A - 2)$, quando $A \leq 2$; $0 \leq D \leq 1$, quando $A \geq 2$. Deve-se observar, que quanto maior o valor de D , mais dúctil será o comportamento pós-ruptura. Conforme aparece na Fig. 4.12, este parâmetro não afeta de maneira significativa o ramo ascendente do diagrama tensão-deformação. Valores típicos de D estão entre 0 e 0,2.

Pode-se obter o valor secante do módulo de deformação E_S da Eq. (4.3). Nesta expressão, a tensão corrente \underline{a} parece sempre na razão $-\sigma/|f_c|$. No caso de compressão uniaxial, $\beta = -\sigma/|f_c|$. Desta forma, pode-se generalizar a expressão de E_S para a compressão triaxial. Assim,

$$E_S = \frac{1}{2} E_0 - \beta \left(\frac{1}{2} E_0 - E_f \right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} E_0 - \beta \left(\frac{1}{2} E_0 - E_f \right) \right]^2 + E_f^2 \beta [D(1-\beta) - 1]} \quad (4.4)$$

onde, utiliza-se o sinal positivo ou negativo para o ramo ascendente ou descendente da curva tensão-deformação, respectivamente.

Na Eq.(4.4), o valor do módulo de deformação longitudinal secante E_c , correspondente à tensão de compressão uniaxial f_c , é substituído por E_f , módulo de deformação longitudinal secante na ruptura para estado triaxial de tensão. O valor de E_f pode ser determinado através da expressão

$$E_f = \frac{E_c}{1 + 4 (\Lambda - 1) \kappa} \quad (4.5)$$

A variável κ representa a dependência do carregamento corrente e é dada por

$$\kappa = \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right)_f - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.6)$$

onde o invariante $(\sqrt{J_2}/f_c)_f$ é calculado para o estado de tensão de ruptura, dado por $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_f$ ou $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'_f)$, conforme o caso. O valor de κ é maior ou igual a zero. Quando $\kappa=0$, tem-se $E_f=E_c$; se $\kappa>0$, então $E_f<E_c$.

Na fissuração, admite-se um comportamento frágil. O comportamento pós-ruptura para estados intermediários de tensão, onde estão presentes pequenas tensões de tração, mas não ocorrem nem fissuração, nem esmagamento do concreto, é obtido através de um processo híbrido. Na ruptura, este estado intermediário de tensão corresponde a um índice de não-linearidade β_f , determinado pela Eq.(4.2), que é menor do que a unidade. Como mostra a Fig. 4.13, a curva pós-ruptura AB é obtida pela translação do segmento MN, do braço descendente da curva original, paralelamente ao eixo horizontal. O valor secante de E_S , correspondente a algum valor corrente de β , será dado, então, por

$$E_S = \frac{\beta E_{MN} E_A E_M}{\beta E_A E_M + \beta_f E_{MN} (E_M - E_A)} \quad (4.7)$$

onde E_{MN} é o valor secante ao longo da curva de pós-ruptura original, obtida por meio da Eq.(4.4), usando o sinal negativo. As constantes E_A e E_M são também determinadas da Eq.

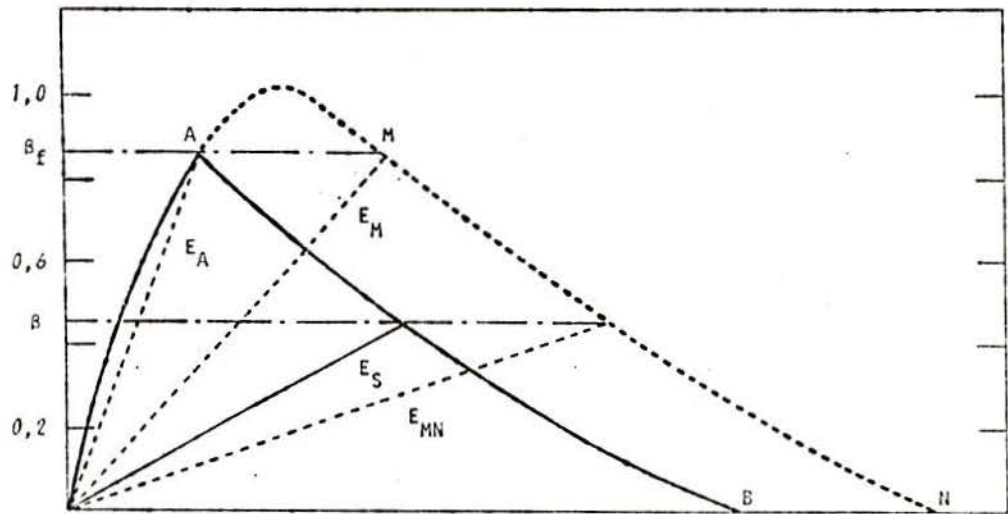


Fig. 4.13 - Comportamento pós-ruptura para estados de tensão intermediários

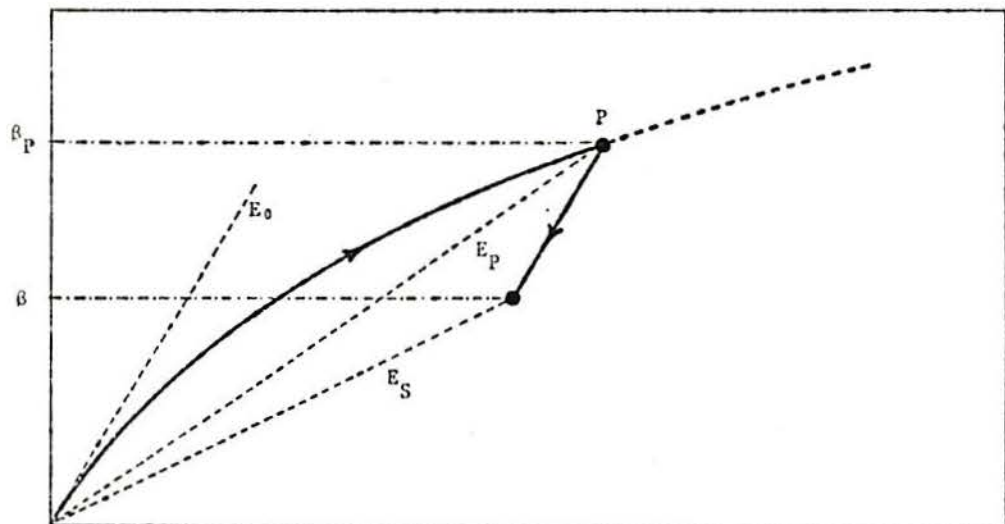


Fig. 4.14 - Determinação de E_S no caso de descarga no concreto

(4.4), usando-se os sinais positivo e negativo, respectivamente, e o valor do índice de não-linearidade na ruptura, isto é, $\beta = \beta_f$.

Mesmo para carregamentos monótonos, pode ocorrer, eventualmente, uma redução no valor das componentes de tensão que atuam em um ponto do concreto, antes de atingir-se a superfície de ruptura. Isto acontece, por exemplo, quando surgem deformações de fluência ou de retração em peças armadas de concreto. Ao considerar-se, em tais situações, o comportamento do concreto como elástico, conforme o modelo de Ottosen, corre-se o risco de descrever inadequadamente o seu funcionamento real, em especial para níveis de tensão elevados. Nestes casos, adota-se para o módulo de deformação secante do concreto, o valor dado pela expressão

$$E_S = \frac{1}{\frac{\beta_P}{\beta} \left(\frac{1}{E_P} - \frac{1}{E_0} \right) + \frac{1}{E_0}} \quad (4.8)$$

onde E_0 é o módulo de deformação inicial do concreto; β é o índice de não-linearidade correspondente ao estado corrente de tensão; β_P e E_P são valores referentes ao estado de tensão anterior à descarga (ponto P), conforme a Fig. 4.14.

Para se determinar o valor secante do coeficiente de Poisson, ν_S , deve-se observar que, tanto para um carregamento de compressão uniaxial, como triaxial, o comportamento volumétrico é uma compactação, seguida por uma dilatação. Assim, têm-se

$$\nu_S = \nu_0, \text{ quando } \beta \leq \beta_a \quad (4.9)$$

$$\nu_S = \nu_f - (\nu_f - \nu_0) \sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \beta_a}{1 - \beta_a} \right)^2}, \text{ quando } \beta \geq \beta_a \quad (4.10)$$

onde ν_0 é o coeficiente de Poisson inicial; ν_f é o valor secante do coeficiente de Poisson na ruptura. Utiliza-se $\beta_a = 0,8$ e $\nu_f = 0,36$ para todos tipos de concreto e carregamento.

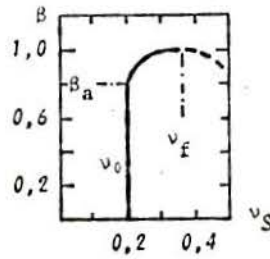


Fig. 4.15 - Variação do valor secante ν_S do coeficiente de Poisson

A Eq. (4.10) só é válida até a ruptura. Pouco é conhecido sobre o comportamento de ν_S na região de pós-ruptura, mas há uma constatação experimental de que a dilatação continua nesta fase. Desta forma, este aumento de ν_S é aproximado pelo seguinte procedimento: com dois valores consecutivos conhecidos de E_S ($i, i+1$ simbolizam dois estados de tensão sucessivos) e com o valor conhecido de $\nu_{S,i}$, admite-se que os módulos volumétricos correspondentes permanecem constantes. Assim, calcula-se $\nu_{S,i+1}$ da relação

$$K_{S,i} = K_{S,i+1} = \frac{E_{S,i}}{3(1-2\nu_{S,i})} = \frac{E_{S,i+1}}{3(1-2\nu_{S,i+1})} \quad (4.11)$$

O valor de ν_S deve ser menor do que 0,5.

Resumindo, o modelo é calibrado por seis parâmetros: os parâmetros elásticos iniciais E_0 e ν_0 , os dois parâmetros de resistência f_c e f_{ct} , o parâmetro de ductilidade ϵ_c e o parâmetro de pós-ruptura D .

4.3.2.4 - Critério de ruptura

O critério de ruptura proposto por Ottosen, em [91], apresenta as seguintes características:

- todas as componentes de tensão são consideradas;
- somente os invariantes são utilizados, fazendo desnecessária a determinação das tensões principais;

- a superfície de ruptura é suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- o traço no plano desviador muda de uma forma triangular para circular com o aumento da pressão hidrostática;
- casos especiais deste critério são o critério de Drucker-Prager e o critério de von Mises, fazendo-se $a=k_2=0$ e $a=b=k_2=0$, respectivamente;
- para identificar se a ruptura ocorre por esmagamento ou fraturamento do concreto, admite-se que há fissuração se $\sigma_1 \geq f_{ct}/2$.

O critério de ruptura de Ottosen é dado pela seguinte expressão

$$a \frac{J_2}{|f_c|^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{|f_c|} + b \frac{I_1}{|f_c|} - 1 = 0 \quad (4.12)$$

onde a, b são parâmetros. A função λ depende do ângulo θ , de acordo com

$$\lambda = \begin{cases} k_1 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(k_2 \cos 3\theta)\right], & \text{para } \cos 3\theta \geq 0 \\ k_1 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-k_2 \cos 3\theta)\right], & \text{para } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

com

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4.14)$$

No meridiano de tração ($\theta=0^\circ$), tem-se $\lambda=\lambda_t$ e

$$\lambda_t = k_1 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(k_2)\right] \quad (4.15)$$

enquanto ao longo do meridiano de compressão ($\theta=60^\circ$)

$$\lambda_c = k_1 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(k_2)\right] \quad (4.16)$$

A Eq. (4.12) e a Eq. (4.13), que definem o critério de ruptura, contêm quatro parâmetros a , b , k_1 e k_2 . Estes parâmetros são determinados a partir dos seguintes valores:

- resistência à compressão uniaxial f_c ;
- resistência à tração uniaxial f_{ct} , dada pelo quociente $k = f_{ct}/|f_c|$;
- resistência à compressão biaxial f_{2c} , dada pelo quociente $q = f_{2c}/f_c$;
- um estado de ruptura no meridiano de compressão: $\sigma_{oct}/|f_c|$, $\tau_{oct}/|f_c|$.

Define-se a quantidade h por

$$h = - \frac{\sqrt{2} x + y}{\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}} \quad ; \quad x = \frac{\sigma_{oct}}{|f_c|} \quad ; \quad y = \frac{\tau_{oct}}{|f_c|} \quad (4.17)$$

Os parâmetros podem ser determinados pelas seguintes expressões

$$b = \frac{\sqrt{2} - \frac{3y}{kq}}{h - \frac{9y}{q-k}} \quad (4.18)$$

$$a = \frac{1}{y} [h b - \sqrt{2}] \quad (4.19)$$

$$\lambda_c = [1 - \frac{h}{3y}] \sqrt{3} b + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} y} \quad (4.20)$$

$$\lambda_t = [2\sqrt{3} - \frac{q h}{\sqrt{3} y}] b + \frac{\sqrt{2} q}{\sqrt{3} y} + \frac{\sqrt{3}}{q} \quad (4.21)$$

Usando a Eq. (4.15) e a Eq. (4.16), tem-se

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_t} = \frac{\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos k_2)}{\cos(\frac{1}{3} \arccos k_2)} \quad (4.22)$$

daí, obtém-se

$$k_2 = \cos\left[3 \arctg \frac{2 \frac{\lambda_c}{\lambda_t} - 1}{\sqrt{3}}\right] \quad (4.23)$$

O valor de k_1 é determinado através da Eq. (4.15) ou da Eq. (4.16).

Conforme resultados experimentais de Kupfer [70] e Kupfer, Hilsdorf e Rüsç [72], a resistência à compressão biaxial, f_{2c} , está relacionada com a resistência à compressão uniaxial, f_c , pela expressão

$$f_{2c} = 1,16 f_c \quad (4.24)$$

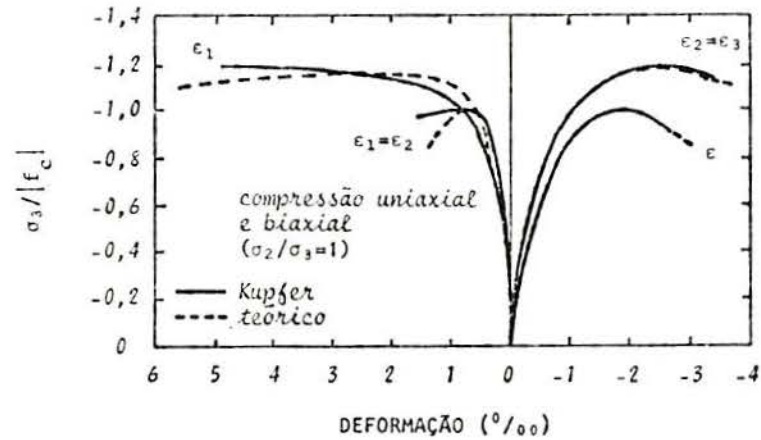
Segundo dados obtidos por Ottosen [91], através de ajustagem a resultados experimentais, o meridiano de compressão passa através do ponto $(\sqrt{3} x, \sqrt{3} y) = (-5, 4)$.

4.3.2.5 - Verificação experimental

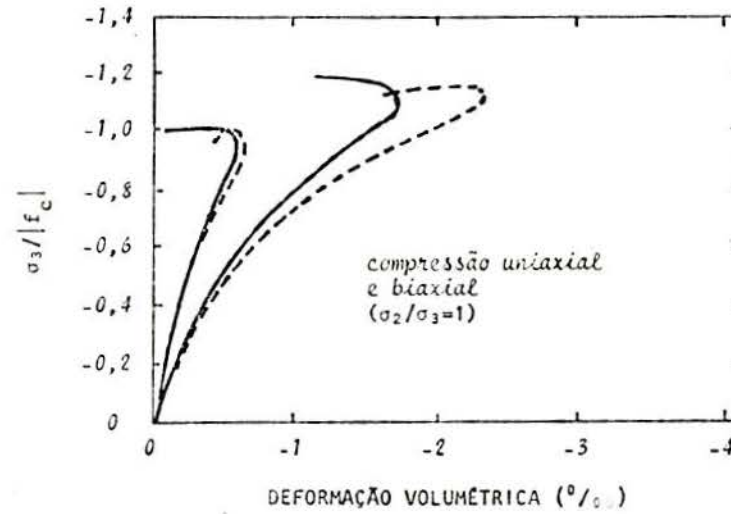
A Fig. 4.16 mostra a comparação entre as previsões do modelo e resultados experimentais de Kupfer [70], para carregamentos biaxiais. Foram utilizados os seguintes parâmetros no modelo: $E_0 = 2,89 \times 10^4$ MPa; $\nu_0 = 0,19$; $|f_c| = 18,7$ MPa; $f_{ct}/|f_c| = 0,1$; $|\epsilon_c| = 1,87 \times 10^{-3}$ e $D = 0$. A Fig. 4.16(a) apresenta os casos de carregamento de compressão uniaxial e biaxial. Na Fig. 4.16(b), aparece o comportamento volumétrico correspondente a estes carregamentos. Este diagrama mostra como o modelo é capaz de simular a dilatação, que é uma característica do concreto submetido à compressão. O comportamento do concreto torna-se menos não-linear quando tensões de tração estão presentes. Este efeito aparece na Fig. 4.16(c), para um carregamento biaxial de tração-compressão e, na Fig. 4.16(d), para carregamentos uniaxial e biaxial de tração.

A Fig. 4.17 mostra a superfície de ruptura proposta, com os resultados biaxiais experimentais de Kupfer [70]. A aproximação entre os resultados pode ser considerada

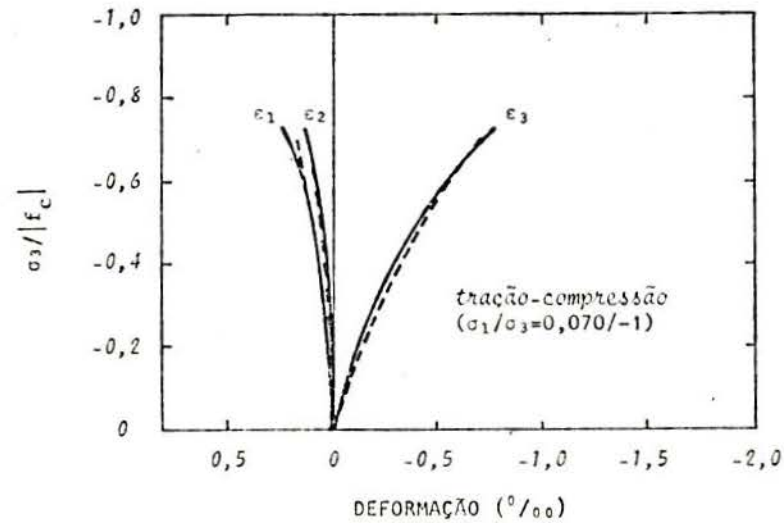
(a)



(b)



(c)



(d)

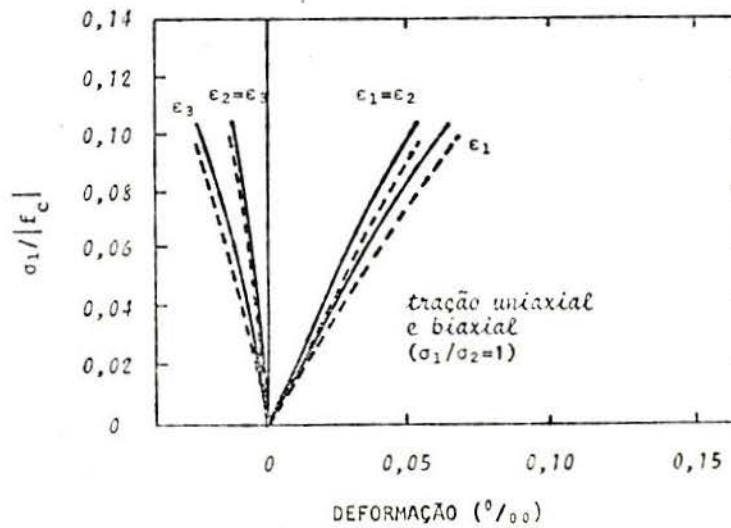


Fig. 4.16 - Comparação entre as previsões do modelo de Ottosen e os resultados biaxiais experimentais de Kupfer

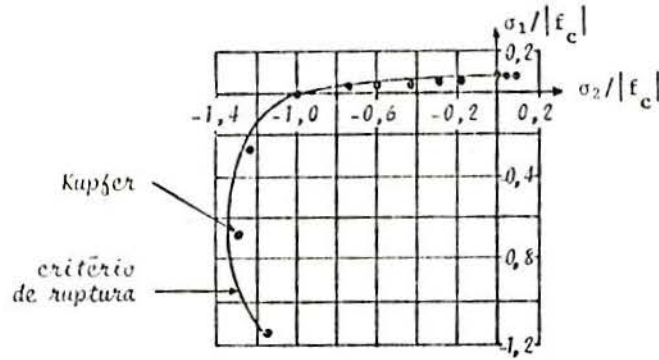


Fig. 4.17 - Comparação do critério de ruptura com os resultados dos ensaios biaxiais de Kupfer

boa.

A seguir, será feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo e os determinados experimentalmente por Schickert e Winkler, apresentados em [103]. Os carregamentos de compressão uniaxial e biaxial foram aplicados de forma proporcional. Para carregamento triaxial, os resultados foram obtidos segundo quatro procedimentos distintos:

- tipo 1: carregamento hidrostático até um valor prescrito de σ_{oct} ; o carregamento, então, segue ao longo do meridiano de compressão, mantendo o valor de σ_{oct} constante;
- tipo 2: carregamento hidrostático até um valor prescrito de σ_{oct} ; o carregamento, então, segue ao longo do meridiano de cisalhamento, mantendo o valor de σ_{oct} constante;
- tipo 3: carregamento hidrostático até um valor prescrito de σ_{oct} ; o carregamento, então, segue ao longo do meridiano de tração, mantendo o valor de σ_{oct} constante;
- tipo 4: carregamento proporcional.

A Fig. 4.18 mostra as curvas experimentais tensão-deformação, para compressão uniaxial, obtidas da média de cinco ensaios. No modelo, usaram-se os seguintes valores para os parâmetros: $E_0=2,30 \times 10^4$ MPa; $\nu_0=0,19$; $|f_c|=30,6$ MPa; $|\epsilon_c|=3,07 \times 10^{-3}$ e $D=0,2$. Admitiu-se, ainda, que $f_{ct}=0,1|f_c|$. Estes valores para os parâmetros foram usados para as comparações posteriores e para calibrar o critério de ruptura.

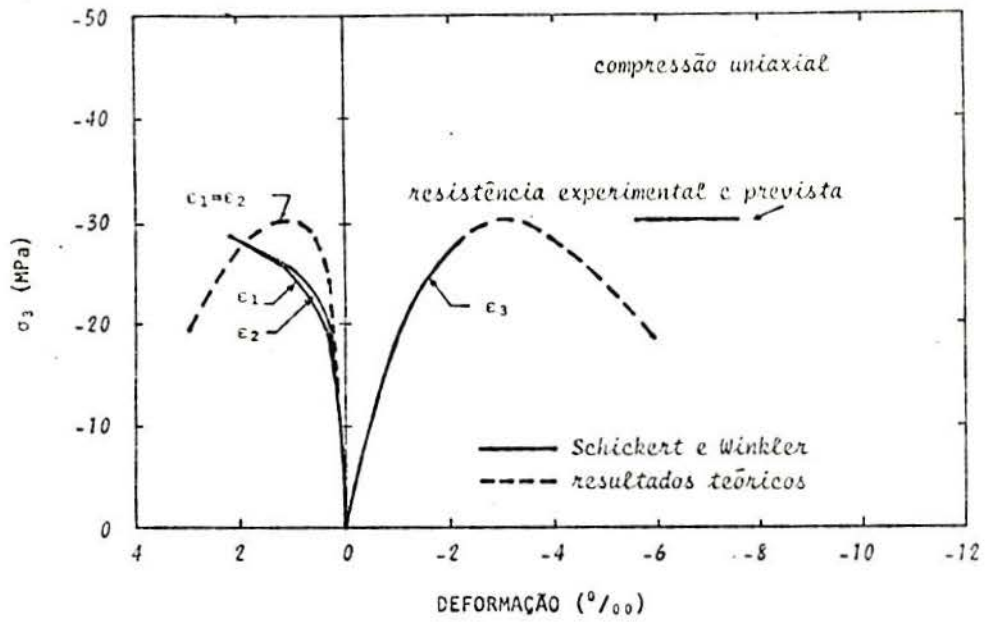


Fig. 4.18 - Comparação com resultados de compressão uniaxial

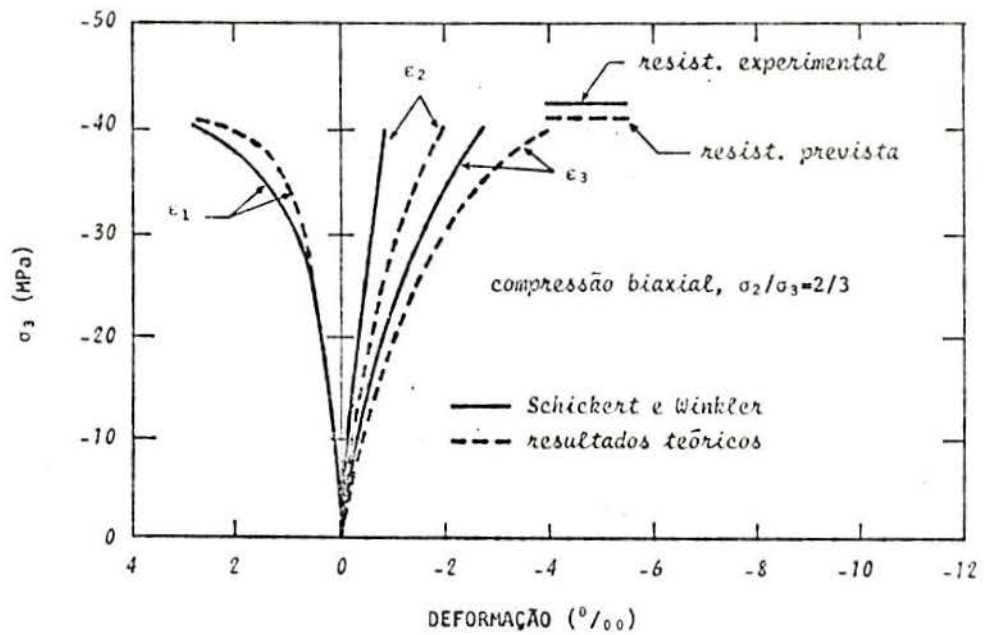


Fig. 4.19 - Comparação com carregamento de compressão biaxial

A Fig. 4.19 mostra uma comparação com um carregamento de compressão biaxial, onde $\sigma_2/\sigma_3=2/3$. A curva experimental corresponde à média de seis ensaios. A aproximação não é boa, mesmo na região elástica. Este fato contrasta com a boa aproximação observada com relação aos dados experimentais de Kupfer [70]. Observe-se que, nesta figura e nas seguintes, as curvas estão traçadas apenas até a máxima tensão ou deformação medida. Os valores das resistências experimental e prevista pelo modelo também estão indicados.

A Fig. 4.20 mostra uma comparação com um carregamento triaxial do tipo 1. As curvas experimentais são curvas médias de três ensaios. A pressão média aplicada foi $\sigma_{oct} = -25,5$ MPa, sendo boa a aproximação encontrada.

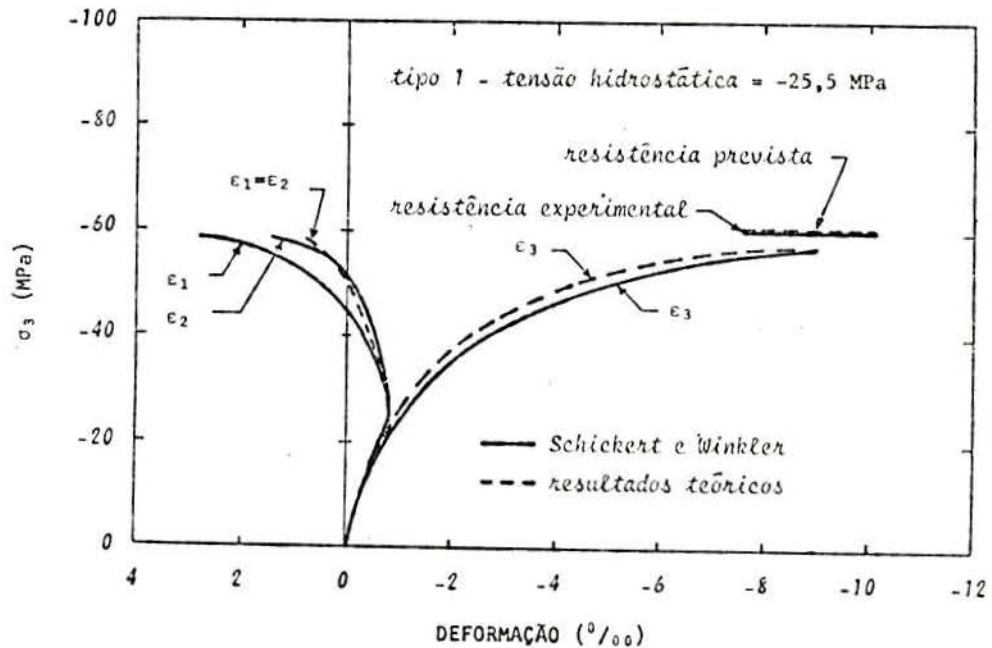


Fig. 4.20 - Comparação com carregamento triaxial do tipo 1

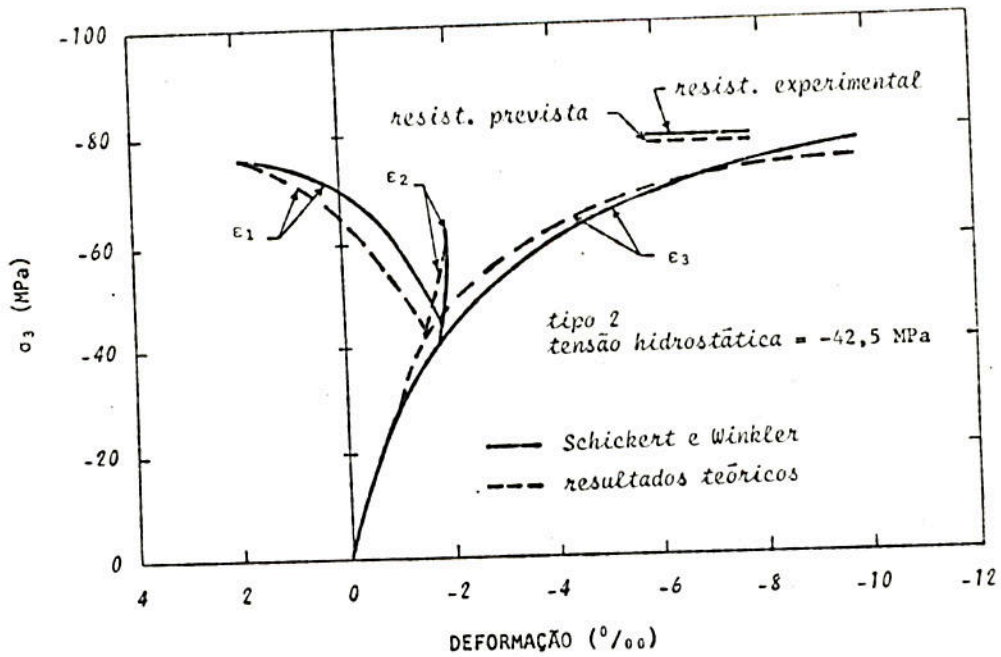


Fig. 4.21 - Comparação com carregamento triaxial do tipo 2

A Fig. 4.21 apresenta uma comparação com um carregamento triaxial do tipo 2. As curvas experimentais são curvas médias, baseadas em três ensaios. O valor de σ_{oct} aplicado foi de $-42,5$ MPa. Uma boa aproximação foi conseguida.

Na Fig. 4.22, é mostrada a comparação com um carregamento triaxial do tipo 3. As curvas experimentais foram obtidas como média de quatro ensaios. O valor de σ_{oct} aplicado foi de $-42,5$ MPa, encontrando-se boa aproximação.

Finalmente, na Fig. 4.23, aparece uma comparação com um carregamento triaxial proporcional, ao longo do meridiano de cisalhamento, com $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 1:0,53:0,07$. A curva experimental corresponde a um único ensaio. A comparação nesta figura, assim como nas anteriores, indica que uma boa concordância foi alcançada entre os resultados previstos e experimentais.

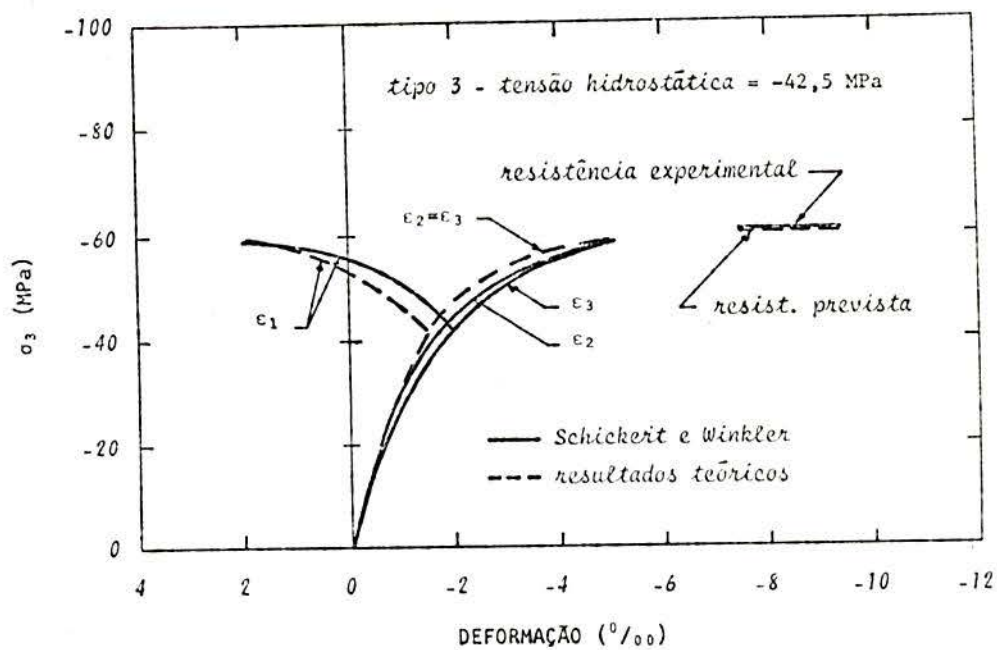


Fig. 4.22 - Comparação com carregamento triaxial do tipo 3

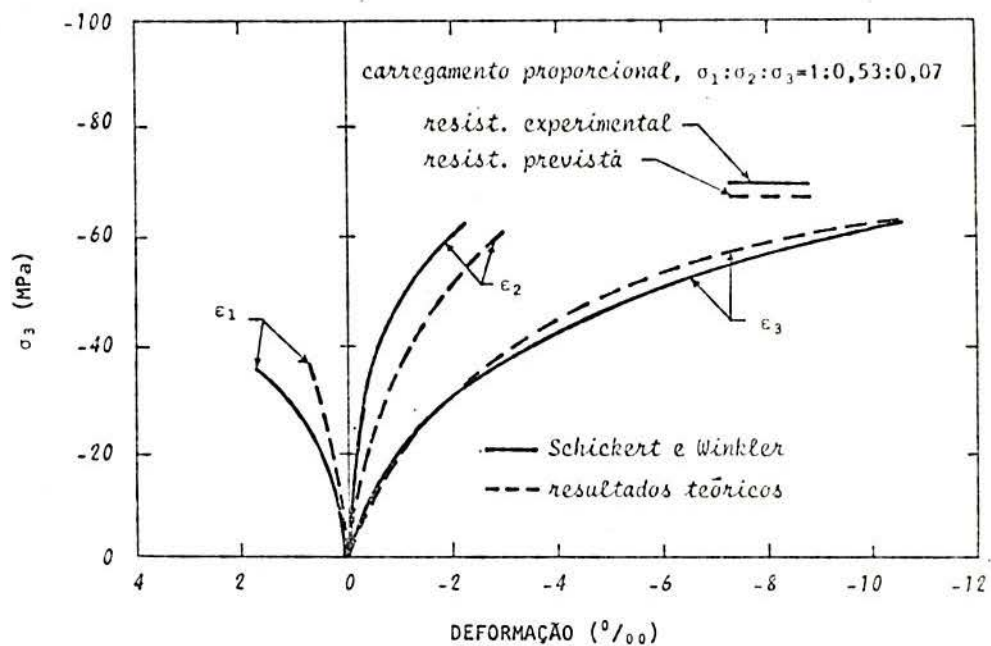


Fig. 4.23 - Comparação com carregamento triaxial proporcional

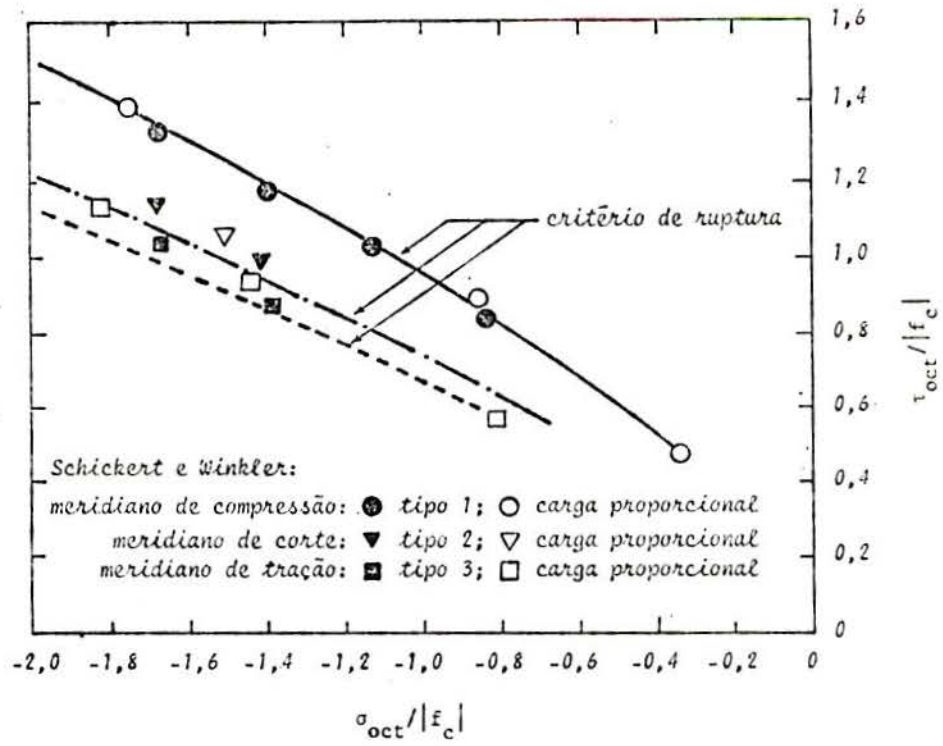


Fig. 4.24 - Comparação dos diferentes meridianos no critério de ruptura

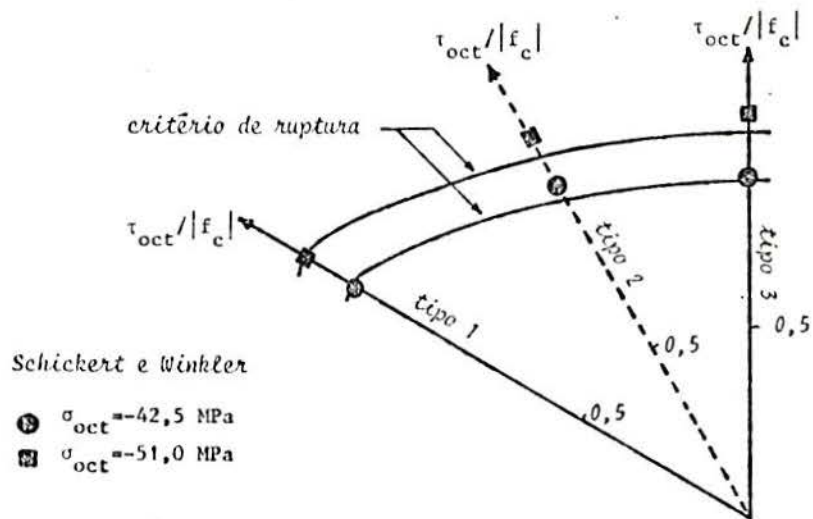


Fig. 4.25 - Comparação em dois planos deviatóricos

A Fig. 4.24 mostra os meridianos de compressão, cisalhamento e tração da superfície de ruptura. A concordância com os resultados experimentais no meridiano de compressão é porque, na escolha dos valores (x,y) , a minimização foi ao longo deste meridiano. A maior diferença que ocorre é de 7% e aparece no meridiano de tração, para cargas hidrostáticas elevadas.

Na Fig. 4.25, aparece uma comparação em dois diferentes planos deviatóricos. A maior diferença é 5% e ocorre ao longo do meridiano de cisalhamento para cargas hidrostáticas elevadas.

A Fig. 4.26 mostra uma comparação para um carregamento biaxial. A maior diferença é de 8% e ocorre para a relação $\sigma_2/\sigma_3=1/3$.

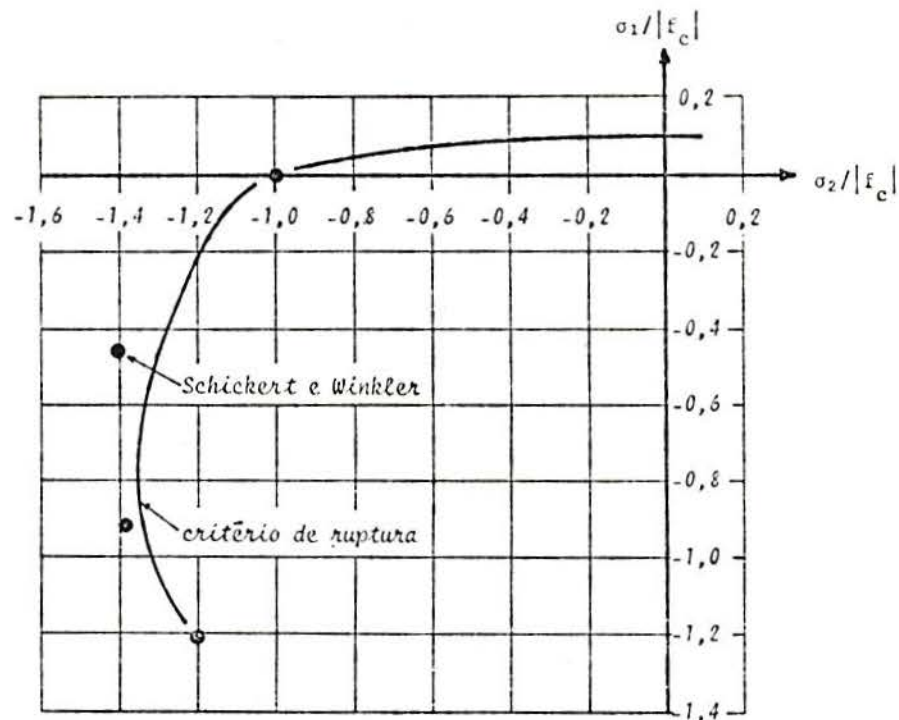


Fig. 4.26 - Comparação para carregamento biaxial

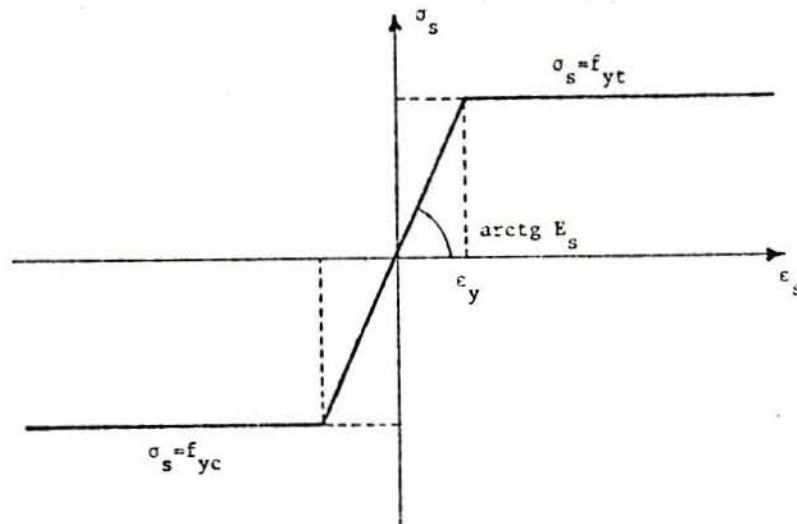
4.4 - O modelo constitutivo para o aço

Fig. 4.27 - Diagrama tensão-deformação para o aço

Nas estruturas de concreto armado, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços na sua direção. Desta forma, necessita-se apenas de um modelo uniaxial para descrever seu comportamento.

Adota-se, como diagrama tensão-deformação para o aço, o diagrama bilinear da Fig. 4.27, que é o proposto pelo Código Modelo CEB-FIP [41] para os aços obtidos por laminação a quente e resfriados naturalmente. O valor do módulo de deformação inicial do aço, E_s , é tomado igual a 210.000 MPa e os valores das resistências à tração e à compressão do aço são os mesmos ($f_{yt} = f_{yc} = f_y$).

Segundo este diagrama pode-se estabelecer que

$$E_S = E_s \quad \text{para } 0 \leq |\epsilon_s| \leq \epsilon_y$$

$$E_S = f_y / \epsilon_s \quad \text{para } |\epsilon_s| \geq \epsilon_y$$
(4.25)

onde, E_S é o módulo de deformação longitudinal secante do aço.

Alternativamente, pode-se empregar para o aço uma outra lei constitutiva. Neste caso, uma relação tensão-de formação não-linear qualquer deve ser aproximada por uma poligonal e desta forma introduzida no programa. Aqui, também, as curvas devem ser iguais para tração e compressão.

5 - O COMPORTAMENTO DO CONCRETO ARMADO FISSURADO

5.1 - Fundamentos

Em geral, nas estruturas de concreto armado, as fissuras aparecem já nas condições de serviço. Isto decorre do fato de ser a resistência à tração do concreto muito inferior à sua resistência à compressão. Qualquer estudo, para a determinação de tensões e deformações em uma peça fissurada de concreto armado, deve necessariamente modelar de forma adequada a transferência dos esforços através das fissuras. Esta transmissão de esforços é um fenômeno complexo, que envolve o engrenamento dos agregados e a flexão das barras da armadura. Walraven e Reinhardt, em [112], apresentaram um trabalho teórico-experimental, analisando estes mecanismos.

Quando uma força cortante é aplicada em um corpo de prova (Fig. 5.1), os esforços nas barras da armadura, que atravessam a fissura, desenvolvem-se de acordo com a geometria e a "rigidez" da fissura. O valor do esforço na armadura, desta forma, não é conhecido e deve ser medido para que fique determinado o estado de tensão. Na prática, é impossível medir as tensões no aço, exatamente na posição da fissura, em uma barra dentro do concreto submetida simultaneamente a esforços normais e transversais. Por este motivo, foram realizados, em [112], duas séries de ensaios: uma primeira série

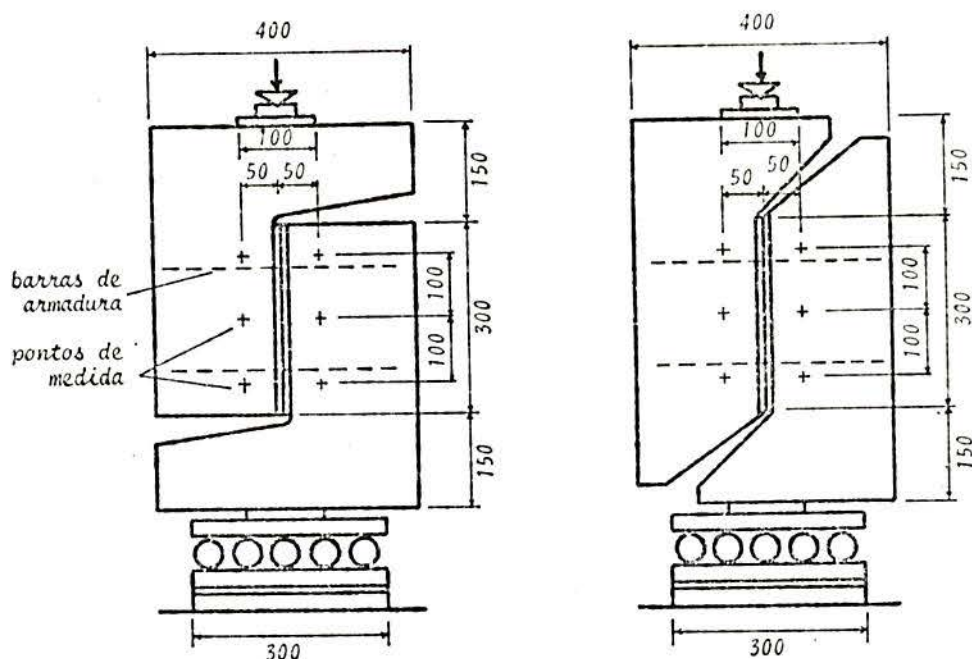


Fig. 5.1 - Características geométricas dos corpos de prova ensaiados [112]

com corpos de prova com barras dentro do concreto e uma segunda série, com barras externas.

Os corpos de prova pré-fissurados, com uma abertura de fissura inicial da ordem de 0,01 a 0,03 mm, eram submetidos a um aumento contínuo de carga. Nos primeiros três minutos, a velocidade de deslocamento de corte era de 0,004 mm/min, e posteriormente, era aumentada para 0,02 mm/min. O teste se encerrava, quando o deslocamento de corte atingia 2 mm.

Durante os ensaios, a força cortante aplicada, o deslocamento de corte e a abertura da fissura ao longo de todo o ciclo de carga foram medidos. Alguns corpos de prova foram carregados, descarregados e recarregados.

Nos ensaios com barras externas, foram medidas também as tensões normais atuantes no plano da fissura, diretamente nas barras. Entre os dois tipos de ensaio, a diferença mais marcante foi uma pequena variação na "rigidez" da fissura. Isto deve ser atribuído à redução da abertura da fissu-

ra, em torno da barra, dentro do concreto.

Algumas das variáveis dos ensaios foram a taxa de armadura, o diâmetro das barras, a resistência do concreto, o tipo e a granulometria dos agregados, a inclinação das barras em relação ao plano de fissura.

Neste capítulo, serão apresentados os modelos analíticos para descrever o funcionamento do concreto armado fissurado. No item 5.2, é analisado o engrenamento dos agregados, enquanto no item 5.3 é modelada a participação da armadura. Nos dois casos, as previsões teóricas são comparadas com os resultados experimentais [112].

5.2 - O modelo para os mecanismos de transmissão de esforços através das fissuras sem participação da armadura

5.2.1 - A formulação do modelo analítico

O concreto pode ser representado como um sistema de duas fases: uma matriz (a pasta de cimento endurecida) envolvendo as partículas de agregado. Normalmente, a resistência da matriz é inferior à dos agregados. Entretanto, o ponto fraco do sistema é a zona de contato entre as duas fases. Assim, a fissura ocorre, geralmente, através da matriz, mas ao longo do contorno das partículas de agregado. Nesta análise, as partículas serão tomadas como esferas, que podem ser interceptadas pelo plano da fissura em qualquer altura com a mesma probabilidade (Fig. 5.2).

Como o tamanho da maioria das partículas de agregado é consideravelmente maior do que a abertura da fissura, conclui-se que a "micro-rugosidade" da fissura, causada

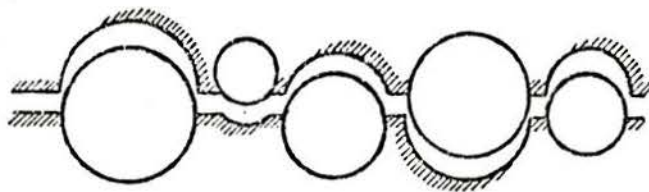


Fig. 5.2 - Corte típico de uma fissura

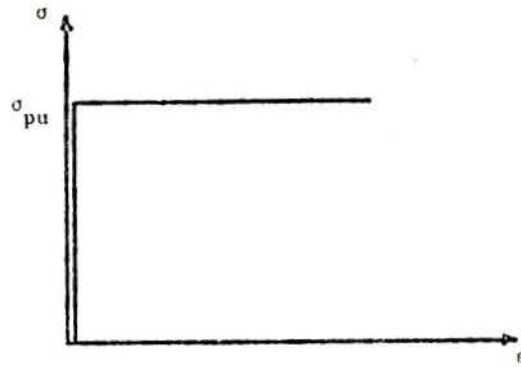


Fig. 5.3 - Relação tensão-deformação rígido-plástica para o material da matriz

pela projeção das partículas de agregado para fora da superfície da fissura, predomina sobre a "macro-rugosidade", devido às ondulações da superfície da fissura. Por esta razão, admite-se que a superfície da fissura é um plano.

A pasta de cimento endurecida é um material elasto-plástico. Como as deformações plásticas predominam sobre as elásticas, admite-se que a relação tensão-deformação para o material da matriz (a pasta de cimento endurecida com as partículas de agregado com diâmetro menor do que 0,25 mm) seja rígido-plástica (Fig. 5.3).

Simboliza-se por σ_{pu} a tensão correspondente à deformação plástica. Durante o deslocamento das faces da fissura, surgem áreas de contato nas superfícies das partículas (com o engrenamento das faces da fissura) devido à deformação plástica da matriz.

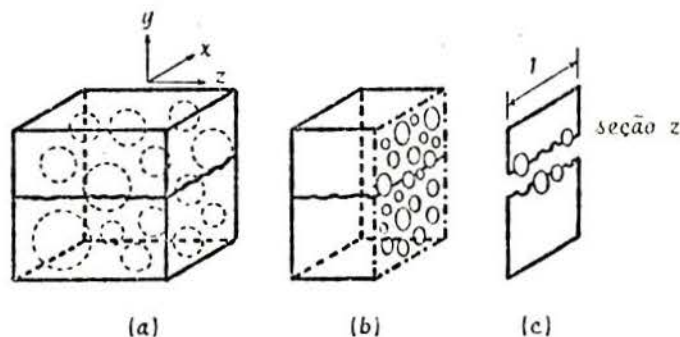


Fig. 5.4 - (a) Corpo de concreto fissurado
(b) Plano de intersecção
(c) Faixa representativa

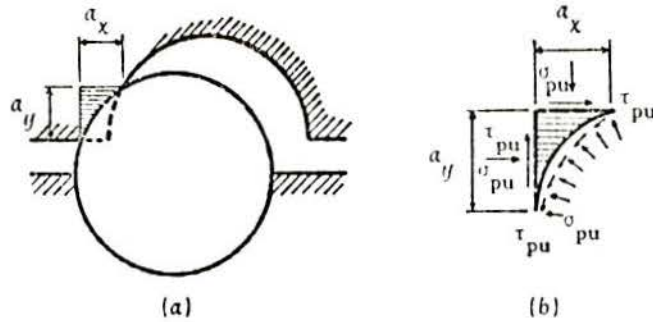


Fig. 5.5 - (a) Área de contato entre a matriz e uma partícula de agregado
(b) Equilíbrio das tensões

Considere-se a formação destas áreas, como resultado do deslocamento, devido ao corte, na direção do eixo x . Nestas áreas de contato, as tensões produzem reações. A resultante na direção z é nula. Desta forma, pode-se estudar o corpo de concreto fissurado como o conjunto de um grande número de faixas de pequena espessura.

A Fig. 5.5 mostra uma seção transversal de uma partícula, paralela ao plano z , na qual existe uma linha de contato entre as faces opostas da fissura. As projeções desta linha de contato, nas direções x e y , são a_x e a_y . A área sombreada representa a parte da matriz que desaparece devido a deformação plástica. À medida que o esforço de corte aumenta no plano da fissura, deformação plástica adicional ocorre, até que o equilíbrio seja obtido nas direções x e y .

As tensões na área de contato são σ_{pu} , normal à área de contato, e τ_{pu} , tangencial a esta área. Elas estão relacionadas por

$$\tau_{pu} = \mu \cdot \sigma_{pu} \quad (5.1)$$

onde μ é o coeficiente de atrito entre as partículas e a matriz.

Pelas condições de equilíbrio na superfície de uma partícula, as reações nas direções x e y podem ser expressas por

$$F_y = \sigma_{pu} a_x - \tau_{pu} a_y \quad (5.2)$$

$$F_x = \sigma_{pu} a_y + \tau_{pu} a_x$$

Utilizando a Eq. (5.1) e somando as contribuições de todas as partículas, obtêm-se as reações para toda área da fissura

$$\Sigma F_y = \sigma_{pu} (\Sigma a_x - \mu \Sigma a_y) \quad (5.3)$$

$$\Sigma F_x = \sigma_{pu} (\Sigma a_y + \mu \Sigma a_x)$$

Os valores de σ_{pu} e μ são constantes do material, enquanto os valores de Σa_x e Σa_y devem ser calculados. Isto será feito a seguir.

Para isto, deve-se estabelecer em primeiro lugar a distribuição de diâmetros dos círculos formados pela intersecção das partículas pelo plano z. Adotou-se para a distribuição das partículas de agregado, a curva granulométrica de Fuller. Esta função de distribuição acumulada é dada por

$$p = (D/D_{m\acute{a}x})^{0,5} \quad (5.4)$$

onde p é a fração que passa na peneira com abertura D ; $D_{m\acute{a}x}$ é o diâmetro da maior partícula de agregado. A probabilidade de que um ponto arbitrário no concreto esteja localizado em uma partícula de agregado é simbolizada por p_k . Ou seja, p_k é o quociente entre o volume total de agregados e o volume de concreto. A probabilidade que um ponto, localizado em uma partícula de agregado, esteja em uma partícula com um diâmetro menor do que um determinado valor D_x é dada por

$$p(D < D_x) = (D_x/D_{m\acute{a}x})^{0,5} \quad (5.5)$$

Derivando-se esta função, obtêm-se a função de densidade de probabilidade $p'(D_x)$.

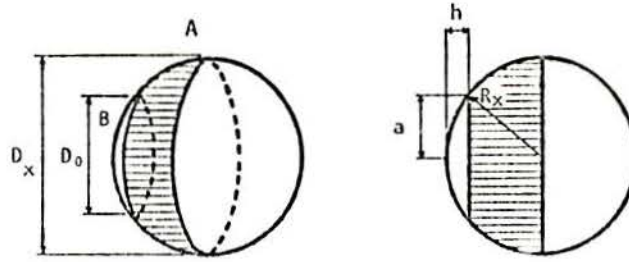


Fig. 5.6 - Círculo interceptado de diâmetro D_0 , em uma partícula com diâmetro D

$$\begin{aligned}
 p'(D_x) &= \frac{\partial p(D < D_x)}{\partial D_x} = 0,5 \left(D_x / D_{\text{máx}} \right)^{-1/2} \frac{1}{D_{\text{máx}}} = \\
 &= 0,5 D_{\text{máx}}^{-1/2} D_x^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

A probabilidade de que um ponto, localizado em uma partícula com diâmetro D_x , esteja em um círculo interceptado com um diâmetro maior do que D_0 ($D_0 < D_x$), é igual ao quociente do volume do segmento esférico A pelo volume da semi-esfera (Fig. 5.6). O volume da calota esférica B é igual a

$$V_B = \frac{1}{6} \pi h (3 a^2 + h^2) \tag{5.7}$$

com

$$h = \frac{1}{2} D_x - \left(D_x^2 / 4 - a^2 \right)^{1/2} \tag{5.8}$$

e o volume da semi-esfera é

$$V = \frac{1}{12} \pi D_x^3 \tag{5.9}$$

A probabilidade de que um ponto nesta esfera esteja em um círculo interceptado com um diâmetro D maior do que D_0 é igual a

$$p_{D_x}(D > D_0) = (V - V_B) / V \tag{5.10}$$

Substituindo (5.7) e (5.9) em (5.10) e operan-

do, resulta

$$P_{D_x}(D > D_0) = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D_0^2}{D_x^2}\right) \left(1 - \frac{D_0^2}{D_x^2}\right)^{1/2} \quad (5.11)$$

Assim, a probabilidade, que um ponto arbitrário no plano z esteja em um círculo interceptado com um diâmetro D maior do que D_0 , é obtida, integrando-se o produto das equações (5.6) e (5.11) sobre o intervalo $D_0 - D_{\text{máx}}$, ou seja,

$$P_C(D > D_0) = P_k \int_{D_0}^{D_{\text{máx}}} P'(D_x) P_{D_x}(D > D_0) dD_x \quad (5.12)$$

Inversamente, a probabilidade que um ponto arbitrário do plano z esteja localizado em um círculo interceptado com um diâmetro D menor do que D_0 , é obtida da Eq.(5.12), como

$$P_C(D < D_0) = P_k - P_C(D > D_0) \quad (5.13)$$

Substituindo (5.6) e (5.11) em (5.12), integrando e utilizando o resultado em (5.13), resulta

$$\begin{aligned} P_C(D < D_0) = P_k & (1,065 D_0^{1/2} D_{\text{máx}}^{-1/2} - 0,0532 D_0^4 D_{\text{máx}}^{-4} - \\ & - 0,012 D_0^6 D_{\text{máx}}^{-6} - 0,045 D_0^8 D_{\text{máx}}^{-8} - \\ & - 0,0025 D_0^{10} D_{\text{máx}}^{-10}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

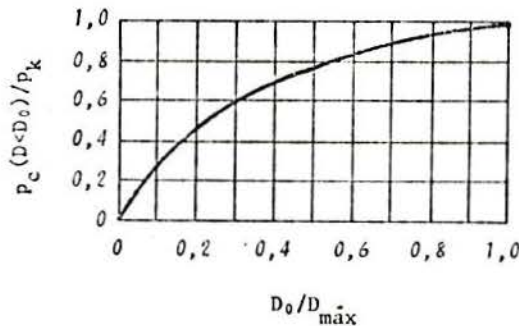


Fig. 5.7 - Função de distribuição acumulada dos diâmetros dos círculos interceptados

Esta função é mostrada na Fig. 5.7. A função de densidade de probabilidade de que um ponto arbitrário no corpo de concreto, estando no plano z , esteja situado em um círculo com um diâmetro $D=D_0$, é obtida por derivação da Eq. (5.14)

$$\begin{aligned}
 p'_c(D_0) = P_k & (0,532 D_0^{-1/2} D_{\text{máx}}^{-1/2} - 0,212 D_0^3 D_{\text{máx}}^{-4} - \\
 & - 0,072 D_0^5 D_{\text{máx}}^{-6} - 0,036 D_0^7 D_{\text{máx}}^{-8} - \\
 & - 0,025 D_0^9 D_{\text{máx}}^{-10})
 \end{aligned}
 \quad (5.15)$$

Conhecida a distribuição de círculos interceptados no plano z , pode-se estabelecer a frequência de círculos que estejam no plano z e que sejam atravessados pela fissura (Fig. 5.8). O comprimento médio da linha de intersecção AB , para um círculo com diâmetro D_0 , cruzado pela fissura, é

$$\bar{s} = \pi D_0/4 \quad (5.16)$$

Considerando uma seção de fissura (a intersecção do plano da fissura e o plano z) de comprimento unitário, a função de densidade de probabilidade, para a parte esperada daquele comprimento, que esteja localizada em um círculo com um diâmetro D_0 , pode ser obtida, multiplicando-se este comprimento por $p'_c(D_0) = \partial p_c(D < D_0) / \partial D_0$. Assim,

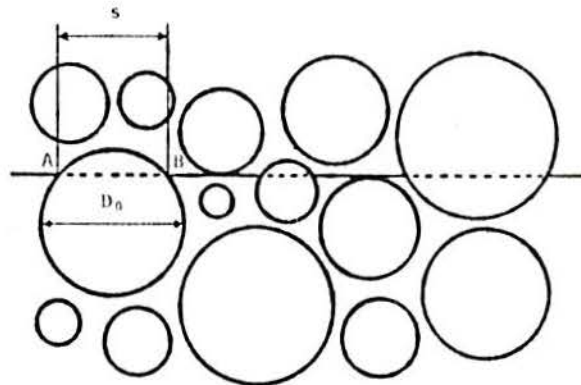


Fig. 5.8 - Círculos interceptados atravessados pela fissura

$$1(D_0) = p'_C(D_0) \cdot 1 = p'_C(D_0) \quad (5.17)$$

Conseqüentemente, a função de densidade de probabilidade para o número esperado de círculos com um diâmetro D no plano z , que também são interceptados no comprimento unitário da fissura, pode ser obtida de (5.16) e (5.17), como

$$n(D_0) = p'_C(D_0) / (0,25 \pi D_0) \quad (5.18)$$

A seguir, será avaliada a contribuição dos diversos círculos para a área de contato entre as faces da fissura. Este resultado, combinado com a Eq. (5.18), fornecerá a área de contato total para uma área de fissura unitária, em função dos deslocamentos entre as faces da fissura.

Primeiramente, a área de contato para um círculo, com um diâmetro arbitrário D , será obtida em função da abertura da fissura w e do deslocamento de corte Δ . A distância do centro do círculo até a face da fissura é simbolizada por u (Fig. 5.9). Admite-se que o valor de u varia aleatoriamente no intervalo $[0, R]$. Para o intervalo $[-R, 0]$, o círculo estará na face oposta da fissura, para a qual as mesmas considerações são válidas.

Se $(w+u) > R$, então para qualquer valor do deslocamento de corte Δ , não aparece área de contato. Se $(w+u) < R$,

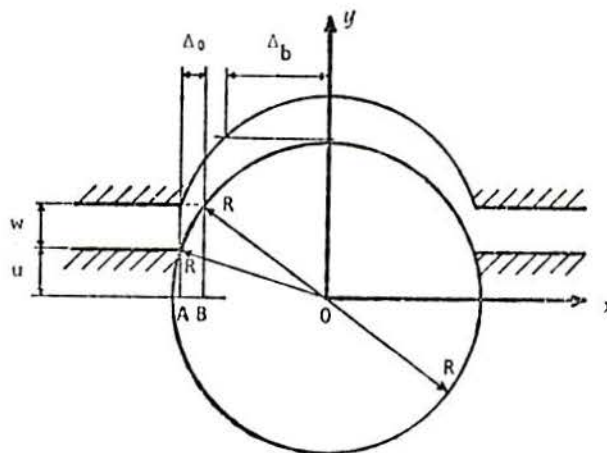


Fig. 5.9 - Posição de um círculo atravessado pela fissura

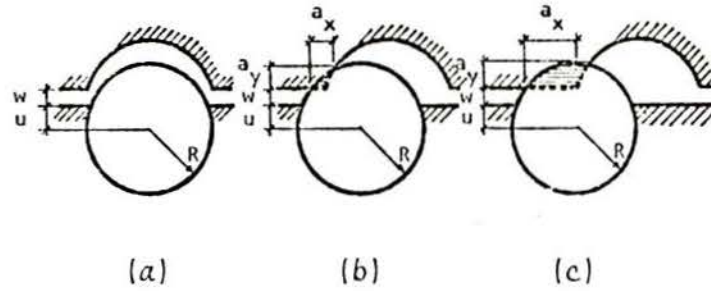


Fig. 5.10 - As fases para $(w+u) < R$: (a) fase de nenhum contato ($0 < \Delta < \Delta_0$); (b) fase de crescimento de contato ($\Delta_0 < \Delta < \Delta_b$); (c) fase de máximo contato ($\Delta_b < \Delta$)

consideram-se dois valores característicos de Δ . Para $\Delta < \Delta_0$, não existe área de contato. Se $\Delta_0 < \Delta < \Delta_b$, existe uma área de contato, que aumenta com o crescimento de Δ . Se $\Delta > \Delta_b$, a área de contato não cresce mais. Conforme a Fig. 5.9, os valores de Δ_0 e Δ_b são dados por

$$\Delta_0 = OA - OB = \sqrt{R^2 - u^2} - \sqrt{R^2 - (u+w)^2} \quad (5.19)$$

$$\Delta_b = \sqrt{R^2 - (R-w)^2} = \sqrt{2Rw - w^2} \quad (5.20)$$

As projeções das área de contato são:

- para $0 < \Delta < \Delta_0$ (fase de nenhum contato)

$$a_x = a_y = 0 \quad (5.21)$$

- para $\Delta_0 < \Delta < \Delta_b$ (fase de crescimento de contato)

$$\begin{aligned} a_y &= \sqrt{R^2 - (w^2 + \Delta^2)/4} \frac{\Delta}{\sqrt{w^2 + \Delta^2}} - \frac{1}{2} w - u \\ a_x &= \frac{1}{2} \Delta - \sqrt{R^2 - (w^2 + \Delta^2)/4} \frac{w}{\sqrt{w^2 + \Delta^2}} + \sqrt{R^2 - (u+w)^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

- para $\Delta > \Delta_b$ (fase de contato máximo)

$$\begin{aligned} a_y &= R - (u+w) \\ a_x &= \sqrt{R^2 - (u+w)^2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Estas equações apresentam a profundidade u como variável. Admitindo-se que todos valores de u podem ocorrer com a mesma probabilidade, é possível calcular as mais prováveis áreas de contato médias \bar{a}_x e \bar{a}_y (funções de D , w e Δ).

Assim, se as faces da fissura estão defasadas, uma em relação à outra, de (w, Δ) , para qualquer círculo interceptado (D), os valores mais prováveis de \bar{a}_{xD} e \bar{a}_{yD} são conhecidos. Se D_{\min} é o diâmetro do menor círculo que produz contato para determinadas condições (w, Δ) , e D_{\max} é o maior diâmetro de agregado que aparece na mistura, a área de contato total, para um comprimento unitário e uma largura unitária da área de fissura, pode ser calculada como

$$\bar{A}_Y = \Sigma \bar{a}_Y = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} n(D) \bar{a}_{yD} dD \quad (5.24)$$

$$\bar{A}_X = \Sigma \bar{a}_X = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} n(D) \bar{a}_{xD} dD \quad (5.25)$$

onde $n(D)$ é obtida da Eq. (5.18).

O cálculo destas equações resulta

- para $\Delta < w$

$$\bar{A}_Y = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \frac{D}{w^2 + \Delta^2} P_k \frac{4}{\pi} F\left(\frac{D}{D_{\max}}\right) G_1(\Delta, w, D) dD \quad (5.26)$$

$$\bar{A}_X = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \frac{D}{w^2 + \Delta^2} P_k \frac{4}{\pi} F\left(\frac{D}{D_{\max}}\right) G_2(\Delta, w, D) dD \quad (5.27)$$

- para $\Delta > w$

$$\begin{aligned} \bar{A}_Y = & \int_{D_{\min}}^{\frac{w^2 + \Delta^2}{w}} \frac{w^2 + \Delta^2}{2w} P_k \frac{4}{\pi} F\left(\frac{D}{D_{\max}}\right) G_3(\Delta, w, D) dD + \\ & + \int_{\frac{w^2 + \Delta^2}{w}}^{D_{\max}} \frac{D}{w^2 + \Delta^2} P_k \frac{4}{\pi} F\left(\frac{D}{D_{\max}}\right) G_1(\Delta, w, D) dD \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_x = & \int \frac{w^2 + \Delta^2}{2w} P_k \frac{4}{\pi} F\left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right) G_4(\Delta, w, D) dD + \\ & + \int \frac{D_{\text{máx}}}{w^2 + \Delta^2} P_k \frac{4}{\pi} F\left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right) G_2(\Delta, w, D) dD \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde

$$\begin{aligned} G_1(\Delta, w, D) = & D^{-3} \left(\sqrt{D^2 - (w^2 + \Delta^2)} \frac{\Delta}{\sqrt{w^2 + \Delta^2}} u_{\text{máx}} - \right. \\ & \left. - w u_{\text{máx}} - u_{\text{máx}}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} G_2(\Delta, w, D) = & D^{-3} \left\{ \left[\Delta - \sqrt{D^2 - (w^2 + \Delta^2)} \frac{w}{\sqrt{w^2 + \Delta^2}} \right] u_{\text{máx}} + \right. \\ & + (u_{\text{máx}} + w) \sqrt{D^2/4 - (w + u_{\text{máx}})^2} - \\ & - w \sqrt{D^2/4 - w^2} - D^2/4 \arcsen \frac{w + u_{\text{máx}}}{D/2} - \\ & \left. - D^2/4 \arcsen \frac{2w}{D} \right\} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$G_3(\Delta, w, D) = D^{-3} (D/2 - w)^2 \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} G_4(\Delta, w, D) = & D^{-3} \left(\frac{\pi}{8} D^2 - w \sqrt{D^2/4 - w^2} - \right. \\ & \left. - D^2/4 \arcsen \frac{2w}{D} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right) = & 0,532 \left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right)^{0,5} - 0,212 \left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right)^4 - \\ & - 0,072 \left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right)^6 - 0,036 \left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right)^8 - \\ & - 0,025 \left(\frac{D}{D_{\text{máx}}}\right)^{10} \end{aligned} \quad (5.34)$$

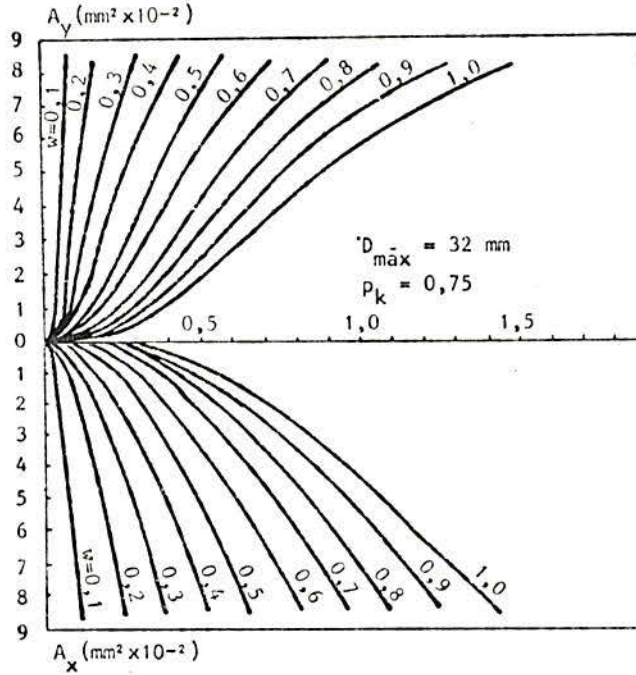


Fig. 5.11 - Áreas de contato totais A_y e A_x para uma área de fissura de 1 mm^2 , em função da abertura da fissura w e do deslocamento de corte Δ

$$u_{\text{máx}} = -\frac{1}{2} w + \frac{\sqrt{w^2 (w^2 + \Delta^2)^2 - (w^2 + \Delta^2) [(w^2 + \Delta^2)^2 - \Delta^2 D^2]}}{2 (w^2 + \Delta^2)} \quad (5.35)$$

A integração das expressões (5.26) a (5.29) é feita numericamente. A Fig. 5.11 mostra o resultado dos cálculos, para um concreto com diâmetro máximo de agregado de 32 mm e com valor de p_k de 0,75.

5.2.2 - Comparação entre teoria e resultados experimentais

As relações entre as tensões em uma fissura e os deslocamentos, conforme as expressões (5.3), são

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{pu} (A_x - \mu A_y) \\ \tau &= \sigma_{pu} (A_y + \mu A_x) \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde A_x e A_y dependem da abertura da fissura w , do deslocamento de corte Δ , do diâmetro máximo dos agregados $D_{\text{máx}}$ e do volume total de agregados por unidade de volume de concreto

p_k , como expressam as funções (5.26) a (5.29). Os parâmetros σ_{pu} , resistência da matriz, e μ , coeficiente de atrito, foram obtidos por ajustagem de resultados experimentais por Walraven e Reinhardt [112]. Os valores determinados foram

$$\mu = 0,4$$

(5.37)

$$\sigma_{pu} = 6,39 f_c^{0,56} \text{ MPa}$$

onde f_c é a resistência à compressão uniaxial do concreto. Assim, a resistência da matriz é algo maior do que a resistência do concreto. Isto era esperado: o ponto fraco do sistema é a interface da matriz e das partículas de agregado, onde as microfissuras iniciam a deterioração do concreto. Desta maneira, a resistência do concreto é mais baixa do que a dos seus componentes.

Os resultados experimentais encontraram boa aproximação nos valores teóricos. A Fig. 5.12 mostra a comparação de valores teóricos e experimentais para um concreto com $|f_c| = 59 \text{ MPa}$, $D_{m\acute{a}x} = 16 \text{ mm}$, e com valores teóricos com $p_k =$

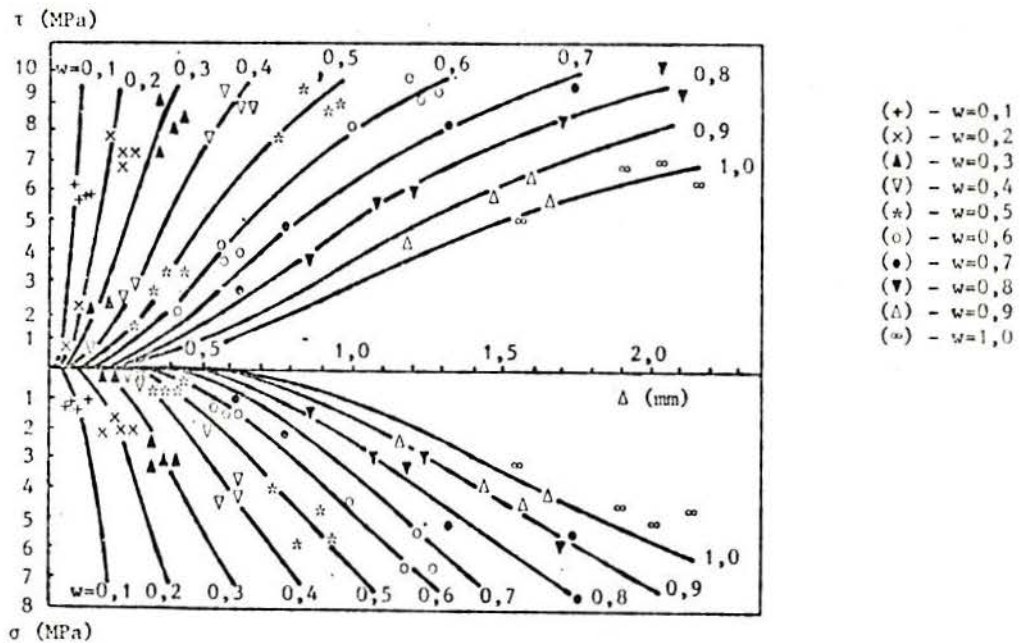


Fig. 5.12 - Comparação entre valores experimentais para um concreto com $|f_c| = 59 \text{ MPa}$, $D_{m\acute{a}x} = 16 \text{ mm}$ e valores teóricos com $p_k = 0,75$, $\mu = 0,40$ e $\sigma_{pu} = 65 \text{ MPa}$

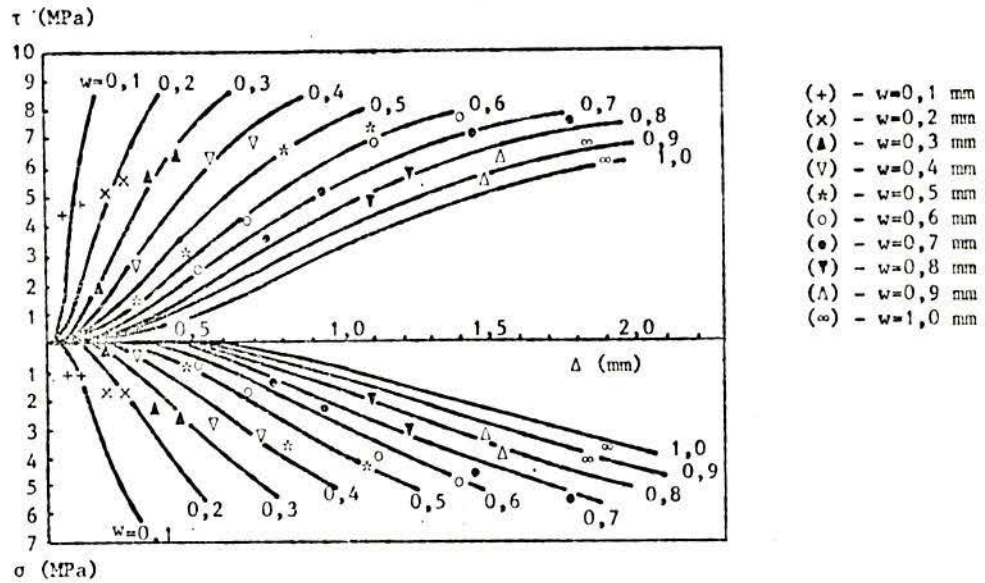


Fig. 5.13 - Comparação entre valores experimentais para um concreto com $|f_c| = 33$ MPa, $D_{m\acute{a}x} = 32$ mm e valores teóricos com $p_k = 0,75$, $\mu = 0,40$ e $\sigma_{pu} = 44$ MPa

$0,75$, $\mu = 0,40$ e $\sigma_{pu} = 65$ MPa. A Fig. 5.13 faz a mesma comparação para $|f_c| = 33$ MPa, $D_{m\acute{a}x} = 32$ mm e com valores teóricos $p_k = 0,75$, $\mu = 0,40$ e $\sigma_{pu} = 44$ MPa.

5.2.3 - Análise paramétrica do engrenamento dos agregados

Como o modelo apresentou boa concordância com os resultados experimentais, alguns estudos paramétricos foram feitos por Walraven e Reinhardt [112], para um melhor entendimento da mecânica do engrenamento dos agregados.

a - O papel do coeficiente de atrito entre os agregados e a matriz

A comparação foi feita para uma mistura com $|f_c| = 40$ MPa, $D_{m\acute{a}x} = 16$ mm, $p_k = 0,75$, $\sigma_{pu} = 50$ MPa e μ variando de 0,0 a 0,4. Uma redução do coeficiente de atrito diminui as tensões tangenciais e aumenta as tensões normais, como mostra a Fig. 5.14.

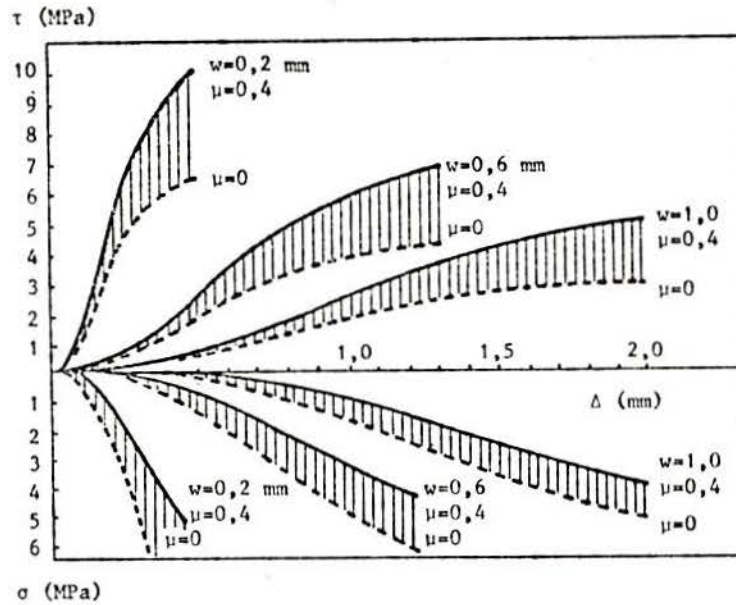


Fig. 5.14 - O papel do coeficiente de atrito

b - A contribuição das diversas frações dos agregados na transferência de tensões em uma fissura

A Fig. 5.15 mostra a contribuição das várias frações dos agregados na transferência de tensões na fissura para um concreto com $|f_c| = 32$ MPa e $D_{m\acute{a}x} = 32$ mm. Nota-se as frações de agregados menores perdem importância à medida que a abertura da fissura aumenta.

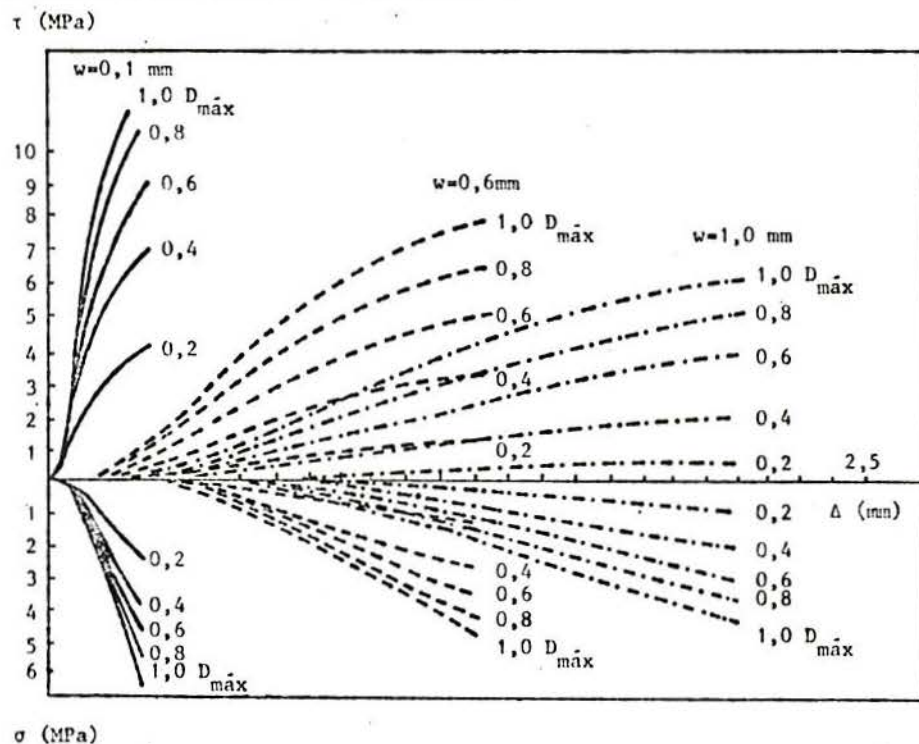


Fig. 5.15 - A participação das diversas frações dos agregados

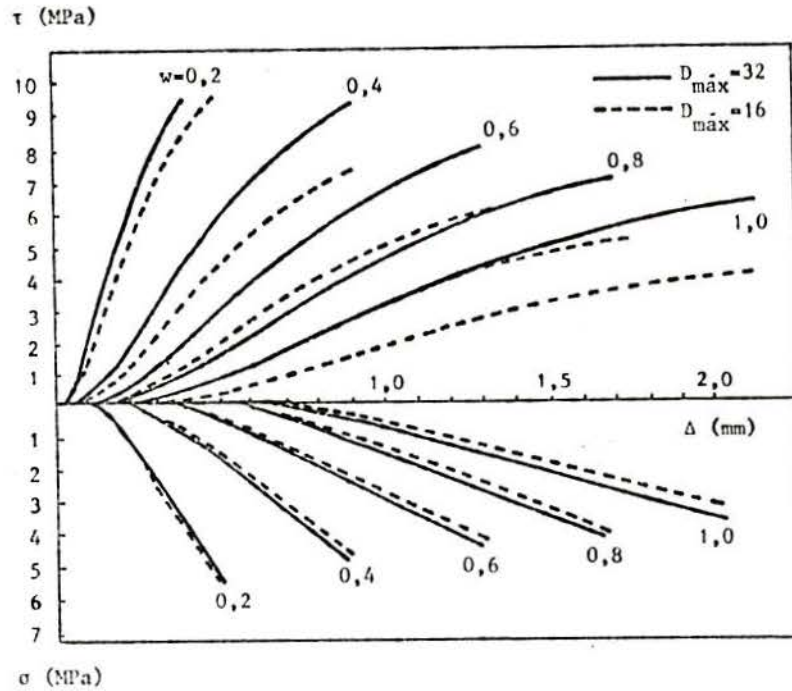


Fig. 5.16 - O efeito do tamanho máximo de partícula dos agregados

c - O efeito de escala dos agregados

Para se ter alguma idéia do efeito de escala dos agregados, duas misturas foram comparadas. Ambas tinham as mesmas propriedades, exceto os diâmetros máximos dos agregados, que eram 16 mm e 32 mm. Os resultados estão na Fig. 5.16 para um concreto com $|f_c| = 32$ MPa. Observa-se que as tensões normais não são tão afetadas quanto as tensões tangenciais. Esta tendência foi confirmada pelos resultados experimentais de Walraven e Reinhardt [112].

5.3 - O modelo para os mecanismos de transmissão de esforços através das fissuras com participação da armadura

5.3.1 - Generalidades

Nos resultados experimentais de Walraven e Reinhardt [112], observa-se que os corpos de prova com barras externas apresentam um comportamento diferente do comportamento dos corpos de prova com barras dentro do concreto. Nos primeiros, a transmissão de esforços ocorre fundamentalmente através do engrenamento dos agregados.

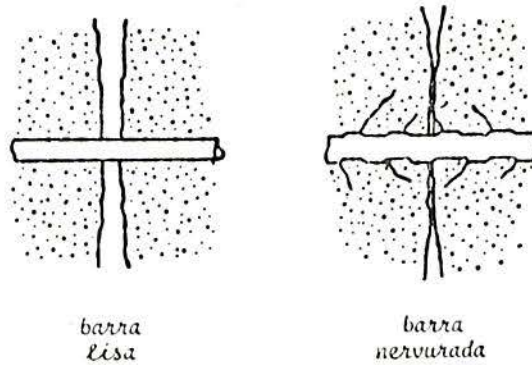


Fig. 5.17 - Fissuras para diferentes tipos de barras

Nos corpos de prova com barras dentro do concreto, a variação na rigidez da armadura, em geral, não altera a forma de abertura da fissura. Isto se verificou nos ensaios de [112], para taxas de armadura variando de 0,56 a 3,34%.

Corpos de prova com aderência interrompida junto à fissura apresentam um comportamento semelhante aos com barras externas. Isto se deve ao fato de que as barras nervuradas causam uma redução da abertura da fissura na vizinhança das barras, enquanto que com as barras lisas tem-se uma abertura de fissura aproximadamente constante (Fig. 5.17).

5.3.2 - As componentes envolvidas na transmissão dos esforços

Em uma peça de concreto armado, a transmissão de esforços através das fissuras se processa, basicamente, pelos seguintes mecanismos:

- pelo engrenamento dos agregados;
- pela rigidez axial da armadura longitudinal;
- pelo efeito de pino na armadura longitudinal.

O engrenamento dos agregados (aggregate interlock) já foi analisado em detalhes no item 5.2. A transmissão de esforços pela rigidez axial da armadura longitudinal será considerada no item 5.4.3.

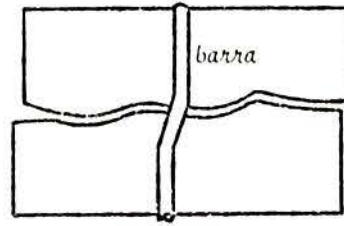


Fig. 5.18 - A flexão da armadura longitudinal

Quando uma peça de concreto armado fissura, as barras de armadura ficam como pinos ligando os trechos de concreto separados pelas fissuras. Com o funcionamento da peça, ocorrem deslocamentos relativos das faces das fissuras, gerando a flexão das barras da armadura (Fig. 5.18). Isto possibilita a transmissão de esforços de um lado para outro da fissura. Este efeito de pino (dowell effect) pode ser aproximadamente descrito pelo modelo de uma viga sobre uma fundação elástica. Desprezando-se a abertura da fissura como comprimento livre, o esforço transmitido por este mecanismo é dado por

$$F_d = \beta^3 E I \Delta \quad (5.38)$$

com

$$\beta = [\phi G_f / (4 E I)]^{0,25} \quad (5.39)$$

onde, Δ é o deslocamento de corte entre as faces da fissura; ϕ é o diâmetro e I é o momento de inércia da barra; E é o módulo de deformação longitudinal do aço, tomado igual a 210.000 MPa; G_f é o módulo de fundação do concreto.

Substituindo na Eq. (5.38) que

$$I = \pi \phi^4 / 64 \quad (5.40)$$

resulta

$$F_d = 3,56 \phi^{1,75} G_f^{0,75} \Delta \quad (5.41)$$

Conforme Walraven e Reinhardt [112], o módulo de fundação do concreto, G_f , por ajustagem de resultados experimentais, pode ser expresso por

$$G_f = 34 |f_c|^{0,5} \Delta^{-0,85} \quad (5.42)$$

onde f_c é a resistência à compressão do concreto. Como esta relação foi obtida em função de resultados sem esforço axial nas barras, Walraven e Reinhardt [112] sugerem, para a expressão (5.42), um fator corretor dado por

$$\xi = 0,20 / (w + 0,20) \quad (5.43)$$

Desta forma, resulta para o esforço transmitido por este mecanismo, considerando-se a influência da abertura da fissura, do deslocamento de corte, do diâmetro da barra e da qualidade do concreto, a seguinte expressão

$$F_d = 10 \Delta^{0,36} \phi^{1,75} |f_c|^{0,38} / (w + 0,20) \quad (5.44)$$

Comparando os valores obtidos com a Eq. (5.44), com os resultados dos ensaios de [112], observa-se que este efeito tem pouca importância para este caso (Fig. 5.19).

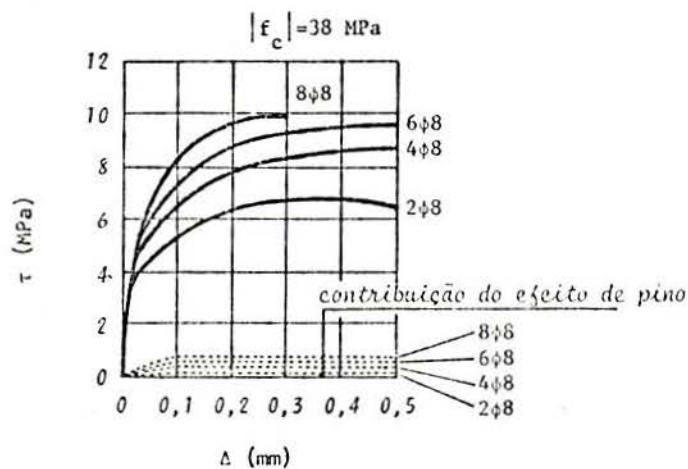


Fig. 5.19 - Contribuição do efeito de pino da armadura

5.4 - O modelo para descrever o comportamento do concreto armado fissurado

5.4.1 - Introdução

Analisados os diferentes mecanismos de transmissão de esforços através das fissuras, pode-se estabelecer um modelo para descrever o comportamento do concreto armado fissurado. A seguir, será obtida uma relação entre tensões e deformações para o concreto armado fissurado, conforme proposto por Bazant e Gambarova [15] e ampliado por Walraven e Reinhardt [112].

5.4.2 - A relação tensão-deslocamento para uma única fissura

5.4.2.1 - Uma fissura no concreto simples

Para a notação de tensões e deslocamentos, usa-se n para a direção normal à fissura e t para a direção no plano da fissura. δ_n e δ_t representam os deslocamentos nas direções normal e tangencial ($\delta_n > 0$; δ_n = abertura da fissura, antes representada por w ; δ_t = deslocamento de corte, antes representado por Δ). As tensões associadas são σ_{nn} (tensão normal) e τ_{nt} (tensão tangencial).

As relações entre σ_{nn} , τ_{nt} e δ_n , δ_t são expressas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{nn} & B_{nt} \\ B_{tn} & B_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

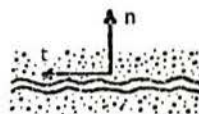


Fig. 5.20 - Direções principais n e t

ou

$$\{\sigma\} = [B^{cr,p}] \{\delta\} \quad (5.46)$$

onde, B_{nn} , B_{nt} , B_{tt} e B_{tn} são coeficientes que expressam a rigidez da fissura. O índice "cr,p" refere-se à fissura (crack) e ao concreto simples (plain concrete). No item 5.2, foram obtidas relações entre σ_{nn} , τ_{nt} e δ_n , δ_t . De uma maneira generalizada, estas funções podem ser escritas como

$$\sigma_{nn} = f_n(\delta_n, \delta_t) \quad ; \quad \tau_{nt} = f_t(\delta_n, \delta_t) \quad (5.47)$$

Usando as Eqs.(5.47), tomaram-se as seguintes expressões para os coeficientes de rigidez da fissura

$$\begin{aligned} B_{nn} &= \frac{f_n}{\delta_n} \quad ; \quad B_{nt} = 0 \\ B_{tn} &= 0 \quad ; \quad B_{tt} = \frac{f_t}{\delta_t} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Estas relações são válidas para valores crescentes de δ_n e $|\delta_t|$, como geralmente ocorre no caso de carregamentos monótonos.

5.4.2.2 - Uma fissura no concreto armado

Conforme foi visto no item 5.3, o comportamento de uma fissura é modificado pela presença de armadura. Isto ocorre pela deformação axial e pela flexão da armadura que atravessa a fissura. A transmissão de esforços axiais, através da fissura, pela armadura, será considerada conforme o procedimento descrito no item 5.4.3. Já o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (dowell effect) é incluído na relação tensão-deslocamento da fissura.

O esforço transmitido por este mecanismo, através da fissura, pode ser calculado pela Eq.(5.44), como uma função dos deslocamentos da fissura (δ_n, δ_t). Este esforço é distribuído sobre a área de concreto adjacente à barra, obten

do-se uma tensão correspondente. Assim, tem-se

$$\tau_{nt}^d = f_t^d(\delta_n, \delta_t) \quad (5.49)$$

onde o índice "d" refere-se ao efeito de pino da armadura (dowell effect).

Deste modo, pode-se estabelecer uma matriz $[B^d]$, dada por

$$[B^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_t^d}{\delta_t} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

tal que

$$\{\sigma^d\} = [B^d] \{\delta^{cr}\} \quad (5.51)$$

onde, o índice "cr" refere-se à fissura.

A relação entre tensões e deslocamentos na fissura é, agora, função de dois mecanismos: o efeito de pino e a interação matriz-partículas. A soma das tensões, causadas pelos dois efeitos, resulta

$$\{\sigma^{cr}\} = [B^{cr,r}] \{\delta^{cr}\} \quad (5.52)$$

com

$$[B^{cr,r}] = [B^{cr,p}] + [B^d] \quad (5.53)$$

onde o índice "cr,r" refere-se à fissura (crack) no concreto armado (reinforced concrete).

5.4.3 - A relação entre tensões e deformações no concreto armado fissurado

Seja um elemento de concreto armado fissurado conforme aparece na Fig. 5.21. A disposição da armadura pode

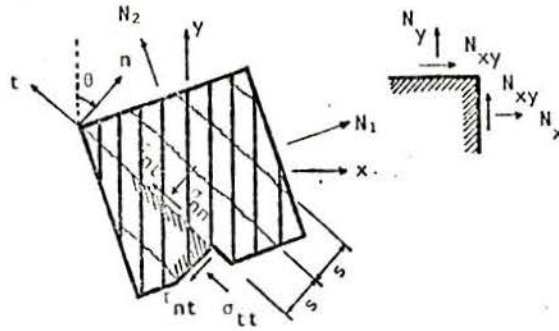


Fig. 5.21 - Elemento de concreto armado fissurado

ser qualquer. O concreto é interceptado por um sistema de fissuras paralelas de espaçamento médio s .

Admite-se que o elemento é suficientemente grande em relação ao espaçamento das fissuras e que os esforços internos variam suavemente. Assim, estes esforços podem ser tomados como uniformes ao longo de uma distância de várias fissuras.

As deformações médias, resultantes das fissuras distribuídas, são

$$\frac{-cr}{\epsilon_{nn}} = \frac{\delta_n}{s(\epsilon)} \quad ; \quad \frac{-cr}{\gamma_{nt}} = 2 \frac{-cr}{\epsilon_{nt}} = \frac{\delta_t}{s(\epsilon)} \quad (5.54)$$

O índice "cr" indica que somente as deformações, relacionadas diretamente com os deslocamentos da fissura, são consideradas. $s(\epsilon)$ é o espaçamento médio das fissuras correspondente a um estado de deformação $\{\epsilon\}$. O espaçamento médio das fissuras, $s(\epsilon)$, depende de diversos fatores:

- da aderência do concreto e do aço, que é função da conformação superficial das barras da armadura, da qualidade do concreto e das tensões no concreto adjacente;
- de elementos geométricos, tais como o diâmetro e o espaçamento das barras e a cobertura de concreto;
- da resistência à tração do concreto (baixa resistência resulta em muitas fissuras), que é, também, influenciada pelas tensões no concreto adjacente.

Diversos pesquisadores apresentaram expressões para determinar o espaçamento médio das fissuras. Para uma fissuração estabilizada, onde não se formam novas fissuras, o Código Modelo do CEB, [41], fornece a seguinte expressão

$$s_m = 2 \left(c + \frac{s}{10} \right) + k_1 k_2 \frac{\phi}{\rho_r} \quad (5.55)$$

onde, c é o recobrimento da armadura; s é o espaçamento das barras da armadura ($s \leq 15\phi$); ϕ é o diâmetro das barras; ρ_r é a taxa de armadura na zona onde as barras podem efetivamente influenciar a abertura das fissuras (até 15ϕ no em torno de cada barra) e k_1 , k_2 são constantes tais que:

- k_1 : dependente da conformação superficial do aço (igual a 0,4 para as barras de alta aderência e a 0,8 para as barras lisas);
- k_2 : dependente do tipo de carregamento.

Para tração simples, o valor adotado para k_2 é de 0,25, enquanto que na flexão, este valor é de 0,125.

Ainda segundo o CEB, o alongamento médio na zona fissurada, considerando a contribuição do concreto entre as fissuras, é expresso por

$$\epsilon_m = (1-\zeta) \epsilon_{s_1} + \zeta \epsilon_{s_2} \quad (5.56)$$

onde:

ϵ_{s_1} - é a deformação na armadura, utilizando-se a rigidez do estágio I;

ϵ_{s_2} - é a deformação na armadura, utilizando-se a rigidez do estágio II puro;

ζ - é um coeficiente dado por

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \geq 0,4 \quad (5.57)$$

sendo

σ_s - tensão na armadura na seção fissurada, sob a combinação das ações consideradas;

- σ_{sr} - tensão da armadura correspondente ao carregamento de fissuração, no instante imediatamente posterior;
- β_1 - coeficiente caracterizando a aderência das barras, igual a $1/(2,5 k_1)$;
- β_2 - coeficiente representando a influência da duração de aplicação ou repetição das cargas; igual a 1 para o primeiro carregamento e 0,5 para as cargas aplicadas durante uma longa duração ou por um grande número de ciclos de carregamento.

A fórmula semi-empírica da Eq. (5.55) dá o espaçamento médio das fissuras somente para uma fissuração estabilizada. Para formular as relações tensão-deformação para o concreto armado fissurado, é necessário conhecer o espaçamento médio das fissuras para estados de carregamento entre a primeira fissura e a fissuração estabilizada.

Walraven e Reinhardt apresentam, em [112], uma expressão para descrever a evolução do espaçamento entre fissuras, na transição entre os estados não fissurado e completamente fissurado (estabilizado). A expressão é a seguinte

$$s(\epsilon_{nn}) = \frac{\epsilon_{cr} + \epsilon_{nn}}{\epsilon_{nn} - \epsilon_{cr}} s_m \quad (5.58)$$

onde ϵ_{cr} é a deformação na qual a primeira fissura aparece (em torno de 0,0001) e ϵ_{nn} é a deformação média, normal à fissura.

Para se obter um modelo simples para cada fissura, divide-se o comprimento $s(\epsilon_{nn})$ em duas parcelas: uma ao longo da qual a aderência encontra-se completamente destruída e em outra, em que o concreto entre as fissuras continua contribuindo para a rigidez da peça. Com este propósito, emprega-se o coeficiente ζ , definido pela Eq. (5.57). Agora, este coeficiente, para o caso das barras nervuradas, é dado por

$$\zeta = 1 - \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{nn}} \right)^2 \geq 0,4 \quad (5.59)$$

onde ε_{nn}^c é a deformação normal à fissura, considerando a rigidez do concreto não fissurado.

Usando o coeficiente ζ , pode-se escrever que

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{nn}^{cr} &= \zeta \varepsilon_{nn} \\ \bar{\gamma}_{nt}^{cr} &= \zeta \gamma_{nt}\end{aligned}\tag{5.60}$$

Empregando-se as Eqs. (5.54), têm-se

$$\begin{aligned}\delta_n &= \zeta s(\varepsilon_{nn}) \varepsilon_{nn} \\ \delta_t &= \zeta s(\varepsilon_{nn}) \gamma_{nt}\end{aligned}\tag{5.61}$$

Conhecidos os deslocamentos da fissura δ_n , δ_t , é possível estabelecer uma relação constitutiva, usando a Eq. (5.52), que relacione tensões e deformações na fissura. Deste modo

$$\{\sigma^{cr}\} = [D^{cr}] \{\varepsilon^{cr}\}\tag{5.62}$$

A matriz constitutiva para a fissura é estabelecida, adicionando-se à $[D^{cr}]$, a contribuição da armadura que atravessa a fissura. Portanto,

$$[D^{cr,r}] = [D^{cr}] + [D^s]\tag{5.63}$$

onde o índice "s" refere-se ao aço (steel).

De forma análoga, para o concreto entre as fissuras, pode-se estabelecer uma matriz constitutiva da forma

$$[D^{c,r}] = [D^c] + [D^s]\tag{5.64}$$

onde o índice "c" refere-se ao concreto entre fissuras.

A forma de obtenção da matriz constitutiva para a armadura, utilizada na Eq. (5.63) e Eq. (5.64), será apresentada no capítulo 7.

Desta maneira, a matriz constitutiva para o elemento de concreto armado fissurado é dada por

$$[D] = [(1-\zeta) [D^{c,r}]^{-1} + \zeta [D^{cr,r}]^{-1}]^{-1} \quad (5.65)$$

As Figs. 5.22 e 5.23 apresentam resultados obtidos com a utilização deste procedimento para o caso de um tirante de concreto armado, para diferentes taxas de armadura, empregando-se, respectivamente, barras lisas e nervuradas.

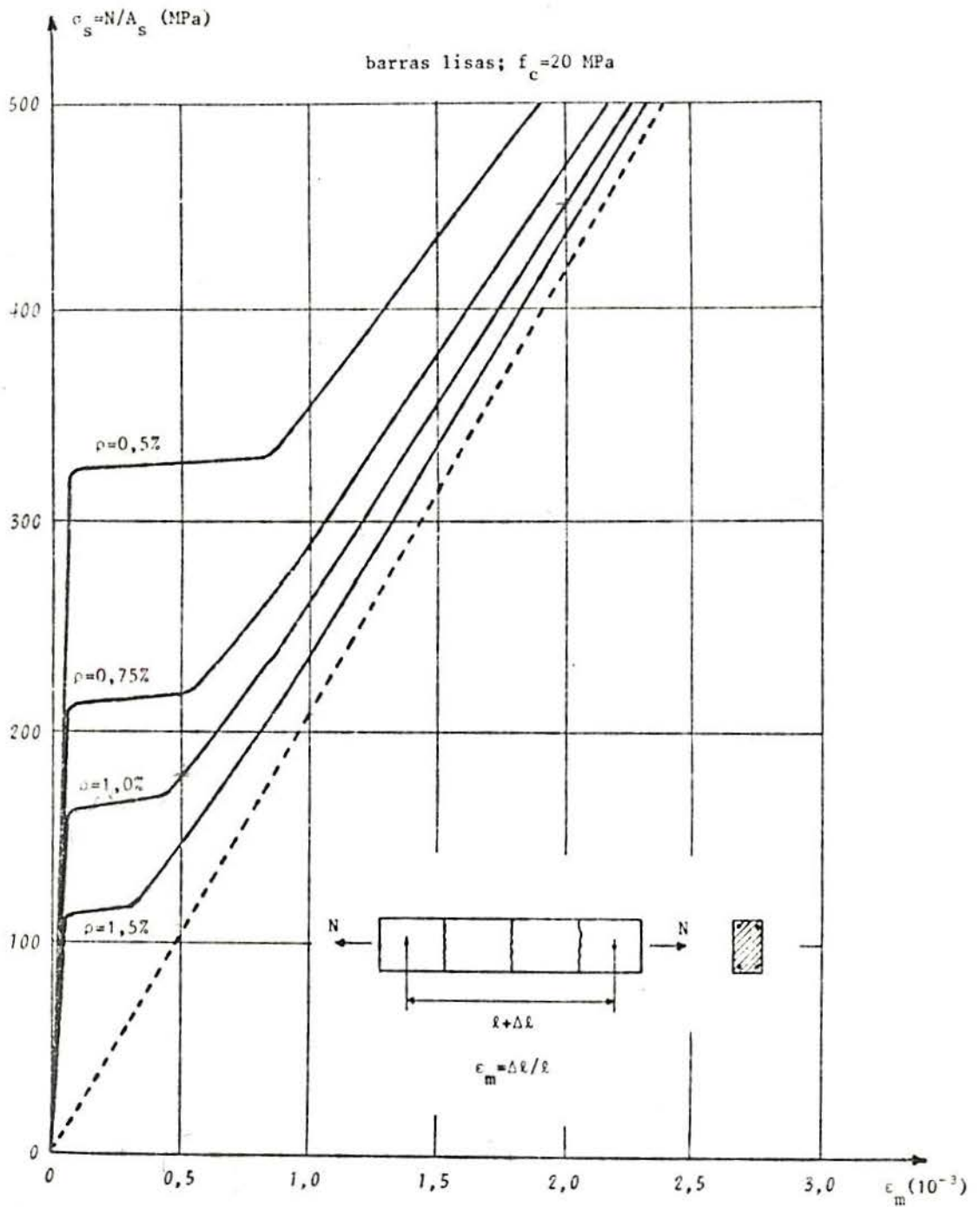


Fig. 5.22 - Curvas tensão x deformação média na armadura em um tirante com barras lisas

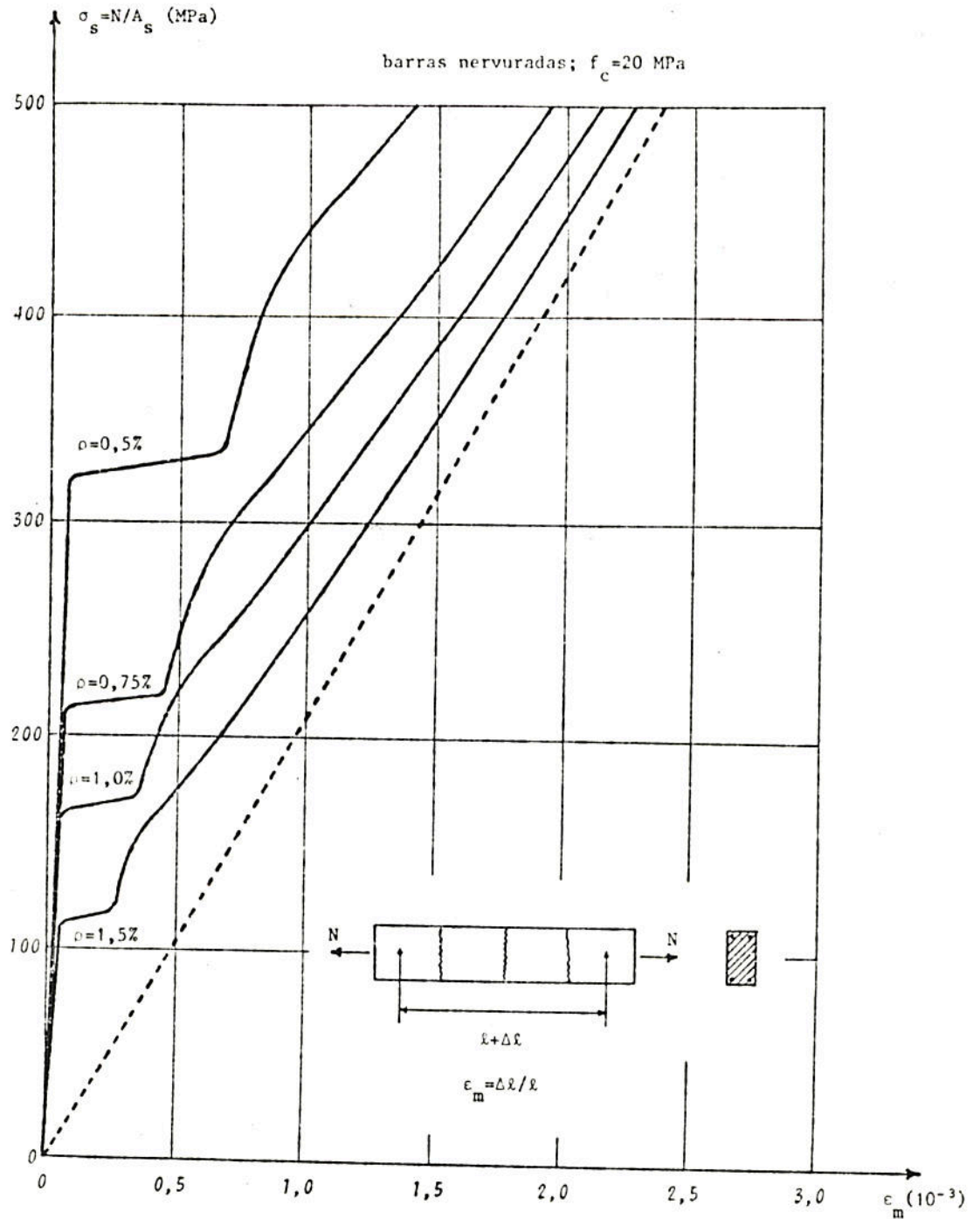


Fig. 5.23 - Curvas tensão x deformação média na armadura em um tirante com barras nervuradas

6 - A FLUÊNCIA E A RETRAÇÃO DO CONCRETO

6.1 - Conceitos básicos

Uma peça de concreto, colocada ao ar livre, sofre, durante o processo de endurecimento, uma diminuição de volume, que é denominada de retração. A fluência é definida como o aumento das deformações específicas, ao longo do tempo, devido a tensões permanentes, que atuam sobre o concreto.

No estudo das estruturas de concreto, a consideração da fluência e da retração é necessária, pois suas intensidades são da mesma ordem de grandeza das deformações elásticas, nas tensões usuais. A fluência e a retração dependem, entre outros fatores, da umidade e da temperatura ambientes, das dimensões da peça, da composição do concreto e da velocidade de endurecimento do cimento.

6.2 - O comportamento uniaxial do concreto ao longo do tempo

6.2.1 - Generalidades

No presente trabalho, adotou-se o procedimento da norma brasileira NBR-7197 - "Projeto de estruturas de concreto protendido" [4], para avaliação das deformações por fluência e retração do concreto ao longo do tempo. Este procedimento tem validade apenas para o concreto submetido a tensões dentro da faixa de utilização.

Neste item, considerar-se-ão deformações em uma única direção. Mais adiante, estes conceitos serão generalizados para mais de uma dimensão.

6.2.2 - A fluência

6.2.2.1 - Hipóteses

No domínio das tensões de utilização, as deformações por fluência, devidas a tensões aplicadas em dois instantes diferentes, são consideradas como aditivas (hipótese da superposição de efeitos). Desta hipótese, tem-se que a deformação por fluência, sob tensão constante, está ligada linearmente à tensão.

Referindo-se, convencionalmente, à deformação inicial para uma peça carregada a 28 dias, define-se o coeficiente de fluência, $\phi(t, t_0)$, pela equação

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E_{C_{28}}} \phi(t, t_0) \quad (6.1)$$

onde:

$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ - é a deformação por fluência, no instante t , sob tensão constante σ_0 , aplicada no instante t_0 ;

$E_{C_{28}}$ - é o módulo de deformação longitudinal secante do concreto a 28 dias; adota-se para este módulo o valor igual a 0,9 do módulo de deformação longitudinal, E_c , definido no item 8.2.5 da NBR-6118 [5], com j igual a 28 dias.

A deformação total, no instante t , sob tensão constante (a deformação inicial no instante t mais a deformação de fluência), é dada por

$$\varepsilon_{c, total}(t, t_0) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{C_{28}}} \right) \quad (6.2)$$

onde $E_c(t_0)$ é o módulo de deformação longitudinal inicial a uma idade t_0 .

O termo

$$\phi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c_{28}}} \quad (6.3)$$

representa a deformação total do concreto, no instante t , sob tensão constante unitária e é chamado de função de fluência.

6.2.2.2 - A determinação do coeficiente de fluência

A deformação por fluência do concreto (ϵ_{cc}) compõe-se de duas parcelas, uma rápida e outra lenta. A fluência rápida (ϵ_{cca}) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24 horas após a aplicação da carga que a originou. A fluência lenta, por sua vez, é composta por outras duas parcelas: a deformação lenta irreversível (ϵ_{ccf}) e a deformação lenta reversível (ϵ_{ccd}). Assim,

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{cca} + \epsilon_{ccf} + \epsilon_{ccd} \quad (6.4)$$

O coeficiente de fluência pode ser determinado através da expressão

$$\phi(t, t_0) = \phi_a + \phi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \phi_{d\infty} \beta_d(t - t_0) \quad (6.5)$$

onde:

t - é a idade do concreto no momento considerado, corrigida segundo o item 6.2.4;

t_0 - é a idade do concreto no momento em que a peça foi carregada, corrigida segundo o item 6.2.4;

ϕ_a - é o coeficiente de fluência rápida, determinado pela expressão

$$\phi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (6.6)$$

sendo $f_c(t_0)/f_c(t_\infty)$, a função de crescimento da resistência do concreto com a idade; esta função está apresentada na Fig. 6.1 e pode ser calculada por

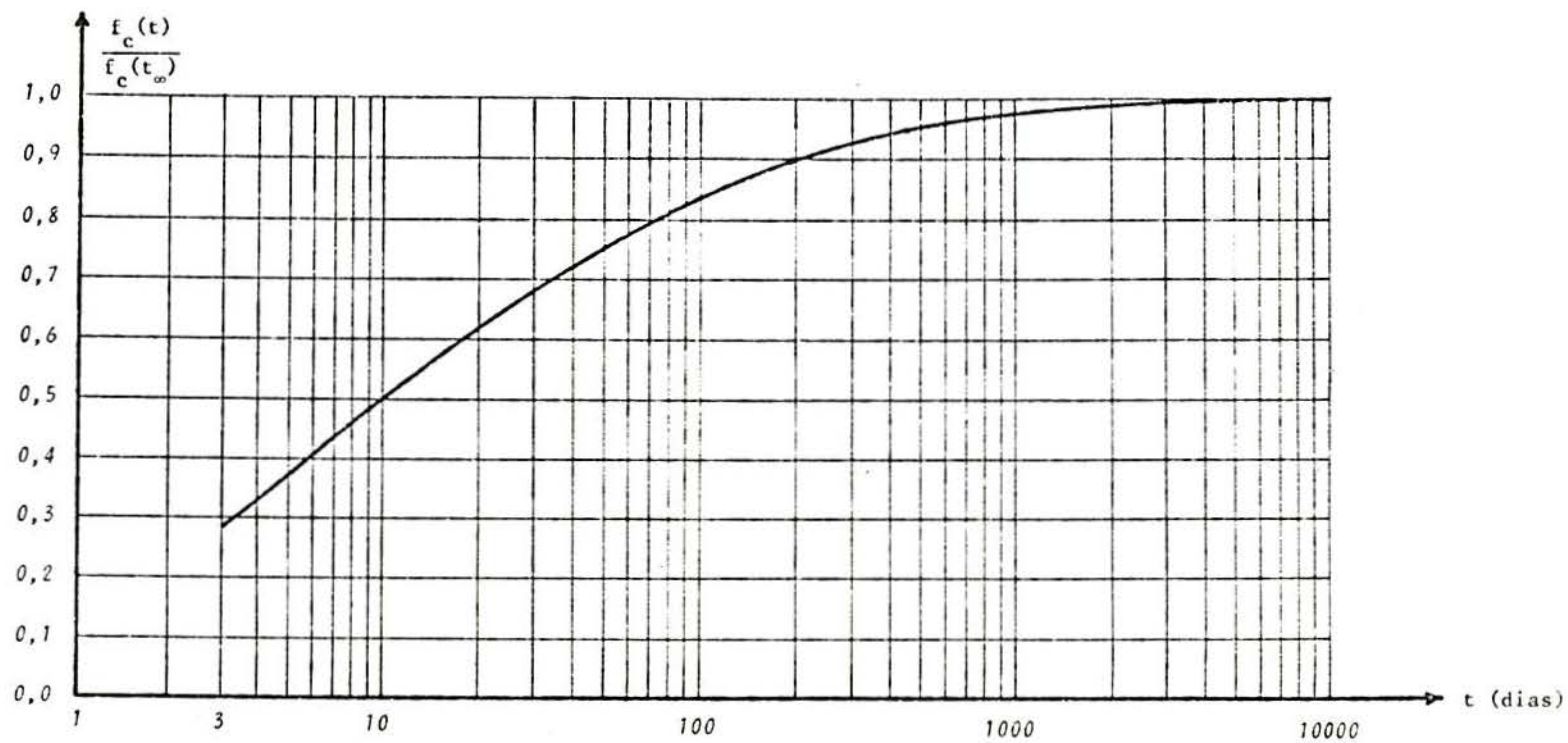


Fig. 6.1 - Variação da resistência do concreto com a idade

$$\frac{f_c(t)}{f_c(t_\infty)} = \frac{9t(t+42)}{(9t+40)(t+61)} \quad (6.7)$$

$\phi_{f_\infty} = \phi_{f_1} \cdot \phi_{f_2}$ - é o coeficiente de deformação lenta irreversível;

ϕ_{f_1} - é um coeficiente que depende do meio ambiente e é dado na Tab. 6.1; para um concreto, que apresenta um abatimento entre 5 e 9 cm, este coeficiente pode ser determinado através da expressão

$$\phi_{f_1} = 4,45 - 0,035 U \quad (6.8)$$

sendo U a umidade relativa do ar do ambiente em que a peça de concreto se encontra; os valores obtidos da Eq. (6.8) devem ser reduzidos de 25% para os concretos com abatimento entre 0 e 4 cm e aumentados de 25% para os concretos com abatimento entre 10 e 15 cm;

ϕ_{f_2} - é um coeficiente que depende da espessura fictícia, h_{fic} , determinada conforme o item 6.2.5; a variação deste coeficiente é apresentada na Fig. 6.2 e pode ser calculado pela expressão

$$\phi_{f_2} = \frac{42+h_{fic}}{20+h_{fic}} \quad (6.9)$$

sendo h_{fic} dado em centímetros;

β_f - é a função correspondente ao desenvolvimento no tempo da deformação lenta irreversível (Fig. 6.3); o valor desta função é dado por

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + A t + B}{t^2 + C t + D} \quad (6.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} A &= 42 h^3 - 350 h^2 + 588 h + 113 \\ B &= 768 h^3 - 3060 h^2 + 3234 h - 23 \\ C &= -200 h^3 + 13 h^2 + 1090 h + 183 \\ D &= 7579 h^3 - 31916 h^2 + 35343 h + 1931 \end{aligned} \quad (6.11)$$

AMBIENTE	UMIDADE	FLUÊNCIA ϕ_{f_1}			RETRAÇÃO $10^4 \times \epsilon_{s_1}$			γ
		ABATIMENTO DE ACORDO COM O MB-256 (cm)						
		0-4	5-9	10-15	0-4	5-9	10-15	
NA ÁGUA	-	0,6	0,8	1,0	+1,0	+1,0	+1,0	30,0
EM AMBIENTE MUITO ÚMIDO IMEDIATAMENTE ACIMA DA ÁGUA	90%	1,0	1,3	1,6	-1,0	-1,3	-1,6	5,0
AO AR LIVRE, EM GERAL	70%	1,5	2,0	2,5	-2,5	-3,2	-4,0	1,5
EM AMBIENTE SECO	40%	2,3	3,0	3,8	-4,0	-5,2	-6,5	1,0

Tab. 6.1 - Coeficientes para fluência e retração

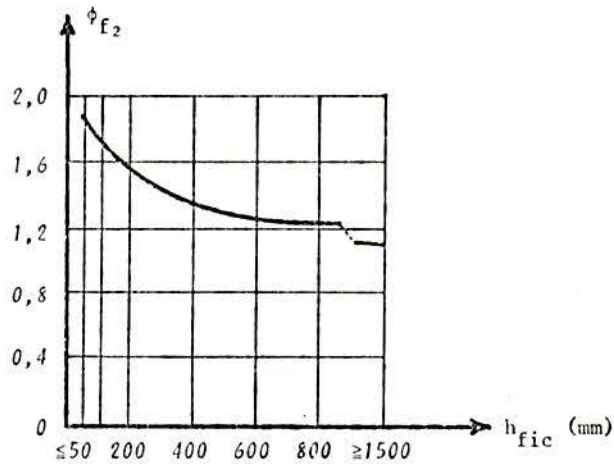


Fig. 6.2 - Influência da espessura fictícia na deformação lenta irreversível

onde $h = h_{fic}$ (em metros), se $0,05 \leq h_{fic} \leq 1,6$; para valores de h_{fic} fora deste intervalo, adotam-se os extremos correspondentes;

ϕ_{d_∞} - é o coeficiente de deformação lenta reversível, considerado igual a 0,4;

β_d - é a função correspondente ao desenvolvimento no tempo da deformação lenta reversível (Fig. 6.4); o valor desta função pode ser calculado pela expressão

$$\beta_d(t-t_0) = \frac{t-t_0+20}{t+t_0+70} \quad (6.12)$$

Conforme proposta de Grootenboer, Leijten e Blaauwendraad, em [60], a Eq. (6.12), que dá o desenvolvimento no tempo da deformação lenta reversível, é substituída pela expressão

$$\beta_d(t-t_0) = 1 - e^{-\theta(t-t_0)} \quad (6.13)$$

Ainda segundo [60], recomenda-se que o fator θ seja tomado igual a 0,09. O emprego desta expressão permite que a deformação lenta reversível seja completamente determinada a partir do estado atual de tensões e da deformação len-

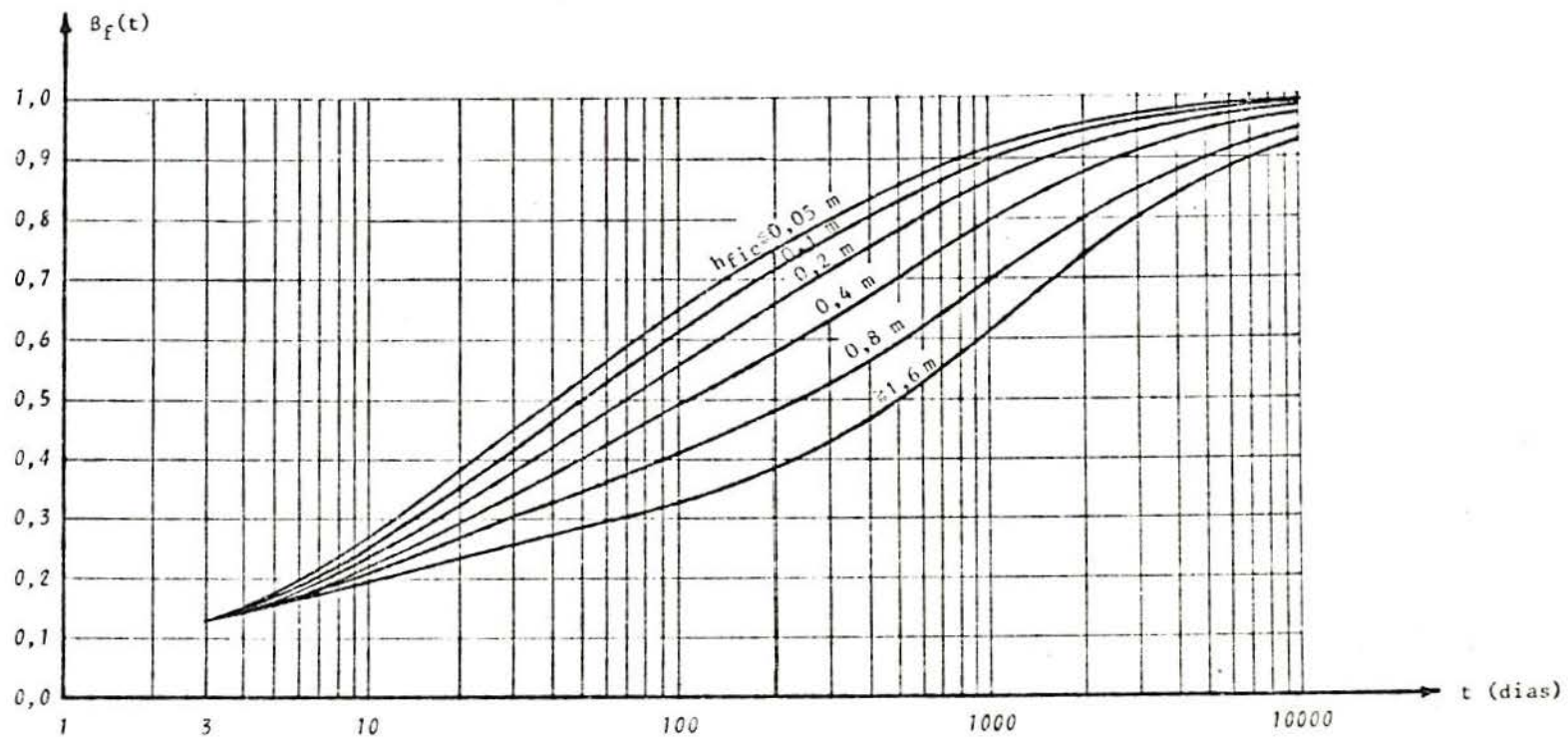


Fig. 6.3 - Desenvolvimento no tempo da deformação lenta irreversível

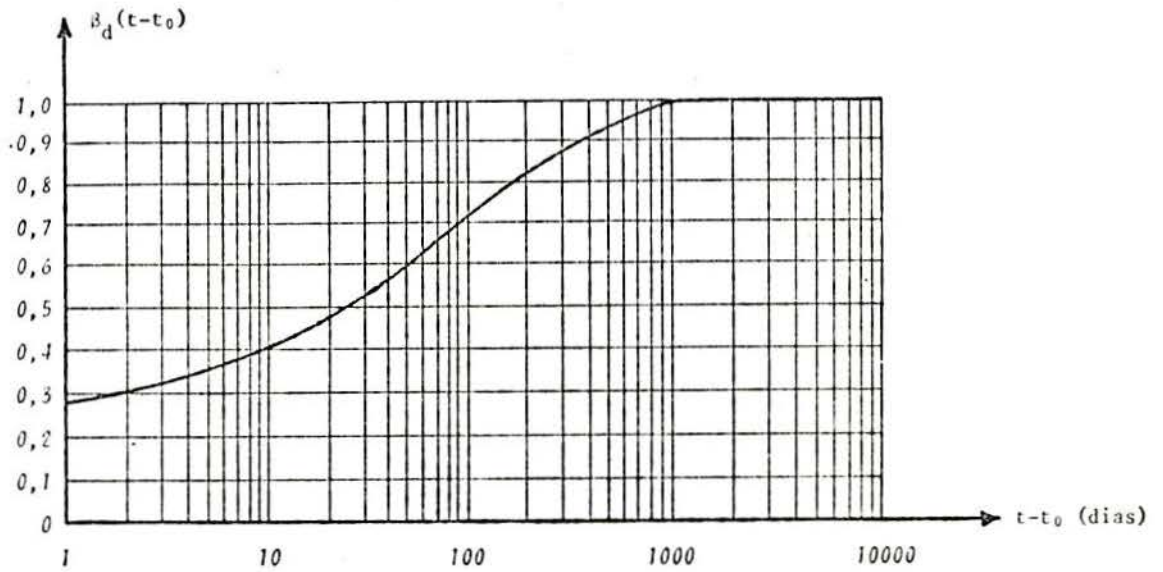


Fig. 6.4 - Desenvolvimento no tempo da deformação lenta reversível

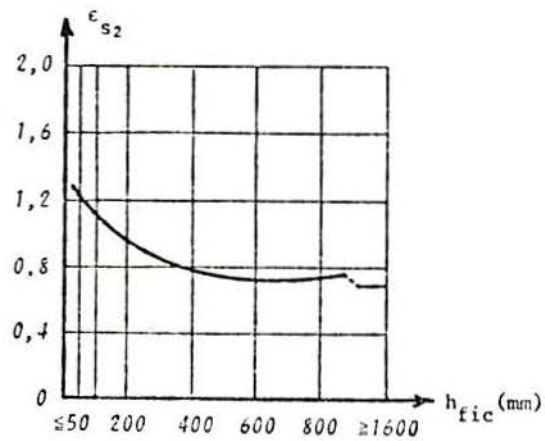


Fig. 6.5 - Influência da espessura fictícia sobre a retração

ta reversível, que tenha ocorrido até o início do período considerado. Não é, assim, necessário guardar a história de tensões.

6.2.3 - A retração

A deformação específica de retração, que se desenvolve em um intervalo de tempo $(t-t_0)$, é dada por

$$\epsilon_{CS}(t, t_0) = \epsilon_{CS_\infty} [\beta_S(t) - \beta_S(t_0)] \quad (6.14)$$

onde

$\epsilon_{CS_\infty} = \epsilon_{S_1} \cdot \epsilon_{S_2}$ - é o valor final de retração;

ϵ_{S_1} - é um coeficiente que depende da umidade relativa do ar e da consistência do concreto (Tab. 6.1);

ϵ_{S_2} - é um coeficiente que depende da espessura fictícia da peça (item 6.2.5 e Fig. 6.5);

β_S - é a função correspondente ao desenvolvimento da retração no tempo (Fig. 6.6); depende da espessura fictícia da peça (item 6.2.5);

t - é a idade do concreto no momento considerado, corrigida segundo o item 6.2.4, empregando-se $\alpha=1$ em todos os casos;

t_0 - é a idade do concreto a partir da qual a influência da retração é considerada, corrigida segundo o item 6.2.4, empregando-se $\alpha=1$ em todos os casos.

O coeficiente ϵ_{S_1} , para o caso de um concreto com consistência correspondente a abatimentos entre 5 e 9 cm, é dado por

$$\epsilon_{S_1} \cdot 10^4 = -6,16 - \frac{U}{484} + \frac{U^2}{1590} \quad (6.15)$$

sendo U a umidade relativa do ar ambiente. Os valores calculados com a Eq. (6.14) devem ser reduzidos de 25% para os concretos com abatimento entre 0 e 4 cm e aumentados de 25% para os concretos com abatimento entre 10 e 15 cm.

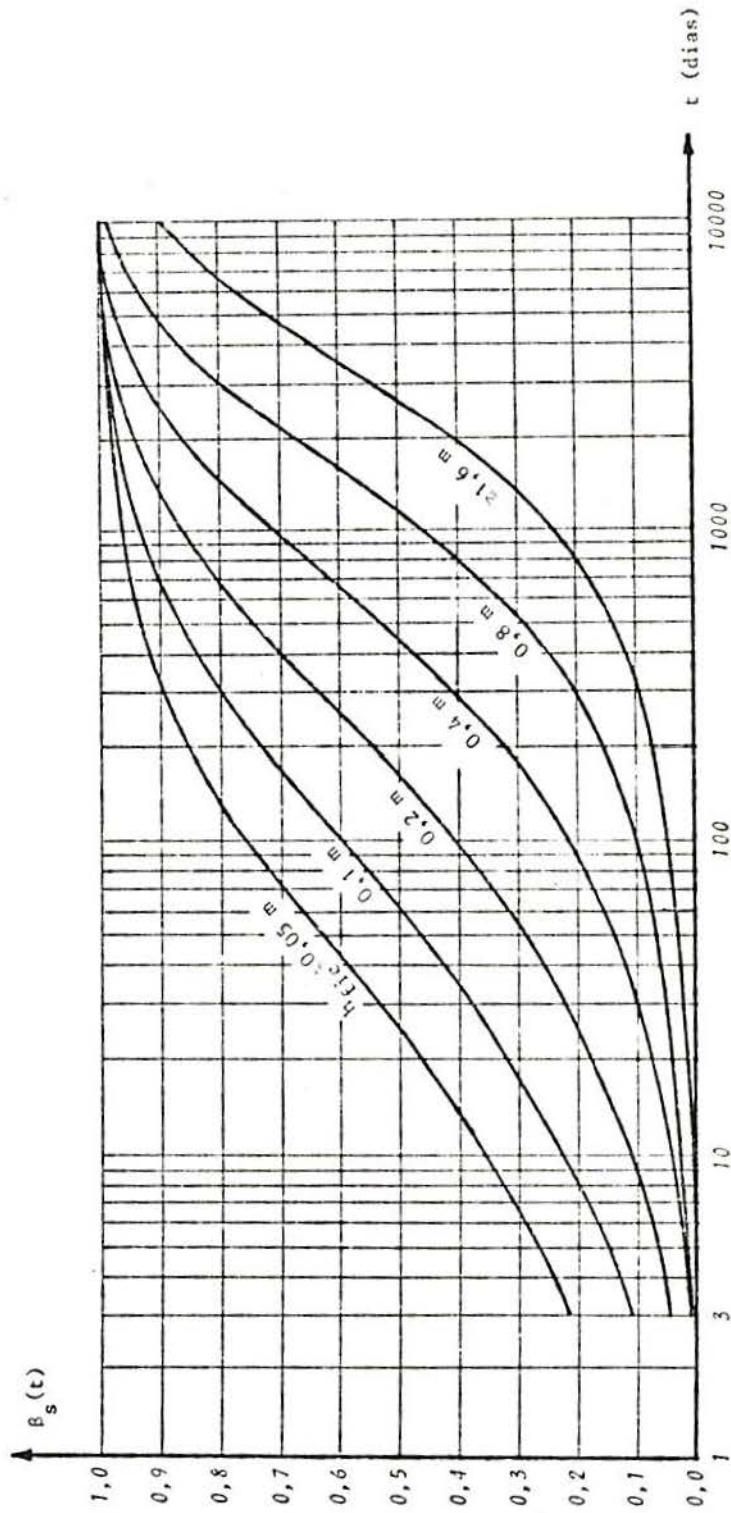


Fig. 6.6 - Desenvolvimento da retração no tempo

O coeficiente ϵ_{s_2} é dado por

$$\epsilon_{s_2} = \frac{33 + 2 h_{fic}}{20,8 + 3 h_{fic}} \quad (6.16)$$

onde h_{fic} é a espessura fictícia em centímetros (item 6.2.5).

O valor da função correspondente ao desenvolvimento da retração no tempo, $\beta_s(t)$, pode ser calculado através da expressão

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A \left(\frac{t}{100}\right)^2 + B \left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C \left(\frac{t}{100}\right)^2 + D \left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad (6.17)$$

onde:

$$A = 40$$

$$B = 116 h^3 - 282 h^2 + 220 h - 4,8$$

$$C = 2,5 h^3 - 8,8 h + 40,7 \quad (6.18)$$

$$D = -75 h^3 + 585 h^2 + 496 h - 6-8$$

$$E = 2030 h^5 - 4940 h^4 + 2880 h^3 - 14,8 h^2 + 10,7 h - 0,52$$

sendo $h=h_{fic}$ (em metros), se $0,05 \leq h_{fic} \leq 1,6$; para valores de h_{fic} fora deste intervalo, adotam-se os extremos correspondentes.

O CEB, em [43], apresenta expressões alternativas para a determinação dos valores das funções e coeficientes de fluência e retração descritos anteriormente. Estas expressões estão transcritas no anexo B deste trabalho.

6.2.4 - Idade corrigida

A idade real do concreto deve ser corrigida, para que se possa levar em conta a temperatura ambiente e o tipo de cimento. Considerando-se cada período real $\Delta t_{ef,i}$, no curso do qual a temperatura média ambiente é T_i , a idade corrigida é obtida pela relação

$$t = \alpha \sum_i \left\{ \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i} \right\} \quad (6.19)$$

onde:

α - é um coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento, dado pela Tab. 6.2;

T_i - é a temperatura média diária do ambiente, em graus centígrados;

$\Delta t_{ef,i}$ - é o número de dias em que a temperatura diária média teve o valor T_i .

6.2.5 - Espessura fictícia da peça

A espessura fictícia é definida por

$$h_{fic} = \gamma \frac{2 A_c}{u} \quad (6.20)$$

onde:

γ - é um coeficiente que depende do meio ambiente (Tab. 6.1);

A_c - é a área da seção transversal da peça;

u - é a parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

O quociente entre a área da seção transversal pelo perímetro externo da seção em contato com o ar, na Eq. (6.20), pode ser substituído, conforme a conveniência, pela relação entre o volume e a superfície exposta da peça, como sugerem Hansen e Mattock, em [61].

6.2.6 - Formulação geral

Para se considerar que a tensão no concreto varia ao longo do tempo, aplica-se o princípio da superposição de efeitos. A deformação total no concreto será

- para uma variação contínua da tensão

$$\varepsilon_{c,total}(t, t_0) = \varepsilon_n(t) + \sigma_0 \phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (6.21)$$

CIMENTO	α	
	FLUÊNCIA	RETRAÇÃO
DE ENDURECIMENTO LENTO AF 250, AF 320, POZ 250, POZ 320, MRS, ARS	1	1
DE ENDURECIMENTO NORMAL CP 250, CP 320, CP 400	2	
DE ENDURECIMENTO RÁPIDO ARI	3	

AF - ALTO FORNO

ARI - ALTA RESISTÊNCIA INICIAL

ARS - ALTA RESISTÊNCIA A SULFATOS

CP - CIMENTO PORTLAND

MRS - MODERADA RESISTÊNCIA A SULFATOS

POZ - POZOLÂNICO

Tab. 6.2 - Valores para o coeficiente α

- para variações descontínuas da tensão:

$$\varepsilon_{c, total}(t, t_0) = \varepsilon_n(t) + \sigma_0 \phi(t, t_0) + \sum_i \phi(t, t_i) \Delta\sigma(t_i) \quad (6.22)$$

onde:

$\varepsilon_n(t)$ - é a deformação independente da tensão (retração);

ϕ - é a função de fluência;

$\Delta\sigma(t_i)$ - é a variação da tensão no instante t_i ;

$d\sigma(\tau)$ - é a variação da tensão em um intervalo infinitesimal de tempo.

6.3 - O comportamento multiaxial do concreto ao longo do tempo

A fluência, sob sollicitação uniaxial, manifesta-se não apenas na direção axial, mas, também, nas direções ortogonais. Portanto, sob tensões multiaxiais, em qualquer direção, surge uma fluência devida à tensão aplicada nessa direção, e, ainda, uma outra, devida ao efeito de Poisson das deformações de fluência, nas duas direções normais. Gopalakrishnan, Neville e Ghali, em [57], determinaram que o coeficiente de Poisson de fluência para o concreto não varia sistematicamente com o tempo. Estabeleceram, também, que este coeficiente, sob compressão multiaxial, é menor que o coeficiente de Poisson elástico e seu valor encontra-se entre 0,09 e 0,17.

Neville, em [86], afirma que os resultados experimentais sugerem que, no caso multiaxial, o desenvolvimento das deformações de fluência, em cada direção, é uma função do estado de tensão total do elemento considerado. Isto implicaria na necessidade de um modelo extremamente complexo para descrever a fluência no concreto. Na falta deste modelo, adotou-se neste trabalho, uma extensão dos conceitos para a fluência uniaxial, apresentados no item anterior, para o estudo da fluência multiaxial do concreto.

Deste modo, a Eq. (6.1), válida para uma solicitação uniaxial, é generalizada, para o caso multiaxial, através da expressão

$$\{\varepsilon_{cc}(t, t_0)\} = \phi(t, t_0) [C_{c_{28}}] \{\sigma_0\} \quad (6.23)$$

onde:

$\{\varepsilon_{cc}(t, t_0)\}$ - é um vetor que contém as componentes da deformação de fluência, no instante t , sob tensão constante, aplicada no instante t_0 ;

$\phi(t, t_0)$ - é o coeficiente de fluência;

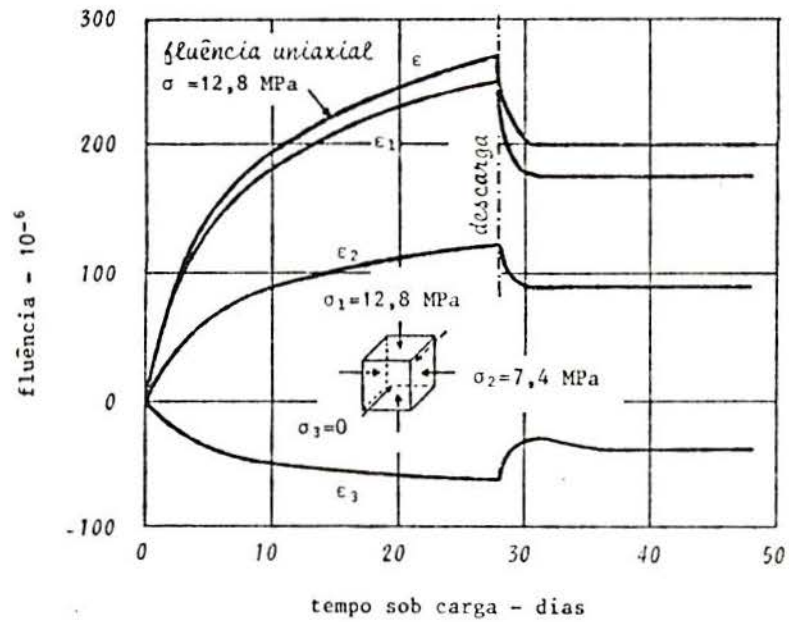
$\{\sigma_0\}$ - é um vetor que contém as componentes de tensão, aplicadas no instante t_0 ;

$[C_{c_{28}}]$ - é a inversa de uma matriz constitutiva, que, para o caso tridimensional, é dada por

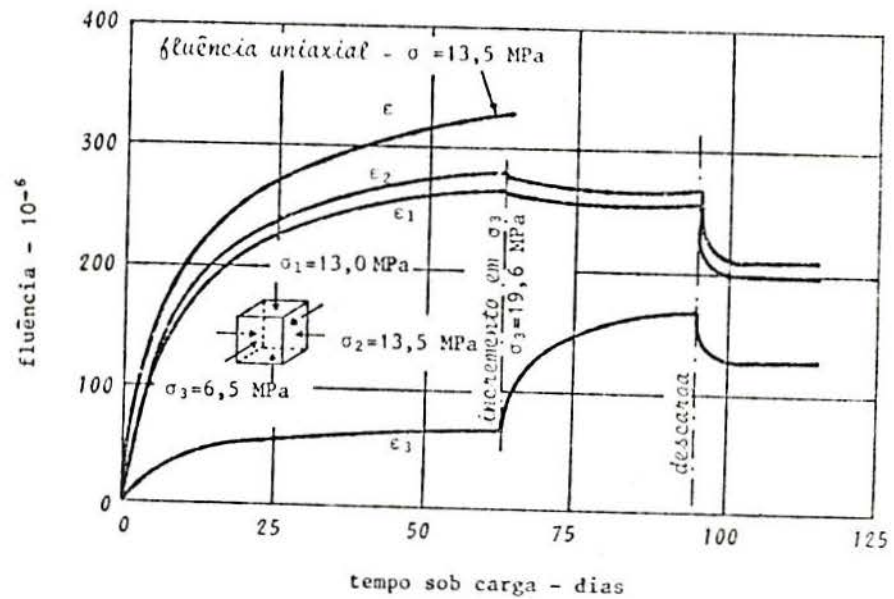
$$[C_{c_{28}}] = \frac{1}{E_{c_{28}}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{cc} & -\nu_{cc} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{cc} & 1 & -\nu_{cc} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{cc} & -\nu_{cc} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_{cc}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_{cc}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_{cc}) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

sendo $E_{c_{28}}$ o módulo de deformação longitudinal secante do concreto a 28 dias e ν_{cc} o coeficiente de Poisson de fluência para o concreto, referido anteriormente.

Para verificar a validade deste modelo, compararam-se seus resultados com os valores experimentais de Gopalakrishnan, Neville e Ghali [57]. A Fig. 6.7 mostra dois con



(a)



(b)

Fig. 6.7 - Curvas típicas fluência-tempo sob compressão multiaxial: (a) biaxial; (b) triaxial

juntos de curvas tempo-deformação de fluência, obtidos por estes investigadores, para cubos de concreto submetidos à compressão multiaxial [(a) compressão biaxial e (b) compressão triaxial]. Nestas figuras, aparecem, também, as curvas de fluência uniaxial, correspondentes a uma das tensões. A comparação é feita, na Tab. 6.3 e na Tab. 6.4, para os casos biaxial e triaxial, respectivamente. Observa-se que os valores experimentais encontram-se sempre dentro do intervalo calculado através do modelo proposto, usando coeficientes de Poisson de fluência de 0,09 e 0,17. Admite-se que adotando um coeficiente de Poisson de 0,13 (valor médio entre 0,09 e 0,17), o erro cometido será pequeno, frente às imprecisões intrínsecas da análise de peças de concreto armado.

Para levar em conta a retração, no caso multiaxial, estabelece-se que, em cada ponto, as deformações principais de retração são iguais ao valor da deformação específica de retração, calculada conforme o item 6.2.3.

Neste contexto, o acréscimo de deformação no concreto com o tempo, $\{\epsilon_0\}$, para tensão variável, determinado no caso uniaxial no item 6.2.6, passa a ser dado através da expressão

$$\begin{aligned} \{\epsilon_0\} = \{\epsilon_n(t)\} + \phi(t, t_0) [C_{C_{28}}] \{\sigma_0\} + \\ + \sum_i \phi(t, t_i) [C_{C_{28}}] \{\Delta\sigma(t_i)\} \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde:

$\{\epsilon_n(t)\}$ - é o vetor com as deformações independentes das tensões (vetor com as deformações de retração);

ϕ - é o coeficiente de fluência, calculado conforme o item 6.2.2;

$[C_{C_{28}}]$ - é a inversa de uma matriz constitutiva, definida pela Eq. (6.24);

$\{\sigma_0\}$ - é o vetor de tensão, aplicado no instante t_0 ;

$\{\Delta\sigma(t_i)\}$ - é o vetor da variação das tensões no instante t_i .

TEMPO	DIREÇÃO	UNIAXIAL		BIAXIAL				
		σ_c (MPa)	ϵ_{cc} $\cdot 10^6$	σ_c (MPa)	$\epsilon_{cc} \cdot 10^6$			
					EXPERI MENTAL	MODELO (ν_{cc})		
						0,09	0,13	0,17
10 DIAS	1	-12,8	-196	-12,8	-183	-186	-181	-177
	2	0	-	-7,4	-90	-96	-88	-80
	3	0	-	0	+48	+28	+40	+53
20 DIAS	1	-12,8	-245	-12,8	-228	-232	-227	-221
	2	0	-	-7,4	-112	-120	-110	-100
	3	0	-	0	+59	+35	+50	+60

Tab. 6.3 - Comparação do modelo proposto com resultados experimentais de compressão biaxial [57]

TEMPO	DIREÇÃO	UNIAXIAL		TRIAXIAL					
		σ_c (MPa)	ϵ_{cc} $\cdot 10^6$	σ_c (MPa)	$\epsilon_{cc} \cdot 10^6$				
					EXPERI MENTAL	MODELO (ν_{cc})			
						0,09	0,13	0,17	
25 DIAS	1	0	-	-13,0	-225	-225	-209	-193	
	2	-13,5	-271	-13,5	-234	-236	-220	-204	
	3	0	-	-6,5	-53	-83	-61	-40	
50 DIAS	1	0	-	-13,0	-259	-261	-243	-224	
	2	-13,5	-315	-13,5	-273	-274	-256	-238	
	3	0	-	-6,5	-66	-96	-71	-47	

Tab. 6.4 - Comparação do modelo proposto com resultados experimentais de compressão triaxial [57]

6.4 - A determinação das deformações devidas à fluência e à retração em peças de concreto armado

Quando ocorrem fluência e retração em peças armadas de concreto, a armadura, devido à aderência, também sofre estas deformações e fica, por isso, submetida a tensões adicionais. Pelas condições de equilíbrio, há uma redistribuição interna de esforços e, em geral, as tensões no concreto diminuem e no aço aumentam.

Para considerar esta variação das tensões é empregado o princípio da superposição de efeitos, conforme a Eq. (6.25). Deste modo, o período t_0 até t , referente ao tempo de atuação do carregamento, é dividido em vários intervalos (t_0, t_1, t_2, \dots, t), ao longo dos quais as tensões são consideradas constantes. O efeito das tensões iniciais, $\{\sigma_0\}$, para a avaliação das deformações, é considerado no intervalo t_0 até t ; o efeito do acréscimo de tensão $\{\Delta\sigma(t_1)\}$ é considerado no intervalo de tempo t_1 até t , e assim, sucessivamente.

Por ser a variação das deformações mais acentuada no período que se segue à aplicação da carga, Galgoul, em [53], determinou que uma subdivisão logarítmica para o intervalo seria mais adequada. Estabeleceu, ainda, que cinco intervalos de tempo conduzem a uma solução com a aproximação necessária.

Ao introduzir as deformações devidas à fluência e à retração são necessárias algumas alterações no algoritmo de solução. O equilíbrio global do sistema passa a ser dado por

$$\{P\} + \{P_0\} = [K] \{U\} \quad (6.26)$$

onde $\{P_0\}$ é um vetor de cargas nodais fictícias, obtido das deformações de fluência e de retração do concreto.

Chamando de $\{\epsilon_0\}$ o vetor contendo as deformações de fluência e retração para um ponto genérico no concreto, o vetor de cargas nodais fictícias para um elemento, $\{p_0\}$, é dado por

$$\{p_0\} = \int_V [B]^t [D_c] \{\epsilon_0\} dV \quad (6.27)$$

sendo $[B]$ a matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento e $[D_c]$ a matriz constitutiva do concreto. O vetor $\{P_0\}$ resulta do somatório das contribuições dos diversos elementos.

As deformações de fluência e de retração não produzem diretamente tensões no concreto. Por isso, para avaliação da rigidez devida ao concreto, desconta-se do valor da deformação total, obtida a partir do vetor de deslocamentos, $\{U\}$, a parcela de deformação, que foi originada diretamente pela fluência e retração. Para o aço, emprega-se a deformação total.

7 - O PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA O ESTUDO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

7.1 - Introdução

Neste capítulo, será feita uma descrição sucinta dos fundamentos do programa computacional, desenvolvido no presente trabalho, para o estudo de estruturas de concreto armado. O programa é baseado no método dos elementos finitos, usando um modelo compatível (método dos deslocamentos). Assim, a análise efetuada por este programa, pode ser subdividida em etapas, conforme está apresentado no fluxograma da Fig. 7.1.

Por se tratar de uma análise não-linear, isto é, a rigidez da estrutura é função de seu estado de deformação, é preciso utilizar algoritmos especiais, que envolvem a solução de sucessivos problemas lineares. Estes algoritmos serão discutidos no item 7.2.

A apresentação, neste capítulo, limitar-se-á à etapa de determinação das matrizes de rigidez dos elementos. As demais fases em nada diferem daquelas dos programas computacionais tradicionais, para a análise de estruturas, através do método dos deslocamentos.

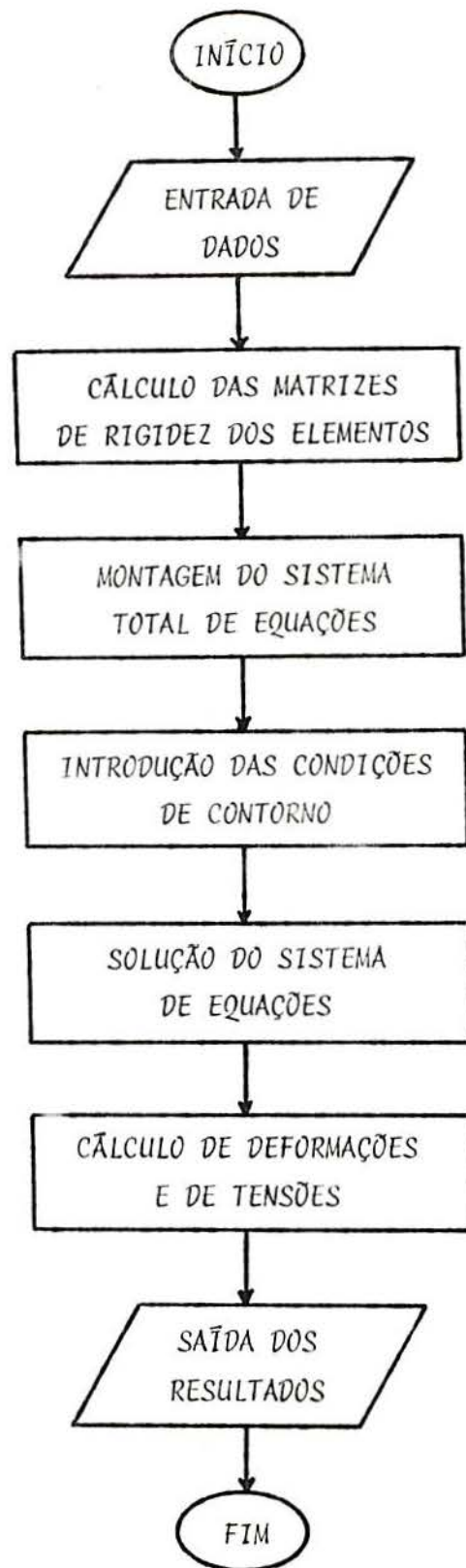


Fig. 7.1 - Fluxograma de um programa computacional para a análise de estruturas pelo método dos deslocamentos

7.2 - Os algoritmos para a solução do problema

A obtenção dos deslocamentos de uma estrutura, correspondentes a um dado carregamento, via método dos deslocamentos, envolve a solução de um sistema de equações do tipo

$$\{P\} = [K] \{U\} \quad (7.1)$$

onde, $\{P\}$ é o vetor de cargas nodais; $[K]$ é a matriz de rigidez total da estrutura e $\{U\}$ é o vetor de deslocamentos nodais incógnitos. Tem-se um problema não-linear, por ser a matriz de rigidez dependente dos deslocamentos. Existem diversos métodos para a resolução deste sistema não-linear de equações, embora, basicamente, a maioria destas técnicas numéricas possa ser dividida em dois grupos: a dos métodos incrementais e a dos métodos iterativos. Os métodos incrementais não satisfazem necessariamente as condições de equilíbrio, enquanto os métodos iterativos verificam o equilíbrio a cada estágio de carga. A fim de facilitar o entendimento dos algoritmos, descreve-se, a seguir, a solução empregando a rigidez tangente e a rigidez secante, ainda que o programa desenvolvido utilize apenas esta última.

7.2.1 - Solução via método incremental

Usando a rigidez tangente, o algoritmo incremental obedece o seguinte procedimento:

- a partir do estado de deslocamento inicial, $\{U_0\}$, determina-se a matriz de rigidez inicial tangente, $[K_0^T]$;
- obtém-se o incremento de deslocamentos, $\{\Delta U_1\}$, correspondente ao incremento de carga, $\{\Delta P\}$, através da expressão

$$\{\Delta U_1\} = [K_0^T]^{-1} \{\Delta P\} \quad (7.2)$$

- calculam-se os novos deslocamentos por

$$\{U_1\} = \{U_0\} + \{\Delta U_1\} \quad (7.3)$$

- com o novo estado de deslocamento, $\{U_1\}$, determina-se uma nova matriz de rigidez, $[K_1^T]$, e repete-se o procedimento dos passos anteriores;
- em uma etapa genérica i , têm-se os seguintes passos

$$\{\Delta U_i\} = [K_{i-1}^T]^{-1} \{\Delta P\} \quad (7.4)$$

$$\{U_i\} = \{U_{i-1}\} + \{\Delta U_i\} \quad (7.5)$$

Na Fig. 7.2, o método incremental é apresentado esquematicamente. Diminuindo-se o incremento de carga, $\{\Delta P\}$, tende-se à solução exata. Utilizando-se a rigidez secante em vez da tangente, têm-se, para uma etapa genérica i , que

$$\{P_i\} = \{P_{i-1}\} + \{\Delta P\} \quad (7.6)$$

$$\{U_i\} = [K_{i-1}^S]^{-1} \{P_i\} \quad (7.7)$$

7.2.2 - Solução via método iterativo

Usando o método de Newton-Raphson e empregando a rigidez tangente, tem-se, para o algoritmo iterativo, o seguinte procedimento:

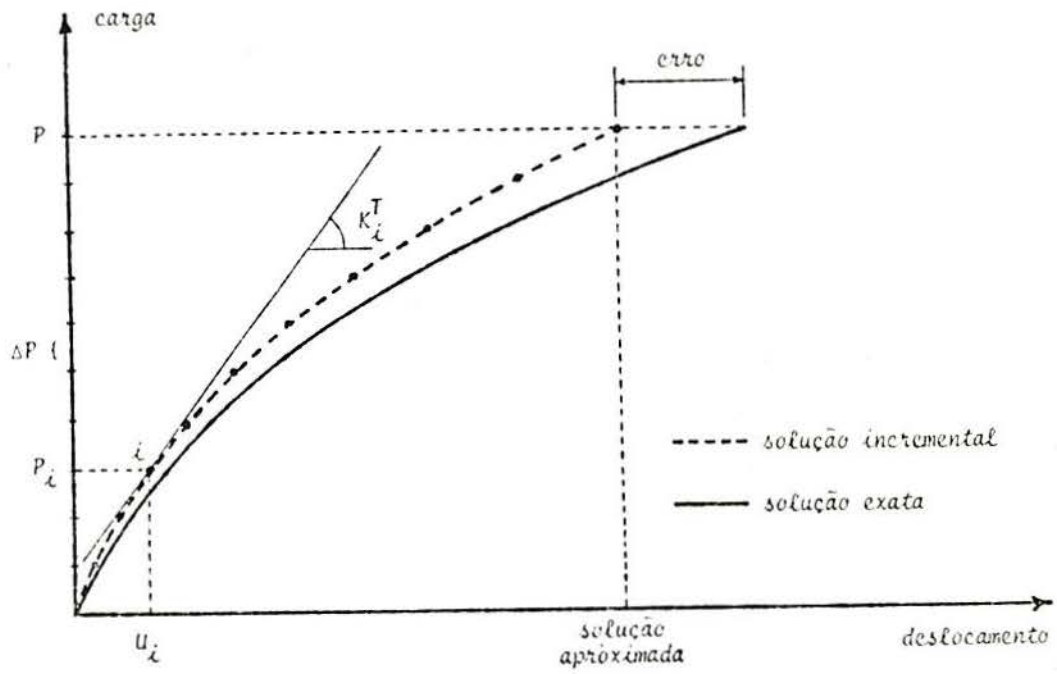
- calcula-se a matriz de rigidez inicial tangente, $[K_0^T]$, em função do estado de deslocamento inicial, $\{U_0\}$;
- estabelece-se que o vetor inicial de forças não equilibradas, $\{\Delta F_0\}$, é o próprio vetor de cargas, $\{P\}$, e obtém-se o incremento de deslocamentos correspondente, $\{\Delta U_1\}$, através da expressão

$$\{\Delta U_1\} = [K_0^T]^{-1} \{\Delta F_0\} \quad (7.8)$$

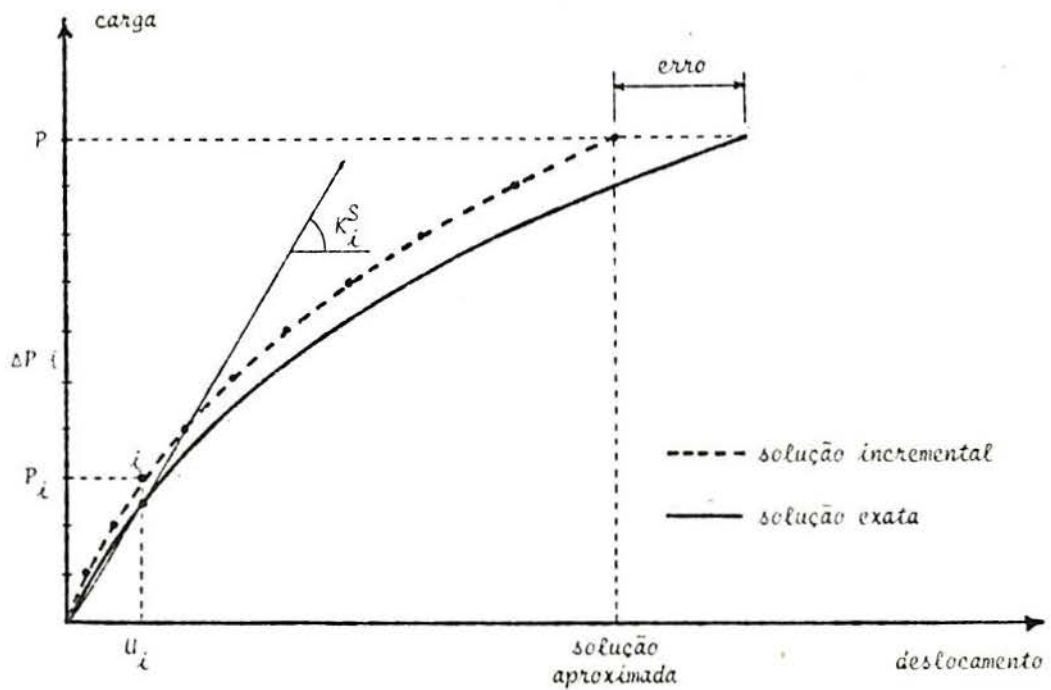
- determinam-se os novos deslocamentos por

$$\{U_1\} = \{U_0\} + \{\Delta U_1\} \quad (7.9)$$

- com o novo estado de deslocamento, $\{U_1\}$, determinam-se uma nova matriz de rigidez $[K_1^T]$ e o vetor de forças nodais equilibradas $\{F_1^{eq}\}$;



(a)



(b)

Fig. 7.2 - Representação esquemática do método incremental
 (a) rigidez tangente
 (b) rigidez secante

- calcula-se o novo vetor de forças não equilibradas, $\{\Delta F_1\}$, em função do vetor de forças nodais equilibradas

$$\{\Delta F_1\} = \{P\} - \{F_1^{eq}\} \quad (7.10)$$

- repete-se o procedimento dos passos anteriores até a convergência;
- em uma etapa genérica i , têm-se os seguintes passos

$$\{\Delta U_i\} = [K_{i-1}^T]^{-1} \{\Delta F_{i-1}\} \quad (7.11)$$

$$\{U_i\} = \{U_{i-1}\} + \{\Delta U_i\} \quad (7.12)$$

$$\{\Delta F_i\} = \{P\} - \{F_i^{eq}\} \quad (7.13)$$

Este algoritmo iterativo é apresentado esquematicamente na Fig. 7.3. Usando-se a rigidez secante, em lugar da tangente, tem-se, para uma etapa genérica i , que

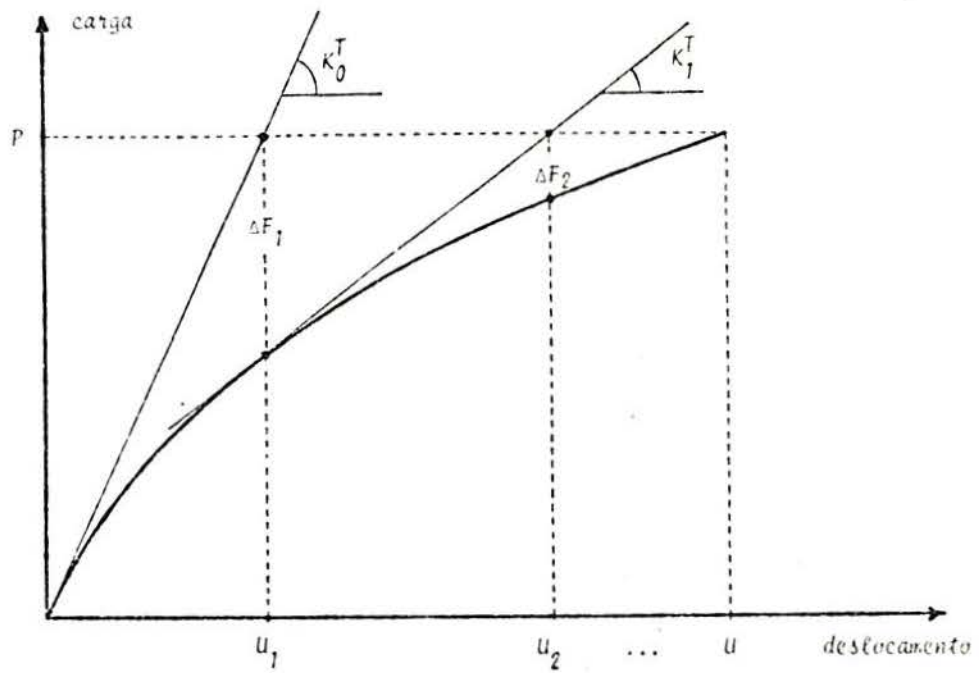
$$\{U_i\} = [K_{i-1}^S]^{-1} \{P\} \quad (7.14)$$

onde a matriz de rigidez secante, $[K_{i-1}^S]$, é calculada em função dos deslocamentos da etapa anterior, $\{U_{i-1}\}$.

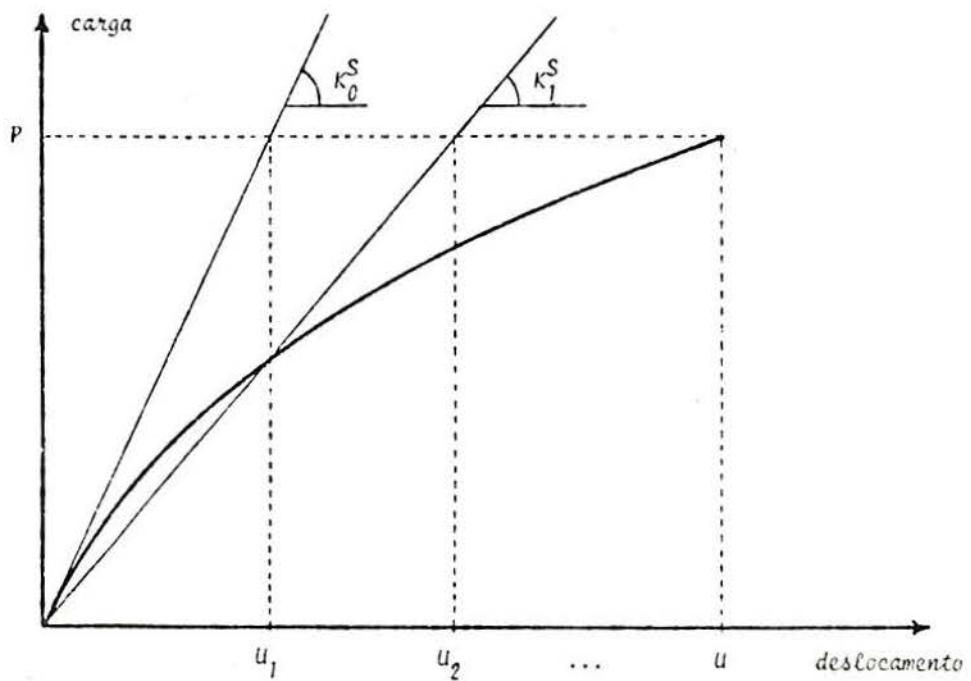
7.3 - Cálculo das matrizes de rigidez dos elementos de concreto armado

7.3.1 - Fundamentos

Neste trabalho, considera-se a existência de deslocamentos finitos. Assim, a determinação da matriz de rigidez envolve a utilização de relações de deformações-deslocamentos não-lineares. As relações de deformações-deslocamentos empregadas, calculadas para a configuração indeformada (referencial Lagrangiano), são dadas, conforme Fung [50], por



(a)



(b)

Fig. 7.3 - Representação esquemática do método iterativo
 (a) rigidez tangente
 (b) rigidez secante

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{7.15}$$

No processo de obtenção da matriz de rigidez, estas relações deformações-deslocamentos são "linearizadas", com a introdução dos valores dos deslocamentos correntes, da forma exposta nos itens seguintes.

A matriz de rigidez de um elemento de concreto armado é obtida pela adição de duas matrizes de rigidez de mesma dimensão, uma correspondente à armadura e outra correspondente ao concreto. Estas matrizes de rigidez são determinadas, em cada etapa, em função do estado de deformação, que o elemento apresenta.

7.3.2 - A matriz de rigidez para a armadura

A entrada de dados do programa, por simplificação, é feita separadamente para os elementos de concreto e para as barras de armadura. Dentro do programa, as barras de armadura são divididas segundo a malha de elementos de concreto. Assim, em uma etapa inicial, determinam-se os segmentos das barras contidos dentro de cada elemento de concreto.

A obtenção da matriz de rigidez para a armadura segue, então, o processo proposto por Zienkiewicz, Phillips e Owen [117] e desenvolvido por Souza [106]. Admite-se que a armadura resista apenas a esforços axiais e que

os deslocamentos de qualquer ponto da barra são iguais aos do elemento de concreto na mesma posição. Deste modo, a barra de armadura pode ser arbitrariamente colocada dentro do elemento de concreto, sem introduzirem-se incógnitas adicionais ao problema.

Seja um elemento finito de concreto armado com n nós, contendo elementos unidimensionais de armadura com m nós cada um, referido a um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z e a um sistema normalizado ξ, η, ζ (Figs. 7.4 e 7.5). As coordenadas cartesianas de um ponto, no interior deste elemento, podem ser obtidas através das expressões

$$\begin{aligned} x &= N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y &= N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z &= N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde N_i é a função de forma correspondente ao nó i do elemento, de coordenadas cartesianas x_i, y_i, z_i .

Na forma matricial, as Eqs. (7.16) resultam

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

onde $[N]$ é uma matriz que contém as funções de forma.

De modo análogo, os deslocamentos, em um ponto deste elemento, são obtidos a partir dos deslocamentos nodais u_i, v_i, w_i , por

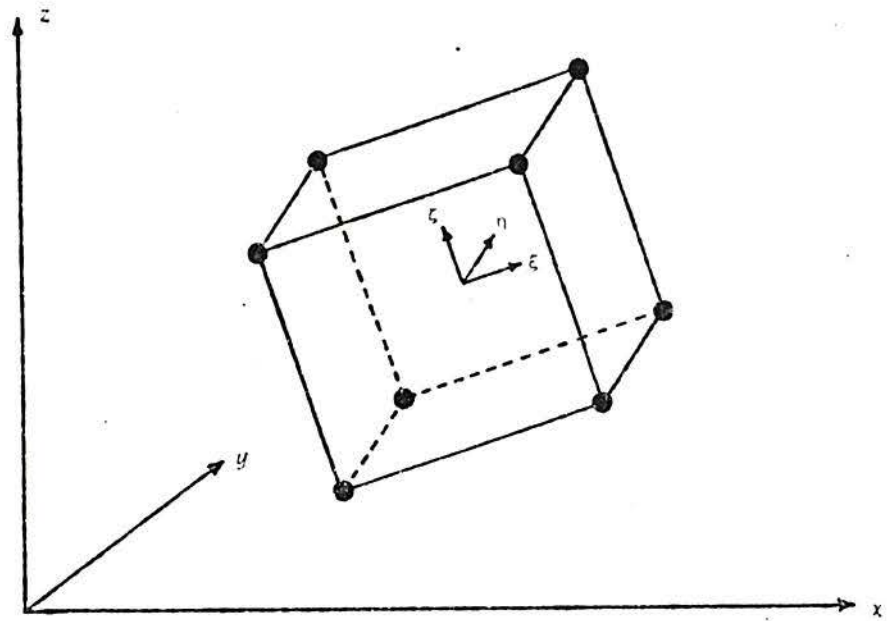


Fig. 7.4 - Elemento de concreto referido a um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z e a um sistema normalizado ξ, η, ζ

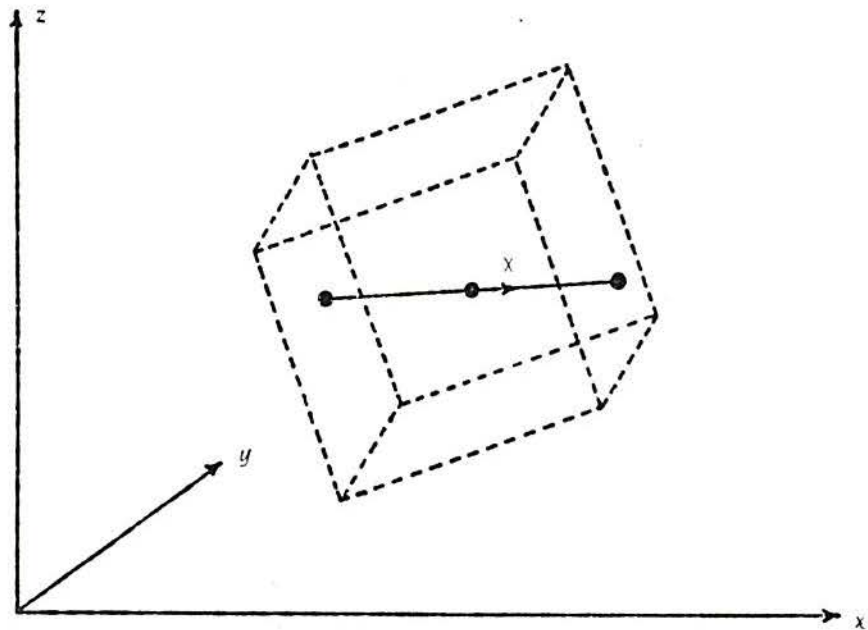


Fig. 7.5 - Elemento unidimensional de armadura contido em um elemento de concreto e referido a um sistema normalizado de coordenada χ

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

As coordenadas cartesianas de um ponto, sobre um segmento de armadura, dentro deste elemento de concreto, podem ser expressas em função da coordenada normalizada χ do elemento unidimensional, por

$$\begin{aligned} x &= H_j(\chi) \bar{x}_j \\ y &= H_j(\chi) \bar{y}_j \\ z &= H_j(\chi) \bar{z}_j \end{aligned} \quad (7.19)$$

onde H_j é a função de forma correspondente ao nó j do elemento unidimensional, de coordenadas cartesianas $\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j$.

Matricialmente, as Eqs. (7.19) podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \bar{x}_j \\ \bar{y}_j \\ \bar{z}_j \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

onde $[H]$ é uma matriz que contém as funções de forma H_j .

Define-se um sistema de eixos cartesianos ortogonais 1,2,3, tal que a direção 1 seja coincidente com o eixo da barra na posição indeformada. As componentes de deslocamento, para um ponto arbitrário do elemento de armadura, segundo este sistema, são dadas por

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1,x) & \cos(1,y) & \cos(1,z) \\ \cos(2,x) & \cos(2,y) & \cos(2,z) \\ \cos(3,x) & \cos(3,y) & \cos(3,z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

onde u, v, w são os deslocamentos no ponto considerado, nas direções dos eixos cartesianos x, y, z ; a matriz de rotação é composta pelos cossenos diretores do sistema 1,2,3 em relação ao sistema x, y, z .

Substituindo a Eq.(7.18) na Eq.(7.21), resulta

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1,x) & \cos(1,y) & \cos(1,z) \\ \cos(2,x) & \cos(2,y) & \cos(2,z) \\ \cos(3,x) & \cos(3,y) & \cos(3,z) \end{bmatrix} [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

A deformação, em um ponto da barra de armadura, conforme as Eqs.(7.15), é obtida por

$$\varepsilon = \frac{dq_1}{ds} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dq_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dq_2}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dq_3}{ds} \right)^2 \right] \quad (7.23)$$

onde s é a coordenada curvilínea, que descreve o eixo da barra.

Aplicando a regra da derivação em cadeia, tem-se que

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{dq_i}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} = \frac{2}{\ell} \frac{dq_i}{d\chi} \quad (7.24)$$

onde ℓ é o comprimento do segmento de barra de aço, dentro do elemento de concreto.

Assim, a Eq. (7.23) pode ser escrita como

$$\epsilon = \frac{2}{\ell} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dq_1}{ds}\right) \frac{d}{d\chi} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_2}{ds} \frac{d}{d\chi} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_3}{ds} \frac{d}{d\chi} \right\} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

A Eq. (7.25) é "linearizada", calculando-se as derivadas dq_1/ds , dq_2/ds , dq_3/ds em função dos valores correntes dos deslocamentos. Substituindo-se a Eq. (7.22) na Eq. (7.25), resulta uma expressão do tipo

$$\epsilon = \{B_s\}^t \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (7.26)$$

sendo $\{B_s\}$ um vetor que relaciona a deformação axial do elemento de barra com os deslocamentos nodais do elemento de concreto. A obtenção do vetor $\{B_s\}$, específica para cada problema, será apresentada nos próximos capítulos.

Desta forma, a matriz de rigidez correspondente a este segmento de armadura, pode ser expressa por

$$[k_s] = \frac{E_s A_s \ell}{2} \int_{\ell} \{B_s\}^t \{B_s\} d\chi \quad (7.27)$$

onde E_s é o módulo de deformação longitudinal do aço e A_s é a área da seção transversal da barra, considerada constante. A integração da Eq. (7.27) é feita numericamente.

A matriz de rigidez, correspondente à armadura, de um determinado elemento de concreto, será o somatório das matrizes dos diversos segmentos de barra, que tal elemento contenha.

7.3.3 - A matriz de rigidez para o concreto

7.3.3.1 - O concreto não fissurado

Os deslocamentos, em um ponto no interior do elemento de concreto, podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais u_i, v_i, w_i , conforme aparece na Eq. (7.18). As relações deformações-deslocamentos, dadas pelas Eqs. (7.15), colocadas em forma matricial, são

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & (1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & (1 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial z} \\ (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial y} & (1 + \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & (1 + \frac{\partial w}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & (1 + \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial z} & (1 + \frac{\partial w}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

A Eq. (7.28) é "linearizada", calculando-se os valores das derivadas $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y, \partial v/\partial z, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial w/\partial z$ em função dos deslocamentos correntes. Combinando a Eq. (7.18) e a Eq. (7.28), resulta

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (7.29)$$

onde $[B]$ é uma matriz que contém as derivadas das funções de forma.

A matriz de rigidez do elemento é determinada através da expressão

$$[k_c] = \int_V [B]^t [D^c] [B] dx dy dz \quad (7.30)$$

onde $[D^c]$ é a matriz constitutiva para o concreto, calculada usando-se, por exemplo, o módulo de deformação longitudinal e o coeficiente de Poisson do concreto, correspondente ao estado de deformação do ponto considerado (determinados conforme o capítulo 4).

Na prática, a integral da Eq. (7.30) é calculada usando-se as coordenadas normalizadas. Na matriz $[B]$, as derivadas das funções de forma, originalmente em relação a x, y, z , são determinadas em função de ξ, η, ζ . A matriz, que define a transformação entre os dois sistemas, é chamada de jacobiano ($[J]$). Deste modo, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

onde, o jacobiano $[J]$ é dado por

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

Assim, a Eq. (7.30) torna-se

$$[k_c] = \int_V [B]^t [D^C] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (7.33)$$

onde $|J|$ é o determinante do jacobiano. A integração da Eq. (7.33) é feita numericamente.

7.3.3.2 - O concreto fissurado

Se o ponto considerado estiver fissurado, segundo o critério apresentado no capítulo 4, a determinação da matriz constitutiva para o concreto, $[D^C]$, da Eq. (7.30), é feita conforme o capítulo 5. De resto, o cálculo da matriz de rigidez é idêntico ao do concreto não fissurado.

Na obtenção da matriz constitutiva para o concreto fissurado, deve-se abordar alguns tópicos mais significativos:

- o cálculo da matriz de rotação para a direção da fissura;
- a inclusão do efeito de pino da armadura, que atravessa a fissura;
- a determinação da matriz constitutiva equivalente para a armadura.

As matrizes, apresentadas no capítulo 5, devem ser calculadas na direção da fissura. No processo computacional, as componentes de tensão e deformação para um ponto no interior de uma peça de concreto são expressas em função do sistema de coordenadas x, y, z . Torna-se, portanto, necessária a rotação para a direção da fissura. Usando o índice L (local) para os valores referentes à direção da fissura e G (global) para os valores referentes ao sistema x, y, z , têm-se

$$\begin{aligned} \{\sigma^{C,L}\} &= [r_\sigma] \{\sigma^{C,G}\} \\ \{\varepsilon^{C,L}\} &= [r_\varepsilon] \{\varepsilon^{C,G}\} \end{aligned} \quad (7.34)$$

onde $[r_\sigma]$ e $[r_\varepsilon]$ são matrizes de rotação do sistema global para o sistema local para as componentes de tensão e deforma-

ção, respectivamente. Estas matrizes são tais que

$$[r_{\sigma}]^{-1} = [r_{\epsilon}]^t \quad (7.35)$$

Sabendo-se que

$$\{\sigma^{c,L}\} = [D^{c,L}] \{\epsilon^{c,L}\} \quad (7.36)$$

e utilizando as Eqs. (7.34) e (7.35), resulta

$$\{\sigma^{c,G}\} = [D^{c,G}] \{\epsilon^{c,G}\} \quad (7.37)$$

sendo

$$[D^{c,G}] = [r_{\epsilon}]^t [D^{c,L}] [r_{\epsilon}] \quad (7.38)$$

Com este conjunto de expressões, é possível de terminar, a partir das componentes de tensão e deformação, referidas ao sistema x,y,z , as componentes de tensão e deformação para a direção da fissura. Com estas últimas, pode-se calcular a matriz constitutiva na direção da fissura, conforme o capítulo 5, e com a Eq. (7.38) voltar ao sistema original.

Chamando de $1,2,3$, as direções do sistema de coordenadas para a fissura (1 é a direção normal à fissura e 2,3 definem o plano de fissura), definem-se os cossenos diretores do sistema global em relação ao sistema local

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(x,1) & m_1 &= \cos(y,1) & n_1 &= \cos(z,1) \\ l_2 &= \cos(x,2) & m_2 &= \cos(y,2) & n_2 &= \cos(z,2) \\ l_3 &= \cos(x,3) & m_3 &= \cos(y,3) & n_3 &= \cos(z,3) \end{aligned} \quad (7.39)$$

Observe-se que a direção 1 é a mesma da tensão principal máxima, no ponto de concreto considerado, no instante anterior ao surgimento da fissura.

Conforme [85], as matrizes de rotação podem ser calculadas por

$$[r_{\sigma}] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

e

$$[r_{\epsilon}] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & \frac{1}{2} [a_{12}] \\ 2 [a_{21}] & [a_{22}] \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

sendo

$$[a_{11}] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

$$[a_{12}] = \begin{bmatrix} 2 l_1 m_1 & 2 n_1 l_1 & 2 m_1 n_1 \\ 2 l_2 m_2 & 2 n_2 l_2 & 2 m_2 n_2 \\ 2 l_3 m_3 & 2 n_3 l_3 & 2 m_3 n_3 \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

$$[a_{21}] = \begin{bmatrix} l_1 l_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 \\ l_3 l_1 & m_3 m_1 & n_3 n_1 \\ l_2 l_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

$$[a_{22}] = \begin{bmatrix} l_1 m_2 + l_2 m_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ l_3 m_1 + l_1 m_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 \\ l_2 m_3 + l_3 m_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

Para o caso bidimensional, sendo θ o ângulo de rotação do sistema global para o local ($l_1 = \cos\theta$; $l_2 = -\sin\theta$; $m_1 = \sin\theta$; $m_2 = \cos\theta$), as Eqs. (7.40) e (7.41) ficam reduzidas para

$$[r_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{\sin 2\theta}{2} & \frac{\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

e

$$[r_{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

Para que o efeito da flexão da barra de armadura que atravessa a fissura (dowell effect), seja incluído no modelo, o esforço transmitido por este mecanismo é distribuído sobre o concreto, conforme foi dito no item 5.4.2.2. Isto é feito através da expressão

$$f_t^d = \sum_i (F_d^i \cdot \ell^i) / V \quad (7.48)$$

onde:

F_d^i - é o esforço transmitido através da fissura por este mecanismo, pela barra i do elemento, calculado conforme a Eq. (5.44);

onde ρ é a taxa de armadura e \bar{E}_s é o módulo de deformação médio do aço, ao longo deste segmento de barra. Este produto é calculado por

$$(\rho \bar{E}_s)_i = \frac{A_s \ell}{2V} \int_{\ell} E_s d\chi \quad (7.51)$$

onde A_s é a área da seção transversal da barra; ℓ é o comprimento do segmento de barra; V é o volume do elemento de concreto; E_s é o módulo de deformação do aço, no ponto considerado da barra e χ é a variável adimensional, que descreve o segmento de barra.

A matriz $[D^S]$ é determinada pelo somatório das matrizes dos segmentos de armadura contidos no elemento. Assim,

$$[D^S] = \sum_i [r_\epsilon^i]^t [D_i^S] [r_\epsilon^i] \quad (7.52)$$

sendo $[r_\epsilon^i]$ a matriz de rotação de deformações, do sistema de coordenadas x, y, z para a direção da barra i , calculada de forma análoga à da Eq. (7.41).

Do processo mostrado no capítulo 5, resulta uma matriz constitutiva para o concreto armado fissurado, $[D]$ [Eq. (5.65)]. A matriz constitutiva para o concreto fissurado fica

$$[D^C] = [D] - [D^S] \quad (7.53)$$

8 - A FORMULAÇÃO PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO

8.1 - Fundamentos

O estado plano de tensão fica caracterizado pela existência de um estado de tensão, tal que

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f_1(x,y) \\ \sigma_y &= f_2(x,y) \\ \tau_{xy} &= f_3(x,y) \\ \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{8.1}$$

O campo de deslocamentos é dado unicamente pelos deslocamentos u e v , nas direções dos eixos coordenados ortogonais x e y .

A Fig. 8.1 apresenta um elemento finito retangular para este problema, referido ao sistema de coordenadas cartesianas x,y e a um sistema normalizado ξ,η . As coordenadas cartesianas x,y de um ponto do elemento são obtidas a partir de suas coordenadas normalizadas ξ,η através das expressões

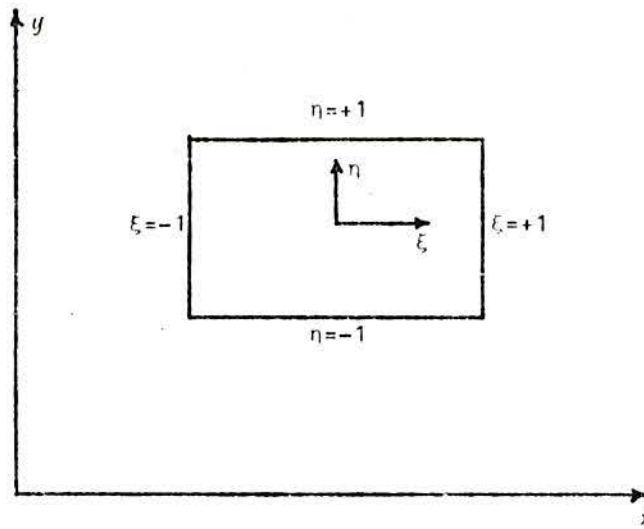


Fig. 8.1 - Um elemento retangular para estado plano de tens~ao

$$x = N_i x_i \quad (8.2)$$

$$y = N_i y_i$$

onde N_i é a função de forma correspondente ao nó i do elemento, de coordenadas cartesianas x_i, y_i .

De forma matricial, pode-se escrever as Eqs. (8.2) como

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (8.3)$$

onde $[N]$ é uma matriz que contém as funções de forma.

Analogamente, obtêm-se os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento, a partir dos deslocamentos nodais u_i, v_i . Assim,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

Usando as relações deformações-deslocamentos e a Eq. (8.4), determinam-se as deformações em qualquer ponto do

elemento

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

onde $[B]$ é uma matriz calculada conforme exposto no capítulo 7.

A matriz de rigidez do elemento é obtida através da expressão

$$[k] = h \int [B]^t [D] [B] dx dy \quad (8.6)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva, que, para o estado plano de tensão, é dada por

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

e h é a espessura do elemento.

A integral da Eq.(8.6) é calculada, usando-se as coordenadas normalizadas. Na matriz $[B]$, as derivadas das funções de forma, originalmente em relação a x, y , são determinadas em função de ξ, η . A matriz, que define a transformação entre os dois sistemas, é chamada de jacobiano. Assim,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

onde o jacobiano $[J]$ é dado por

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Então, a Eq. (8.6) fica

$$[k] = h \int [B]^t [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (8.10)$$

onde $|J|$ é o determinante do jacobiano. A integração da Eq. (8.10) é feita numericamente.

8.2 - Os elementos para o concreto

Para modelar o concreto são utilizados elementos quadrangulares e triangulares. Os elementos quadrangulares são da família "Serendipity". Emprega-se um elemento linear e outro quadrático (Fig. 8.2).

As funções de forma para o elemento linear, segundo [115], são obtidas a partir da expressão

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) \quad (8.11)$$

onde $\xi_0 = \xi \xi_i$ e $\eta_0 = \eta \eta_i$.

Para o elemento quadrático, aplica-se o seguinte conjunto de expressões

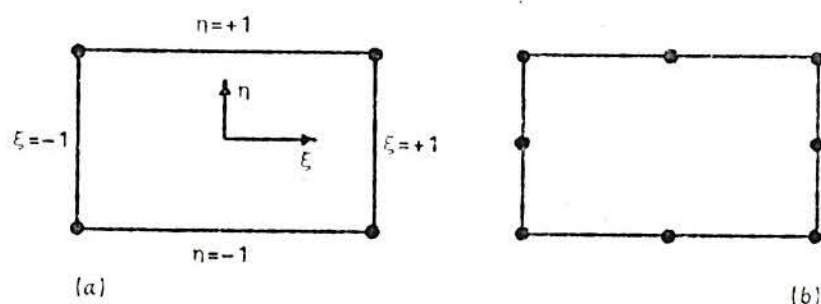


Fig. 8.2 - Elementos quadrangulares
 (a) linear
 (b) quadrático

- para os nós de canto

$$N_i = \frac{1}{4} (1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) \quad (8.12)$$

- para os nós de meio de lado

$$\begin{aligned} \xi_i = 0, \quad N_i &= \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta_0) \\ \eta_i = 0, \quad N_i &= \frac{1}{2} (1+\xi_0)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Nos elementos triangulares, usa-se, também, um elemento linear e outro quadrático (Fig. 8.3). Para um triângulo é conveniente estabelecer um conjunto especial de coordenadas normalizadas, para escrever as funções de forma [115]. Assim, um conjunto de coordenadas normalizadas L_1, L_2, L_3 é definido como

$$L_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y) / (2\Delta)$$

$$L_2 = (a_2 + b_2 x + c_2 y) / (2\Delta) \quad (8.14)$$

$$L_3 = (a_3 + b_3 x + c_3 y) / (2\Delta)$$

sendo Δ a área do triângulo, que pode ser calculada por

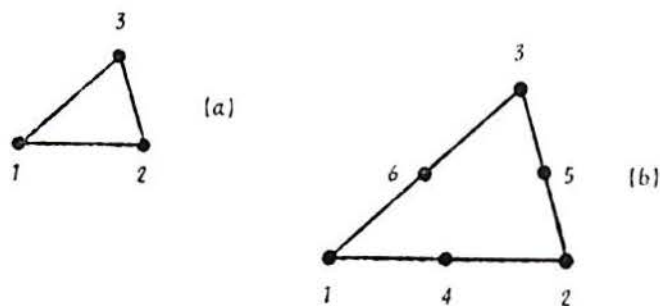


Fig. 8.3 - Elementos triangulares
 (a) linear
 (b) quadrático

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (8.15)$$

onde $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ são as coordenadas dos vértices do triângulo e

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad (8.16)$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

com os outros coeficientes sendo obtidos por permutações cíclicas dos índices 1, 2, 3.

Assim, as funções de forma para o elemento linear são calculadas pela expressão

$$N_i = L_i \quad (8.17)$$

Para o elemento quadrático, empregam-se as seguintes expressões

- para os nós de canto

$$N_i = (2L_i - 1) L_i \quad (8.18)$$

- para os nós de meio de lado

$$N_4 = 4 L_1 L_2$$

$$N_5 = 4 L_2 L_3 \quad (8.19)$$

$$N_6 = 4 L_1 L_3$$

Para relacionar as coordenadas normalizadas com as coordenadas cartesianas x, y , faz-se a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned}\xi &= L_1 \\ \eta &= L_2 \\ 1-\xi-\eta &= L_3\end{aligned}\tag{8.20}$$

Deste modo, as derivadas das funções de forma, em relação às coordenadas normalizadas ξ, η , ficam

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\end{aligned}\tag{8.21}$$

8.3 - Os elementos para a armadura

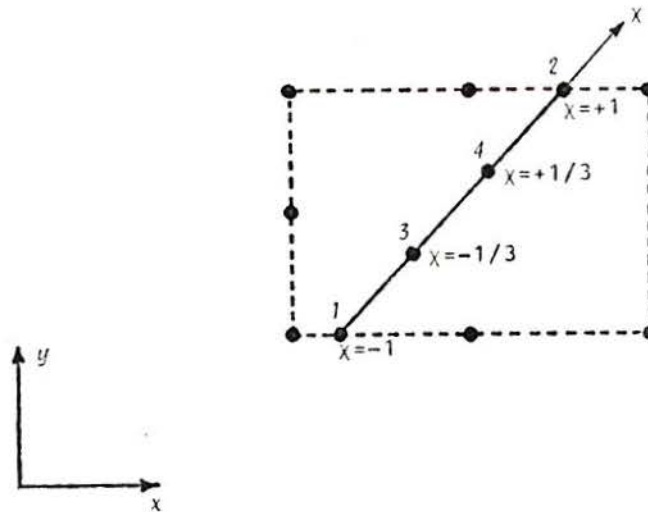


Fig. 8.4 - Elemento cúbico de armadura

A consideração da armadura é feita através da utilização do elemento proposto por Zienkiewicz, Phillips e Owen [117] e desenvolvido por Souza [106]. Este elemento resiste apenas a esforços axiais, não suportando esforços de flexão. Admite-se que os deslocamentos de qualquer ponto do elemento de armadura são iguais aos do elemento de concreto

na mesma posição. Isto permite o posicionamento de forma arbitrária da barra de armadura dentro do elemento de concreto, sem introduzirem-se incógnitas adicionais ao problema.

Para garantir a compatibilidade de deslocamentos entre os elementos de concreto e de aço, o elemento de armadura deve ser de um grau a mais que o de concreto. Assim, o campo de deslocamentos ao longo da diagonal do elemento de concreto fica de ordem idêntica ao do elemento de armadura.

As funções de forma para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange e são gerados a partir da expressão

$$H_k^n(\chi) = \frac{(\chi - \chi_0)(\chi - \chi_1) \cdots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \cdots (\chi - \chi_n)}{(\chi_k - \chi_0)(\chi_k - \chi_1) \cdots (\chi_k - \chi_{i-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \cdots (\chi_k - \chi_n)} \quad (8.22)$$

A Eq. (8.22) tem valor unitário em χ_k e corresponde a um elemento de $n+1$ nós.

Desta maneira, para um elemento quadrático de armadura, compatível com um elemento linear de concreto, as funções de forma são

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{1}{2} (\chi^2 - \chi) \\ H_2(\chi) &= \frac{1}{2} (\chi^2 + \chi) \\ H_3(\chi) &= 1 - \chi^2 \end{aligned} \quad (8.23)$$

Para um elemento cúbico de armadura, compatível com um elemento quadrático de concreto, as funções de forma ficam

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{1}{16} (-9\chi^3 + 9\chi^2 + \chi - 1) \\ H_2(\chi) &= \frac{1}{16} (9\chi^3 + 9\chi^2 - \chi - 1) \\ H_3(\chi) &= \frac{9}{16} (3\chi^3 - \chi^2 - 3\chi + 1) \\ H_4(\chi) &= \frac{9}{16} (-3\chi^3 - \chi^2 + 3\chi + 1) \end{aligned} \quad (8.24)$$

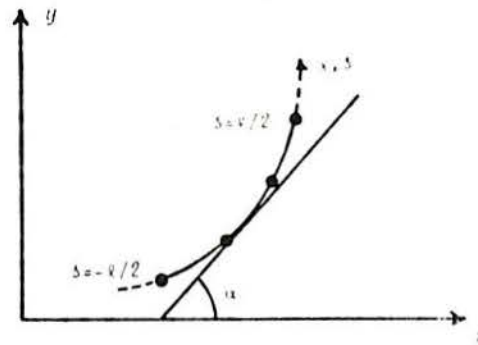


Fig. 8.5 - Inclinação da tangente ao eixo do elemento no ponto considerado

Os deslocamentos, nas direções axial (1) e transversal (2) da barra, segundo a configuração indeslocada, para um ponto arbitrário sobre o elemento de armadura, são dados por

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (8.25)$$

onde α é a inclinação da tangente ao eixo do elemento no ponto considerado (Fig. 8.5); u, v são os deslocamentos neste ponto, nas direções dos eixos cartesianos x, y .

Substituindo a Eq. (8.4) na Eq. (8.25), pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (8.26)$$

A deformação, em um ponto da barra de armadura, é dada por

$$\epsilon = \frac{dq_1}{ds} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dq_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dq_2}{ds} \right)^2 \right] \quad (8.27)$$

onde s é a coordenada curvilínea, coincidente com o eixo da barra.

Utilizando-se a regra da derivação em cadeia, pode-se escrever que

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{dq_i}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} = \frac{2}{\ell} \frac{dq_i}{d\chi} \quad (8.28)$$

onde ℓ é o comprimento da barra.

Considerando, que o segmento de armadura seja reto (α constante), ao derivar-se a Eq.(8.26), obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{dq_1}{ds} \\ \frac{dq_2}{ds} \end{Bmatrix} = \frac{2}{\ell} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \left[\frac{dN}{d\chi} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (8.29)$$

Substituindo a Eq.(8.29) na Eq.(8.27), resulta

$$\epsilon = \frac{2}{\ell} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{dq_1}{ds} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_2}{ds} \right\} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \left[\frac{dN}{d\chi} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (8.30)$$

A Eq.(8.30) é "linearizada", calculando-se dq_1/ds e dq_2/ds em função dos deslocamentos correntes.

As funções de forma, N , têm como variáveis ξ , η . Para obter-se a derivada $dN/d\chi$, é necessário relacionar ξ , η à variável χ . Isto é feito através das expressões

$$\begin{aligned} \xi &= \{H(\chi)\}^t \{\xi_j\} \\ \eta &= \{H(\chi)\}^t \{\eta_j\} \end{aligned} \quad (8.31)$$

sendo

$$\{H(\chi)\}^t = \{ H_1 \quad H_2 \quad \dots \quad H_n \} \quad (8.32)$$

onde n é o número de nós do elemento de armadura; H_1, H_2, \dots, H_n são definidas pelas Eqs. (8.23) ou Eqs. (8.24); ξ_j, η_j são as coordenadas normalizadas do nó j do elemento de barra.

Deste modo, pode-se obter a matriz $[dN/d\chi]$ através da expressão

$$\left[\frac{dN}{d\chi} \right] = \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\chi} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\chi} \right] \quad (8.33)$$

Derivando-se as Eqs. (8.31) em relação a χ , obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\chi} &= \left\{ \frac{dH(\chi)}{d\chi} \right\}^t \{ \xi_j \} \\ \frac{d\eta}{d\chi} &= \left\{ \frac{dH(\chi)}{d\chi} \right\}^t \{ \eta_j \} \end{aligned} \quad (8.34)$$

O ângulo α , Eq. (8.25), com relação ao sistema cartesiano x, y , é dado por

$$\alpha = \text{arctg} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (8.35)$$

As coordenadas x, y , de um ponto pertencente a um elemento de barra, podem ser expressas por

$$\begin{aligned} x &= \{ H(\chi) \}^t \{ x_j \} \\ y &= \{ H(\chi) \}^t \{ y_j \} \end{aligned} \quad (8.36)$$

onde x_j, y_j são as coordenadas do nó j do elemento de armadura.

As diferenciais de x e y são escritas, a partir das Eqs. (8.36), como

$$\begin{aligned} dx &= \left\{ \frac{dH(\chi)}{d\chi} \right\}^t \{ x_j \} d\chi = x' d\chi \\ dy &= \left\{ \frac{dH(\chi)}{d\chi} \right\}^t \{ y_j \} d\chi = y' d\chi \end{aligned} \quad (8.37)$$

Substituindo-se na Eq.(8.35), resulta

$$\alpha = \text{arctg} \left(\frac{y'}{x'} \right) \quad (8.38)$$

sendo

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{d\chi} = \{H'\}^t \{x_j\} \\ y' &= \frac{dy}{d\chi} = \{H'\}^t \{y_j\} \end{aligned} \quad (8.39)$$

onde

$$\{H'\}^t = \{ dH_1/d\chi \quad \dots \quad dH_n/d\chi \} \quad (8.40)$$

Desta forma, a Eq.(8.30) fica completamente de finida. Pode-se, então, escrever

$$\epsilon = \{B_s\}^t \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (8.41)$$

onde

$$\{B_s\}^t = \frac{2}{\ell} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{dq_1}{ds} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_2}{ds} \right\} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \left[\frac{dN}{d\chi} \right] \quad (8.42)$$

O vetor $\{B_s\}$ relaciona a deformação axial do e lemento de barra com os deslocamentos nodais do elemento de concreto. A matriz de rigidez correspondente ao elemento de barra pode, portanto, ser escrita como

$$[k_s] = \frac{E_s A_s \ell}{2} \int_{\ell} \{B_s\}^t \{B_s\} d\chi \quad (8.43)$$

onde E_s é o módulo de deformação longitudinal do aço e A_s é a área da seção transversal da barra, considerada constante. A integração da Eq.(8.43) é feita numericamente.

A dimensão da matriz, assim obtida, é a mesma da matriz de rigidez do elemento de concreto correspondente. Assim, as duas matrizes podem ser adicionadas diretamente, termo a termo, resultando na matriz de rigidez do elemento de concreto armado.

9 - A FORMULAÇÃO PARA O ESTADO TRIPLA DE TENSÃO

9.1 - Fundamentos

No estado triplo de tensão, o estado de tensão em um ponto fica caracterizado pela presença de seis componentes de tensão: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. O campo de deslocamentos é dado pelos deslocamentos u, v, w , nas direções dos eixos coordenados x, y, z .

Na Fig. 9.1, mostra-se um elemento finito para lelepipédico para este problema, referido a um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z e a um sistema normalizado ξ, η, ζ . As coordenadas cartesianas x, y, z , de um ponto no interior do elemento, podem ser determinadas a partir de suas coordenadas normalizadas ξ, η, ζ , através das expressões

$$\begin{aligned}x &= N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\y &= N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\z &= N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i\end{aligned}\tag{9.1}$$

onde N_i é a função de forma correspondente ao nó i do elemento, de coordenadas cartesianas x_i, y_i, z_i .

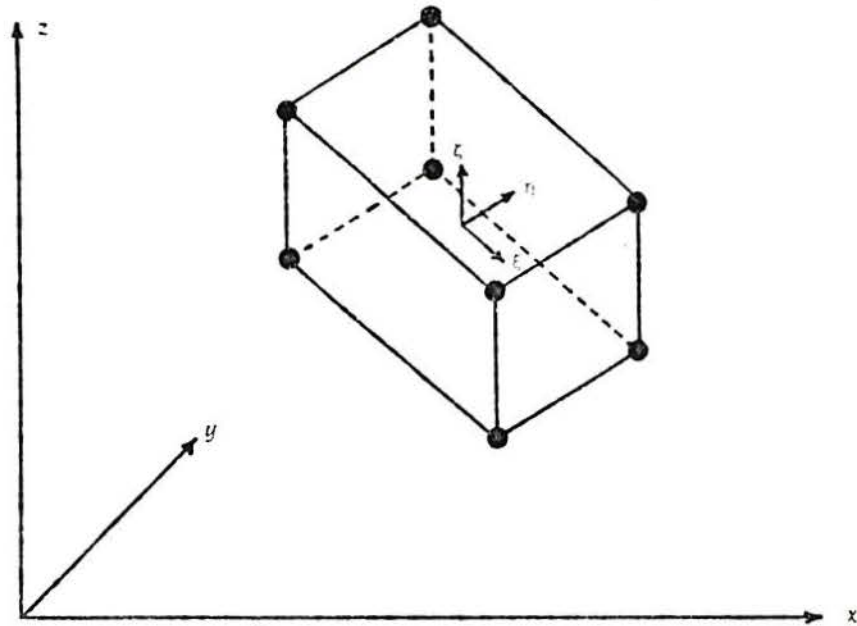


Fig. 9.1 - Um elemento paralelepipedico para um estado triplo de tensao

Na forma matricial, as Eqs.(9.1) ficam

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (9.2)$$

onde $[N]$ é uma matriz que contém as funções de forma.

De forma análoga, os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento são obtidos a partir dos deslocamentos nodais u_i, v_i, w_i . Deste modo,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (9.3)$$

Combinando as relações deformações-deslocamentos com a Eq. (9.3), as deformações em qualquer ponto no interior do elemento são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

onde $[B]$ é uma matriz calculada conforme exposto no capítulo 7.

A matriz de rigidez do elemento é calculada através da expressão

$$[k] = \int_V [B]^t [D] [B] dx dy dz \quad (9.5)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material. A matriz constitutiva é dada por

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

onde E é o módulo de deformação longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson do concreto, no ponto considerado.

A integração da Eq. (9.5) é feita usando-se as coordenadas normalizadas. Assim, na matriz $[B]$, as derivadas das funções de forma são calculadas em função de ξ, η, ζ , em vez de x, y, z . A transformação entre os dois sistemas é definida por uma matriz chamada de jacobiano. Deste modo,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (9.7)$$

onde o jacobiano $[J]$ é dado por

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

A Eq. (9.5) torna-se

$$[k] = \int_V [B]^t [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (9.9)$$

onde $|J|$ é o determinante do jacobiano. A integração da Eq. (9.9) é feita numericamente.

9.2 - O elemento para o concreto

Para modelar o concreto é utilizado um elemento linear paralelepipedico de oito nós (Fig. 9.2). As funções de forma, para este elemento, são obtidas através da expressão

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) \quad (9.10)$$

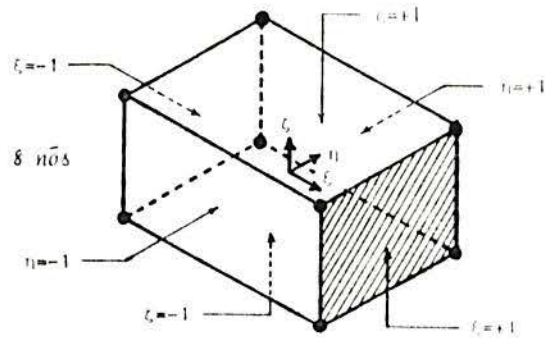


Fig. 9.2 - Elemento linear paralelepipedico

onde $\xi_0 = \xi \xi_i$, $\eta_0 = \eta \eta_i$ e $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$.

9.3 - O elemento para a armadura

Como mencionado nos capítulos anteriores, a consideração da armadura é feita através da utilização do elemento proposto por Zienkiewicz, Phillips e Owen [117] e desenvolvido por Souza [106]. Neste caso, o elemento linear de concreto requer o emprego de um elemento quadrático de armadura (Fig. 9.3). Assim, usam-se as seguintes funções de forma para o elemento de armadura.

$$H_1(\chi) = \frac{1}{2} (\chi^2 - \chi)$$

$$H_2(\chi) = \frac{1}{2} (\chi^2 + \chi) \quad (9.11)$$

$$H_3(\chi) = 1 - \chi^2$$

sendo χ a coordenada normalizada que descreve o elemento.

Os deslocamentos, nas direções axial (1) e transversais (2,3) do elemento, segundo a configuração indesejada, para um ponto arbitrário, são dados por

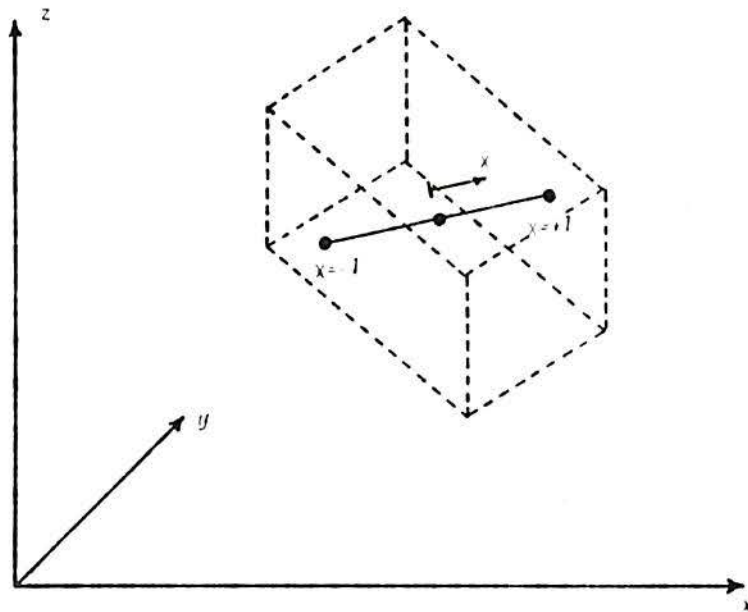


Fig. 9.3 - Elemento linear de armadura

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1,x) & \cos(1,y) & \cos(1,z) \\ \cos(2,x) & \cos(2,y) & \cos(2,z) \\ \cos(3,x) & \cos(3,y) & \cos(3,z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (9.12)$$

onde $\cos(1,x)$, $\cos(1,y)$, ... são os cossenos diretores do sistema de coordenadas 1,2,3, definido pela barra de armadura, em relação aos eixos de coordenadas x,y,z .

A substituição da Eq. (9.3) na Eq. (9.12) resulta

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1,x) & \cos(1,y) & \cos(1,z) \\ \cos(2,x) & \cos(2,y) & \cos(2,z) \\ \cos(3,x) & \cos(3,y) & \cos(3,z) \end{bmatrix} [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (9.13)$$

A deformação, em um ponto da barra de armadura, é dada por

$$\epsilon = \frac{dq_1}{ds} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dq_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dq_2}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dq_3}{ds} \right)^2 \right] \quad (9.14)$$

onde s é a coordenada curvilínea, que descreve o eixo da barra.

Pode-se escrever que

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{dq_i}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} = \frac{2}{\ell} \frac{dq_i}{d\chi} \quad (9.15)$$

onde ℓ é o comprimento da barra.

Considerando que o segmento de armadura seja reto, isto é, que os cossenos diretores sejam constantes ao longo do segmento, ao derivar-se a Eq.(9.13), obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{dq_1}{ds} \\ \frac{dq_2}{ds} \\ \frac{dq_3}{ds} \end{Bmatrix} = \frac{2}{\ell} [r] \left[\frac{dN}{d\chi} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (9.16)$$

sendo

$$[r] = \begin{bmatrix} \cos(1,x) & \cos(1,y) & \cos(1,z) \\ \cos(2,x) & \cos(2,y) & \cos(2,z) \\ \cos(3,x) & \cos(3,y) & \cos(3,z) \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

Substituindo a Eq.(9.16) na Eq.(9.14), resulta

$$\epsilon = \frac{2}{l} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{dq_1}{ds} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_2}{ds} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_3}{ds} \right\} [r] \left[\frac{dN}{d\chi} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (9.18)$$

A Eq.(9.18) é "linearizada", calculando-se dq_1/ds , dq_2/ds , dq_3/ds em função dos deslocamentos correntes.

As funções de forma, N , têm como variáveis ξ , η , ζ . Para calcular a derivada $dN/d\chi$, é preciso relacionar ξ , η , ζ à variável χ . Isto é possível através das expressões

$$\begin{aligned} \xi &= \{H(\chi)\}^t \{\xi_j\} \\ \eta &= \{H(\chi)\}^t \{\eta_j\} \\ \zeta &= \{H(\chi)\}^t \{\zeta_j\} \end{aligned} \quad (9.19)$$

sendo

$$\{H(\chi)\}^t = \{ H_1 \quad H_2 \quad H_3 \} \quad (9.20)$$

onde H_1 , H_2 , H_3 são definidas pelas Eqs.(9.11); ξ_j , η_j , ζ_j são as coordenadas normalizadas do nó j do elemento de barra.

Assim, a matriz $[dN/d\chi]$ é dada por

$$\left[\frac{dN}{d\chi} \right] = \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\chi} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\chi} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\chi} \right] \quad (9.21)$$

Derivando-se as Eqs.(9.19) em relação a χ , obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\chi} &= \left\{ \frac{dH(\chi)}{d\chi} \right\}^t \{\xi_j\} \\ \frac{d\eta}{d\chi} &= \left\{ \frac{dH(\chi)}{d\chi} \right\}^t \{\eta_j\} \\ \frac{d\zeta}{d\chi} &= \left\{ \frac{dH(\chi)}{d\chi} \right\}^t \{\zeta_j\} \end{aligned} \quad (9.22)$$

A matriz dos cossenos diretores, Eq.(9.17), é determinada em função das coordenadas nodais do elemento de armadura. A direção 1 coincide com o eixo da barra na posição indeslocada. Os eixos 2,3 são arbitrados, de modo que formem com 1 um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

A Eq.(9.18) pode ser escrita como

$$\varepsilon = \{B_s\}^t \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (9.23)$$

onde

$$\{B_s\}^t = \frac{2}{\ell} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{dq_1}{ds} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_2}{ds} \quad \frac{1}{2} \frac{dq_3}{ds} \right\} [r] \left[\frac{dN}{d\chi} \right] \quad (9.24)$$

Portanto, a matriz de rigidez correspondente ao elemento de barra pode ser obtida por

$$[k_s] = \frac{E_s A_s \ell}{2} \int_{\ell} \{B_s\}^t \{B_s\} d\chi \quad (9.25)$$

onde E_s é o módulo de deformação longitudinal do aço e A_s é a área da seção transversal da barra, considerada constante. A integração da Eq.(9.25) é feita numericamente.

10 - ANÁLISE PARAMÉTRICA DOS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

10.1 - Introdução

Para a análise de uma dada peça de concreto armado, através do programa computacional desenvolvido neste trabalho, é necessário estabelecer uma série de parâmetros. Estes parâmetros vão desde o nível de discretização adotado para a malha de elementos finitos até as propriedades do aço e do concreto fornecidas ao programa.

Naturalmente, a escolha de tais parâmetros pode influenciar decisivamente os resultados alcançados através deste tipo de estudo. Por esta razão, busca-se, neste capítulo, ilustrar a influência de alguns destes fatores sobre esta forma de análise.

10.2 - A influência do nível de discretização

Neste item, procura-se apresentar o efeito do nível de discretização da malha de elementos finitos sobre os resultados da análise. Comparam-se os diversos elementos para estudo de problemas de estado plano de tensão, propostos neste trabalho: EPQQ (estado plano de tensão quadrangular quadrático), EPQL (estado plano de tensão quadrangular linear),

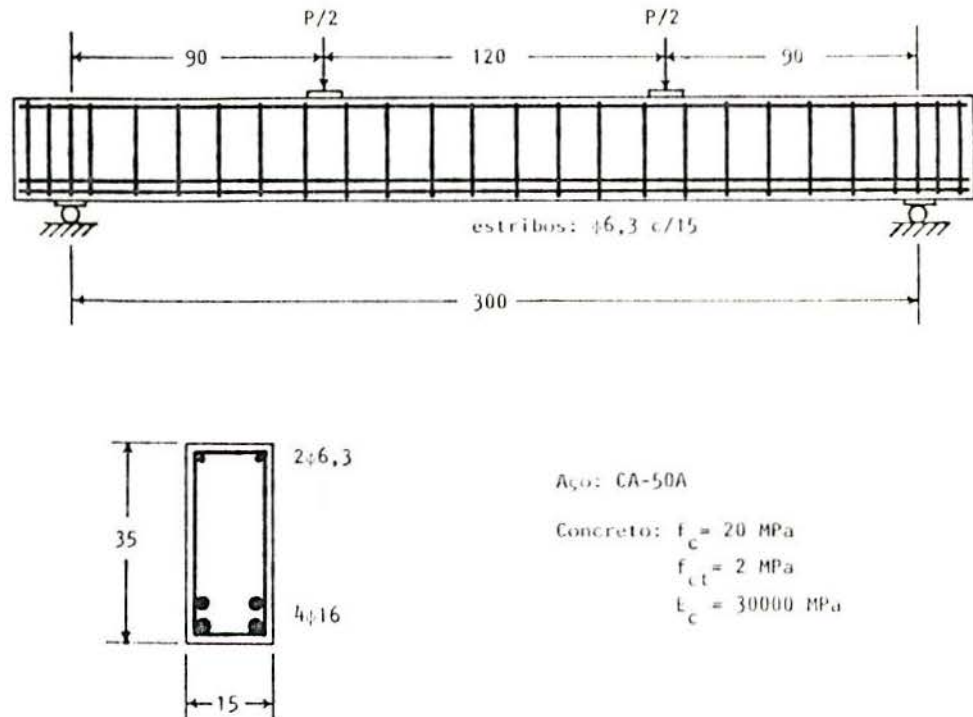
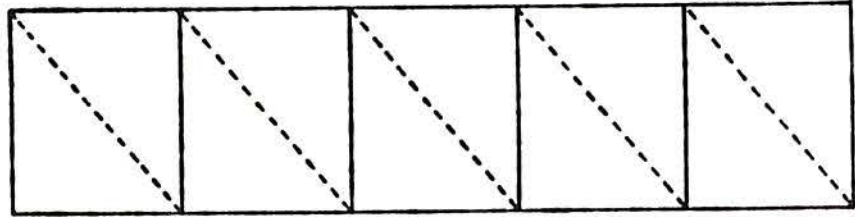


Fig. 10.1 - Detalhamento da viga de concreto armado utilizada nas comparações

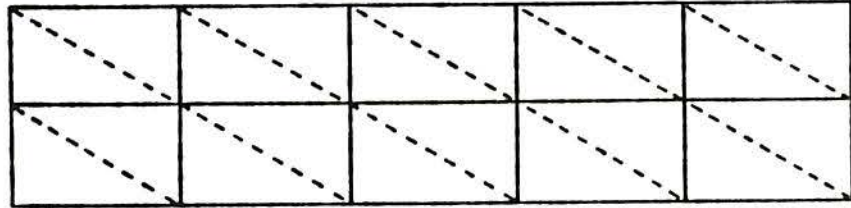
EPTQ (estado plano de tensão triangular quadrático) e EPTL (estado plano de tensão triangular linear).

Com este propósito, discretizou-se em diferentes graus a viga de concreto armado, cujo detalhamento está a apresentado na Fig. 10.1. Como esta viga tem simetria de carga e de geometria, a análise restringiu-se a sua metade. Foram escolhidas cinco malhas para cada um dos tipos de elementos, conforme mostra a Fig. 10.2. O número de nós e elementos destas malhas aparecem resumidos na Tab. 10.1.

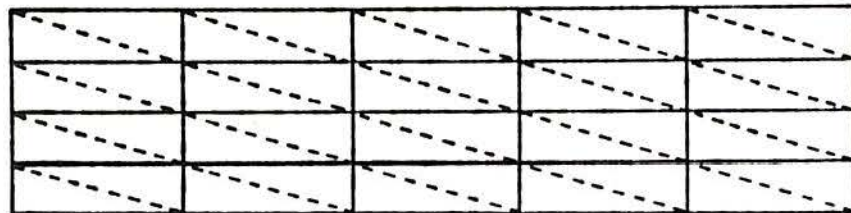
No estudo, foi aplicada uma carga instantânea total P de 100 kN, correspondente à sua carga de serviço. O peso próprio foi desprezado. A análise foi feita através do procedimento iterativo descrito no capítulo 7, em uma única e tapa de carregamento.



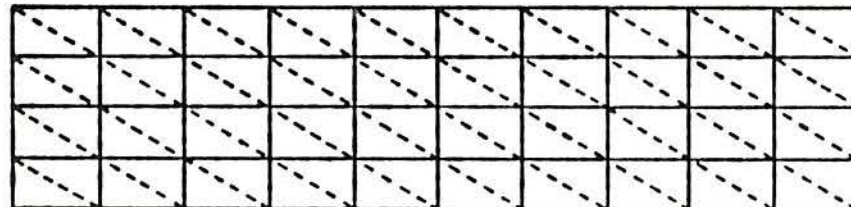
(a) Malha 1



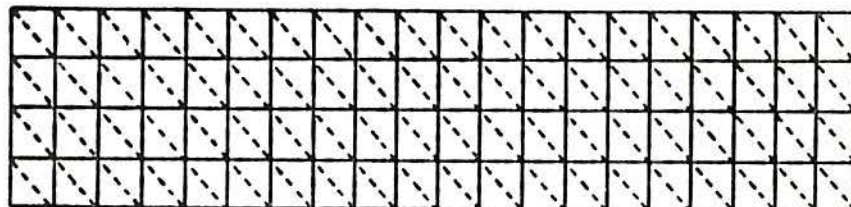
(b) Malha 2



(c) Malha 3



(d) Malha 4



(e) Malha 5

Fig. 10.2 - Malhas adotadas na discretização da metade da viga

	MALHA 1		MALHA 2		MALHA 3		MALHA 4		MALHA 5	
	NÓS	ELEM.	NÓS	ELEM.	NÓS	ELEM.	NÓS	ELEM.	NÓS	ELEM.
EPQQ	28	5	45	10	79	20	149	40	289	80
EPQL	12	5	18	10	30	20	55	40	105	80
EPTQ	33	10	55	20	99	40	189	80	369	160
EPTL	12	10	18	20	30	40	55	80	105	160

Tab. 10.1 - Número de nós e de elementos nas diferentes malhas para os diversos tipos de elemento

As Figs. 10.3 até 10.5 mostram, respectivamente, as flechas, as deformações na armadura tracionada (1ª camada) e na borda comprimida de concreto, na seção central da viga, para cada malha e para cada tipo de elemento. A Fig. 10.6 apresenta a evolução do tempo de processamento com um maior refinamento da malha.

Com base neste exemplo, observa-se que os elementos quadráticos já apresentam bons resultados para discretizações pouco refinadas. Os elementos lineares, especialmente o elemento EPTL, são mais dependentes da malha e exigem um maior número de elementos para alcançar uma precisão adequada. Entretanto, em função dos tempos de processamento, a eficiência dos vários tipos de elemento não difere muito. Isto é, para um mesmo tempo de processamento, os resultados de tipos de elementos distintos são mais ou menos equivalentes.

10.3 - Comparação dos algoritmos de solução

Conforme foi exposto no capítulo 7, a solução através do programa computacional envolve um procedimento incremental ou um procedimento iterativo. Neste item, faz-se uma comparação dos resultados determinados com os dois algoritmos.

Analisou-se a viga, detalhada na Fig. 10.1, sob uma carga total de 200 kN, que corresponde a um valor próximo à sua carga última. Para esta comparação, adotou-se uma malha com dez elementos quadrangulares quadráticos, para estado plano de tensão, na discretização de metade da viga (malha 2).

Os valores das flechas em função do carregamento estão apresentados na Fig. 10.7. Com o algoritmo incremental, foram feitas análises para uma, duas, cinco, dez e vinte etapas de carga. Para possibilitar a determinação da história de carga, o estudo via algoritmo iterativo teve dez etapas.

Neste caso, os resultados obtidos com o algoritmo incremental, para vinte etapas de carga, mostraram uma razoável aproximação com os resultados do algoritmo iterati-

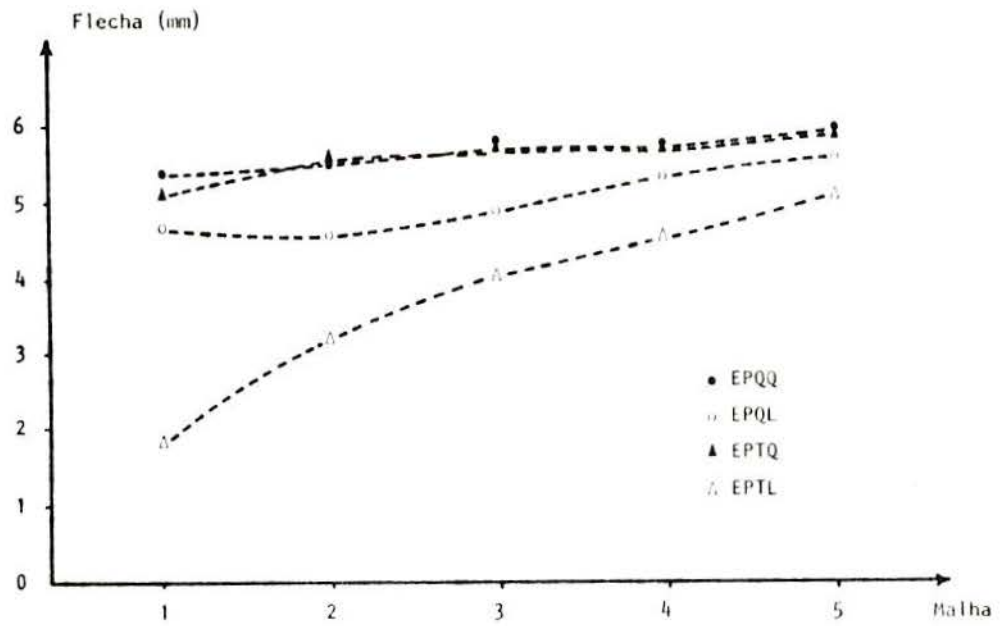


Fig. 10.3 - Flechas da viga

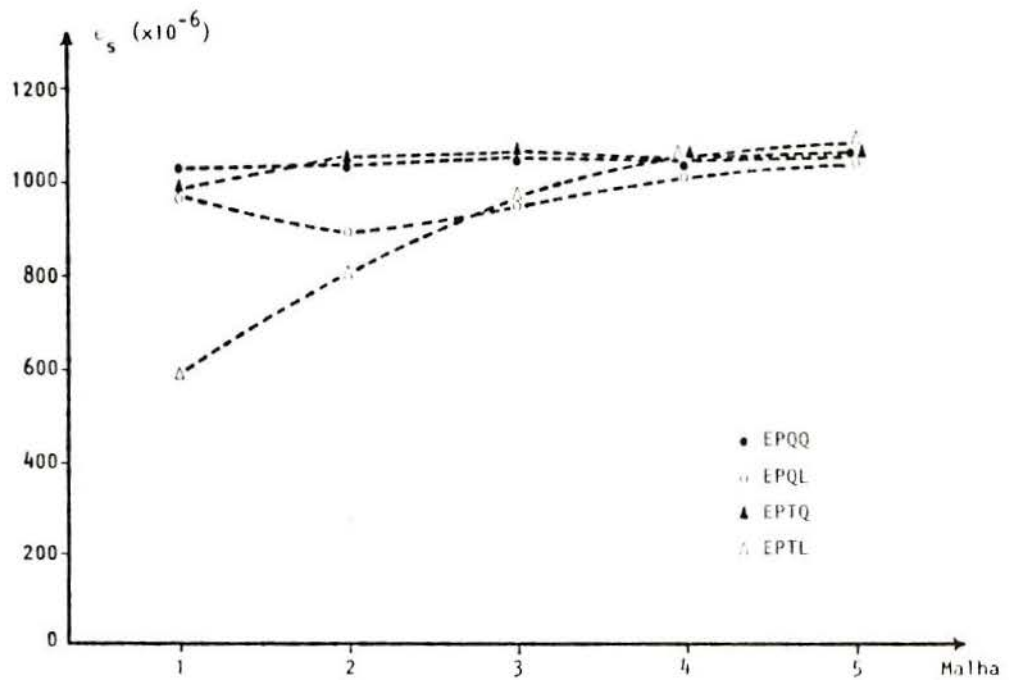


Fig. 10.4 - Deformações na armadura tracionada (1ª camada), na seção central da viga

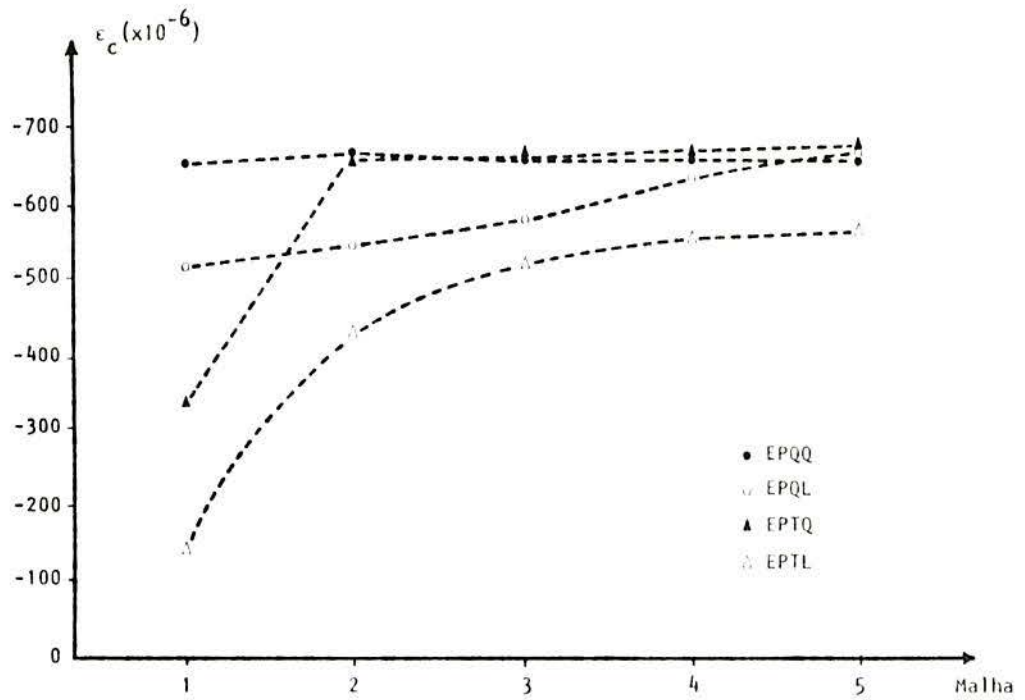


Fig. 10.5 - Deformações no concreto na borda comprimida, na seção central da viga

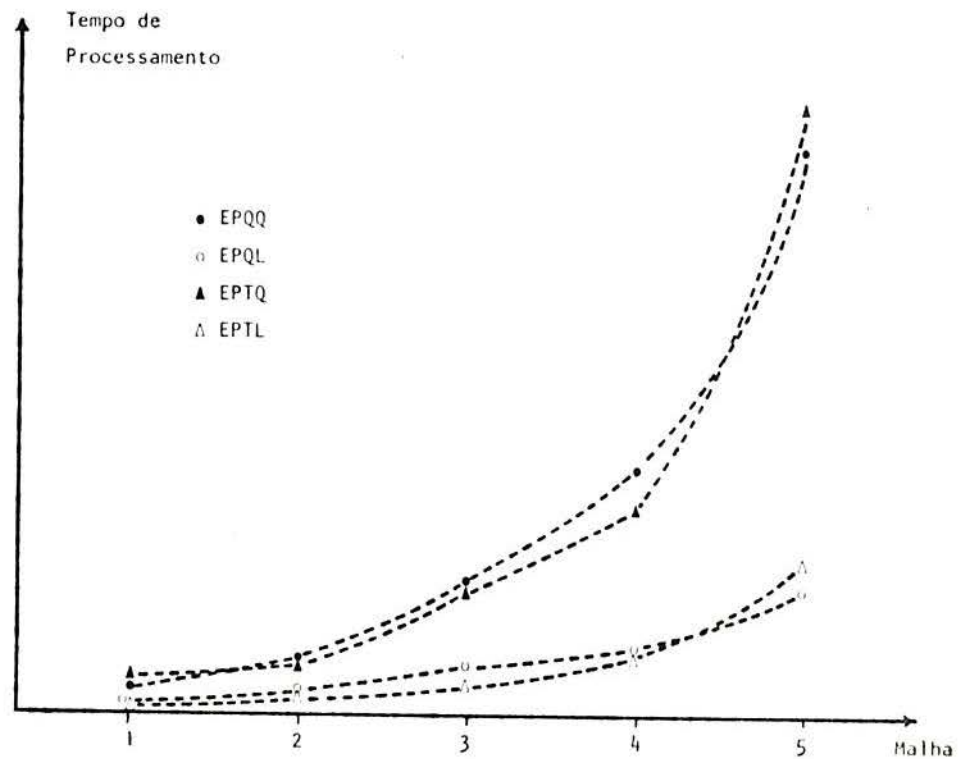


Fig. 10.6 - Evolução do tempo de processamento com o refinamento da malha

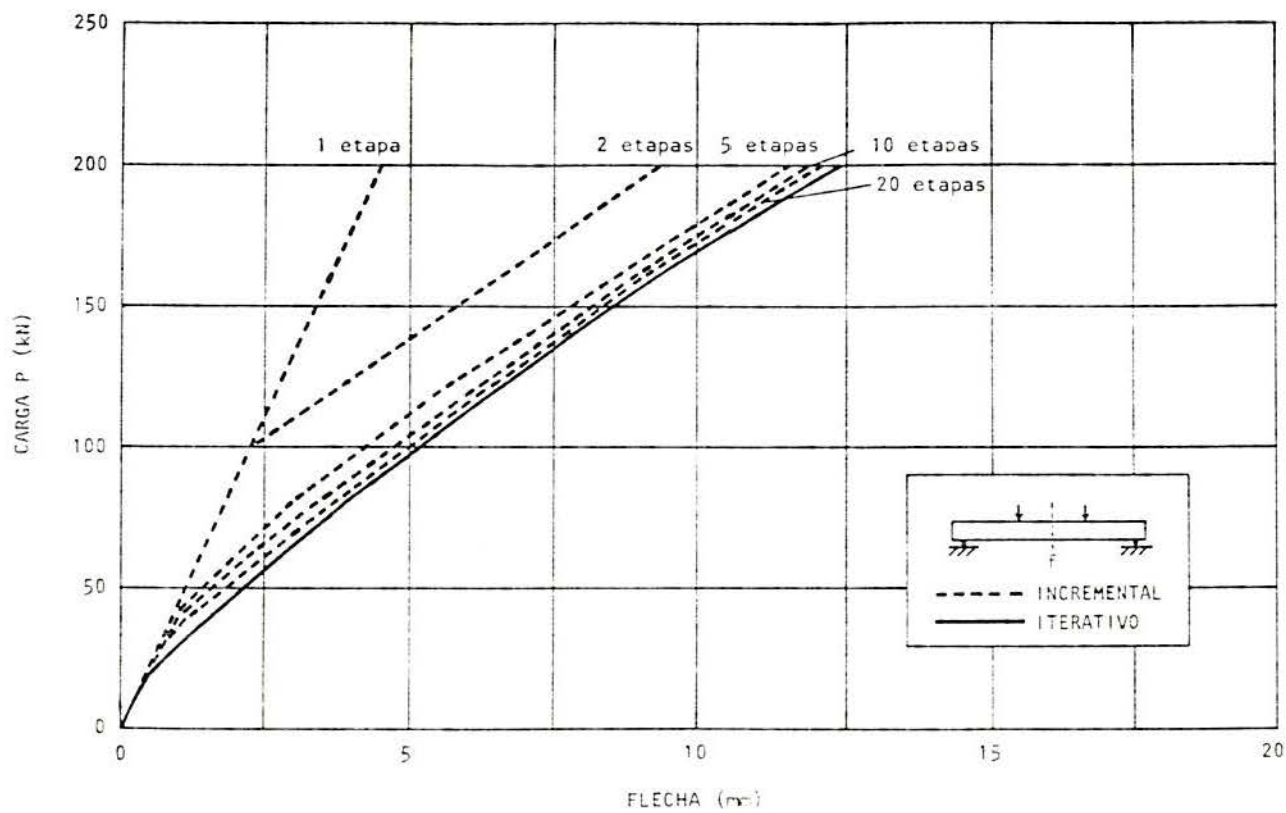


Fig. 10.7 - Comparação dos resultados obtidos com os algoritmos incremental e iterativo

vo. Nos exemplos apresentados no decorrer do trabalho, preferiu-se utilizar o procedimento iterativo, pela sua relativa independência com respeito ao passo de carga.

10.4 - A influência das propriedades mecânicas do concreto

Neste item, procura-se avaliar a influência do módulo de deformação longitudinal inicial e das resistências à compressão e à tração do concreto sobre os resultados da análise. Estes três parâmetros participam da calibragem do modelo constitutivo empregado para o concreto, descrito no capítulo 4.

Para a viga mostrada na Fig. 10.1, realizou-se uma série de análises, variando, a cada vez, o valor de um destes parâmetros, para mais e para menos, em trinta por cento. Os valores básicos do estudo são de 30.000 MPa para o módulo de deformação longitudinal inicial e de 20 MPa e 2 MPa para as resistências à compressão e à tração do concreto, respectivamente. Nesta análise, utilizou-se, também, a malha de dez elementos finitos quadrangulares quadráticos para estado plano de tensão.

Na Fig. 10.8, apresenta-se a evolução da flecha em função do carregamento, segundo o modelo computacional desenvolvido, para três valores do módulo de deformação longitudinal inicial: 21.000 MPa, 30.000 MPa e 39.000 MPa. Os demais parâmetros foram mantidos constantes.

O mesmo procedimento foi repetido para as resistências à compressão e à tração. Na Fig. 10.9, aparecem as curvas carga x flecha para resistências à compressão de 14 MPa, 20 MPa e 26 MPa. A Fig. 10.10 apresenta a evolução da flecha em função do carregamento, para valores da resistência à tração do concreto de 1,4 MPa, 2,0 MPa e 2,6 MPa.

As propriedades mecânicas do concreto não são uniformes ao longo de toda uma peça de concreto armado. Numa tentativa de quantificar tal situação, estabeleceu-se uma distribuição normal do módulo de deformação longitudinal inicial

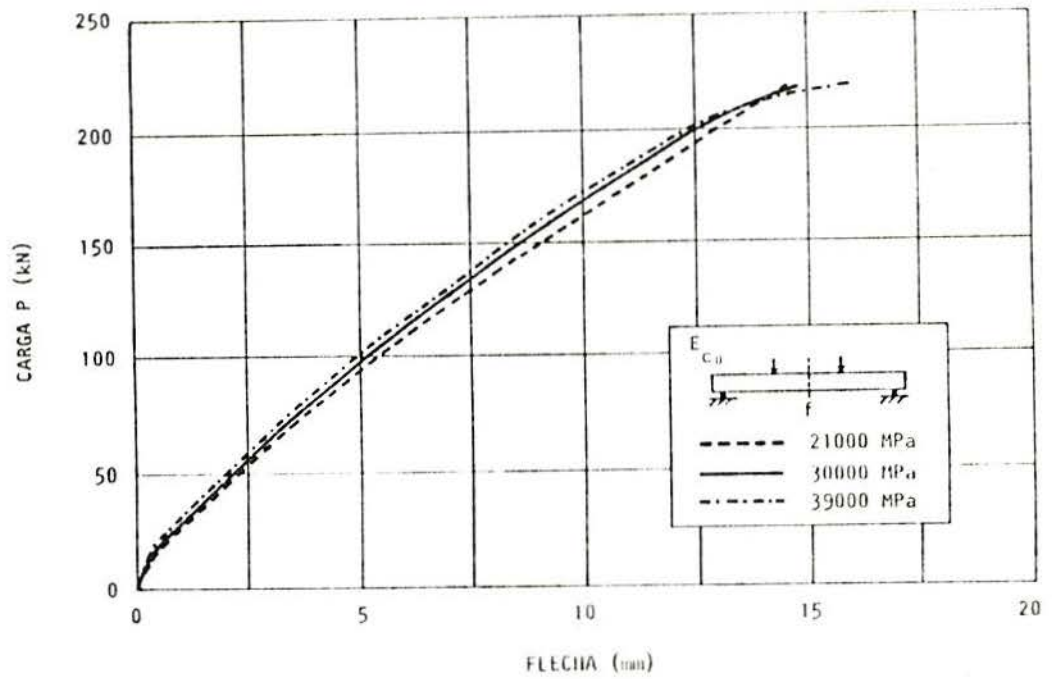


Fig. 10.8 - Curvas carga x flecha da viga para concretos com diferentes módulos iniciais de deformação longitudinal

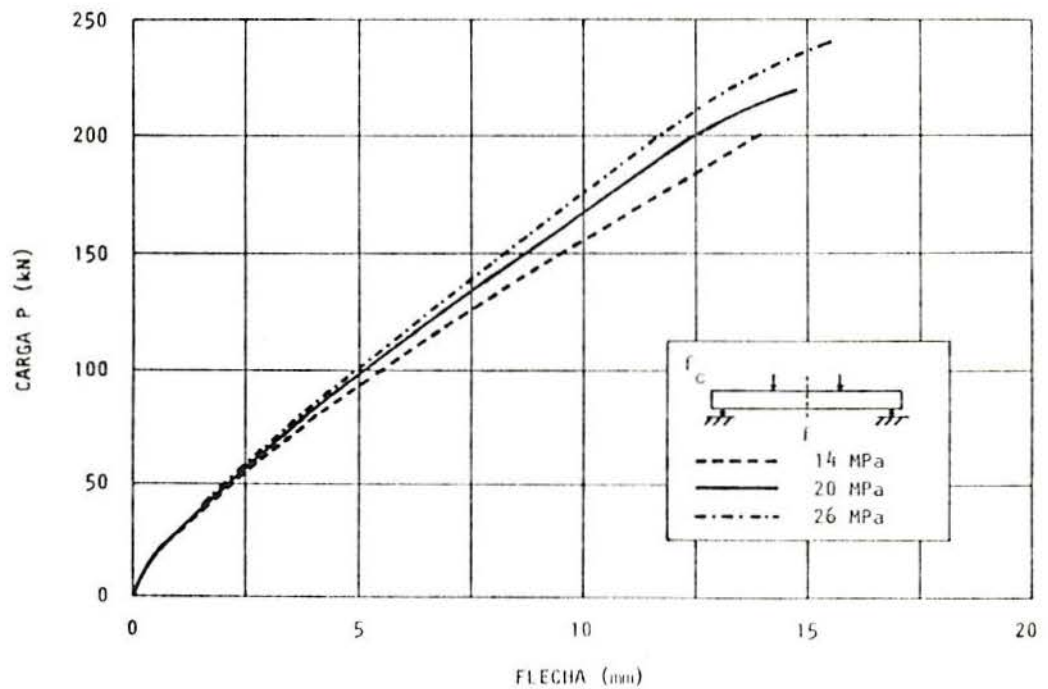


Fig. 10.9 - Curvas carga x flecha da viga para concretos com diferentes resistências à compressão

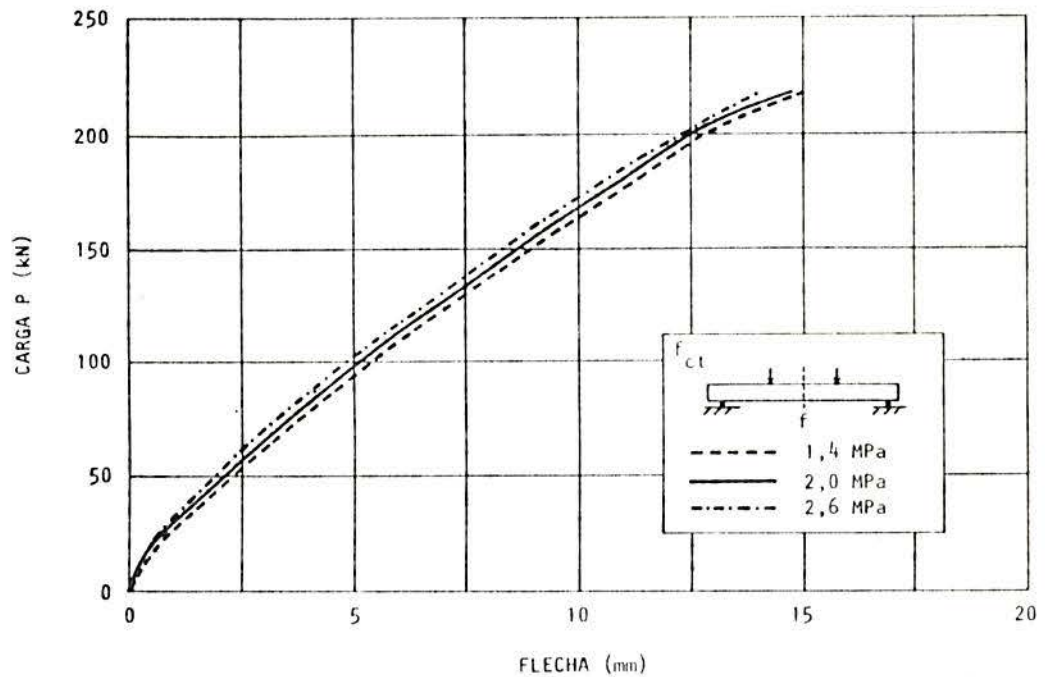


Fig. 10.10 - Curvas carga x flecha da viga para concretos com diferentes resistências à tração

e das resistências à compressão e à tração do concreto para os diversos pontos de integração da viga. Isto foi feito da forma descrita a seguir.

A função de densidade normal é dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (10.1)$$

onde z é a variável reduzida determinada por

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} \quad (10.2)$$

sendo \bar{x} a média e s o desvio padrão da distribuição; x é a variável, cuja distribuição está sendo analisada.

Busca-se estabelecer um conjunto de valores para z , de tal forma que a média e o desvio padrão deste conjunto sejam 0 e 1, respectivamente. Para isto, gera-se um va-

lor aleatório a_i , sendo $0 < a_i < 1$, através da expressão

$$a_i = \text{parte fracionária de } [(\pi + a_{i-1})^5] \quad (10.3)$$

O valor procurado de z_i , deve ser tal que

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_i}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \quad (10.4)$$

Deste modo, se $0 < a_i \leq 0,5$, z_i pode ser calculado, conforme [1], por

$$z_i = t - \frac{A+Bt+Ct^2}{1+Dt+Et^2+ Ft^3} \quad (10.5)$$

onde

$$t = (\ln \frac{1}{a_i^2})^{1/2} \quad (10.6)$$

e

$$\begin{aligned} A &= 2,515517 \\ B &= 0,802853 \\ C &= 0,010328 \\ D &= 1,432788 \\ E &= 0,189269 \\ F &= 0,001308 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Caso o valor de a_i , gerado pela Eq. (10.3), seja tal que $0,5 < a_i < 1$, z_i é dado por

$$z_i = \frac{A+Bt+Ct^2}{1+Dt+Et^2+ Ft^3} - t \quad (10.8)$$

onde

$$t = \left[\ln \frac{1}{(1-a_i)^2} \right]^{1/2} \quad (10.9)$$

As constantes A até F na Eq. (10.8) têm os mesmos valores dados em (10.7).

O módulo de deformação longitudinal inicial e as resistências à compressão e à tração do concreto, correspondentes ao ponto de integração i , são dados, então, por

$$\begin{aligned} E_{c_0}^i &= E_{c_0} (1 + z_i CV)^{1/3} \\ f_c^i &= f_c (1 + z_i CV) \\ f_{ct}^i &= f_{ct} (1 + z_i CV) \end{aligned} \quad (10.10)$$

sendo CV o coeficiente de variação das resistências e E_{c_0} , f_c , f_{ct} valores médios.

Na Fig. 10.11, são mostradas oito curvas carga x flecha, determinadas através desta formulação, para um coeficiente de variação de 30%. Como nas comparações anteriores, pode-se constatar que a variação dos três parâmetros (módulo de deformação longitudinal inicial, resistências à compressão e à tração) não produz grande alteração no comportamento global da viga de concreto armado.

10.5 - Os fatores que influenciam o comportamento ao longo do tempo das peças de concreto armado

A mesma viga, estudada nos itens anteriores, foi analisada sob uma carga de longa duração total P de 100 kN. Neste item, é avaliada a influência da umidade relativa do ar, da temperatura ambiente, da consistência do concreto e do tipo de cimento sobre o desenvolvimento das flechas ao longo do tempo.

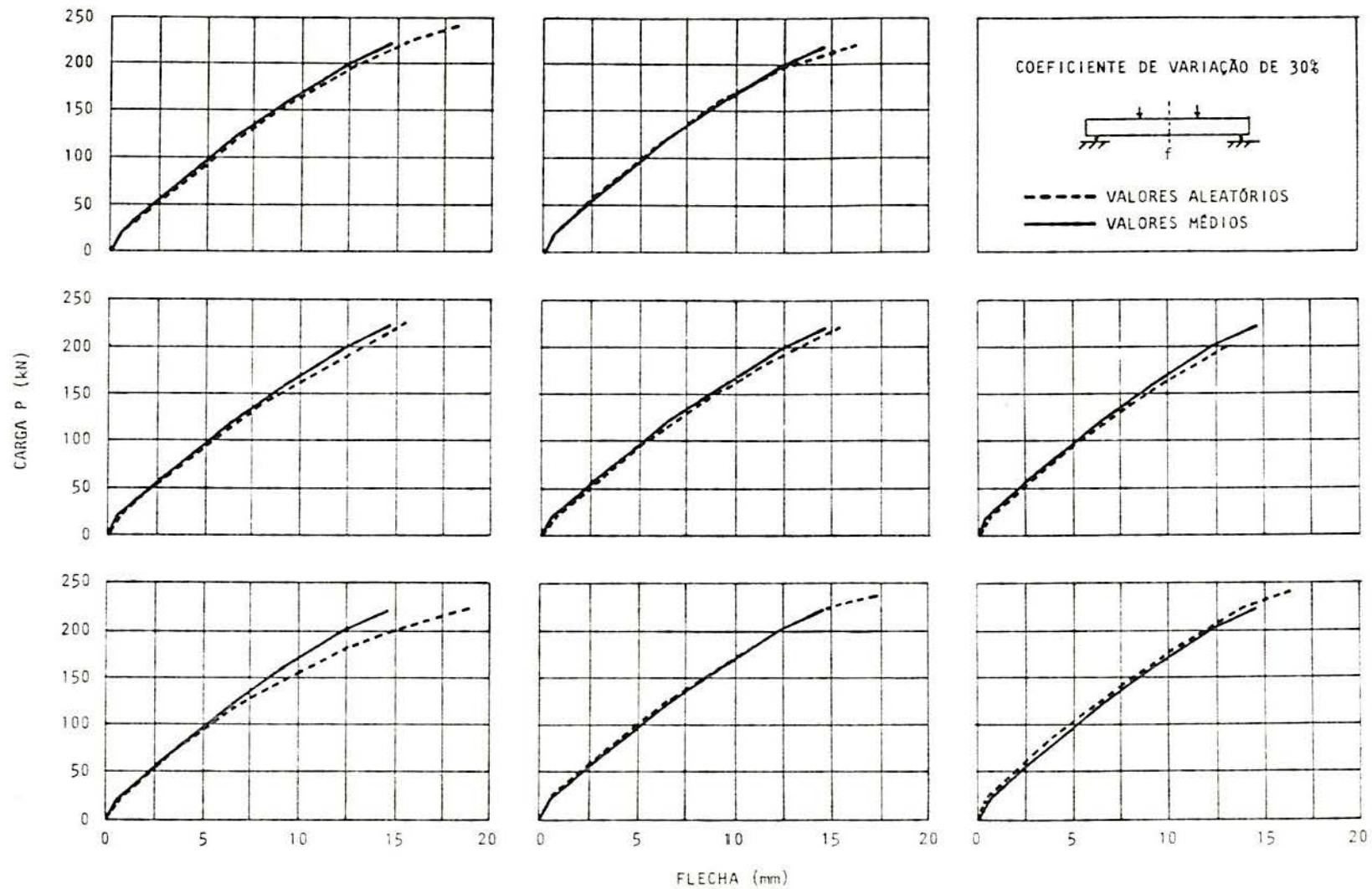


Fig. 10.11 - Diferentes respostas carga x flecha da viga, para valores aleatórios do módulo de deformação longitudinal inicial e das resistências à tração e compressão do concreto

Como valores básicos da análise, tomou-se uma umidade relativa do ar de 70%, uma temperatura ambiente de 20 °C, um concreto com consistência média (abatimento de acordo com o MB-256 de 5 a 9 cm) e um cimento com endurecimento normal. Considerou-se que a carga foi aplicada 28 dias após a concretagem e os efeitos da fluência e da retração foram levados em conta a partir desta data.

Na Fig. 10.12, apresenta-se a curva básica da evolução da flecha no tempo, junto com as curvas correspondentes a umidades relativas do ar de 40 e 90%. Pode-se constatar que a umidade do ar é um fator importante para um estudo desta natureza.

A Fig. 10.13 mostra o desenvolvimento da flecha com o decorrer do tempo para temperaturas ambientes de 5, 20 e 35 °C. A variação dos resultados é mínima. Isto advém da forma de consideração da temperatura no modelo descrito no capítulo 6. A temperatura, no referido modelo, produz uma "correção" dos períodos de tempo. Assim, uma maior temperatura acarreta um "aumento" nas idades do concreto e, conseqüentemente, um crescimento da sua rigidez. Por outro lado, um concreto com mais idade tem um incremento posterior de deformações por fluência inferior ao de um concreto mais jovem. No caso particular deste exemplo, os dois efeitos se compensaram.

A Fig. 10.14 apresenta as curvas com a evolução da flecha para concretos com diferentes consistências. Há uma considerável variação dos resultados como função do maior ou menor abatimento do concreto.

Na Fig. 10.15, mostram-se os resultados referentes à influência do tipo de cimento. As mesmas considerações feitas sobre o efeito da temperatura podem ser aqui repetidas, para justificar a pequena dispersão nos valores encontrados.

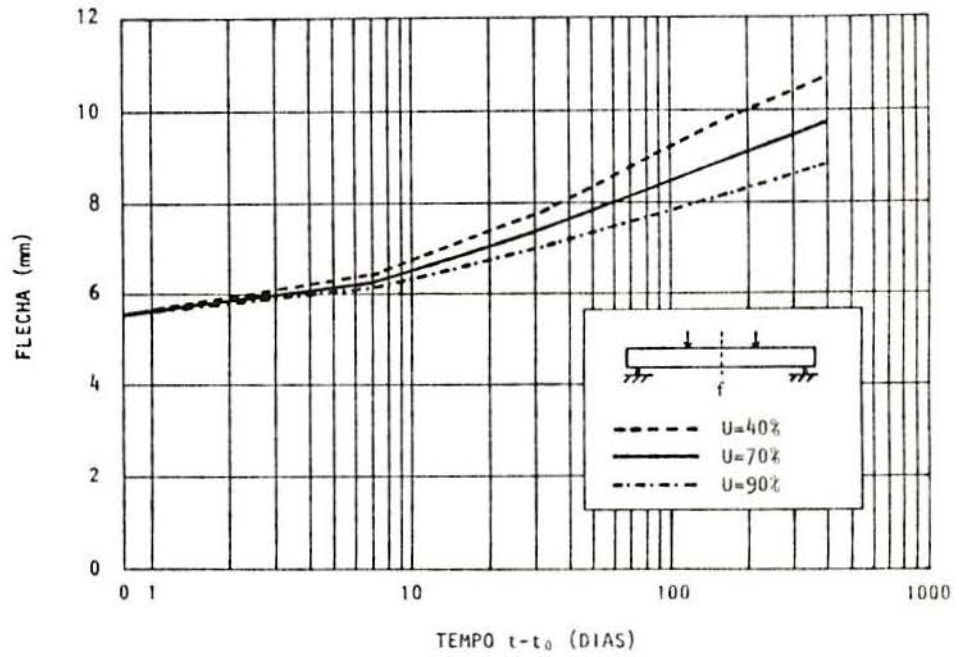


Fig. 10.12 - Evolução da flecha da viga, no tempo, para diferentes umidades relativas do ar

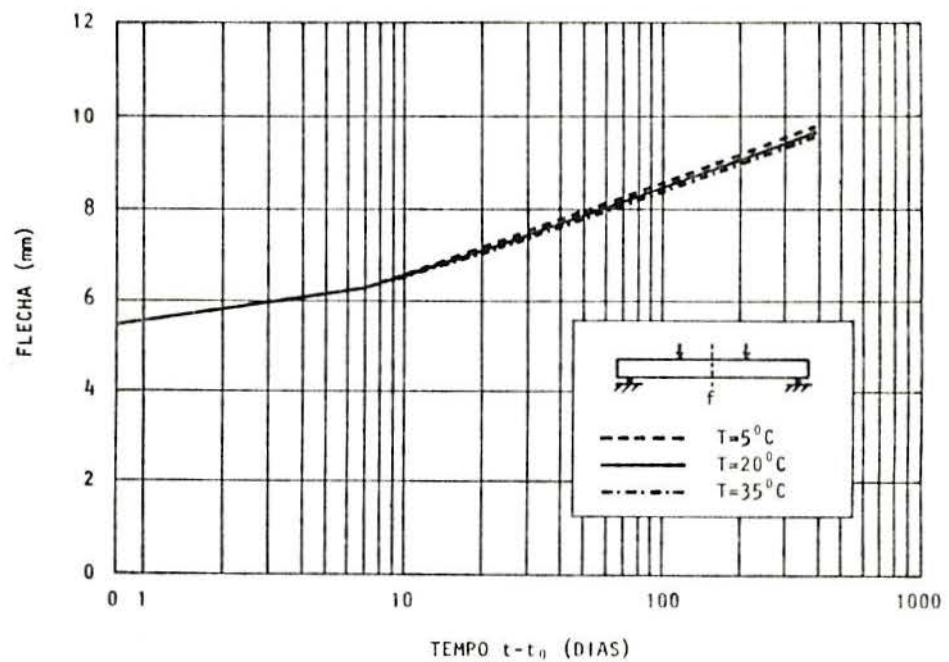


Fig. 10.13 - Evolução da flecha da viga, no tempo, para diferentes temperaturas ambientes

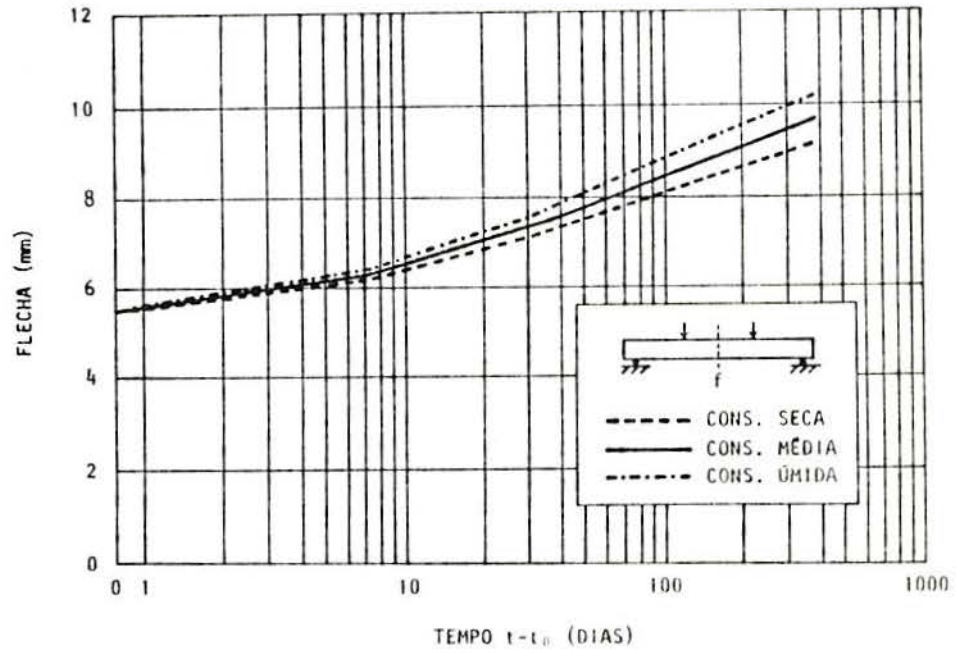


Fig. 10.14 - Evolução da flecha da viga, no tempo, para concretos com diferentes consistências

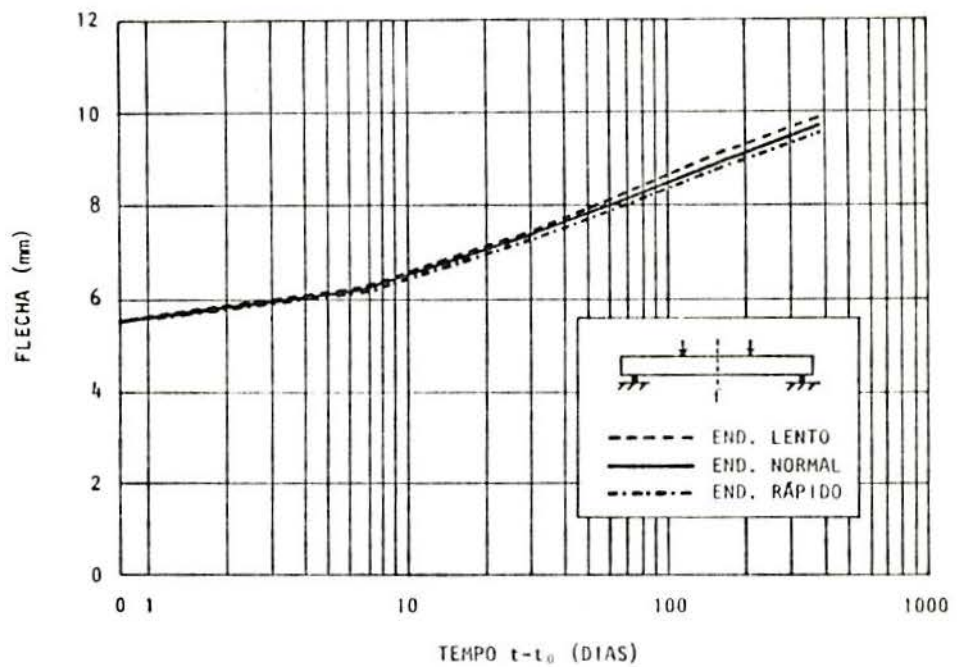


Fig. 10.15 - Evolução da flecha da viga, no tempo, para cimentos com diferentes velocidades de endurecimento

11 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DO CISALHAMENTO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

11.1 - Introdução

Neste capítulo, comparam-se os resultados obtidos através do programa computacional com valores determinados experimentalmente para vigas de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Leonhardt e Walther, em [74], e referem-se a um estudo sobre o comportamento ao cisalhamento de peças de concreto armado.

São analisadas duas séries de vigas. Na primeira, varia-se a armadura para resistir ao esforço cortante, enquanto, na segunda, a variável é a largura da alma das vigas.

Buscando um critério uniforme para calibragem do modelo nos diferentes ensaios, a resistência cilíndrica à compressão, f_c , a resistência à tração, f_{ct} , e o módulo de deformação longitudinal inicial, E_{c_0} , do concreto são determinados a partir da resistência cúbica à compressão do concreto, f_{cub} , obtida experimentalmente na data de cada ensaio, através do seguinte conjunto de expressões

$$f_c = f_{\text{cub}}/1,18 \quad (11.1)$$

$$f_{\text{ct}} = 0,25 f_{\text{cub}}^{2/3} \quad (11.2)$$

$$E_{c_0} = 1,25 \times 9500 f_c^{1/3} \quad (11.3)$$

onde os valores são dados em MPa. As duas primeiras expressões são recomendadas por Leonhardt e Mönning, em [73]. A Eq. (11.3) é proposta pelo Código Modelo do CEB [41].

Para todos os ensaios, consideraram-se os efeitos da fluência e da retração do concreto a partir do sétimo dia após a concretagem das vigas. Adotou-se, conforme medições no local, uma umidade relativa do ar de 60% e uma temperatura de 18°C. O peso próprio das vigas foi considerado como carga de curta duração, uma vez que os ensaios eram montados na data da execução (aproximadamente, 28 dias da concretagem). Os valores comparados, a seguir, são valores líquidos, isto é, estão descontadas as parcelas correspondentes aos efeitos dependentes do tempo e do peso próprio.

11.2 - A influência da armadura de cisalhamento

O detalhamento do primeiro conjunto de vigas analisado, tendo como variável a armadura de cisalhamento, é mostrado na Fig. 11.1. Foram ensaiadas duas séries de quatro vigas, uma com duas cargas concentradas e outra com uma carga uniformemente distribuída. Mantendo a notação do trabalho original, as vigas com cargas concentradas (Einzellastbalken) são chamadas de E1, E3, E5 e E6, enquanto as com carga uniformemente distribuída (Gleichlastbalken) são referenciadas por G1, G3, G5 e G6.

As quatro vigas têm, basicamente, a mesma armadura longitudinal, composta, inferiormente, por duas barras de 20 mm de diâmetro ($f_y = 434$ MPa) e três de 16 mm de diâmetro ($f_y = 433$ MPa), e, superiormente, por duas barras de 10 mm de diâmetro ($f_y = 430$ MPa). Todas estas barras são de aço da classe B.

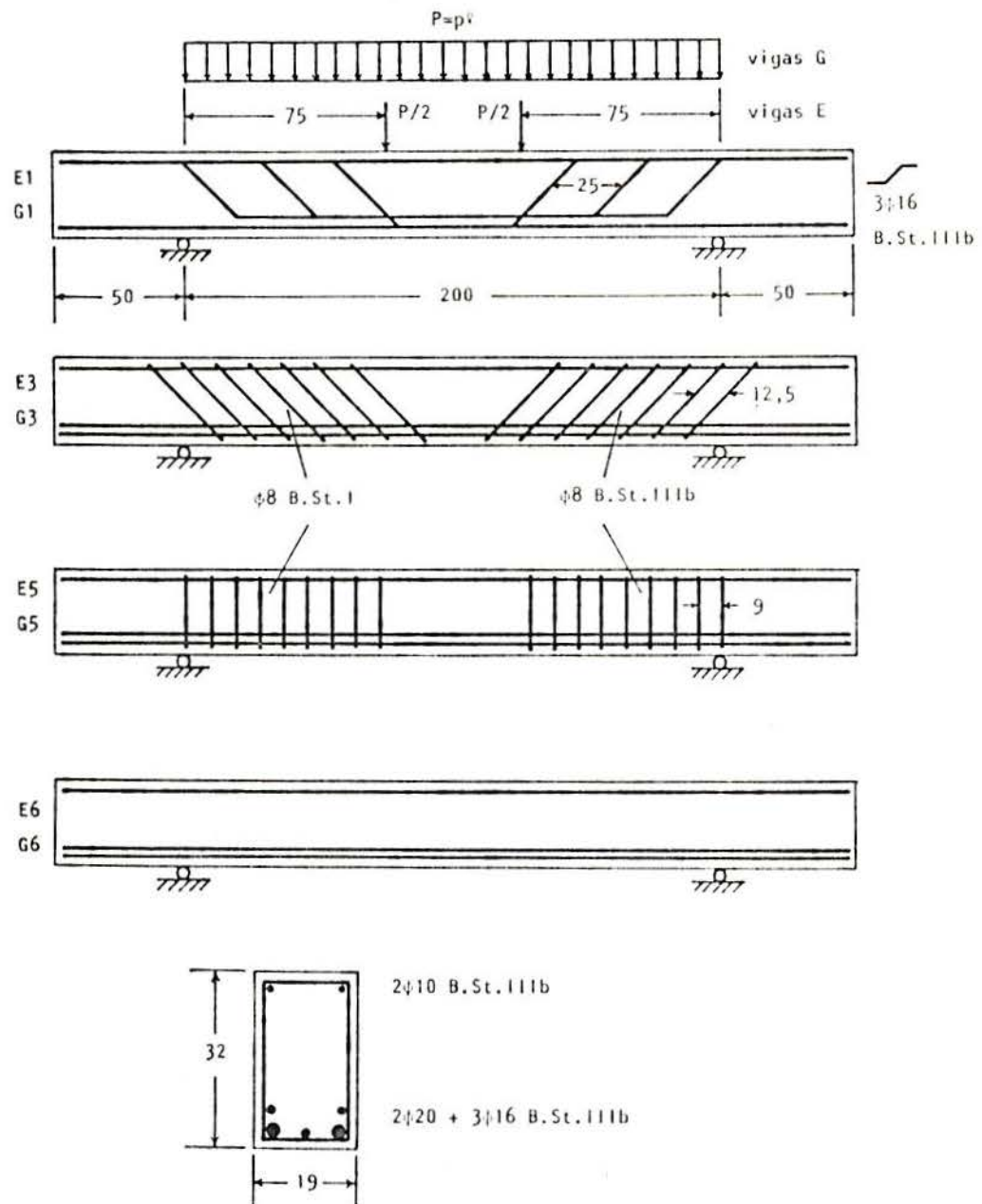


Fig. 11.1 - Detalhamento das vigas com diferentes armaduras de cisalhamento

Nas vigas E1 e G1, as três barras de 16 mm de diâmetro são dobradas para absorver as tensões de tração devidas ao esforço cortante. As vigas E3 e G3 possuem estribos de 8 mm de diâmetro, inclinados a 45° , espaçados de 12,5 cm, enquanto que as vigas E5 e G5 apresentam estribos verticais de 8 mm de diâmetro, com espaçamento de 9 cm. Nestas vigas, os estribos são de aço da classe A ($f_y = 273$ MPa) junto ao a-

vigas	f_{cub}	f_c	f_{ct}	E_{c_0}
E1,E3,E6	34,8	29,5	2,66	37000
E5,G1	38,0	32,2	2,83	38000
G3,G5,G6	33,2	28,1	2,58	36000

Tab. 11.1 - Propriedades do concreto (valores em MPa)

poio esquerdo e da classe B ($f_y = 465$ MPa) junto ao apoio direito. Finalmente, as vigas E6 e G6 não têm qualquer armadura para absorver as trações oriundas do cisalhamento.

A Tab. 11.1 dá os valores médios da resistência cúbica à compressão do concreto, obtidos experimentalmente na data dos ensaios das vigas, e os correspondentes valores da resistência cilíndrica à compressão, da resistência à tração e do módulo de deformação longitudinal inicial do concreto, calculados pelas expressões referenciadas anteriormente.

Para o estudo computacional, adotou-se a malha de elementos finitos apresentada na Fig. 11.2, de vinte e quatro elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão. Para as vigas E1, G1, E6 e G6, usaram-se, apenas, doze elementos, por estas apresentarem simetria.

Nas Figs. 11.3 até 11.10, é feita a comparação da evolução das flechas experimentais e determinadas através do modelo computacional, para cada uma das oito vigas ensaiadas.

11.3 - A influência da largura da alma

No outro conjunto, foram ensaiadas duas séries de quatro vigas, com a mesma armadura, mas diferentes largu-

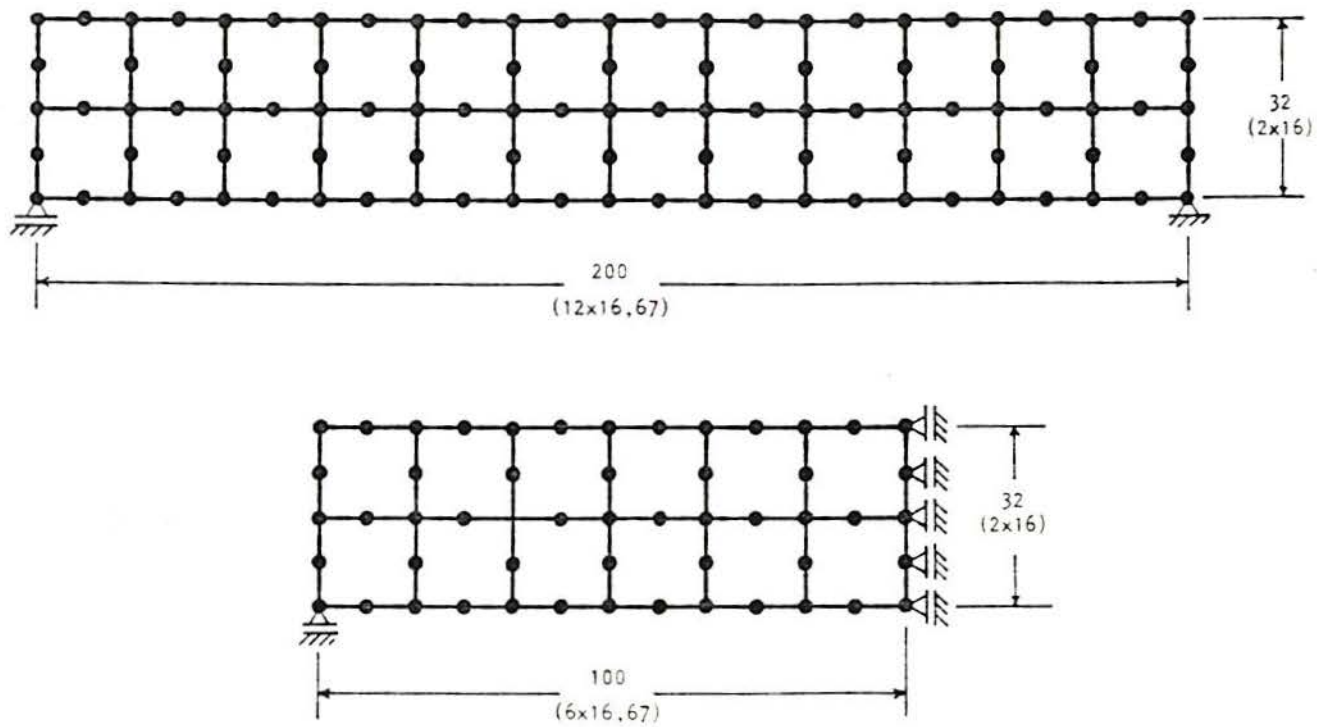


Fig. 11.2 - Discretização adotada para a análise por elementos finitos das vigas com diferentes armaduras de cisalhamento

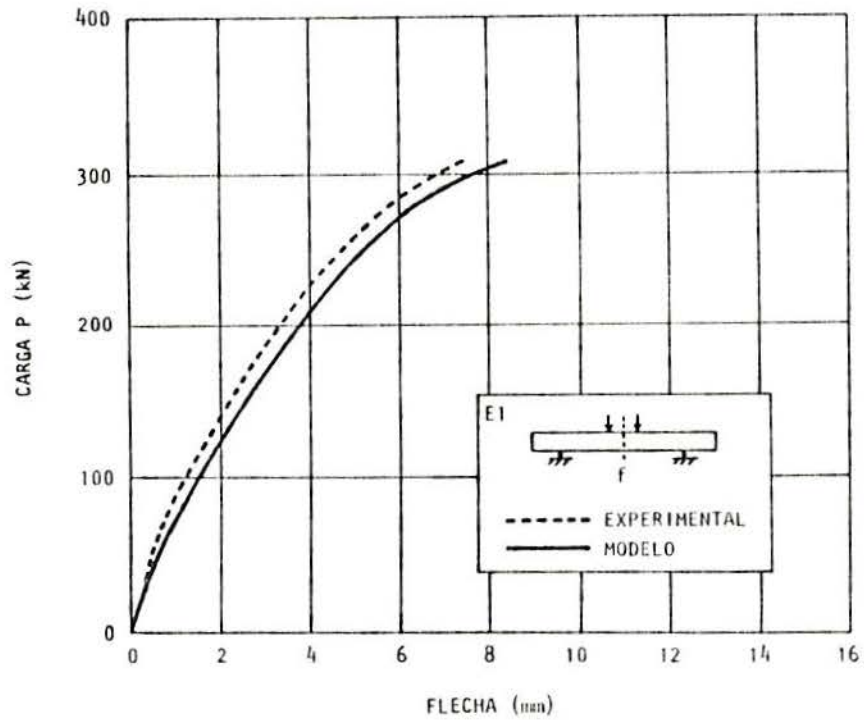


Fig. 11.3 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga E1

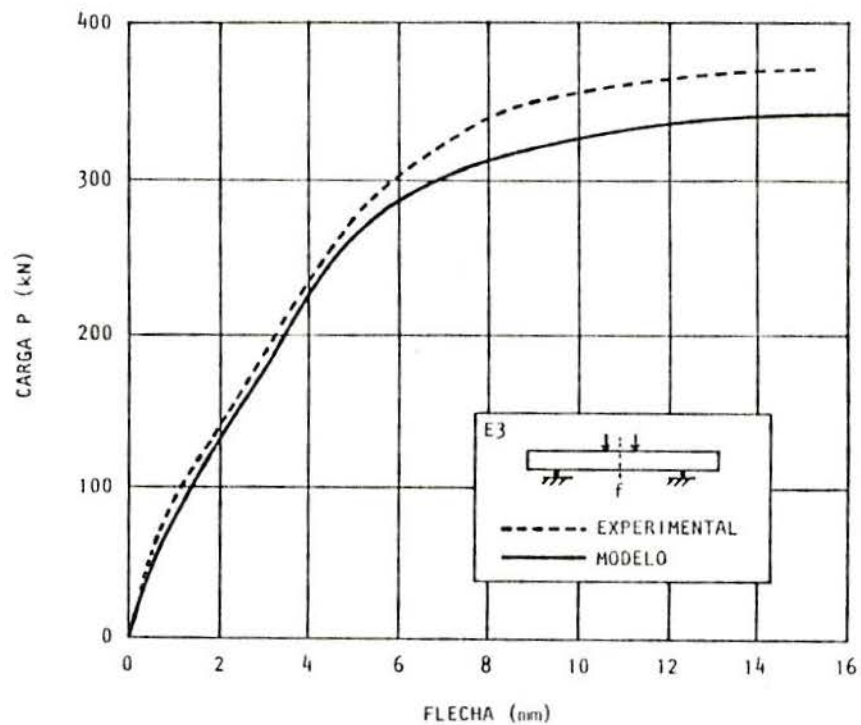


Fig. 11.4 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga E3

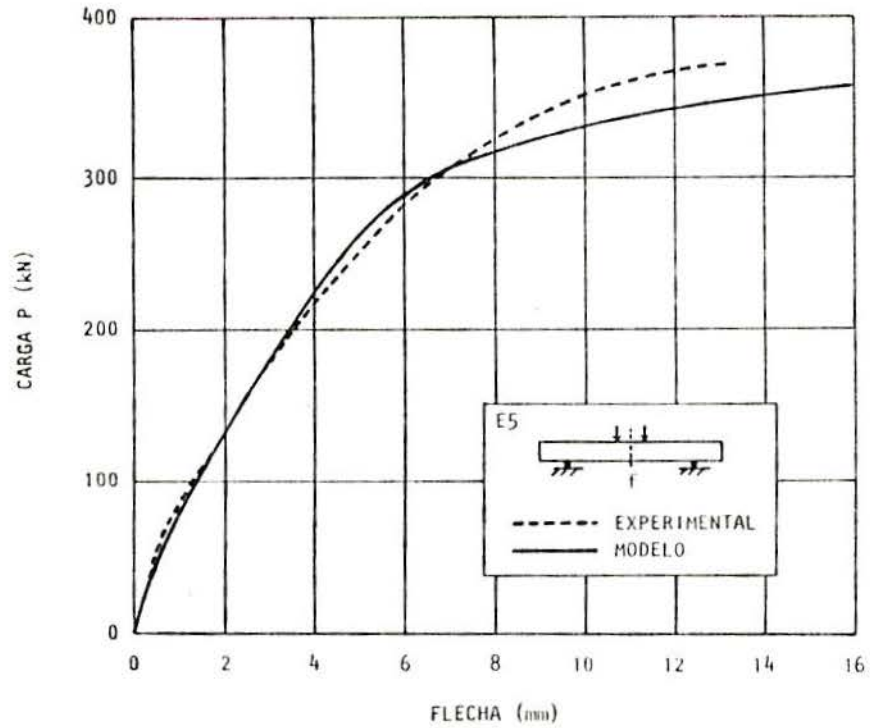


Fig. 11.5 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga E5

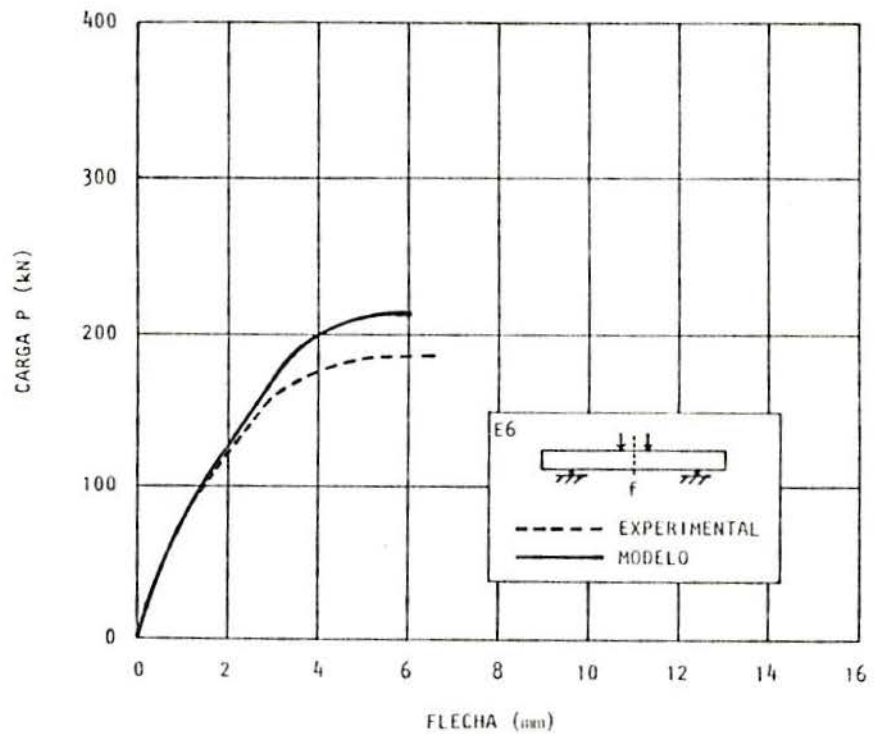


Fig. 11.6 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga E6

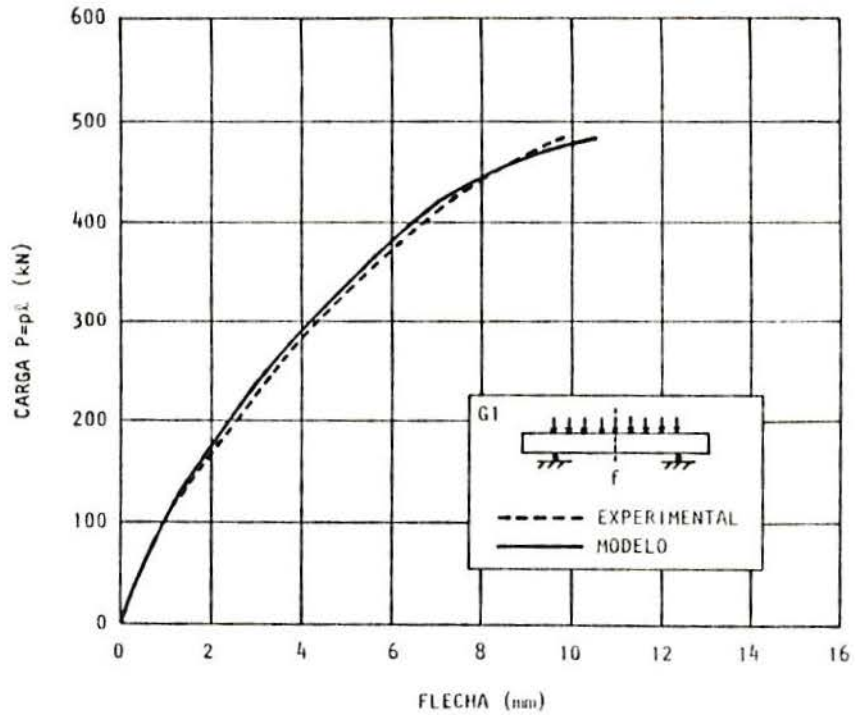


Fig. 11.7 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga G1

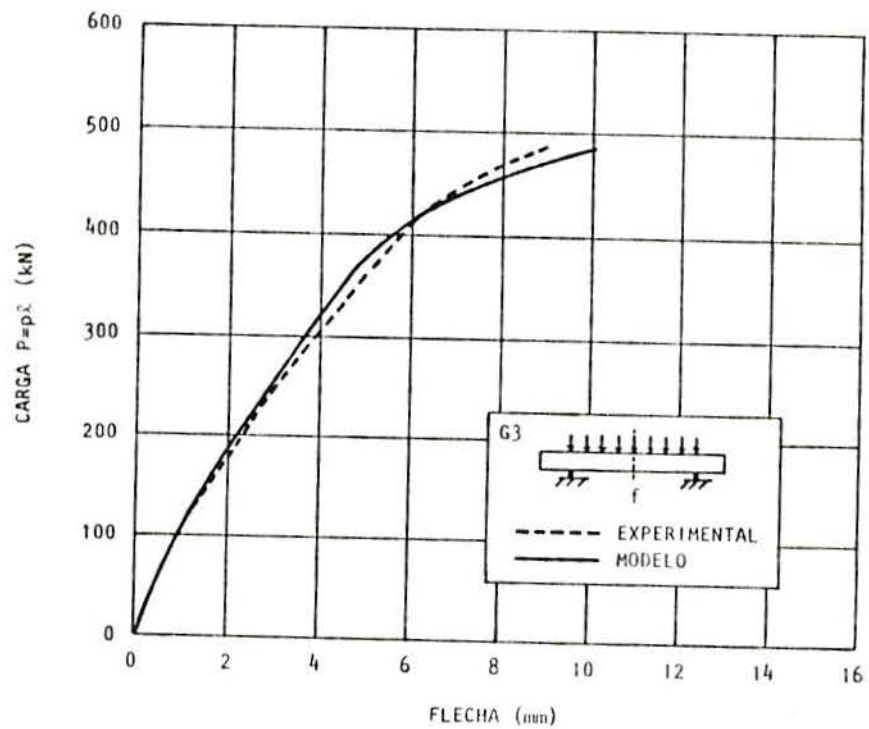


Fig. 11.8 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga G3

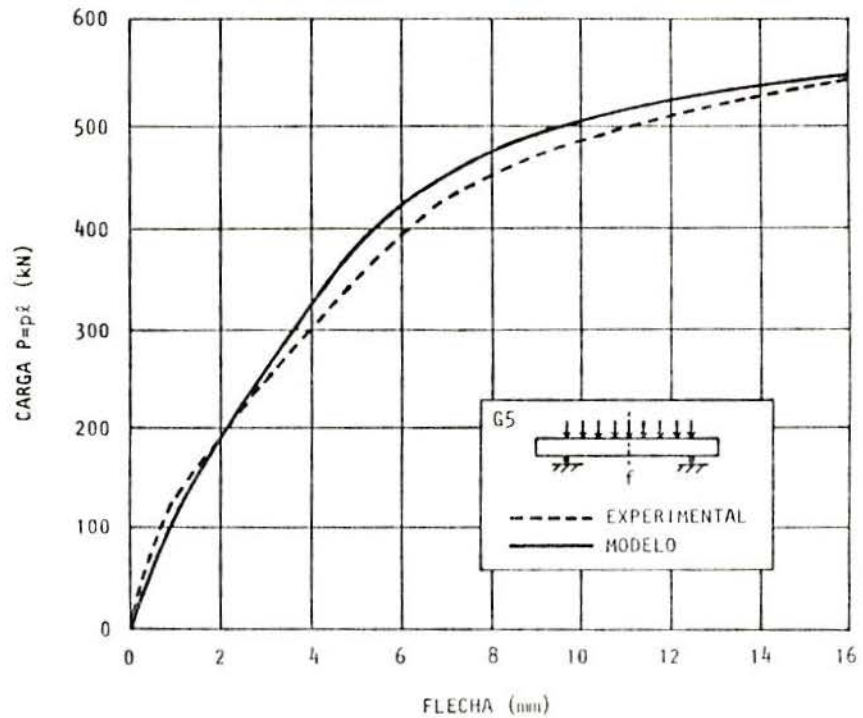


Fig. 11.9 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga G5

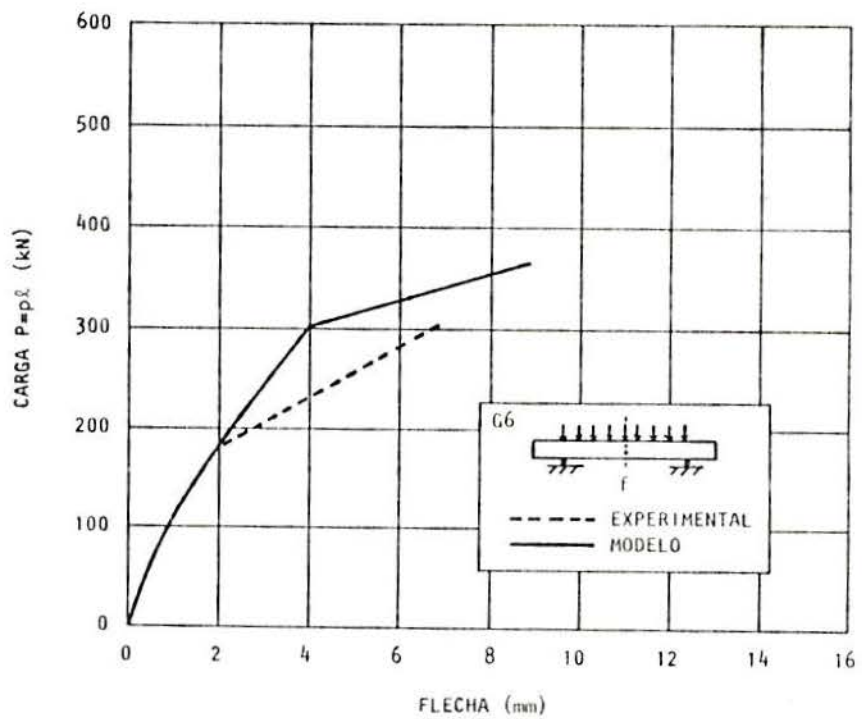


Fig. 11.10 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga G6

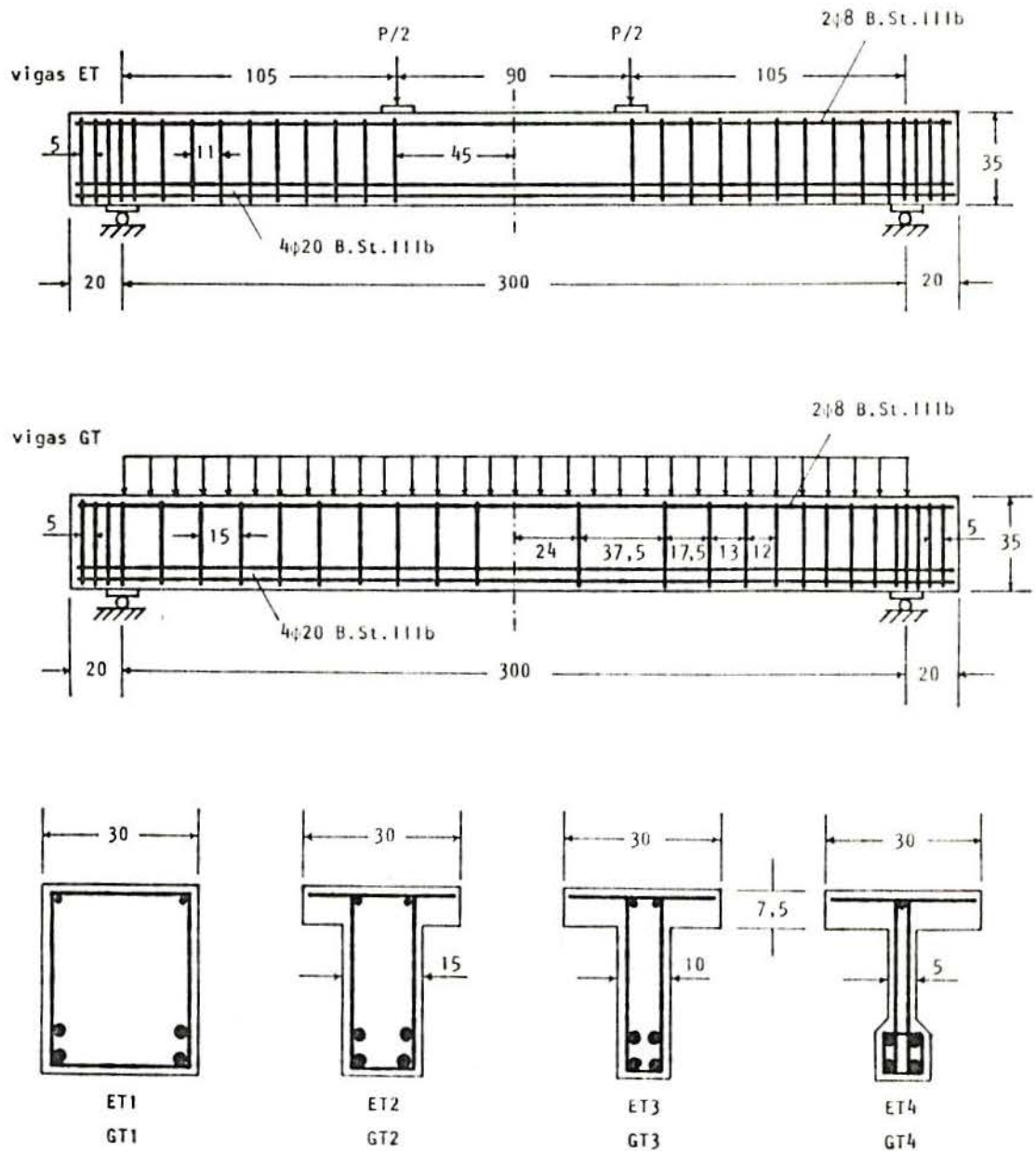


Fig. 11.11 - Detalhamento das vigas com diferentes larguras de alma

ras de alma. As vigas, cujo detalhamento aparece na Fig. 11.11, são referenciadas por ET1, ET2, ET3 e ET4, na série submetida a duas cargas concentradas, e por GT1, GT2, GT3 e GT4, na série submetida à carga uniformemente distribuída.

Todas as vigas apresentam a mesma armadura longitudinal. Esta consiste, inferiormente, de quatro barras de

vigas	f_{cub}	f_{c}	f_{ct}	E_{C_0}
ET	28,5	24,2	2,33	34000
GT	25,1	21,3	2,14	33000

Tab. 11.2 - Propriedades do concreto (valores em MPa)

20 mm de diâmetro ($f_y = 428$ MPa) e, superiormente, de duas barras de 8 mm de diâmetro ($f_y = 465$ MPa). Todas as barras são de aço da classe B.

As vigas da série ET têm estribos verticais de 6 mm de diâmetro ($f_y = 320$ MPa, aço classe A), uniformemente espaçados. Nas vigas da série GT, os estribos verticais, também de 6 mm de diâmetro, têm espaçamento variável junto ao apoio direito e uniforme junto ao apoio esquerdo.

Na Tab. 11.2, são mostrados os valores médios da resistência cúbica à compressão do concreto, determinados experimentalmente na data dos ensaios das vigas, e os valores correspondentes da resistência cilíndrica à compressão, da resistência à tração e do módulo de deformação longitudinal inicial do concreto, calculados usando as expressões apresentadas no item 11.1.

Para a análise computacional, utilizou-se a malha de elementos finitos de quarenta elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão, conforme a Fig. 11.12. Para as vigas da série ET, empregou-se uma malha com vinte elementos, por estas apresentarem simetria.

Nas Figs. 11.13 até 11.20, mostra-se a evolução das flechas ao longo do carregamento para o conjunto das oito vigas, segundo os resultados dos ensaios e os obtidos através do modelo computacional.

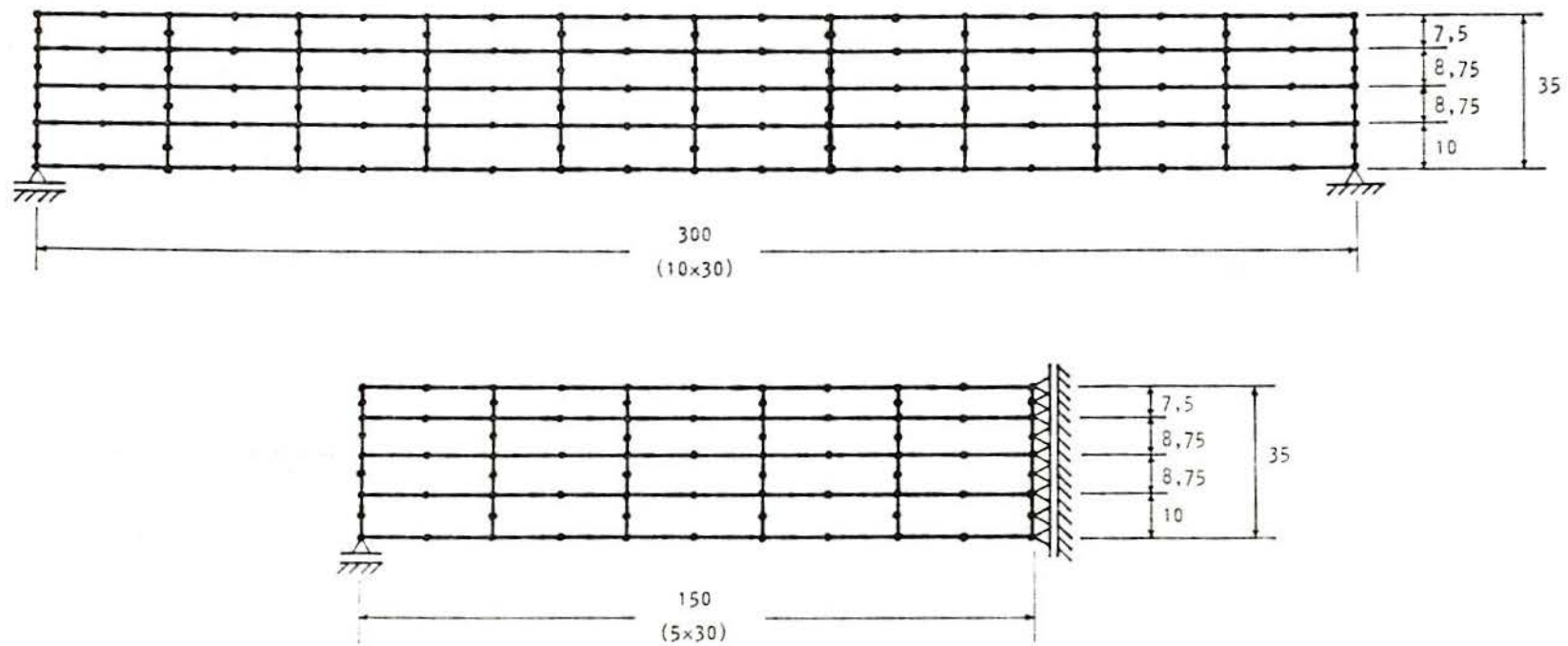


Fig. 11.12 - Discretização adotada para a análise por elementos finitos das vigas com diferentes larguras de alma

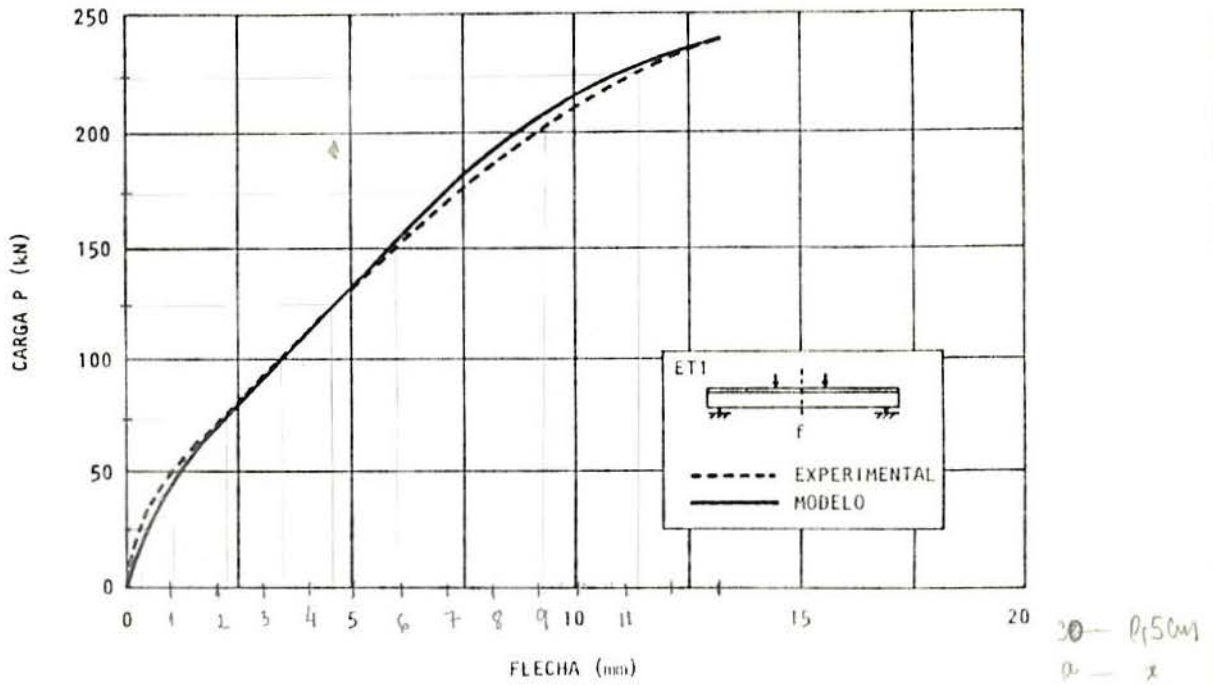


Fig. 11.13 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET1

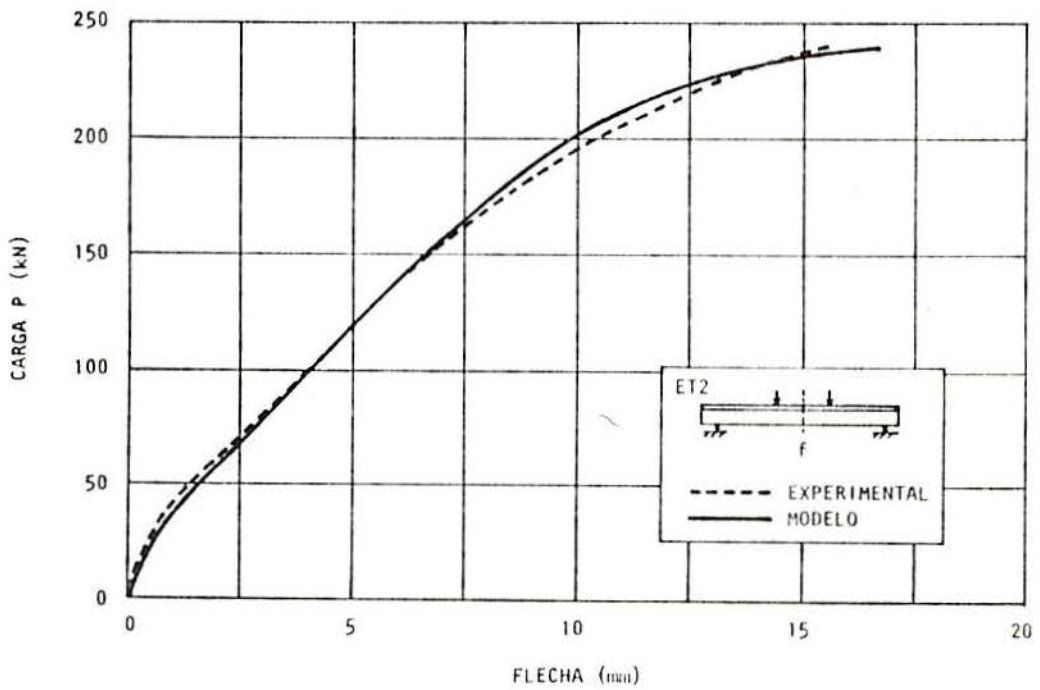


Fig. 11.14 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET2

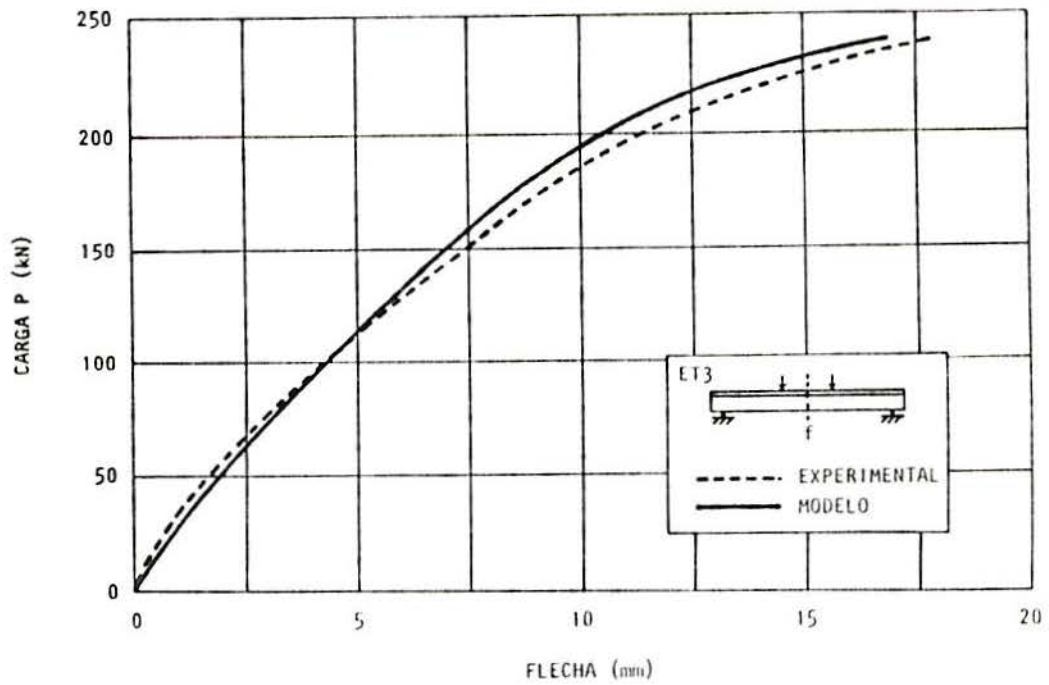


Fig. 11.15 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET3

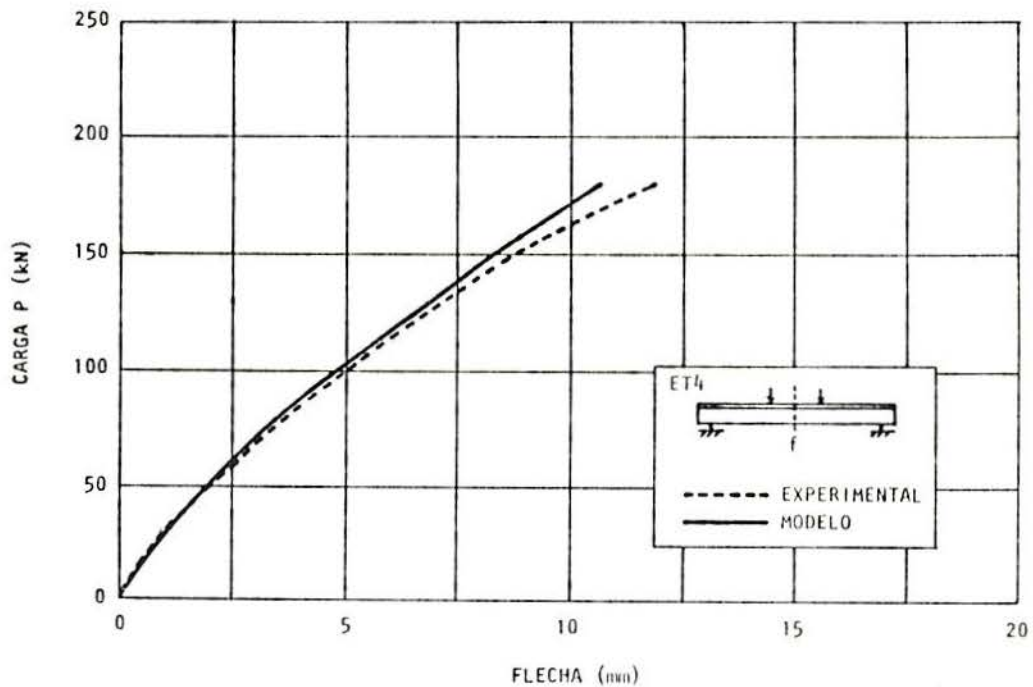


Fig. 11.16 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET4

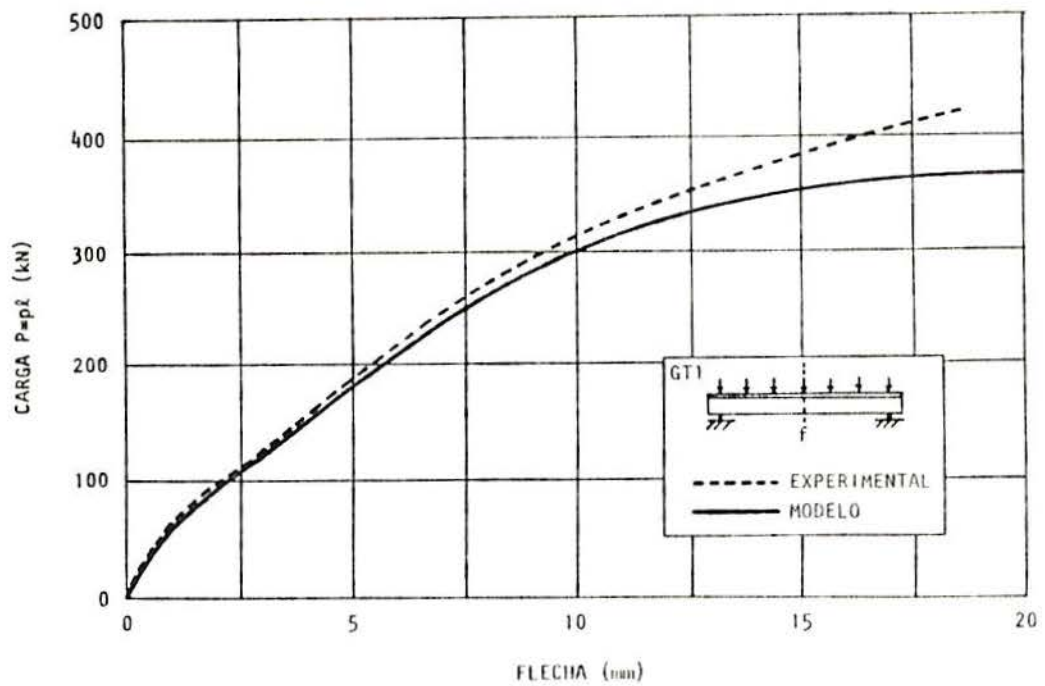


Fig. 11.17 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT1

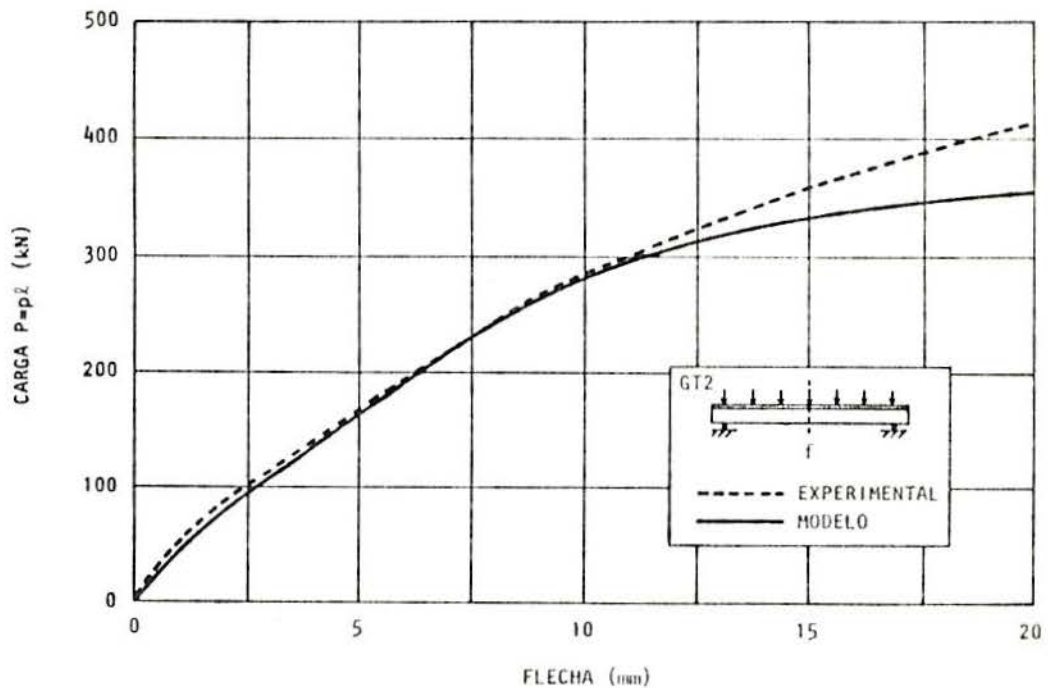


Fig. 11.18 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT2

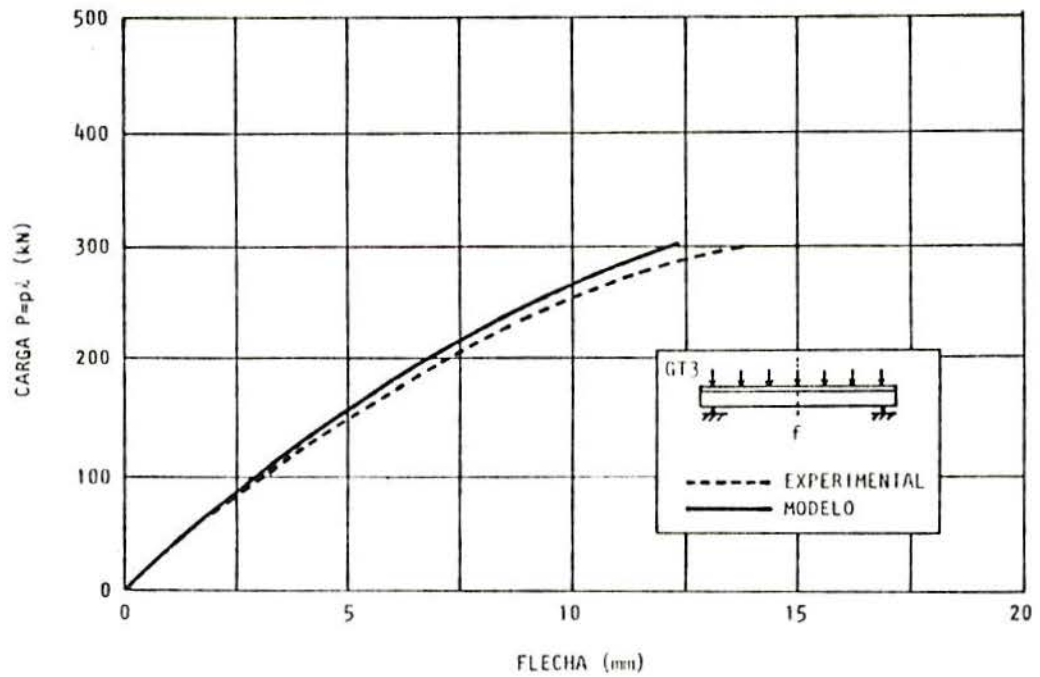


Fig. 11.19 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT3

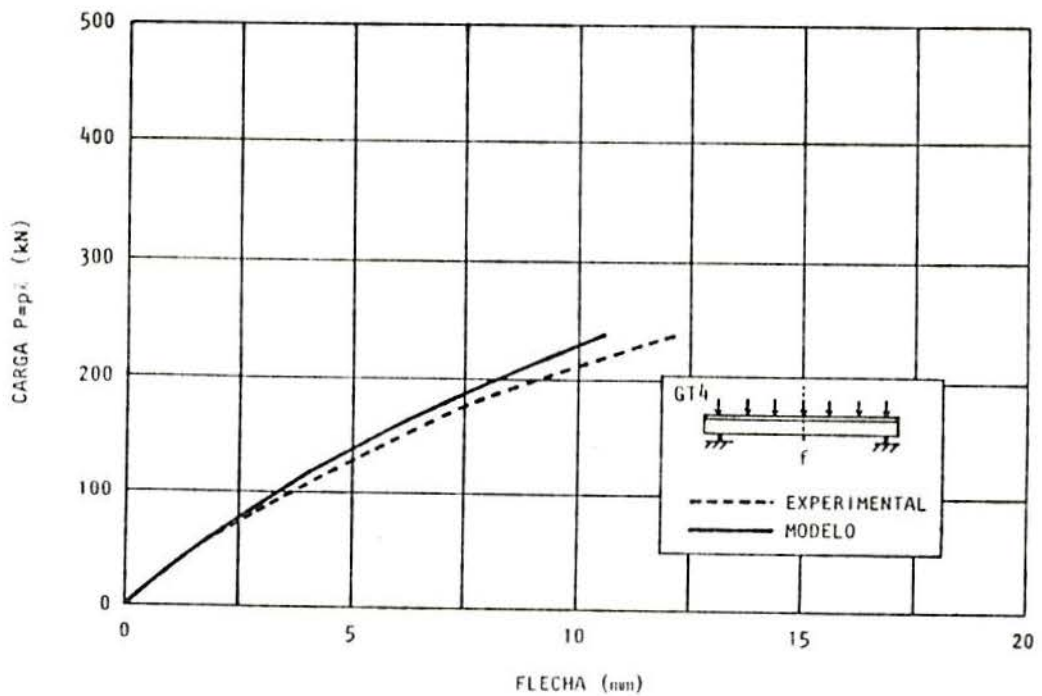


Fig. 11.20 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT4

Nas Figs. 11.21 até 11.24, comparam-se as tensões nos estribos, valores obtidos através do modelo e experimentais, para cada uma das vigas ET. Os valores analisados são as tensões médias, na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 38 e 71 cm a partir do apoio. A Fig. 11.25 apresenta, em conjunto, as curvas carga x tensão nos estribos, determinadas pelo estudo computacional, para as quatro vigas ET.

As Figs. 11.26 até 11.30 apresentam a análise da evolução das tensões nos estribos em função do carregamento, para as vigas GT. Neste caso, comparam-se as tensões médias, na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 20,5 e 61,5 cm a partir do apoio (estribos com espaçamento variável).

As Figs. 11.31 e 11.32 comparam resultados do modelo e experimentais sobre a abertura de fissuras, na região compreendida entre o apoio e a carga concentrada, nas vigas ET. Na Fig. 11.31, os valores correspondem a aberturas de fissuras na altura da armadura tracionada, enquanto na Fig. 11.32, analisam-se valores a meia-altura na alma das vigas.

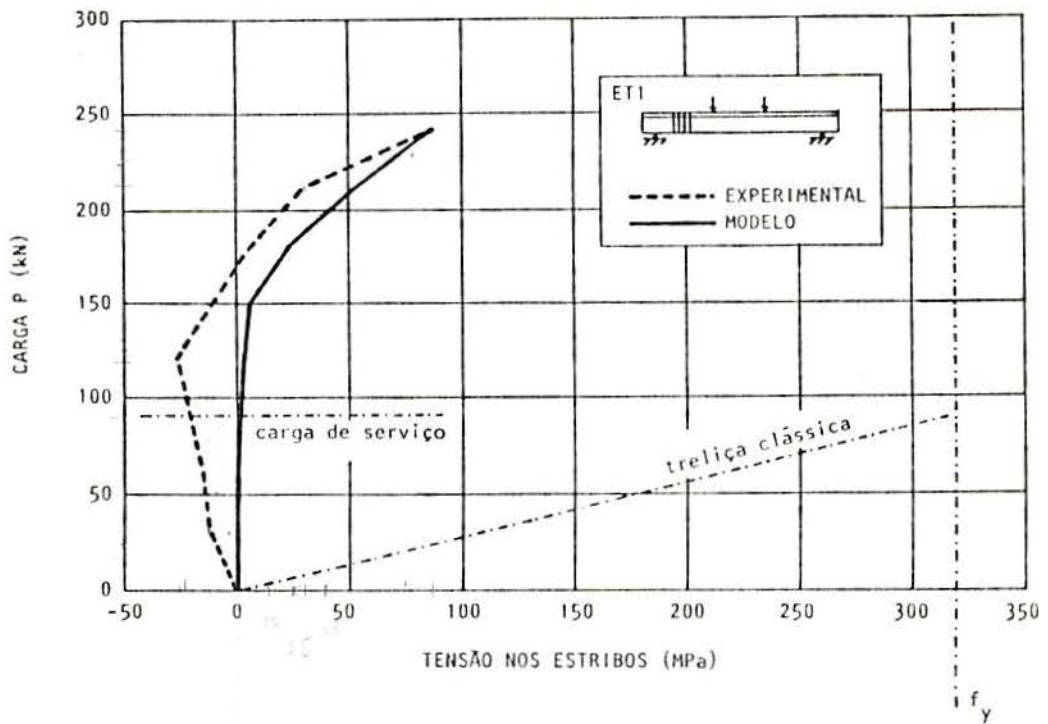


Fig. 11.21 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET1

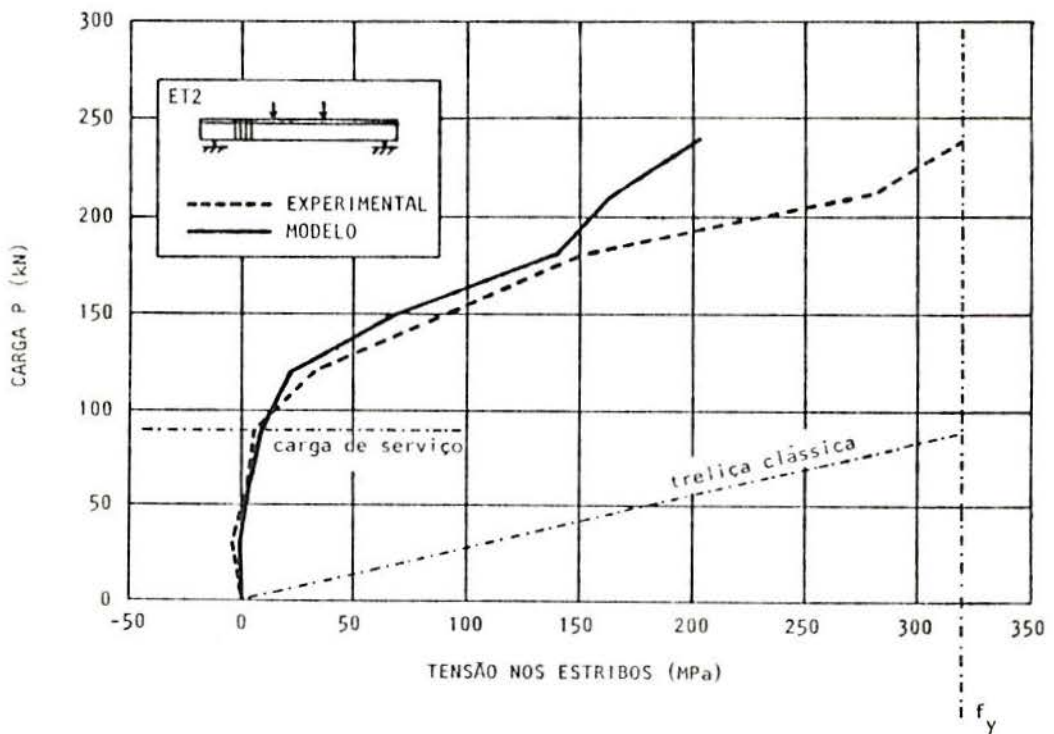


Fig. 11.22 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET2

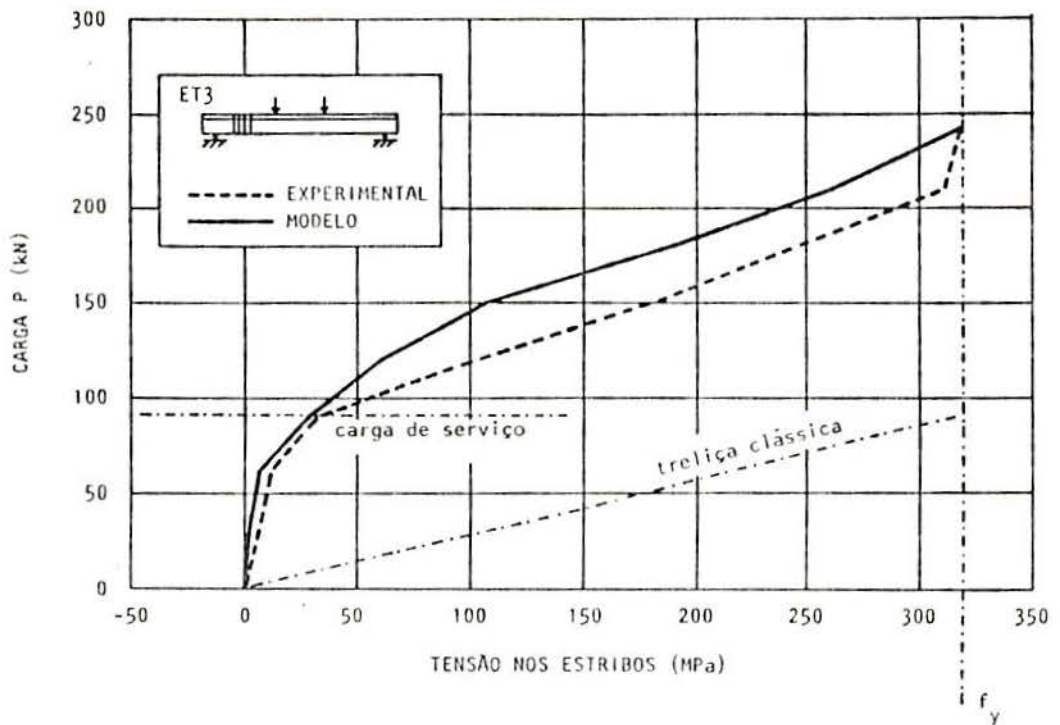


Fig. 11.23 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET3

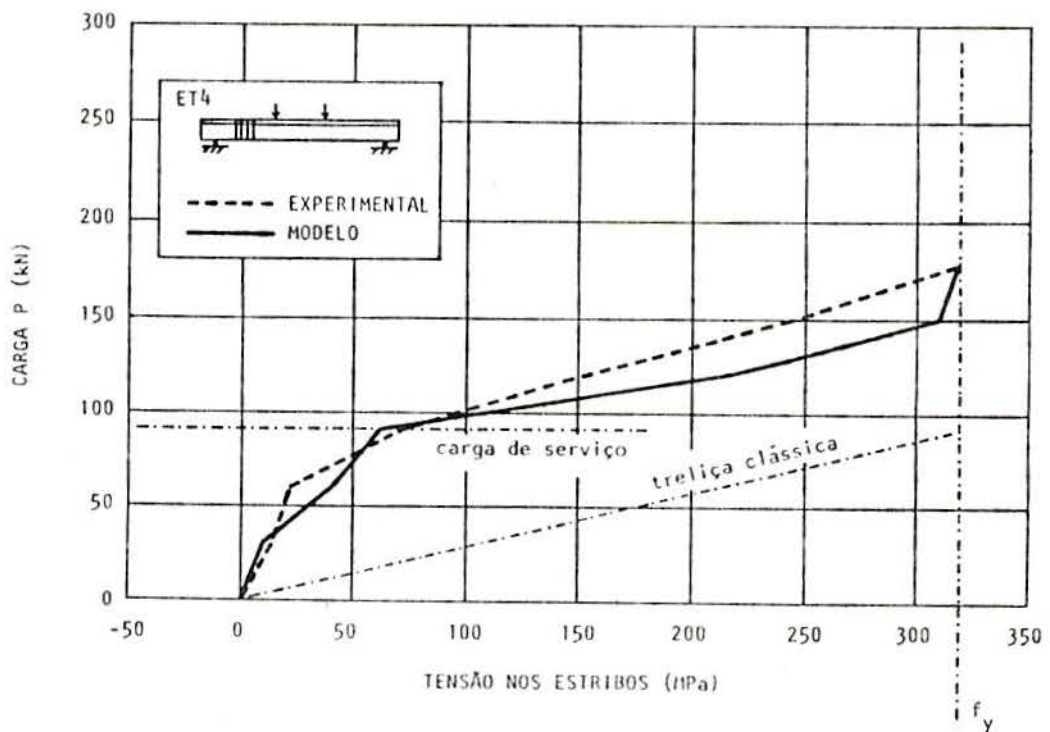


Fig. 11.24 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga ET4

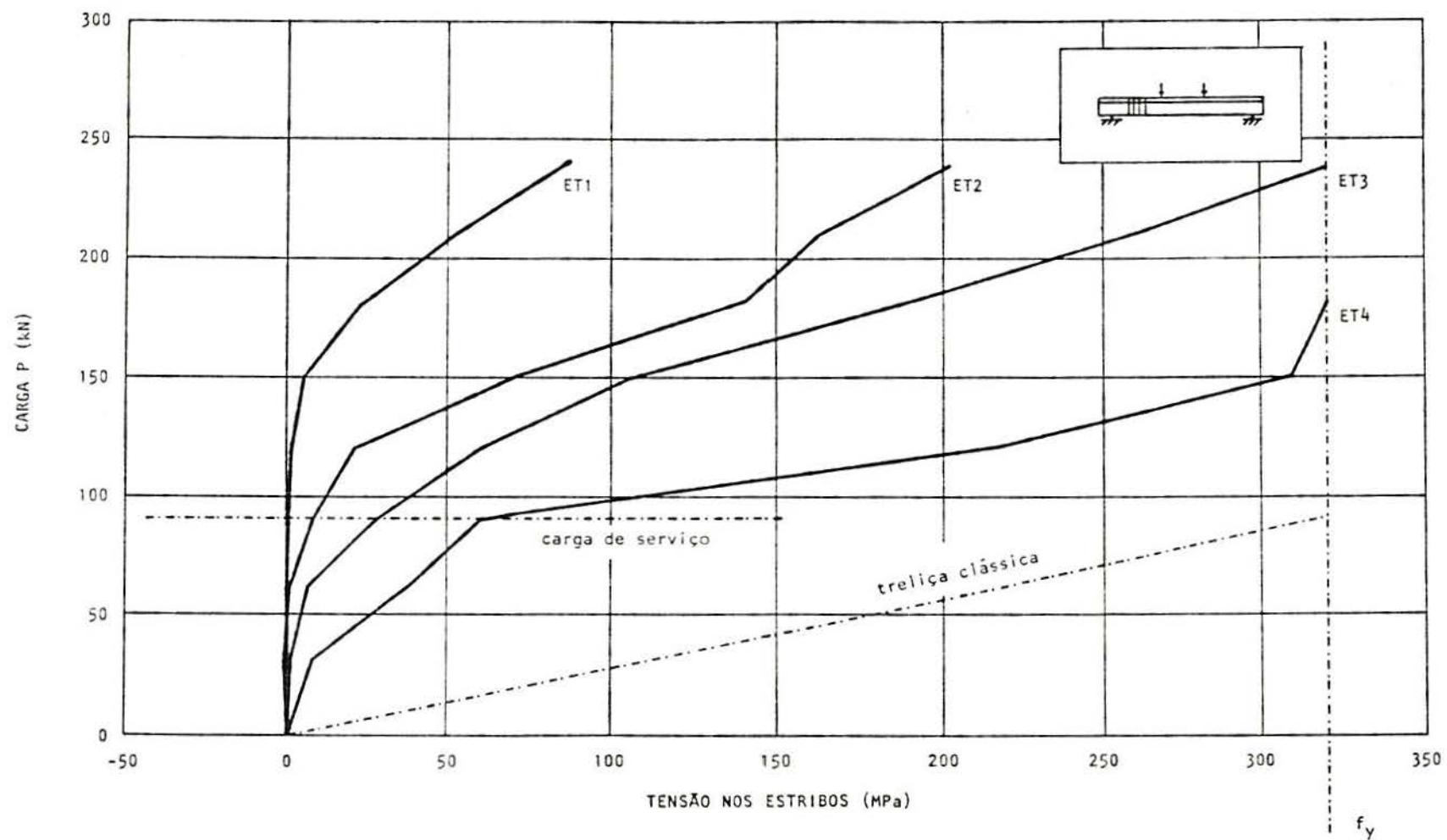


Fig. 11.25 - Tensões nos estribos, conforme o modelo computacional, para as vigas ET

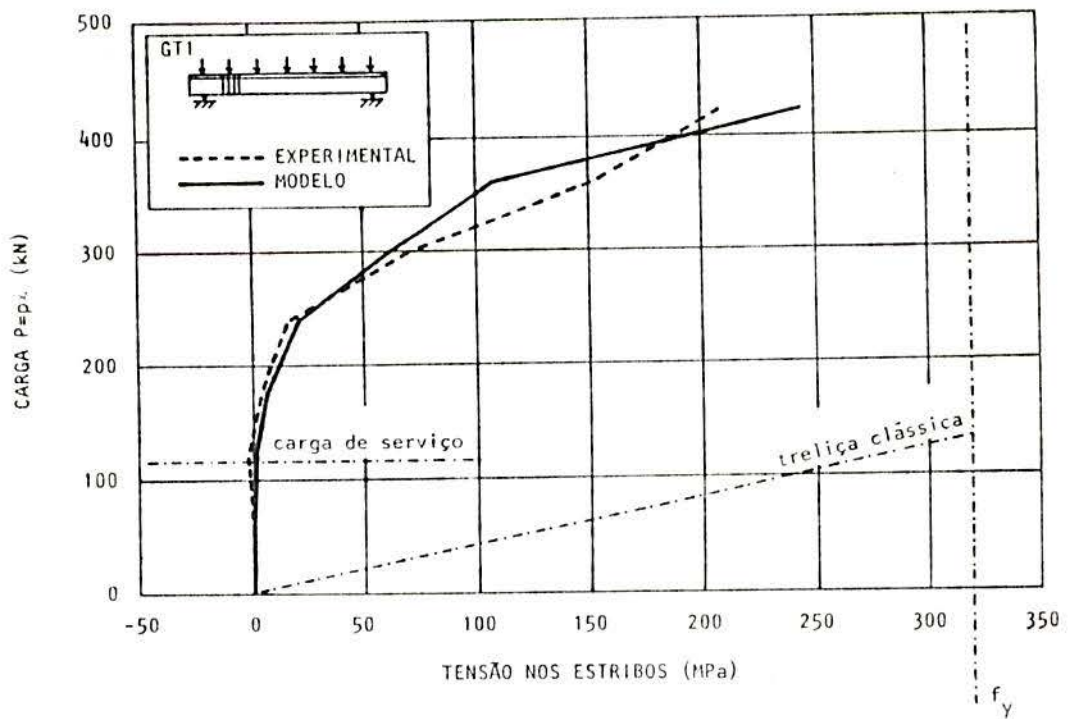


Fig. 11.26 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT1

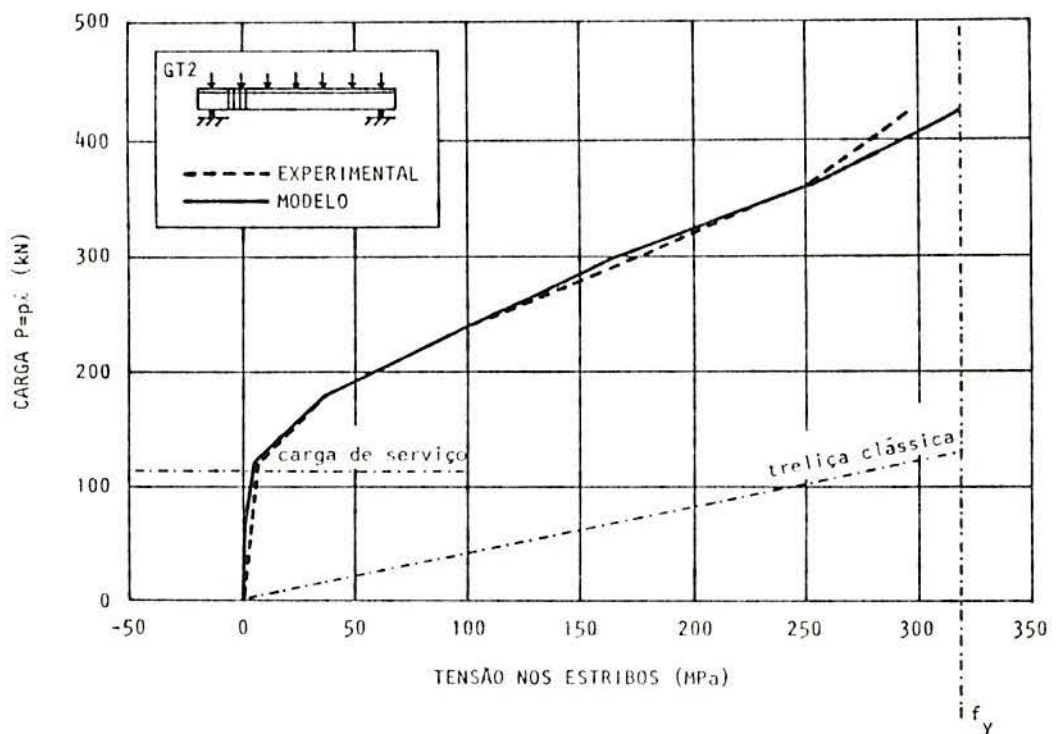


Fig. 11.27 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT2

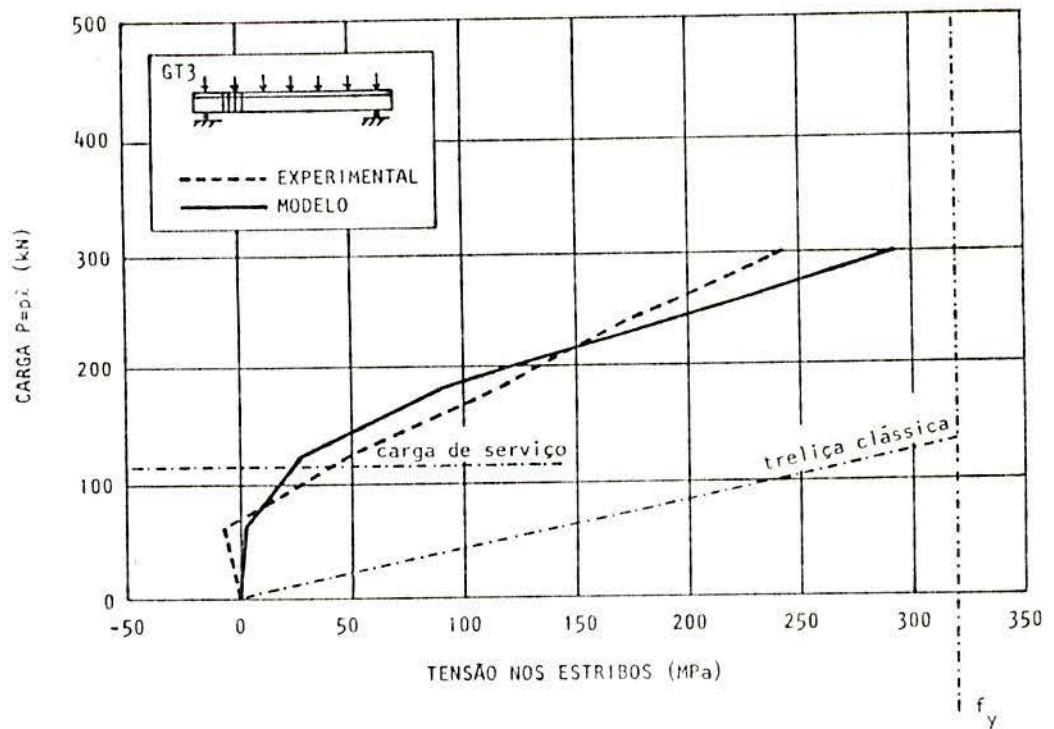


Fig. 11.28 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT3

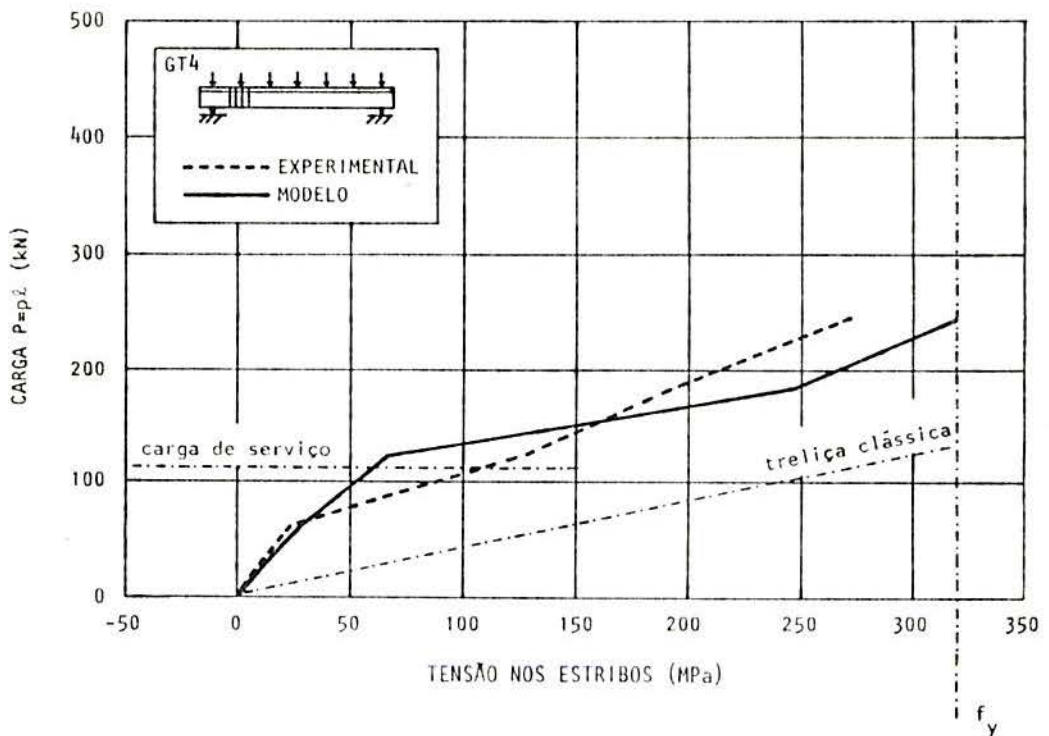


Fig. 11.29 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga GT4

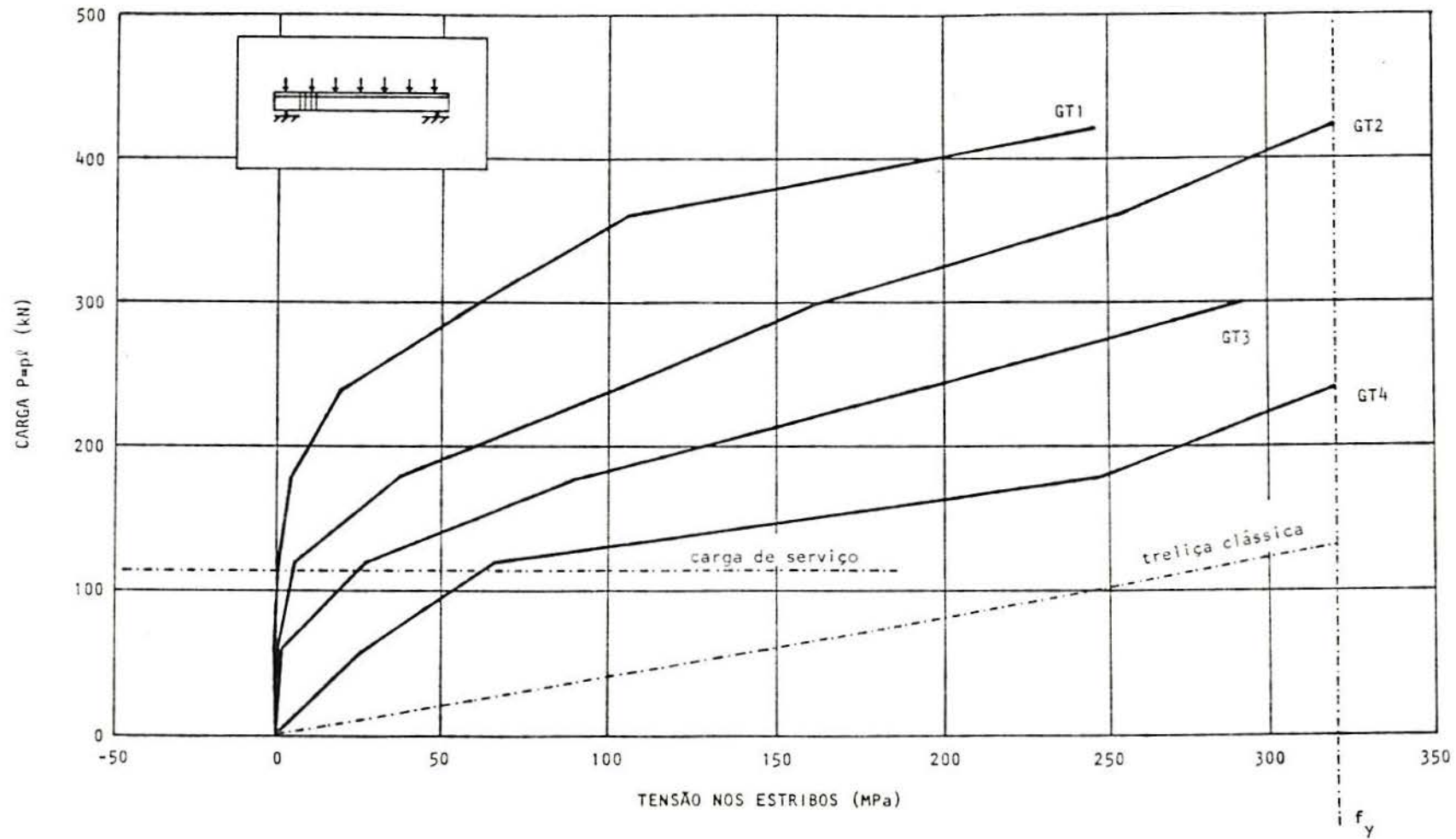


Fig. 11.30 - Tensões nos estribos, conforme o modelo computacional, para as vigas GT

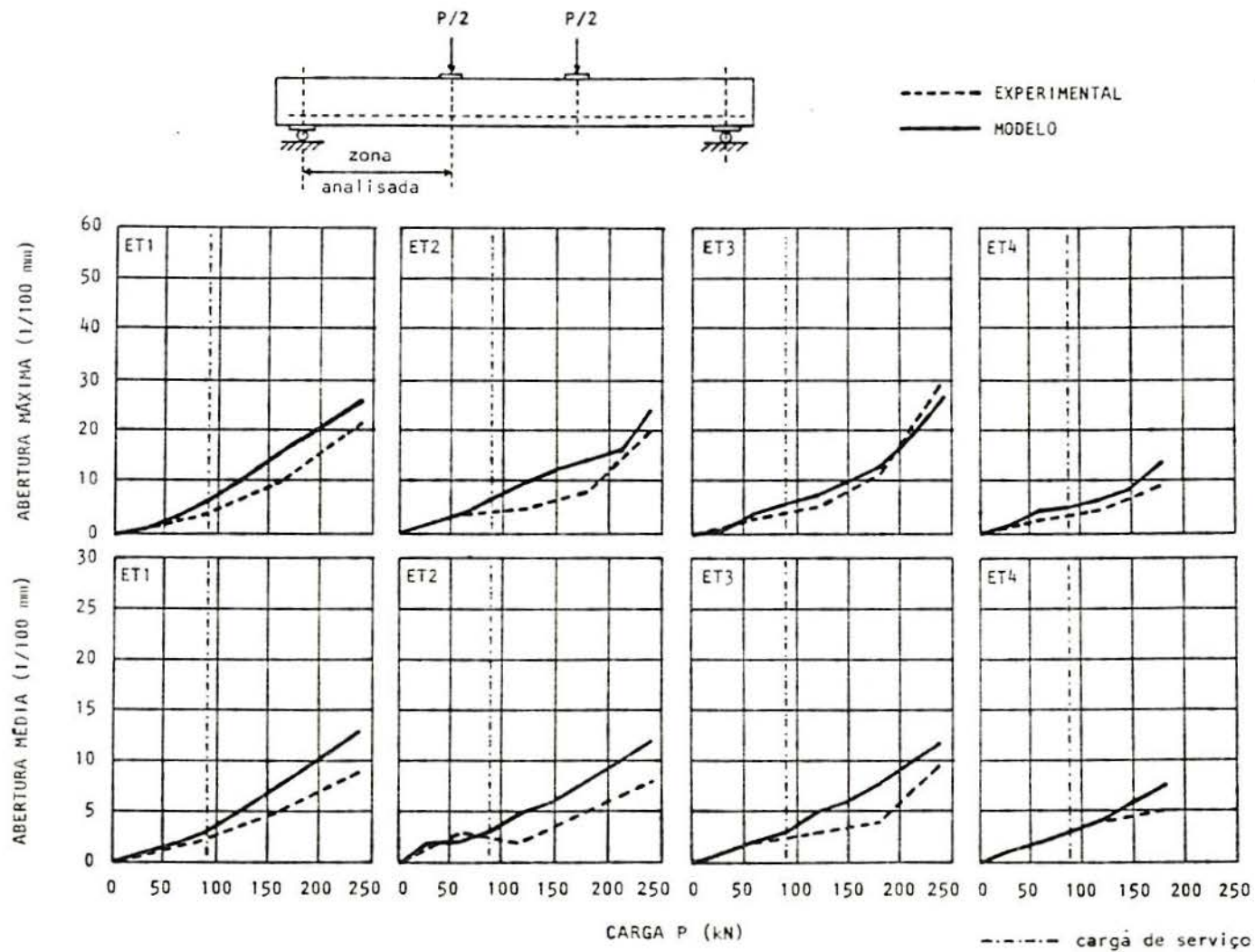


Fig.11.31 - Comparação entre as aberturas de fissura, na altura da armadura tracionada, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para as vigas ET

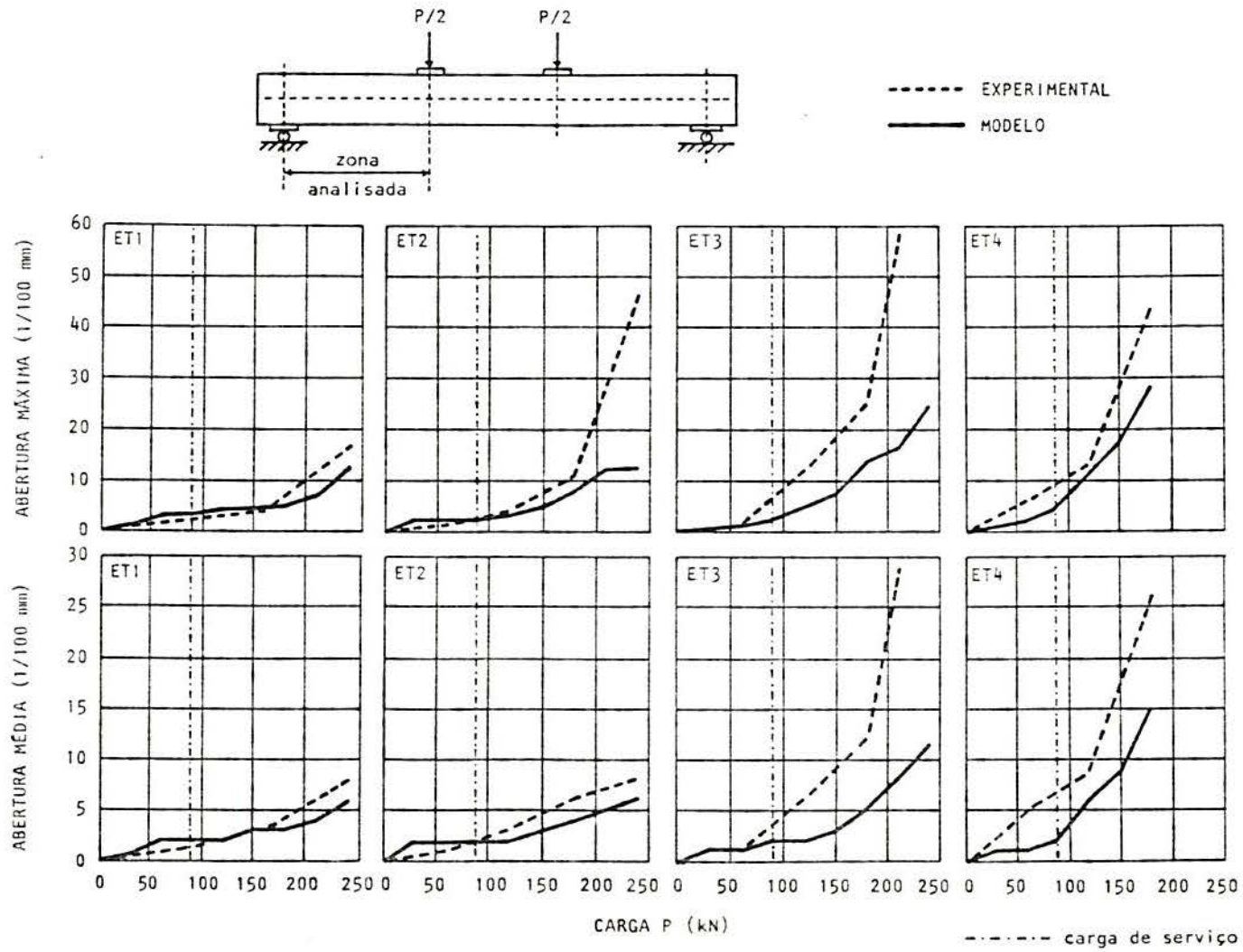


Fig. 11.32 - Comparação entre as aberturas de fissura, a meia-altura na alma, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para as vigas ET

12 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ABERTURA NA ALMA

12.1 - Introdução

O propósito deste capítulo é ilustrar a utilização do modelo computacional, no estudo de vigas de concreto armado com abertura na alma. Com este fim, comparam-se os resultados obtidos através do modelo, com os da análise experimental realizada por Takahashi, em [109].

12.2 - As características das vigas

Em [109], foram executadas três vigas, referenciadas por B1, B2, B3. O detalhamento destas vigas aparece na Fig. 12.1. As vigas B2 e B3 apresentam uma abertura circular, na alma, com diâmetro de quarenta por cento da altura da viga, e diferem entre si, unicamente, pela armadura transversal junto à abertura. A viga B1 possui a mesma armadura de B2, entretanto não possui qualquer abertura.

As vigas foram projetadas de forma tal que as fissuras de cisalhamento ocorressem junto ao furo, levando as peças à ruptura. No trecho junto à abertura, foram colocados estribos de 6,3 mm de diâmetro ($f_y = 583$ MPa, aço classe A), espaçados de 12,5 cm. Nos trechos laterais, utilizaram-se estribos de 6,3 mm de diâmetro, a cada 10 cm.

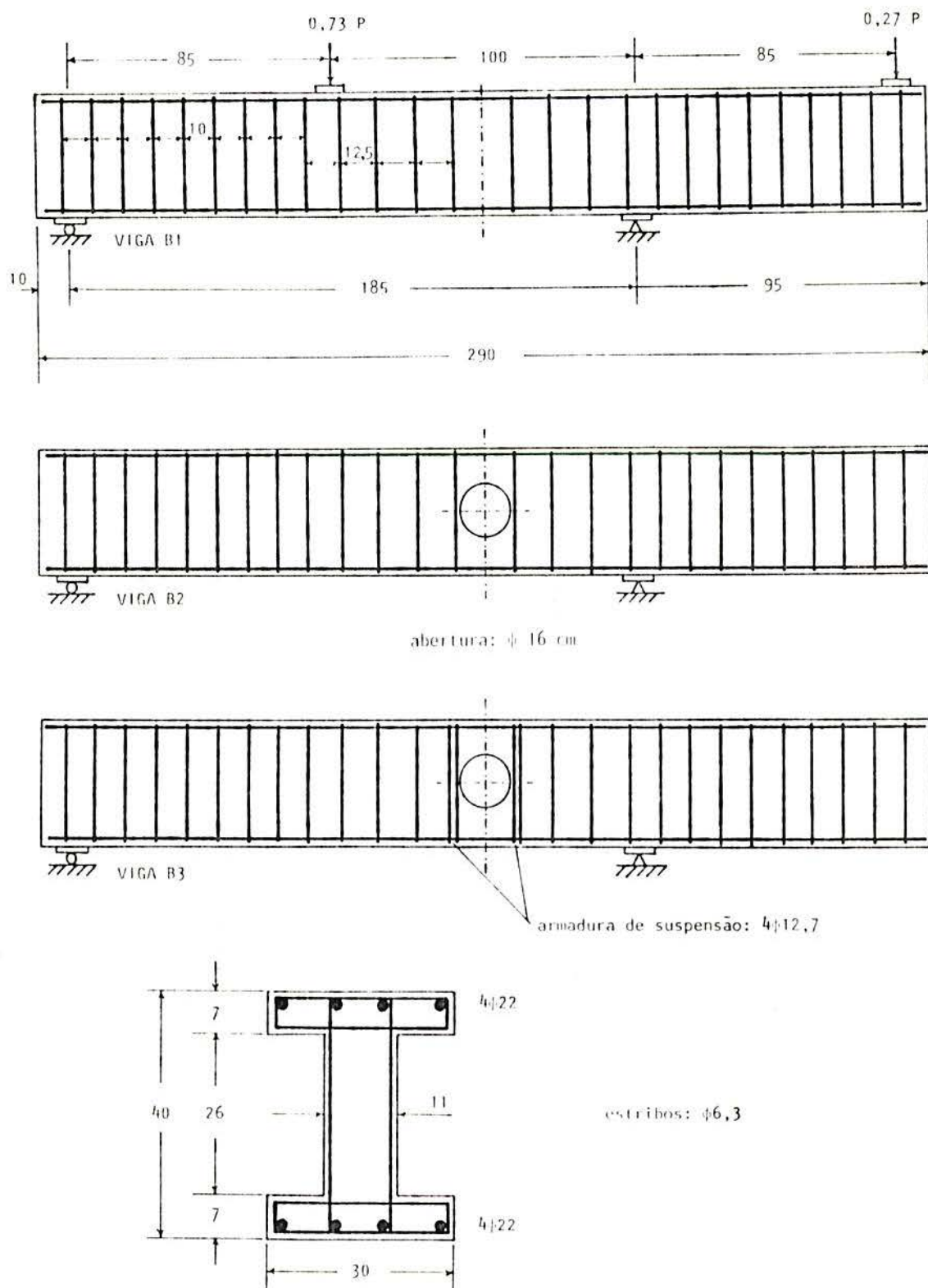


Fig. 12.1 - Detalhamento das vigas B1, B2 e B3

vigas	f_c	f_{ck}	f_{ct}	E_{C_0}
B1	35,3	33,1	3,09	39000
B2	32,6	28,1	2,78	38000
B3	33,5	29,9	2,89	38500

Tab. 12.1 - Propriedades do concreto (valores em MPa)

Dois estribos de 12,7 mm de diâmetro ($f_y = 472$ MPa, aço classe A) foram colocados de cada lado da abertura da viga B3, como armadura de suspensão.

A armadura longitudinal das vigas era composta por quatro barras de 22 mm de diâmetro ($f_y = 428$ MPa, aço classe A), nas mesas superior e inferior das peças.

A resistência cilíndrica à compressão do concreto, medida nas datas dos ensaios, apresentaram os valores médios e característicos mostrados na Tab. 12.1. A resistência à tração e o módulo de deformação longitudinal inicial do concreto, que também aparecem nesta tabela, foram calculados através das seguintes expressões, recomendados pelo Código Modelo do CEB [41]

$$f_{ct} = 0,30 f_{ck}^{2/3} \quad (12.1)$$

$$E_{C_0} = 1,25 \times 9500 f_c^{1/3} \quad (12.2)$$

onde os valores são dados em MPa.

As vigas B1, B2 e B3 foram ensaiadas, respectivamente, a 181, 183 e 175 dias após a concretagem. Para a análise computacional, consideraram-se as deformações por fluência e retração do concreto a partir do sétimo dia, tomando-se

uma temperatura média de 20°C e uma umidade relativa do ar de 70%.

Para a análise por elementos finitos, empregou-se a malha apresentada na Fig. 12.2. Esta malha é composta de cinquenta e cinco elementos quadrangulares quadráticos, para estado plano de tensão.

12.3 - Análise dos resultados

As vigas foram dimensionadas de forma que a ruptura ocorresse por cisalhamento, dentro do segmento central de um metro. No ensaio, a viga B1, sem abertura na alma, rompeu para uma carga total de 560 kN. A viga B2, em virtude da presença da abertura, atingiu a ruptura em uma carga de 300 kN, bem inferior a da viga B1. A existência de uma armadura de suspensão junto ao furo, aumentou a capacidade resistente da viga B3, cuja carga última, determinada no ensaio, foi de 390 kN.

As Figs. 12.3 e 12.4 apresentam a evolução dos deslocamentos verticais, nas seções de aplicação das cargas, conforme a variação do carregamento, para as três vigas, segundo a análise por elementos finitos.

Nas Figs. 12.5 até 12.7, são mostrados os esforços máximos suportados pelos estribos, dentro do segmento central da viga, conforme o modelo computacional. Estes esforços foram calculados como o produto da tensão máxima no estribo pela área da sua seção transversal (dois ramos). Como foi descrito anteriormente, todos os estribos das vigas B1 e B2 têm 6,3 mm de diâmetro, enquanto a viga B3 tem, ainda, estribos de 12,7 mm de diâmetro, junto à abertura.

As Figs. 12.8 até 12.10 comparam valores, obtidos experimentalmente e através do modelo, das tensões nos estribos posicionados junto à abertura, para as três vigas. As tensões, neste caso, foram determinadas a meia-altura nas vigas.

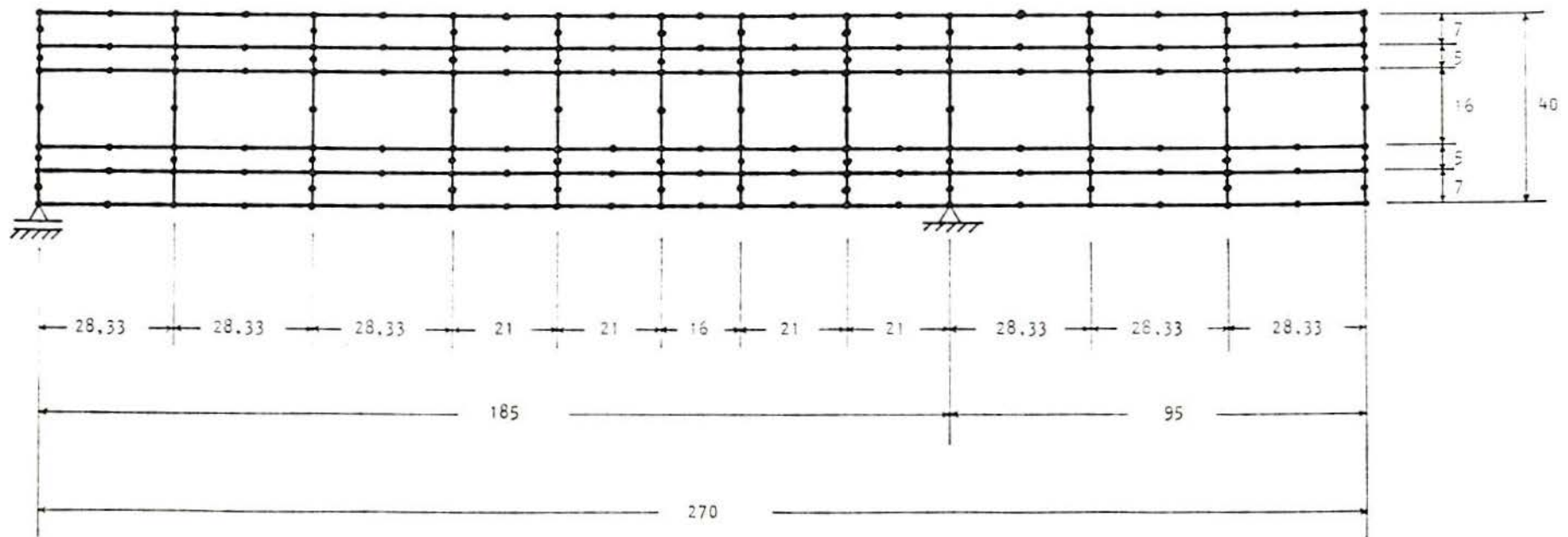


Fig. 12.2 - Discretização das vigas para a análise por elementos finitos

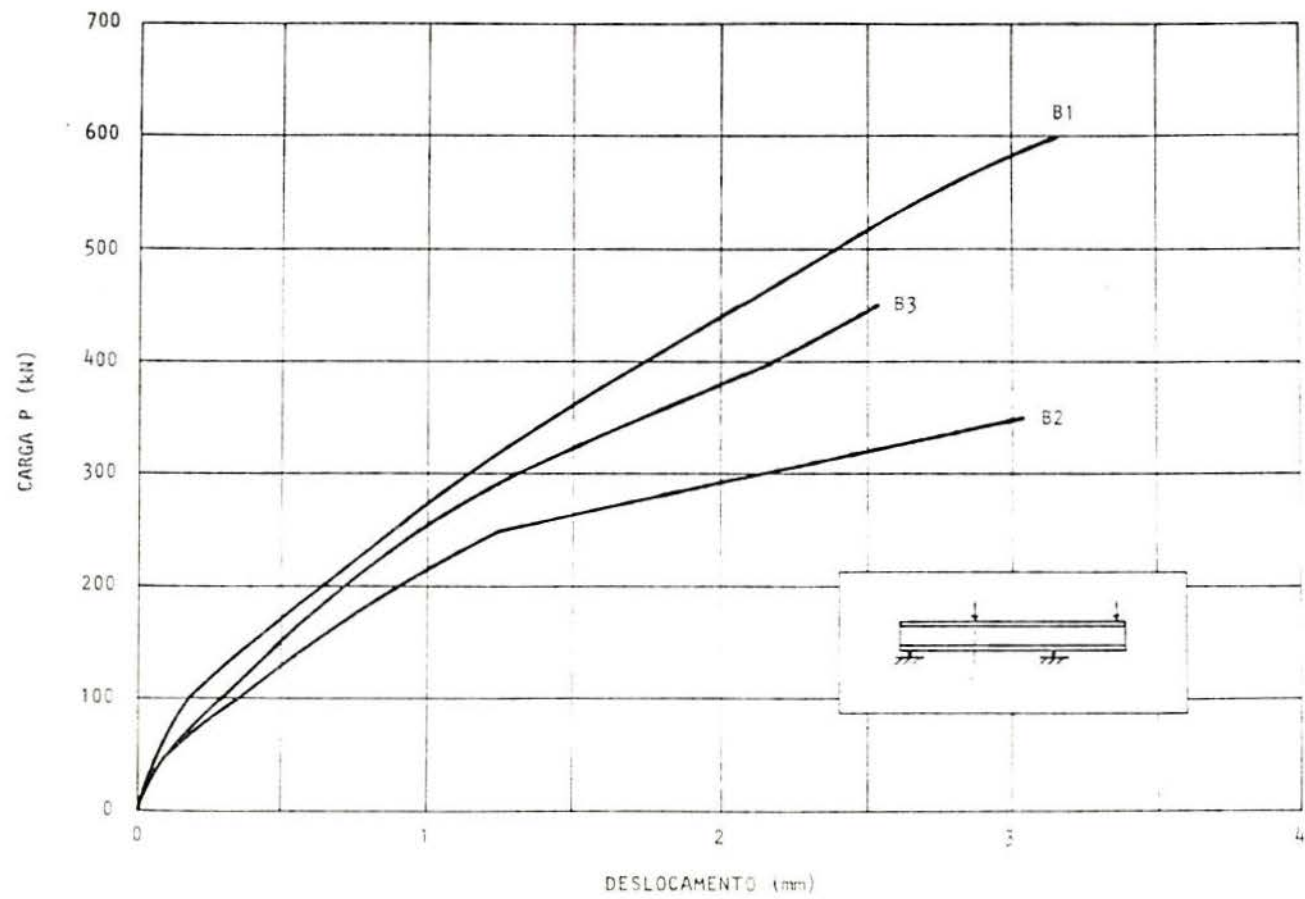


Fig. 12.3 - Curvas carga x deslocamento vertical, sob a carga do vão, para as três vigas, segundo o modelo computacional

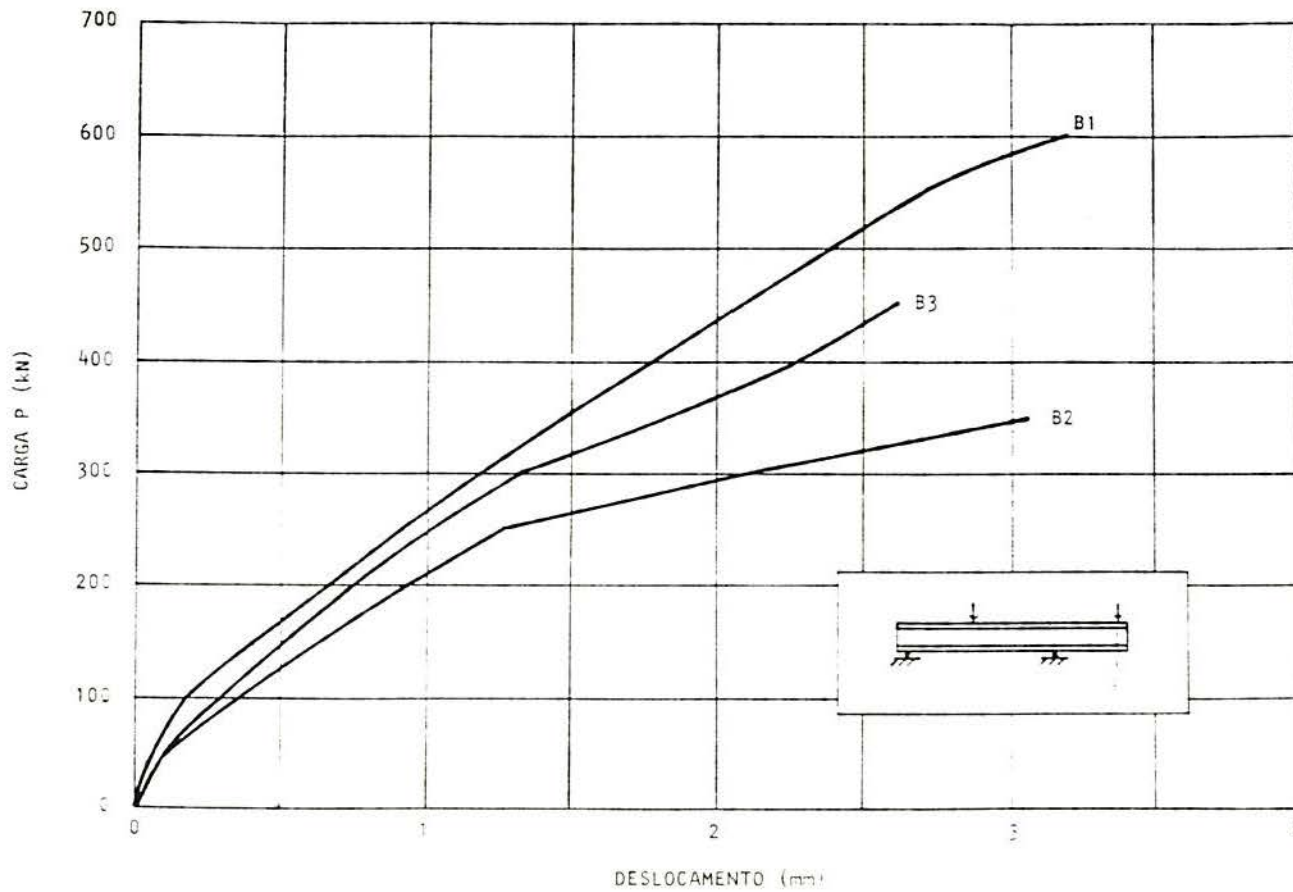


Fig. 12.4 - Curvas carga x deslocamento vertical, sob a carga do balanço, para as três vigas, segundo o modelo computacional

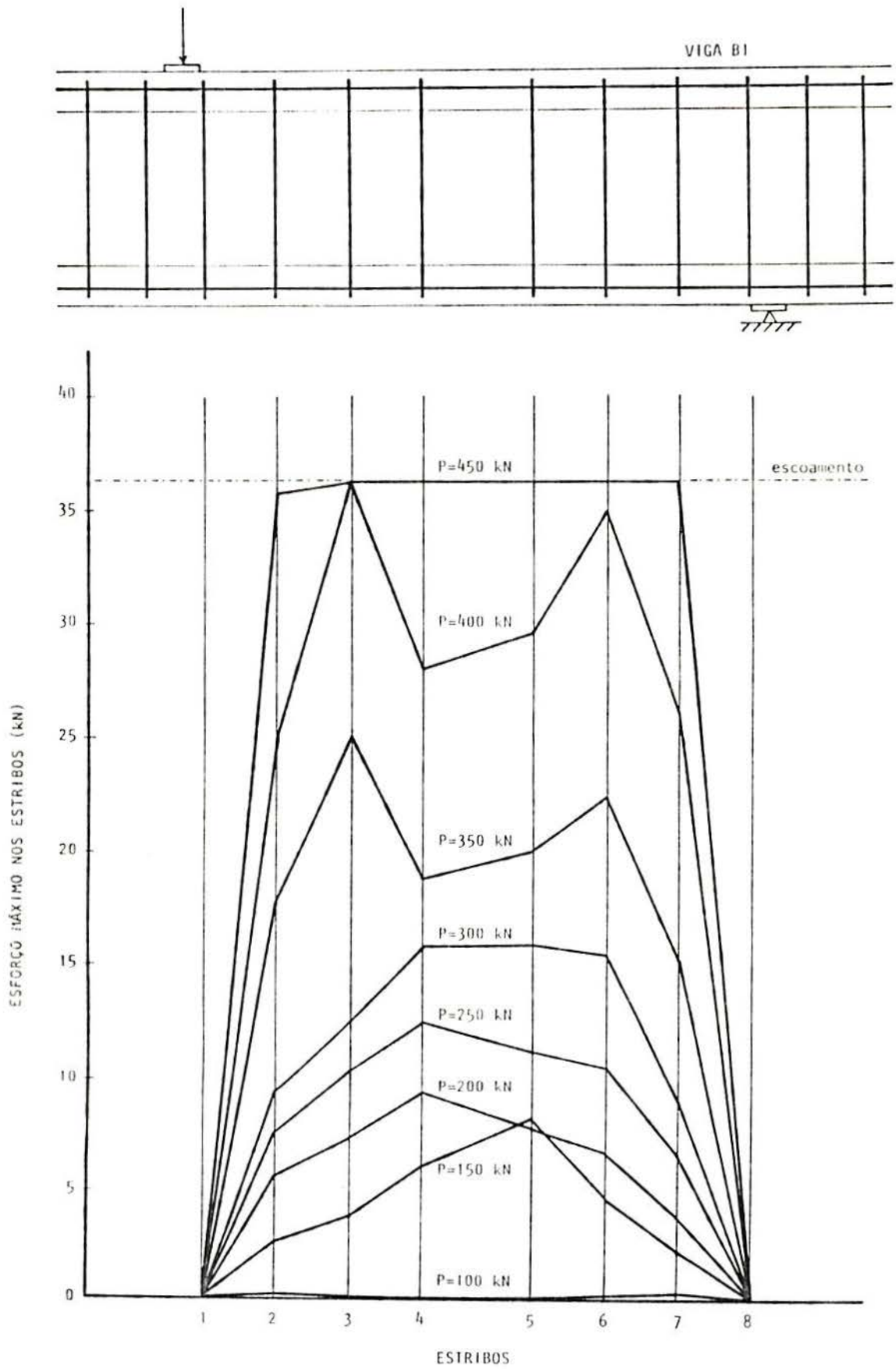


Fig. 12.5 - Esforços máximos nos estribos para a viga B1, conforme a análise por elementos finitos

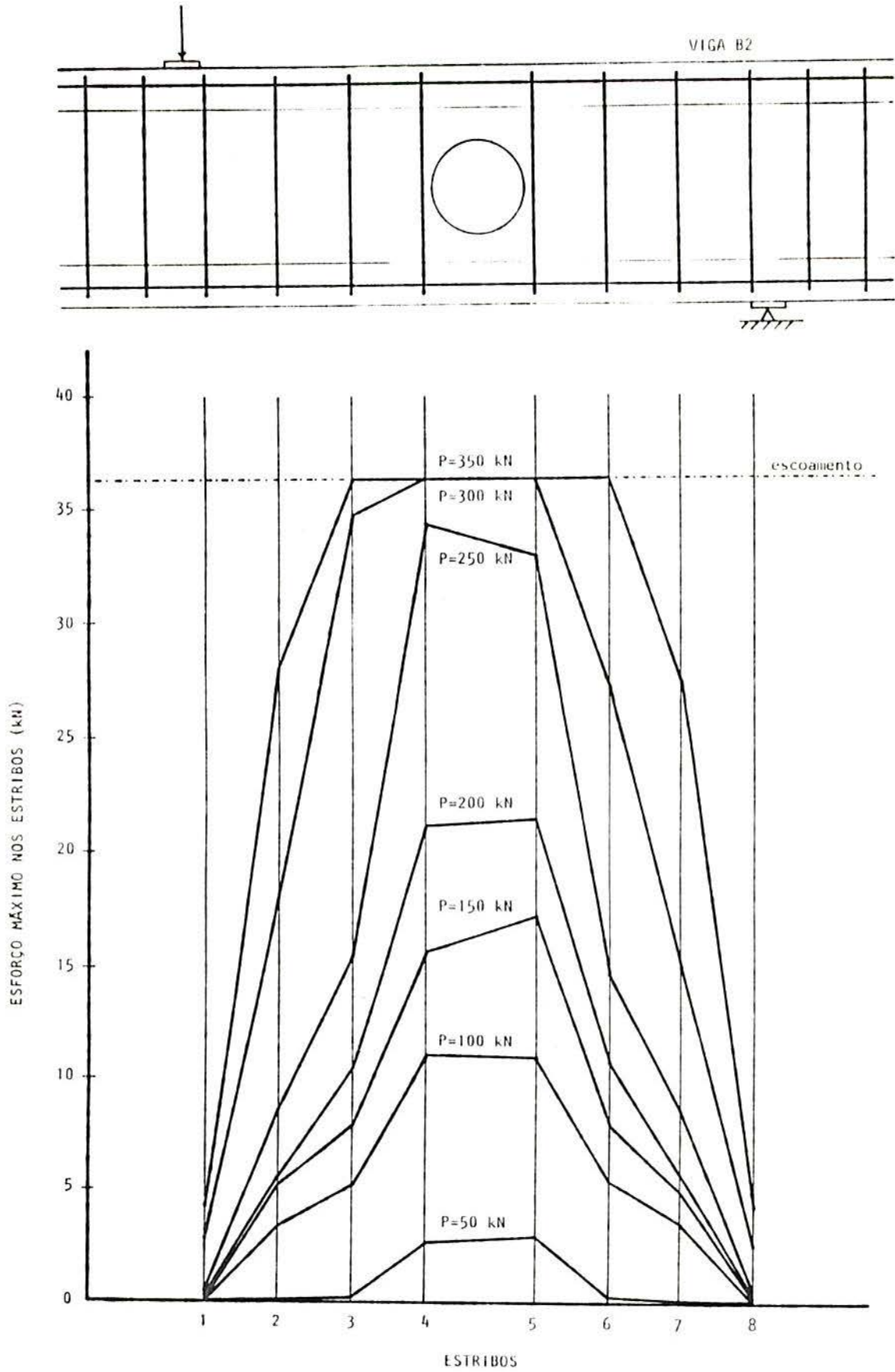


Fig. 12.6 - Esforços máximos nos estribos para a viga B2, conforme a análise por elementos finitos

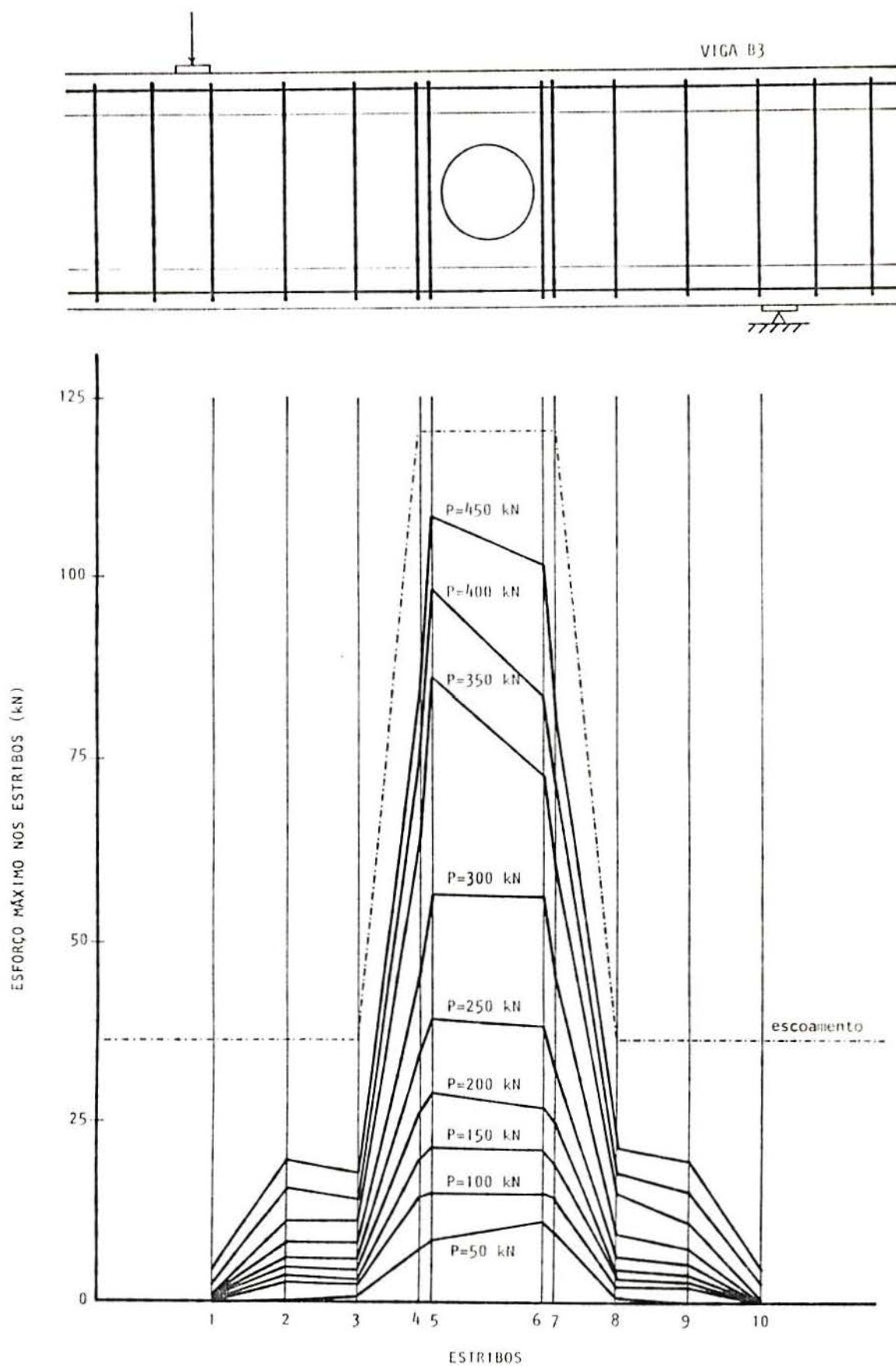


Fig. 12.7 - Esforços máximos nos estribos para a viga B3, conforme a análise por elementos finitos

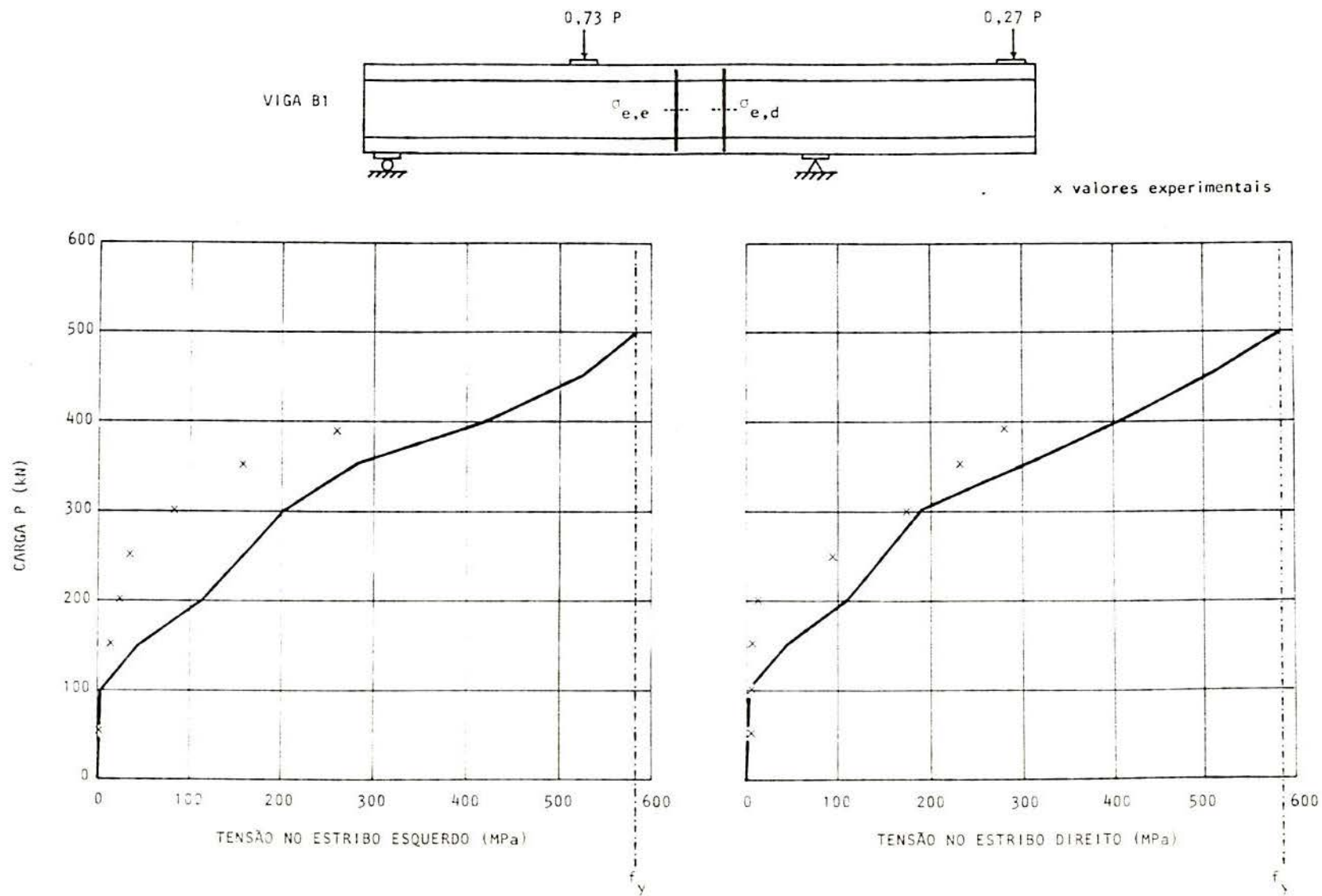


Fig. 12.8 - Comparação das tensões nos estribos, obtidos no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga B1

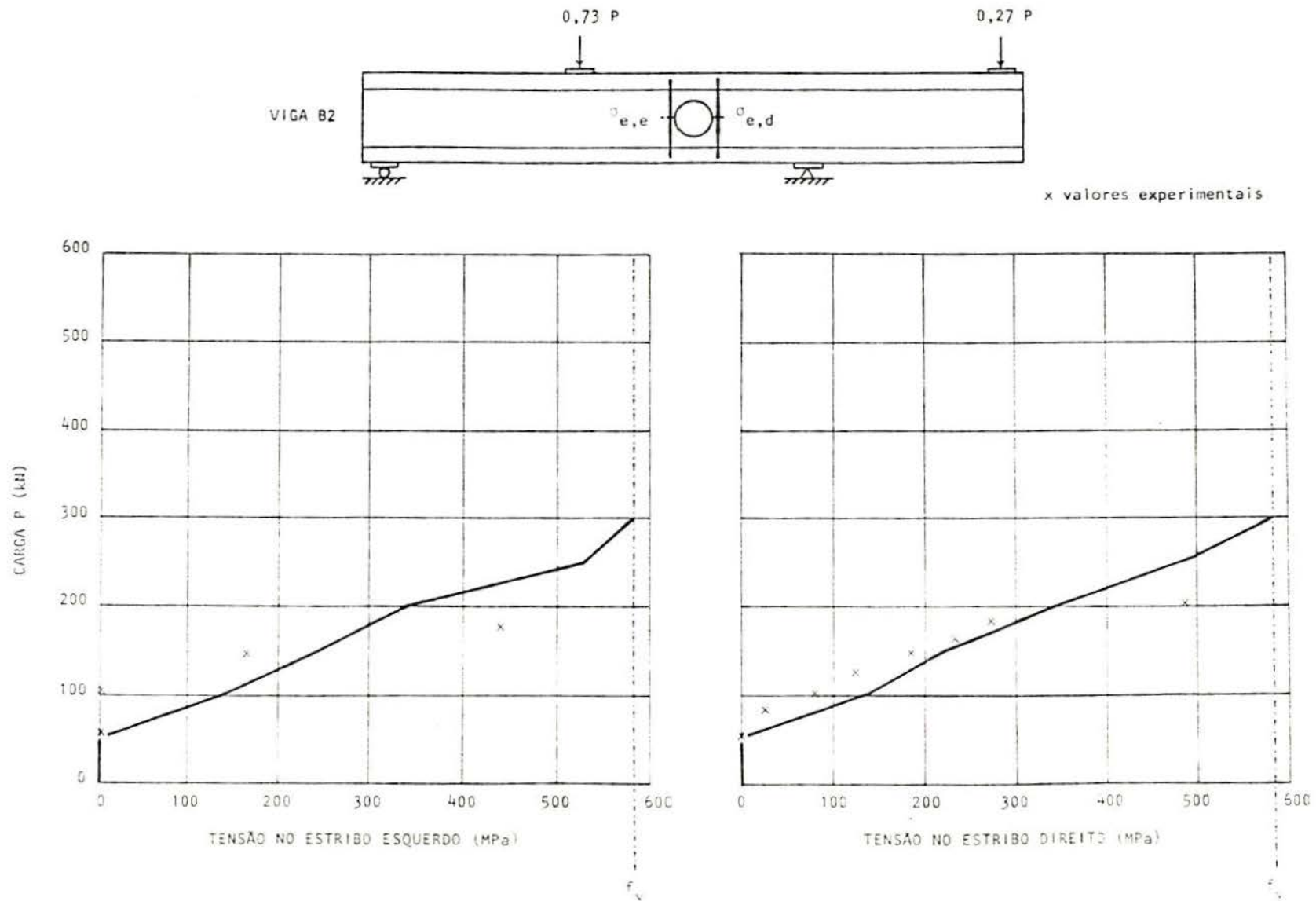


Fig. 12.9 - Comparação das tensões nos estribos, obtidos no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga B2

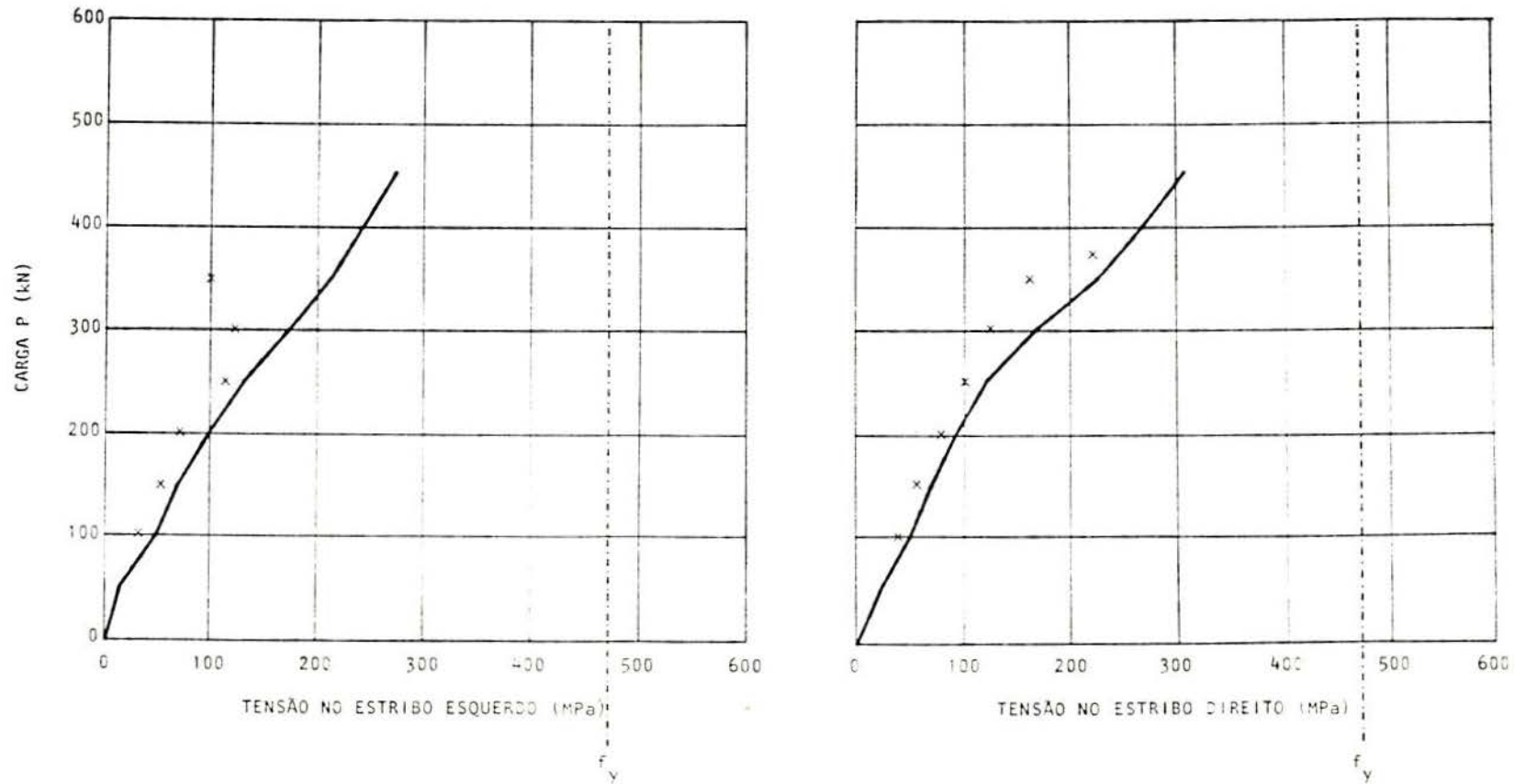
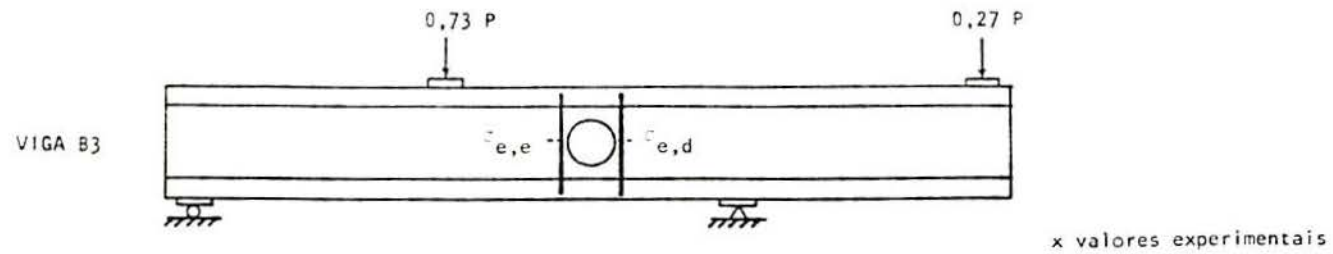


Fig. 12.10 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga B3

13 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DE VIGAS CONTÍNUAS DE CONCRETO ARMADO

13.1 - Introdução

No presente capítulo, analisa-se o comportamento de vigas contínuas de concreto armado, comparando-se resultados teóricos e experimentais. Com este objetivo, empregam-se os valores obtidos por Leonhardt e Walther, em [74], resultantes do ensaio em laboratório de cinco vigas contínuas de concreto armado.

13.2 - As características das vigas

As cinco vigas contínuas ensaiadas, em [74], cujo detalhamento aparece na Fig. 13.1, são referenciadas, conforme o trabalho original, por HH1, HH2, HH3, HH4 e HH5. Todas as vigas apresentam dois vãos e têm simetria de geometria e carregamento em relação ao apoio central. A seção transversal das vigas é retangular, possuindo as mesmas dimensões para as cinco vigas. Já o comprimento dos vãos é variável, sendo crescente de HH1 para HH5.

A viga HH1 possui dois vãos com 1,11 m de comprimento. Sua armadura longitudinal consiste, tanto inferior, como superiormente, de duas barras de 14 mm de diâmetro ($f_y = 417$ MPa, aço classe B). A armadura transversal é composta por

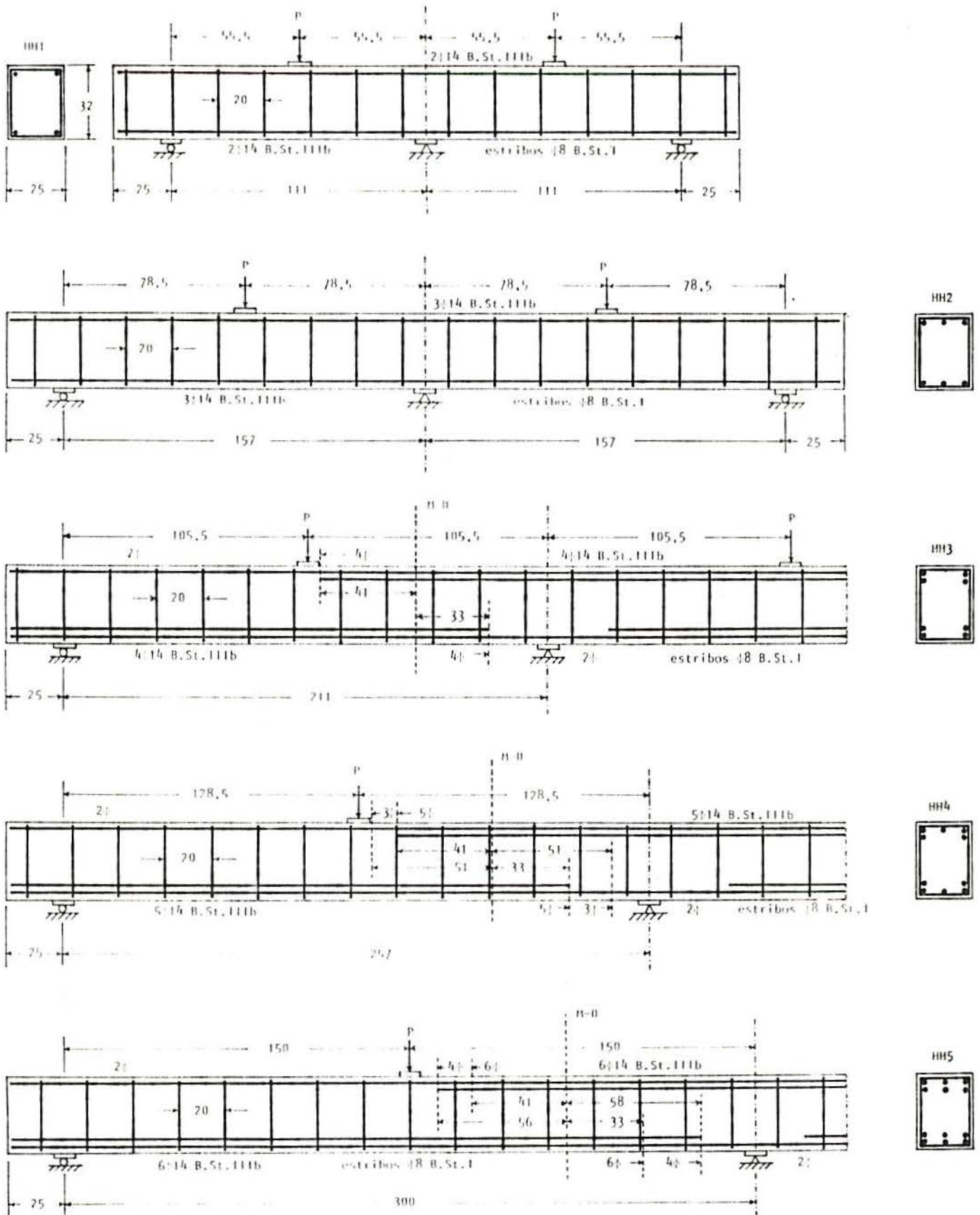


Fig. 13.1 - Detalhamento das cinco vigas contínuas

vigas	f_{cub}	f_c	f_{ct}	E_{c_0}
HH1	35,2	29,8	2,69	37000
HH2	35,6	30,2	2,71	37000
HH3	37,1	31,4	2,78	37500
HH4	33,6	28,5	2,60	36000
HH5	36,3	30,8	2,74	37000

Tab. 13.1 - Propriedades do concreto (valores em MPa)

estribos de 8 mm de diâmetro ($f_y = 371$ MPa, aço classe A), espaçados de 20 cm.

A viga HH2, que apresenta dois vãos com 1,57 m de comprimento, é armada de forma semelhante a viga HH1. A armadura longitudinal é uniforme ao longo de toda a viga, consistindo de uma camada na parte inferior e outra na superior, de três barras de 14 mm de diâmetro. A armadura transversal é de estribos de 8 mm de diâmetro, espaçados de 20 cm.

As vigas HH3, HH4 e HH5 possuem, respectivamente, vãos de 2,11; 2,57 e 3,00 metros. As suas armaduras longitudinais são dispostas em duas camadas de barras de 14 mm de diâmetro, tanto inferior, como superiormente, e não são uniformes ao longo de todo o comprimento. Já a armadura transversal é constante, consistindo de estribos de 8 mm de diâmetro, espaçados de 20 cm.

A Tab. 13.1 mostra os valores médios da resistência cúbica à compressão do concreto, determinados experimentalmente na data dos ensaios, e os valores correspondentes da resistência cilíndrica à compressão, da resistência à tra-

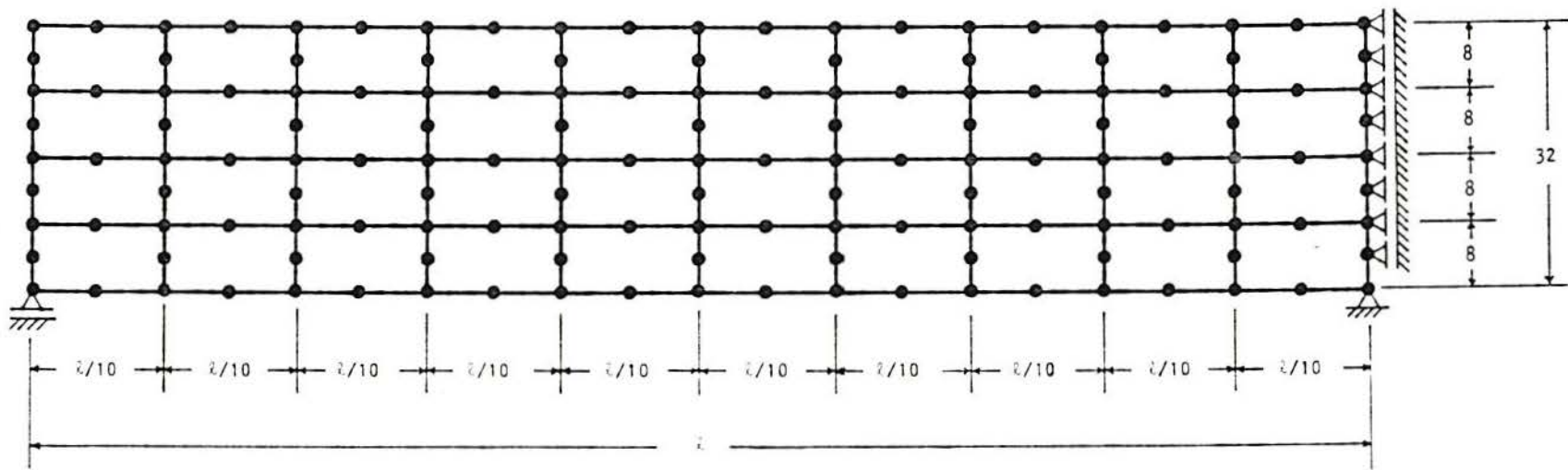


Fig. 13.2 - Discretização das vigas para a análise por elementos finitos

ção e do módulo de deformação longitudinal inicial do concreto, obtidos através das expressões apresentadas no capítulo 11.

Consideraram-se, para todos os ensaios, os efeitos da fluência e da retração do concreto a partir do sétimo dia após a concretagem das peças. Adotou-se uma umidade relativa do ar de 60% e uma temperatura de 18°C.

Para o estudo computacional, utilizou-se a malha de elementos finitos, apresentada na Fig. 13.2, de quarenta elementos finitos quadrangulares quadráticos para estado plano de tensão. Esta malha discretiza apenas metade das vigas, uma vez que o problema apresenta simetria.

13.3 - Análise dos resultados

As Figs. 13.3 até 13.7 comparam a evolução dos deslocamentos verticais, na posição de aplicação da carga, se

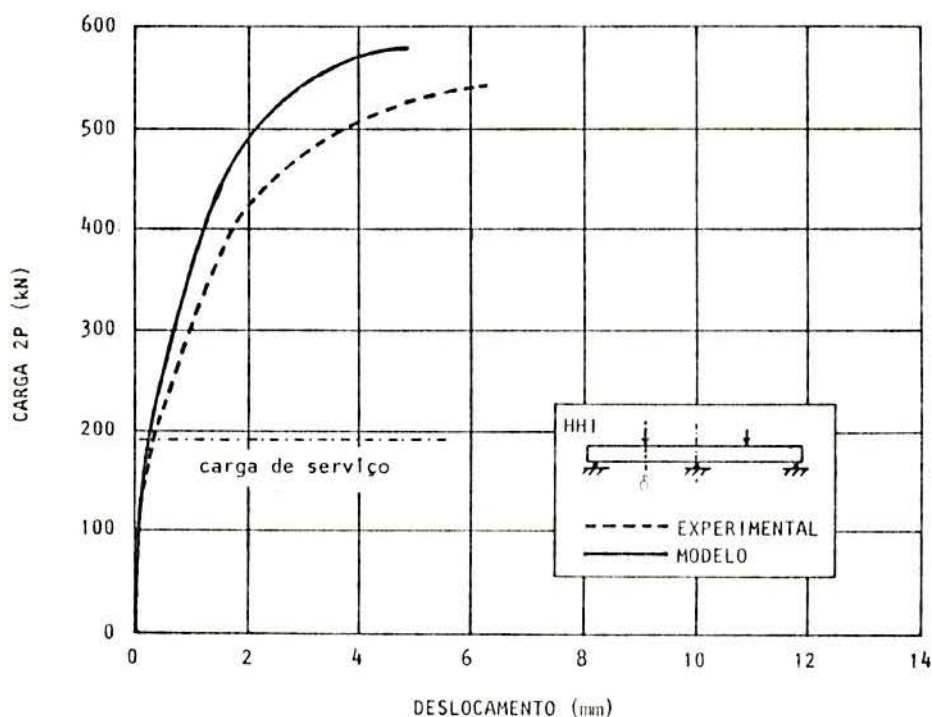


Fig. 13.3 - Deslocamentos verticais sob a carga, segundo o ensaio e o modelo computacional, para a viga HH1

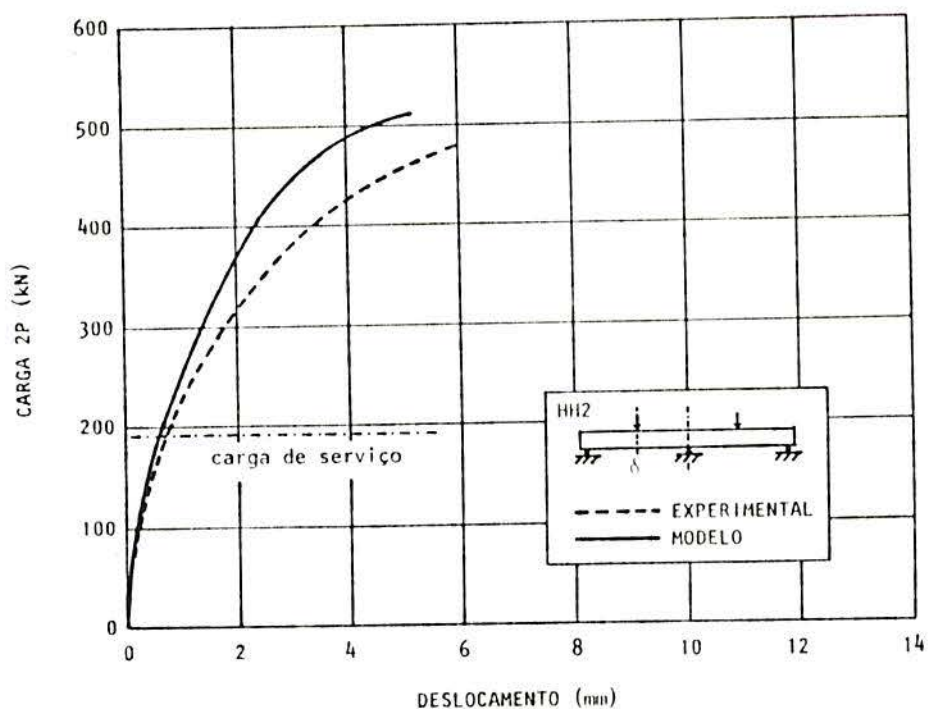


Fig. 13.4 - Deslocamentos verticais sob a carga, segundo o ensaio e o modelo computacional, para a viga HH2

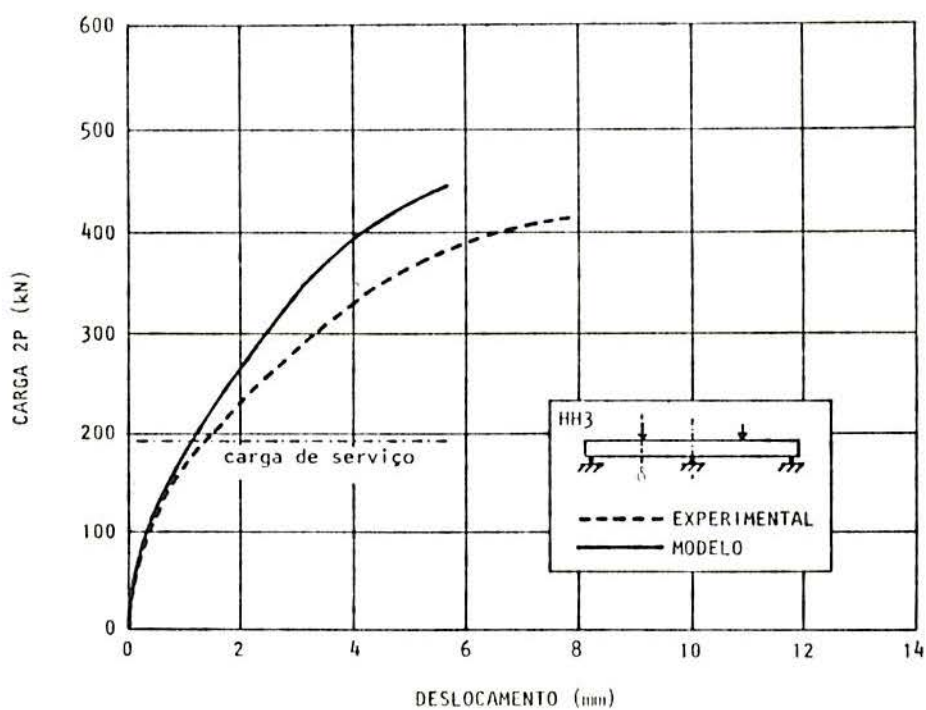


Fig. 13.5 - Deslocamentos verticais sob a carga, segundo o ensaio e o modelo computacional, para a viga HH3

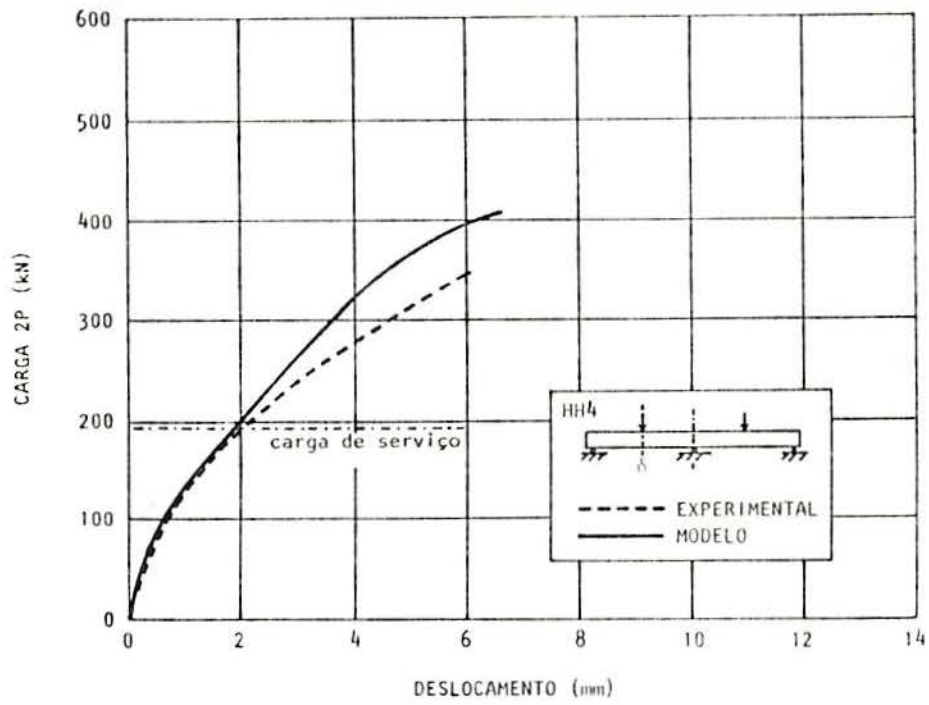


Fig. 13.6 - Deslocamentos verticais sob a carga, segundo o ensaio e o modelo computacional, para a viga HH4

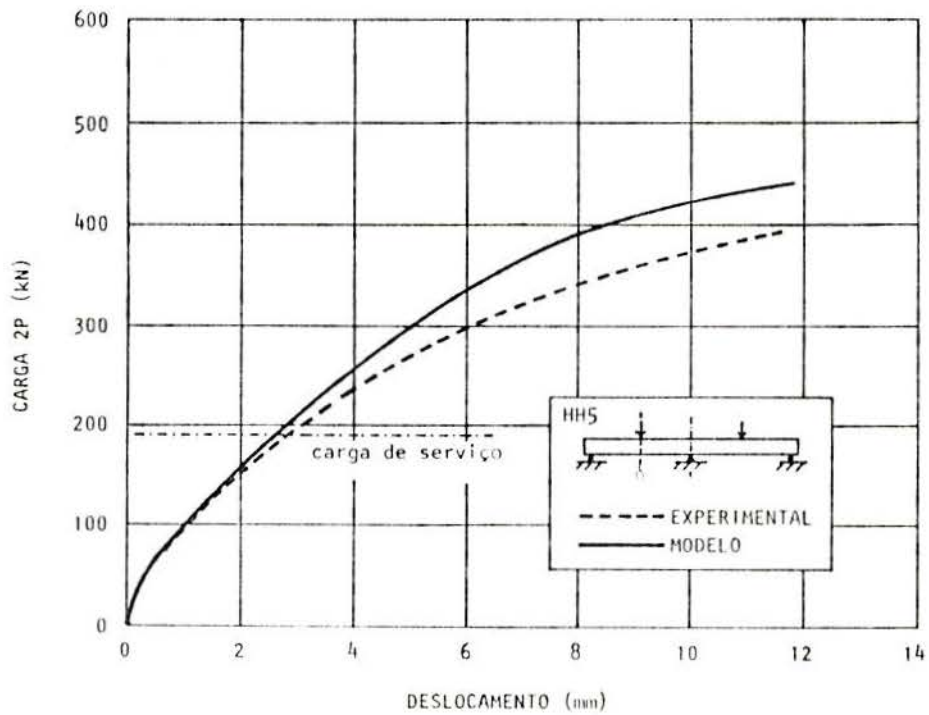


Fig. 13.7 - Deslocamentos verticais sob a carga, segundo o ensaio e o modelo computacional, para a viga HH5

gundo o ensaio e o modelo computacional, para as cinco vigas contínuas.

Na Fig. 13.8, analisa-se o crescimento da tensão na armadura inferior, na seção de aplicação da carga, em função do carregamento. Comparam-se os valores experimentais, nos dois vãos, com o valor obtido através da análise por elementos finitos, para cada uma das vigas.

A Fig. 13.9 compara resultados do ensaio e do modelo, para a tensão na armadura superior sobre o apoio.

As Figs. 13.10 e 13.11 mostram o desenvolvimento da tensão na armadura inferior, sobre o apoio, e na armadura superior, sob a carga, para a viga HH1. Pelos resultados apresentados, tanto pelo ensaio, como pelo modelo, observa-se que as tensões, inicialmente, de compressão, passam a ser de tração com o incremento da carga.

Nas Figs. 13.12 e 13.13, apresenta-se a evolução da tensão na armadura inferior, sobre o apoio, e na armadura superior, sob a carga, conforme o modelo computacional, para o conjunto das cinco vigas. Pode-se constatar, que a inversão de sinal destas tensões ocorre apenas para as vigas com maior relação altura/vão.

Na Fig. 13.14, comparam-se as tensões σ_x no concreto, sobre o apoio, determinadas através do ensaio e do modelo de elementos finitos, para cada uma das cinco vigas.

As Figs. 13.15 e 13.16 analisam a evolução do momento fletor, no apoio central, em função da carga, conforme o modelo computacional. O valor deste momento fletor é afetado pela não-linearidade dos materiais, especialmente pela fissuração do concreto. Nestas figuras, comparam-se as previsões do modelo com os valores calculados, considerando-se as vigas de concreto armado constituídas por um material homogêneo de comportamento linear.

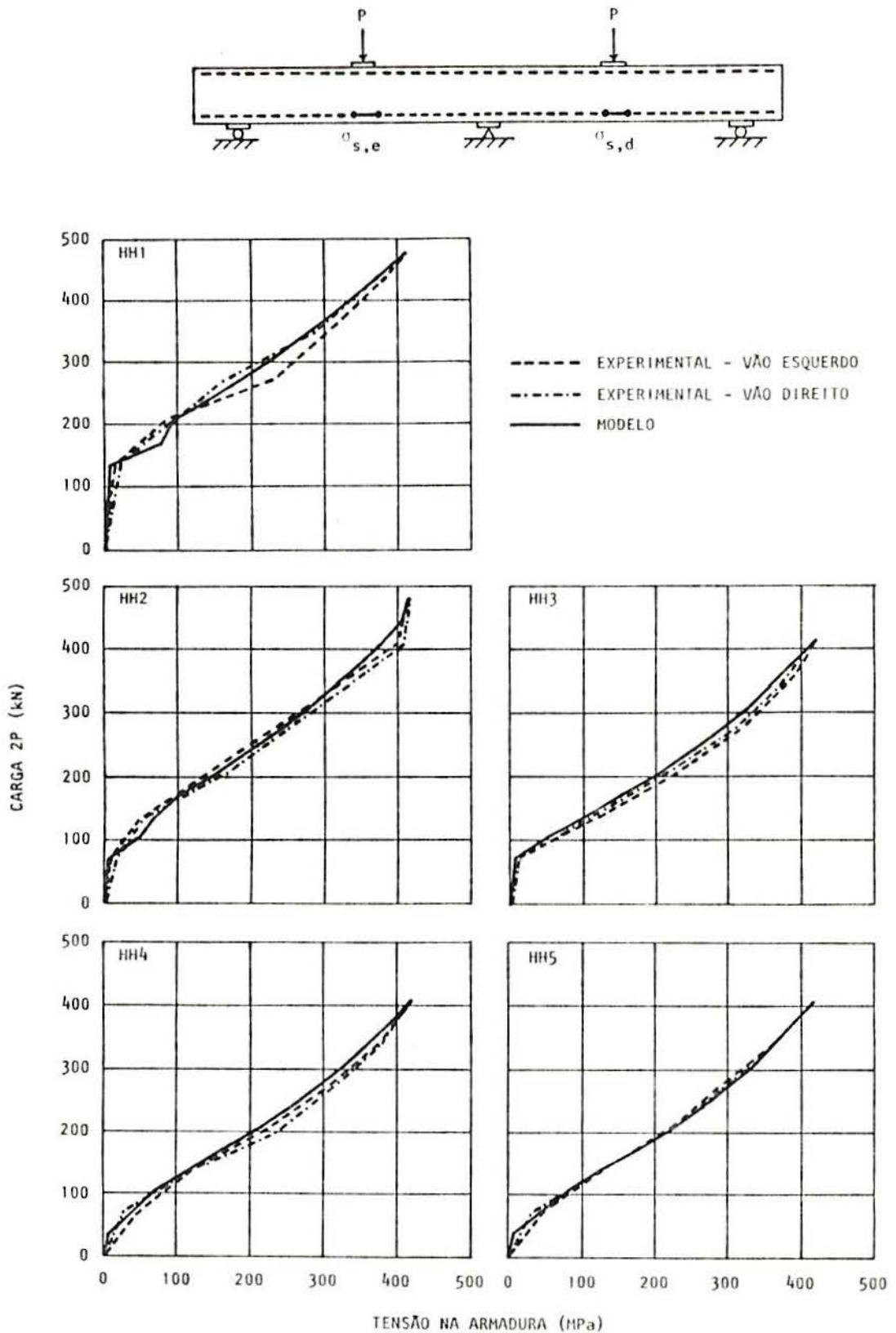


Fig. 13.8 - Comparação dos valores, obtidos no ensaio e pelo modelo computacional, para a tensão na armadura inferior, sob a carga

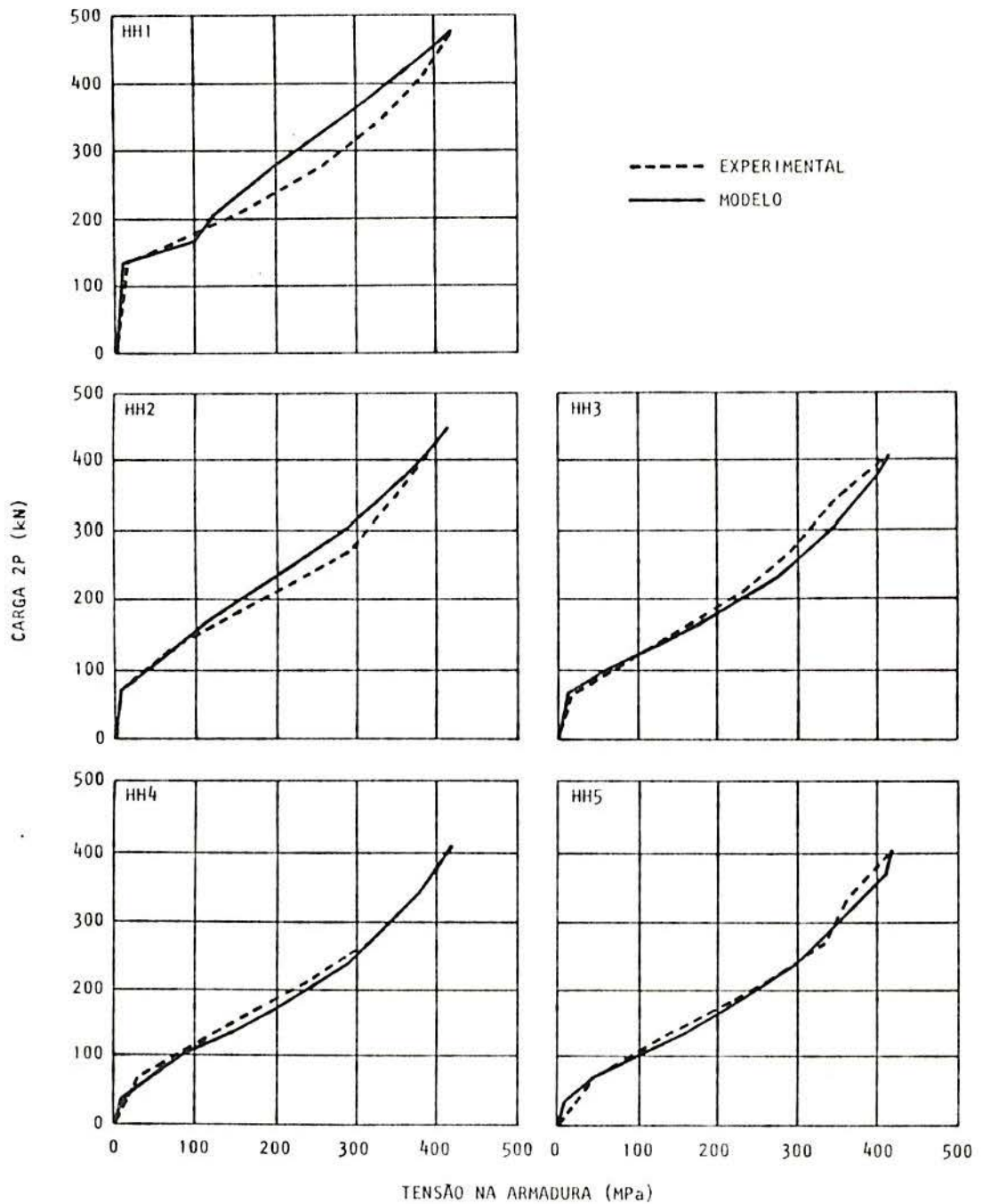
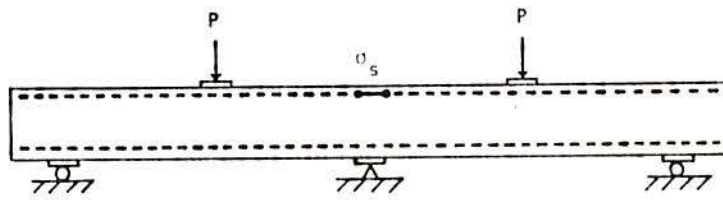


Fig. 13.9 - Comparação dos valores, obtidos no ensaio e pelo modelo computacional, para a tensão na armadura superior, sobre o apoio

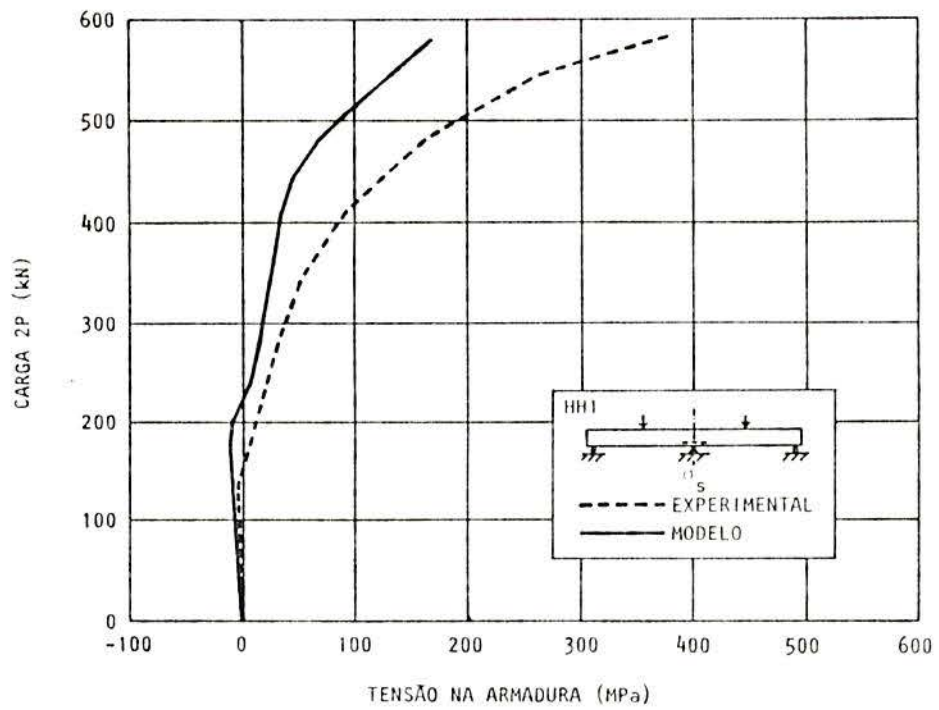


Fig. 13.10 - Tensões na armadura inferior, sobre o apoio, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga HH1

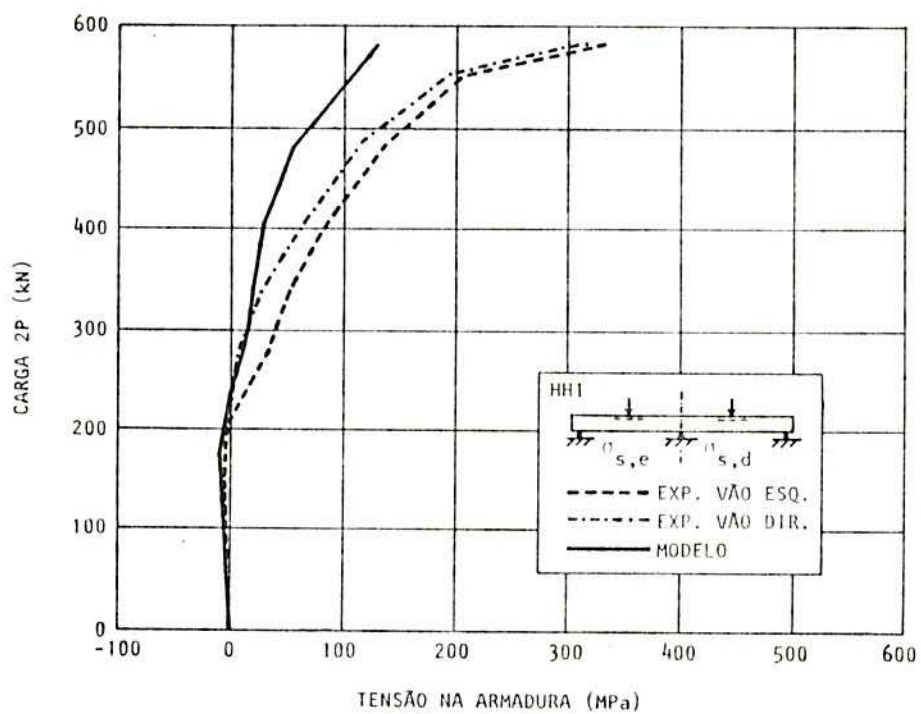


Fig. 13.11 - Tensões na armadura superior, sob a carga, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga HH1

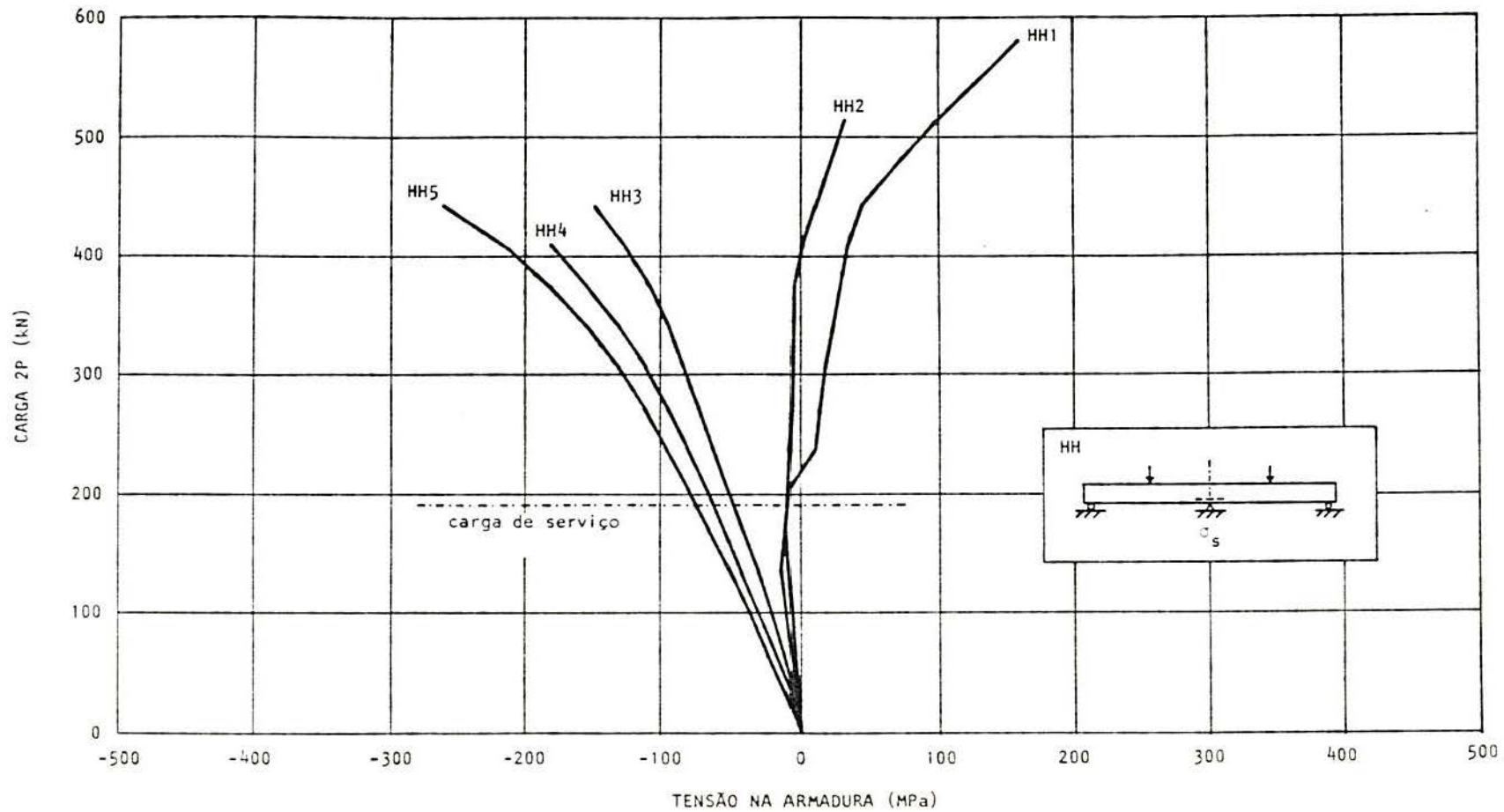


Fig. 13.12 - Tensões na armadura inferior, sobre o apoio, segundo o modelo computacional

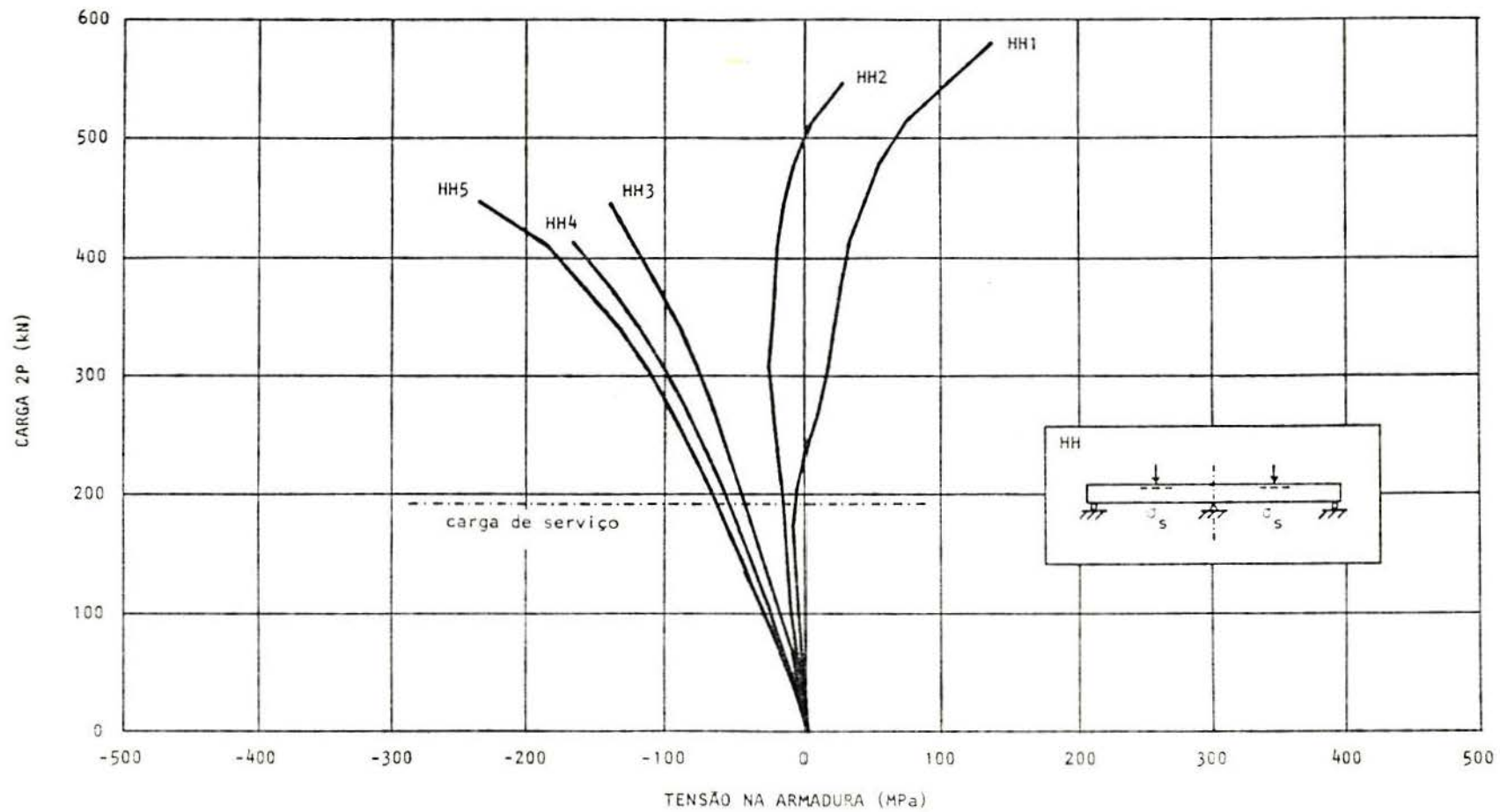


Fig. 13.13 - Tensões na armadura superior, sob a carga, segundo o modelo computacional

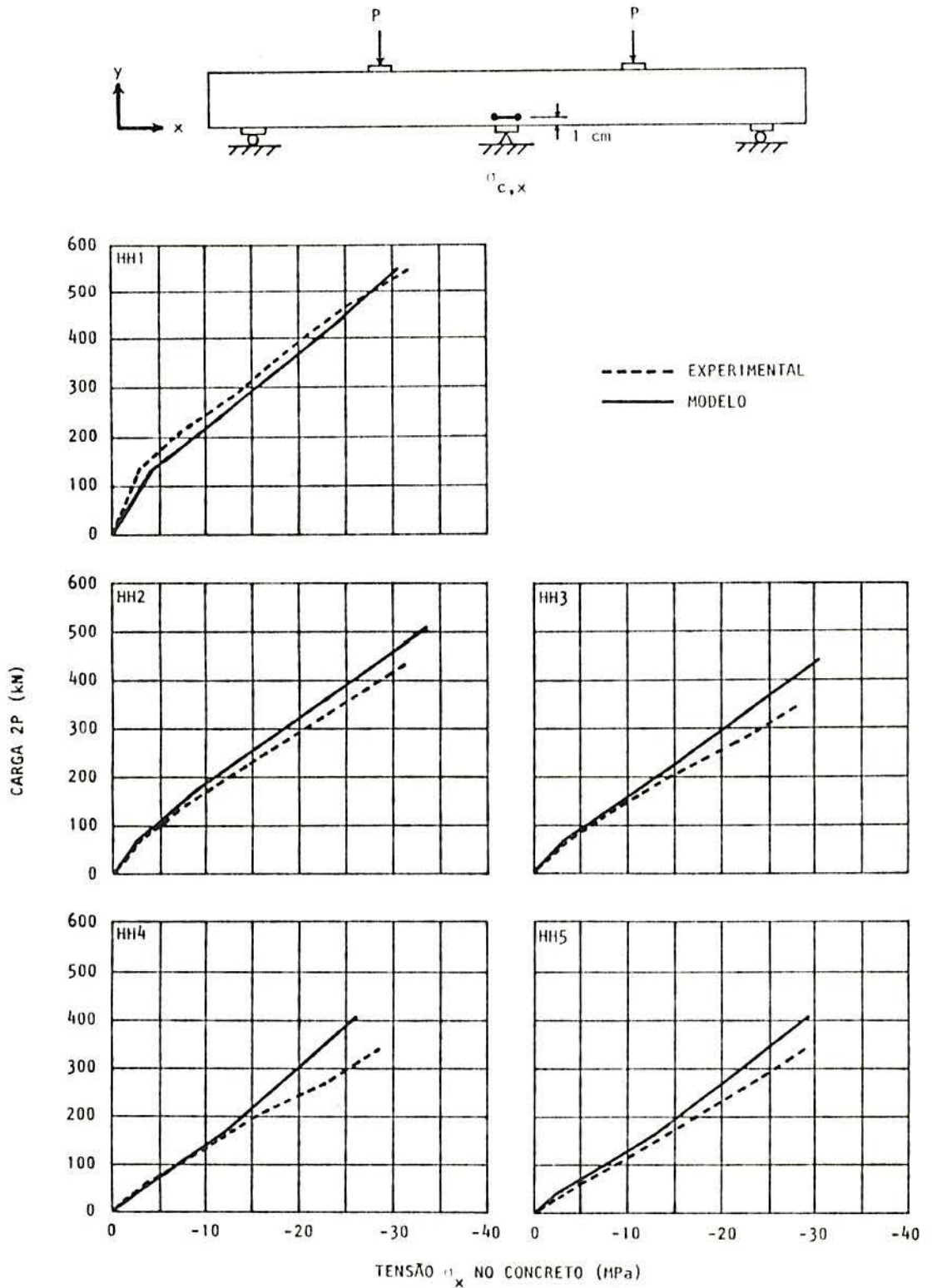


Fig. 13.14 - Valores obtidos no ensaio e pelo modelo computacional, para a tensão σ_x no concreto, sobre o apoio

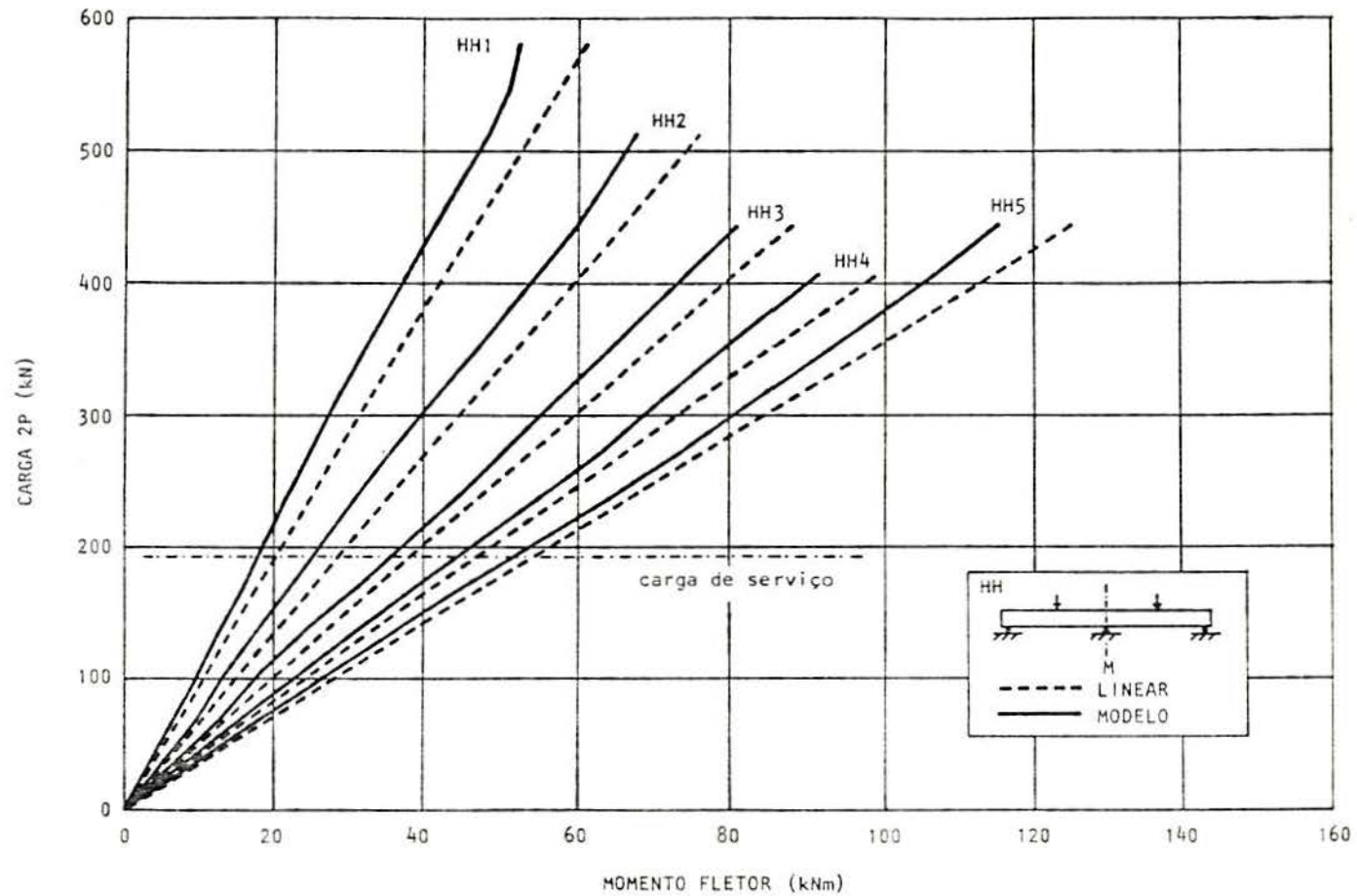


Fig. 13.15 - Comparação entre o momento fletor, no apoio central, determinado pelo modelo computacional e considerando o concreto armado como um material com comportamento linear

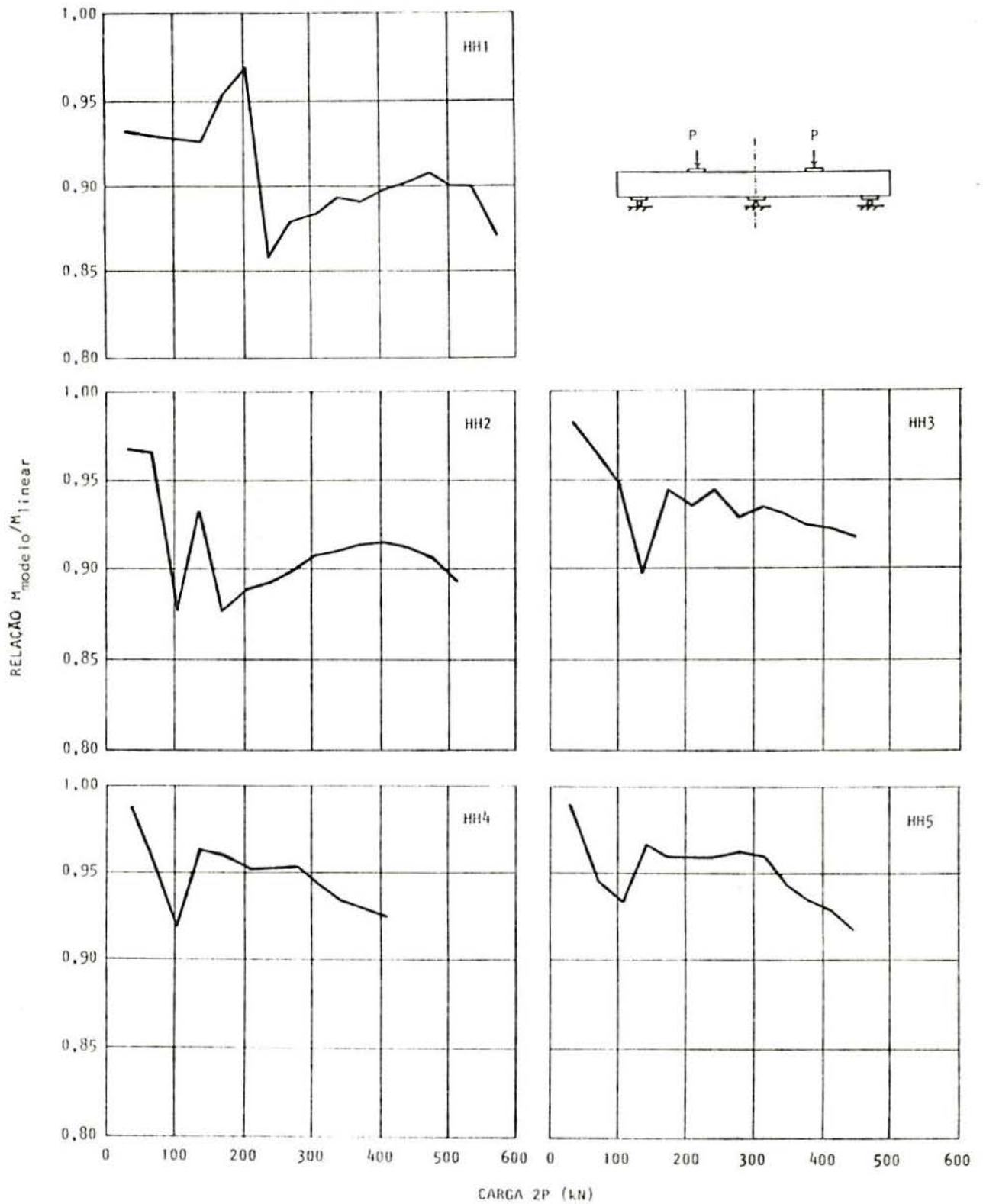


Fig. 13.16 - Evolução da relação entre o momento fletor no apoio central, calculado pelo modelo computacional, e considerando o concreto armado com um comportamento linear

14 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL: ESTUDO DO COMPORTAMENTO AO LONGO DO TEMPO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

14.1 - Introdução

Neste capítulo, comparam-se os resultados computacionais e experimentais, apresentados em [56], para uma série de oito vigas de concreto armado, submetidas a um carregamento uniformemente distribuído de curta e longa duração.

14.2 - As características das vigas

Os ensaios de [56] foram realizados sobre oito vigas idênticas, chamadas de V1, V2, ..., V8, simplesmente apoiadas, com um vão de 3,72 m. O detalhamento destas vigas a parece na Fig. 14.1.

A armadura longitudinal é composta, inferiormente, por duas barras de 8 mm de diâmetro de aço CA-50A e, superiormente, por duas barras de 3,4 mm de diâmetro de aço CA-60B. Adicionalmente, foram colocadas, nas faces das vigas, mais duas barras de 3,4 mm de diâmetro. A armadura transversal consiste de estribos de 3,4 mm de diâmetro, espaçados de 10 cm.

As vigas foram concretadas e ensaiadas duas a duas. Na data do ensaio, cada viga foi submetida a um carrega

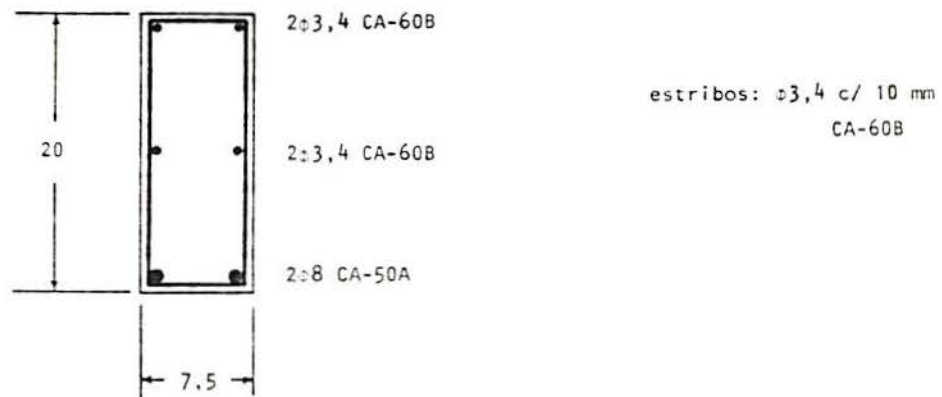
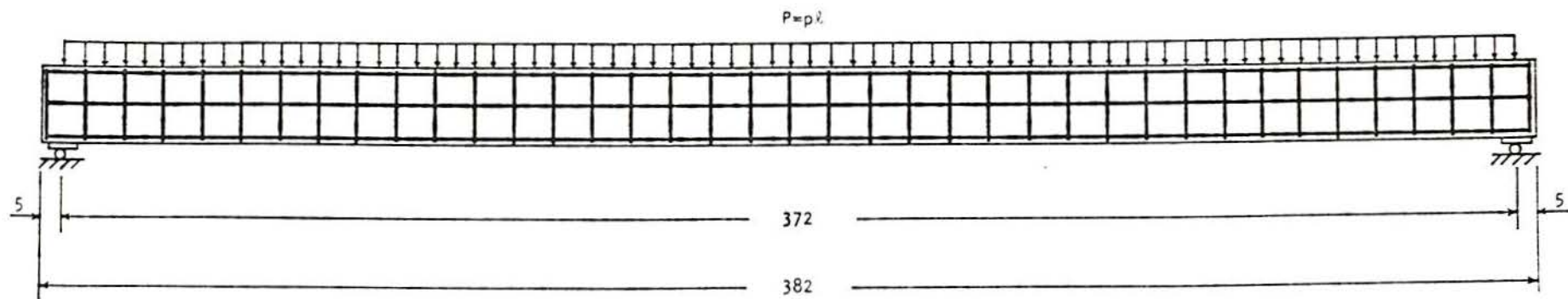


Fig. 14.1 - Detalhamento das vigas

vigas	idade (dias)	f_c (MPa)	f_{ct} (Mpa)	E_{c_0} (MPa)
V1 - V2	62	31,3	2,5	35000
V3 - V4	28	17,8	2,0	28000
V5 - V6	28	18,2	2,2	28500
V7 - V8	16	19,5	2,2	26500

Tab. 14.1 - Propriedades do concreto

mento uniformemente distribuído de 2,36 kN/m, além do peso próprio, sendo esta carga mantida constante por mais setenta dias.

A Tab. 14.1 apresenta, além do tempo decorrido entre a data da concretagem e a do ensaio, os valores médios da resistência cilíndrica à compressão e a resistência à tração do concreto medidos no dia do ensaio. Esta tabela contém, ainda, o módulo de deformação longitudinal inicial do concreto, calculado através da expressão recomendada pelo Código Modelo do CEB [41]

$$E_{c_0} = 1,25 \times 9500 f_c^{1/3} \quad (14.1)$$

Na preparação do concreto das vigas, utilizou-se o cimento pozolânico POZ-320 e o diâmetro máximo dos agregados foi de 19 mm. Conforme a Eq. (6.20), encontrou-se para a espessura fictícia das vigas o valor de 150 mm. Estabeleceu-se, segundo a Eq. (5.55), que o espaçamento médio das fissuras, na configuração estabilizada, era igual a 55 mm.

Os valores médios da umidade relativa do ar e da temperatura foram tomados, para todos os ensaios, como sen

do, respectivamente, 75% e 20°C. Os efeitos da retração e da fluência foram considerados a partir do sétimo dia após a concretagem.

A análise computacional foi realizada com o emprego da malha de elementos finitos, apresentada na Fig. 14.2, que é composta por vinte elementos quadrangulares quadráticos para estado plano de tensão. Esta malha representa, apenas, a metade das vigas, por estas apresentarem simetria.

14.3 - Análise dos resultados

Nas Figs. 14.3 até 14.6, comparam-se as flechas das vigas, segundo o ensaio e o modelo computacional, para o carregamento instantâneo.

As Figs. 14.7 e 14.8 confrontam os resultados experimentais e computacionais, para as deformações na armadura tracionada e na borda comprimida, na seção central das vigas V7 e V8. Estes valores correspondem, também, ao carregamento instantâneo.

Nas Figs. 14.9 até 14.12, apresenta-se o desenvolvimento das flechas das vigas, no período de setenta dias que seguiu a data do ensaio. São comparados valores determinados nos ensaios e através do modelo de elementos finitos.

As Figs. 14.13 e 14.14 mostram a evolução das deformações na armadura e na borda comprimida, na seção central das vigas V7 e V8, nos setenta dias que sucederam a aplicação da carga.

Na Fig. 14.15, comparam-se as deformações na seção central das vigas V7 e V8, no instante de aplicação da carga e setenta dias após, segundo as medições do ensaio e os resultados da análise computacional. Nesta figura, os resultados experimentais correspondem à média dos valores obtidos para as vigas V7 e V8.

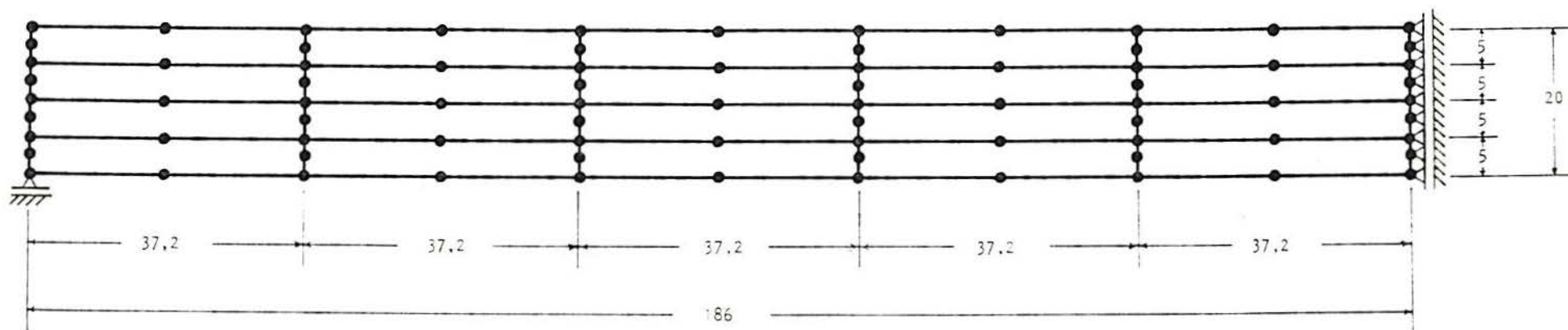


Fig. 14.2 - Discretização adotada para as vigas para a análise por elementos finitos

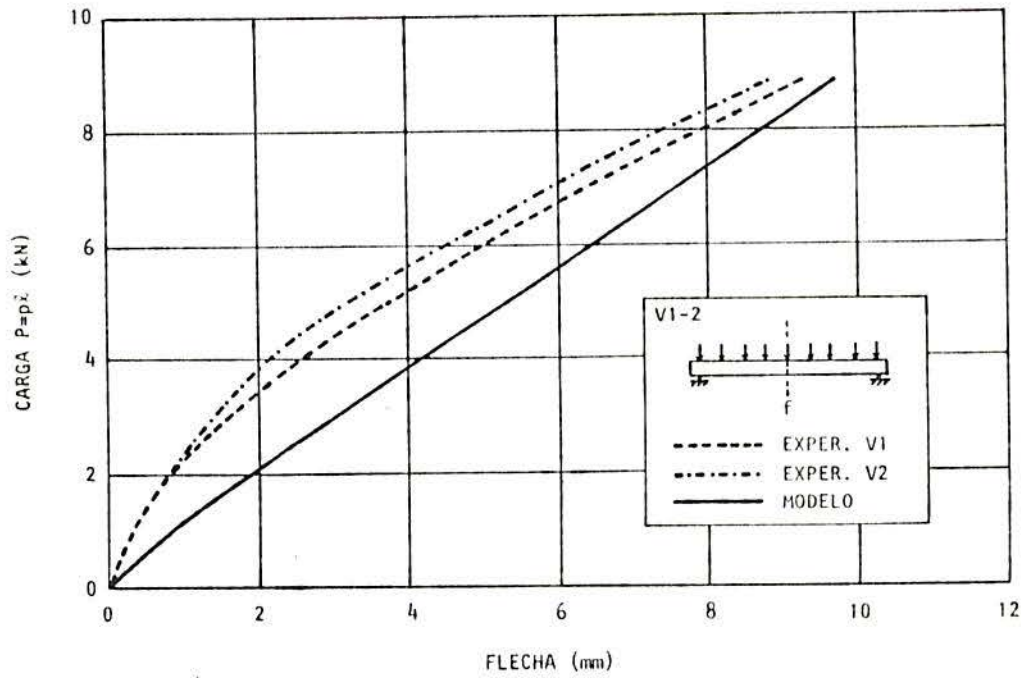


Fig. 14.3 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para as vigas V1 e V2

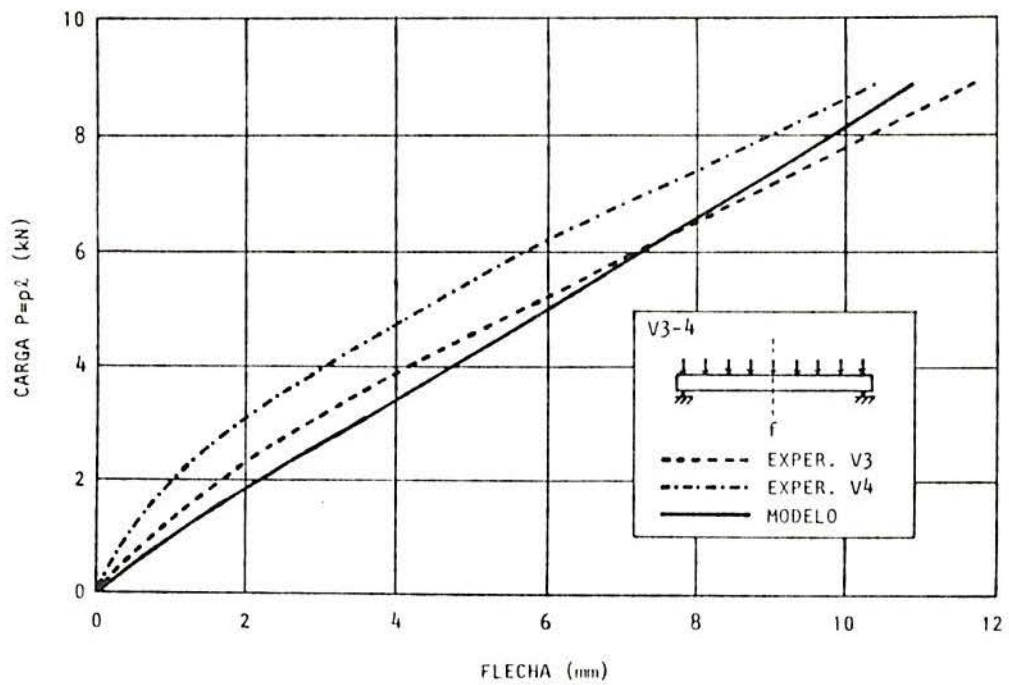


Fig. 14.4 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para as vigas V3 e V4

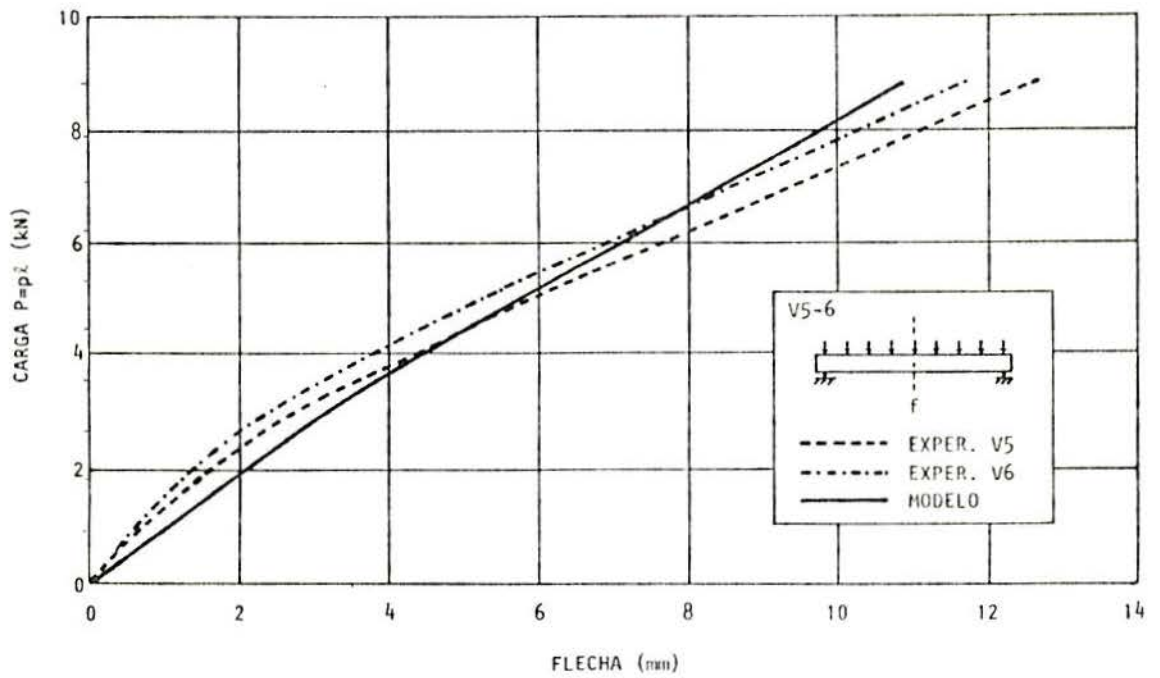


Fig. 14.5 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para as vigas V5 e V6

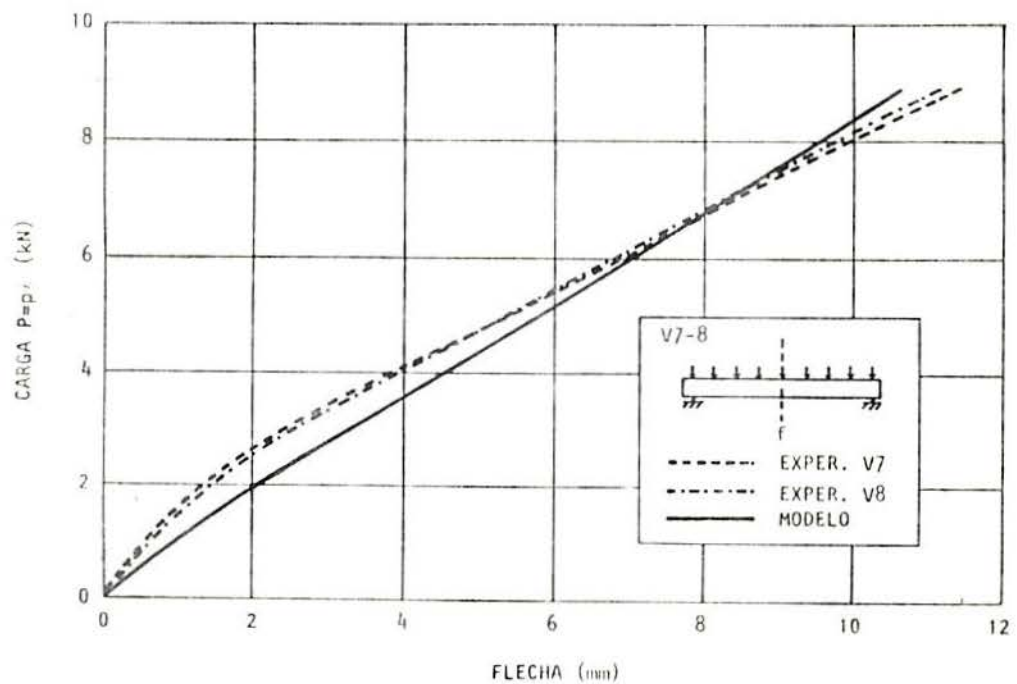


Fig. 14.6 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para as vigas V7 e V8

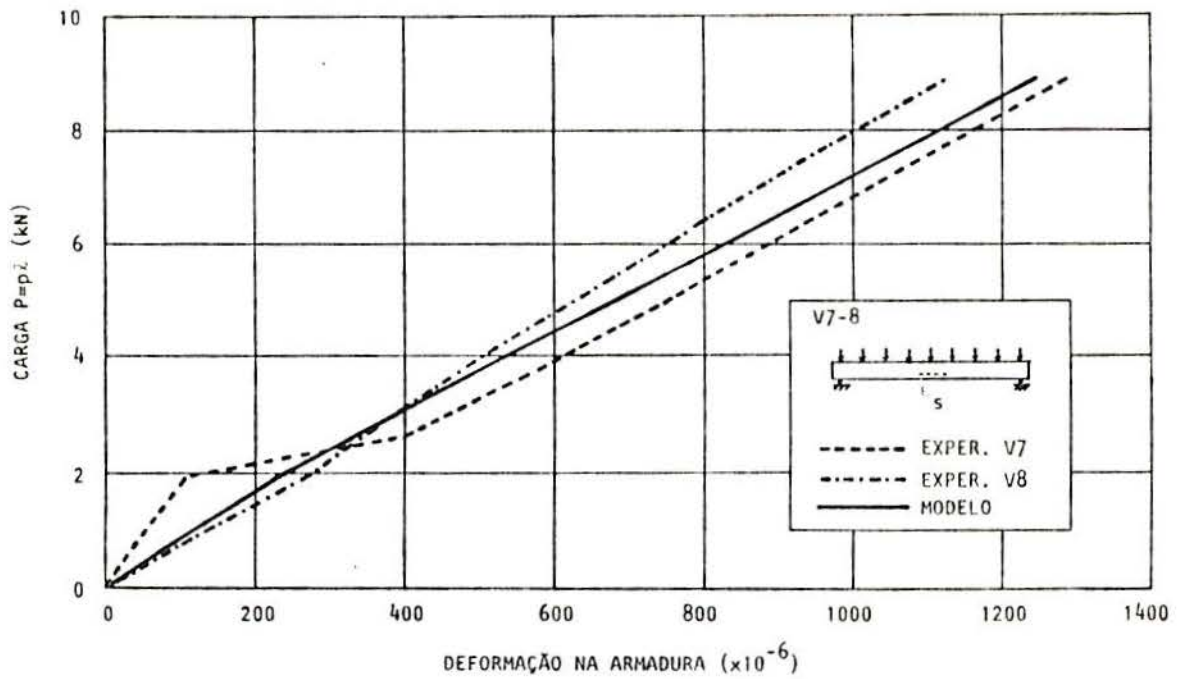


Fig. 14.7 - Deformações na armadura tracionada, na seção central, obtidas no ensaio e pelo modelo, para as vigas V7 e V8

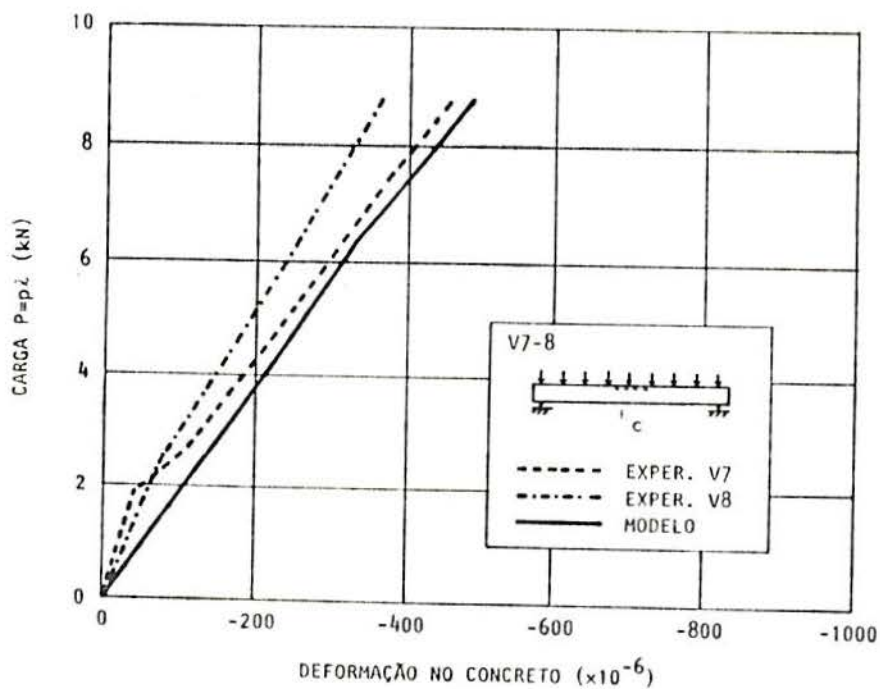


Fig. 14.8 - Deformações na borda comprimida, na seção central, obtidas no ensaio e pelo modelo, para as vigas V7 e V8

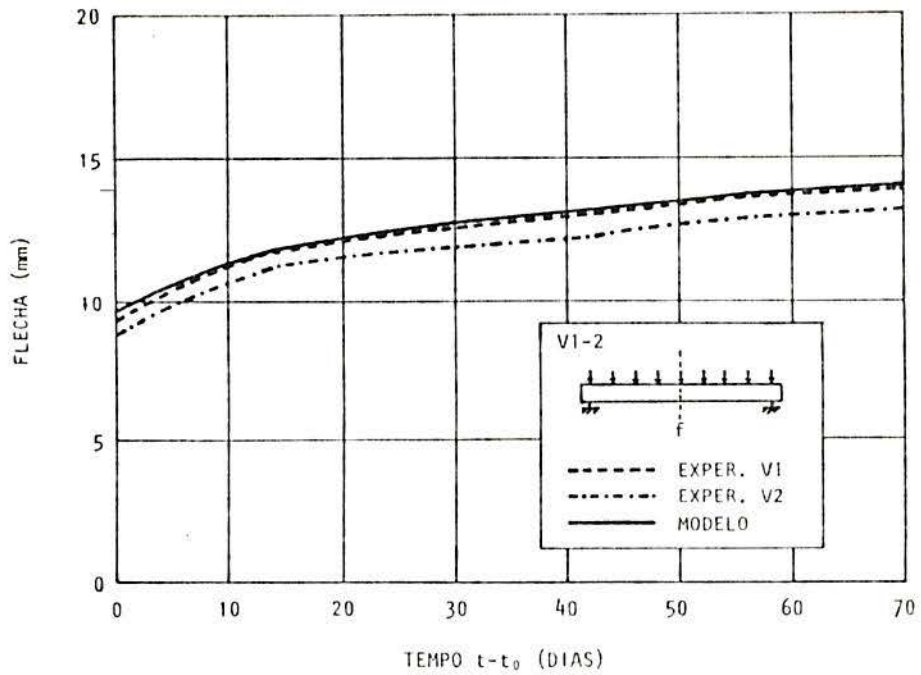


Fig. 14.9 - Desenvolvimento das flechas no tempo, segundo o ensaio e o modelo, para as vigas V1 e V2

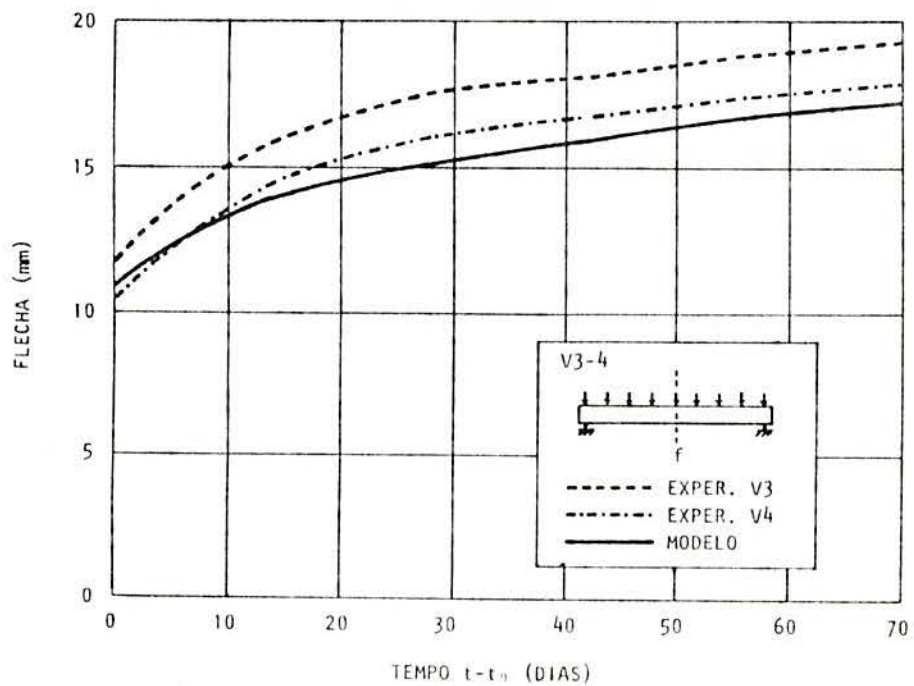


Fig. 14.10 - Desenvolvimento das flechas no tempo, segundo o ensaio e o modelo, para as vigas V3 e V4

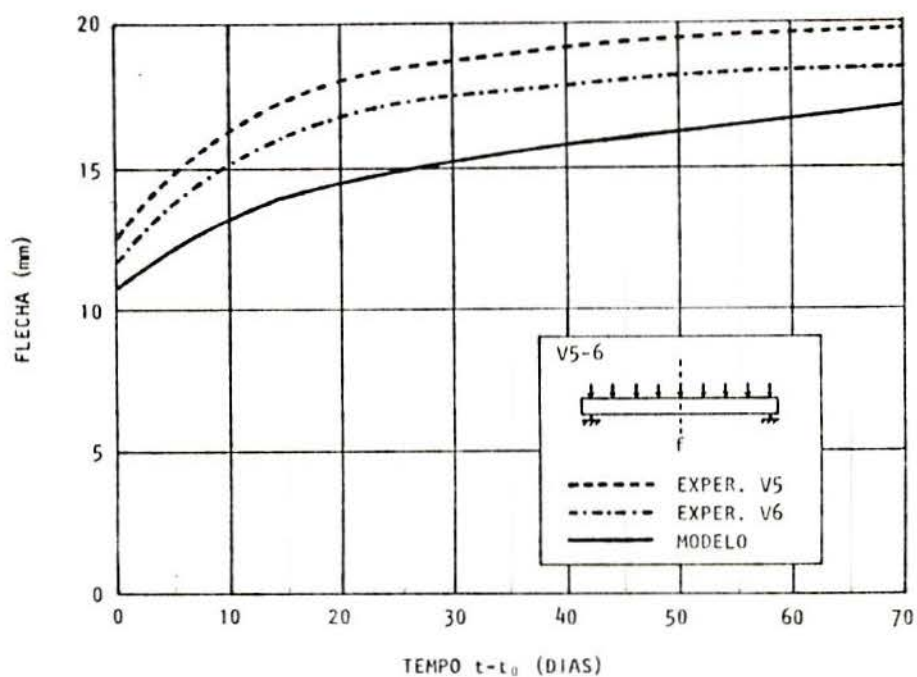


Fig. 14.11 - Desenvolvimento das flechas no tempo, segundo o ensaio e o modelo, para as vigas V5 e V6

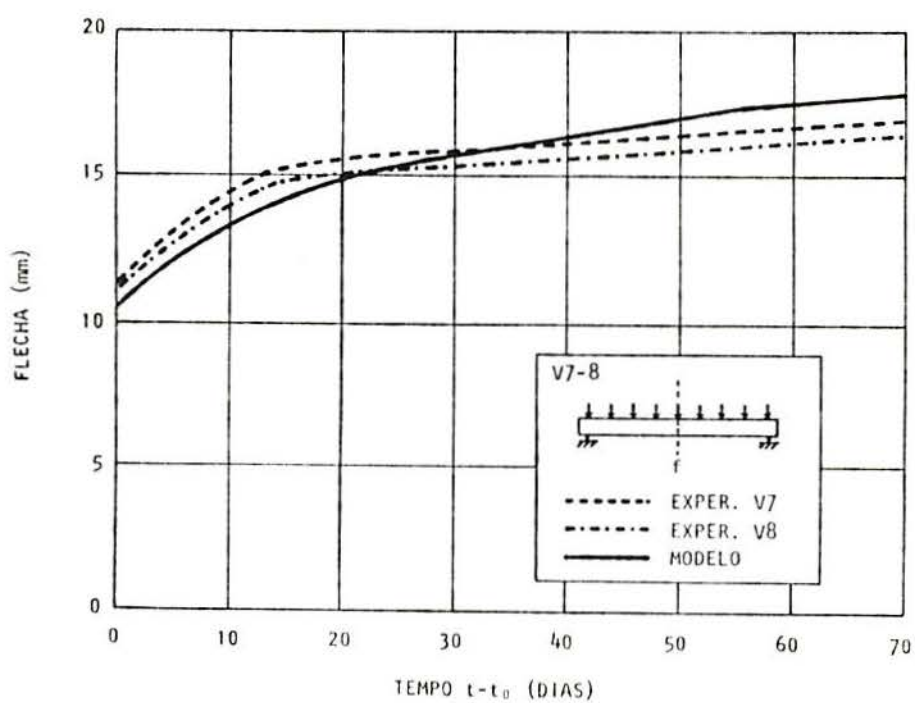


Fig. 14.12 - Desenvolvimento das flechas no tempo, segundo o ensaio e o modelo, para as vigas V7 e V8

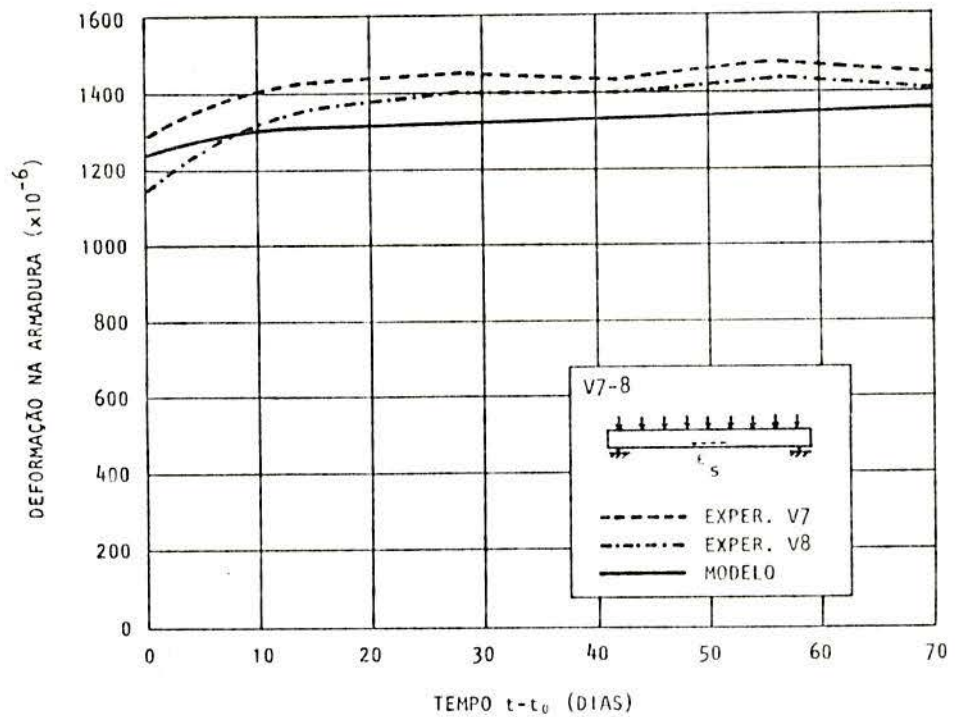


Fig. 14.13 - Deformações, no tempo, na armadura tracionada, segundo o ensaio e o modelo, para as vigas V7 e V8

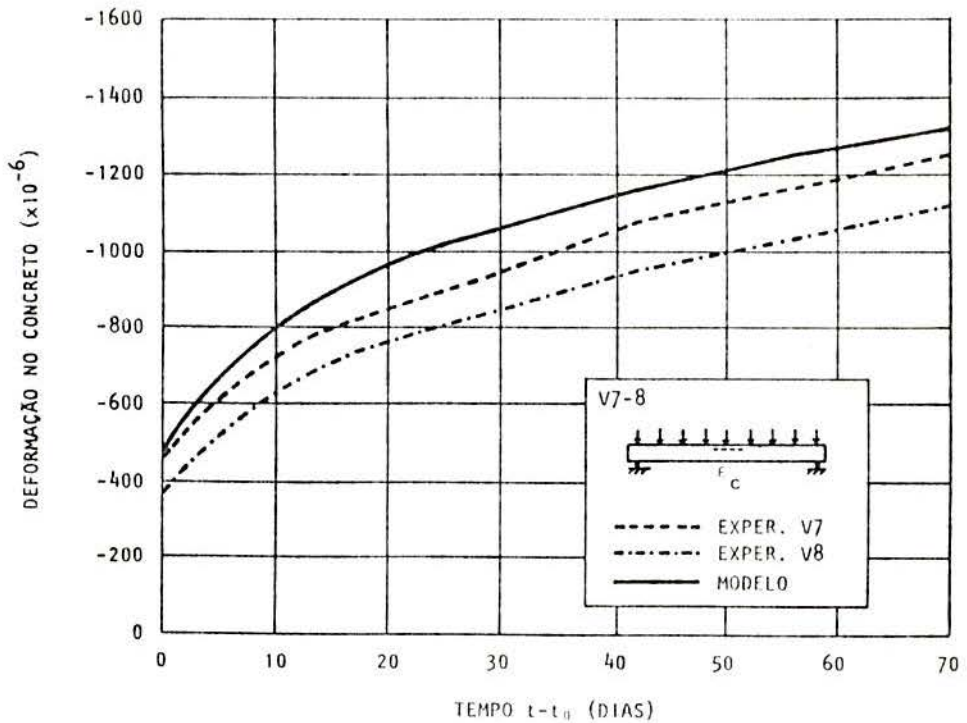


Fig. 14.14 - Deformações, no tempo, na borda comprimida, segundo o ensaio e o modelo, para as vigas V7 e V8

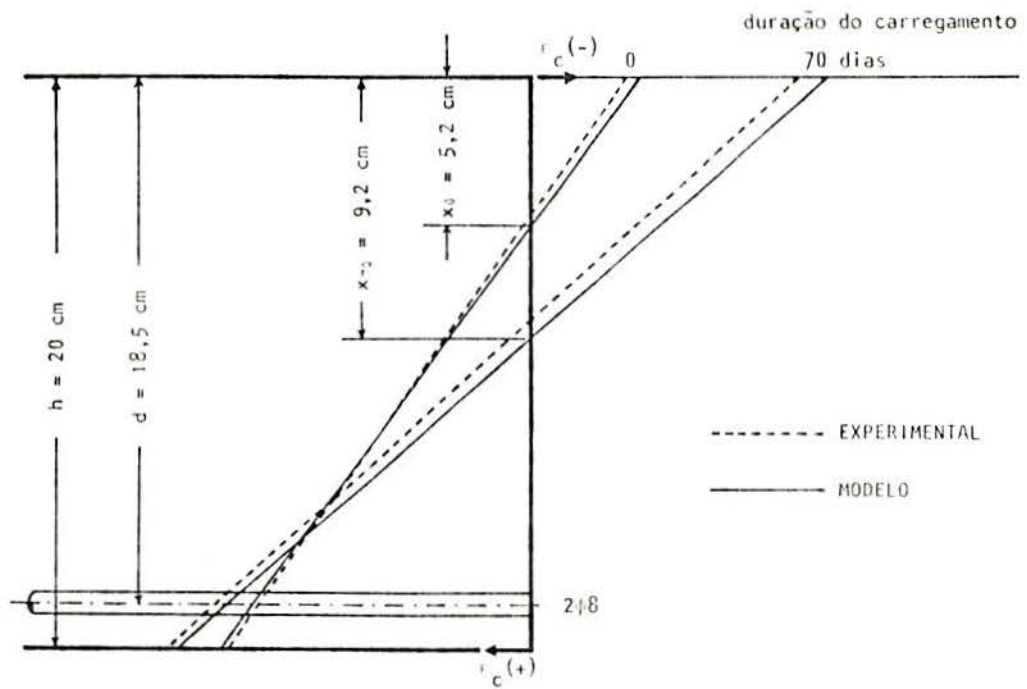


Fig. 14.15 - Deformações na seção central das vigas V7 e V8 para o carregamento instantâneo e de longa duração

15 - ANÁLISE TRIDIMENSIONAL: ESTUDO DE UMA LAJE DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA A UMA CARGA CONCENTRADA

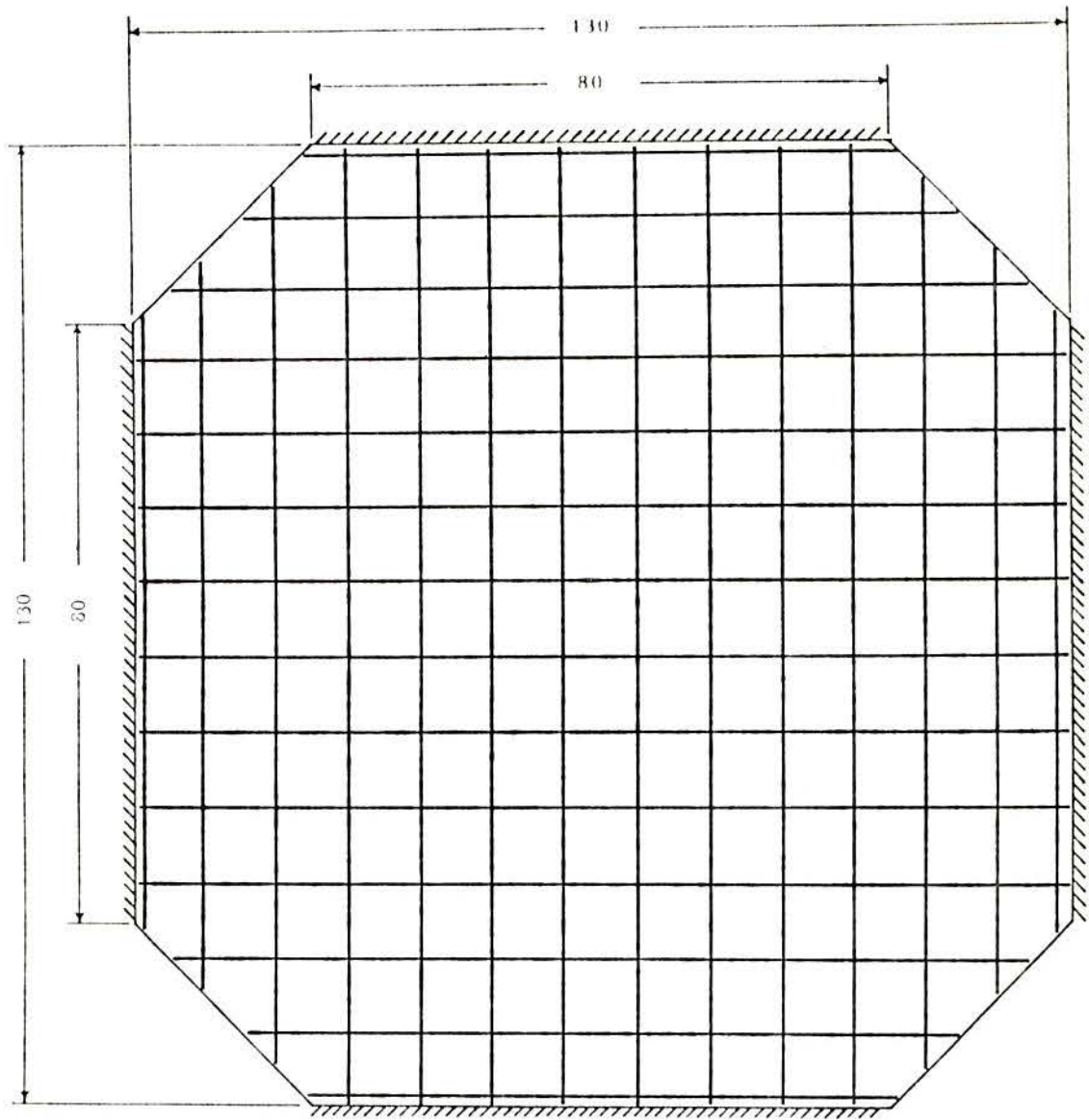
15.1 - Introdução

Este capítulo apresenta um estudo de uma laje de concreto armado submetida a uma carga concentrada em seu centro. A laje analisada foi ensaiada por Fusco, conforme esta descrito em [52]. Os resultados experimentais são, aqui, comparados com os valores determinados através do modelo de elementos finitos.

15.2 - As características da laje

Conforme a Fig. 15.1, a laje, referenciada no trabalho original por L1, tinha dimensões de 1,30 x 1,30 m , com uma espessura de 10 cm. No ensaio, os cantos chanfrados foram utilizados para facilitar a fabricação do pórtico de reação e para simplificar as operações de instalação da laje nesse pórtico de reação. Para a análise teórica, a laje foi considerada perfeitamente quadrada e apoiada ao longo de toda a borda.

A armadura da laje era constituída, nas duas direções, por barras de 10 mm de diâmetro (CA-50B, $f_y = 540$ MPa), espaçadas de 10 cm. A armadura em uma das direções, re-



Armadura: $\phi 10$ c/ 10 cm (nas duas direções)

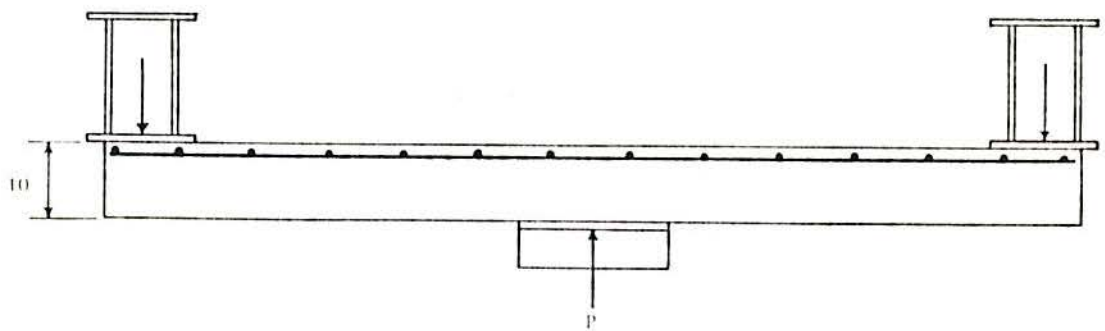


Fig. 15.1 - Detalhamento da laje

ferenciada por armadura externa, apresentava uma distância de 2 cm entre o seu eixo e a superfície tracionada da laje. Na outra direção, a armadura, dita interna, tinha, entre o seu eixo e a superfície tracionada da laje, uma distância de 3 cm.

A carga foi aplicada numa área central da laje de 20 x 20 cm.

A resistência cilíndrica à compressão do concreto, determinada na data do ensaio, foi de 28,7 MPa. Usando as relações apresentadas no capítulo 12, tomou-se para a resistência à tração e para o módulo de deformação longitudinal inicial do concreto, os valores de 2,30 MPa e 36.500 MPa, respectivamente.

Na Fig. 15.2, apresenta-se a malha de elementos finitos adotada para o estudo computacional. Esta malha é composta por 100 elementos tridimensionais lineares para estado triplo de tensão e discretiza apenas a quarta parte da laje. O peso próprio da peça foi desprezado na análise.

15.3 - Análise dos resultados

Nas Figs. 15.3 e 15.4, comparam-se os valores, determinados pelo ensaio e pelo modelo computacional, para as tensões nas armaduras externa e interna, no centro da laje, segundo as duas direções. Em cada figura, aparecem duas curvas experimentais, que correspondem a barras posicionadas simetricamente em relação ao eixo da laje.

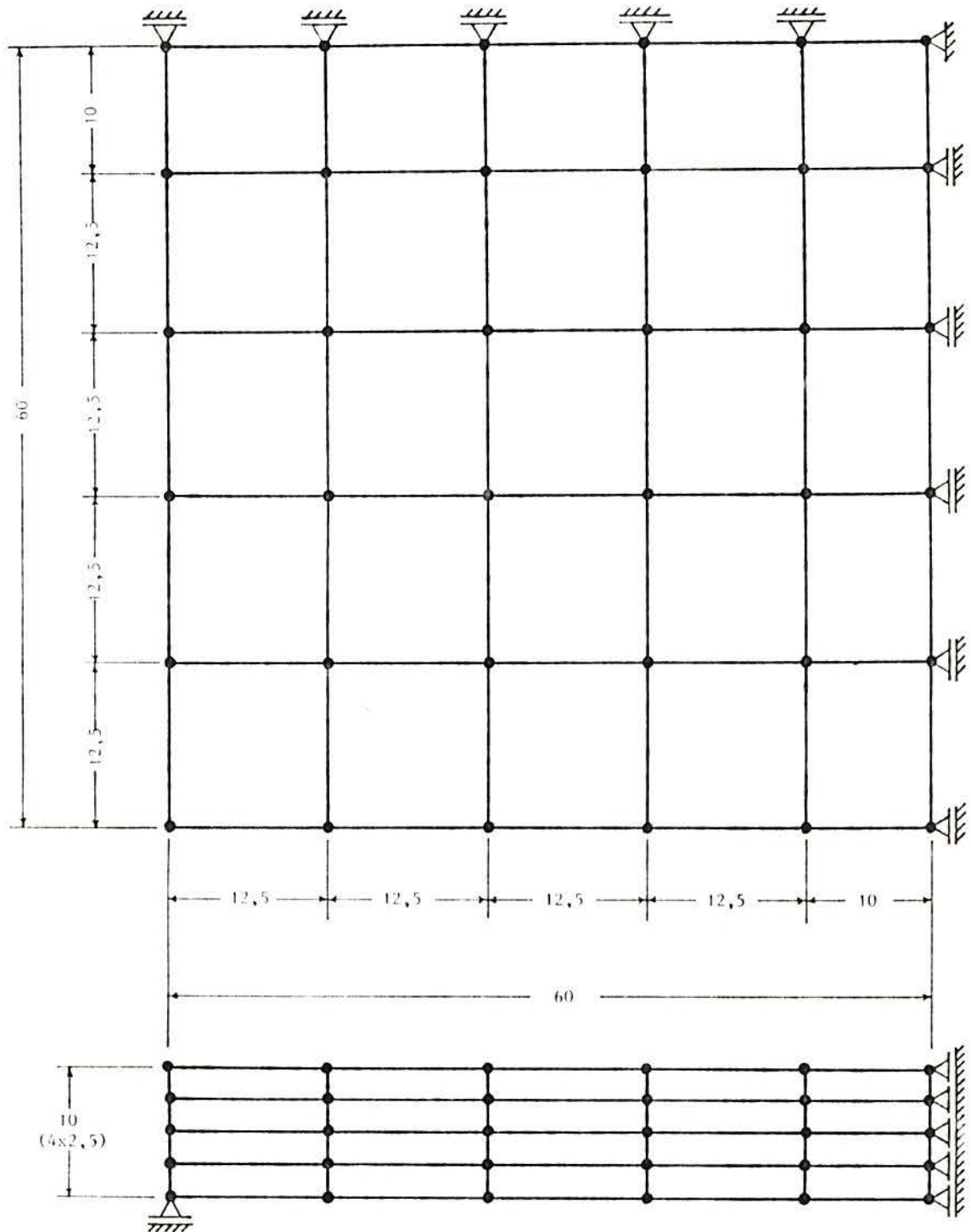


Fig. 15.2 - Discretização adotada para a quarta parte da laje

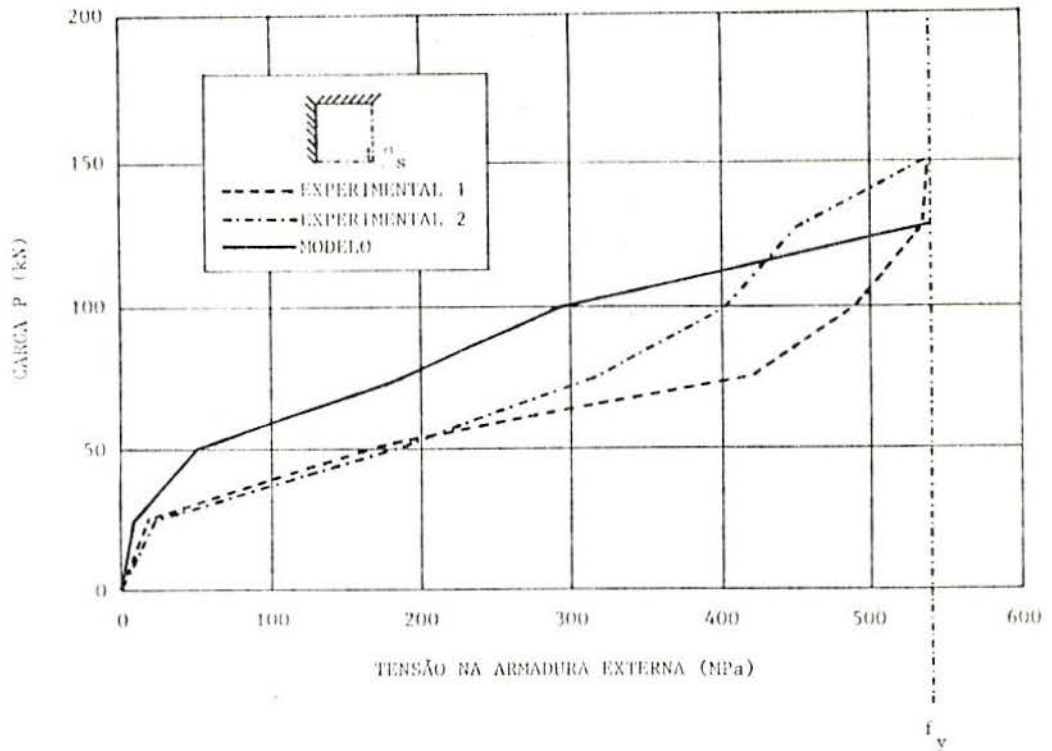


Fig. 15.3 - Tensão na armadura externa, no centro da laje, segundo o ensaio e o modelo computacional

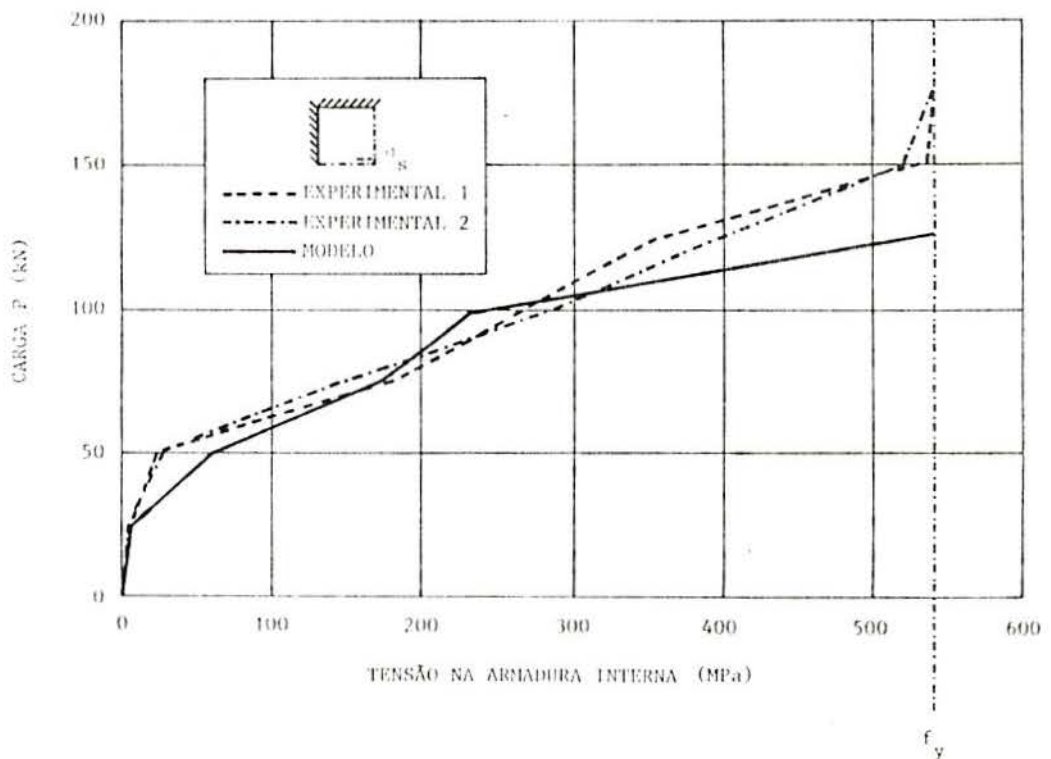


Fig. 15.4 - Tensão na armadura interna, no centro da laje, segundo o ensaio e o modelo computacional

16 - CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático para simular o comportamento de peças de concreto armado, possibilitando uma maior compreensão do seu funcionamento.

O programa computacional obtido alcançou uma excelente aproximação frente a todos resultados experimentais analisados, considerando-se a variabilidade inerente ao comportamento de peças de concreto armado. A concordância, entre os valores teóricos e experimentais confrontados, é uma garantia da validade do modelo para o estudo de uma ampla faixa de situações nas estruturas correntes de concreto armado. Abre-se, portanto, a perspectiva de realização para uma infinidade de estudos nesta área.

Naturalmente, as potencialidades do modelo, em seu estado atual, são limitadas pelas próprias hipóteses admitidas, dentro das diversas teorias envolvidas, na sua construção. Por exemplo, na escolha do modelo constitutivo do concreto, foi dada preferência para um modelo, que, embora com validade limitada para carregamentos monótonos, apresentava ótima afinidade com os valores experimentais. Assim, a presente análise computacional não permite um estudo de descarga.

Nas análises efetuadas, ficou evidenciada a importância da consideração do funcionamento do concreto entre as fissuras. Qualquer modelo, que não leve em conta tal situação, não poderá, por exemplo, prever realisticamente as tensões nas armaduras.

A determinação das deformações por fluência e por retração do concreto é, também, importante neste tipo de análise. Os resultados obtidos, apesar de estarem baseados em um modelo bastante simples, foram muito bons, em especial, no que se refere ao comportamento global das peças de concreto armado.

Outro aspecto, que deve ser ressaltado, é a necessidade da utilização das relações deformações-deslocamentos completas para os elementos de armadura. Os erros, caso isto não fosse feito, podem ser consideráveis em determinadas situações.

Sem dúvida, o modelo obtido pode ser em muitos pontos aperfeiçoado, estendendo-se a sua validade e a sua precisão. Entretanto, a conclusão fundamental, que deve ser extraída deste trabalho, é a certeza da possibilidade da simulação computacional do funcionamento real das estruturas de concreto armado.

Este fato, além de possibilitar estudos para um aproveitamento otimizado dos materiais, permitirá, com o advento de computadores de maior performance, uma análise precisa de estruturas inteiras de concreto armado.

ANEXO A - FUNDAMENTOS SOBRE O CRITÉRIO DE RUPTURA PARA O CON-
CRETO

A.1 - Generalidades

Um critério de ruptura de um material isotrópico deve ser uma função do estado de tensão, independente da escolha do sistema de coordenadas em que a tensão está definida. Um modo de representar tal função é através do uso das tensões principais, ou seja,

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Uma forma mais conveniente de expressar o critério de ruptura é utilizando os invariantes de tensão. Assim, por exemplo, tem-se

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (\text{A.2})$$

onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensão σ_{ij} e J_2 , J_3 são o segundo e o terceiro invariantes do tensor de tensão anti-esférico s_{ij} . Estes três invariantes permitem uma interpretação simples, independente das propriedades do material.

Neste anexo, serão apresentados os elementos básicos para a formulação de um critério de ruptura para o

concreto, conforme estudo de Chen [34].

A.2 - Os invariantes de tensão

Por definição, as tensões tangenciais em um ponto são nulas sobre um plano principal. Este plano é definido pela direção principal n_i de uma tensão principal σ . Assim, a direção do vetor de tensões, T_i , neste ponto, deve ser a mesma da normal n_i , ou seja, $T_i = \sigma n_i$. Desta forma, tem-se para cada direção

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (\text{A.3})$$

onde o tensor de tensão, σ_{ij} , está relacionado com o vetor T_i pela fórmula de Cauchy, $T_i = \sigma_{ij} n_j$, e $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ é o delta de Kronecker, cujo valor é 1, se $i=j$ e 0, se $i \neq j$. A Eq. (A.3) é um sistema de três equações lineares homogêneas para (n_1, n_2, n_3) . Este sistema tem solução, se e somente se o determinante dos coeficientes é nulo.

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (\text{A.4})$$

ou

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.5})$$

A Eq. (A.5) pode ser escrita na forma

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (\text{A.6})$$

onde

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} I_1 \sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{6} I_1^3 \quad (\text{A.9})$$

Usando as tensões principais, têm-se

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (\text{A.10})$$

$$I_2 = (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (\text{A.11})$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (\text{A.12})$$

As quantidades I_1 , I_2 , I_3 não dependem do sistema de coordenadas e são chamadas de invariantes do tensor de tensão σ_{ij} .

Pode-se expressar o tensor de tensão σ_{ij} como a soma de uma tensão hidrostática (esférica) σ_m e um desvio do estado hidrostático s_{ij} . Assim,

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \quad (\text{A.14})$$

A tensão hidrostática σ_m representa a tensão média ou a tensão hidrostática pura. O tensor de tensão anti-esférico s_{ij} representa um estado de cisalhamento puro.

Os invariantes do tensor anti-esférico s_{ij} são obtidos de forma análoga à anterior. Desta maneira, tem-se

$$|s_{ij} - s \delta_{ij}| = 0 \quad (\text{A.15})$$

ou

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (\text{A.16})$$

onde

$$J_1 = s_{ii} = s_x + s_y + s_z = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \\ &\quad + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Da expressão (A.13), conclui-se que as direções principais de σ_{ij} e s_{ij} são as mesmas. Assim, quando os eixos coordenados coincidem com as direções principais, têm-se

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3 \quad (\text{A.22})$$

Às vezes, é conveniente expressar as tensões em relação ao plano octaédrico. Este plano forma ângulos iguais com cada uma das direções principais de tensão. A tensão normal, neste plano, chamada tensão normal octaédrica, σ_{oct} , é igual à tensão normal média σ_m .

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} I_1 = \sigma_m \quad (\text{A.23})$$

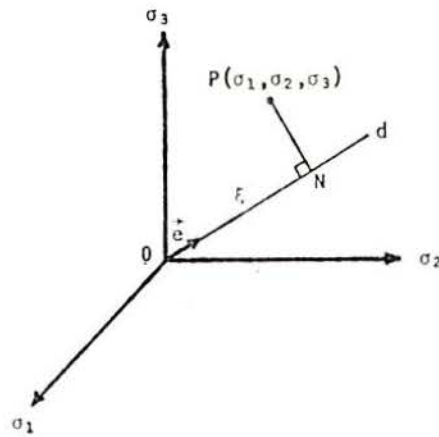


Fig. A.1 - Decomposição das tensões no espaço das tensões principais

A tensão transversal, neste plano, chamada tensão tangencial octaédrica, τ_{oct} é dada por

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{2/3} J_2 \quad (\text{A.24})$$

A direção da tensão transversal octaédrica é definida pelo ângulo θ , dado por

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} J_3 / \tau_{\text{oct}}^3 \quad (\text{A.25})$$

A representação geométrica mais simples do estado de tensão é obtida usando-se as três tensões principais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ como coordenadas de um ponto no espaço de três dimensões. Na Fig. A.1, o vetor {OP} representa um estado de tensão.

Pode-se definir, neste espaço, o eixo hidrostático como a diagonal d , que dista igualmente dos três eixos ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). O vetor unitário, que direciona esta diagonal, é dado por

$$\{e\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Todos os pontos sobre esta diagonal representam estados de tensão hidrostáticos, isto é, as tensões anti-

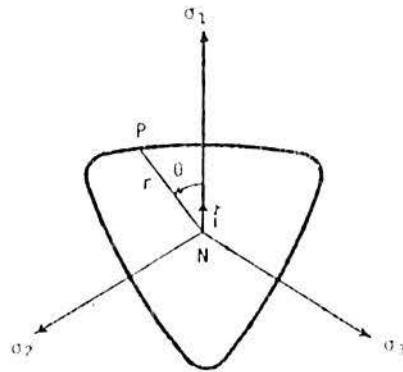


Fig. A.2 - Projeção no plano desviador dos eixos coordenados σ_1 , σ_2 e σ_3

-esféricas são nulas. Os planos perpendiculares à diagonal d são chamados planos desviadores. O plano desviador que passa pela origem do sistema de coordenadas é chamado plano π e é expresso por

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (\text{A.27})$$

Os pontos do plano π representam estados de cisalhamento puro com nenhuma componente hidrostática.

Como o estado de tensão pode ser representado pelo vetor $\{OP\}$, é possível decompor este vetor em duas compo_nentes, uma na direção do eixo hidrostático, $\{ON\}$, e outra perpendicular ao eixo hidrostático, $\{NP\}$.

O comprimento de $\{ON\}$ é

$$|ON| = \xi = \{OP\}^t \cdot \{e\} = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3\} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \quad (\text{A.28})$$

ou

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \sqrt{3} \sigma_m = \sqrt{3} \sigma_{\text{oct}} \quad (\text{A.29})$$

A componente $\{NP\}$ é determinada por

$$\{NP\} = \{OP\} - \{ON\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

O quadrado do comprimento de $\{NP\}$ é

$$|NP|^2 = r^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2 J_2 \quad r \geq 0 \quad (\text{A.31})$$

ou

$$r^2 = 2 J_2 = 5 \tau_m^2 = 3 \tau_{\text{oct}}^2 \quad (\text{A.32})$$

Desta forma, o estado de tensão, dado pelo ponto $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, pode também ser caracterizado pelas coordenadas ξ, r, θ , conforme a Fig. A.1 e a Fig. A.2.

A.3 - Os invariantes de deformação

De modo semelhante, pode-se obter os invariantes de deformação. Assim,

$$I_1' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{ii} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} I_2' &= (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x) - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{xz}^2 = \\ &= \frac{1}{2} I_1'^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} I_3' &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} - \frac{1}{2} I_1' \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} + \frac{1}{6} I_1' \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

ou, em termos das deformações principais

$$I_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (\text{A.36})$$

$$I_2' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 \quad (\text{A.37})$$

$$I_3' = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \quad (\text{A.38})$$

A deformação anti-esférica e_{ij} é obtida por

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_v \delta_{ij} \quad (\text{A.39})$$

onde $\epsilon_v = I_1'$. Os invariantes do tensor de deformação anti-esférico são

$$J_1' = e_x + e_y + e_z = e_{ii} = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji} = \\ &= \frac{1}{6} [(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2] + \\ &\quad + \epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$J_3' = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki} = \begin{vmatrix} e_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & e_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & e_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.42})$$

ou, em termos das deformações principais

$$J_1' = e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \\ &= \frac{1}{6} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$J_3' = \frac{1}{3} (e_1^3 + e_2^3 + e_3^3) = e_1 e_2 e_3 \quad (\text{A.45})$$

De forma análoga, define-se as deformações octaédricas como

$$\epsilon_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \epsilon_v = \frac{1}{3} I_1' \quad (\text{A.46})$$

e

$$\gamma_{\text{oct}}^2 = \frac{8}{3} J_2' \quad (\text{A.47})$$

A.4 - Características da superfície de ruptura do concreto

Neste item, serão resumidas as características da superfície de ruptura do concreto, determinadas experimentalmente. A forma de uma superfície de ruptura, em um espaço de tensões tridimensional, pode ser melhor descrita através de suas seções transversais nos planos desviadores e de seus meridianos nos planos meridianos.

As seções transversais da superfície de ruptura são as curvas de intersecção entre a superfície de ruptura e um plano desviador, que é perpendicular ao eixo hidrostático, com ξ constante. Os meridianos da superfície de ruptura são as curvas de intersecção entre a superfície de ruptura e um plano (o plano meridiano), que contém o eixo hidrostático, com θ constante.

Se o material for isotrópico, os índices 1, 2, 3 associados aos eixos coordenados são arbitrários. Isto resulta na tríplice simetria, que apresenta a superfície de ruptura, conforme aparece na Fig. A.2.

Assim, torna-se necessário apenas o estudo do setor $\theta=0^\circ$ a 60° , ficando os demais setores conhecidos por simetria. A curva de ruptura no plano desviador apresenta, segundo evidências experimentais, as seguintes características:

- a curva de ruptura é suave;
- a curva de ruptura é convexa, ao menos para tensões de compressão;
- a curva de ruptura tem aspecto do tipo apresentado na Fig. A.2;
- a curva de ruptura é aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão (correspondendo a valores de ξ pequenos, próximos ao plano π), ficando mais circular a medida que as tensões de compressão aumentam (crescimento dos valores de ξ).

Os meridianos determinados por valores de θ iguais a 0° , 30° e 60° são chamados, respectivamente, de meridiano de tração, de cisalhamento e de compressão.

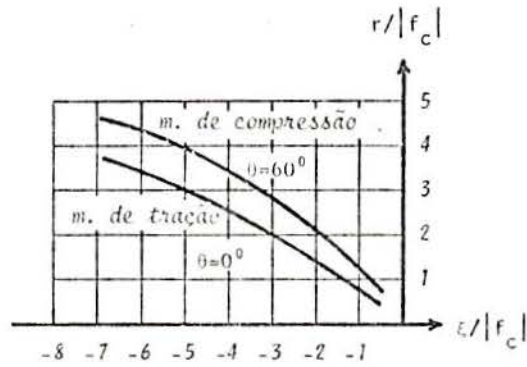


Fig. A.3 - Meridianos de compressão e de tração

Conforme aparece na Fig. A.3, as curvas de ruptura nos planos meridianos apresentam as seguintes características:

- as curvas de ruptura dependem da componente hidrostática da tensão, I_1 ou ξ ;
- as curvas de ruptura são suaves e convexas;
- $r_t/r_c < 1$, onde os índices t e c correspondem aos meridianos de tração e compressão, respectivamente;
- o valor da relação r_t/r_c aumenta com o aumento da pressão hidrostática;
- um carregamento hidrostático não pode causar a ruptura.

ANEXO B - EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA A DETERMINAÇÃO DOS VALORES DAS FUNÇÕES E PARÂMETROS DE FLUÊNCIA E RETRAÇÃO CONFORME O CEB

O Código Modelo do CEB/1978, [41], apresenta, graficamente, as leis de variação de funções e parâmetros, para o cálculo das deformações de fluência e de retração no concreto ao longo do tempo. Estes gráficos são adotados pela NBR-7197, [4], que fornece expressões analíticas para suas determinações (capítulo 6 deste trabalho).

O CEB, em [43], também, dá expressões para o modelo gráfico. Estas expressões estão apresentadas a seguir.

$$\beta_c(t_0) = \frac{f_{cm}(t_0)}{f_{cm}(t_\infty)} = \left[\frac{t_0}{t_0+47} \right]^{1/2,45} \quad (B.1)$$

$$\beta_i(t_0) = \left[\frac{\beta_c(28)}{\beta_c(t_0)} \right]^{1/3} = 0,875 \left[\frac{t_0+47}{t_0} \right]^{1/7,35} \quad (B.2)$$

$$\beta_a(t_0) = 0,8 [1 - \beta_c(t_0)] = 0,8 \left[1 - \left(\frac{t_0}{t_0+47} \right)^{1/2,45} \right] \quad (B.3)$$

$$\beta_d(t-t_0) = \left[\frac{t-t_0}{t-t_0+328} \right]^{1/4,2} \quad (B.4)$$

$$\beta_f(t) = \left[\frac{t}{t+K_1(h_{fic})} \right]^{K_2(h_{fic})} \quad (B.5)$$

$$K_1(h_{fic}) = e^{[5,02/h_{fic} + \ln(6,95 h_{fic}^{1,25})]} \quad (B.6)$$

$$K_2(h_{fic}) = e^{[0,00144 h_{fic}^{-1,1}/h_{fic} - \ln(1,005 h_{fic}^{0,2954})]} \quad (B.7)$$

$$\phi_{f_1} = 4,45 - 0,035 U \quad (B.8)$$

$$\phi_{f_2} = e^{[4,4 \cdot 10^{-5} \cdot h_{fic} - \frac{0,357}{h_{fic}} - \ln(\frac{h_{fic}^{0,1667}}{2,6})]} \quad (B.9)$$

$$\beta_s(t) = \left[\frac{t}{t+K_3(h_{fic})} \right]^{K_4(h_{fic})} \quad (B.10)$$

$$K_3(h_{fic}) = 11,8 h_{fic} + 16 \quad (B.11)$$

$$K_4(h_{fic}) = e^{[-0,00257 h_{fic} + \frac{0,32}{h_{fic}} + \ln(0,22 h_{fic}^{0,4})]} \quad (B.12)$$

$$\varepsilon_{s_1} = (0,000775 U^3 - 0,1565 U^2 + 11,0325 U - 303,25) \cdot 10^{-5} \quad (B.13)$$

$$\varepsilon_{s_2} = e^{[0,00174 h_{fic} - \frac{0,32}{h_{fic}} - \ln(\frac{h_{fic}^{0,251}}{1,9})]} \quad (B.14)$$

- Observação: Em todas as equações deste anexo

h_{fic} - em cm

t e t_0 - em dias

U - em %

ANEXO C - UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL NA VERSÃO EM FORTRAN IV PARA O SISTEMA BURROUGHS A10

C.1 - Introdução

Na versão em FORTRAN IV para o sistema Burroughs A10, o programa computacional, resultante deste trabalho, foi implementado dentro do sistema ESFINGE (estudo físico, isótropo ou não e geométrico de estruturas), desenvolvido no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Neste sistema, a entrada de dados do programa computacional é feita através de uma linguagem orientada, como é descrita em [58]. Apresentam-se, neste anexo, os comandos para o uso desta linguagem, para o caso específico das estruturas de concreto armado.

C.2 - A linguagem orientada

Os dados do problema são introduzidos através de uma série de comandos. O primeiro comando a ser colocado é o comando TITULO e o último é o comando FIM.

O conjunto de dados do problema é dividido em quatro grupos, que são iniciados pelos seguintes comandos:

DADOS DA MALHA

DADOS ESTRUTURAIS

DADOS DE CARGA

DADOS DE ANALISE

No conjunto aberto pelo comando DADOS DA MALHA, é definida a malha de elementos finitos com a especificação das coordenadas nodais, da conectividade e do tipo de elementos. As coordenadas nodais são fornecidas, individualmente ou aproveitando simetrias e semelhanças, com o emprego dos seguintes comandos:

COORDENADAS

COORDENADAS MULTIPLAS

SIMETRIA NODAL

SEMELHANCA NODAL

De forma análoga, emprega-se, para especificar a conectividade dos elementos, os comandos:

CONETIVIDADE

CONETIVIDADE MULTIPLA

SEMELHANCA DE CONETIVIDADE

O comando TIPO DE ELEMENTOS estabelece os tipos de elementos utilizados. Para o concreto estão disponíveis os elementos EPQL (estado plano de tensão quadrangular linear), EPQQ (estado plano de tensão quadrangular quadrático), EPTL (estado plano de tensão triangular linear), EPTQ (estado plano de tensão triangular quadrático) e TRIL (tridimensional linear). As barras de armadura, especificadas unicamente pelos nós de extremidade, são identificadas pelo tipo ACO.

O conjunto DADOS ESTRUTURAIS engloba os comandos:

PROPRIEDADES

PROPRIEDADES DO CONCRETO

CONSTANTES DO CONCRETO

CONSTANTES PLASTICAS

RESTRICOES NODAIS

No comando PROPRIEDADES são especificados a espessura dos elementos de concreto (no caso bidimensional) e o módulo de deformação do aço, o número e o diâmetro das barras dos elementos de armadura.

No comando PROPRIEDADES DO CONCRETO são fornecidos o tipo de cimento, a consistência do concreto, a espessura fictícia da peça, a data para considerar o início da retração, o espaçamento das fissuras na configuração estabilizada, a temperatura e a umidade relativa do ar médias do ambiente.

O comando CONSTANTES DO CONCRETO indica, para cada carregamento, a data, o número de etapas de análise e as constantes do concreto correspondentes.

O comando CONSTANTES PLASTICAS estabelece o diagrama tensão-deformação a ser empregado para o aço. Para isto são utilizados os comandos:

CURVA

ENDURECIMENTO

LIMITES DE ESCOAMENTO

O comando CURVA estabelece se a curva tensão-deformação para o aço é elasto-plástica perfeita, ou composta por duas ou até dez retas. No comando ENDURECIMENTO, especificam-se os valores do endurecimento do material, para os casos em que a curva é composta por mais de duas retas. No comando LIMITES DE ESCOAMENTO, são dadas as tensões correspondentes aos pontos de mudança de inclinação na relação tensão-deformação.

No comando RESTRICOES NODAIS são especificadas as condições de contorno do problema.

No conjunto iniciado pelo comando DADOS DE CARGA são definidos os carregamentos. Empregam-se os comandos:

CARREGAMENTO

CARGAS NODAIS

O comando CARREGAMENTO identifica o carregamento. No comando CARGAS NODAIS são especificadas as cargas aplicadas nos nós da estrutura.

Nos DADOS DE ANALISE são empregados os seguintes comandos:

ANALISE

IMPRIMIR

ORDEM DE NOS

O comando ANALISE especifica o tipo de análise e o método de solução (incremental ou iterativa). O comando IMPRIMIR permite a impressão dos resultados de elementos escolhidos. Com o comando ORDEM DE NOS pode-se reordenar internamente os nós, a fim de obter uma menor largura de banda.

C.3 - A utilização dos comandos

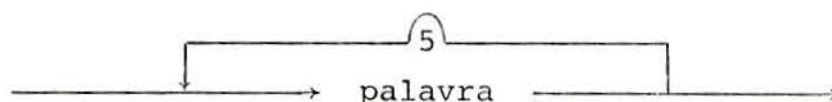
Os dados para execução do programa são introduzidos em registros físicos de oitenta caracteres. Em geral, cada comando da linguagem orientada ocupa um registro. Caso se deseje colocar mais de um comando por registro, os diversos comandos são separados por um ponto e vírgula. Se um determinado comando exceder a capacidade de um registro, utiliza-se o símbolo \$, para indicar que o comando continua no registro seguinte.

Pode-se incluir comentários para facilitar a compreensão do conjunto de dados. Com este fim, emprega-se o símbolo % seguido do comentário. Tudo o que seguir o símbolo

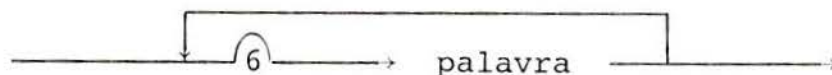
lo %, até o fim do cartão, será tomado como comentário.

Nos diagramas de sintaxe dos comandos, que serão apresentados a seguir, as letras maiúsculas e palavras escritas em maiúsculas são constantes da linguagem e devem ser utilizadas sem qualquer modificação. Um traço vertical | é usado para indicar o fim do diagrama de sintaxe.

Em certos comandos existem itens que podem ser repetidos um número limitado de vezes. Assim, para indicar que um item pode ser usado no máximo seis vezes, emprega-se



ou



Se não houver número limite, o caminho pode ser percorrido indefinidamente.

Os nós, os elementos e os carregamentos são identificados através de nomes numéricos (números inteiros) de no máximo quatro dígitos. Um grupo de nós, elementos ou carregamentos é especificado sob a forma de lista. Uma lista é um conjunto de nomes separados por um ou mais brancos, como, por exemplo

1 2 3 4 7 8 15 16 17

Se a lista incluir números consecutivos, pode-se empregar, alternativamente, a palavra ATE. Assim, a lista acima fica

1 ATE 4 7 8 15 ATE 17

É possível, também, utilizar na especificação de listas as palavras TODOS e MENOS. Considerando-se, que para a lista acima, o total de itens seja numerado de 1 a 17,

ela pode ser escrita como

TODOS MENOS 5 6 9 ATE 14

C.4 - A sintaxe dos comandos

Neste item, apresentam-se os diagramas de sintaxe dos comandos disponíveis. Em certos comandos, a alternativa mais comum está assinalada com um asterísco (*). O programa adotará esta alternativa, no caso do usuário não especificar a opção a ser executada. Os comandos assinalados por duplo asterísco (**) não precisam ser dados. Neste caso, o programa assumirá valores padrões.

TITULO ————— "título" —————>|

FIM —————>|

DADOS DA MALHA —————>|

COORDENADAS —————>|

< nome do nó > —————>| (X) r₁ (Y) r₂ (Z) r₃ |—————>|

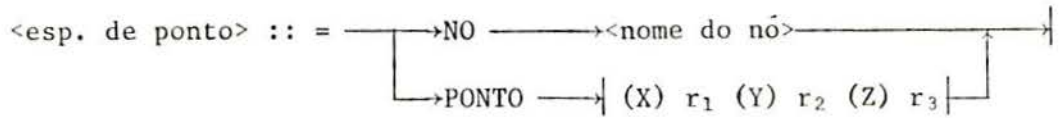
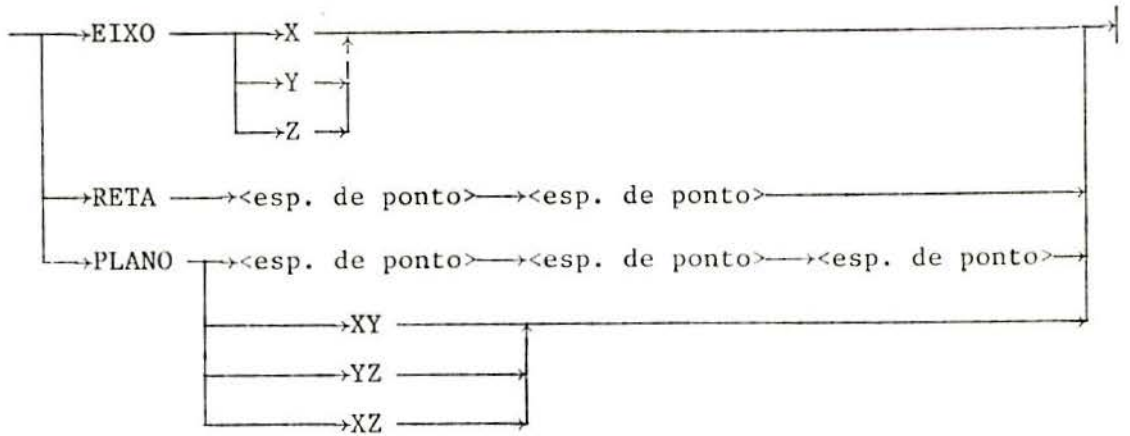
COORDENADAS MULTIPLAS —————>|

<lista de nós> —————>INICIO —————>| (X) r₁ (Y) r₂ (Z) r₃ |—————>|
 |—————>FIM —————>| (X) r₁ (Y) r₂ (Z) r₃ |—————>|

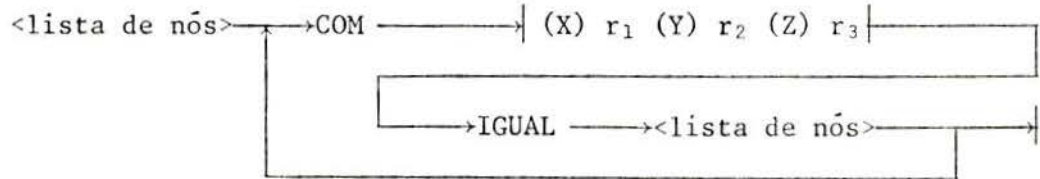
SIMETRIA NODAL —————>|

<lista de nós> —————>COM —————><lista de nós> —————> <esp. simetria> —————>|

<esp. de simetria> ::= =



SEMELHANCA NODAL



CONETIVIDADE

< nome do elemento > --> <lista de nós>

CONETIVIDADE MULTIPLA

<lista de elementos> --> NOS --> <lista de nós> --> PASSO --> i₁

SEMELHANCA DE CONETIVIDADE

<lista de elementos> --> MAIS --> i_r --> IGUAL --> <lista de elementos>

TIPO DE ELEMENTO —————>|

<lista de elementos>—————><tipo>—————>|

DADOS ESTRUTURAIS —————>|

PROPRIEDADES —————>|

<lista de elementos>—————>ESPESSURA r₁—————>|
 |—————>E r₁ NUMERO r₂ DIAMETRO r₃—————>|

PROPRIEDADES DO CONCRETO —————>|

ENDURECIMENTO —————>|
 |—————>LENTO —————>|
 |—————>NORMAL* —————>|
 |—————>RAPIDO —————>|

CONSISTENCIA —————>|
 |—————>SECA —————>|
 |—————>MEDIA* —————>|
 |—————>UMIDA —————>|

**DIAMETRO MAXIMO AGREGADOS —————>r—————>|

**ESPACAMENTO FISSURAS —————>r—————>|

**INICIO RETRACAO —————>r—————>|

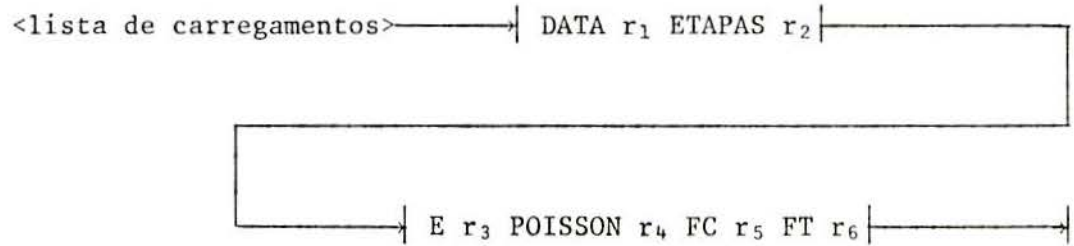
**TEMPERATURA —————>r—————>|

**UMIDADE → r →

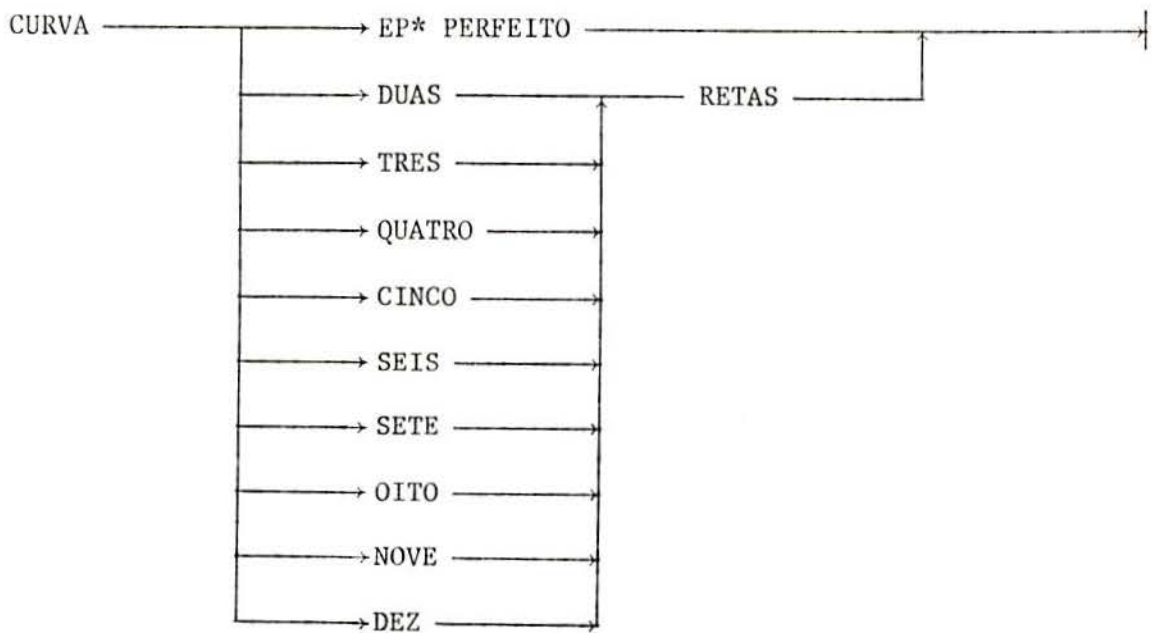
**ESPESURA FICTICIA → r →

**COEFICIENTE DE VARIACAO → r →

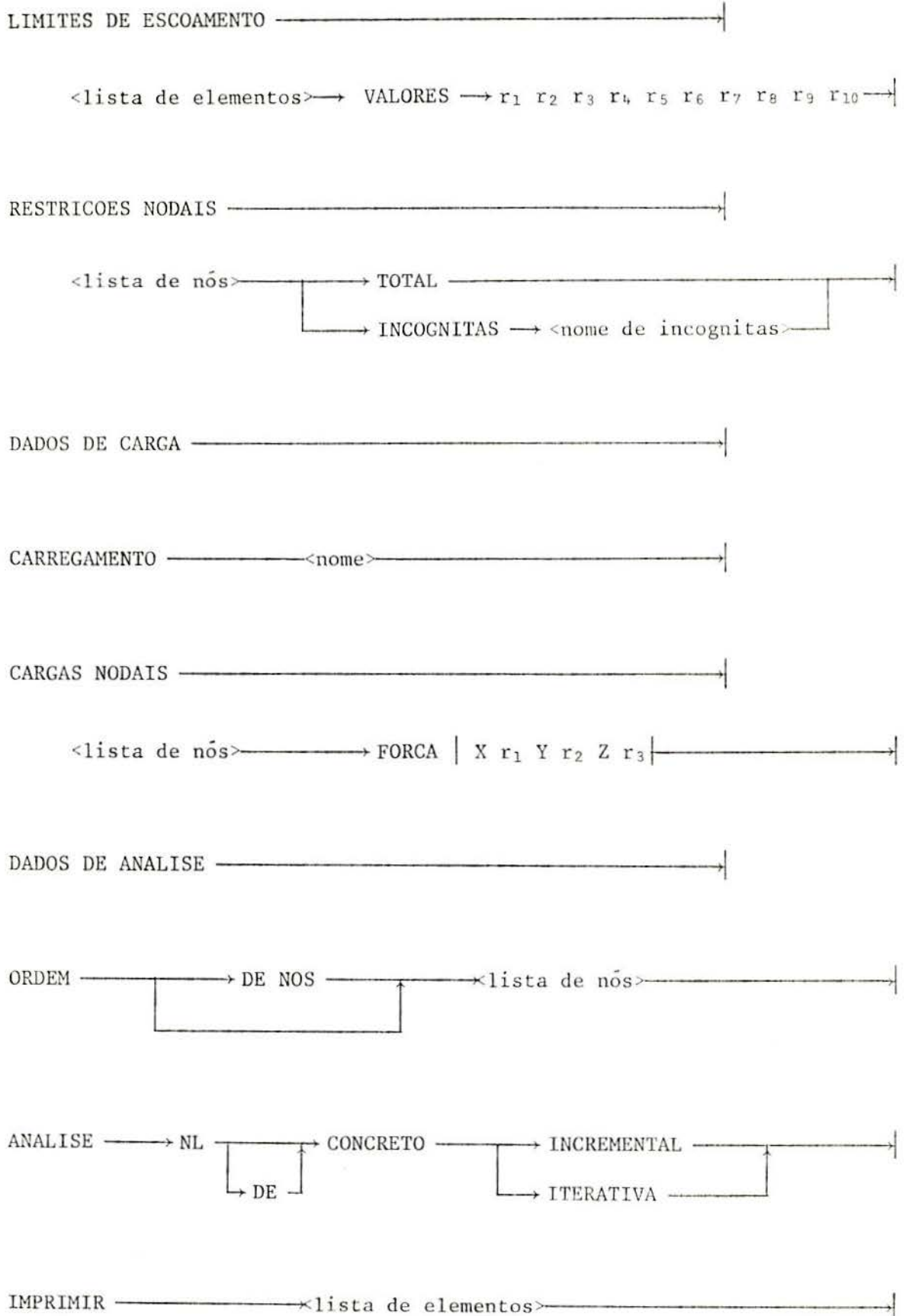
CONSTANTES DO CONCRETO →



CONSTANTES PLASTICAS →



<lista de elementos> → ENDURECIMENTO → r₁ r₂ r₃ r₄ r₅ r₆ r₇ r₈ r₉ →



Os valores padrões, assumidos pelo programa em caso de omissão do comando específico, são de 30 mm para o diâmetro máximo dos agregados, 100 mm para o espaçamento médio das fissuras, 7 dias para o início de consideração da retração, 20°C para a temperatura, 70% para a umidade relativa do ar, 100 mm para a espessura fictícia e 0% para o coeficiente de variação das propriedades mecânicas do concreto.

Os dados introduzidos através dos comandos devem estar nas seguintes unidades: comprimentos em milímetros, forças em newtons, tempo em dias, temperatura em graus celsius, a umidade relativa do ar e o coeficiente de variação em porcentagem.

C.5 - Exemplo de utilização dos comandos

Para exemplificar a aplicação dos comandos da linguagem orientada, transcreve-se, a seguir, o arquivo referente aos dados da viga HH5, analisada no capítulo 13:

TITULO "VIGA HH5"

DADOS DA MALHA

COORDENADAS MULTIPLAS

1 ATE 9 INICIO 0 0 FIM 0 320

10 ATE 14 INICIO 150 0 FIM 150 320

SEMELHANCA NODAL

1 ATE 9 COM X 300 IGUAL 15 ATE 23

10 ATE 14 COM X 450 IGUAL 24 ATE 28

1 ATE 9 COM X 600 IGUAL 29 ATE 37

10 ATE 14 COM X 750 IGUAL 38 ATE 42

1 ATE 9 COM X 900 IGUAL 43 ATE 51

10 ATE 14 COM X 1050 IGUAL 52 ATE 56

1 ATE 9 COM X 1200 IGUAL 57 ATE 65

10 ATE 14 COM X 1350 IGUAL 66 ATE 70

1 ATE 9 COM X 1500 IGUAL 71 ATE 79
 10 ATE 14 COM X 1650 IGUAL 80 ATE 84
 1 ATE 9 COM X 1800 IGUAL 85 ATE 93
 10 ATE 14 COM X 1950 IGUAL 94 ATE 98
 1 ATE 9 COM X 2100 IGUAL 99 ATE 107
 10 ATE 14 COM X 2250 IGUAL 108 ATE 112
 1 ATE 9 COM X 2400 IGUAL 113 ATE 121
 10 ATE 14 COM X 2550 IGUAL 122 ATE 126
 1 ATE 9 COM X 2700 IGUAL 127 ATE 135
 10 ATE 14 COM X 2850 IGUAL 136 ATE 140
 1 ATE 9 COM x 3000 IGUAL 141 ATE 149

COORDENADAS

150 0 33; 151 3000 33
 152 0 33; 153 2512 33
 154 0 67; 155 2762 67
 156 0 67; 157 2512 67
 158 1772 253; 159 3000 253
 160 1622 253; 161 3000 253
 162 1772 287; 163 3000 287
 164 0 287; 165 3000 287

COORDENADAS MULTIPLAS

166 ATE 180 INICIO 100 22 FIM 2900 22
 181 ATE 195 INICIO 100 298 FIM 2900 298

CONETIVIDADE MULTIPLA

1 ATE 10 NOS 1 15 17 3 10 16 11 2 PASSO 14
 11 ATE 20 NOS 3 17 19 5 11 18 12 4 PASSO 14
 21 ATE 30 NOS 5 19 21 7 12 20 13 6 PASSO 14
 31 ATE 40 NOS 7 21 23 9 13 22 14 8 PASSO 14

41 ATE 48 NOS 150 151 PASSO 2

49 ATE 63 NOS 166 181 PASSO 1

TIPO DE ELEMENTO

1 ATE 40 EPQQ; 41 ATE 63 ACO

DADOS ESTRUTURAIS

PROPRIEDADES

1 ATE 40 ESPESSURA 250

41 43 46 48 E 210000 NUMERO 2 DIAMETRO 14.18

42 44 45 47 E 210000 NUMERO 1 DIAMETRO 14.18

49 ATE 63 E 210000 NUMERO 2 DIAMETRO 8.14

PROPRIEDADES DO CONCRETO

ENDURECIMENTO NORMAL

CONSISTENCIA MEDIA

DIAMETRO MAXIMO AGREGADOS 30

ESPACAMENTO FISSURAS 100

INICIO RETRACAO 7

TEMPERATURA 18

UMIDADE 60

ESPESSURA FICTICIA 187.13

COEFICIENTE DE VARIACAO 0

CONSTANTES DO CONCRETO

1 DATA 28 ETAPAS 1 E 37000 POISSON 0.2 FC 30.8 FT 2.74

2 DATA 28 ETAPAS 13 E 37000 POISSON 0.2 FC 30.8 FT 2.74

CONSTANTES PLASTICAS

CURVA EP PERFEITO

LIMITES DE ESCOAMENTO

49 ATE 63 VALORES 371

CURVA SETE RETAS

41 ATE 48 ENDURECIMENTO 133852 77890 54922 42652 34861 29367

LIMITES DE ESCOAMENTO

41 ATE 48 VALORES 292 313 334 355 375 396 417

RESTRICOES NODAIS

1 INCOGNITAS V; 141 TOTAL; 142 ATE 149 INCOGNITAS U

DADOS DE CARGA

CARREGAMENTO 1

CARGAS NODAIS

2 4 6 8 10 14 24 28 38 42 52 56 66 70 80 84 94 98 \$

108 112 122 126 136 140 142 144 146 148 FORCA Y -50

11 12 13 25 26 27 39 40 41 53 54 55 67 68 69 81 82 83 95 96 97 \$

109 110 111 123 124 125 137 138 139 FORCA Y -100

16 18 20 22 30 32 34 36 44 46 48 50 58 60 62 64 72 74 76 78 86 88 \$

90 92 100 102 104 106 114 116 118 120 128 130 132 134 FORCA Y -100

1 9 141 149 FORCA Y 12.5

3 5 7 15 23 29 37 43 51 57 65 71 85 93 99 107 113 121 127 \$

135 143 145 147 FORCA Y 25; 79 FORCA Y -2225

17 19 21 31 33 35 45 47 49 59 61 63 73 75 77 87 89 91 101 103 \$

105 115 117 119 129 131 133 FORCA Y 50

CARREGAMENTO 2

CARGAS NODAIS

79 FORCA Y -221975

DADOS DE ANALISE

IMPRIMR TODOS

ANALISE NL DE CONCRETO ITERATIVA

FIM

ANEXO D - UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL NA VERSÃO EM
FORTRAN 77 PARA MICRO-COMPUTADORES COMPATÍVEIS COM
O IBM-PC

D.1 - Introdução

Desenvolveu-se, também, uma versão do programa para emprego em micro-computadores compatíveis com o IBM-PC. Nesta versão, existem programas específicos para os diferentes elementos de concreto armado adotados: EPQL (estado plano de tensão quadrangular linear), EPQQ (estado plano de tensão quadrangular quadrático), EPTL (estado plano de tensão triangular linear), EPTQ (estado plano de tensão triangular quadrático) e TRIL (tridimensional linear).

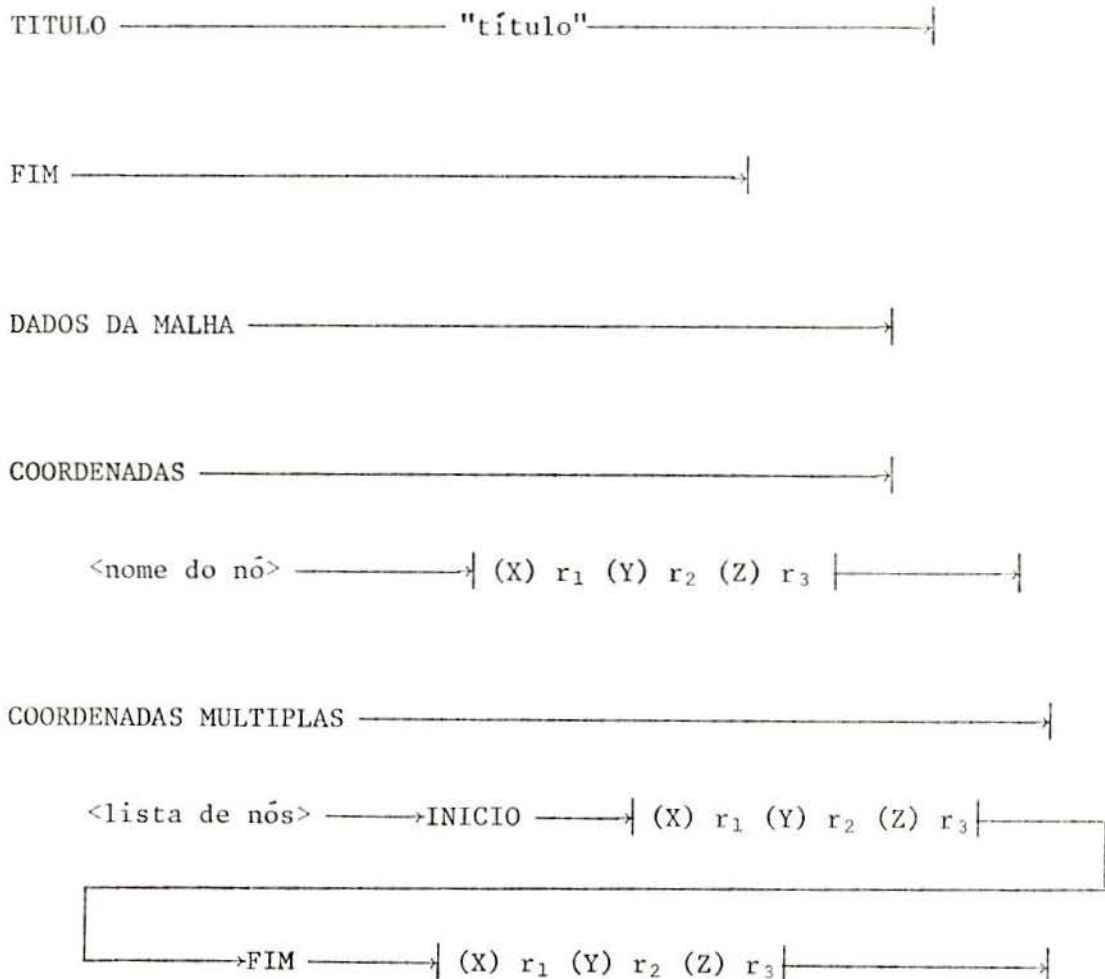
A entrada de dados para os diferentes programas é feita através de linguagem orientada, de forma análoga à versão descrita anteriormente. Com o auxílio de um editor de texto, escreve-se um arquivo de dados, contendo as características da peça a ser analisada. O programa, ao ser executado, solicita ao usuário o nome do arquivo onde deve buscar os dados.

D.2 - Os comandos da linguagem orientada

O uso desta linguagem orientada é em tudo semelhante ao da versão anterior. Os comandos são incluídos em re

gistros de oitenta caracteres. Pode-se colocar mais de um comando por registro, separando os diversos comandos por um ponto e vírgula. Para incluir comentários dentro do conjunto de dados, emprega-se o símbolo % seguido do comentário. Tudo o que vier após o símbolo %, até o final do registro, será tomado como comentário. Na formação de listas, pode-se empregar as palavras ATE, TODOS, MENOS de forma idêntica ao que foi descrito no anexo precedente.

A seguir, relaciona-se os diagramas de sintaxe dos comandos da linguagem orientada disponíveis para esta versão do programa. Em alguns comandos, a alternativa mais comum está assinalada com um asterísco (*). O programa adotará esta alternativa, no caso do usuário não especificar a opção a ser executada. Os comandos assinalados por um duplo asterísco (**) não precisam ser dados. Neste caso, o programa assumirá valores padrões.



CONETIVIDADE —————>|

<nome do elemento> —————> <lista de nós> —————>|

CONETIVIDADE MULTIPLA —————>|

<lista de elementos> —> NOS —> <lista de nós> —> PASSO —> i₁ —>|

DADOS ESTRUTURAIS —————>|

PROPRIEDADES —————>|

<lista de elementos> —> ESPESSURA r₁ —————>|
 —> E r₁ NUMERO r₂ DIAMETRO r₃ —————>|

PROPRIEDADES DO CONCRETO —————>|

ENDURECIMENTO —————>|
 —> LENTO —————>|
 —> NORMAL* —————>|
 —> RAPIDO —————>|

CONSISTENCIA —————>|
 —> SECA —————>|
 —> MEDIA* —————>|
 —> UMIDA —————>|

**DIAMETRO MAXIMO AGREGADOS —————> r —————>|

**ESPACAMENTO FISSURAS —————> r —————>|

**INICIO RETRACAO → r →

**TEMPERATURA → r →

**UMIDADE → r →

**ESPESSURA FICTICIA → r →

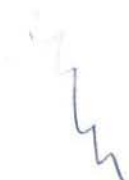
**COEFICIENTE DE VARIACAO → r₁ → [] → r₂ →

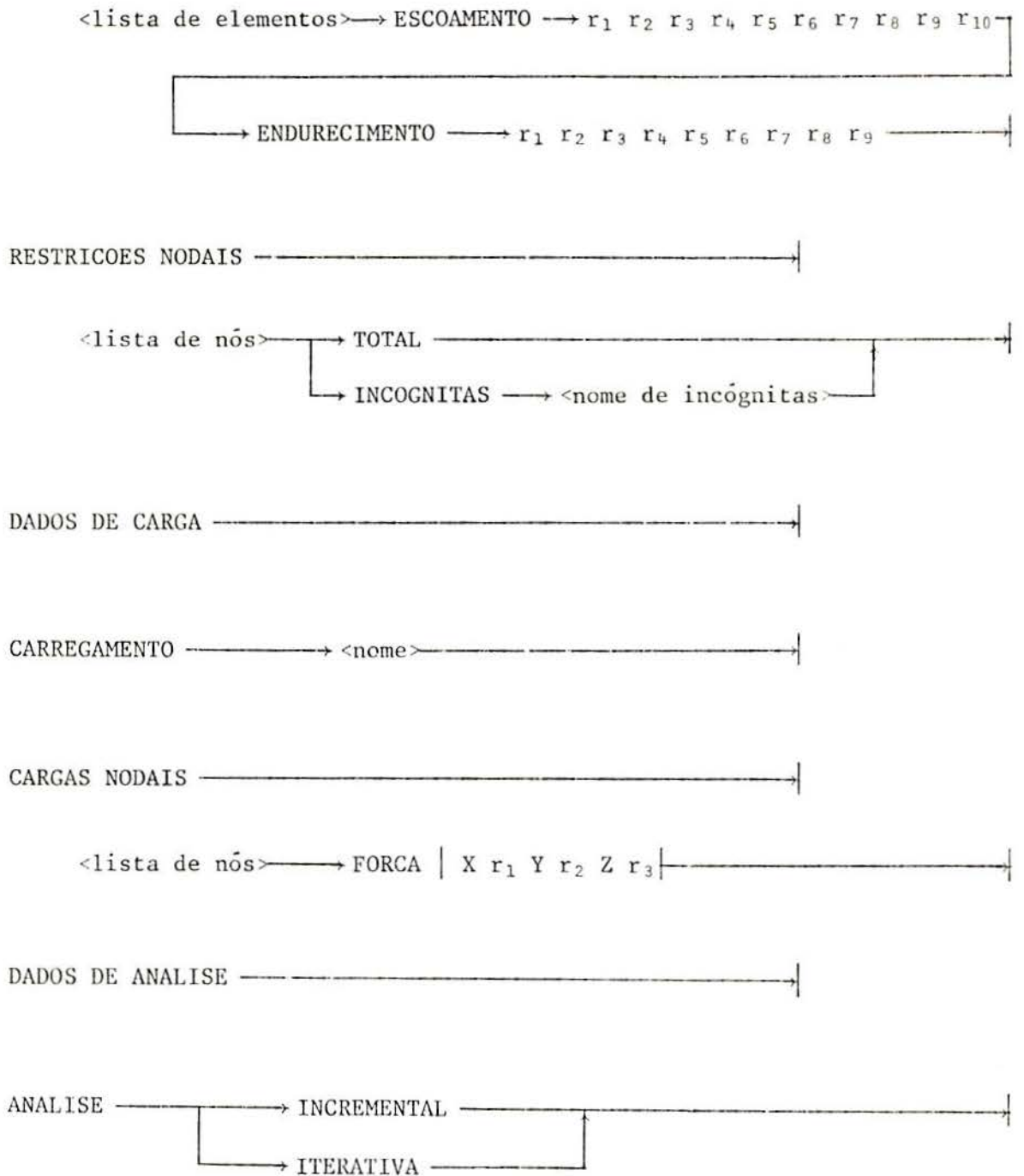
CONSTANTES DO CONCRETO →

<lista de carregamentos> → DATA r₁ ETAPAS r₂ →
→ E r₃ POISSON r₄ FC r₅ FT r₆ →

CONSTANTES PLASTICAS →

CURVA → EP* PERFEITO →
→ DUAS → RETAS →
→ TRES →
→ QUATRO →
→ CINCO →
→ SEIS →
→ SETE →
→ OITO →
→ NOVE →
→ DEZ →





Os valores padrões, assumidos pelo programa em caso de omissão do comando específico, e as unidades utilizadas nos dados são os mesmos referenciados no anexo C. No comando COEFICIENTE DE VARIACAO, o valor r_2 ($0 < r_2 < 1$) serve para iniciar a geração da sequência de números aleatórios. Este valor será tomado igual a zero, caso nenhum valor seja fornecido.

Os comandos devem ser introduzidos em um único registro. A exceção é o comando ESCOAMENTO/ENDURECIMENTO, que em caso de necessidade, pode ser dividido em duas linhas. Neste caso, a segunda linha deve começar pela palavra ENDURECIMENTO.

D.3 - Exemplo de utilização dos comandos

Para exemplificar a utilização dos comandos, apresenta-se, neste item, o arquivo criado para a análise, com o elemento EPQQ, da viga ET4 do capítulo 11. Este arquivo, referenciado por "VIGAET4.DAT", compreende os seguintes comandos:

TITULO "VIGA ET4"

DADOS DA MALHA

COORDENADAS MULTIPLAS

1 10 15 24 29 38 43 52 57 66 71 INICIO 0 0 FIM 1500 0

2 16 30 44 58 72 INICIO 0 50 FIM 1500 50

3 11 17 25 31 39 45 53 59 67 73 INICIO 0 100 FIM 1500 100

4 18 32 46 60 74 INICIO 0 143.75 FIM 1500 143.75

5 12 19 26 33 40 47 54 61 68 75 INICIO 0 187.5 FIM 1500 187.5

6 20 34 48 62 76 INICIO 0 231.25 FIM 1500 231.25

7 13 21 27 35 41 49 55 63 69 77 INICIO 0 275 FIM 1500 275

8 22 36 50 64 78 INICIO 0 312.5 FIM 1500 312.5

9 14 23 28 37 42 51 56 65 70 79 INICIO 0 350 FIM 1500 350

83 ATE 92 INICIO 60 17 FIM 1050 17

96 ATE 105 INICIO 60 332 FIM 1050 332

COORDENADAS

80 0 30; 81 0 70; 82 0 325; 93 1500 30

94 1500 70; 95 1500 325

CONETIVIDADE MULTIPLA

1 ATE 5 NOS 1 15 17 3 10 16 11 2 PASSO 14

6 ATE 10 NOS 3 17 19 5 11 18 12 4 PASSO 14

11 ATE 15 NOS 5 19 21 7 12 20 13 6 PASSO 14

16 ATE 20 NOS 7 21 23 9 13 22 14 8 PASSO 14

21 ATE 33 NOS 80 93 PASSO 1

DADOS ESTRUTURAIS

PROPRIEDADES

1 ATE 5 ESPESSURA 100

6 ATE 15 ESPESSURA 50

16 ATE 20 ESPESSURA 300

21 22 E 210000 NUMERO 2 DIAMETRO 19.74

23 E 210000 NUMERO 1 DIAMETRO 8.8

24 ATE 33 E 210000 NUMERO 2 DIAMETRO 6

PROPRIEDADES DO CONCRETO

ENDURECIMENTO NORMAL

CONSISTENCIA MEDIA

DIAMETRO MAXIMO AGREGADOS 30

ESPAÇAMENTO FISSURAS 58

INICIO RETRACAO 0

TEMPERATURA 18

UMIDADE 60

ESPESSURA FICTICIA 78.57

COEFICIENTE DE VARIACAO 0

CONSTANTES DO CONCRETO

1 DATA 28 ETAPAS 1 E 34000 POISSON 0.2 FC 24.20 FT 2.33

2 DATA 28 ETAPAS 8 E 34000 POISSON 0.2 FC 24.20 FT 2.33

CONSTANTES PLASTICAS

CURVA EP PERFEITO

24 ATE 33 ESCOAMENTO 320

CURVA SETE RETAS

21 ATE 23 ESCOAMENTO 301 323 344 366 387 409 430

ENDURECIMENTO 136076 79926 56549 43770 35691 30133

RESTRICOES NODAIS

1 INCOGNITAS V; 71 ATE 79 INCOGNITAS U

DADOS DE CARGA

CARREGAMENTO 1

CARGAS NODAIS

17 31 45 59 FORCA Y 17.96875

19 33 47 61 FORCA Y 10.9375

21 35 49 63 FORCA Y 33.59375

15 29 43 57 FORCA Y 12.5

3 73 FORCA Y 8.984375

5 75 FORCA Y 5.46875

7 77 FORCA Y 16.796875

23 37 51 65 FORCA Y 28.125

1 71 FORCA Y 6.25

9 79 FORCA Y 14.0625

8 14 28 42 56 70 78 FORCA Y -56.25

4 6 74 76 FORCA Y -10.9375

2 10 24 38 52 66 72 FORCA Y -25

22 36 50 64 FORCA Y -112.5

13 37 41 55 69 FORCA Y -67.1875

12 18 20 26 32 34 40 46 48 54 60 62 68 FORCA Y -21.875

11 25 39 53 67 FORCA Y -35.9375

16 30 44 58 FORCA Y -50

CARREGAMENTO 2

CARGAS NODAIS

56 FORCA Y -150000

DADOS DE ANALISE

ANALISE ITERATIVA

FIM

BIBLIOGRAFIA

1. ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. New York, Dover, 1972. 1046 p.
2. ACHARYA, D.N. & KEMP, K.O. Significance of dowell forces on the shear failure of rectangular reinforced concrete beams without web reinforcement. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 62(10):1265-79, Oct. 1965.
3. ARNESEN, A.; SORENSEN, S.I. & BERGAN, P.G. Nonlinear analysis of reinforced concrete. Computers & Structures, Oxford. 12(4):571-9, Oct. 1980.
4. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto protendido: NBR-7197. Rio de Janeiro, 1985.
5. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR-6118. Rio de Janeiro, 1978.

6. BATHE, K.J. & RAMASWAMY, S. On three-dimensional nonlinear analysis of concrete structures. Nuclear Engineering and Design, Amsterdam. 52:385-409, 1979.
7. BAZANT, Z.P. Input of creep and shrinkage characteristics for a structural analysis program. Matériaux et Constructions, Paris. 15(88):283-90, juil.-août 1982.
8. BAZANT, Z.P. Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 102(2):331-44, Apr. 1976.
9. BAZANT, Z.P. & BHAT, P.D. Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 102(4):701-22, Aug. 1976.
10. BAZANT, Z.P. & BURROW, M.C. Confinement effect in flexural ductility of concrete: three-dimensional analysis. Matériaux et Constructions, Paris. 13(76):299-308, juil.-août 1980.
11. BAZANT, Z.P. & CEDOLIN, L. Blunt crack band propagation in finite element analysis. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 105(2):297-315, Apr. 1979.
12. BAZANT, Z.P. & CEDOLIN, L. Finite element modeling of crack band propagation. Journal of Structural Engineering, New York, ASCE. 109(1):69-92, Jan. 1983.
13. BAZANT, Z.P. & CEDOLIN, L. Fracture mechanics of reinforced concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 106(6):1287-306, Dec. 1980.

14. BAZANT, Z.P. & GAMBAROVA, P.G. Crack shear in concrete: crack band microplane model. Journal of Structural Engineering, New York, ASCE. 110(9):2015-35, Sept. 1984.
15. BAZANT, Z.P. & GAMBAROVA, P.G. Rough cracks in reinforced concrete. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 106(4):819-42, Apr. 1980.
16. BAZANT, Z.P. & OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. Matériaux et Constructions, Paris. 16(93):155-77, mai-juin 1983.
17. BAZANT, Z.P. & OH, B.H. Deformation of cracked net-reinforced concrete walls. Journal of Structural Engineering, New York, ASCE. 109(1):93-108, Jan. 1983.
18. BAZANT, Z.P. & TSUBAKI, T. Slip-dilatancy model for cracked reinforced concrete. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 106(9):1946-65, Sept. 1980.
19. BAZANT, Z.P. & TSUBAKI, T. Total strain theory and path dependence of concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 106(6):1151-73, Dec. 1980.
20. BEEBY, A.W. The prediction of crack widths in hardened concrete. The Structural Engineer, London. 57A(1):9-17, Jan. 1979.
21. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech, 1978. 354 p.
22. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. The finite element technique. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1975. 412 p.

23. BRESLER, B. & PISTER, K.S. Strength of concrete under combined stresses. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 55(5):321-45, Sept. 1958.
24. BRESLER, B. & SCORDELIS, A.C. Shear strength of reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 69(1):51-74, Jan. 1963.
25. BROMS, B.B. Crack width and crack spacing in reinforced concrete members. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 62(10):1237-56, Oct. 1965.
26. BROMS, B.B. Stress distribution in reinforced concrete members with tension cracks. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 62(9):1095-108, Sept. 1965.
27. BROMS, B.B. Technique for investigation of internal cracks in reinforced concrete members. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 62(1):35-44, Jan. 1965.
28. BROMS, B.B. & LUTZ, L.A. Effects of arrangement of reinforcement on crack width and spacing of reinforced concrete members. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 62(11):1395-410, Nov. 1965.
29. BUYUKOZTURK, O. Nonlinear analysis of reinforced concrete structures. Computers & Structures, Oxford. 7(1):149-56, Feb. 1977.
30. CEDOLIN, L.; CRUTZEN, Y.R. & DEI POLI, S. Triaxial stress-strain relationship for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 103(3):423-29, June 1977.

31. CEDOLIN, L. & MULAS, M.G. Biaxial stress-strain relation for concrete. Journal of Engineering Mechanics, New York, ASCE. 110(2):187-206, Feb. 1984.
32. CHEN, A.C.T. & CHEN, W.F. Constitutive relations for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 101(4):456-81, Aug. 1975.
33. CHEN, E.Y.T. & SCHNOBRICH, W.C. Models for the post-cracking behaviour of plain concrete under short term monotonic loading. Computers & Structures, Oxford. 11(1-3):213-21, June 1981.
34. CHEN, W.F. Plasticity in reinforced concrete. New York, McGraw Hill, 1982. 474 p.
35. CHEN, W.F. & SUZUKI, H. Constitutive models for concrete. Computers & Structures, Oxford. 12(1):23-32, July 1980.
36. COLVILLE, J. & ABBASI, J. Plane stress reinforced concrete finite elements. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 100(5):1067-83, May 1974.
37. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Application of the finite-element-method to two-dimensional reinforced concrete structures. Paris, 1983 (Bulletin d'Information, 159).
38. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Bond action and bond behaviour of reinforcement. Paris, 1982 (Bulletin d'Information, 151).
39. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Concrete under multiaxial states of stress - constitutive equations for practical design. Paris, 1983 (Bulletin d'Information, 156).

40. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Cracking and deformations. Paris, 1982 (Bulletin d'Information, 143).
41. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. v.1: Règles unifiées communes aux différents types d'ouvrages et des matériaux - v.2: Code-modèle CEB-FIP pour structures en béton. Paris, 1978 (Bulletin d'Information, 124/125).
42. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Shear, torsion and punching. Paris, 1982 (Bulletin d'Information, 146).
43. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Structural effects of time-dependent behaviour of concrete. Paris, 1980 (Bulletin d'Information, 136).
44. DODDS, R.H.; DARWIN, D. & LEIBENGOOD, L.D. Stress controlled smeared cracking in R/C beams. Journal of Structural Engineering, New York, ASCE. 110(9):2015-35, Sept. 1984.
45. DUMONT, N.A. & BUMACHAR, B.S.A. Desenvolvimento, implementação computacional e análise de modelos de fissuração em estruturas de concreto armado. Departamento de Engenharia Civil PUC/RJ, 1983. 15 p.
46. DUMONT, N.A. & PACHECO, R.G. Estado atual da linha de pesquisa "estruturas de concreto armado" na PUC/RJ. Departamento de Engenharia Civil PUC/RJ, 1981. 19 p.
47. EVANS, R.H. & MARATHE, M.S. Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension. Matériaux et Constructions, Paris. 1(1):61-4, jan.-fév. 1968.
48. FALKNER, H. Zur Frage der Ribbildung durch Eigen- und Zwängspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonteilen. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin. Heft 208, 1969.

49. FARDIS, M.N. & BUYUKOZTURK, O. Shear transfer model for reinforced concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 105/2):225-75, Apr. 1979.
50. FUNG, Y.C. Foundations of solid mechanics. New Dehli, Prentice-Hall, 1968. 481 p.
51. FUSCO, P.B. Construções de concreto - solicitações tangenciais. São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1981. 2 v.
52. FUSCO, P.B. Investigação experimental sobre o cisalhamento em lajes de concreto armado. São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1985. 82 p.
53. GALGOUL, N.S. Beitrag zur Bemessung von schlanken Stahlbetonstützen für schiefe Biegung mit Achsdruck unter Kurzzeit- und Dauerbelastung. München, Technische Universität, 1978. Tese dout. engenharia civil.
54. GERSTLE, K.H. Simple formulation of triaxial concrete behavior. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 78(5):382-7, Sept.-Oct. 1981.
55. GERSTLE, K.H.; ASCHL, H.; BELLOTTI, R.; BERTACCHI, P.; KOTSOVOS, M.D.; KO, H.Y.; LINSE D.; NEWMAN J.B.; ROSSI, P.; SCHICKERT, G.; TAYLOR, M.A.; TRAINA, L.A.; WINKLER, H. & ZIMMERMAN, R.M. Behavior of concrete under multiaxial stress states. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 106(6): 1383-403, Dec. 1980.

56. GOBETTI, L.C.W.; CAMPOS Fº, A. & CAMPAGNOLO, J.L. Análise teórico-experimental das deformações em vigas de concreto armado. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1983. 58 p.
57. GOPALAKRISHNAN, K.S.; NEVILLE, A.M. & GHALI, A. Creep Poisson's ratio of concrete under multiaxial compression. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 66(12):1008-20, Dec. 1969.
58. GROEHS, A.G. ESFINGE - Uma linguagem orientada para cálculo elastoplástico de estruturas. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1983. 239 p. Tese dout. engenharia civil.
59. GROOT, A.K.; KUSTERS, G.M.A. & MONNIER, T. Numerical modelling of bond-slip behaviour. Heron, Delft. 26(1B):1-91, 1981.
60. GROOTENBOER, H.J.; LEIJTEN, S.F.C.H. & BLAAUWENDRAAD, J. Numerical models for reinforced concrete structures in plane stress. Heron, Delft. 26(1C):1-84, 1981.
61. HANSEN, T.C. & MATTOCK, A.H. The influence of size and shape of member on the shrinkage and creep of concrete. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 63(2):267-90, Feb. 1966.
62. HANSSON, V. & SCHIMMELPFENNIG, K. Concrete strength in multiaxial stress states. IN: CONCRETE FOR NUCLEAR REACTOR. p. 295-311.
63. HILLERBORG, A.; MODÉER, M. & PETERSON, P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. Cement and Concrete Research, New York. 6(6):773-82, Nov. 1976.

64. INGRAFFEA, A.R.; GERSTLE, W.H.; GERGELY, P. & SAOUMA, V. Fracture mechanics of bond in reinforced concrete. Journal of Structural Engineering, New York, ASCE. 110(4):871-90, Apr. 1984.
65. JIMENEZ MONTOYA, P.; GARCIA MESEGUER, A. & MORAN CABRE, F. Hormigón armado. 10. ed. Barcelona, Gustavo Gili, 1979. 2 v.
66. KOTSOVOS, M.D. A mathematical model of the deformational behaviour of concrete under generalised stress based on fundamental material properties. Matériaux et Constructions, Paris. 13(76):289-308, juin-août 1980.
67. KOTSOVOS, M.D. Effect of stress path on the behavior of concrete under triaxial stress states. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 76(2):213-23, Feb. 1979.
68. KOTSOVOS, M.D. Fracture processes of concrete under generalised stress states. Matériaux et Constructions, Paris. 12(72):431-7, nov.-déc. 1979.
69. KOTSOVOS, M.D. & NEWMAN, J.B. Behavior of concrete under multiaxial stress. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 74(9):443-6, Sept. 1977.
70. KUPFER, H. Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der Zweiachsigen Beanspruchung. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Berlin. Heft 229, 1973.
71. KUPFER, H. & GERSTLE, K.H. Behavior of concrete under biaxial stress. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 99(4):853-66, Aug. 1973.

72. KUPFER, H.; HILSDORF, H.K. & RÜSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 66(8):656-66, Aug. 1969.
73. LEONHARDT, F. & MÖNNIG, E. Construções de concreto. Rio de Janeiro, Interciência, 1977. 6 v.
74. LEONHARDT, F. & WALTHER, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau, Berlin. 56(12):277-90, Dez. 1961; " 57(2):32-44, Febr. 1962; 57(3):54-64, März 1962; 57(6):141-9, Juni 1962; 57(7):161-73, Juli 1962; 57(8):184-8, Aug. 1962; 58(8):184-90, Aug. 1963; 58(9):216-24 Sept. 1963; 59(4):80-6, Apr. 1964; 59(5):105-11, Mai 1964; 60(1):5-15, Jan. 1965; 60(2):35-42, Febr. 1965; 60(4):92-104, Apr. 1965; 60(5):108-23, Mai 1965.
75. LINK, J. Eine Formulierung des zwei axialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Berlin. Heft 270, 1976.
76. LIU, T.C.Y.; NILSON, A.H. & SLATE, F.O. Biaxial stress-strain relations for concrete. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 98(5):1025-34, May 1972.
77. LUTZ, L.A. Analysis of stresses in concrete near a reinforcing bar due to bond and transverse cracking. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 67(10):778-87, Oct. 1970.
78. MADSEN, H.O. & BAZANT, Z.P. Uncertainty analysis of creep and shrinkage effects in concrete structures. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 80(13):116-27, Mar.-Apr. 1983.

79. MATTOCK, A.H. & HAWKINS, N.M. Shear transfer in reinforced concrete - recent research. Journal of the Prestressed Concrete Institute, Chicago. 17(2):55-75, Mar.-Apr. 1972.
80. MATTOCK, A.H.; JOHAL, L. & CHOW, H.C. Shear transfer in reinforced concrete with moment or tension acting across the shear plane. Journal of the Prestressed Concrete Institute, Chicago. 20(4):76-93, July-Aug. 1975.
81. MILLS, L.L. & ZIMMERMAN, R.M. Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 67(10):802-7, Oct. 1970.
82. MOURA, J.R.B. Análise de estruturas de concreto armado pelo M.E.F. usando relações constitutivas bidimensionais de base experimental. Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1980. 175 p. Dissertação mistr. engenharia civil.
83. NAM, C.H. & SALMON, C.G. Finite element analysis of concrete beams. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 100(12):2419-32, Dec. 1974.
84. NAPOLEÃO Fº, J. Estudo das características de rigidez no método dos elementos finitos com aplicação a estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1982. 117 p. Dissertação mistr. engenharia civil.
85. NASCIMENTO, P.C. Análise tridimensional de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1980. 193 p. Dissertação mistr. engenharia civil.
86. NEVILLE, A.M. Propriedades do concreto. São Paulo, Pini, 1982. 738 p.

87. NEVILLE, A.M. & DILGER, W. Creep of concrete: plain, reinforced, and prestressed. Amsterdam, North-Holland, 1970. 622 p.
88. NGO, D. & SCORDELIS, A.C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 64(3):152-63, Mar. 1967.
89. NILSON, A.H. Bond stress-slip relations in reinforced concrete. New York, Department of Structural Engineering, Cornell University. 43 p. Dec. 1971.
90. NILSON, A.H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. Journal of the American Concrete Institute, Detroit. 65(9):757-66, Sept. 1968.
91. OTTOSEN, N.S. A failure criterion for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 103(4):527-35, Aug. 1977.
92. OTTOSEN, N.S. Constitutive model for short-time loading of concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 105(1):127-41, Feb. 1979.
93. OWEN, D.R.J. & HINTON, E. Finite elements in plasticity: theory and practice. Swansea, U.K., Pineridge, 1980. 594 p.
94. PACHECO, R.G. & CARVALHO, L.A.M. Aplicação da teoria da plasticidade à análise bidimensional de estruturas de C.A. pelo M.E.F. Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, 1978. 22 p.
95. PALANISWAMY, R. & SHAH, S.P. Fracture and stress-strain relationship of concrete under triaxial compression. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 100(5):901-16, May 1974.

96. REINHARDT, H.W. & WALRAVEN, J.C. Cracks in concrete subject to shear. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 108(1):207-24, Jan. 1982.
97. ROMSTAD, K.M.; TAYLOR, M.A. & HERMANN, L.R. Numerical biaxial characterization for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. 100(5):935-48, Oct. 1974.
98. ROSTASY, F.S. & ALDA, W. Rißbreitenbeschränkung bei zentrischem Zwang von Stäben aus Stahlbeton und Stahlleichtbeton. Beton- und Stahlbetonbau, Berlin. 72(6):149-56, Juni 1977.
99. ROSTASY, F.S.; KOCH, R. & LEONHARDT, F. Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden aus Stahlleichtbeton. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Berlin. Heft 267, 1976.
100. ROTS, J.G.; NAUTA, P.; KUSTERS, G.M.A. & BLAAUWENDRAAD, J. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. Heron, Delft. 30(1):1-48, 1985.
101. RÜSCH, H. Concreto armado e protendido. Rio de Janeiro, Campus, 1981. 396 p.
102. SCHÄFER, H. A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 6:335-54, 1975.
103. SCHICKERT, G. & WINKLER, H. Results of test concerning strength and strain of concrete subjected to multiaxial compressive stresses. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Berlin. Heft 277, 1977.
104. SCHNOBRICH, W.C. Behaviour of reinforced concrete structures predicted by the finite element method. Computers & Structures, Oxford. 7(1):365-76, 1977.

105. SOUZA, A. Estudo da interação concreto-armadura em estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1983. 211 p. Dissertação mestr. engenharia civil.
106. SOUZA, L.T. Análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos com geração automática da armadura. Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1981. 107 p. Dissertação mestr. engenharia civil.
107. STEFANO, G.D. Variation of stress resultants in concrete structures due to time-dependent creep and shrinkage strains of concrete. Computers & Structures, Oxford. 18(1):117-26, 1984.
108. SUIDAN, M. & SCHNOBRICH, W.C. Finite element analysis of reinforced concrete. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 99(10):2019-22, Oct. 1973.
109. TAKAHASHI, L.M. Resistência ao cisalhamento de vigas de concreto armado com abertura na alma. São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1984. 168 p. Dissertação mestr. engenharia civil.
110. TASUJI, M.E.; SLATE, F.O. & NILSON, A.H. Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 75(7):306-12, July 1978.
111. WALRAVEN, J.C. Fundamental analysis of aggregate interlock. Journal of the Structural Division, New York, ASCE. 107(11):2245-70, Nov. 1981.
112. WALRAVEN, J.C. & REINHARDT, H.W. Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading. Heron, Delft. 26(1A):1-69, 1981.

113. WIUM, D.J.W.; BUYUKOZTURK, O. & LI, V.C. Hybrid model for discrete cracks in concrete. Journal of Engineering Mechanics, New York, ASCE. 110(8):1211-29, Aug. 1984.
114. ZAITSEV, Y.B. & WITTMANN, F.H. Simulation of crack propagation and failure of concrete. Matériaux et Constructions, Paris. 14(83):357-65, sept.-oct. 1981.
115. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. London, McGraw Hill, 1977. 788 p.
116. ZIENKIEWICZ, O.C. & PHILLIPS, D.V. An automatic mesh generation for plane and curved surfaces by "isoparametric" co-ordinates. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Chichester. 3:519-28, 1971.
117. ZIENKIEWICZ, O.C.; PHILLIPS, D.V. & OWEN, D.R.J. Finite element analysis of some concrete non-linearities - theory and examples. IN: CONCRETE STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESSES. IABSE, Bergamo, May 1974, p. 1-21.
118. ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPPAN, S. & KING, I.P. Elastoplastic solutions of engineering problems - 'initial stress', finite element approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Chichester. 1(1):75-100, Jan.-Mar. 1969.