

UM MODELO LAMINAR PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE CASCAS  
DE CONCRETO ARMADO

Virgínia Maria Rosito d'Avila

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Porto Alegre  
Dezembro de 1990

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Pablo Gaston Bignon ( Orientador )  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ



Prof. Ademar Gilberto Groehs  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

#### BANCA EXAMINADORA

- Prof. Pablo Gaston Bignon ( Orientador )  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Jorge D. Riera  
Ph.D. pela Princeton Univ.
- Prof. Francisco P. S. L. Gastal  
Ph.D. pela NCSV/USA
- Prof. Marco T. M. B. Vilhena  
Dr. pela UFRGS

A meus pais

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Pablo Gaston Bignon pela amizade,  
atenção e orientação recebidas.

Aos meus colegas, amigos e familiares pelo incentivo, amizade e ajuda dados ao longo deste trabalho.

As autoridades, corpo docente e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS pela colaboração prestada.

Ao CNEN pelo auxílio financeiro.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Nacional de Tucuman (Argentina) pela colaboração e hospitalidade recebidas.

Ao Eng. Norton Ruschel pelo incentivo, compreensão e apoio dedicados durante este período.

A todas as pessoas que, de alguma maneira, contribuíram na execução deste trabalho.

## LISTA DE FIGURAS

2.1 Vetor posição.....	006
2.2 Base de vetores unitária.....	010
3.1 O elemento isoparamétrico de cascas.....	022
4.1 Modelo laminar.....	043
4.2 Ângulo $\alpha$ entre as armaduras e as direções principais..	052
4.3 Transformação de coordenadas.....	053
4.4 Tensões ao longo da espessura.....	054
5.1 Modelo para o concreto à compressão.....	058
5.2 Modelo para o concreto à tração.....	060
5.3 Modelo para o aço.....	062
6.1 Tensões generalizadas referidas ao sistema curvilíneo.	054
6.2 Sistema de referência $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , no plano tangente.....	065
6.3 Componentes tensoriais das tensões referidas ao sistema cartesiano.....	067
6.4 Corte transversal da estrutura.....	068
6.5 Forças equivalentes.....	069
6.6 Ábacos para o dimensionamento.....	071
7.1 Método incremental.....	075
7.2 Método Newton-Raphson modificado.....	076
8.1 Flambagem de colunas.....	083
8.2 Malha.....	083
8.3 Deslocamento lateral, na direção $x_1$ , do nó 11.....	084
8.4 Casca cilíndrica elástica.....	086
8.5 a) , b) Malhas , c) Carregamento.....	087
8.6 Deslocamento central na direção de $x_3$ .....	088
8.7 Placa de McNeice.....	089
8.8 Malhas.....	090
8.9 a) Deslocamento vertical do ponto A.....	091
b) Deslocamento vertical do ponto B.....	092
8.10 Placa de Duddeck.....	093
8.11 Malhas.....	094

8.12	Deslocamento vertical central.....	095
8.13	Casca de Hedgren.....	096
8.14	Malha.....	097
8.15	Deslocamento vertical do nó 34.....	099
8.16	Casca cilíndrica parabólica.....	101
8.17	Ensaio da placa.....	102
8.18	Deslocamento vertical central da placa.....	103
9.19	Malha.....	104
8.20	Deslocamento vertical do nó 34.....	105
9.1	Placa.....	107
9.2	Deslocamento vertical do nó 1.....	108
9.3	Casca.....	109
9.4	Deslocamento vertical do nó 21.....	110

#### LISTA DE TABELAS

8.1	Armaduras da casca de Hedgren.....	098
8.2	Armaduras da casca de Riera.....	104
9.1	Armaduras da placa.....	108
9.2	Armaduras da casca.....	110

## LISTA DE SIMBOLOS

- $\tilde{A}^{e,L}$  - ações nodais do elemento segundo a formulação linear
- $\tilde{A}^{e,NL}$  - ações nodais do elemento incluindo não-linearidade física e geométrica
- $A_{s1}, A_{s2}$  - áreas de aço
- $C$  - constante elástica de membrana
- $D$  - constante elástica de flexão
- $E$  - módulo de elasticidade longitudinal
- $E_s, E_c$  - módulo de elasticidade tangente na origem do aço e do concreto
- $E_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}^*$  - componentes das deformações de membrana incluindo a não-linearidade geométrica
- $F_1, F_2, F_{12}$  - forças equivalentes
- $F_I, F_{II}$  - forças equivalentes principais
- $G$  - módulo de elasticidade transversal
- $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$  - tensor elástico de cascas
- $I_1, I_2$  - invariantes do tensor de deformações
- $K$  - fator de redução dos esforços cortantes



- $\tilde{K}$  - matriz de rigidez global
- $K^e$  - matriz de rigidez do elemento
- $K_{\tilde{\epsilon}}, K_{\tilde{\chi}}, K_{\tilde{\gamma}}$  - matriz de rigidez correspondente às parcelas de membrana, flexão e corte
- $\tilde{M}_\alpha$  - momento por unidade de comprimento
- $\tilde{N}_\alpha$  - esforço interno por unidade de comprimento
- $P_{\tilde{EXT}}$  - vetor global de cargas exteriores
- $\tilde{P}$  - força de superfície
- $\tilde{\bar{P}}$  - momento de superfície
- $\tilde{R}$  - vetor posição de um ponto arbitrário da casca
- $R_{cc}$  - força de compressão no concreto
- $R_{\tilde{t}}$  - matriz de rotação
- $S$  - área
- $\tilde{T}_i$  - vetor tensão (intrínseco)
- $\bar{U}$  - energia específica de deformação elástica
- $U^e$  - energia de deformação elástica do elemento
- $U_{\tilde{\epsilon}}, U_{\tilde{\chi}}, U_{\tilde{\gamma}}$  - energia de deformação elástica correspondente às parcelas de membrana, flexão e corte
- $U_{\tilde{i}}^n$  - deslocamentos nodais do elemento
- $\tilde{V}$  - vetor deslocamento de um ponto arbitrário da casca
- $\tilde{V}$  - vetor global dos deslocamentos

$\tilde{v}^e$  - deslocamentos nodais generalizados do elemento

$w^{INT}$  - trabalho das forças internas

$w^{EXT}$  - trabalho das forças exteriores

$\tilde{x}_i^n$  - coordenadas cartesianas nodais do elemento

$a$  - determinante do tensor métrico covariante de superfície

$a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$  - tensores métricos de superfície

$\vec{a}_\alpha, \vec{a}_\beta, \vec{a}^\alpha, \vec{a}^\beta$  - bases de vetores do sistema de superfície

$b_{\alpha\beta}, b_{\alpha'}^{\beta'}, b^{\alpha\beta}$  - coeficientes da segunda forma fundamental das superfícies

$\vec{e}_i$  - vetores da base cartesiana

$f_c$  - resistência à compressão do concreto

$f_t$  - resistência à tração do concreto

$f_y$  - tensão de escoamento do aço

$g^{mn}$  - tensores métricos

$h$  - espessura

$\vec{m}_\alpha$  - momento por unidade de comprimento

$m^{\alpha\beta}$  - tensor de momentos

$m_{\alpha\beta}^*$  - componentes físicas de momentos

$\vec{n}$  - vetor direção principal

$\vec{n}_\alpha$  - força interna por unidade de comprimento

$n^1, n^2, n_1^*, n_2^*, n_1^{-*}, n_2^{-*}$  - componentes das direções principais

$n^{\alpha\beta}$  - tensor dos esforços de membrana

$n_{\alpha\beta}^*$  - componentes das sollicitações físicas de membrana

$q_\alpha$  - componentes dos esforços cortantes

$q_\alpha^*$  - componentes físicas dos esforços cortantes

$\vec{r}$  - vetor posição dos pontos da superfície média

$t_e$  - espessura da membrana equivalente às armaduras

$\vec{t}_i$  - vetor tensão

$\vec{t}_\alpha, \vec{t}_\beta$  - base unitária de superfície

$u_i$  - componentes cartesianas do deslocamento dos pontos da superfície média

$u_\alpha, u_\beta, u^\alpha, u^\beta$  - componentes do vetor deslocamento no sistema de superfície

$v_\alpha$  - componentes do vetor deslocamento dos pontos da superfície média

$\vec{v}$  - vetor deslocamento dos pontos da superfície média

$w$  - deslocamento transversal

$\vec{w}$  - componente da rotação no plano tangente

$x^i, x_i$  - coordenadas cartesianas

$z_e$  - distância da camada de armadura à superfície média

$\alpha$  - ângulo entre a direção principal e os vetores da base de superfície

$\alpha_{\alpha\beta}$  - tensor de deformações de membrana

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  - coeficientes métricos

$\beta_{ij}$  - elementos da matriz de rotação para a base normalizada de superfície

$\beta$  - ângulo entre as forças equivalentes principais e os eixos coordenados

$\gamma_\alpha, \gamma_\alpha^*$  - componentes tensoriais e normalizadas das deformações por corte

$\gamma_{\alpha\beta}$  - componentes covariantes de deformações de pontos da casca, associados com o sistema de superfície

$\gamma_I, \gamma_{II}$  - valores principais de deformações associados com o sistema de superfície

$\epsilon_c$  - deformação de compressão do concreto

$\epsilon_e$  - deformação na armadura

$\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon^{\alpha\beta}$  - tensores de permutação de superfície

$\epsilon_{\alpha\beta}^*$  - deformações de membrana normalizadas

$\epsilon_{\alpha\beta}^{*NL}$  - deformações de membrana normalizadas não-lineares

$\vec{\epsilon}_\alpha, \vec{\epsilon}_\alpha^{**}$  - deformações vetoriais generalizadas associadas aos esforços de membrana

$\phi, \phi_\alpha$  - componentes tensoriais da rotação

$\chi_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}^*$  - tensor e componentes normalizadas das mudanças de curvatura

$\vec{\chi}_\alpha, \vec{\chi}_\alpha^{**}$  - deformações vetoriais generalizadas associadas aos momentos

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\omega_i$  - componentes cartesianas do vetor rotação

$\sigma_I, \sigma_{II}$  - tensões principais no sistema de superfície

$\sigma_c$  - tensão no concreto

$\sigma_s$  - tensão no aço

$\sigma^{\alpha\beta}$  - componentes de tensões referidas à superfície média

$\theta$  - ângulo entre as direções principais do sistema curvilíneo de superfície

$\theta_i$  - coordenadas curvilíneas gerais

$\tau_{\alpha\beta}^*$  - componentes de tensões normalizadas associado ao sistema curvilíneo

$\Gamma_{ei}^m$  - símbolos de Christoffel de segunda espécie

$\Phi, \Phi_i$  - funções de interpolação

$\vec{\Omega}$  - vetor rotação média das retas normais

$\vec{\Omega}_i^n$  - rotações nodais do elemento

## RESUMO

A análise estática de cascas de concreto armado submetidas a cargas de curta duração é realizada numericamente pelo método de elementos finitos. É adotado um modelo laminar, no qual a espessura é dividida em diversas camadas e as armaduras são consideradas como camadas extras. O elemento utilizado é o isoparamétrico quadrático para cascas baseado em uma teoria que inclui a deformação por corte. A não-linearidade física é introduzida através das equações constitutivas para os materiais componentes e a não-linearidade geométrica através de uma parcela da deformação de membrana, baseada em uma teoria de pequenas deformações e rotações moderadas. As equações não-lineares de equilíbrio são resolvidas por um processo incremental-iterativo. O modelo para o concreto é histerético degradativo e para o aço é elasto-plástico com histerese. Um processo de dimensionamento da armadura para a análise linear é apresentado com o objetivo de fazer um estudo comparativo sobre a influência da não-linearidade física na capacidade de carga da estrutura.

## ABSTRACT

Reinforced concrete shells, subjected to short time loads, are statically analyzed by using a finite element model. A layering technique, in which the thickness is divided in a set of layers and the steel reinforcement is regarded as an extra layer, is adopted. An isoparametric quadratic curved finite element, based in a shell theory that considers shear strains, is used. The physical non-linearity is introduced through the components constitutive equations and the geometrical non-linearity is introduced by a portion of the membrane deformation. In order to solve the non-linear equations, an incremental-iterative process of constant stiffness is implemented. The concrete model is hysteretical with degrading stiffness and a hysteretic elastic-plastic model is adopted for the steel. A design process for the reinforcement is introduced with the purpose of making a comparative study on the influence of physical non-linearity in the structure load capacity.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	VI
LISTA DE TABELAS.....	VII
LISTA DE SÍMBOLOS.....	VIII
RESUMO.....	XIV
ABSTRACT.....	XV
1. INTRODUÇÃO.....	001
1.1 Generalidades.....	001
1.2 Objetivos e metodologia.....	003
2. CASCAS.....	006
2.1 Considerações gerais sobre cascas.....	006
2.2 A teoria de cascas empregada.....	011
2.2.1 Hipóteses básicas e grandezas cinemáticas....	011
2.2.2 Principais fórmulas da teoria utilizada.....	013
2.2.3 Comentários sobre a teoria utilizada.....	020
3. O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A CASCAS.....	022
3.1 O elemento isoparamétrico quadrático.....	022
3.2 Deformações.....	024
3.3 Sistema global de equações não-lineares.....	033
3.4 Matriz de rigidez.....	039
4. INTEGRAÇÃO NA ESPESSURA.....	043
4.1 O modelo laminar.....	043
4.2 Deformações.....	044
4.3 Tensões.....	048
4.4 Deformações e tensões na armadura.....	051
4.5 Tensões generalizadas.....	054
5. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS.....	057
5.1 Generalidades.....	057
5.2 Relação constitutiva para o concreto à compressão..	057
5.3 Relação constitutiva para o concreto à tração.....	060
5.4 Relação constitutiva para o aço.....	061



6.	CRITÉRIO DE DIMENSIONAMENTO .....	064
6.1	Componentes tensoriais das tensões generalizadas no sistema e métrica cartesianos.....	064
6.2	Forças equivalentes.....	067
6.3	Dimensionamento da armadura.....	069
7.	O PROCESSO DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO - LI- NEARES.....	073
7.1	Os métodos de solução.....	073
7.2	O método incremental.....	073
7.3	O método iterativo.....	075
7.3.1	O método Newton-Raphson modificado.....	076
7.3.2	O método Secante-Newton.....	077
7.4	O método implementado.....	078
8.	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	080
8.1	Introdução.....	080
8.2	Flambagem de colunas.....	081
8.3	Casca cilíndrica elástica.....	085
8.4	Placa de McNeice.....	088
8.5	Placa de Duddeck.....	092
8.6	Casca de Hedgren.....	096
8.7	Casca de Riera.....	100
9.	ESTUDO COMPARATIVO DA INFLUÊNCIA DA NÃO - LINEARIDADE FÍSICA NA CAPACIDADE FINAL DE CARGA DA ESTRUTURA.....	106
9.1	Generalidades.....	106
9.2	Placa.....	106
9.3	Casca.....	109
10.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	112
10.1	Conclusões.....	112
10.1.1	Comparação com trabalhos de outros autores.....	112
10.1.2	Análise crítica sobre o modelo implementa- do.....	113
10.2	Sugestões.....	114
	BIBLIOGRAFIA.....	116

## 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 - Generalidades

As análises de estruturas de concreto armado eram baseadas, até pouco tempo atrás, em soluções elásticas lineares, aproximações empíricas e dados de resultados experimentais. O complexo comportamento destas estruturas impedia uma análise mais realística do problema. As propriedades não-lineares e multiaxiais dos materiais componentes, a influência da fissuração do concreto, a não homogeneidade do conjunto aço-concreto e a interação entre os materiais eram normalmente desconsiderados ou tratados superficialmente. Nos últimos anos, porém, os métodos numéricos, e principalmente o método de elementos finitos, permitiram um estudo mais completo destes problemas.

Na última década, um grande número de estudos foram realizados para avaliar o efeito dos itens citados acima sobre o comportamento não-linear do concreto armado. Salienta-se os realizados por GUPTA e MAESTRINI<sup>22, 23</sup>, GUPTA e AKBAR<sup>24</sup>, BAZANT e OH<sup>6</sup>, BIGNON<sup>7</sup> e SCHIRMBECK<sup>33</sup>.

Por sua vez, quando se trata de cascas de concreto armado as dificuldades aumentam, e a bibliografia diminui. Embora existam várias teorias de cascas, cada qual com sua ordem de aproximação, nenhuma delas pode ser reconhecida como a mais adequada para abordar a generalidade dos problemas existentes. Em KOITER<sup>28</sup> e outros estudos<sup>10</sup>, tem-se uma análise comparativa entre algumas teorias embasadas nas hipóteses de Kirchhoff.

A teoria de cascas empregada neste estudo, elaborada por BIGNON<sup>8</sup>, emprega a hipótese de Mindlin para incluir a influência da deformação por corte. Possui uma formulação consistente com os princípios de equilíbrio e energia, equações tensoriais e energia nula para movimentos arbitrários de corpo

rígido. Desta forma, é uma teoria adequada para o embasamento de um modelo de elementos finitos.

Para simular o complexo comportamento do concreto armado foram utilizadas curvas tensão-deformação uniaxiais capazes de representar o comportamento histerético e não-linear do material. Estas curvas, obtidas através de estudos experimentais, são introduzidas no modelo de elementos finitos por intermédio de seus respectivos modelos matemáticos, elaborados por AGRAWAL, TULIN e GERSTKE<sup>1</sup>, BLAKELEY e PARK<sup>11</sup> e VEBO e GHALI<sup>25</sup>.

Vários modelos físicos e computacionais já foram implementados para fazer análise não-linear de placas e cascas de concreto armado, cada qual com suas características próprias, sejam elástico não-lineares, elasto-plásticos ou unidimensionais equivalentes.

GILBERT e WARNER<sup>20</sup>, MARTINS<sup>20</sup> e CRISFIELD<sup>15</sup> conseguiram bons resultados em análise não-linear de placas de concreto armado utilizando modelos do tipo laminar e relações constitutivas bidimensionais elasto-plásticas para simular o comportamento do concreto à compressão.

Em HAN e MAU<sup>25</sup> o comportamento de cascas de concreto armado sujeitas a esforços de membrana foi analisado. O modelo físico adotado para o concreto é elasto-plástico não-linear unidimensional.

BIGNON<sup>6</sup> estudou numericamente, pelo método de elementos finitos, a resposta determinística de cascas de concreto armado submetidas a ações dinâmicas, considerando o seu comportamento elasto-plástico e as não-linearidades geométricas. As relações constitutivas são introduzidas através de uma relação geral momento-curvatura para as diversas etapas do comportamento do material. Os momentos fletores e as mudanças de curvatura descrevem ciclos histeréticos tri-lineares, com degradação da rigidez em função das deformações plásticas.

BARZEGAR<sup>3</sup> introduziu um modelo laminar para análise não-linear por elementos finitos de elementos planos de cascas de concreto armado. O modelo laminar é constituído por pilhas de elementos planos usados para simular o concreto armado. A deformação por corte é levada em consideração. Necessita uma

forçada compatibilidade entre os elementos de camadas adjacentes. O modelo físico empregado para o concreto é elástico não-linear bidimensional.

OWEN, FIGUEIRAS e DAMJANIC<sup>31</sup> aplicaram a técnica de elementos finitos para solucionar problemas não-lineares de concreto armado para placas e cascas. Para o concreto à compressão, empregam modelos plástico perfeito e plástico com consolidação. É adotada uma discretização em camadas ao longo da espessura. Elementos de cascas tridimensionais degenerados são utilizados. O processo de solução para a análise não-linear, física e geométrica, é incremental-iterativo, sendo a matriz de rigidez recalculada diversas vezes ao longo do processo.

No curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a análise linear de cascas axissimétricas foi abordada por TRIGO<sup>34</sup> e um estudo experimental em um modelo para simular o impacto em uma cobertura de um reator nuclear foi desenvolvido por GASTAL<sup>10</sup>.

Estudos experimentais realizados com placas (BATISTA<sup>4</sup>, CHAMPAGNOLO<sup>14</sup> e JOFRIET e MCNEICE<sup>27</sup>) e cascas (HEDGREN e BILLINGTON<sup>20</sup>, DARVALL e BILLINGTON<sup>17</sup> e RIERA, CUDMANI, REIMUNDIN e DANESI<sup>32</sup>) de concreto armado são utilizados para verificar a eficácia dos modelos anteriormente citados e do proposto neste trabalho.

## 1.2 - Objetivos e metodologia

O presente estudo tem por objetivo a implementação computacional de um modelo laminar de elementos finitos para análise não-linear de cascas de concreto armado.

No capítulo 2 são definidas algumas grandezas cinemáticas e o sistema curvilíneo geral utilizados nos demais capítulos. Também é introduzida a teoria de cascas empregada, que inclui a deformação por corte e a não-linearidade geométrica. Um resumo, contendo as principais fórmulas da teoria, é apresentado.

O método de elementos finitos aplicado a cascas é exposto no capítulo 3. Elementos isoparamétricos quadráticos com funções de interpolação da família Serendipity são

utilizados. A matriz de rigidez do elemento, que é constituída por três parcelas independentes correspondentes aos esforços de membrana, flexo-torção e corte, é deduzida através da energia de deformação específica e é mantida constante ao longo do processo de solução.

O vetor das forças nodais equivalentes surge da avaliação do incremento do trabalho interno. Para problemas lineares este vetor deve dar idêntico resultado ao produto da matriz de rigidez pelo vetor de deslocamentos nodais. Para problemas não-lineares, esta igualdade não se verifica, surgindo um vetor diferença, ou desequilíbrio, que é uma medida do afastamento da solução linearizada para a verdadeira solução.

A integração da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais equivalentes é feita numericamente com integração reduzida de  $2 \times 2$  pontos de Gauss-Legendre sobre domínio curvilíneo bidimensional.

No capítulo 4 é apresentado o modelo laminar. São obtidas as deformações para cada camada de concreto e aço, levando em consideração a deformação por corte. Para introduzir equações constitutivas não-lineares, ocorre a necessidade de determinar as deformações principais, que são obtidas abordando-se o problema de valores próprios do tensor de deformações. A utilização de equações constitutivas unidimensionais nas direções principais de deformação é viável considerando o fato que, após a fissuração do concreto, a interação entre as duas direções é desprezível. Com estes valores, e assumindo que as direções principais de deformação e tensão coincidam para o concreto, calcula-se as tensões principais no concreto por intermédio das relações constitutivas. Para determinar as tensões associadas ao sistema curvilíneo, estuda-se o problema de valores próprios do tensor de tensões. Para as camadas de aço, tem-se que calcular as deformações nas direções das armaduras, pois estas só resistem a esforços de tração/compressão em seu próprio eixo.

As tensões generalizadas, esforços e momentos, no ponto da superfície média em estudo são obtidas por integração, ao longo da espessura, das tensões obtidas para cada camada de aço e concreto.

Os relações constitutivas para o aço e o concreto são expostas no capítulo 5. Estas relações estão representadas por curvas tensão-deformação uniaxiais entre valores principais e são introduzidas no modelo de elementos finitos através de seus modelos matemáticos.

Para o concreto comprimido, o modelo é histerético degradativo ; para o aço, é elasto-plástico com histerese e para o concreto tracionado é tri-linear degradativo.

Um critério de dimensionamento da armadura na análise linear é apresentado no capítulo 6. As tensões generalizadas obtidas na análise linear são transformadas em forças equivalentes que serão utilizadas para dimensionar a armadura, segundo o critério apresentado por LEONHARDT e MONNING<sup>2º</sup>.

O processo de solução do sistema de equações não-lineares é mostrado no capítulo 7. Implementou-se um método do tipo incremental-iterativo, mantendo-se a rigidez constante ao longo do processo.

No capítulo 8 são analisados vários exemplos. Inicialmente, é testado o algoritmo que introduz a não-linearidade geométrica em problemas elásticos. Após, analisa-se problemas de placas e cascas de concreto armado.

Um estudo comparativo da influência da não-linearidade física na capacidade final de carga da estrutura é realizado no capítulo 9.

Finalmente, no capítulo 10, são apresentadas conclusões sobre o presente estudo e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 - CASCAS

### 2.1 - Considerações gerais sobre cascas

As cascas são estruturas cujo material se confina simetricamente nas vizinhanças de uma superfície curva, geralmente regular, denominada superfície média. Tomando-se como referência esta superfície média, converte-se o problema de análise estática sob cargas conservativas, originalmente tridimensional, em outro, aproximadamente equivalente, em termos de variáveis de superfície.

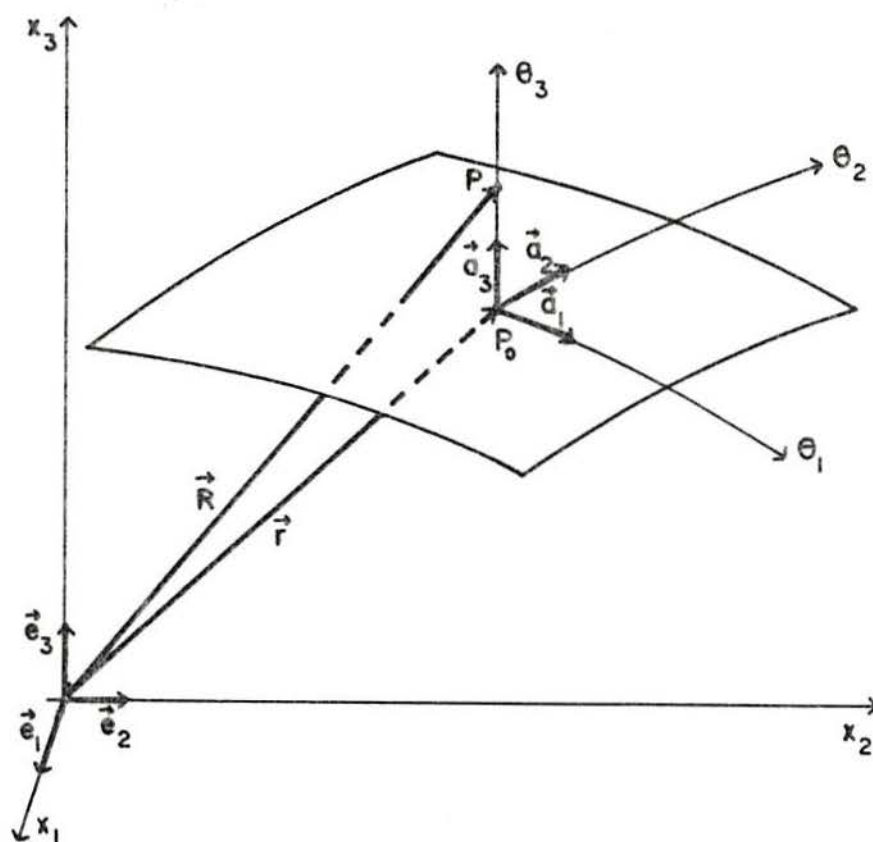


FIGURA 2.1 - Vetor posição

Os desenvolvimentos a seguir serão efetuados em coordenadas curvilíneas gerais, que acompanham a geometria da casca, utilizando a notação tensorial e a convenção do somatório para índices repetidos duas vezes. Os índices latinos podem valer 1, 2 e 3, enquanto os gregos valem 1 e 2. Indicar-se-á com uma vírgula a derivação parcial da variável precedente em relação aos parâmetros independentes e com uma barra vertical as derivadas covariantes de superfície na configuração indeformada. Em geral, acompanha-se as definições e notações do livro de GREEN e ZERNA<sup>21</sup>.

A figura 2.1 mostra um sistema cartesiano ortogonal  $x_i$ , no espaço euclidiano ordinário tridimensional, de base unitária  $\vec{e}_i$  e uma superfície a ele referida. O vetor posição de um ponto  $P_0$  da superfície,  $\vec{r}$ , fica definido por

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta_1, \theta_2) = r_i(\theta_1, \theta_2) \vec{e}_i \quad (2.1.1)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são variáveis independentes e  $r_i$  são funções uniformes, contínuas e com derivadas primeiras contínuas em relação a  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . O terceiro parâmetro independente é  $\theta_3$  e a equação  $\theta_3 = 0$  define a superfície dada em (2.1.1).

A posição de um ponto do espaço P, fora da superfície, é dada por

$$\vec{R} = \vec{r} + \theta_3 \vec{a}_3 \quad (2.1.2)$$

sendo  $\vec{a}_3(\theta_1, \theta_2)$  um vetor unitário perpendicular ao plano tangente que só depende de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

Para diferentes valores constantes de  $\theta_2$  são geradas, pelo extremo de  $\vec{r}$ , um conjunto de curvas pertencentes à superfície, denominadas curvas coordenadas de  $\theta_1$ . Analogamente, para valores constantes de  $\theta_1$ , gera-se a família de curvas coordenadas  $\theta_2$ . O sistema  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , sistema curvilíneo de coordenadas de superfície, será o sistema de referência natural utilizado. Acrescentando ao conjunto  $\theta_1, \theta_2$  a coordenada independente  $\theta_3$ , ao longo da normal  $\vec{a}_3$ , fica estabelecido um sistema curvilíneo tridimensional para todo o espaço euclidiano.

Os vetores  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ , vetores da base covariante de



superfície, são dados pela expressão

$$\vec{a}_\alpha = \vec{r}_{,\alpha} \quad (2.1.3)$$

e o produto escalar entre eles define o tensor métrico covariante de superfície

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \quad (2.1.4)$$

Os tensores métricos covariantes e contravariante de superfície se relacionam conforme

$$a^{22} = \frac{a_{11}}{a} \quad ; \quad a^{11} = \frac{a_{22}}{a}$$

$$a^{21} = a^{12} = - \frac{a_{12}}{a} \quad (2.1.5)$$

sendo

$$a = | a_{\alpha\beta} | = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 \quad (2.1.6)$$

o determinante da matriz anterior.

Os vetores da base contravariante de superfície se relacionam com os da base covariante de superfície da seguinte maneira

$$\vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta \quad ; \quad \vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta \quad (2.1.7)$$

sendo  $a^{\alpha\beta}$  o tensor métrico contravariante de superfície dado por

$$a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta \quad (2.1.8)$$

Nota-se que os vetores da base contravariante de superfícies são definidos de forma que  $\vec{a}^1$  seja normal ao plano formado por  $\vec{a}_2$  e  $\vec{a}_3$ ,  $\vec{a}^2$  normal ao plano formado por  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_3$  e  $\vec{a}^3$  normal ao plano formado por  $\vec{a}_2$  e  $\vec{a}_1$ .

Os componentes dos tensores de permutação de superfície,  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , resultam ser

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} &= -\epsilon_{21} = \sqrt{a} \\ \epsilon^{12} &= -\epsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental das superfícies,  $b_{\alpha\beta}$ , são dados por

$$b_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta} \quad (2.1.10)$$

e seus associados por

$$b^\alpha_\beta = a^{\alpha\lambda} b_{\beta\lambda} \quad ; \quad b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} b^\beta_\lambda \quad (2.1.11)$$

As derivadas covariantes de superfície são obtidas através das expressões

$$\begin{aligned} v^\lambda |_\alpha &= v^\lambda_{,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} v^\mu \\ v_\lambda |_\alpha &= v_{\lambda,\alpha} - \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} v_\mu \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

onde os símbolos de Christoffel de superfície de segunda espécie podem ser calculados por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{a^{\alpha\lambda}}{2} ( a_{\lambda\beta,\gamma} + a_{\lambda\gamma,\beta} - a_{\beta\gamma,\lambda} ) \quad (2.1.13)$$

Para a aplicação de uma teoria de cascas em um modelo de elementos finitos, é útil expressá-la em termos de magnitudes normalizadas. Com este intuito, defini-se a base unitária

$$\vec{t}_\alpha = \frac{\vec{a}_\alpha}{a_i} \quad (2.1.14)$$

sendo

$$\alpha_1 = | \vec{a}_1 | = \sqrt{a_{11}}$$

$$\alpha_2 = | \vec{a}_2 | = \sqrt{a_{22}}$$

$$\alpha_3 = 1 \quad . \quad (2.1.15)$$

Partindo-se da definição do vetor  $\vec{t}_3$ , vetor unitário normal ao plano formado por  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$ , obtém-se

$$\vec{t}_3 = \vec{a}_3 = \vec{a}^3 = \frac{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{\text{sen}\theta} \quad . \quad (2.1.16)$$

Levando em consideração as expressões (2.1.3), (2.1.14), (2.1.4) e definindo  $\theta$  como o ângulo formado por  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$  no plano tangente à superfície média, conforme figura 2.2, pode-se escrever

$$\vec{r}_{,i} = \vec{a}_i = \alpha_i \vec{t}_i \quad (i \text{ não soma})$$

$$a_{12} = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,2} = \alpha_1 \alpha_2 \cos\theta$$

$$\text{sen}^2\theta = \frac{a}{a_{11} a_{22}} \quad . \quad (2.1.17)$$

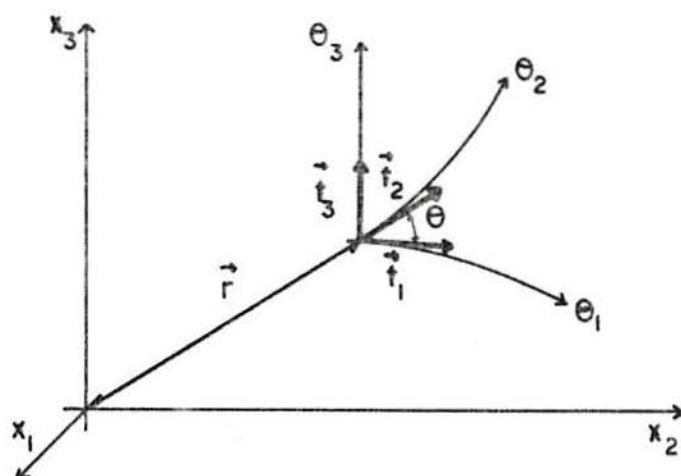


FIGURA 2.2 - Base de vetores unitária

O produto vetorial de (2.1.16) se pode calcular particularizando a expressão geral

$$\vec{a}_\alpha \times \vec{a}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \vec{a}_a \quad (2.1.18)$$

As expressões dadas anteriormente serão aplicadas freqüentemente nos próximos capítulos.

## 2.2 - A teoria de cascas empregada

Para cascas muito delgadas, onde a deformação por corte e a interação de solicitações de membrana e flexão são praticamente desprezíveis, as teorias convencionais de cascas, baseadas nas hipóteses de Kirchhoff, apresentam resultados realísticos para cascas elásticas com carregamento estático. Porém, com o aumento da relação da espessura com o menor raio de curvatura, estes efeitos começam a interferir nos resultados, devendo ser considerados.

A teoria a ser utilizada, uma teoria de cascas com a inclusão da deformação por corte, foi elaborada por BIGNON<sup>B</sup> como extensão da teoria de Mindlin para placas elásticas.

### 2.2.1 - Hipóteses básicas e grandezas cinemáticas

São as seguintes as hipóteses nas quais a teoria está baseada :

- 1) Os segmentos de retas normais à superfície média na configuração indeformada permanecem retos após a deformação; conseqüentemente, os deslocamentos longitudinais variam linearmente na espessura.
- 2) As deformações normais na direção perpendicular à casca são desprezíveis frente às outras componentes de deformação.
- 3) A espessura é relativamente pequena comparada com o mínimo raio de curvatura.

4) As deformações são infinitesimais e os deslocamentos e rotações são pequenos.

Pode-se definir as seguintes grandezas cinemáticas:

- vetor deslocamento dos pontos da superfície média

$$\vec{v} = v_{\alpha} \vec{a}^{\alpha} + w \vec{a}_3 \quad (2.2.1)$$

- vetor rotação média das retas normais

$$\vec{\Omega} = \vec{a}_3 \times \vec{w} + \phi \vec{a}_3 = \epsilon^{\alpha\beta} \vec{a}_{\beta} \phi_{\alpha} + \phi \vec{a}_3 \quad (2.2.2)$$

onde  $\phi$  é a rotação em torno da normal,  $\phi_{\alpha}$  é a declividade da superfície média e  $\vec{w} = \phi_{\alpha} \vec{a}^{\alpha}$ .

Levando em consideração as hipóteses 1) e 2) conclue-se que:

- as deformações por corte são constantes na espessura;
- o deslocamento na direção perpendicular à casca é função apenas das coordenadas de superfície, sendo constante na espessura;
- o vetor deslocamento dos pontos fora da superfície média vem dado por

$$\vec{v} = u_{\alpha} \vec{a}^{\alpha} + u_3 \vec{a}^3 = \vec{v} + \theta_3 \phi_{\alpha} \vec{a}^{\alpha} = \vec{v} + \theta_3 \vec{w} \quad (2.2.3)$$

Por (2.2.3), os deslocamentos fora da superfície média resultam

$$u_{\alpha} = v_{\alpha} + \theta_3 \phi_{\alpha} \quad (2.2.4)$$

onde

$$v_{\alpha} = u_{\alpha}(\theta_3 = 0)$$

$$w = u_3 = u_3(\theta_3 = 0) \quad (2.2.5)$$

A seguir será apresentado um resumo das principais fórmulas da teoria utilizada.

### 2.2.2 - Principais fórmulas da teoria utilizada

No presente trabalho, utiliza-se a teoria de cascas elaborada por BIGNON<sup>B</sup>, mantendo a mesma notação e utilizando, sem demonstração, a sua formulação.

Um breve resumo, contendo as principais fórmulas da teoria de cascas utilizada, será apresentado. Em primeiro lugar se mostrará a formulação na forma tensorial e após na forma normalizada.

#### a) Formulação tensorial

A expressão inicial do Princípio dos Trabalhos Virtuais é obtida através do caminho convencional, isto é, multiplicando-se as equações de equilíbrio<sup>24</sup> por incrementos infinitesimais e arbitrários dos deslocamentos e rotações, adicionando as igualdades obtidas e integrando sobre o domínio da casca

$$\iint [ (\vec{P} + \vec{N}_{\alpha,\alpha}) \cdot \delta\vec{v} + ( \vec{M}_{\alpha,\alpha} + \vec{a}_{\alpha} \times \vec{N}_{\alpha} + \vec{\tilde{P}} ) \cdot \delta\vec{\Omega} ] d\theta^1 d\theta^2 = 0 \quad (2.2.6)$$

onde

- $\vec{P}$  = força de superfície (intrínseca)
- $\vec{N}_{\alpha}$  = vetor esforço interno por unidade de comprimento (intrínseco)
- $\vec{M}_{\alpha}$  = vetor momento por unidade de comprimento (intrínseco)
- $\vec{\tilde{P}}$  = momento de superfície (intrínseco) .

Aplicando o Teorema de Gauss, chega-se a

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{P} \cdot \delta\vec{v} + \vec{\tilde{P}} \cdot \delta\vec{\tilde{v}}) \frac{dS}{\sqrt{a}} + \int_C \nu_\alpha (\vec{N}_\alpha \cdot \delta\vec{v} + \vec{M}_\alpha \cdot \delta\vec{\tilde{v}}) \frac{dS}{\sqrt{a}} = \\ = \iint_S [ \vec{N}_\alpha \cdot \delta\vec{v}_\alpha + \vec{M}_\alpha \cdot \delta\vec{\tilde{v}}_\alpha - \vec{a}_\alpha \times \vec{N}_\alpha \cdot \delta\vec{\tilde{v}} ] \frac{dS}{\sqrt{a}} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

sendo o primeiro membro o incremento de primeira ordem do trabalho de todas as forças exteriores, no interior e no contorno.

Pode-se escrever (2.2.7) na forma

$$\delta W^{\text{EXT}} = \iint [ \vec{N}_\alpha \cdot \delta\vec{\varepsilon}_\alpha + \vec{M}_\alpha \cdot \delta\vec{\chi}_\alpha ] \frac{dS}{\sqrt{a}} \quad (2.2.8)$$

onde

$$\vec{\varepsilon}_\alpha = \vec{v}_{,\alpha} + \vec{a}_\alpha \times \vec{\tilde{v}} \quad , \quad \vec{\chi}_\alpha = \vec{\tilde{v}}_{,\alpha} \quad (2.2.9)$$

são as deformações vetoriais generalizadas associadas com os esforços internos.

A equação (2.2.8) pode ser considerada como uma forma do Princípio dos Trabalhos Virtuais em termos de grandezas vetoriais.

Introduzindo as componentes escalares das tensões e deformações generalizadas que se relacionam com as grandezas vetoriais por intermédio de

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\alpha\beta} &= \vec{\varepsilon}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \\ \gamma_\alpha &= \vec{\varepsilon}_\alpha \cdot \vec{a}_3 \\ \bar{\chi}_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\beta\lambda} \vec{a}^\lambda \cdot \vec{\chi}_\alpha \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\vec{N}_\alpha = ( n^{\alpha\rho} \vec{a}_\rho + q_\alpha \vec{a}_3 )$$

$$\vec{M}_\alpha = \sqrt{a} ( m^{\alpha\rho} \vec{a}_3 \times \vec{a}_\rho ) \quad (2.2.11)$$

pode-se verificar que

$$\vec{N}_\alpha \cdot \delta \vec{z}_\alpha = \sqrt{a} \left( n^{\alpha\beta} \delta \bar{\alpha}_{\alpha\beta} + q^\alpha \delta \gamma_\alpha \right)$$

$$\vec{M}_\alpha \cdot \delta \vec{\chi}_\alpha = \sqrt{a} \, m^{\alpha\beta} \delta \bar{\chi}_{\alpha\beta} \quad (2.2.12)$$

Substituindo as expressões anteriores em (2.2.8), chega-se a uma forma do Princípio dos Trabalhos Virtuais em termos de componentes de tensões e deformações generalizadas

$$\delta W^{\text{EXT}} = \iint_S \left[ n^{\alpha\beta} \delta \bar{\alpha}_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \bar{\chi}_{\alpha\beta} + q^\alpha \delta \gamma_\alpha \right] dS \quad (2.2.13)$$

Nota-se que a expressão (2.2.13) independe do tipo de material utilizado e que algumas das grandezas empregadas não são, em geral, simétricas, o que dificulta a implementação do algoritmo computacional. Para contornar tal dificuldade, decompõem-se as variáveis de membrana e flexo-torção em suas partes simétricas e anti-simétricas

$$\bar{\alpha}_{\alpha\beta} = \alpha_{(\alpha\beta)} + \alpha_{[\alpha\beta]}$$

$$\bar{\chi}_{\alpha\beta} = \chi_{(\alpha\beta)} + \chi_{[\alpha\beta]}$$

$$m^{\alpha\beta} = m^{(\alpha\beta)} + m^{[\alpha\beta]}$$

$$n^{\alpha\beta} = n^{(\alpha\beta)} + n^{[\alpha\beta]} \quad (2.2.14)$$

Cada parcela é dada por

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = 0,5 \left( v_\beta|_\alpha + v_\alpha|_\beta - 2 b_{\alpha\beta} w \right)$$

$$\alpha_{[\alpha\beta]} = \omega_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta} \phi = 0$$

$$\chi_{(\alpha\beta)} = 0,5 \left[ \phi_\beta|_\alpha + \phi_\alpha|_\beta - \left( \varepsilon_{\beta\lambda} b_\alpha^\lambda + \varepsilon_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda \right) \phi \right]$$

$$\chi_{[\alpha\beta]} = 0,5 \left[ \phi_\beta|_\alpha - \phi_\alpha|_\beta - \left( \varepsilon_{\beta\lambda} b_\alpha^\lambda - \varepsilon_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda \right) \phi \right]$$

$$m^{(\alpha\beta)} = 0,5 \left( m^{\alpha\beta} + m^{\beta\alpha} \right)$$

$$m^{[\alpha\beta]} = 0,5 \left( m^{\alpha\beta} - m^{\beta\alpha} \right)$$



$$n^{(\alpha\beta)} = 0,5 ( n^{\alpha\beta} + n^{\beta\alpha} )$$

$$n^{[\alpha\beta]} = 0,5 ( n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha} ) \quad . \quad (2.2.15)$$

Substituindo-se as expressões (2.2.15) em (2.2.13), e depois de um laborioso processo algébrico, chega-se a uma expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais onde aparecem termos cruzados de membrana/flexão e corte/flexão. Para simplificar tal expressão, sem transgredir a equação de equilíbrio em torno à normal, admite-se que

$$m^{\alpha\beta} = m^{(\alpha\beta)} \quad e \quad m^{[\alpha\beta]} = 0 \quad . \quad (2.2.16)$$

Com tal simplificação, o Princípio dos Trabalhos Virtuais assume a forma

$$\delta W^{EXT} = \iint_S [ n^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + m^{(\alpha\beta)} \delta \chi_{(\alpha\beta)} + q^\alpha \delta \gamma_\alpha ] dS \quad (2.2.17)$$

onde todas os tensores envolvidos são simétricos.

Para pontos fora da superfície média, a deformação em termos de grandezas de superfície resulta ser

$$\gamma_{\alpha\beta} = \bar{\alpha}_{\alpha\beta} + \theta_s \frac{\bar{\chi}_{\alpha\beta} + \bar{\chi}_{\beta\alpha}}{2} = \alpha_{(\alpha\beta)} + \theta_s \chi_{(\alpha\beta)} \quad . \quad (2.2.18)$$

A não-linearidade geométrica é introduzida através de uma parcela da componente de deformação de membrana, segundo uma teoria de pequenas deformações e rotações moderadas, pela expressão

$$E_{\alpha\beta} = \alpha_{(\alpha\beta)} + 0,5 \phi_\alpha \phi_\beta + 0,5 a_{\alpha\beta} \phi^2 \quad . \quad (2.2.19)$$

Nota-se que pela natureza das deformações e deslocamentos decorrentes do comportamento do concreto armado, é indiferente definir as tensões na configuração original ou indeformada, podendo-se utilizar a métrica indeformada para a avaliação do trabalho externo.

Considerando (2.2.19), o Princípio dos Trabalhos

Virtuais assume a forma

$$\delta W^{\text{EXT}} = \iint_S [n^{(\alpha\beta)} \delta E_{\alpha\beta} + m^{(\alpha\beta)} \delta \chi_{(\alpha\beta)} + q^\alpha \delta \gamma_\alpha] dS \quad (2.2.20)$$

onde  $n^{(\alpha\beta)}$  deverá ser calculado com as deformações reais presentes na configuração de equilíbrio.

#### b) Formulação normalizada

A formulação tensorial apresentada no item anterior não é a mais adequada para aplicação de um modelo de elementos finitos que adota como sistema de referência um sistema curvilíneo geral, pois cada elemento terá um sistema curvilíneo particular, com métrica diferente, em geral, dos demais. Para contornar tal dificuldade, utiliza-se a forma normalizada da teoria, para a qual resulta de interesse as componentes das forças e binários resultantes,  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{m}_\alpha$ , quando estes vetores são decompostos em termos de uma base unitária de vetores. Estas componentes são denotadas por  $n_{\alpha\beta}^*$ ,  $m_{\alpha\beta}^*$  e  $q_\alpha^*$  e são chamadas de resultantes de tensões físicas, binários físicos e forças cortantes físicas respectivamente

$$\vec{n}_\alpha = n_{\alpha 1}^* \frac{\vec{a}_1}{\sqrt{a_{11}}} + n_{\alpha 2}^* \frac{\vec{a}_2}{\sqrt{a_{22}}} + q_\alpha^* \vec{a}_3 \quad (2.2.21)$$

$$\vec{m}_\alpha = m_{\alpha 1}^* \frac{\vec{a}^2}{\sqrt{a_{22}}} + m_{\alpha 2}^* \left[ -\frac{\vec{a}^1}{\sqrt{a_{11}}} \right] \quad (2.2.22)$$

É importante salientar que os conjuntos de componentes físicas não são tensores no sistema curvilíneo geral e que o sinal do segundo termo da fórmula (2.2.22) está trocado em relação as definições da referência de base<sup>21</sup> para que os momentos fletores produzam tração nas fibras superiores.

Partindo da expressão (2.2.17), o Princípio dos Trabalhos Virtuais assume a sua forma definitiva

$$\delta W^{\text{EXT}} = \iint_S ( n_{\alpha\beta}^* \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^* + m_{\alpha\beta}^* \delta \chi_{\alpha\beta}^* + q_{\alpha}^* \delta \gamma_{\alpha}^* ) dS . \quad (2.2.23)$$

As componentes físicas, normalizadas, das solicitações de membrana, momentos e esforços cortantes são dados por, respectivamente

$$\begin{aligned} n_{11}^* &= n^{(11)} a_{11} \text{sen}\theta \\ n_{22}^* &= n^{(22)} a_{22} \text{sen}\theta \\ n_{12}^* &= n_{21}^* = n^{(12)} \alpha_1 \alpha_2 \text{sen}\theta \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= m^{(11)} a_{11} \text{sen}\theta \\ m_{22}^* &= m^{(22)} a_{22} \text{sen}\theta \\ m_{12}^* &= m_{21}^* = m^{(12)} \alpha_1 \alpha_2 \text{sen}\theta \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} q_1^* &= q^1 \alpha_1 \text{sen}\theta \\ q_2^* &= q^2 \alpha_2 \text{sen}\theta \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

e as componentes normalizadas da deformação de membrana, mudança de curvatura e deformação por corte se relacionam com as deformações generalizadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* &= \frac{\alpha_{(11)}}{a_{11} \text{sen}\theta} \\ \varepsilon_{22}^* &= \frac{\alpha_{(22)}}{a_{22} \text{sen}\theta} \\ \varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{21}^* &= \frac{\alpha_{(12)} + \alpha_{(21)}}{\alpha_1 \alpha_2 \text{sen}\theta} \\ \chi_{11}^* &= \frac{\chi_{(11)}}{a_{11} \text{sen}\theta} \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

$$\chi_{22}^* = \frac{\chi_{(22)}}{a_{22} \operatorname{sen}\theta}$$

$$\chi_{12}^* + \chi_{21}^* = \frac{\chi_{(12)} + \chi_{(21)}}{\alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sen}\theta} \quad (2.2.28)$$

$$\gamma_1^* = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 \operatorname{sen}\theta}$$

$$\gamma_2^* = \frac{\gamma_2}{\alpha_2 \operatorname{sen}\theta} \quad (2.2.29)$$

Para facilitar a determinação das deformações generalizadas a serem empregadas em (2.2.23), define-se componentes vetoriais semelhantes às estabelecidas em (2.2.9)

$$\vec{\varepsilon}_\alpha^* = \frac{\vec{\varepsilon}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}} \operatorname{sen}\theta} \quad \text{e} \quad \vec{\chi}_\alpha^* = \frac{\vec{\chi}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \quad (2.2.30)$$

resultando

$$\varepsilon_{11}^* = \vec{\varepsilon}_1^* \cdot \vec{t}_1$$

$$\varepsilon_{22}^* = \vec{\varepsilon}_2^* \cdot \vec{t}_2$$

$$\varepsilon_{12}^* = \varepsilon_{21}^* = 0,5 (\vec{\varepsilon}_1^* \cdot \vec{t}_2 + \vec{\varepsilon}_2^* \cdot \vec{t}_1) \quad (2.2.31)$$

$$\chi_{11}^* = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} (\vec{t}_2 - \cos\theta \vec{t}_1) \cdot \vec{\chi}_1^*$$

$$\chi_{22}^* = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} (-\vec{t}_1 + \cos\theta \vec{t}_2) \cdot \vec{\chi}_2^*$$

$$\chi_{12}^* + \chi_{21}^* = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \left\{ (-\vec{t}_1 + \cos\theta \vec{t}_2) \cdot \vec{\chi}_1^* + (\vec{t}_2 - \cos\theta \vec{t}_1) \cdot \vec{\chi}_2^* \right\} \quad (2.2.32)$$

$$\gamma_1^* = \vec{\varepsilon}_1^* \cdot \vec{t}_3$$

$$\gamma_2^* = \vec{\varepsilon}_2^* \cdot \vec{t}_3 \quad . \quad (2.2.33)$$

Salienta-se que as expressões (2.2.31), (2.2.32) e (2.2.33) permitem calcular todas as deformações generalizadas em forma independente da base de vetores adotada para representar o deslocamento e a rotação dos pontos da superfície média. Adotando-se a base cartesiana de referência global, a métrica para os deslocamentos e rotações fica unificada e não são necessárias rotações da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes.

### 2.2.3 - Comentários sobre a teoria utilizada

Resulta útil salientar alguns aspectos referentes à teoria empregada :

1) A inclusão da deformação por corte facilita o modelo de elementos finitos , pois reduz a ordem das derivadas presentes nas deformações, assumindo as rotações como variáveis independentes. Desta forma, as funções de interpolação devem manter a continuidade das funções incógnitas nas fronteiras entre os elementos. Isto representa uma significativa vantagem em relação aos modelos baseados nas hipóteses de Kirchhoff, que devem manter a continuidade dos deslocamentos e suas derivadas primeiras.

2) A forma do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) independe das equações constitutivas e, portanto, a teoria pode ser empregada para análise de problemas elásticos e inelásticos.

3) As solicitações são obtidas como derivadas parciais da energia específica em relação às deformações generalizadas.

4) A energia de deformação apresenta contribuições independentes de membrana, flexo-torção e corte e as grandezas

envolvidas são simétricas.

5) Os efeitos da deformação por corte influem nos resultados na medida que aumenta a relação da espessura com o maior raio de curvatura.

6) Para um campo de deslocamentos uniformes, todas as componentes de deformação são nulas, incluindo os movimentos de corpo rígido.

7) A formulação é obtida em coordenadas curvilíneas que acompanham a geometria da superfície média e somente são utilizadas equações tensoriais, que garantem a invariabilidade das relações em relação às mudanças do sistema de coordenadas.

8) A formulação utilizada é uma formulação normalizada da teoria em termos de componentes físicas as quais são mais adequadas para introduzir equações constitutivas, que geralmente utilizam valores por unidade de comprimento na métrica ordinária, e necessárias no método numérico de solução.

9) O trabalho interno das componentes físicas através das deformações generalizadas é igual ao trabalho interno das respectivas grandezas da formulação tensorial.

10) As expressões da energia são utilizadas para a definição da matriz de rigidez que corresponde a um material homogêneo, isótropo com a qual realiza-se as aproximações lineares no processo numérico.

11) As contribuições incluídas devido à deformação por corte podem ser da ordem de grandeza de alguns dos termos desprezados ao longo do desenvolvimento da formulação.

### 3 - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A CASCAS

#### 3.1 - O elemento isoparamétrico quadrático

Como a teoria utilizada inclui a deformação por corte, as rotações aparecem como variáveis cinemáticas independentes acompanhando os deslocamentos. As derivadas presentes na avaliação do trabalho interno são de primeira ordem, como se desprende das definições (2.2.9) e (2.2.30), o que facilita a escolha das funções de interpolação e parâmetros nodais, permitindo a utilização de elementos isoparamétricos da família Serendipity<sup>36</sup>.

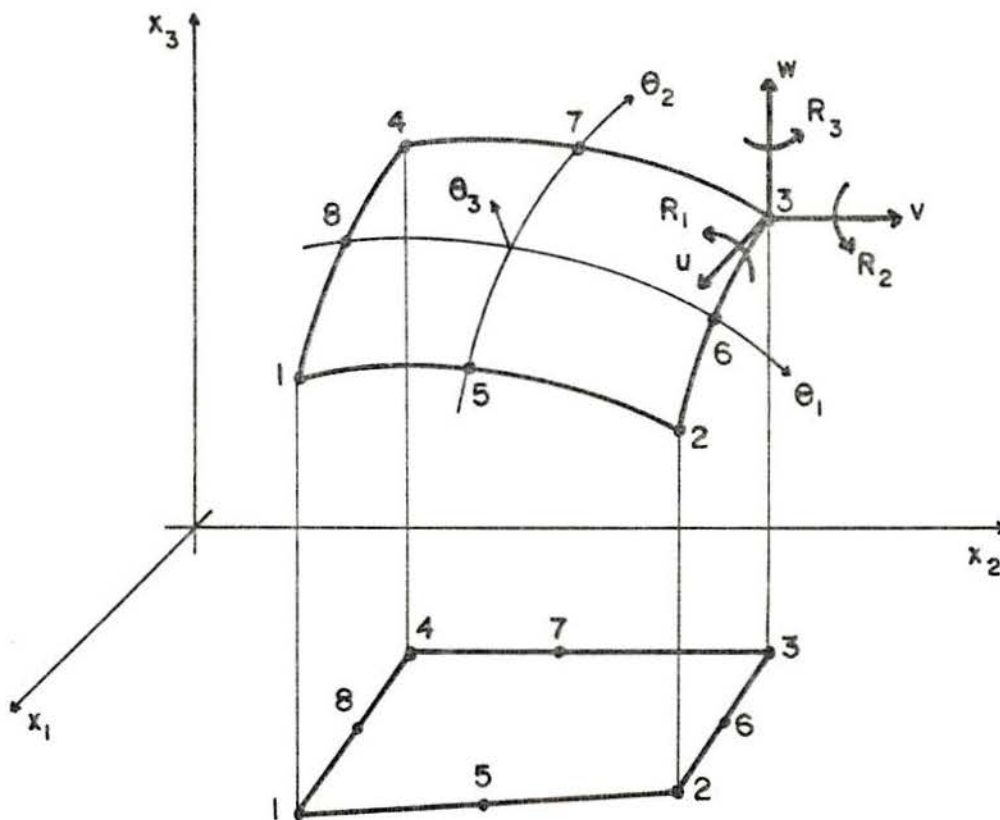


FIGURA 3.1 - O elemento isoparamétrico quadrático de cascas

O elemento utilizado é o isoparamétrico quadrático bidimensional com oito nós por elemento e seis graus de liberdade por nó.

A geometria da superfície média da casca é aproximada na forma

$$x_j = \sum_{\tilde{n}} \Phi_{\tilde{n}} X_{\tilde{n}}^n \quad (3.1.1)$$

onde  $X_{\tilde{n}}^n$  são as coordenadas nodais do elemento e  $\Phi_{\tilde{n}}$  são funções de interpolação quadráticas da família Serendipity.

São as seguintes as expressões das funções de interpolação <sup>ao</sup>

- nós de esquina :

$$\Phi_i = 0,25 (1 + \bar{\theta}_1) (1 + \bar{\theta}_2) (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 - 1) \quad (3.1.2)$$

- nós intermediários :

$$\theta_1=0 \Rightarrow \Phi_i = 0,5 (1 - \theta_1^2) (1 + \bar{\theta}_2) \quad (3.1.3)$$

$$\theta_2=0 \Rightarrow \Phi_i = 0,5 (1 + \bar{\theta}_1) (1 - \theta_2^2)$$

$$\text{com } \bar{\theta}_1 = \theta_1 \theta_{1i} \quad ; \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 \theta_{2i} \quad (3.1.4)$$

O vetor deslocamento  $\vec{v}$  e o vetor rotação  $\vec{\Omega}$  são referidos ao sistema cartesiano global por

$$\vec{v} = u_j \vec{e}_j$$

$$\vec{\Omega} = \omega_j \vec{e}_j \quad (3.1.5)$$

sendo  $u_j$  e  $\omega_j$  as componentes cartesianas na base de vetores  $\vec{e}_j$ .

As variáveis se interpolam a partir de seus valores nodais com as mesmas funções que a geometria

$$u_j = \sum_{\tilde{n}} \Phi_{\tilde{n}} U_{\tilde{n}}^n$$

$$\omega_j = \sum_{\tilde{n}} \Phi_{\tilde{n}} \Omega_{\tilde{n}}^n \quad (3.1.6)$$



onde  $\underline{U}_j^n$  e  $\underline{\Omega}_j^n$  são os valores das incógnitas nos nós do elemento.

### 3.2 - Deformações

Para a determinação do vetor de forças nodais não-lineares equivalentes necessita-se das seguintes grandezas geométricas, levando em consideração (2.1.3), (2.1.15), (2.1.14) e (3.1.1)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x_j \vec{e}_j = (\underline{\Phi} \underline{X}_j^n) \vec{e}_j \\ x_{j,\alpha} &= \underline{\Phi}_{,\alpha} X_j^n \\ \vec{a}_\alpha &= x_{j,\alpha} \vec{e}_j \\ \alpha_\beta &= (x_{1,\beta}^2 + x_{2,\beta}^2 + x_{3,\beta}^2)^{1/2} \\ \vec{t}_\alpha &= \frac{(x_{j,\alpha})}{\alpha_\alpha} \vec{e}_j \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Resulta útil relacionar as componentes da base de vetores unitários de superfície com a base cartesiana global

$$\vec{t}_\alpha = \beta_{j\alpha} \vec{e}_j \quad (3.2.2)$$

Os coeficientes da transformação,  $\beta_{j\alpha}$ , são dados por, conforme (3.2.1)

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{x_{1,1}}{\alpha_1} & ; & & \beta_{21} &= \frac{x_{2,1}}{\alpha_1} \\ \beta_{31} &= \frac{x_{3,1}}{\alpha_1} & ; & & \beta_{12} &= \frac{x_{1,2}}{\alpha_2} \\ \beta_{22} &= \frac{x_{2,2}}{\alpha_2} & ; & & \beta_{32} &= \frac{x_{3,2}}{\alpha_2} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Com estes coeficientes, calcula-se as funções trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= | \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 | = \\ &= \left\{ (\beta_{21}\beta_{32} - \beta_{22}\beta_{31})^2 + (\beta_{31}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{32})^2 + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})^2 \right\}^{1/2} \\ \operatorname{cos}\theta &= \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = \beta_{11}\beta_{12} + \beta_{21}\beta_{22} + \beta_{31}\beta_{32} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Alternativamente, pode-se escrever

$$\beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{t}_j \quad (3.2.5)$$

Na determinação das componentes do vetor normal à superfície,  $\vec{t}_3$ , levando-se em consideração (2.1.16), chega-se a

$$\begin{aligned} \beta_{13} &= \frac{\beta_{21}\beta_{32} - \beta_{22}\beta_{31}}{\operatorname{sen}\theta} \\ \beta_{23} &= \frac{\beta_{31}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{32}}{\operatorname{sen}\theta} \\ \beta_{33} &= \frac{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}{\operatorname{sen}\theta} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Para avaliar as componentes de deformação generalizadas, parte-se das definições de deformações generalizadas associadas com os esforços internos dadas pela teoria, conforme (2.2.30) e (2.2.9)

$$\vec{\varepsilon}_\alpha^* = \frac{(\vec{v}_\alpha + \vec{a}_\alpha \times \vec{\Omega})}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}} \operatorname{sen}\theta}$$

$$\vec{\chi}_\alpha^* = \frac{\vec{\Omega}_{,\alpha}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \quad (3.2.7)$$

onde

$\vec{\varepsilon}_\alpha^*$  = deformações vetoriais generalizadas associadas aos esforços de membrana

$\vec{\chi}_\alpha^*$  = deformações vetoriais generalizadas associadas aos momentos .

Determina-se as componentes de deformação de membrana a partir de grandezas vetoriais

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = 0,5 ( \vec{\varepsilon}_\alpha^* \cdot \vec{t}_\beta + \vec{\varepsilon}_\beta^* \cdot \vec{t}_\alpha ) \quad (3.2.8)$$

Em particular, para  $\alpha = \beta = 1$  e levando em consideração (3.2.7), (3.2.2), (3.2.3), (3.1.5), (3.1.6) e (3.2.1), tem-se

$$\varepsilon_{11}^* = \frac{\beta_{11} \Phi_{,1} U_{\sim 1}^n + \beta_{21} \Phi_{,1} U_{\sim 2}^n + \beta_{31} \Phi_{,1} U_{\sim 3}^n}{\alpha_1 \text{ sen}\theta} \quad (3.2.9)$$

Pode-se colocar (3.2.9) na forma

$$\varepsilon_{11}^* = \underline{E}_{\sim 1} \underline{V}_{\sim}^e \quad (3.2.10)$$

onde  $\underline{V}_{\sim}^e$  é o vetor coluna que contém todas as incógnitas nodais do elemento e  $\underline{E}_{\sim 1}$  é o vetor linha constituído por funções de interpolação e suas derivadas e por características geométricas dados por

$$\underline{V}_{\sim}^{e,T} = \left\{ U_{\sim 1}^n ; U_{\sim 2}^n ; U_{\sim 3}^n ; \Omega_{\sim 1}^n ; \Omega_{\sim 2}^n ; \Omega_{\sim 3}^n \right\}$$

$$\underline{E}_{\sim 1} = \left\{ \psi_1 \beta_{11} \Phi_{,1} ; \psi_1 \beta_{21} \Phi_{,1} ; \psi_1 \beta_{31} \Phi_{,1} ; 0 ; 0 ; 0 \right\} \quad (3.2.11)$$

com

$$\psi_1 = \frac{1}{\alpha_1 \operatorname{sen}\theta} \quad (3.2.12)$$

Analogamente, particularizando-se (3.2.8) para  $\alpha = \beta = 2$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{22}^* &= E_{\sim 2} V_{\sim}^o \\ E_{\sim 2} &= \left\{ \psi_2 \beta_{12} \Phi_{\sim,2} ; \psi_2 \beta_{22} \Phi_{\sim,2} ; \psi_2 \beta_{32} \Phi_{\sim,2} ; 0 ; 0 ; 0 \right\} \\ \psi_2 &= \frac{1}{\alpha_2 \operatorname{sen}\theta} \quad (3.2.13) \end{aligned}$$

Para  $\epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^*$ , partindo de (3.2.8), resulta

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^* &= \vec{\epsilon}_2^* \cdot \vec{t}_1 + \vec{\epsilon}_1^* \cdot \vec{t}_2 = E_{\sim 12} V_{\sim}^o = \\ &= \left\{ (\psi_2 \beta_{11} \Phi_{\sim,2} + \psi_1 \beta_{12} \Phi_{\sim,1}) U_{\sim 1}^n + (\psi_2 \beta_{12} \Phi_{\sim,2} + \psi_1 \beta_{22} \Phi_{\sim,1}) U_{\sim 2}^n \right. \\ &+ (\psi_2 \beta_{31} \Phi_{\sim,2} + \psi_1 \beta_{32} \Phi_{\sim,1}) U_{\sim 3}^n + (\lambda_{12} \psi_2 + \lambda_{11} \psi_1) \Phi_{\sim} \Omega_{\sim 1}^n \\ &\left. + (\lambda_{22} \psi_2 + \lambda_{21} \psi_1) \Phi_{\sim} \Omega_{\sim 2}^n + (\lambda_{32} \psi_2 + \lambda_{31} \psi_1) \Phi_{\sim} \Omega_{\sim 3}^n \right\} \quad (3.2.14) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \alpha_2 \beta_{13} \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \lambda_{11} = -\alpha_1 \beta_{13} \operatorname{sen}\theta \\ \lambda_{22} &= \alpha_2 \beta_{23} \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \lambda_{21} = -\alpha_1 \beta_{23} \operatorname{sen}\theta \\ \lambda_{32} &= \alpha_2 \beta_{33} \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \lambda_{31} = -\alpha_1 \beta_{33} \operatorname{sen}\theta \quad . \quad (3.2.15) \end{aligned}$$

Da mesma forma, determina-se as componentes da deformação de corte a partir de grandezas vetoriais dadas pela teoria

$$\gamma_\alpha^* = \vec{\epsilon}_\alpha^* \cdot \vec{t}_\alpha \quad (3.2.16)$$

Particularizando (3.2.16) para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$  e levando em consideração (3.2.7), (2.1.9), (3.1.5), (3.1.6), (3.2.6) e (3.2.1), chega-se a

$$\gamma_1^* = \left[ u_{1,1}\beta_{13} + u_{2,1}\beta_{23} + u_{3,1}\beta_{33} + f_{11}\omega_1 + f_{12}\omega_2 + f_{13}\omega_3 \right] \psi_1$$

e

$$\gamma_2^* = \left[ u_{1,2}\beta_{13} + u_{2,2}\beta_{23} + u_{3,2}\beta_{33} + f_{21}\omega_1 + f_{22}\omega_2 + f_{23}\omega_3 \right] \psi_2 \quad (3.2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{13} &= (x_{2,1}\beta_{13} - x_{1,1}\beta_{23}) \\ f_{12} &= (x_{1,1}\beta_{33} - x_{3,1}\beta_{13}) \\ f_{11} &= (x_{3,1}\beta_{23} - x_{2,1}\beta_{33}) \\ f_{23} &= (x_{2,2}\beta_{13} - x_{1,2}\beta_{23}) \\ f_{22} &= (x_{1,2}\beta_{33} - x_{3,2}\beta_{13}) \\ f_{21} &= (x_{3,2}\beta_{23} - x_{2,2}\beta_{33}) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Pode-se escrever, baseado em (3.1.6)

$$u_{j,\alpha} = \tilde{\Phi}_{,\alpha} U_{\tilde{j}}^n \quad (3.2.19)$$

Substituindo (3.2.19) em (3.2.17), resulta

$$\begin{aligned} \gamma_1^* &= \tilde{F}_1 \tilde{V}^o \\ \gamma_2^* &= \tilde{F}_2 \tilde{V}^o \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

com os vetores linhas  $\tilde{F}_\alpha$  dados por

$$\tilde{F}_1 = \left\{ \beta_{13}\tilde{\Phi}_{,1}; \beta_{23}\tilde{\Phi}_{,1}; \beta_{33}\tilde{\Phi}_{,1}; f_{11}\tilde{\Phi}_{,1}; f_{12}\tilde{\Phi}_{,1}; f_{13}\tilde{\Phi}_{,1} \right\} \psi_1$$

$$\tilde{F}_2 = \left\{ \beta_{1a} \tilde{\Phi}_{,2}; \beta_{2a} \tilde{\Phi}_{,2}; \beta_{3a} \tilde{\Phi}_{,2}; f_{21} \tilde{\Phi}; f_{22} \tilde{\Phi}; f_{2a} \tilde{\Phi} \right\} \psi_2 . \quad (3.2.21)$$

Para as mudanças de curvatura, analogamente, parte-se das grandezas vetoriais dadas por (2.2.32) e utilizando (3.2.2), (3.2.3) e (3.2.7), chega-se a

$$\begin{aligned} \chi_{11}^* &= \frac{(d_{11} \omega_{1,1} + d_{12} \omega_{2,1} + d_{1a} \omega_{a,1}) \psi_1}{\text{sen}\theta} \\ \chi_{22}^* &= \frac{(d_{21} \omega_{1,2} + d_{22} \omega_{2,2} + d_{2a} \omega_{a,2}) \psi_2}{\text{sen}\theta} \\ \chi_{12}^* + \chi_{21}^* &= \frac{(d_{21} \omega_{1,1} + d_{22} \omega_{2,1} + d_{2a} \omega_{a,1}) \psi_1}{\text{sen}\theta} + \\ &+ \frac{(d_{11} \omega_{1,2} + d_{12} \omega_{2,2} + d_{1a} \omega_{a,2}) \psi_2}{\text{sen}\theta} . \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

onde

$$\begin{aligned} d_{11} &= \beta_{12} - \cos\theta \beta_{11} \\ d_{12} &= \beta_{22} - \cos\theta \beta_{21} \\ d_{1a} &= \beta_{a2} - \cos\theta \beta_{a1} \\ d_{21} &= -\beta_{11} + \cos\theta \beta_{12} \\ d_{22} &= -\beta_{21} + \cos\theta \beta_{22} \\ d_{2a} &= -\beta_{a1} + \cos\theta \beta_{a2} . \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Tendo em vista (3.1.6), escreve-se

$$\omega_{j,\alpha} = \frac{\Phi_{,\alpha}}{\tilde{\Omega}_{,j}} \quad (3.2.24)$$

Substituindo (3.2.24) em (3.2.22), resulta

$$\begin{aligned} \chi_{11}^* &= G_{11} V_{11}^o \\ \chi_{22}^* &= G_{22} V_{22}^o \\ \chi_{12}^* + \chi_{21}^* &= G_{12} V_{12}^o \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

sendo os vetores  $G_{11}$ ,  $G_{22}$  e  $G_{12}$  dados por

$$\begin{aligned} G_{11} &= \left\{ \begin{array}{l} 0 ; 0 ; 0 ; d_{11} \frac{\Phi_{,1}}{\tilde{\Omega}_{,1}} ; d_{12} \frac{\Phi_{,1}}{\tilde{\Omega}_{,1}} ; d_{13} \frac{\Phi_{,1}}{\tilde{\Omega}_{,1}} \end{array} \right\} \frac{\psi_1}{\text{sen}\theta} \\ G_{22} &= \left\{ \begin{array}{l} 0 ; 0 ; 0 ; d_{21} \frac{\Phi_{,2}}{\tilde{\Omega}_{,2}} ; d_{22} \frac{\Phi_{,2}}{\tilde{\Omega}_{,2}} ; d_{23} \frac{\Phi_{,2}}{\tilde{\Omega}_{,2}} \end{array} \right\} \frac{\psi_2}{\text{sen}\theta} \\ G_{12} &= \left\{ \begin{array}{l} 0 ; 0 ; 0 ; (\psi_1 d_{21} \frac{\Phi_{,1}}{\tilde{\Omega}_{,1}} + \psi_2 d_{11} \frac{\Phi_{,2}}{\tilde{\Omega}_{,2}}) ; \\ (\psi_1 d_{22} \frac{\Phi_{,1}}{\tilde{\Omega}_{,1}} + \psi_2 d_{12} \frac{\Phi_{,2}}{\tilde{\Omega}_{,2}}) ; (\psi_1 d_{23} \frac{\Phi_{,1}}{\tilde{\Omega}_{,1}} + \psi_2 d_{13} \frac{\Phi_{,2}}{\tilde{\Omega}_{,2}}) \end{array} \right\} \frac{1}{\text{sen}\theta} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

No caso de não-linearidade geométrica, a deformação de membrana é acrescida de uma parcela

$$E_{\alpha\beta}^* = \varepsilon_{\alpha\beta}^* + \varepsilon_{\alpha\beta}^{*NL} \quad (3.2.27)$$

onde  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{*NL}$  representa a parte não-linear das deformações de membrana

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{*NL} = \frac{(\phi_\alpha \phi_\beta + a_{\alpha\beta} \phi^2)}{2 a_\alpha a_\beta \text{sen}\theta} \quad (3.2.28)$$

A partir de (2.2.2) é fácil demonstrar que as componentes de rotação podem ser avaliadas por

$$\phi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \vec{\Omega} \cdot \vec{a}^\beta$$

$$\phi = \vec{\Omega} \cdot \vec{a}_a . \quad (3.2.29)$$

Colocando as expressões (3.2.29) em função da base normalizada  $\vec{t}_i$  e particularizando para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ , chega-se a

$$\phi_1 = \frac{\alpha_1 \vec{\Omega} \cdot (-\vec{t}_1 \cos\theta + \vec{t}_2)}{\text{sen}\theta}$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2 \vec{\Omega} \cdot (-\vec{t}_1 \cos\theta + \vec{t}_2)}{\text{sen}\theta} \quad (3.2.30)$$

$$\phi = \vec{\Omega} \cdot \vec{t}_a . \quad (3.2.31)$$

Substituindo (3.1.6) em (3.2.30) e (3.2.31), resulta para as rotações

$$\phi_1 = \frac{\alpha_1}{\text{sen}\theta} \left\{ \omega_1 d_{11} + \omega_2 d_{12} + \omega_a d_{1a} \right\}$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{\text{sen}\theta} \left\{ \omega_1 d_{12} + \omega_2 d_{22} + \omega_a d_{2a} \right\} \quad (3.2.32)$$

$$\phi = \omega_1 \beta_{1a} + \omega_2 \beta_{2a} + \omega_a \beta_{aa} . \quad (3.2.33)$$

A nível de elemento, com parâmetros nodais e funções de interpolação, considerando (3.1.6), obtém-se

$$\phi_1 = \frac{\alpha_1 z_1 \tilde{V}^e}{\text{sen}\theta}$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2 z_2 \tilde{V}^e}{\text{sen}\theta}$$

$$\phi = z_a \tilde{V}^e \quad (3.2.34)$$

onde



$$\begin{aligned}
 \tilde{z}_1 &= \left\{ \tilde{0} ; \tilde{0} ; \tilde{0} ; d_{11} \tilde{\Phi} ; d_{12} \tilde{\Phi} ; d_{13} \tilde{\Phi} \right\} \\
 \tilde{z}_2 &= \left\{ \tilde{0} ; \tilde{0} ; \tilde{0} ; d_{21} \tilde{\Phi} ; d_{22} \tilde{\Phi} ; d_{23} \tilde{\Phi} \right\} \\
 \tilde{z}_3 &= \left\{ \tilde{0} ; \tilde{0} ; \tilde{0} ; \beta_{13} \tilde{\Phi} ; \beta_{23} \tilde{\Phi} ; \beta_{33} \tilde{\Phi} \right\} .
 \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Substituindo (3.2.35) em (3.2.28) e particularizando para  $\alpha=\beta=1$  ;  $\alpha=\beta=2$  e  $\alpha=1$  ,  $\beta=2$  , chega-se as seguintes expressões para a parcela não-linear das deformações de membrana

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11}^{*NL} &= \tilde{z}_1 \tilde{V}^e \\
 \epsilon_{22}^{*NL} &= \tilde{z}_2 \tilde{V}^e \\
 \epsilon_{12}^{*NL} + \epsilon_{21}^{*NL} &= \tilde{z}_{12} \tilde{V}^e .
 \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Os valores de  $\tilde{z}_1$  ,  $\tilde{z}_2$  ,  $\tilde{z}_{12}$  são calculados por

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}_1 &= 0,5 \left\{ \frac{(z_1 \tilde{V}^e) z_1}{\text{sen}^3 \theta} + \frac{(z_3 \tilde{V}^e) z_3}{\text{sen} \theta} \right\} \\
 \tilde{z}_2 &= 0,5 \left\{ \frac{(z_2 \tilde{V}^e) z_2}{\text{sen}^3 \theta} + \frac{(z_3 \tilde{V}^e) z_3}{\text{sen} \theta} \right\} \\
 \tilde{z}_{12} &= 0,5 \left\{ \left[ \frac{(z_1 \tilde{V}^e) z_2}{\text{sen}^3 \theta} + \frac{(z_2 \tilde{V}^e) z_1}{\text{sen}^3 \theta} \right] + 2 \cotg \theta (z_3 \tilde{V}^e) z_3 \right\} .
 \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Nota-se que  $\tilde{z}_1$  ,  $\tilde{z}_2$  ,  $\tilde{z}_{12}$  são funções dos deslocamentos nodais  $\tilde{V}^e$  . Levando em consideração (3.2.37), (3.2.34) e (3.2.27), obtém-se

$$\begin{aligned}
 E_{11}^* &= \left\{ \tilde{E}_1 + \tilde{z}_1(\tilde{V}^e) \right\} \tilde{V}^e \\
 E_{22}^* &= \left\{ \tilde{E}_2 + \tilde{z}_2(\tilde{V}^e) \right\} \tilde{V}^e
 \end{aligned}$$

$$E_{12}^* + E_{21}^* = \left\{ E_{12} + Z_{12}(\underline{v}^e) \right\} \underline{v}^e \quad (3.2.38)$$

que são as deformações não-lineares de membrana.

### 3.3 - Sistema global de equações não-lineares

A determinação do vetor de forças nodais equivalentes não-linear é feita a partir de um conjunto arbitrário de deslocamentos nodais e levando em consideração o comportamento físico do concreto armado, a não-linearidade geométrica e o histórico da deformação.

Na avaliação do incremento do trabalho interno, pode-se calcular o incremento total a partir dos incrementos elementares

$$\delta W_{TOT}^{INT} = \sum_{i=1}^{ne} \delta W^{INT, i} \quad (3.3.1)$$

pois na expressão do incremento do trabalho interno somente figuram derivadas parciais de primeira ordem e as funções de interpolação garantem a continuidade das funções representadas, não aparecendo termos adicionais em correspondência com as fronteiras inter-elementares.

As contribuições elementares valem, segundo a expressão (2.2.23), que dá a forma definitiva do Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\delta W^{INT, i} = \int_{S_e} \left\{ n_{\alpha\beta}^* \delta E_{\alpha\beta}^* + m_{\alpha\beta}^* \delta \chi_{\alpha\beta}^* + q_{\alpha}^* \delta \gamma_{\alpha}^* \right\} dS \quad (3.3.2)$$

No caso linear geométrico, para o qual a componente de deformação de membrana é dada por  $E_{\alpha\beta}^* = \epsilon_{\alpha\beta}^*$ , aplicando-se as deformações normalizadas dadas por (3.2.10), (3.2.13), (3.2.14), (3.2.20) e (3.2.25), chega-se a

$$\delta W^{INT, i} = \delta \underline{v}^{e, T} \underline{A}^{e, NL} \quad (3.3.3)$$

onde  $\underline{v}^{e, T}$ , vetor coluna que contém todas as incógnitas nodais do elemento, é dado por (3.2.11) e o vetor de forças nodais do

elemento por

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{e, NL} = \int_{S_e} \left\{ n_{11}^* E_{\tilde{1}}^T + n_{22}^* E_{\tilde{2}}^T + n_{12}^* E_{\tilde{12}}^T + m_{11}^* G_{\tilde{1}}^T \right. \\ \left. + m_{22}^* G_{\tilde{2}}^T + m_{12}^* G_{\tilde{12}}^T + q_1^* F_{\tilde{1}}^T + q_2^* F_{\tilde{2}}^T \right\} dS . \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Depois da discretização em elementos finitos, resulta, como consequência direta da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais dado em (2.2.23) para toda a estrutura

$$\delta \tilde{V}^T P_{\tilde{EXT}} = \sum \delta \tilde{V}^{e, T} \tilde{A}^{e, NL} . \quad (3.3.5)$$

O somatório do segundo membro pode ser escrito na forma

$$\delta \tilde{V}^T P_{\tilde{EXT}} = \delta \tilde{V}^T A_{\tilde{(V)}^e}^{NL} , \quad (3.3.6)$$

onde  $A_{\tilde{(V)}^e}^{NL}$ , é a montagem na estrutura da contribuição elementar dada por (3.3.4) e  $\tilde{V}$  o vetor global dos deslocamentos da estrutura.

Como  $\delta \tilde{V}^{e, T}$  é arbitrário, resulta finalmente a equação fundamental

$$P_{\tilde{EXT}} = A_{\tilde{(V)}^e}^{NL} , \quad (3.3.7)$$

onde  $P_{\tilde{EXT}}$  é o vetor global de cargas exteriores.

As solicitações internas  $n_{\alpha\beta}^*$ ,  $m_{\alpha\beta}^*$ ,  $q_\alpha^*$  deverão ser calculadas a partir do campo de deslocamentos interpolados de  $\tilde{V}^e$  e adequadas relações constitutivas para o material utilizado.

No caso não-linear geométrico, sabendo que

$$\delta \varepsilon_{11}^{*NL} = \delta Z_{\tilde{1}} V_{\tilde{1}}^e + Z_{\tilde{1}} \delta V_{\tilde{1}}^e = 2 \delta V_{\tilde{1}}^{e, T} Z_{\tilde{1}}^T$$

$$\delta \varepsilon_{22}^{*NL} = 2 \delta V_{\tilde{2}}^{e, T} Z_{\tilde{2}}^T$$

$$\delta(\varepsilon_{12}^{*NL} + \varepsilon_{21}^{*NL}) = 2 \delta \tilde{V}^{e,T} \tilde{Z}_{12}^T \quad (3.3.8)$$

o vetor de cargas nodais equivalentes não-linear fica

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{e,NL} = \int_{S_e} \left\{ n_{11}^* (E_{\tilde{1}}^T + 2 Z_{\tilde{1}}^T) + n_{22}^* (E_{\tilde{2}}^T + 2 Z_{\tilde{2}}^T) + n_{12}^* (E_{\tilde{12}}^T + 2 Z_{\tilde{12}}^T) \right. \\ \left. + m_{11}^* G_{\tilde{1}}^T + m_{22}^* G_{\tilde{2}}^T + m_{12}^* G_{\tilde{12}}^T + q_1^* F_{\tilde{1}}^T + q_2^* F_{\tilde{2}}^T \right\} dS . \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

A avaliação da integral se efetuará numericamente com 2x2 pontos de Gauss-Legendre de integração em domínio bidimensional.

Para um material elástico, isotrópico e homogêneo, o vetor de cargas nodais equivalentes (3.3.4) deve dar idêntico resultado do que o produto da matriz de rigidez pelo vetor de deslocamentos nodais

$$\tilde{A}^{e,L} = \tilde{K}^e \tilde{V}^e . \quad (3.3.10)$$

Em geral, em problemas de cascas de concreto armado, este fato não ocorre, resultando

$$\tilde{A}^{e,L} - \tilde{A}^{e,NL} \neq 0 . \quad (3.3.11)$$

Este vetor diferença, desequilíbrio, é uma medida do afastamento da solução linearizada para a verdadeira solução.

Na determinação do vetor de forças equivalentes lineares somente é levada em consideração a parte linear das deformações de membrana. As solicitações internas são calculadas a partir das equações constitutivas

$$\begin{aligned} n^{(\alpha\beta)} &= C H^{\alpha\beta\lambda\mu} \alpha_{(\lambda\mu)} \\ m^{(\alpha\beta)} &= D H^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{(\lambda\mu)} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

onde  $\alpha_{(\alpha\beta)}$  é a parte simétrica do tensor de deformações de membrana;  $\chi_{(\alpha\beta)}$  é a parte simétrica do tensor de mudanças de curvatura;  $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$  é o tensor elástico das cascas<sup>21</sup>; C e D são

as constantes elásticas de membrana e flexão dados por

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = 0,5 (v_{\beta|\alpha} + v_{\alpha|\beta} - 2 b_{\alpha\beta} w)$$

$$\chi_{(\alpha\beta)} = 0,5 \left[ \phi_{\beta|\alpha} + \phi_{\alpha|\beta} - (\epsilon_{\beta\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} + \epsilon_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda}) \phi \right]$$
(3.3.13)

$$C = \frac{E h}{1 - \nu^2} \quad ; \quad D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$
(3.3.14)

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = 0,5 \left[ (1 - \nu) (a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda}) + 2 \nu a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right]$$
(3.3.15)

onde :  $\nu$  = coeficiente de Poisson

$E$  = módulo elástico

$h$  = espessura

Substituindo  $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $D$  e  $C$  em (3.3.12), resulta

$$n^{(\alpha\beta)} = \frac{E h}{2(1-\nu^2)} \left[ (1 - \nu) (a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda}) + 2 \nu a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} \right] \alpha_{(\rho\lambda)}$$
(3.3.16)

Particularizando-se para  $\alpha=\beta=1$  e desenvolvendo, chega-se a

$$n^{(11)} = C \left\{ \left[ \left( \frac{a_{22}}{a} \right)^2 \alpha_{(11)} + \left[ (1-\nu) \left( - \frac{a_{12}}{a} \right)^2 + \nu \frac{a_{22} a_{11}}{a a} \right] \alpha_{(22)} + \left[ \frac{a_{22}}{a} \left( - \frac{a_{12}}{a} \right) (\alpha_{(12)} + \alpha_{(21)}) \right] \right\}$$
(3.3.17)

Sabendo que as componentes das solicitações físicas de membrana são dadas por

$$n_{\alpha\beta}^* = n^{(\alpha\beta)} \left( \frac{a_{\beta\beta}}{a_{\alpha\alpha}} \right)^{1/2}$$
(3.3.18)

e levando em consideração (2.1.4) e (2.1.5) é fácil chegar a

$$n_{11}^* = n^{(11)} \operatorname{sen} \theta a_{11} \quad (3.3.19)$$

onde o tensor dos esforços de membrana resulta

$$n^{(11)} = C \left\{ \frac{1}{(a_{11})^2 \operatorname{sen}^4 \theta} \alpha_{(11)} + \left[ \frac{\nu + (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)(1 - \nu)}{a_{11} a_{22} \operatorname{sen}^4 \theta} \right] \alpha_{(22)} - \frac{\cos \theta}{\alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sen}^4 \theta} (\alpha_{(12)} + \alpha_{(21)}) \right\}. \quad (3.3.20)$$

Substituindo (3.3.20) em (3.3.19) e lembrando as deformações generalizadas dadas em (2.2.27)

$$\epsilon_{11}^* = \frac{\alpha_{(11)}}{a_{11} \operatorname{sen} \theta}$$

$$\epsilon_{22}^* = \frac{\alpha_{(22)}}{a_{22} \operatorname{sen} \theta}$$

$$\epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^* = \frac{\alpha_{(12)} + \alpha_{(21)}}{\alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sen} \theta} \quad (3.3.21)$$

chega-se a

$$n_{11}^* = \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ \epsilon_{11}^* + (\cos^2 \theta (1 - \nu) + \nu) \epsilon_{22}^* - \cos \theta (\epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^*) \right\}. \quad (3.3.22)$$

De forma semelhante obtém-se

$$n_{22}^* = \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ \epsilon_{22}^* + (\cos^2 \theta (1 - \nu) + \nu) \epsilon_{11}^* - \cos \theta (\epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^*) \right\}$$

$$n_{12}^* = \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ -\cos \theta (\epsilon_{11}^* + \epsilon_{22}^*) + \left[ \frac{(1 - \nu)}{2} + \frac{(1 + \nu)}{2} \cos^2 \theta \right] (\epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^*) \right\}. \quad (3.3.23)$$

Para a momento fletor e torçor, analogamente, resulta

$$\begin{aligned}
 m_{11}^* &= \frac{D}{\text{sen}^2 \theta} \left\{ \chi_{11}^* + (\cos^2 \theta (1-\nu) + \nu) \chi_{22}^* - \cos \theta (\chi_{12}^* + \chi_{21}^*) \right\} \\
 m_{22}^* &= \frac{D}{\text{sen}^2 \theta} \left\{ \chi_{22}^* + (\cos^2 \theta (1-\nu) + \nu) \chi_{11}^* - \cos \theta (\chi_{12}^* + \chi_{21}^*) \right\} \\
 m_{12}^* &= \frac{D}{\text{sen}^2 \theta} \left\{ -\cos \theta (\chi_{11}^* + \chi_{22}^*) + \left[ \frac{(1-\nu)}{2} + \frac{(1+\nu)}{2} \cos^2 \theta \right] (\chi_{12}^* + \chi_{21}^*) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

onde as mudanças de curvatura generalizadas segundo (2.2.28) são definidas por

$$\begin{aligned}
 \chi_{11}^* &= \frac{\chi_{(11)}}{a_{11} \text{sen} \theta} \\
 \chi_{22}^* &= \frac{\chi_{(22)}}{a_{22} \text{sen} \theta} \\
 \chi_{12}^* + \chi_{21}^* &= \frac{\chi_{(12)} + \chi_{(21)}}{\alpha_1 \alpha_2 \text{sen} \theta} .
 \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Para o esforço de corte, partindo da equação constitutiva

$$q^\beta = G K h a^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \tag{3.3.26}$$

sendo  $\gamma_\alpha$  as componentes tensoriais das deformações por corte ; G o módulo elástico transversal e K o fator de redução para os esforços cortantes dados por

$$\gamma_\alpha = \phi_\alpha + w|_\alpha + b_\alpha^\lambda v_\lambda \tag{3.3.27}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad K = \frac{5}{6} \tag{3.3.28}$$

e considerando as componentes físicas

$$q_{\alpha}^* = \frac{q^{\alpha}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \quad (3.3.29)$$

chega-se a seguinte expressão para a componente física dos esforços cortantes

$$q_{\alpha} = \frac{G K h a^{\beta\alpha} \gamma_{\beta}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \quad (3.3.30)$$

Particularizando-se para  $\alpha=1$  e  $\alpha=2$  e lembrando as deformações generalizadas,  $\gamma_1^*$  e  $\gamma_2^*$ , dadas em (2.2.29), obtém-se

$$\begin{aligned} \gamma_1^* &= \frac{\gamma_1}{\alpha_1 \operatorname{sen}\theta} \\ \gamma_2^* &= \frac{\gamma_2}{\alpha_2 \operatorname{sen}\theta} \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

e

$$\begin{aligned} q_1^* &= G K h (\gamma_1^* - \cos\theta \gamma_2^*) \\ q_2^* &= G K h (\gamma_2^* - \cos\theta \gamma_1^*) \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Salienta-se que o trabalho interno das componentes físicas realizado sobre as deformações generalizadas é igual ao trabalho interno que as componentes tensoriais realizam sobre as deformações generalizadas tensoriais simétricas.

As ações lineares calculam-se substituindo (3.3.22), (3.3.23), (3.3.24) e (3.3.32) na equação geral (3.3.4).

### 3.4 - Matriz de rigidez

Para o caso linear elástico, as equações deduzidas permitem determinar a energia de deformação específica em forma matricial dentro de aproximações assumidas, isto é, como constituída por adição de três parcelas correspondentes a



membrana, flexo-torção e corte

$$\bar{U} = U_{\varepsilon} + U_{\chi} + U_{\gamma} \quad (3.4.1)$$

Cada parcela é definida pela expressão

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon} &= 0,5 C H^{\alpha\beta\lambda\mu} \alpha_{(\alpha\beta)} \alpha_{(\lambda\mu)} \\ U_{\chi} &= 0,5 D H^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{(\alpha\beta)} \chi_{(\lambda\mu)} \\ U_{\gamma} &= 0,5 G K h a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

A energia total pode ser calculada como a soma da energia de cada elemento, pelas mesmas considerações efetuadas anteriormente em relação ao vetor de forças nodais equivalentes

$$U_{TOT} = \sum^{ne} U^e \quad (3.4.3)$$

A energia elementar,  $U^e$ , é avaliada no sub-domínio  $S_e$  pela expressão

$$\begin{aligned} U^e &= \int_{S_e} \bar{U} ds = \int_{S_e} (U_{\varepsilon} + U_{\chi} + U_{\gamma}) ds \\ &= 0,5 \tilde{V}^{e,T} \tilde{K}^e \tilde{V}^e \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

onde  $\tilde{K}^e$  é a matriz de rigidez do elemento, constituída pelas parcelas referentes a membrana, flexo-torção e corte

$$\tilde{K}^e = \tilde{K}_{\varepsilon} + \tilde{K}_{\chi} + \tilde{K}_{\gamma} \quad (3.4.5)$$

Partindo das expressões (3.4.2) e considerando (3.3.13), (3.3.27), (3.3.21) (3.3.25) e (3.3.31), depois de um laborioso processo algébrico, chega-se as seguintes expressões para a energia de deformação

$$U_{\varepsilon} = \frac{C}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ (\varepsilon_{11}^*)^2 + (\varepsilon_{22}^*)^2 - 2 \cos \theta (\varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{21}^*) (\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) + \right. \\ \left. 2 [(1-\nu) \cos^2 \theta + \nu] \varepsilon_{11}^* \varepsilon_{22}^* + 0,5 [(1+\nu) \cos^2 \theta + \right. \\ \left. (1-\nu)] (\varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{21}^*)^2 \right\} \quad (3.4.6)$$

$$U_{\chi} = \frac{D}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ (\chi_{11}^*)^2 + (\chi_{22}^*)^2 - 2 \cos \theta (\chi_{12}^* + \chi_{21}^*) (\chi_{11}^* + \chi_{22}^*) \right. \\ \left. + 2 [(1-\nu) \cos^2 \theta + \nu] \chi_{11}^* \chi_{22}^* + 0,5 [(1+\nu) \cos^2 \theta \right. \\ \left. + (1-\nu)] (\chi_{12}^* + \chi_{21}^*)^2 \right\} \quad (3.4.7)$$

$$U_{\gamma} = 0,5 G K h \left\{ (\gamma_1^*)^2 + (\gamma_2^*)^2 - 2 \cos \theta \gamma_1^* \gamma_2^* \right\} \quad (3.4.8)$$

Para o caso de coordenadas ortogonais,  $\theta = 90^\circ$ ,  $U_{\varepsilon}$  resulta na expressão para o caso do estado plano de tensões em coordenadas cartesianas<sup>10</sup>.

Substituindo (3.2.10), (3.2.13), (3.2.14), (3.2.20) e (3.2.25) em (3.4.6), (3.4.7) e (3.4.8) e aplicando (3.4.4) e (3.4.5) resulta, para as parcelas da matriz de rigidez

$$K_{\varepsilon} = \int_{s_0} \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} E_{11}^T & E_{12}^T \\ E_{21}^T & E_{22}^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{array} \right] - \cos \theta \left[ \begin{array}{c} E_{12}^T (E_{11} + E_{22}) \\ (E_{11} + E_{22})^T E_{12} \end{array} \right] + \\ & \left[ (1-\nu) \cos^2 \theta + \nu \right] \left[ \begin{array}{cc} E_{11}^T & E_{22}^T \\ E_{22}^T & E_{11}^T \end{array} \right] + 0,5 \\ & \left[ (1+\nu) \cos^2 \theta + (1-\nu) \right] \left[ \begin{array}{cc} E_{12}^T & E_{12}^T \\ E_{12}^T & E_{12}^T \end{array} \right] \end{aligned} \right\} dS \quad (3.4.9)$$

$$K_{\chi} = \int_{s_0} \frac{D}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} G_{11}^T & G_{12}^T \\ G_{21}^T & G_{22}^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right] - \cos \theta \left[ \begin{array}{c} G_{12}^T (G_{11} + G_{22}) \\ (G_{11} + G_{22})^T G_{12} \end{array} \right] + \\ & \left[ (1-\nu) \cos^2 \theta + \nu \right] \left[ \begin{array}{cc} G_{11}^T & G_{22}^T \\ G_{22}^T & G_{11}^T \end{array} \right] + 0,5 \left[ (1+\nu) \right. \\ & \left. \cos^2 \theta + (1-\nu) \right] \left[ \begin{array}{cc} G_{12}^T & G_{12}^T \\ G_{12}^T & G_{12}^T \end{array} \right] \end{aligned} \right\} dS \quad (3.4.10)$$

$$K_{\gamma} = \int_{S_0} G K h \left\{ F_{\sim 1}^T F_{\sim 1} + F_{\sim 2}^T F_{\sim 2} - \cos\theta (F_{\sim 1}^T F_{\sim 2} + F_{\sim 2}^T F_{\sim 1}) \right\} dS. \quad (3.4.11)$$

A integração destas expressões efetua-se numericamente com integração reduzida de 2x2 pontos de Gauss-Legendre sobre domínio bidimensional.

O elemento diferencial de superfície média,  $dS$ , é dado por

$$dS = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 \quad (3.4.12)$$

sendo

$$\sqrt{a} = \sin\theta \alpha_1 \alpha_2 \quad (3.4.13)$$

ou, alternativamente

$$\sqrt{a} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & x_{a,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & x_{a,2} \\ \beta_{1a} & \beta_{2a} & \beta_{aa} \end{vmatrix}. \quad (3.4.14)$$

No caso de estruturas plissadas, onde elementos que concorrem a um mesmo nó são coplanares, ocorre uma singularidade na matriz de rigidez global, impossibilitando sua triangularização. Para contornar este problema, acrescenta-se uma pequena energia fictícia, associada aos graus de liberdade rotacionais, que destrói a singularidade sem afetar significativamente os resultados.

A matriz de rigidez dada em (3.4.9), (3.4.10) e (3.4.11) servirá como auxílio para linearizar o algoritmo de solução do sistema de equações não-lineares.

## 4 - INTEGRAÇÃO NA ESPESSURA

### 4.1- O modelo laminar

Em um modelo laminar, a seção transversal é subdividida em camadas de espessura  $d_i$  e coordenada central referida à superfície média, conforme figura 4.1 .

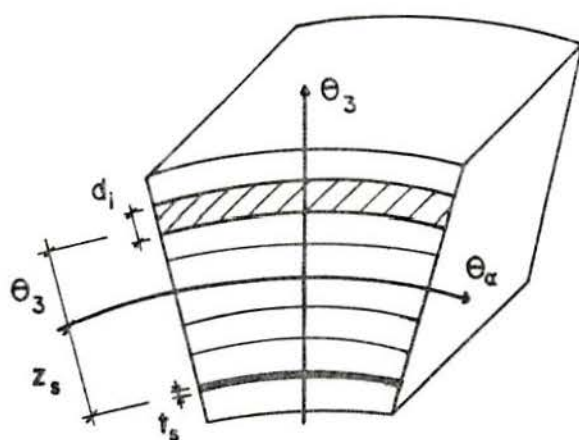


FIGURA 4.1 - Modelo laminar

A armadura é considerada como uma camada extra, com espessura equivalente  $t_s$  e localizada a uma distância  $z_s$  da superfície média.

As hipóteses assumidas para o modelo laminar são as seguintes<sup>33</sup>:

1) Os efeitos da fissuração e de toda e qualquer fonte localizada de descontinuidade do campo de deslocamentos considera-se dispersos em forma contínua nas vizinhanças da zona afetada, de modo que as deformações generalizadas médias são compatíveis e contínuas.

- 2) A uma distância  $\theta_3$  da superfície média, as deformações longitudinais das armaduras são iguais às deformações longitudinais do concreto circundante.
- 3) As armaduras são colocadas em camadas, formando uma malha retangular.
- 4) As armaduras estão sujeitas apenas a tensões uniaxiais.
- 5) A formulação fica restrita a ações de curta duração, não sendo levadas em consideração fluência, retração e fontes de auto-deformação.
- 6) A direção de uma das armaduras coincide com um dos eixos coordenados curvilíneos.

#### 4.2 - Deformações

Pode-se calcular as deformações de um ponto qualquer fora da superfície média pela expressão<sup>B</sup>

$$\gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{(\alpha\beta)} + \theta_3 \chi_{(\alpha\beta)} \quad (4.2.1)$$

Sabendo que as deformações normalizadas estão relacionadas com o tensor de deformações, conforme (2.2.27) e (2.2.28), por

$$\epsilon_{11}^* = \frac{\alpha_{(11)}}{a_{11} \operatorname{sen}\theta}$$

$$\epsilon_{22}^* = \frac{\alpha_{(22)}}{a_{22} \operatorname{sen}\theta}$$

$$\epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^* = \frac{\alpha_{(12)} + \alpha_{(21)}}{\alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sen}\theta}$$

$$\begin{aligned} \chi_{11}^* &= \frac{\chi_{(11)}}{a_{11} \operatorname{sen} \theta} \\ \chi_{22}^* &= \frac{\chi_{(22)}}{a_{22} \operatorname{sen} \theta} \\ \chi_{12}^* + \chi_{21}^* &= \frac{\chi_{(12)} + \chi_{(21)}}{\alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

e particularizando a expressão (4.2.1) para  $\alpha=\beta=1$ ;  $\alpha=\beta=2$  e  $\alpha=1, \beta=2$  resulta

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \gamma_{11}^* a_{11} \operatorname{sen} \theta \\ \gamma_{22} &= \gamma_{22}^* a_{22} \operatorname{sen} \theta \\ \gamma_{12} + \gamma_{21} &= (\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*) \alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= \epsilon_{11}^* + \theta_a \chi_{11}^* \\ \gamma_{22}^* &= \epsilon_{22}^* + \theta_a \chi_{22}^* \\ \gamma_{12}^* + \gamma_{21}^* &= (\epsilon_{12}^* + \epsilon_{21}^*) + \theta_a (\chi_{12}^* + \chi_{21}^*) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

são as deformações generalizadas normalizadas a uma distância  $\theta_a$  da superfície média.

Após a fissuração do concreto, a interação entre as duas direções principais é desprezível, viabilizando a utilização de equações constitutivas não-lineares unidimensionais.

Para a aplicação destas equações unidimensionais, ocorre a necessidade da determinação dos valores principais da deformação. A diagonalização de um tensor simétrico dá origem a um problema de valores próprios, de cuja solução resultam os valores e as direções principais.

Estuda-se o caso caracterizado pelo sistema de

equações homogêneas

$$(\gamma_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} \gamma) n^\alpha = 0 \quad (4.2.5)$$

onde

$\gamma$  = valores próprios do tensor de deformações

$\vec{n} = n^\alpha \vec{a}_\alpha$  = vetor unitário que definirá a direção principal associada com  $\gamma$ .

Uma solução não trivial obtém-se anulando o determinante dos coeficientes

$$|\gamma_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} \gamma| = 0 \quad (4.2.6)$$

do que resulta a equação característica

$$(\gamma_{11} - a_{11} \gamma)(\gamma_{22} - a_{22} \gamma) - (\gamma_{12} - a_{12} \gamma)^2 = 0. \quad (4.2.7)$$

Desenvolvendo a equação (4.2.7) e substituindo os valores encontrados em (4.2.3), chega-se a

$$\gamma^2 + [\cotg\theta (\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*) - \operatorname{cosec}\theta (\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*)] \gamma + [\gamma_{11}^* \gamma_{22}^* - (\gamma_{12}^*)^2] = 0. \quad (4.2.8)$$

Os valores principais  $\gamma$  são independentes do sistema de coordenadas, ou seja, os coeficientes da equação característica (4.2.8) são invariantes de deformações. Introduzindo a notação

$$\begin{aligned} I_1 &= (\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*) \cotg\theta - (\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*) \operatorname{cosec}\theta \\ I_2 &= \gamma_{11}^* \gamma_{22}^* - (\gamma_{12}^*)^2 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

resulta, para a expressão (4.2.8)

$$\gamma^2 + I_1 \gamma + I_2 = 0. \quad (4.2.10)$$

A solução da equação (4.2.10) fornece as deformações principais

$$\gamma_1 = -\frac{I_1}{2} + \left[ \left( \frac{I_1}{2} \right)^2 - I_2 \right]^{1/2}$$

$$\gamma_{11} = -\frac{I_1}{2} - \left[ \left( \frac{I_1}{2} \right)^2 - I_2 \right]^{1/2} . \quad (4.2.11)$$

Para a determinação das direções principais, refere-se o vetor  $\vec{n}$  à base unitária  $\vec{t}_\alpha$ .

$$\vec{n} = n^\alpha \vec{t}_\alpha = n_1^* \vec{t}_1 + n_2^* \vec{t}_2 \quad (4.2.12)$$

onde

$$n_1^* = n^1 (a_{11})^{1/2}$$

$$n_2^* = n^2 (a_{22})^{1/2} . \quad (4.2.13)$$

Desenvolvendo o sistema dado em (4.2.5) e substituindo os valores encontrados em (4.2.3), tem-se

$$(\gamma_{11}^* \operatorname{sen} \theta - \gamma) n_1^* + (\gamma_{21}^* \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \gamma) n_2^* = 0$$

$$(\gamma_{12}^* \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \gamma) n_1^* + (\gamma_{22}^* \operatorname{sen} \theta - \gamma) n_2^* = 0 . \quad (4.2.14)$$

Definindo

$$A_{11} = \gamma_{11}^* \operatorname{sen} \theta - \gamma$$

$$A_{12} = \gamma_{21}^* \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \gamma$$

$$A_{22} = \gamma_{22}^* \operatorname{sen} \theta - \gamma \quad (4.2.15)$$

resulta, para o sistema dado em (4.2.14)

$$A_{11} n_1^* + A_{12} n_2^* = 0$$

$$A_{12} n_1^* + A_{22} n_2^* = 0 . \quad (4.2.16)$$

Obtém-se uma equação adicional pelo fato do vetor  $\vec{n}$



ser um vetor unitário

$$(n_1^*)^2 + (n_2^*)^2 + 2 n_1^* n_2^* \cos\theta = 1 \quad (4.2.17)$$

Na solução do sistema, distinguem-se dois casos :

a)  $A_{11} \neq 0$

$$n_2^* = \left[ \frac{1}{1 + (A_{12}/A_{11})^2 - 2 (A_{12}/A_{11}) \cos\theta} \right]^{1/2}$$

$$n_1^* = - \frac{A_{12}}{A_{11}} n_2^* \quad (4.2.18)$$

b)  $A_{22} \neq 0$

$$n_1^* = \left[ \frac{1}{1 + (A_{12}/A_{22})^2 - 2 (A_{12}/A_{22}) \cos\theta} \right]^{1/2}$$

$$n_2^* = - \frac{A_{12}}{A_{22}} n_1^* \quad (4.2.19)$$

Os valores encontrados para  $n_1^*$  e  $n_2^*$  dão as componentes do vetor direção principal,  $\vec{n}$ , na base unitária.

#### 4.3 - Tensões

No modelo físico para o concreto que será adotado, assume-se que as direções principais de deformação coincidam com as de tensão. Desta forma, uma vez adotada uma equação constitutiva unidimensional equivalente e aplicando-a independentemente em cada direção principal, ficam definidas as tensões principais e em forma indireta o estado de tensões associado com as coordenadas de superfície. Faz-se necessário obter as tensões referidas ao sistema curvilíneo, a partir das respectivas tensões principais.

Para determinar as tensões  $\tau_{\alpha\beta}^*$  associadas ao sistema curvilíneo  $\theta^\alpha$  aborda-se o problema de valores próprios do tensor de tensões, que fica caracterizado pelo sistema homogêneo

$$(\sigma^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta} \sigma) n_{\alpha} = 0 \quad (4.3.1)$$

onde  $\sigma$  é a tensão principal.

Pode-se representar o vetor  $\vec{n}$  por

$$\vec{n} = \bar{n}_1^* \vec{t}^1 + \bar{n}_2^* \vec{t}^2 \quad (4.3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{n}_1^* &= n_1 \sqrt{a^{11}} \\ \bar{n}_2^* &= n_2 \sqrt{a^{22}} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Estas novas componentes das direções principais estão ligadas com  $n_1^*$  e  $n_2^*$  por

$$\begin{aligned} \bar{n}_1^* &= \operatorname{cosec} \theta n_1^* + \operatorname{cotg} \theta n_2^* \\ \bar{n}_2^* &= \operatorname{cosec} \theta n_2^* + \operatorname{cotg} \theta n_1^* \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Desenvolvendo o sistema (4.3.1) e considerando

$$\begin{aligned} \tau_{11}^* &= \operatorname{sen} \theta a_{11} \sigma^{11} \\ \tau_{22}^* &= \operatorname{sen} \theta a_{22} \sigma^{22} \\ \tau_{12}^* &= \tau_{21}^* = \operatorname{sen} \theta \alpha_1 \alpha_2 \sigma^{12} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

resulta

$$\begin{aligned} \left( \tau_{11}^* - \frac{\sigma}{\operatorname{sen} \theta} \right) \bar{n}_1^* + (\tau_{12}^* + \sigma \operatorname{cotg} \theta) \bar{n}_2^* &= 0 \\ (\tau_{12}^* + \sigma \operatorname{cotg} \theta) \bar{n}_1^* + (\tau_{22}^* + \sigma \operatorname{cosec} \theta) \bar{n}_2^* &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Particularizando o sistema (4.3.6) para os valores principais  $\sigma_I$  e  $\sigma_{II}$  e resolvendo, chega-se a

$$\tau_{11}^* = \left\{ C_1 (\bar{n}_2^{*II})^2 - C_2 (\bar{n}_2^{*I})^2 \right\} \frac{1}{\Delta}$$

$$\tau_{22}^* = \left\{ C_1 (\bar{n}_1^{*II})^2 - C_2 (\bar{n}_1^{*I})^2 \right\} \frac{1}{\Delta} \quad (4.3.7)$$

onde

$$C_1 = \sigma_I \left\{ -(\bar{n}_1^{*I})^2 + (\bar{n}_2^{*I})^2 \right\} \operatorname{cosec} \theta$$

$$C_2 = \sigma_{II} \left\{ -(\bar{n}_1^{*II})^2 + (\bar{n}_2^{*II})^2 \right\} \operatorname{cosec} \theta$$

$$\Delta = -(\bar{n}_1^{*I})^2 (\bar{n}_2^{*II})^2 + (\bar{n}_1^{*II})^2 (\bar{n}_2^{*I})^2 . \quad (4.3.8)$$

Para a tensão  $\tau_{12}^*$  resulta dois casos

$$- \left| \bar{n}_2^{*I} \right| \geq \left| \bar{n}_1^{*I} \right|$$

$$\tau_{12}^* = -(\tau_{11}^* - \sigma_I \operatorname{cosec} \theta) \frac{\bar{n}_1^{*I}}{\bar{n}_2^{*I}} - \sigma_I \operatorname{cotg} \theta \quad (4.3.9)$$

$$- \left| \bar{n}_1^{*I} \right| > \left| \bar{n}_2^{*I} \right|$$

$$\tau_{12}^* = -(\tau_{22}^* - \sigma_I \operatorname{cosec} \theta) \frac{\bar{n}_2^{*I}}{\bar{n}_1^{*I}} - \sigma_I \operatorname{cotg} \theta . \quad (4.3.10)$$

Para a solução dada acima, resulta  $\Delta=0$  no caso em que uma das direções principais forma um ângulo de  $45^\circ$  com uma das direções do sistema curvilíneo. Para contornar este problema, utiliza-se, nestes casos

$$\tau_{11}^* = \frac{C_1 \bar{n}_2^{*II} - C_2 \bar{n}_2^{*I}}{\Delta}$$

$$\tau_{22}^* = \frac{C_2 \bar{n}_1^{*I} - C_1 \bar{n}_1^{*II}}{\Delta}$$

$$\tau_{12}^* = \frac{C_2 \bar{n}_1^{*I} - C_1 \bar{n}_1^{*II}}{\Delta} \quad (4.3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= \bar{n}_1^{*I} \bar{n}_2^{*II} - \bar{n}_1^{*II} \bar{n}_2^{*I} \\ C_1 &= \operatorname{cosec} \theta \sigma_I \bar{n}_1^{*I} - \cotg \theta \sigma_I \bar{n}_2^{*I} \\ C_2 &= \operatorname{cosec} \theta \sigma_{II} \bar{n}_1^{*II} - \cotg \theta \sigma_{II} \bar{n}_2^{*II} \\ C_{11} &= \operatorname{cosec} \theta \sigma_I \bar{n}_2^{*I} - \cotg \theta \sigma_I \bar{n}_1^{*I} \\ C_{22} &= \operatorname{cosec} \theta \sigma_{II} \bar{n}_2^{*II} - \cotg \theta \sigma_{II} \bar{n}_1^{*II} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Com as expressões obtidas pode-se determinar as tensões no concreto.

#### 4.4 - Deformações e tensões na armadura

Para a armadura, porém, não se pode entrar com os valores principais de deformação na relação constitutiva unidimensional, pois, normalmente, as direções principais não coincidem com as direções das armaduras e estas só resistem a esforços de tração/compressão ao longo de seu eixo. Faz-se necessário calcular as deformações nas direções das armaduras. Com este intuito, acha-se o ângulo  $\alpha$  que uma das direções principais forma com uma das armaduras.

Conforme figura 4.2, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \bar{n}_2^* \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{cos} \alpha &= \bar{n}_1^* + \bar{n}_2^* \operatorname{cos} \theta \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Como serão utilizadas somente armaduras ortogonais, a transformação fica caracterizada pela matriz de rotação

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

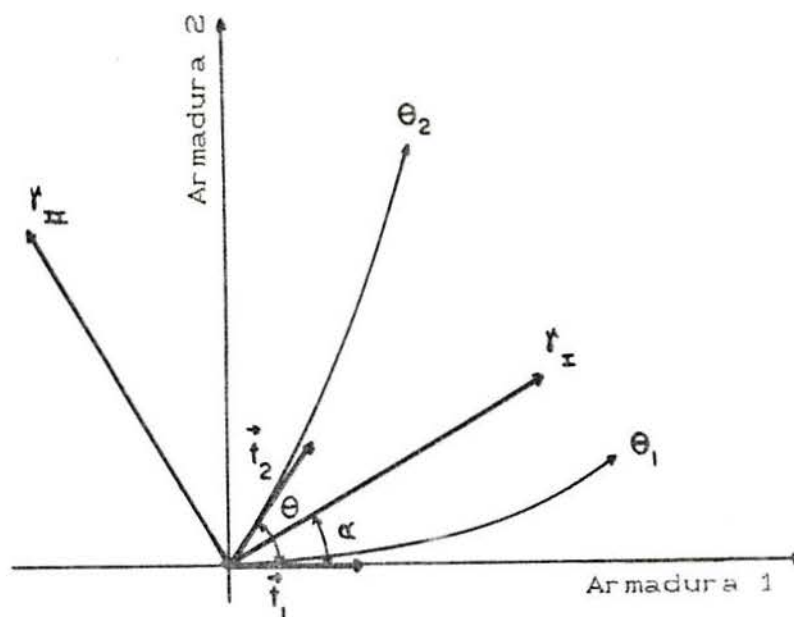


FIGURA 4.2 - Ângulo  $\alpha$  entre as armaduras e as direções principais

As deformações correspondentes às direções das armaduras, aplicando a matriz de rotação, vem dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{e11} &= \cos^2 \alpha \gamma_I + \sin^2 \alpha \gamma_{II} \\ \gamma_{e22} &= \cos^2 \alpha \gamma_{II} + \sin^2 \alpha \gamma_I \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

onde  $\gamma_I$  e  $\gamma_{II}$  são as deformações no nível das armaduras e nas direções principais. As deformações  $\gamma_{e12}$  e  $\gamma_{e21}$  são desprezadas.

Entrando na relação tensão-deformação do aço com estas deformações,  $\gamma_{e11}$  e  $\gamma_{e22}$ , obtém-se as tensões na armadura,  $\sigma_{e1}$  e  $\sigma_{e2}$ , dadas nas direções das armaduras. As tensões referidas ao sistema curvilíneo, conforme figura 4.3 ,

são obtidas através da lei de transformação de tensores contravariantes

$$\bar{\tau}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^n} \tau^{mn}$$

$$\bar{x}_1 = x_1 - x_2 \cotg\theta$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2}{\text{sen}\theta} \quad (4.4.4)$$

Particularizando-se (4.4.4) para  $\alpha=\beta=1$  ;  $\alpha=\beta=2$  e  $\alpha=1$  ,  $\beta=2$  , chega-se a

$$\tau_{11}^* = \sigma_{e1} + \cotg^2\theta \sigma_{e2}$$

$$\tau_{22}^* = \text{cossec}^2\theta \sigma_{e2}$$

$$\tau_{12}^* = \tau_{21}^* = -\cotg\theta \text{cossec}\theta \sigma_{e2} \quad (4.4.5)$$

que dão os valores das tensões nas armaduras referidas ao sistema curvilíneo.

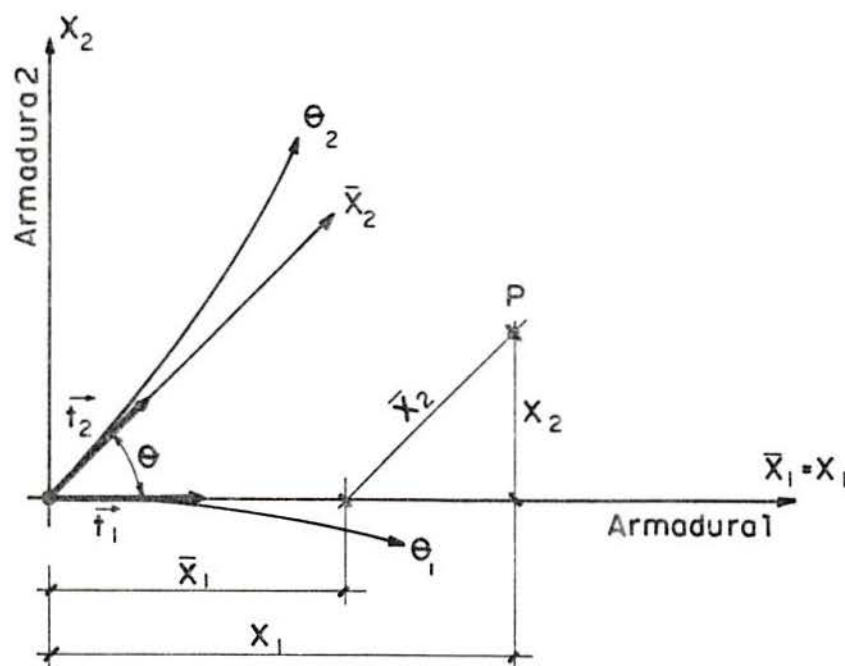


FIGURA 4.3 - Transformação de coordenadas

#### 4.5 - Tensões generalizadas

A formulação obtida em 4.3 e 4.4 permite conhecer a distribuição de tensões internas ao longo da espessura. A seguir, se determinará um sistema equivalente atuante na superfície média.

Conforme a figura 4.4, a força exercida sobre um elemento diferencial pertencente à superfície  $\theta_1 = \text{constante}$  vale

$$\vec{t}_1 dS_1 = \vec{T}_1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (4.5.1)$$

onde

$\vec{t}_1$  = vetor tensão definido em forma convencional

$\vec{T}_1$  = vetor tensão definido em termos dos diferenciais das coordenadas curvilíneas.

O comprimento de arco  $ds_2$  na superfície média é dado por

$$ds_2 = \sqrt{a_{11}} d\theta^2 \quad (4.5.2)$$

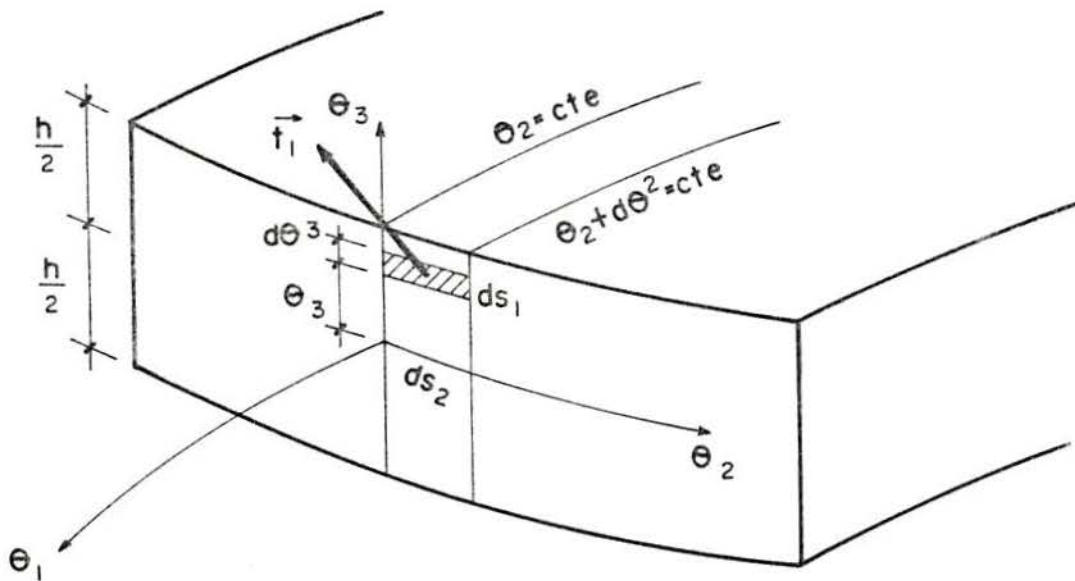


FIGURA 4.4 - Tensões ao longo da espessura

As forças desenvolvidas em  $\theta_1 = \text{constante}$ , na região entre  $\theta_2$  e  $\theta_2 + d\theta^2$ , serão substituídas por um sistema equivalente, constituído por uma força distribuída atuante sobre  $ds_2$  e um binário ou momento, também distribuído ao longo da linha coordenada  $\theta_2$ .

A força e o momento de redução são dados por, aplicando (4.5.1) e (4.5.2)

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 ds_2 &= \vec{n}_1 \sqrt{a a^{11}} d\theta^2 = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{T}_1 d\theta^2 d\theta^a \\ \vec{m}_1 ds_2 &= \vec{m}_1 \sqrt{a a^{11}} d\theta^2 = \int_{-h/2}^{h/2} (\vec{a}_a \times \vec{T}_1) \theta_a d\theta^2 d\theta^a\end{aligned}\quad (4.5.3)$$

onde  $\vec{n}_1$  é a resultante física e  $\vec{m}_1$  é o momento resultante físico, ambos medidos por unidade de comprimento na superfície média.

Após algumas operações matemáticas e generalizando, chega-se a

$$\begin{aligned}\vec{n}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a a^{\alpha\alpha}}} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{T}_\alpha d\theta^a \\ \vec{m}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a a^{\alpha\alpha}}} \int_{-h/2}^{h/2} (\vec{a}_a \times \vec{T}_\alpha) \theta_a d\theta^a.\end{aligned}\quad (4.5.4)$$

Sabendo que

$$\vec{T}_1 = (\sigma^{i\lambda} \vec{a}_\lambda + \sigma^{ia} \vec{a}_a) \sqrt{a} \quad (4.5.5)$$

onde  $\sigma^{i\lambda}$  e  $\sigma^{ia}$  são componentes do tensor de tensões, resulta

$$\begin{aligned}\vec{n}_\alpha \sqrt{a^{\alpha\alpha}} &= n^{\alpha\rho} \vec{a}_\rho + q^\alpha \vec{a}_a \\ \vec{m}_\alpha \sqrt{a^{\alpha\alpha}} &= m^{\alpha\rho} \vec{a}_a \times \vec{a}_\rho\end{aligned}\quad (4.5.6)$$

onde



$$n^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} d\theta^a$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} \theta_a d\theta^a \quad (4.5.7)$$

são os tensores de superfície das sollicitações de membrana e momentos, respectivamente<sup>21</sup>.

Analogamente, pode-se escrever

$$n_{11}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{11}^* d\theta^a$$

$$n_{22}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{22}^* d\theta^a$$

$$n_{12}^* = n_{21}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}^* d\theta^a$$

$$m_{11}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{11}^* \theta_a d\theta^a$$

$$m_{22}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{22}^* \theta_a d\theta^a$$

$$m_{12}^* = m_{21}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}^* \theta_a d\theta^a \quad (4.5.8)$$

que são as componentes físicas das sollicitações de membrana e dos momentos referidos à superfície média e por unidade de comprimento.

## 5 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

### 5.1 Generalidades

As relações constitutivas uniaxiais para o aço e o concreto são introduzidas através de curvas tensão-deformação baseadas em resultados experimentais.

Adotou-se modelos unidimensionais para simular o comportamento do concreto armado pois, depois da fissuração do concreto, cada direção funciona independentemente, sendo a interação entre as mesmas desprezível.

Para o concreto, as relações tensão-deformação são estabelecidas entre valores principais. A armadura, porém, só resiste a esforços em seu próprio eixo; portanto, as relações tensão-deformação são estabelecidas para valores dados na direção da armadura.

O concreto apresenta comportamento diferenciado quando solicitado à compressão e à tração. Desta forma, utiliza-se modelos distintos para as duas situações. Já para o aço, o comportamento é simétrico nas duas solicitações.

Para o concreto comprimido, o modelo é histerético degradativo; para o aço, é elasto-plástico com histerese e para o concreto tracionado é tri-linear degradativo.

A seguir serão apresentados os modelos matemáticos adotados para representar as curvas tensão-deformação para os materiais componentes do concreto armado.

### 5.2- Relação constitutiva para o concreto à compressão

O modelo matemático adotado para a relação tensão-deformação do concreto à compressão é o apresentado por BLAKELEY e PARK<sup>11</sup>.

O diagrama apresenta uma curva tensão-deformação ABCD que caracteriza o comportamento para uma seqüência monotônica

de incrementos de carga e laços histeréticos para representar os decréscimos e posteriores incrementos de carga, conforme figura 5.1.

Os parâmetros necessários para implementar o modelo são os seguintes :

- $\epsilon_o$  : deformação específica no concreto correspondente à tensão  $f_c$ ;
- $f_c$  : resistência à compressão cilíndrica do concreto ( $\text{KN/cm}^2$ );
- $\epsilon_c$  : deformação específica do concreto à compressão;
- $E_c$  : módulo de deformação longitudinal do concreto tangente na origem;
- $\epsilon_{20_c}$  : deformação específica no concreto correspondente a uma tensão  $0,2 f_c$ .

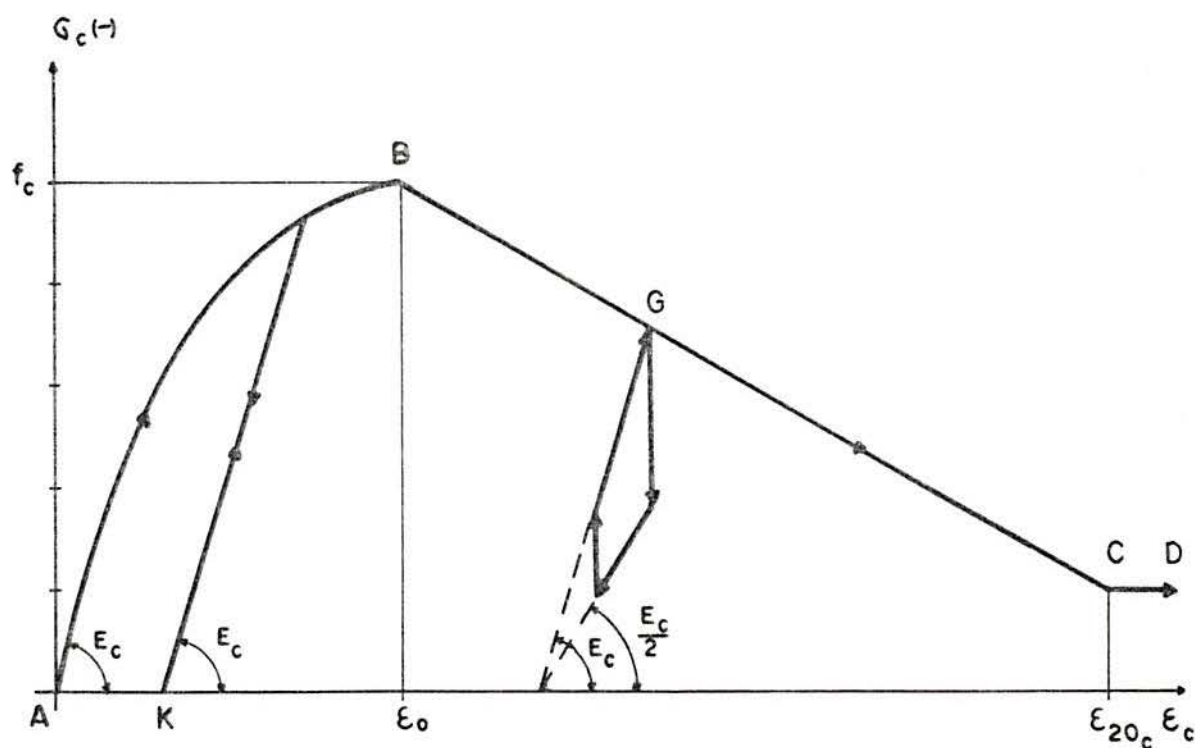


FIGURA 5.1 - Modelo para o concreto à compressão

A seguir são apresentadas as expressões analíticas do modelo :

TRECHO AB :  $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_o$

$$\sigma_c = f_c \left[ 2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_o} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_o} \right)^2 \right] \quad (\text{KN/cm}^2) \quad (5.2.1)$$

$$\varepsilon_o = \frac{2 f_c}{E_c} \quad (5.2.2)$$

TRECHO BC :  $\varepsilon_o < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20c}$

$$\sigma_c = f_c [ 1 - Z (\varepsilon_c - \varepsilon_o) ] \quad (\text{KN/cm}^2) \quad (5.2.3)$$

$$Z = \frac{0,5}{\varepsilon_{50\mu} - \varepsilon_o} \quad ; \quad \varepsilon_{50\mu} = \frac{3 + 2,9 f_c}{1450 f_c - 1000} \quad (5.2.4)$$

TRECHO CD :  $\varepsilon_c > \varepsilon_{20c}$

$$\sigma_c = 0,2 f_c \quad (\text{KN/cm}^2) \quad (5.2.5)$$

onde:

$\sigma_c$  : tensão de compressão no concreto (  $\text{KN/cm}^2$  ) ;

Z : inclinação do ramo descendente da curva envoltória;

$\varepsilon_{50\mu}$  : deformação específica correspondente a uma tensão  $0,5 f_c$  no ramo descendente da curva para concreto não-confinado.

Os ciclos histeréticos podem ser visualizados na figura 5.1. No trecho AB, onde a deformação é menor que  $\varepsilon_o$ , a descarga e a recarga são lineares sobre a mesma reta de inclinação  $E_c$ . No trecho BC, a descarga é bi-linear; primeiro, a tensão se reduz em 50% sem redução da deformação; após, segue uma reta de inclinação  $0,5 E_c$ . Ao recarregar a partir de uma

tensão igual a zero, o caminho é linear de inclinação  $E_c$  até encontrar a reta BC.

### 5.3- Relação constitutiva para o concreto à tração

O modelo adotado para o concreto à tração é o proposto por VEBO e GHALI<sup>35</sup> modificado. Esta relação depende apenas do conhecimento da resistência cilíndrica à compressão,  $f_c$ , e do módulo de deformação longitudinal do concreto,  $E_c$ . Outros modelos mais apurados levam em consideração outros parâmetros, tais como a espessura da estrutura.

O diagrama é composto por uma função tri-linear degradativa para simular a rigidez adicional que aparece na seção de concreto fissurada devido a colaboração das zonas não alteradas entre fissuras.

Na figura 5.2 está representado o diagrama proposto, onde  $E_c$  é o módulo de deformação longitudinal do concreto tangente na origem e  $f_t$  é a resistência à tração máxima do concreto dada por<sup>2</sup>

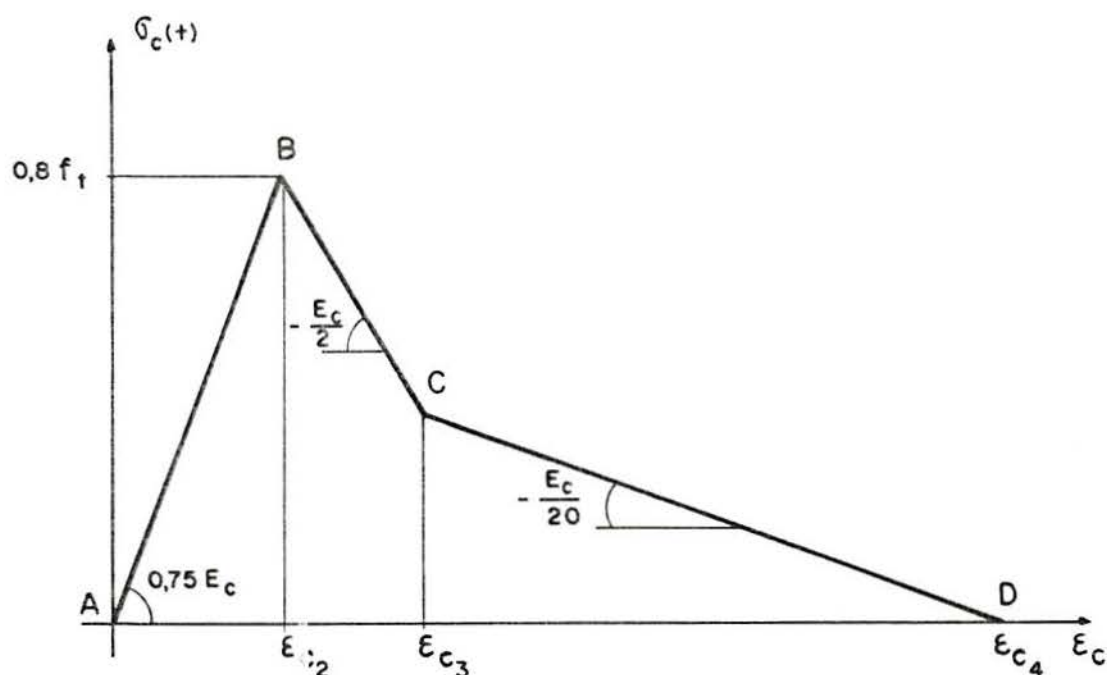


FIGURA 5.2 - Modelo para o concreto à tração

$$f_t = 6,25 \sqrt{10} f_c \quad (\text{KN/cm}^2) \quad (5.3.1)$$

5.2 As deformações  $\epsilon_{c2}$ ,  $\epsilon_{c3}$  e  $\epsilon_{c4}$  resultam, pela figura

$$\begin{aligned} \epsilon_{c2} &= \frac{1,07 f_t}{E_c} \\ \epsilon_{c3} &= \frac{1,87 f_t}{E_c} \\ \epsilon_{c4} &= \frac{9,97 f_t}{E_c} \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

A inclinação da reta em cada trecho está representada na figura 5.2.

O ponto de origem da relação tensão-deformação de tração, A, corresponde, nas curvas de compressão, ao ponto no qual a tensão é igual a zero.

#### 5.4- Relação constitutiva para o aço

As armaduras serão substituídas por membranas de espessura equivalente  $t_e$ , que só admitem tração/compressão nas direções das mesmas.

O modelo utilizado para o aço será o proposto por AGRAWAL, TULIN e GERSTLE<sup>1</sup>, que permite a análise de problemas sujeitos a cargas alternativas e possui comportamento quase simétrico para compressão e tração.

O diagrama proposto, elasto-plástico com histerese, é apresentado na figura 5.3, onde

- $f_y$  : resistência de escoamento do aço à tração;
- $\epsilon_e$  : deformação no aço medida a partir da origem, C ou F;
- $\sigma_e$  : tensão no aço correspondente à deformação  $\epsilon_e$ .

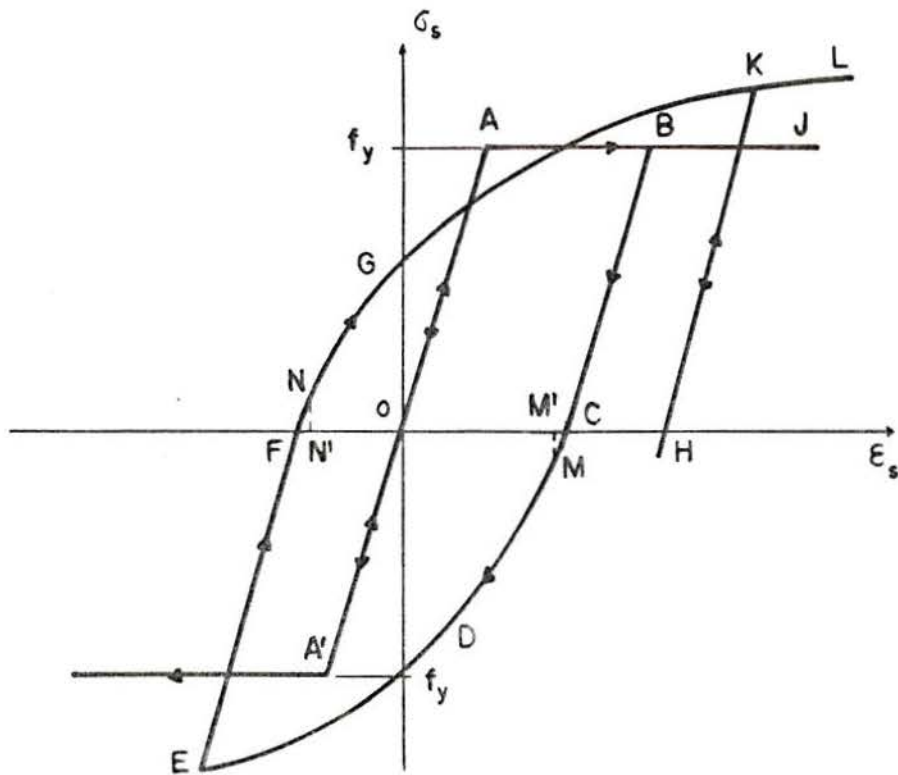


FIGURA 5.3 - Modelo para o aço

O diagrama é composto pelos seguintes trechos :

- OA : Trecho ascendente de carga limitado pela resistência de escoamento do aço à tração.
- AB : Trecho de carga onde as deformações aumentam sem haver aumento nas tensões.
- BC : Trecho de descarga linear, paralelo a OA.
- CDE : Trecho curvo de descarga. A partir de C, a tensão passa a ser de compressão. O ponto M é a interseção da curva correspondente ao ramo DE com a reta obtida prolongando-se o ramo BC. A expressão analítica da curva DE é dada por

$$\sigma_s = \pm \left[ 1,22 - (0,838)^{\frac{1000 \varepsilon_s}{\sigma_s}} \right] f_y \quad (\text{KN/cm}^2)$$

(5.4.1)

EF : Trecho linear de recarga de inclinação igual a OA.

FGK : Trecho curvo de recarga análogo à CDE.

Na descarga, se a tensão na armadura não ultrapassar o ponto M, ao recarregar as tensões seguem o caminho MB e após BJ. Em forma aproximada,  $\sigma_{e(M)} = 0,36 f_y$ . No ramo AA' o comportamento é elástico-linear. Depois de completar um ciclo, se a armadura é descarregada a partir do ponto K, uma curva similar a BCME deve ser traçada e o ciclo se repetirá. Se na curva de descarga KH há recarga antes da entrada no ramo não-linear, o mesmo caminho HK deve ser seguido e após KL.



## 6 - CRITÉRIO DE DIMENSIONAMENTO

### 6.1 - Componentes tensoriais das tensões generalizadas no sistema e métrica cartesianos

Com o objetivo de verificar, pela comparação de resultados, a influência da não-linearidade física na capacidade final de carga de uma estrutura, introduz-se um critério de dimensionamento<sup>2º</sup>.

Da análise linear da estrutura resulta um estado de tensões generalizadas normalizadas na superfície média referidas ao sistema curvilíneo  $\theta_1, \theta_2$  conforme figura 6.1 .

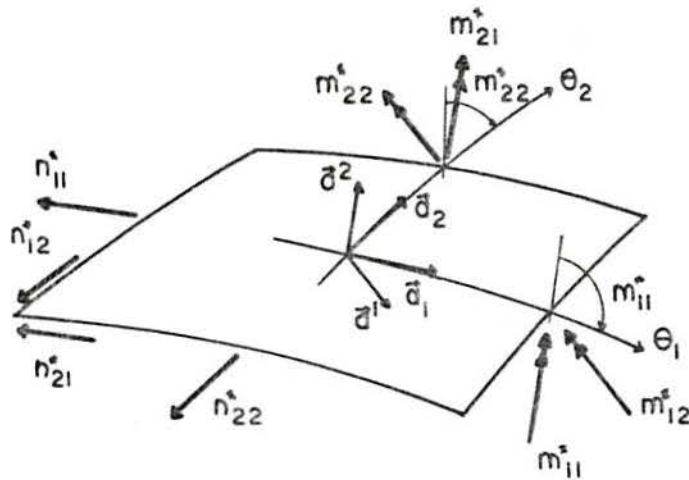


FIGURA 6.1 - Tensões generalizadas referidas ao sistema curvilíneo

Para se fazer o dimensionamento da estrutura, necessita-se das componentes das tensões generalizadas no sistema cartesiano.

A transformação de tensores contravariantes de segunda ordem fica caracterizada por

$$\bar{A}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{\theta}^\alpha}{\partial \theta^\lambda} \frac{\partial \bar{\theta}^\beta}{\partial \theta^\mu} A^{\lambda\mu} \quad (6.1.1)$$

Em cada ponto P da superfície média, por projeção no plano tangente das curvas coordenadas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , obtém-se um par de eixos retilíneos esconsos,  $x_1$  e  $x_2$ . Adotando  $\bar{x}_1 = x_1$  e  $\bar{x}_2$  normal aos anteriores no plano tangente, fica definido um sistema ortogonal, nas direções das armaduras, para o qual adota-se a métrica cartesiana.

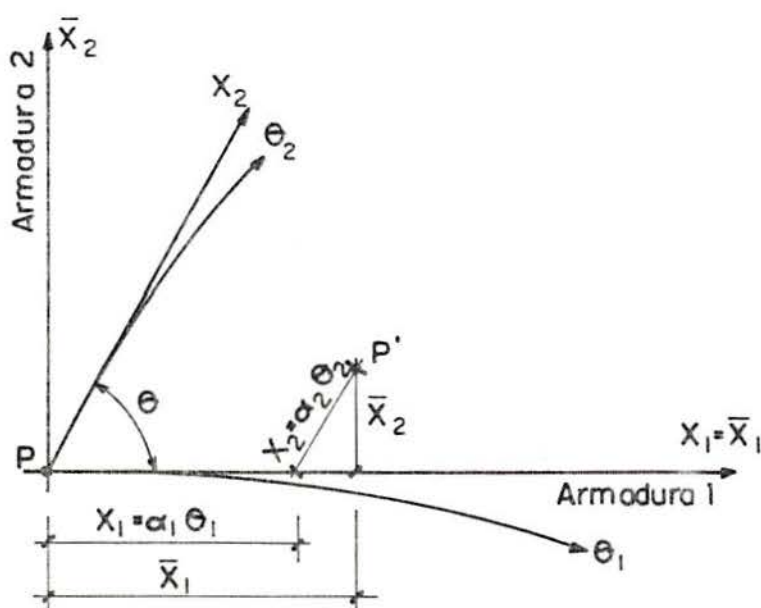


FIGURA 6.2. - Sistema de referência  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$ , no plano tangente

Nas vizinhanças do ponto P em consideração, pode-se escrever

$$\bar{x}_1 = \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 \cos \theta$$

$$\bar{x}_2 = \alpha_2 \theta_2 \sin \theta \quad (6.1.2)$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta_1} &= \alpha_1 & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta_2} &= \alpha_2 \cos \theta \\
 \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \theta_1} &= 0 & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \theta_2} &= \alpha_2 \sin \theta
 \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

com  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  dados por (2.1.15).

Com as componentes normalizadas de esforços e momentos dadas por (3.3.22), (3.3.23) e (3.3.24), calcula-se, por (2.2.24) e (2.2.25), as respectivas componentes tensoriais

$$\begin{aligned}
 n^{11} &= \frac{n_{11}^*}{a_{11} \sin \theta} \\
 n^{22} &= \frac{n_{22}^*}{a_{22} \sin \theta} \\
 n^{12} &= \frac{n_{12}^*}{\alpha_1 \alpha_2 \sin \theta} \\
 m^{11} &= \frac{m_{11}^*}{a_{11} \sin \theta} \\
 m^{22} &= \frac{m_{22}^*}{a_{22} \sin \theta} \\
 m^{12} &= \frac{m_{12}^*}{\alpha_1 \alpha_2 \sin \theta}
 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Particularizando (6.1.1) para momentos e esforços normais e substituindo os valores encontrados em (6.1.3) e (6.1.4) resulta

$$\begin{aligned}
 \bar{m}^{11} &= \frac{n_{11}^*}{\sin \theta} + 2 \cos \theta \frac{m_{21}^*}{\sin \theta} + \cos^2 \theta \frac{m_{22}^*}{\sin \theta} \\
 \bar{n}^{11} &= \frac{n_{11}^*}{\sin \theta} + 2 \cos \theta \frac{n_{21}^*}{\sin \theta} + \cos^2 \theta \frac{n_{22}^*}{\sin \theta}
 \end{aligned}$$

$$\bar{m}^{22} = \text{sen}\theta m_{22}^*$$

$$\bar{n}^{22} = \text{sen}\theta n_{22}^*$$

$$\bar{m}^{12} = m_{12}^* + \text{cos}\theta m_{22}^*$$

$$\bar{n}^{12} = n_{12}^* + \text{cos}\theta n_{22}^* \quad . \quad (6.1.5)$$

As componentes  $\bar{m}^{\alpha\beta}$  e  $\bar{n}^{\alpha\beta}$  são tensoriais, referidas ao sistema cartesiano e, conseqüentemente, são normalizadas.

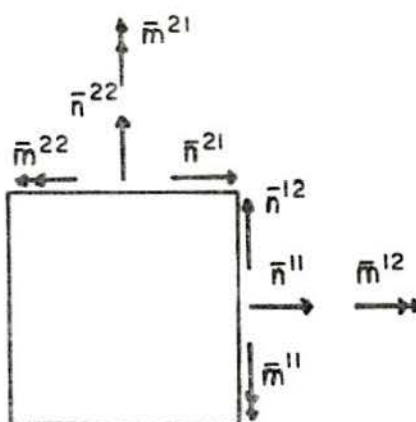


FIGURA 6.3 - Componentes tensoriais das tensões referidas ao sistema cartesiano

A figura 6.3 mostra o estado de tensões resultante.

## 6.2. - Forças equivalentes

O estado de solicitação das cascas é muito complexo e pode-se adotar diversas formas simplificadas para o seu dimensionamento. Segue aqui um critério simplificado<sup>2º</sup>, que consiste em substituir as resultantes de tensões por um sistema

estaticamente equivalente atuante nas direções das armaduras.

Analisando um corte transversal da estrutura, conforme mostra a figura 6.4, chega-se as seguintes expressões para as forças equivalentes nas armaduras

- Armadura superior

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{-11}{m} + \frac{-11}{n} \\
 F_2 &= \frac{-22}{m} + \frac{-22}{n} \\
 F_{12} &= \frac{-12}{m} + \frac{-12}{n}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.1}$$

- Armadura inferior

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -\frac{-11}{m} + \frac{-11}{n} \\
 F_2 &= -\frac{-22}{m} + \frac{-22}{n} \\
 F_{12} &= -\frac{-12}{m} + \frac{-12}{n}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.2}$$

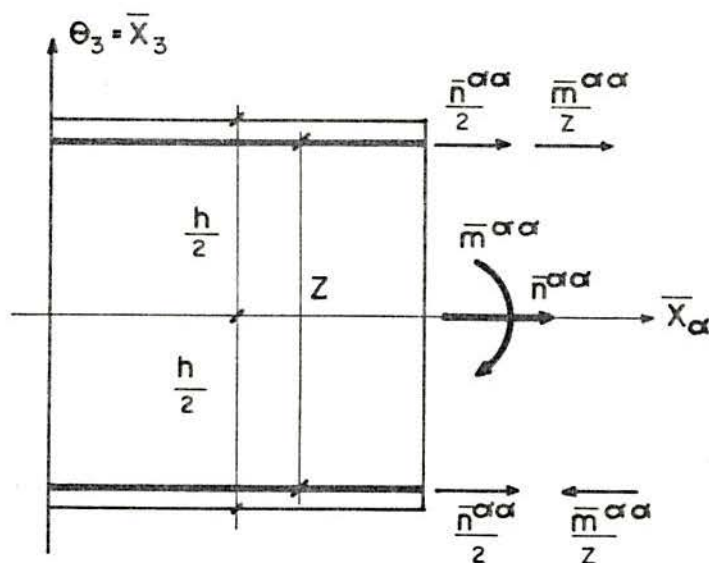


FIGURA 6.4 - Corte transversal da estrutura

As forças equivalentes estão representadas na figura 6.5, que mostra uma vista superior da estrutura.

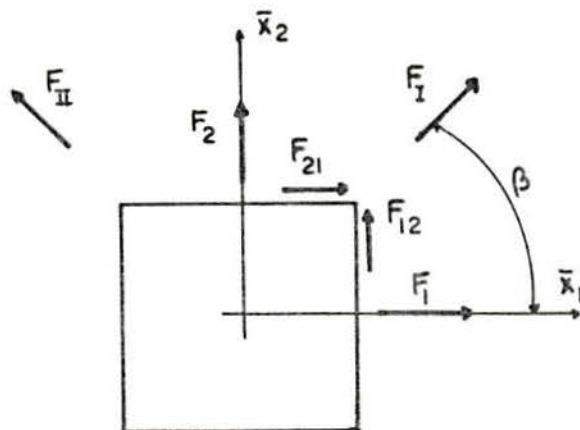


FIGURA 6.5 - Forças equivalentes

Calcula-se as forças equivalentes principais e o ângulo entre elas e o sistema  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  pelas expressões

$$F_I = \frac{F_1 + F_2}{2} + [(F_1 - F_2)^2 / 4 + (F_{12})^2]^{1/2}$$

$$F_{II} = \frac{F_1 + F_2}{2} - [(F_1 - F_2)^2 / 4 + (F_{12})^2]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = - \frac{2 F_{12}}{F_1 - F_2} \quad (6.2.3)$$

Os valores encontrados em (6.2.3) serão utilizados no dimensionamento da armadura.

### 6.3 - Dimensionamento da armadura

O dimensionamento será realizado para o caso em que o concreto está fissurado e a armadura está no limite do regime elástico, isto é,  $\sigma_s = f_y$ .

Segundo LEONHARDT e MONNING<sup>2º</sup>, os esforços de tração na armadura são dados, a partir das equações de equilíbrio, por

$$\begin{aligned} Z_1 &= F_I \cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi) + F_{II} \operatorname{sen}^2 \beta (1 - \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} \varphi) \\ Z_2 &= F_I \operatorname{sen}^2 \beta (1 + \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \varphi) + F_{II} \cos^2 \beta (1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \varphi) \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

onde

- $F_I > F_{II}$  : Forças equivalentes principais dadas por (6.2.3)  
 $\varphi$  : Ângulo entre a direção das fissuras e a direção da armadura (inclinação das fissuras)  
 $\beta$  : Ângulo entre as forças equivalentes principais e os eixos coordenados  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ .

A força de compressão no concreto em uma seção de comprimento unitário e perpendicular à fissura é obtida através da expressão

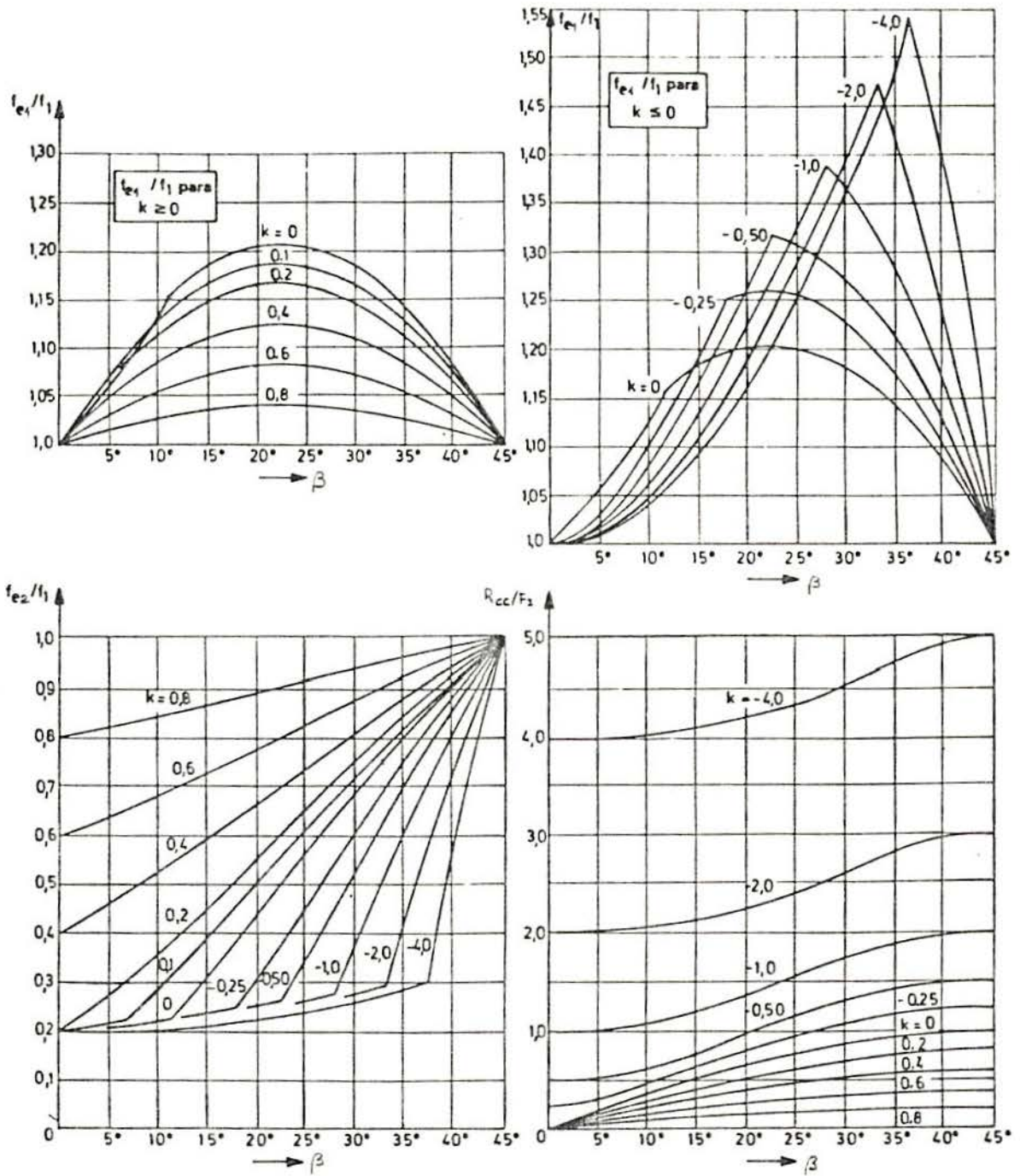
$$R_{cc} = (F_I - F_{II}) \frac{\operatorname{sen} 2\beta}{\operatorname{sen} 2\varphi} \quad (6.3.2)$$

Como controle, utiliza-se o somatório das forças internas

$$Z_1 + Z_2 - R_{cc} = F_I + F_{II} \quad (6.3.3)$$

Para determinar a inclinação  $\varphi$  das fissuras, chega-se a mesma expressão tanto empregando o teorema do trabalho mínimo de deformação ou as condições de compatibilidade das deformações

$$\frac{\sigma_{e2}}{\sigma_{e1}} = \operatorname{tg}^2 \varphi \left[ 1 + \nu \frac{R_{cc}}{Z_1} (1 - \operatorname{cotg}^2 \varphi) \right] \quad (6.3.4)$$



$$K = \frac{F_{II}}{F_I}$$

FIGURA 6.6 - Abacos para o dimensionamento da armadura



Th. Baumann<sup>5</sup> elaborou ábacos práticos para o dimensionamento das armaduras, baseado nas expressões anteriores. Os ábacos são mostrados na figura 6.6.

Os ábacos permitem obter facilmente as armaduras relativas  $(f_{e1}/f_1)$  e  $(f_{e2}/f_1)$ , respectivamente associadas com as direções de  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ , e a força de compressão relativa no concreto  $R_{cc}/F_1$ . O valor de  $f_1$  dá a armadura necessária para absorver  $F_1$  no caso de  $\beta = 0$ .

As armaduras são obtidas pelas expressões

$$A_{s1} = \frac{F_1}{f_y} (f_{e1} / f_1)$$

$$A_{s2} = \frac{F_1}{f_y} (f_{e2} / f_1) \quad (6.3.5)$$

e a tensão de compressão no concreto por

$$\sigma_c = \frac{F_1}{h} (R_{cc} / F_1) \quad (6.3.6)$$

Os valores calculados em (6.3.5) serão utilizados como dados de entrada na verificação não-linear da estrutura em alguns exemplos estudados em capítulos posteriores.

## 7 - O PROCESSO DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

### 7.1 - Os métodos de solução

Como foi visto nos capítulos anteriores, na análise de problemas estruturais envolvendo cascas de concreto armado pelo método de elementos finitos chega-se a um sistema de equações algébricas não-lineares que dificilmente poderia ser resolvido de forma explícita.

O método empregado neste estudo<sup>9</sup> para resolver tal sistema consiste em uma aplicação iterativa-incremental de uma solução linearizada que ajusta simultaneamente as não-linearidades físicas e geométricas, em termos de deslocamentos.

Inicialmente, adotou-se o método incremental com rigidez constante para resolver tal problema. A matriz de rigidez tangente na origem é mantida constante ao longo do processo de solução por depender um custo computacional muito grande na sua elaboração.

Com o intuito de diminuir o número de etapas de carga, principalmente no início da fissuração do concreto, posteriormente implementou-se o processo incremental-iterativo para a solução do sistema.

A seguir, serão descritos, resumidamente, os métodos empregados.

### 7.2 - O método incremental

O método incremental de rigidez constante é um dos métodos de solução de sistemas de equações não-lineares mais simples que existem. Apesar de ser um método bastante simples, possui a vantagem de dar uma aproximação da história de carga da estrutura.

Consiste, de forma geral, em dividir o carregamento em várias etapas de carga, resolvendo-se o sistema para cada

etapa de forma linear.

Além da contribuição linearizada é acrescentado, em cada etapa de carga, um termo corretivo, o vetor de equilíbrio, para ajustar o equilíbrio entre as cargas externas e os esforços internos.

Como foi visto no capítulo 3, no método da rigidez direta, solução em deslocamentos, após a discretização em elementos finitos, resulta, como consequência direta da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais segundo (3.3.7)

$$\underline{P}_{\text{EXT}} = \underline{A}^{\text{NL}}(\underline{v}) \quad (7.2.1)$$

Para o mesmo conjunto de deslocamentos  $\underline{v}$ , se a estrutura fosse linear com rigidez  $\underline{K}$ , teria-se

$$\underline{K} \underline{v} = \underline{A}^{\text{L}} \quad (7.2.2)$$

onde  $\underline{A}^{\text{L}}$  é o vetor global de ações lineares.

Adicionando as equações (7.2.1) e (7.2.2), chega-se à equação de equilíbrio

$$\underline{K} \underline{v} = \underline{P}_{\text{EXT}} + \underline{P}^*(\underline{v}) \quad (7.2.3)$$

onde

$$\underline{P}^*(\underline{v}) = \underline{A}^{\text{L}} - \underline{A}^{\text{NL}}(\underline{v}) \quad (7.2.4)$$

é o vetor de equilíbrio, que dá uma medida do afastamento da solução linearizada para a verdadeira solução.

Para cada etapa de carga tem-se

$$\underline{K} \underline{v}_{n+1} = \underline{P}_{\text{EXT}_{n+1}} + \underline{P}^*_{n+1}(\underline{v}_{n+1}) \quad (7.2.5)$$

sendo o vetor de equilíbrio,  $\underline{P}^*_{n+1}(\underline{v}_{n+1})$ , desconhecido.

Em substituição ao vetor de equilíbrio desconhecido, emprega-se uma aproximação em termos de valores anteriores, já conhecidos. Adotou-se, no presente estudo, a seguinte expressão

$$\tilde{P}_{n+1}^* (\tilde{v}_{n+1}) = \tilde{A}_n^L - \tilde{A}_n^{NL} \quad (7.2.6)$$

Substituindo (7.2.6) em (7.2.5) e isolando o deslocamento  $\tilde{v}_{n+1}$ , resulta

$$\tilde{v}_{n+1} = \tilde{K}^{-1} ( \tilde{P}_{EXT, n+1} + \tilde{A}_n^L - \tilde{A}_n^{NL} ) \quad (7.2.7)$$

A figura 7.1 mostra o método incremental.

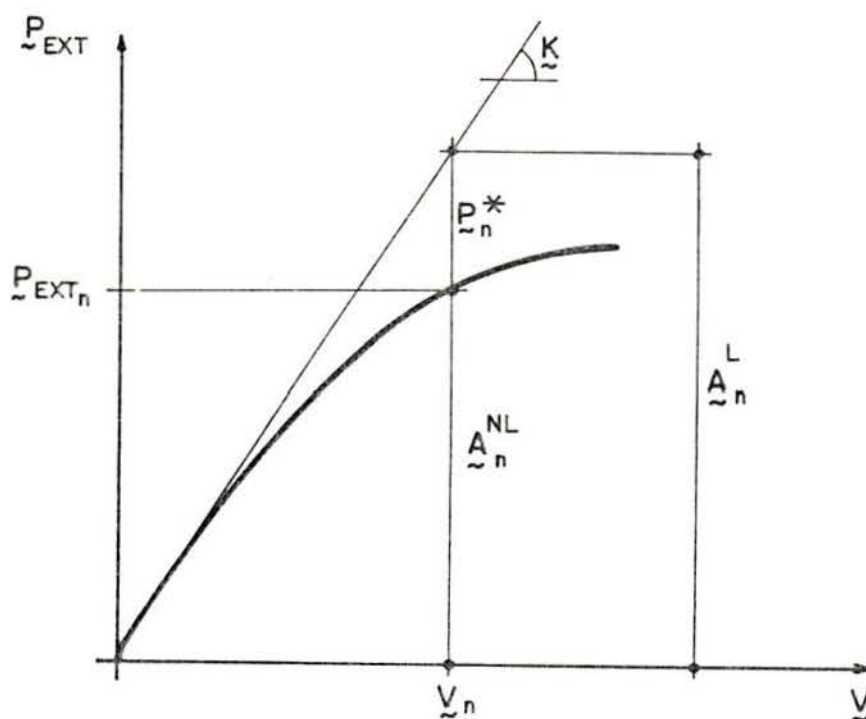


FIGURA 7.1 - Método incremental

O sistema de equações dado por (7.2.6) e (7.2.7) é resolvido para cada etapa de carga.

### 7.3 - O método iterativo

Foram implementados dois métodos iterativos para resolver o sistema de equações não-lineares: o método Newton-Raphson modificado e o método Secante-Newton.

### 7.3.1 - O método Newton-Raphson modificado

Este é um método clássico para resolver sistemas de equações não-lineares.

Basicamente, este método iterativo consiste em incrementar deslocamentos, mantendo constante a carga aplicada, até que a solução calculada se aproxime da exata. Estes incrementos de deslocamentos são determinados a partir do vetor de desequilíbrio.

O algoritmo de recorrência é o seguinte

$$\begin{aligned} \underline{V}_{n+1} &= \underline{V}_n + \Delta \underline{V}_{n+1} \\ \Delta \underline{V}_{n+1} &= \underline{K}^{-1} \underline{P}_n^* \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

onde

$$\underline{P}_n^* = \underline{P}_{EXT} - \underline{A}_n^{NL} \quad (7.3.2)$$

é o vetor de desequilíbrio.

O processo está representado na figura 7.2.

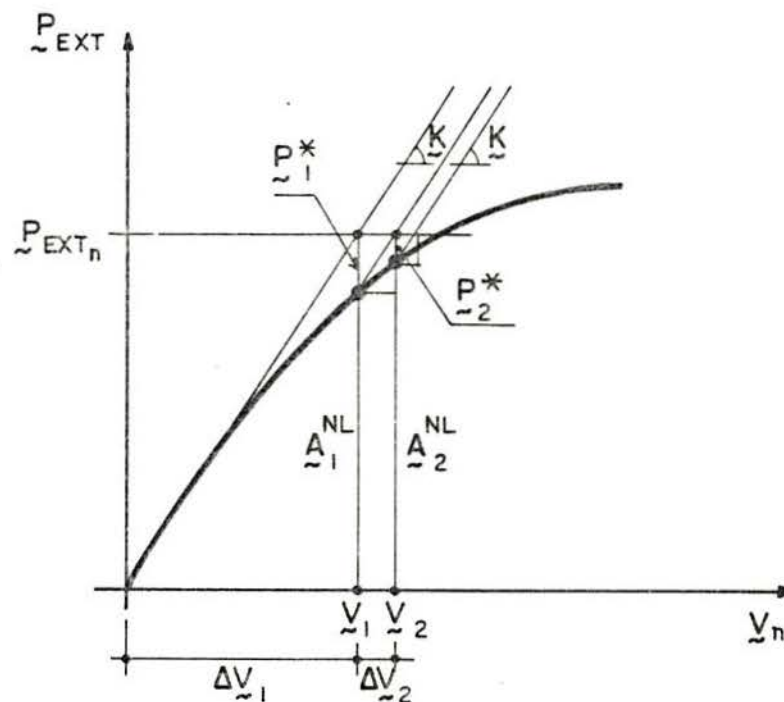


FIGURA 7.2 - Método Newton-Raphson Modificado

Para a primeira iteração, tem-se

$$\tilde{P}_u^* = \tilde{P}_{EXT}$$

$$\Delta \tilde{V}_1 = \tilde{K}^{-1} \tilde{P}_0^*$$

$$\tilde{V}_1 = \Delta \tilde{V}_1 \quad (7.3.3)$$

O processo se repete até que o acréscimo dado por  $\Delta \tilde{V}_n$  seja menor que um valor pré-estabelecido.

### 7.3.2 - O método Secante-Newton

Trata-se de um método iterativo do tipo Newton-Raphson modificado com aceleração da convergência<sup>16</sup>.

O deslocamento  $\tilde{V}_n$  é acrescido de um incremento de deslocamento conforme

$$\tilde{V}_{n+1} = \tilde{V}_n + \delta_{\tilde{V}_n} \quad (7.3.4)$$

O acréscimo de deslocamento devido à iteração dado pelo método Newton-Raphson modificado é obtido por

$$\delta_{\tilde{V}_n}^* = - \tilde{K}^{-1} \tilde{g}_n \quad (7.3.5)$$

sendo

$$\tilde{g}_n = \tilde{A}_n^{NL} - \tilde{P}_{EXT} \quad (7.3.6)$$

o vetor de equilíbrio dado em (7.3.2) com o sinal trocado.

O incremento do deslocamento é obtido através de

$$\delta_{\tilde{V}_n} = A_n \delta_{\tilde{V}_n}^* + B_n \delta_{\tilde{V}_{n-1}} \quad (7.3.7)$$

onde  $A_n$  e  $B_n$  são escalares dados por

$$A_n = - \frac{\delta_{\tilde{V}_{n-1}}^t \tilde{g}_{n-1}}{\delta_{\tilde{V}_{n-1}}^t \tilde{\chi}_n}$$

$$B_n = A_n \left[ 1 - \frac{\delta_n^{*l} \chi_n}{\delta_{n-1}^l \chi_n} \right] - 1 \quad (7.3.8)$$

e

$$\chi_n = g_n - g_{n-1} \quad (7.3.9)$$

O procedimento começa ( $n=0$ ) com uma solução incremental tangente na qual

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ B_0 &= 0 \\ g_0 &= -P_{\text{EXT}} \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

No caso em que  $B_n$  torna-se grande em relação a  $A_n$ , é aconselhável abandonar o processo de aceleração e retornar ao algoritmo Newton-Raphson modificado. Isto deve ocorrer quando

$$\frac{B_n}{A_n} > 0,4 \quad \text{ou} \quad \frac{B_n}{A_n} < -0,2 \quad (7.3.11)$$

Este método normalmente é utilizado em conjunto com um processo incremental.

Tendo em vista que o método Secante-Newton acelera a convergência em comparação com o método Newton-Raphson modificado, o custo computacional adicional é pequeno, pois só se necessita armazenar a mais os vetores  $\delta_{n-1}$  e  $g_{n-1}$ .

#### 7.4 - O método implementado

No presente estudo, utiliza-se um processo incremental-iterativo, combinando os três métodos descritos anteriormente.

O processo implementado consiste em um algoritmo incremental, do tipo mostrado em 7.2, no qual, em pré-determinadas etapas de carga, realiza-se iterações com o intuito de aproximar a solução obtida com a verdadeira solução.

O algoritmo possui a flexibilidade de permitir que se determine o passo de etapas para iterar; isto é, se serão realizadas iterações em todas as etapas, de "n" em "n" etapas

ou em nenhuma delas (caso em que o passo de etapas para iterar é maior do que o número de etapas de carga). Também pode-se estabelecer a etapa de carga a partir da qual inicializar-se-á o processo iterativo. Assim sendo, é possível chegar-se a um pré-determinado estágio de carga utilizando o processo incremental sozinho e após efetuar-se iterações.

O processo iterativo normalmente utilizado é o Secante-Newton, recorrendo-se ao Newton-Raphson modificado quando os limites estabelecidos por (7.3.11) são atingidos.

Nos exemplos com influência da não-linearidade geométrica em cascas, empregou-se, inicialmente, uma seqüência incremental sem iterações. A partir da zona onde observou-se possibilidade de instabilidade numérica, foram realizadas iterações que, além de melhorar a solução, estabilizaram significativamente o algoritmo.



## 8 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 8.1- Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos na aplicação do programa computacional desenvolvido com base na teoria exposta nos capítulos anteriores.

O programa computacional é constituído por diversas subrotinas interligadas por um programa principal e foi desenvolvido em linguagem BASIC estruturada ( Quick basic - versão 4.0 ), para computadores da linha PC.

Os exemplos rodados foram seleccionados com o intuito de testar o funcionamento das diversas subrotinas isoladamente e em conjunto com as demais. Embora não se justifique a utilização deste programa para analisar estruturas como vigas e lajes, que possuem apenas três graus de liberdade por nó enquanto o elemento utilizado possui seis, foram rodados alguns exemplos com estes tipos de estruturas, pois os exemplos de cascas disponíveis na bibliografia são escassos e/ou muito complexos.

Para verificar o comportamento da subrotina de não-linearidade geométrica, que foi introduzida através de uma parcela da deformação de membrana, foram utilizados os seguintes exemplos :

- Flambagem de colunas
- Casca cilíndrica elástica .

Mesmo utilizando uma teoria de pequenas deformações e rotações moderadas, os resultados obtidos nesta fase foram bastante satisfatórios.

Placas e cascas de concreto armado, que foram ensaiadas experimentalmente, são utilizadas para comprovar o funcionamento do algoritmo não-linear físico, a subrotina que

introduz as relações constitutivas. Foram rodadas duas placas e uma casca :

- Placa de Mcneice
- Placa de Duddeck
- Casca de Hedgren .

Os valores obtidos permitem concluir que o algoritmo é capaz de simular bem o comportamento do concreto armado em modelos laminares.

Para testar o funcionamento conjunto da não-linearidade física e geométrica usou-se as cascas e placa seguintes :

- Casca de Hedgren
- Casca de Riera
- Placa de Mcneice.

Os resultados numéricos obtidos são bastante satisfatórios. Na placa, a influência da não-linearidade geométrica quase não é notada. Provavelmente, isto se deve ao fato de se utilizar precisão simples no programa computacional e de ser introduzida a não-linearidade geométrica através da deformação de membrana, que não é muito significativa em placas.

A seguir serão relatados os exemplos rodados.

## 8.2- Flambagem de colunas

Um bom exemplo acadêmico para testar a subrotina da não-linearidade geométrica é a coluna de Euler. Trata-se de uma barra vertical engastada na extremidade inferior e carregada por uma força axial de compressão na superior.

Sabe-se que para um determinado valor crítico da força de compressão, pode ocorrer grande deslocamento lateral por pequeno que seja o incremento de carga. Se a carga  $P$  for menor que seu valor crítico, a barra permanece reta e sofre somente compressão axial. Crescendo  $P$  gradualmente, chega-se a

condição em que a forma reta de equilíbrio torna-se instável e uma pequena força lateral poderá produzir um deslocamento lateral que não desaparecerá com a causa que o produziu.

Os valores das cargas críticas para as várias condições de vinculação nas extremidades de uma barra prismática comprimida foram obtidos, primeiramente, por L. Euler. Por isso, para estes tipos de problemas, denomina-se a carga crítica de carga de Euler.

Esta carga é calculada pelo emprego da equação diferencial da linha elástica e resulta, para estas condições de vinculação

$$P_{\text{EULER}} = \frac{\pi^2 E I}{4 l^2} \quad (8.2.1)$$

onde

E = módulo elástico

I = inércia

l = comprimento da barra .

Os dados referentes ao exemplo em estudo são os seguintes e a geometria do problema está representada na figura 8.1

$$E = 200000 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$b = 50 \text{ cm}$$

$$h = 10 \text{ cm}$$

$$l = 600 \text{ cm} .$$

Com estes dados pode-se calcular a carga crítica

$$I = \frac{50 \cdot 10^3}{12} \approx 4167 \text{ cm}^4$$

$$P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 \cdot 200000 \cdot 4167}{4 \cdot 600^2} \approx 5700 \text{ N} .$$

(8.2.2)

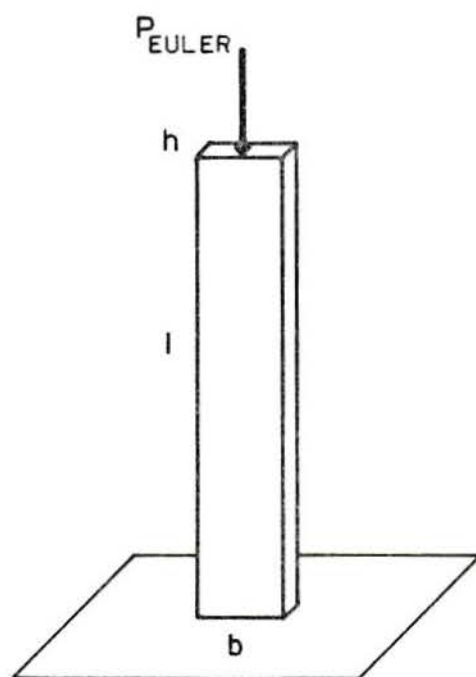


FIGURA 8.1- Flambagem de colunas

Na figura 8.2 mostra-se a malha utilizada e a distribuição do carregamento.

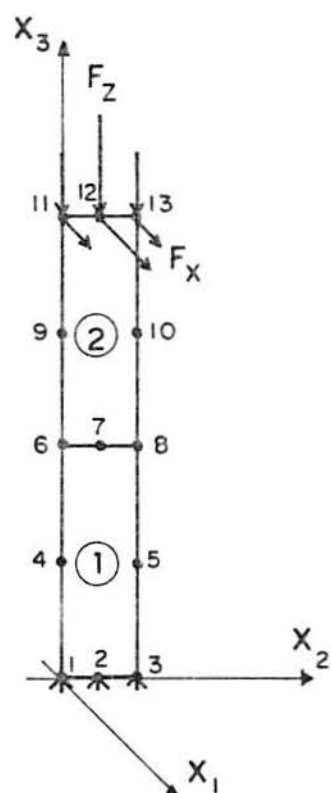


FIGURA 8.2- Malha

Os dados de entrada no programa estão relacionados a seguir

- número de nós = 13
- número de elementos = 2
- espessura = 10 cm
- nós vinculados = 1,2,3 - totalmente restringidos
- nós carregados = 11,13 -  $F_x = 0,167 \text{ N}$      $F_z = - 1666,7 \text{ N}$   
12 -  $F_x = 0,667 \text{ N}$      $F_z = - 6666,7 \text{ N}$  .

Utilizou-se o processo incremental-iterativo com 10 etapas de carga e no máximo oito iterações em cada etapa .

Estão representados na figura 8.3 os resultados somente até a carga de 6000 N, um pouco acima da carga crítica.

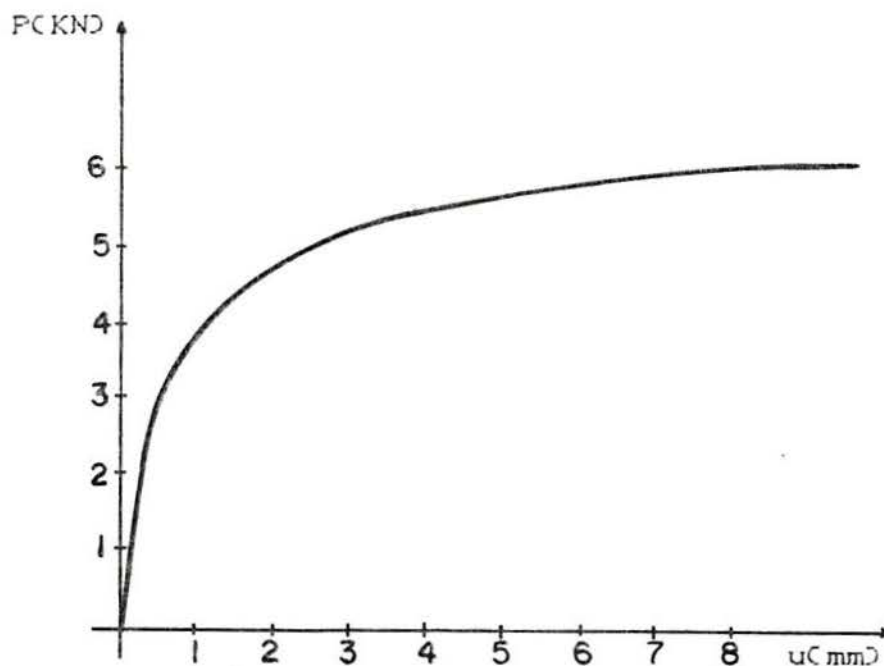


FIGURA 8.3- Deslocamento lateral , na direção  $x_1$  , no nó 11

Nota-se que foi introduzida uma pequena força lateral ( $F_x = F_z/1000$ ) para inicializar a flambagem.

Os resultados obtidos estão dentro das expectativas : antes de ser atingida a carga crítica, os deslocamentos laterais,  $w$ , são pequenos, após,  $w$  cresce rapidamente mesmo com incrementos de carga pequenos.

### 8.3- Casca cilíndrica elástica

A seguir, estuda-se o problema de cascas cilíndricas elásticas engastadas submetidas à pressão uniforme normal à superfície média.

Neste tipo de problema, na medida em que a intensidade da carga aumenta, a casca tende a se achatar, diminuindo a rigidez da estrutura até aparecer um ponto de inflexão. Após, a rigidez da casca começa a aumentar novamente devido ao efeito de tração longitudinal.

Não é objetivo deste estudo analisar todas estas etapas de deformação, limitando-se a fase anterior ao ponto de inflexão. Portanto, a análise se restringirá a uma deflexão máxima de 0,2 cm do nó central, como foi feito em estudos realizados anteriormente<sup>B</sup>.

Um esquema do exemplo em estudo e as propriedades do material componente estão representados na figura 8.4.

$$E = 312480 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$R = 254 \text{ cm}$$

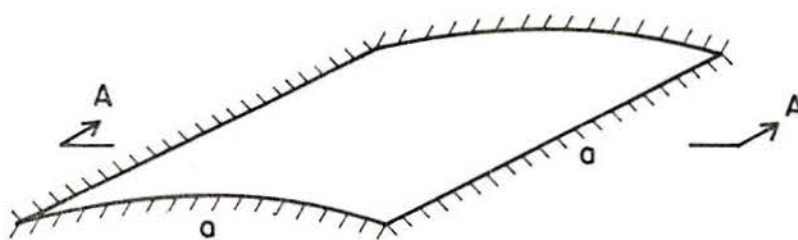
$$a = 50,8 \text{ cm}$$

$$f = 1,27 \text{ cm}$$

$$h = 0,3175 \text{ cm}$$

$$p = 0,15 \text{ N/cm}^2$$

$$\beta = 2,87^0$$



CORTE A A

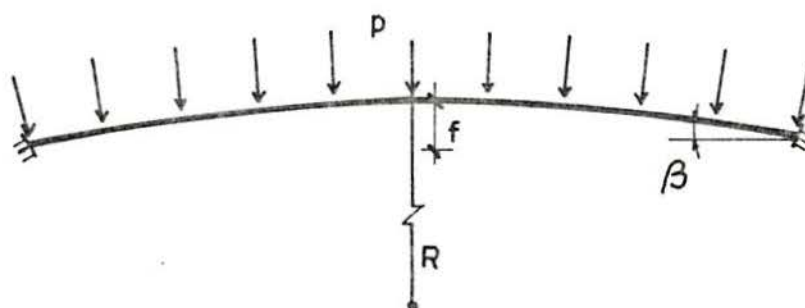


FIGURA 8.4 - Casca cilíndrica elástica

Aproveitando a dupla simetria da estrutura, estuda-se somente um quarto da casca. Foram analisadas dois tipos de malhas com (2x2) e (3x3) elementos, conforme figura 8.5.

Na entrada de dados do programa, foram considerados totalmente vinculados os nós dos bordos engastados e as respectivas vinculações para simular a parte retirada ao longo dos eixos de simetria.

Como a casca é bastante abatida, tomou-se uma inclinação constante,  $\beta$ , e considerou-se a repartição da carga distribuída para os nós mostrada na figura 8.5.c) para cada elemento<sup>36</sup>.

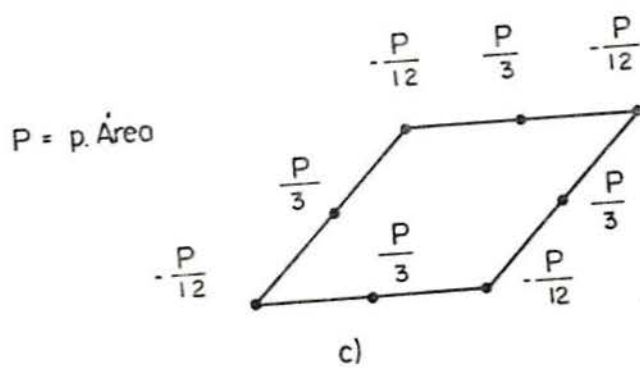
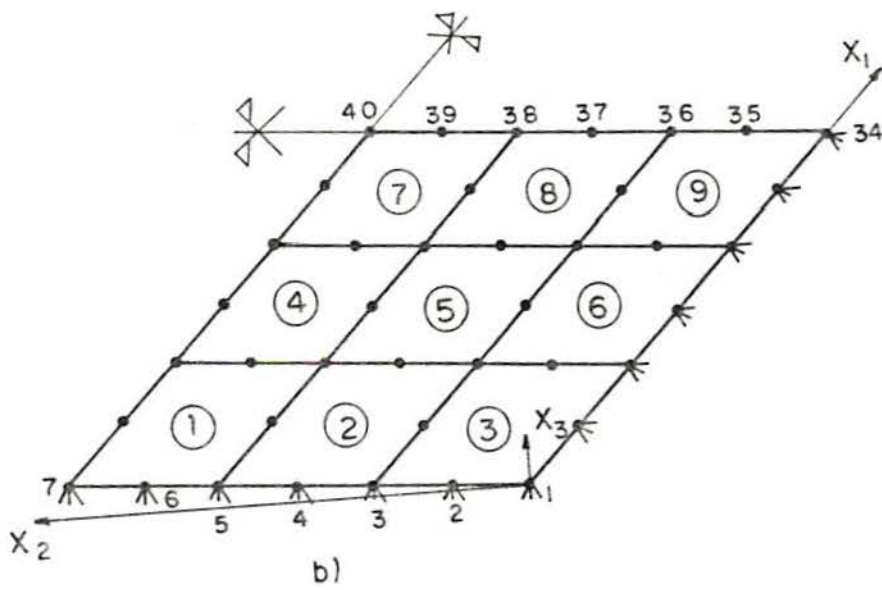
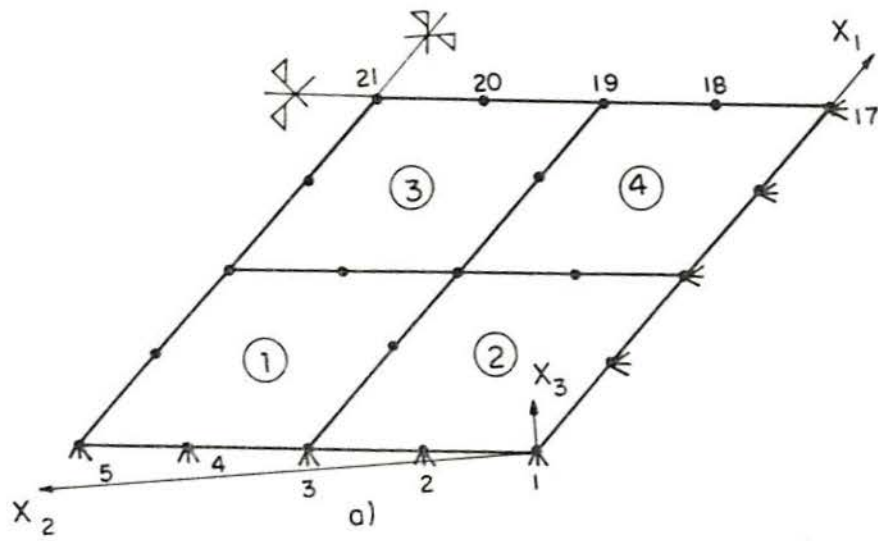


FIGURA 8.5- a) , b) Malhas e c) carregamento



Foram utilizadas cinco etapas de carga com no máximo dez iterações em cada etapa no processo de solução do sistema.

Os resultados obtidos na análise numérica estão graficados na figura 8.6.

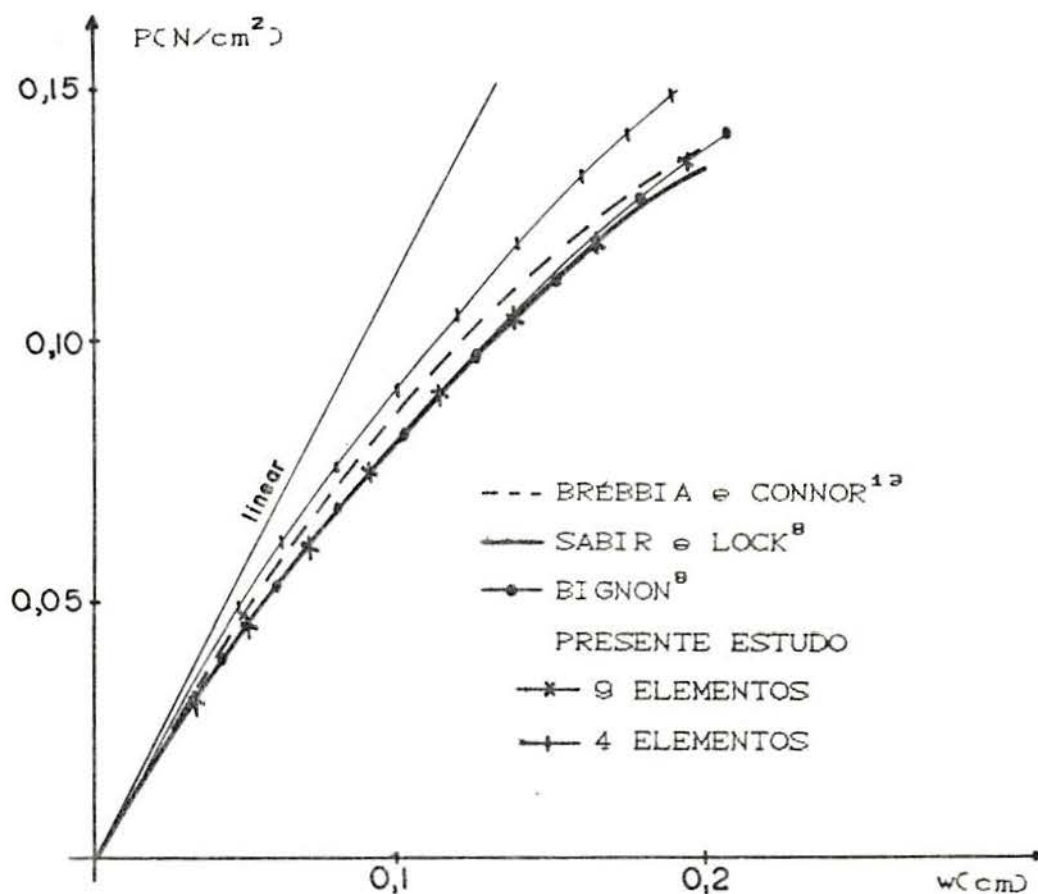


FIGURA 8.6- Deslocamento central na direção de  $x_3$

A análise da figura 8.6 permite concluir que o modelo proposto apresenta bons resultados, comparados com os propostos por outros autores. Nota-se que o refinamento da malha de elementos finitos melhora bastante os resultados.

#### 8.4- Placa de McNeice

Com o intuito de verificar o funcionamento da subrotina que introduz a não-linearidade física do modelo,

inicialmente estudou-se a placa ensaiada por JOFRIET e MCNEICE<sup>27</sup> sem considerar a não-linearidade geométrica. Após, realizou-se uma análise considerando as duas não-linearidades.

Este exemplo já foi muito utilizado por diversos pesquisadores para testar seus modelos, possibilitando a comparação de resultados com os experimentais e com os de outros autores.

Trata-se de uma placa quadrada, apoiada nos quatro cantos, carregada com uma carga concentrada no centro e com uma armadura ortogonal positiva.

A figura 8.7 mostra a geometria e os dados do problema.

$$a = 91,44 \text{ cm}$$

$$h = 4,445 \text{ cm}$$

$$z_e = -1,105 \text{ cm}$$

$$f_c = 3,8 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_c = 2860 \text{ KN/cm}^2$$

$$\nu = 0,15$$

$$f_y = 34,5 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_s = 20000 \text{ KN/cm}^2$$

$$t_s = 0,283 \text{ cm (espessura equivalente de aço em cada direção)}$$

$$P = 15 \text{ KN}$$

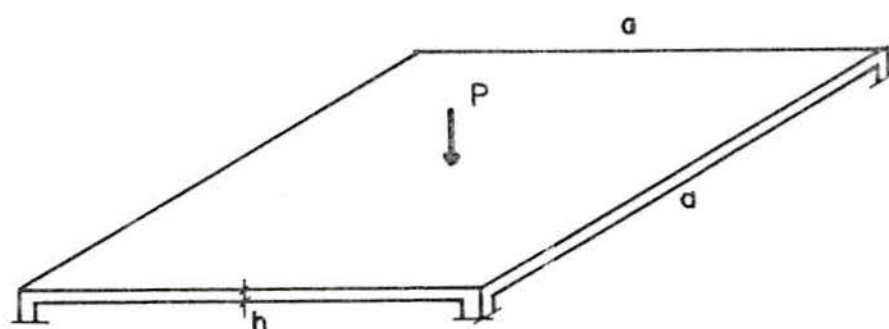


FIGURA 8.7- Placa de McNeice

Como a placa é duplamente simétrica, pode-se fazer o estudo em apenas um quarto da estrutura.

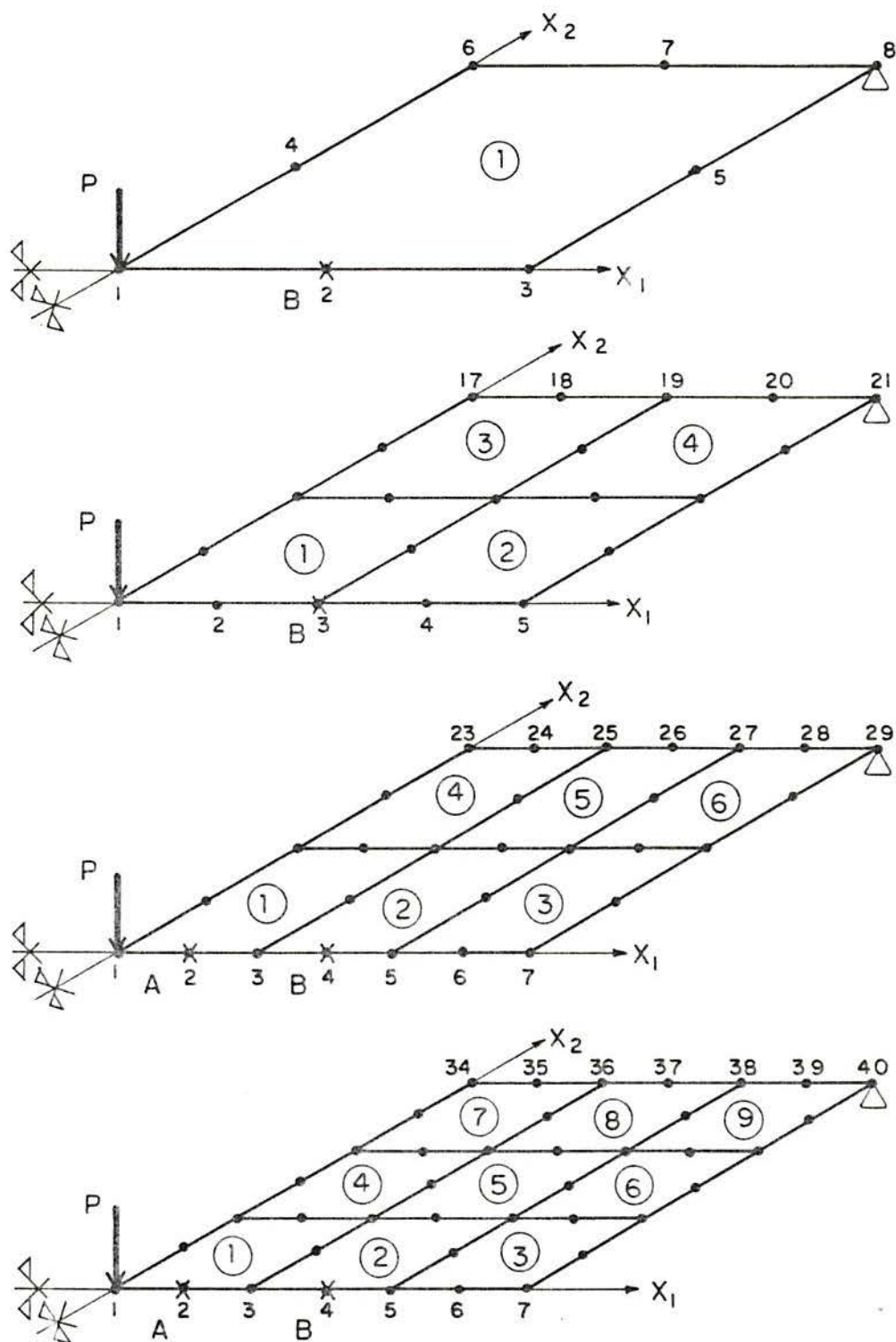


FIGURA 8.8- Malhas

Durante a fase experimental, foram realizadas medições dos deslocamentos em dois pontos da placa, A e B.

Estes pontos estão localizados na figura 8.8, que também mostra as malhas utilizadas.

A vinculação utilizada como dado do programa foi a restrição dos três deslocamentos ( $u, v, w$ ) do nó do canto apoiado sobre o pilar e as respectivas vinculações sobre os eixos de simetria para simular a parte retirada : restrição do giro em torno do eixo de simetria e impedimento do deslocamento na direção perpendicular ao mesmo.

Por se estar trabalhando com apenas um quarto da estrutura, utilizou-se somente um quarto da carga. Foi utilizado um incremento de carga no processo de solução de 0,1 KN ; portanto, para chegar a carga de 15 KN foram necessárias 150 (cento e cinquenta) etapas. Não foram utilizadas iterações.

A espessura da placa foi subdividida em 20 (vinte) faixas iguais. Outros testes, com um número menor de camadas ao longo da espessura, foram realizados, ocorrendo instabilidade nos resultados em alguns casos. Desta forma, adotou-se 20 (vinte) como o número de camadas de concreto a ser utilizado neste e nos próximos exemplos.

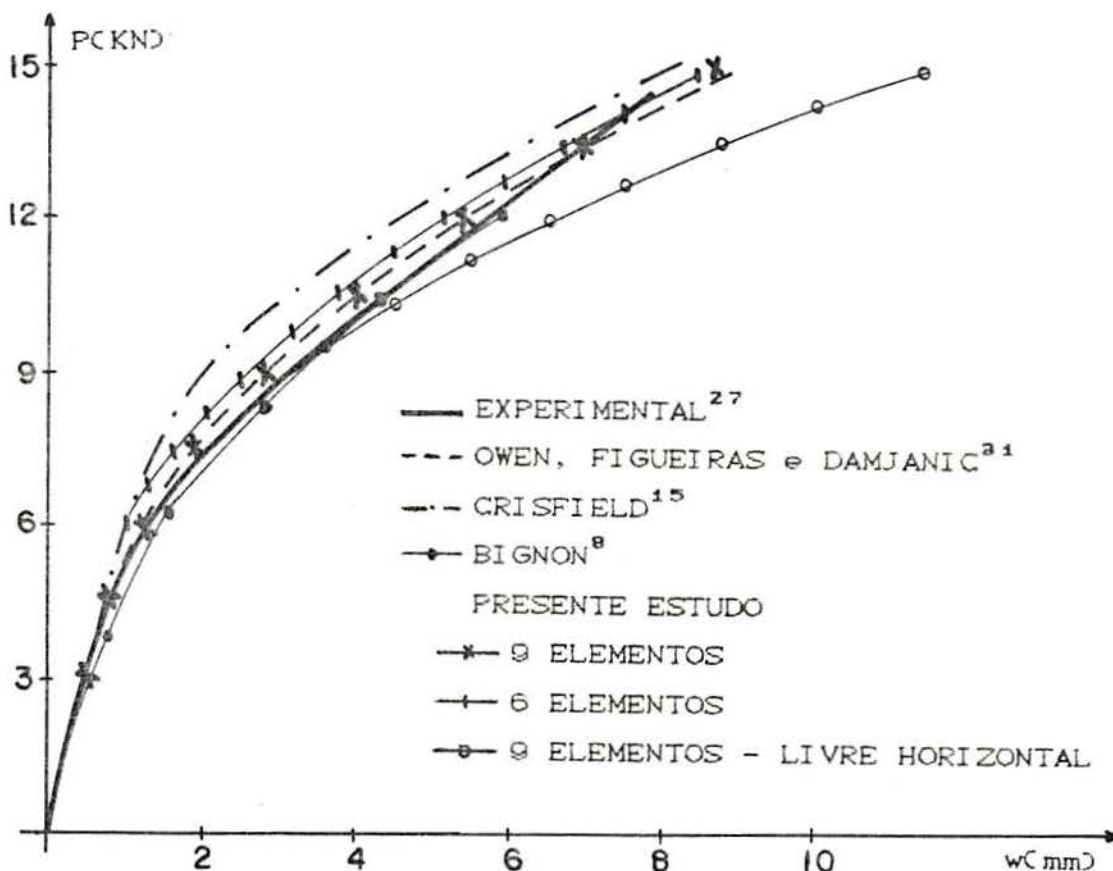


FIGURA 8.9. a) Deslocamento vertical do ponto A

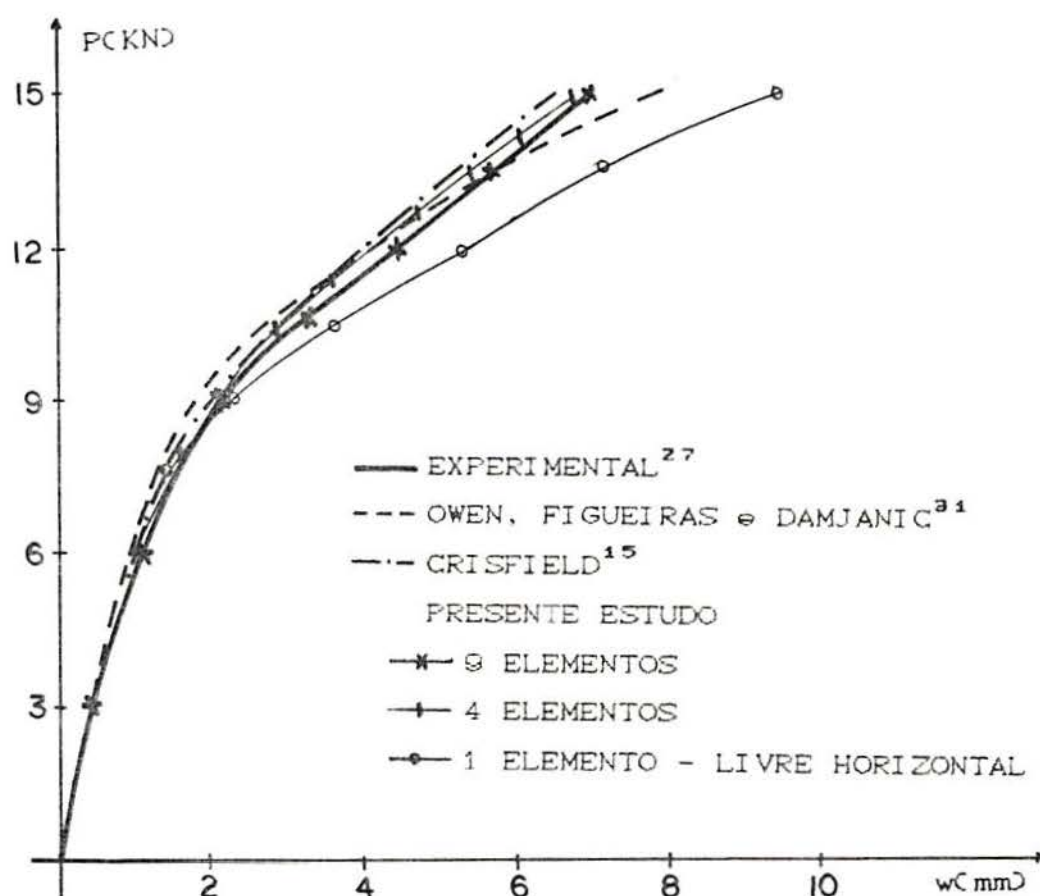


FIGURA 8.9. b) - Deslocamento vertical do ponto B

Os resultados obtidos para os dois pontos em estudo estão graficados na figura 8.9. Nota-se que não ocorreu uma grande melhora nos resultados com o refinamento da malha.

#### 8.5- Placa de Duddeck

Outra placa analisada é a Placa estudada por Duddeck<sup>31</sup>. Como no exemplo anterior, tem-se uma placa quadrada, apoiada nos quatro cantos e carregada com uma força concentrada central. Porém, diferencia-se da anterior por possuir armadura dupla, possibilitando, assim, verificar o funcionamento da armadura em compressão.

Os dados do problema são os seguintes e a geometria da placa aparece na figura 8.10

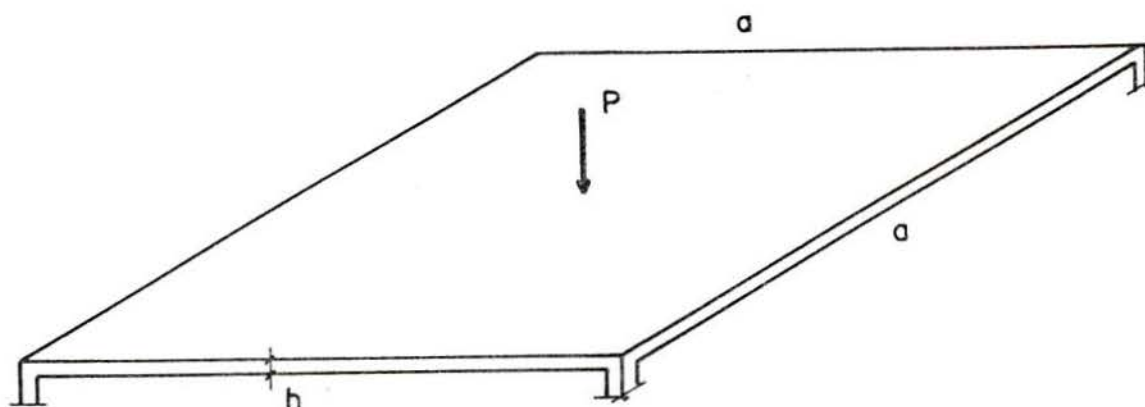


FIGURA 8.10- Placa de Duddeck

$$a = 104 \text{ cm}$$

$$h = 6,5 \text{ cm}$$

$$z_s = \pm 2,35 \text{ cm}$$

$$f_c = 4,3 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_c = 1640 \text{ KN/cm}^2$$

$$\nu = 0,15$$

$$f_y = 67 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_s = 20100 \text{ KN/cm}^2$$

$$t_s^+ = 0,019 \text{ (espessura equivalente de aço em cada direção)}$$

$$t_s^- = 0,04 \text{ (espessura equivalente de aço em cada direção)}$$

$$P = 60 \text{ KN .}$$

Este exemplo foi estudado após a Placa de McNeice, o que possibilitou o aproveitamento de muitas considerações realizadas anteriormente. Utilizou-se as mesmas malhas do exemplo anterior, conforme figura 8.11.

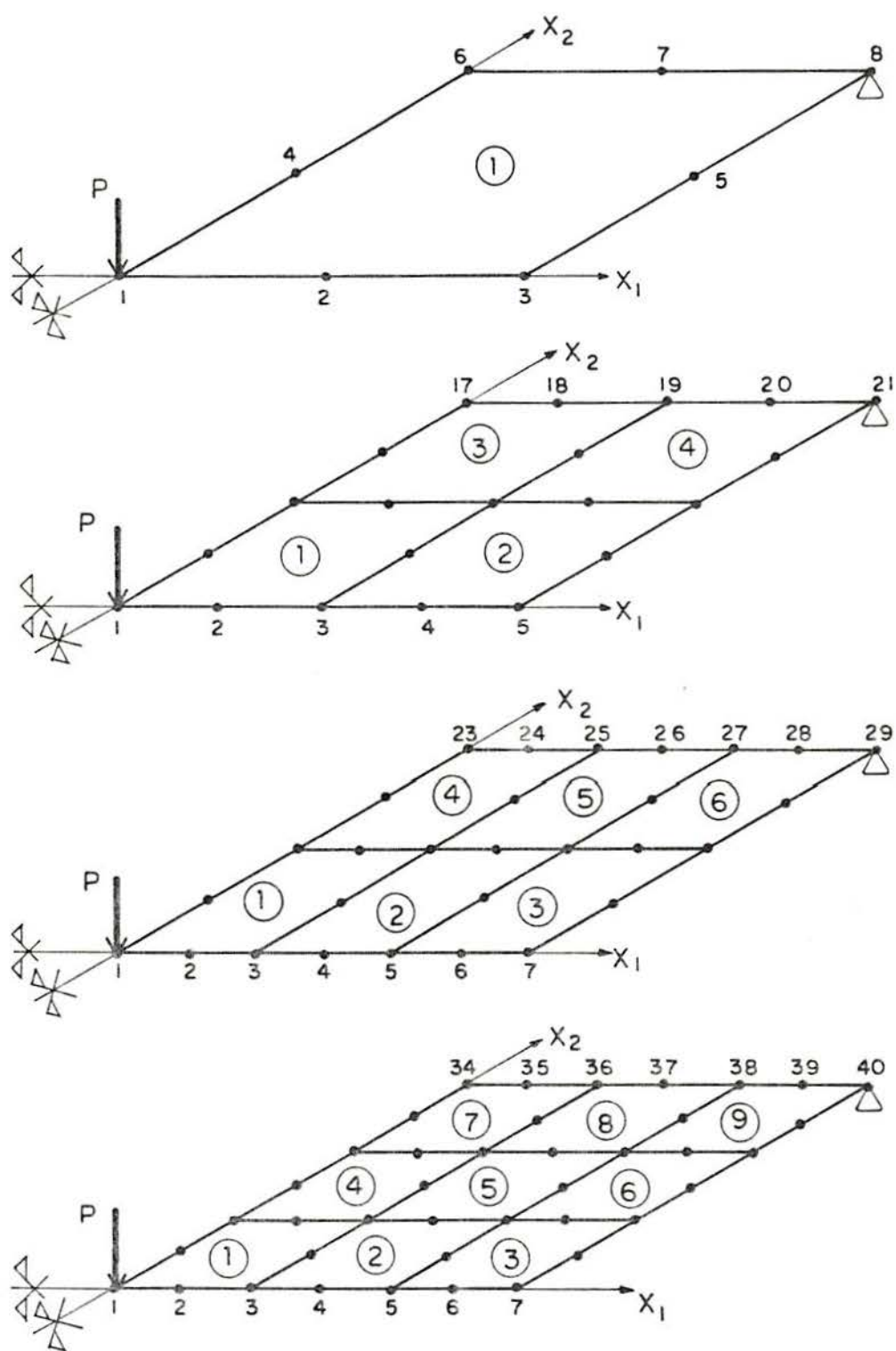


FIGURA 8.11 - Malhas

Todas as considerações feitas para o exemplo anterior em relação a vinculação e ao carregamento continuam válidas aqui.

Utilizou-se 200 (duzentas) etapas de carga para atingir a carga de 60 kN e 20 (vinte) camadas ao longo da espessura.

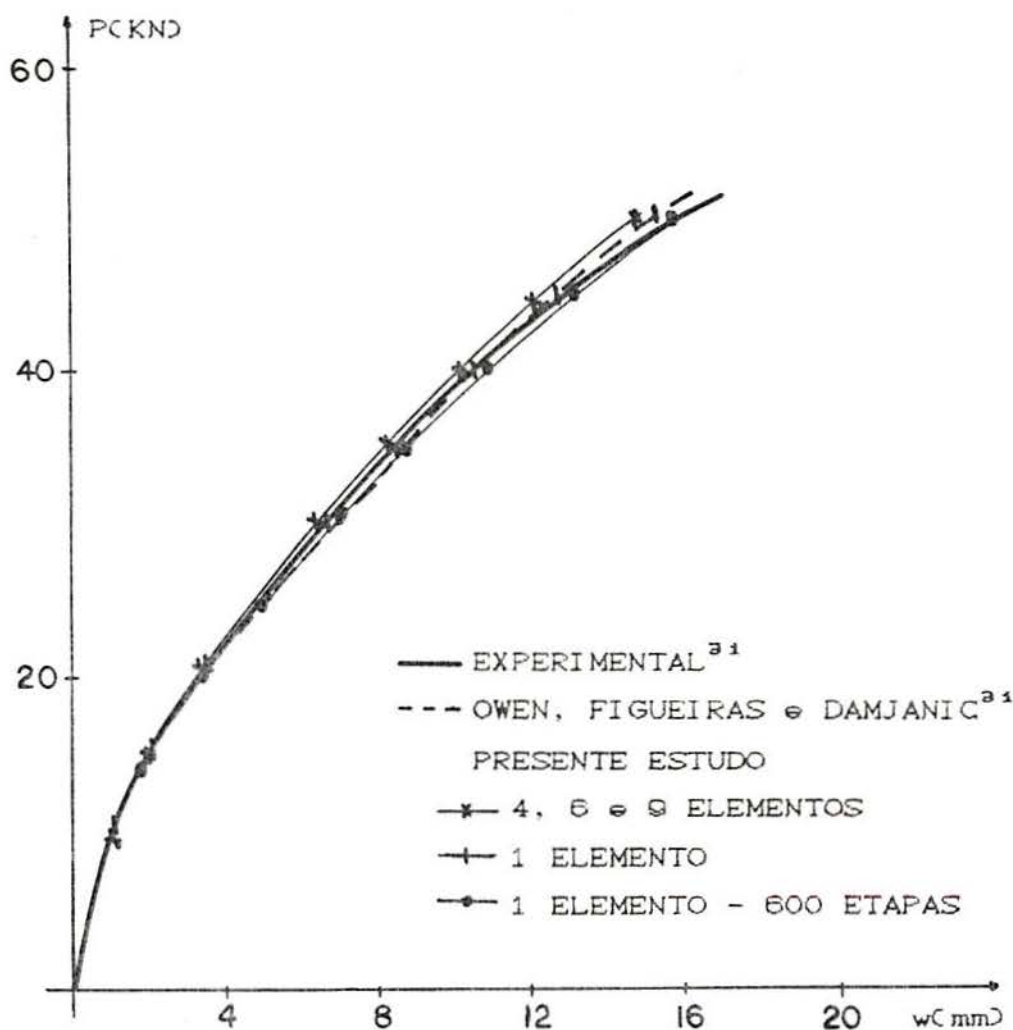


FIGURA 8.12- Deslocamento vertical central

Na figura 8.12 pode-se comparar os valores resultantes da análise computacional com as diversas malhas com os experimentais e com os de outros autores. Salienta-se aqui também que o refinamento da malha de 4, 6 e 9 elementos não produz grande alterações nos resultados. Apenas a malha com 1 elemento apresenta resultados um pouco mais flexível que os demais.

Também foi realizada uma comparação de resultados aumentando o número de etapas de carga para seiscentas para um elemento.



8.6- Casca de Hedgren

A seguir, será analisada a casca testada experimentalmente por HEDGREN e BILLINGTON<sup>26</sup>. Trata-se de uma casca semi-cilíndrica, com espessura variável, carregada por uma pressão de sucção uniforme, apoiada nos extremos em diafragmas e com bordos livres.

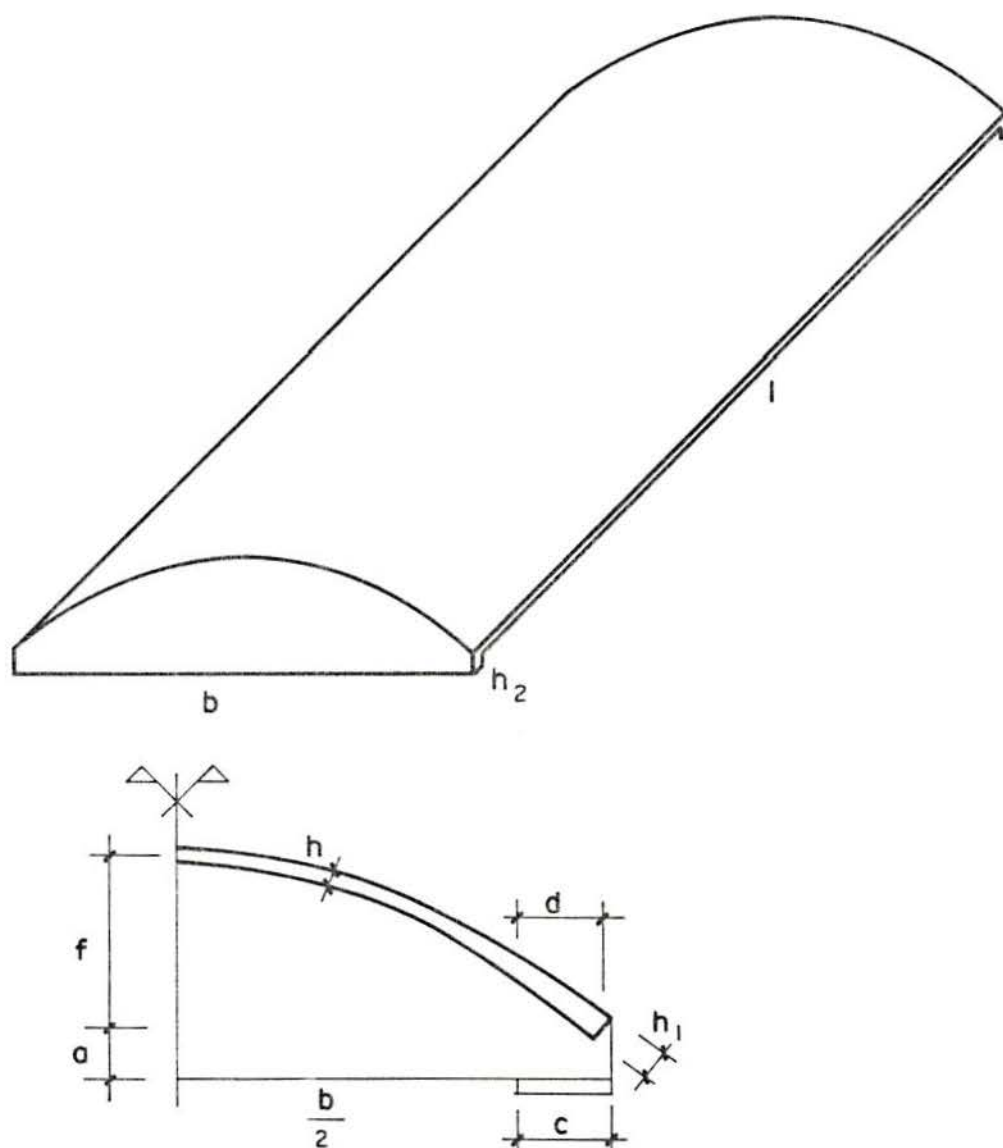


FIGURA 8.13- Casca de Hedgren

Os dados do problema são os seguintes

$$l = 213,36 \text{ cm}$$

$$b = 121,92 \text{ cm}$$

$$a = 6,99 \text{ cm}$$

$$f = 22,86 \text{ cm}$$

$$c = 12,7 \text{ cm}$$

$$d = 12,7 \text{ cm}$$

$$h = 1,27 \text{ cm}$$

$$h_1 = 3,81 \text{ cm}$$

$$h_2 = 2,5 \text{ cm ( espessura do diafragma )}$$

$$f_c = 3,5 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_c = 2200 \text{ KN/cm}^2$$

$$\nu = 0,14$$

$$f_y = 26 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_e = 21000 \text{ KN/cm}^2$$

Na figura 8.14 está representada a malha utilizada na análise computacional.

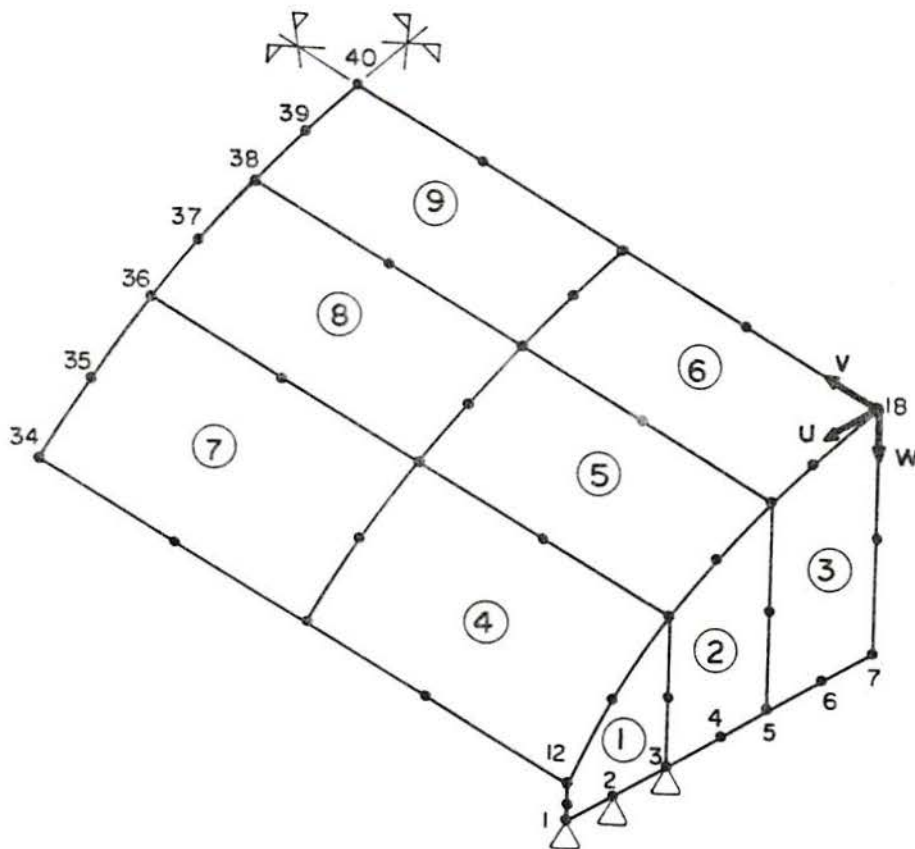


FIGURA 8.14- Malha

Neste tipo de problema, com a aplicação do carregamento, a geometria da casca tende a se modificar : os bordos livres se deslocam para baixo e a parte central para cima. Isso ocasiona um aumento do momento de inércia da seção transversal da casca e, conseqüentemente, de sua capacidade de carga. Desta forma, somente as análises que levam em consideração a geometria deformada podem representar estes fatos.

Na entrada de dados do programa computacional, entrou-se com cargas concentradas nos nós, com distribuição conforme figura 8.5.c). A espessura de cada elemento bem como os valores utilizados para cada camada de aço estão na tabela 8.1.

TABELA 8.1- Armaduras da casca de Hedgren

ELEMENTO	h (cm)	$z_e$ (cm)	$t_e$ (cm)
1,2,3	2,5	0	0
4,7	2,4	0,6	u : 0,00855 v : 0,02255
		-0,765	u : 0,0058 v : 0,0157
5,8	1,27	0,2	u : 0,0045 v : 0,0039
		-0,25	u : 0,0051 v : 0,0031
6,9	1,27	0,25	u : 0,0086 v : 0,0031
		-0,25	u : 0,0034 v : 0,0031

Os dados referentes a quantidade e localização das diversas camadas de armadura estão perfeitamente detalhados nas referências <sup>26,31</sup>. No presente estudo, realizou-se uma simplificação da armadura.

Como vinculação, considerou-se restringido nos nós sobre o apoio (1,2 e 3), os deslocamentos  $u$  e  $w$  e as rotações  $R_2$  e  $R_3$ . Sobre os eixos de simetria adotou-se as restrições já mencionadas anteriormente.

Na figura 8.15 estão graficados os resultados obtidos.

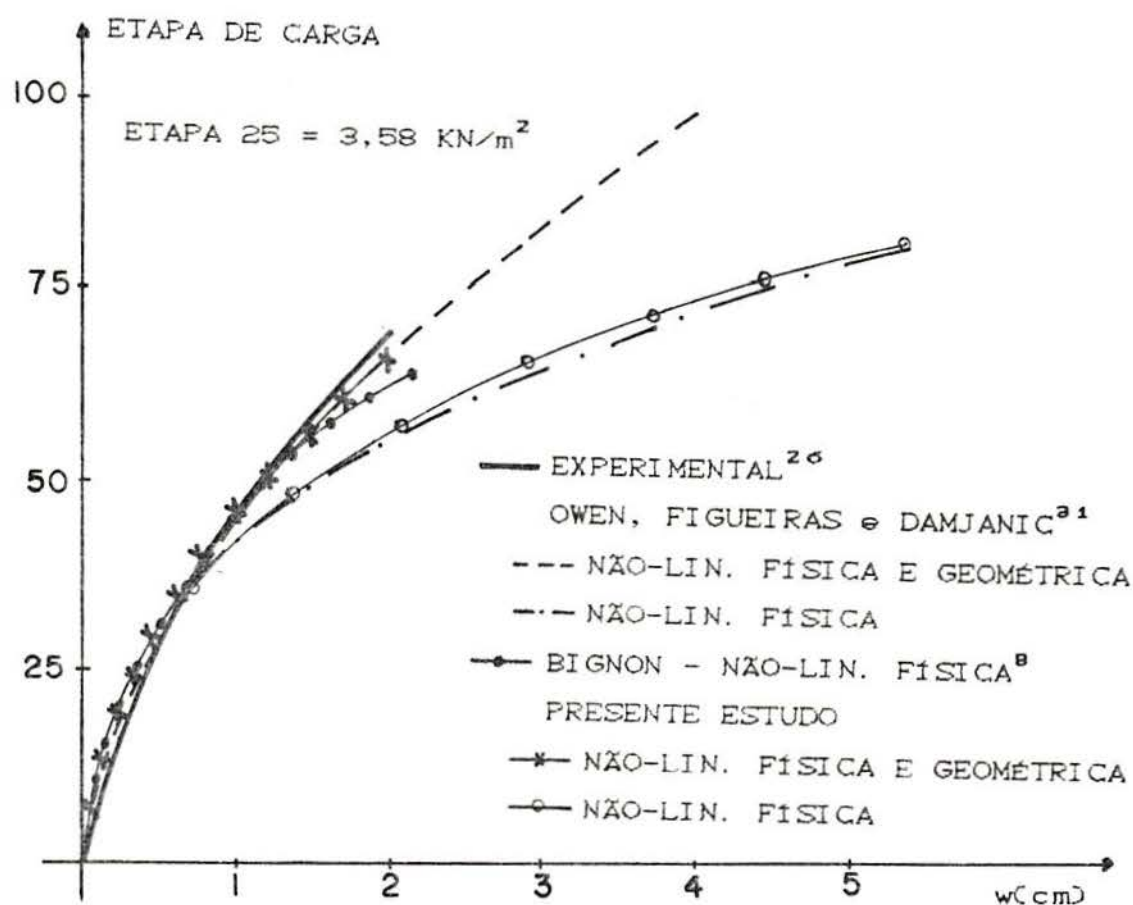


FIGURA 8.15- Deslocamento vertical do nó 34

Foram realizadas dois tipos de análises: a primeira considerando apenas a não-linearidade física e a outra considerando as não-linearidades física e geométrica.

Como era de se esperar, pelos fatos já expostos anteriormente, a primeira apresenta resultados mais flexíveis dos que os obtidos experimentalmente.

Quando se leva em consideração as duas não-linearidades os resultados são bastante satisfatórios.

Utilizou-se cem etapas de carga, realizando-se iterações a partir da etapa trinta e cinco.

Os resultados apresentados por OWEN, FIGUEIRAS e DAMJANIC<sup>31</sup> foram obtidos com um algoritmo de rigidez variável. Normalmente, a matriz de rigidez era recalculada em cada incremento de carga e, quando as características do material mudavam, a matriz era recalculada dentro da própria etapa.

#### 8.7- Casca de Riera

Outro exemplo utilizado foi a casca ensaiada por GUDMANI, REIMUNDIN, DANESI e RIERA<sup>32</sup>. O estudo compreende o ensaio até a ruptura de cascas de microconcreto armado em escala reduzida. Aqui será analisada a casca cilíndrica parabólica apoiada em diafragmas nas extremidades e com bordos livres, cujas características geométricas se indicam na figura 8.16 e os dados são os seguintes

$$l = 221 \text{ cm}$$

$$b = 80 \text{ cm}$$

$$f = 20 \text{ cm}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$h = 0,7 \text{ cm}$$

$$h_2 = 2 \text{ cm} .$$

Devido a extrema dificuldade para a execução de modelos de microconcreto em escala reduzida, foram confeccionadas placas de mesma espessura e com o mesmo material utilizado na casca com o intuito de poder melhor avaliar as características dos materiais componentes do microconcreto.

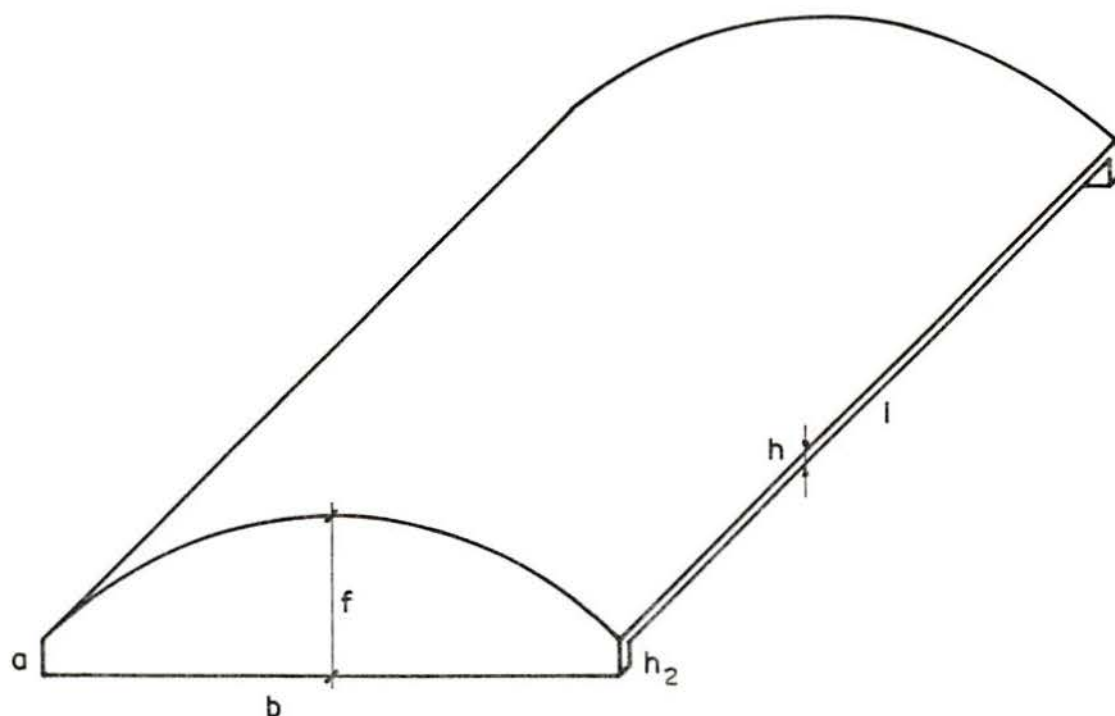


FIGURA 8.16- Casca cilíndrica parabólica

As propriedades mecânicas determinadas para o microconcreto e a armadura foram as seguintes

$$\begin{aligned}
 f_c &= 1,6 \text{ KN/cm}^2 \\
 E_c &= 1960 \text{ KN/cm}^2 \\
 \nu &= 0,12 \\
 f_y &= 58,75 \text{ KN/cm}^2 \\
 E_e &= 20470 \text{ KN/cm}^2 .
 \end{aligned}$$

Utilizando estes dados para determinar a rigidez a flexão teórica da placa obtém-se

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = 58 \text{ KNcm} . \quad (8.7.1)$$

Comparando o resultado dado em (8.7.1) com o valor obtido utilizando valores de flecha e momentos obtidos durante o ensaio se observa que a rigidez a flexão real da placa,  $D' = 126 \text{ KNcm}$ , resulta mais do que o dobro da teórica. Baseado neste fato e aconselhado pelo Prof. Riera, analisou-se, em primeiro lugar, a placa com o intuito de determinar novos parâmetros capazes de representar melhor os ensaios realizados.

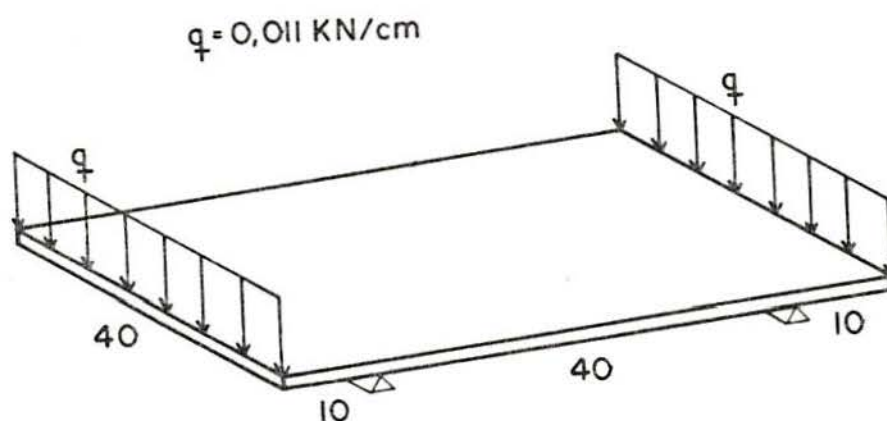


FIGURA 8.17 - Ensaio da placa

Um esquema do ensaio de flexão realizado sobre a placa está ilustrado na figura 8.17. Os parâmetros que determinaram a curva mais próxima da curva experimental são os seguintes

$$f_c = 1,0 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_c = 3900 \text{ KN/cm}^2$$

$$\nu = 0,12 .$$

A determinação destes novos parâmetros foi realizada por análise de tentativas feitas. Inicialmente, estudou-se a

placa alterando apenas o módulo elástico, concluindo-se que a resistência do concreto deveria ser diminuída. Após algumas tentativas, chegou-se aos parâmetros já mencionados. Nota-se que as características da armadura não foram alteradas.

Na figura 8.18 estão graficados os resultados obtidos com os dados utilizados no experimento e com os determinados neste estudo.

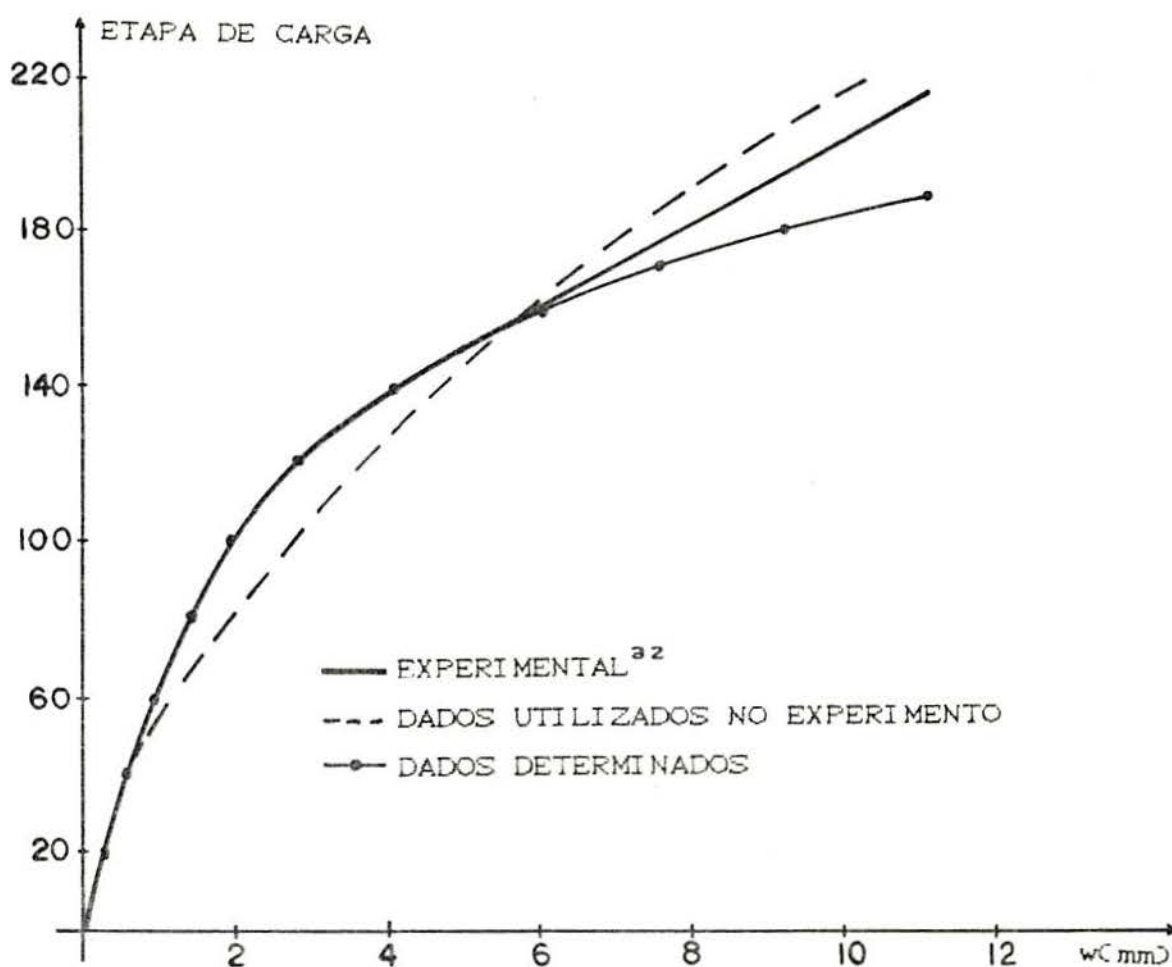


FIGURA 8.18- Deslocamento vertical central da placa

Com estes novos parâmetros, estudou-se a casca. As mesmas considerações feitas no estudo anterior, item 8.6, quanto a influência da geometria deformada são válidas aqui. A malha utilizada está representada na figura 8.19. Considerando a dupla simetria da casca, foi analisado somente um quarto da estrutura.



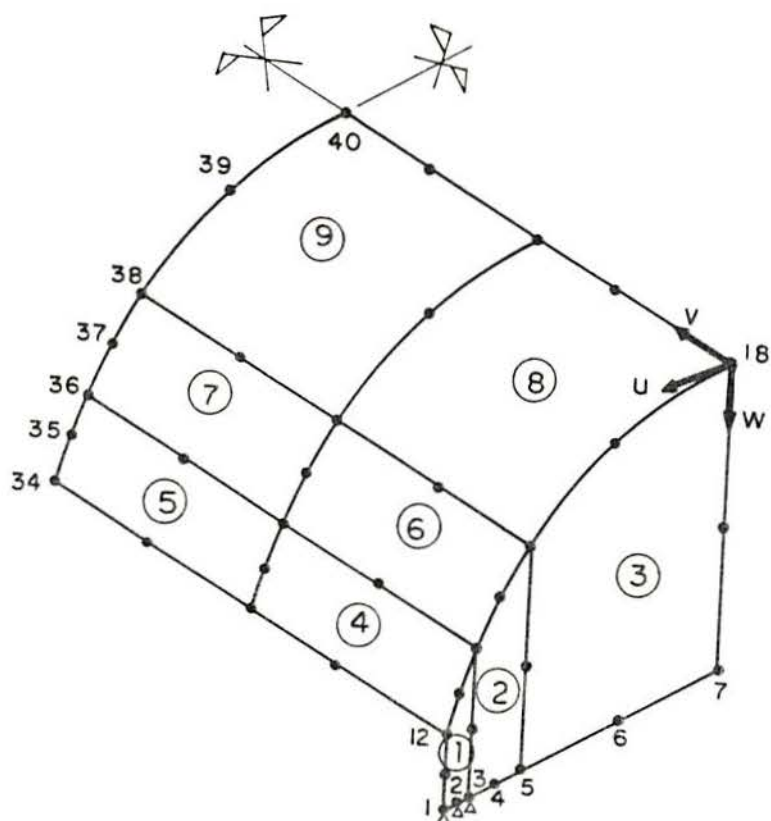


FIGURA 8.19- Malha

Os dados referentes a armadura, bem como a espessura para cada elemento, encontram-se na tabela 8.2.

TABELA 8.2- Armaduras da casca de Riera

ELEMENTO	$h$ (cm)	$z_e$ (cm)	$t_e$ (cm)
1,2,3	2,0	0	0
4,5	0,7	$\pm 0,245$	u : 0,001925 v : 0,008275
6,7, 8,9	0,7	$\pm 0,245$	u : 0,001925 v : 0,001925

Utilizou-se as mesmas restrições do exemplo anterior. A carga é vertical e uniformemente distribuída.

Os resultados obtidos aparecem na figura 8.20.

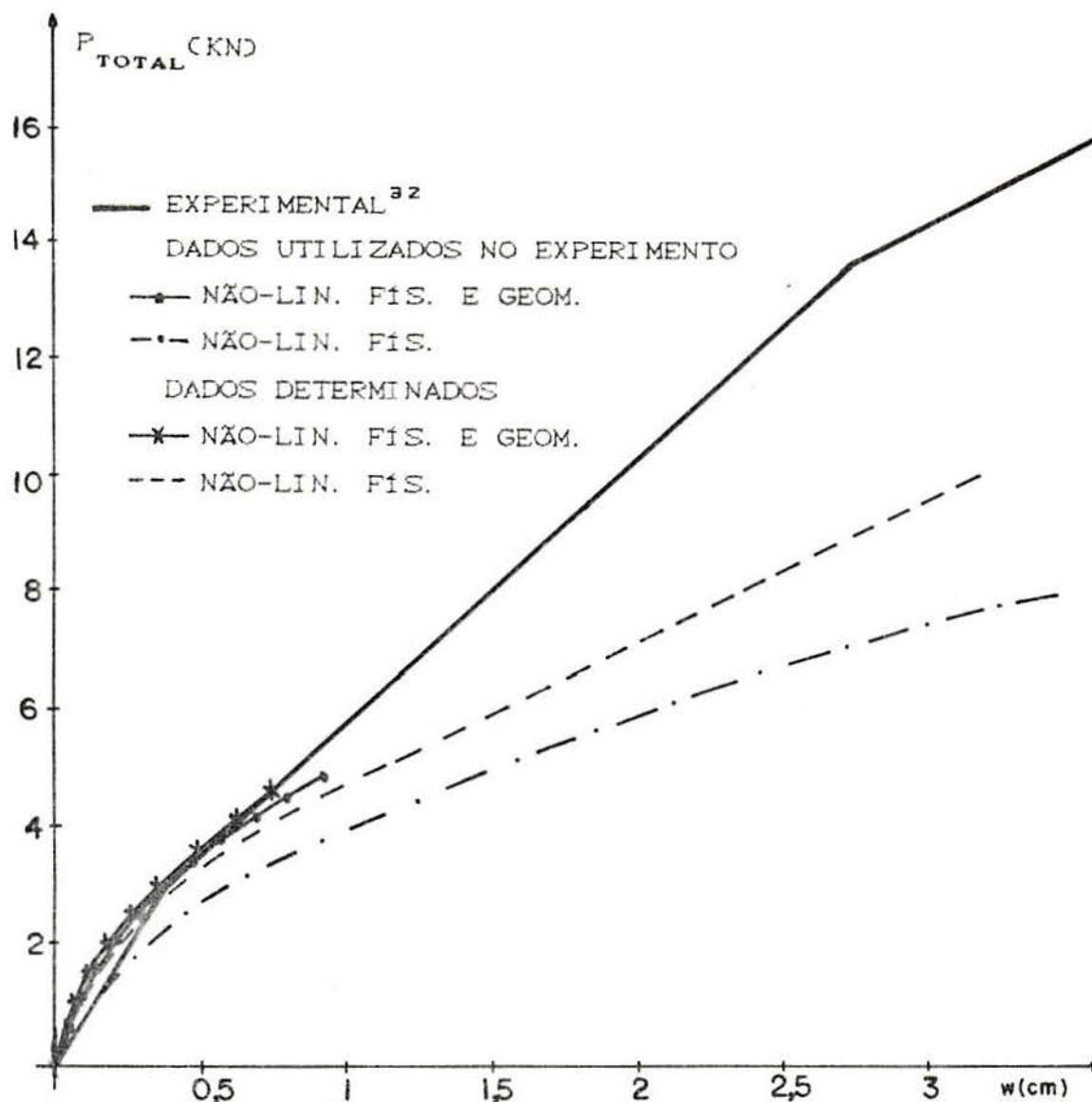


FIGURA 8.20- Deslocamentos vertical do nó 34

Nota-se que os resultados obtidos, no caso em que se considera as não-linearidades física e geométrica, são bastantes satisfatórios até que o algoritmo se instabiliza. Esta instabilidade possivelmente se deva ao fato de se estar trabalhando com integração reduzida para a flexão e membrana e, também, por se utilizar precisão simples no programa computacional implementado.

## 9- ESTUDO COMPARATIVO SOBRE A INFLUÊNCIA DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA NA CAPACIDADE FINAL DE CARGA DA ESTRUTURA

### 9.1- Generalidades

Neste capítulo se fará um estudo , através da comparação de resultados numéricos, da influência da não-linearidade física na capacidade final de carga da estrutura.

No capítulo 6 foi apresentado um critério de dimensionamento de armadura para a análise linear. Este dimensionamento é realizado para o caso em que o concreto está fissurado,  $f_t = 0$ , e a armadura está no limite do regime elástico,  $\sigma_s = f_y$  ; isto é, no estado limite último da estrutura.

O objetivo deste estudo comparativo é determinar a carga de ruptura, segundo a análise não-linear, para a estrutura dimensionada conforme o dimensionamento exposto no capítulo 6.

O procedimento adotado é o seguinte :

- 1- Análise elástico-linear do exemplo em estudo para obter as tensões generalizadas normalizadas referidas ao sistema curvilíneo;
- 2- Dimensionamento da armadura, segundo o critério exposto no capítulo 6, para as solicitações encontradas no item 1;
- 3- Análise não-linear do exemplo utilizando como dado de entrada a armadura dimensionada no item 2;
- 4- Comparação dos resultados obtidos nos itens 1 e 3 .

A seguir serão descritos os exemplos analisados.

### 9.2- Placa

Inicialmente se estudará uma placa quadrada, com carga uniformemente distribuída e simplesmente apoiada nos quatro bordos.

Na figura 9.1 estão representados a malha e os dados do problema.

$$\begin{aligned}
 h &= 8 \text{ cm} \\
 p &= 4 \text{ KN/m}^2 \\
 f_c &= 1,5 \text{ KN/cm}^2 \\
 E_c &= 2000 \text{ KN/cm}^2 \\
 \nu &= 0,3 \\
 f_y &= 43 \text{ KN/cm}^2 \\
 E_s &= 21000 \text{ KN/cm}^2 \\
 z_e &= 3 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

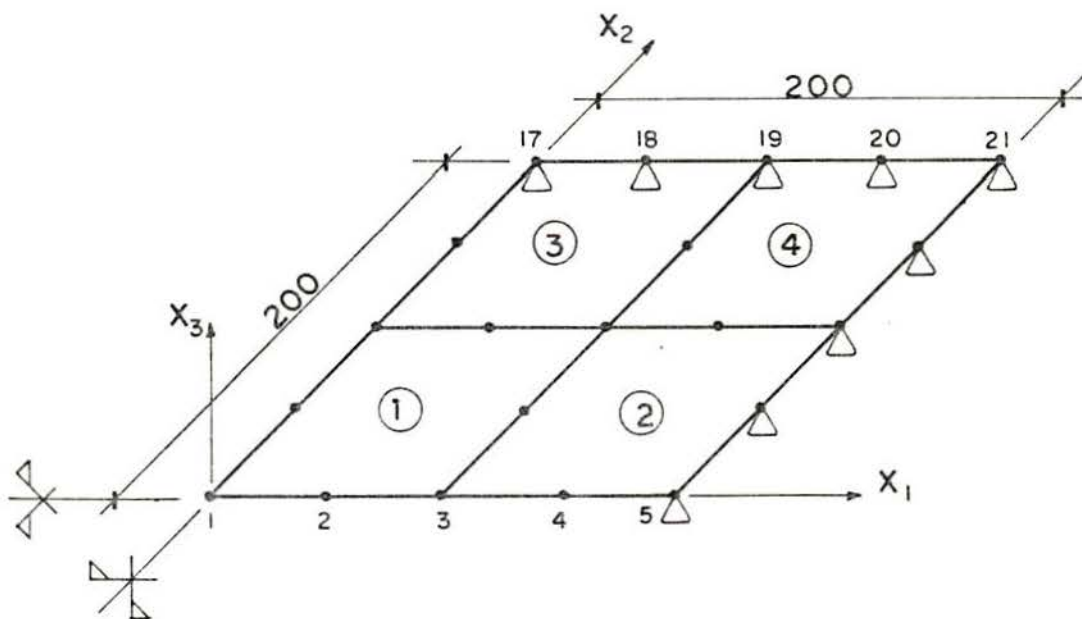


FIGURA 9.1- Placa

A distribuição do carregamento para os nós obedece o estabelecido na figura 8.5.c).

A tabela 9.1 mostra as espessuras equivalentes de aço encontradas segundo o critério de dimensionamento de LEONHARDT e MONNING<sup>2º</sup>.

TABELA 9.1 - Armaduras da placa

ELEMENTO	ARMADURA SUPERIOR		ARMADURA INFERIOR	
	DIR 1	DIR 2	DIR 1	DIR 2
1	-	-	0,014	0,014
2	-	-	0,009	0,009
3	-	-	0,009	0,009
4	0,004	0,004	0,011	0,011

Com as armaduras determinadas anteriormente, realiza-se a análise não-linear do exemplo. Com o objetivo de determinar a carga de ruptura, vai-se incrementando a carga até que a armadura entre em escoamento.

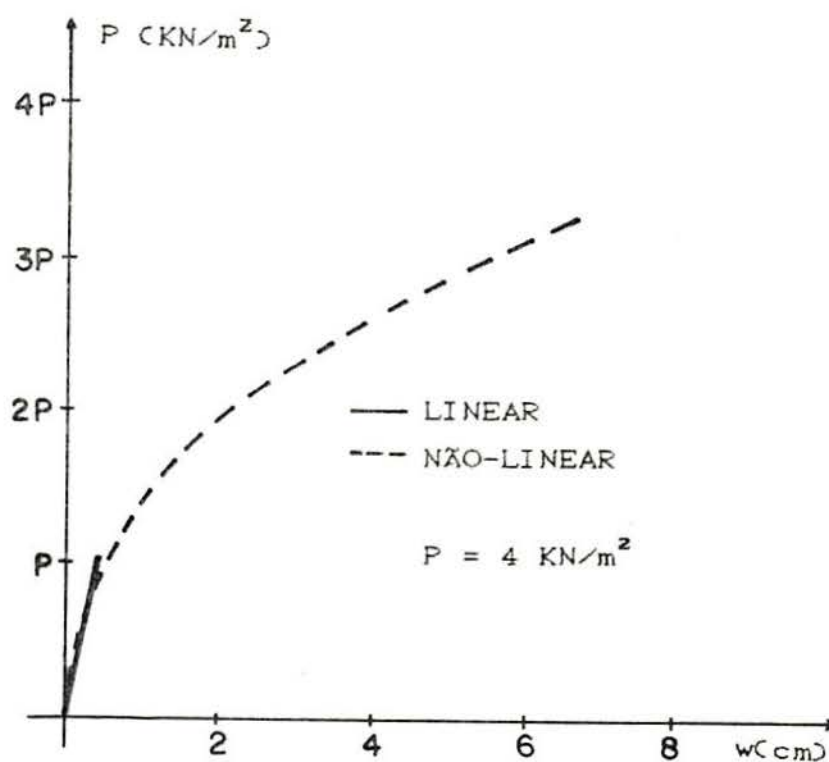


FIGURA 9.2- Deslocamento vertical do nó 1

Os resultados obtidos nas duas análises estão graficados na figura 9.2. O escoamento da armadura se inicia com uma carga de  $3,2P$ .

### 9.3- Casca

O segundo exemplo utilizado é uma casca cilíndrica com dois bordos paralelos livres e dois apoiados, carregada ao longo da geratriz central.

Os dados referentes ao problema, a geometria e a malha utilizada constam na figura 9.3.

$$h = 10 \text{ cm}$$

$$P = 25 \text{ KN}$$

$$f_c = 1,5 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_c = 2000 \text{ KN/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$f_y = 43 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_s = 21000 \text{ KN/cm}^2$$

$$z_e = \pm 4 \text{ cm}$$

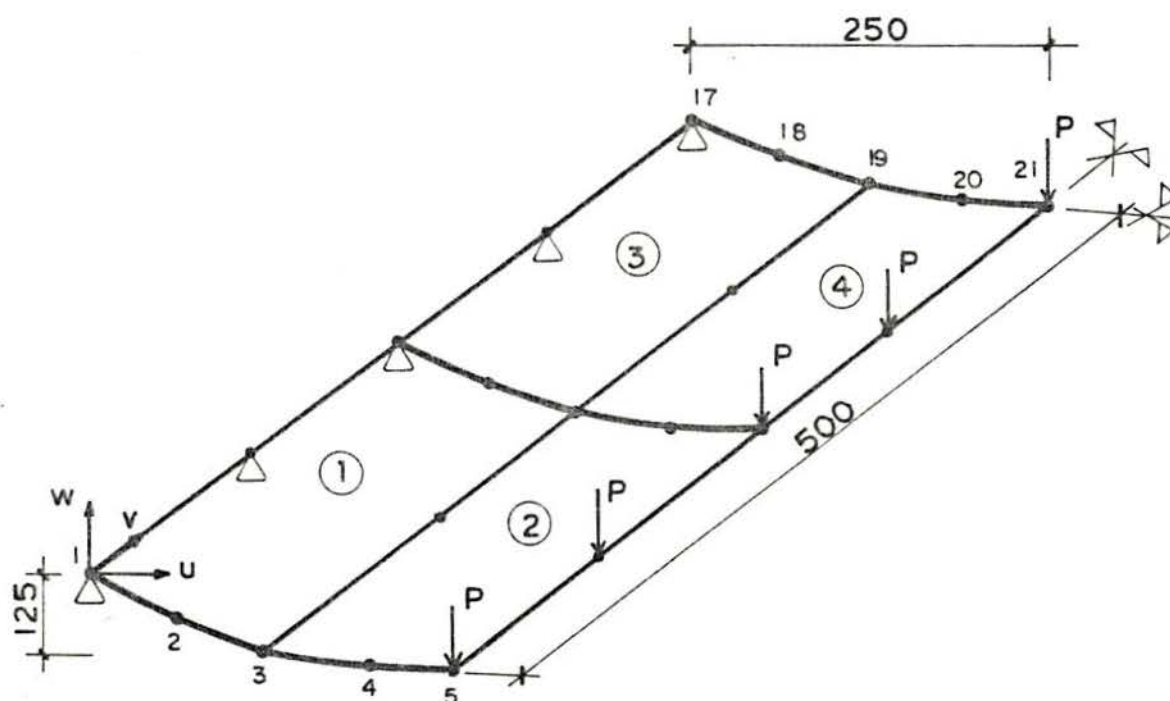


FIGURA 9.3- Casca

As espessuras de aço equivalentes determinadas no dimensionamento para a análise linear estão relacionadas na tabela 9.2.

TABELA 9.2 - Armaduras da casca

ELEMENTO	ARMADURA SUPERIOR		ARMADURA INFERIOR	
	DIR 1	DIR 2	DIR 1	DIR 2
1	0,0045	0,0151	0,0016	0,0058
2	0,0028	0,0098	0,0034	0,0123
3	0,0041	0,0136	0,0023	0,0055
4	0,0041	0,0114	0,0041	0,0139

De forma semelhante ao problema anterior, determina-se a carga de ruptura na análise não-linear.

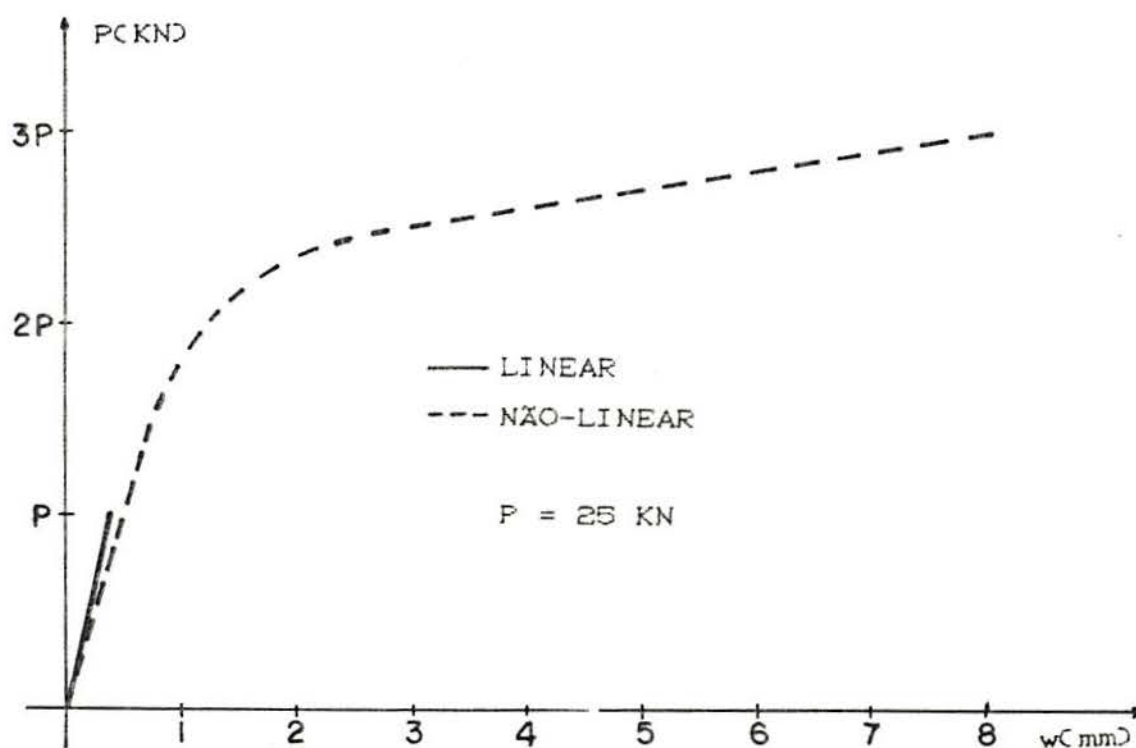


FIGURA 9.4- Deslocamento vertical do nó 21

A figura 9.4 mostra os deslocamentos verticais do nó 21 das duas análises. A carga que determinou o início do escoamento da armadura foi de 3P.



## 10 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 10.1 - Conclusões

A seguir serão relatadas algumas conclusões a que se chegou após ter-se implementado o modelo laminar proposto nos capítulos anteriores, através de um programa computacional.

Inicialmente se fará uma comparação entre o modelo desenvolvido e os de outros autores e após uma análise crítica sobre o presente trabalho.

#### 10.1.1 - Comparação com trabalhos de outros autores

A comparação será realizada com os trabalhos de BIGNON<sup>B</sup> e OWEN, FIGUEIRAS e DAMJANIC<sup>31</sup>.

Em BIGNON<sup>B</sup> as equações constitutivas são introduzidas através de uma relação geral, tri-linear, momento-curvatura e as forças de membrana são determinadas de forma elástica. Já no modelo laminar estudado, as solicitações de membrana são determinadas conjuntamente com as de flexão pelas equações constitutivas. Desta maneira, tem-se a possibilidade de avaliar a influência de restrições no contorno que estejam ligadas diretamente com os esforços de membrana.

Salienta-se que o presente trabalho utiliza a teoria de cascas apresentada por BIGNON<sup>B</sup> e que, em problemas de cascas onde a não-linearidade geométrica tem acentuada influência, o modelo laminar apresentou maior estabilidade no algoritmo de resolução do sistema de equações não-lineares.

O modelo apresentado por OWEN, FIGUEIRAS e DAMJANIC<sup>31</sup> também é laminar. Porém, no processo de solução, a matriz de rigidez global da estrutura é recalculada em todas as etapas de carga e, muitas vezes, dentro da própria etapa. Isto acarreta um custo computacional muito grande. No presente estudo, utiliza-se um algoritmo de rigidez constante. A matriz de

rigidez global é montada e triangularizada uma única vez, o que agiliza consideravelmente o modelo implementado.

#### 10.1.2 - Análise crítica sobre o modelo implementado

Da avaliação dos resultados obtidos pelo modelo desenvolvido neste estudo, pode-se concluir que é possível fazer análise não-linear estática de cascas de concreto armado com o modelo laminar empregado.

Mesmo utilizando uma teoria de pequenas deformações e rotações moderadas, consegue-se notar a influência da não-linearidade geométrica em problemas de cascas. Em placas, esta influência não é muito percebida, possivelmente pelo fato de se estar trabalhando com precisão simples devido a limitação na capacidade de memória do computador utilizado.

A adoção do modelo laminar, onde a deformação em cada camada é determinada somando-se as parcelas devidas à deformação de membrana e a deformação por corte, ligada à flexão, foi bem sucedida. As resultantes de tensões generalizadas, obtidas por integração ao longo da espessura das tensões generalizadas de cada faixa, deram resultados adequados.

Os modelos uniaxiais adotados para simular o comportamento do concreto armado forneceram respostas bastante satisfatórias, já que a fissuração limita a influência da interação entre as duas direções principais.

A alteração na rigidez da estrutura durante a fissuração é bem representada, pois foi utilizado um modelo matemático para o concreto à tração capaz de simular a rigidez adicional que aparece na seção de concreto fissurada devido à colaboração das zonas não alteradas entre fissuras.

O algoritmo incremental-iterativo com rigidez constante empregado é capaz de resolver problemas de placas e cascas de concreto armado com bastante competência. Nos exemplos de cascas cilíndricas de concreto armado submetidas a carga uniforme, tem-se verificado dificuldade para obter a convergência quando é incluído o efeito da não-linearidade geométrica. Este inconveniente já foi detectado por outros autores<sup>8, 21</sup> e, para o algoritmo escolhido, talvez se possa

obter uma melhora empregando precisão expandida e integração numérica reduzida somente para os termos que incluem a deformação por corte.

Na resolução de placas, não foi necessário a realização de iterações para aproximar a solução incremental à verdadeira solução. Já nas cascas, utilizou-se iterações a partir da zona onde inicia a fissuração.

Nas placas, o refinamento da malha não melhorou significativamente os resultados. Nas cascas, porém, recomenda-se utilizar nove ou mais elementos.

Empregou-se vinte faixas de concreto ao longo da espessura. Foram realizadas algumas tentativas com um número menor de camadas, observando-se que, quando não é levada em consideração a colaboração da tração e no começo do processo de fissuração, produz-se uma alteração brusca na resposta cada vez que é atingida a ruptura de uma faixa com a conseqüente dificuldade na convergência.

Do estudo comparativo da influência da não-linearidade física sobre a capacidade final de carga da estrutura, pode-se concluir que, empregando o critério de dimensionamento sugerido no capítulo 6<sup>2º</sup> e para os exemplos estudados neste trabalho, resulta um coeficiente de segurança maior do que três; isto é, a carga de ruptura, quando a armadura entra em fluência, é três vezes maior do que a carga de projeto.

## 10.2 - Sugestões

Com o intuito de aprimorar o modelo estudado, serão relatadas algumas sugestões para trabalhos futuros :

- estudo da influência da integração reduzida, combinando uma integração numérica de 3x3 pontos de Gauss-Legendre para a flexão e membrana, deixando a integração reduzida somente para o esforço de corte e/ou utilizando outras combinações;
- estudo da precisão do microcomputador nos problemas de não-linearidade geométrica, empregando precisão expandida ou processadores com maior número de dígitos;
- gravação em disco da matriz de rigidez global da estrutura, para possibilitar a execução de problemas com maior número de

elementos;

- colocação de um pós-processador de resultados, pois as tensões fornecidas são referidas ao sistema curvilíneo particular de cada elemento;
- melhoramento da entrada de dados, com a implementação de geração automática de malhas e cargas distribuídas lineares e de superfície;
- implementação de uma distribuição não-homogênea da espessura das faixas.

## BIBLIOGRAFIA

- 01 - AGRAWAL, G. L. ; TULIN, L. G. ; GERSTKE, K. H. "Response of doubly RC beams to cyclic loading". Journal of the American Concrete Institute, 62(7):823-825, Jul. 1965.
- 02 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS "Projeto e execução de obras de concreto armado", NBR-6118. Rio de Janeiro, 1978.
- 03 - BARZEGAR, F. "Layering of RC Membrane and Plate Elements in Nonlinear Analysis". Journal of Structural Engineering. 114(11):2474-2492, Nov. 1988.
- 04 - BATISTA, V. P. "Análise experimental da fissuração e deformação de lajes retangulares de concreto armado simplesmente apoiadas à carga uniformemente distribuída". Porto Alegre, UFRGS, Tese de Mestrado, Abr. 1984.
- 05 - BAUMANN, Th. "Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken". Der Bauingenieur 47(10):365-377, Out. 1972.
- 06 - BAZANT, F. P. e OH, B. H. "Deformation of Cracked Net-Reinforced Concrete Walls". Journal of Structural Engineering. 109(1):93-108, Jan. 1983.
- 07 - BIGNON, P. G. "A trilinear hysteretic Moment-Curvature model for impact analysis of RC Structures". Conferência sobre análise e projeto estrutural de centrais nucleares, Anais... Porto Alegre, CPGECC/UFRGS, 1984, vol.3, p.19-34.
- 08 - ————— "Análise dinâmica não-linear de cascas de concreto armado para centrais nucleares". Rio de Janeiro,

- COPPE, Tese de Doutorado em ciências, 1982 .
- 09 - \_\_\_\_\_ "Análise não-linear de estruturas de concreto"  
. Notas de aula, Porto Alegre, UFRGS, 1986.
- 10 - \_\_\_\_\_ "Na trilha de Koiter: comparando teorias de cascas". Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil , UFRGS , 1984 .
- 11 - BLAKELEY, R. W. G. e PARK, R. "Prestressed Concrete Sections with Cyclic Flexure". Journal of the Structural Division, ASCE, 99(8):1717-1742, Aug. 1973.
- 12 - BREBBIA, C. A. e FERRANTE, A. J. "Computational Methods of Engineering Problems". London, Pentech Press Limited , 1978 .
- 13 - BREBBIA, C. e CONNOR, J. "Geometrically nonlinear finite-element analysis". Journal of Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 95(2):463-83, Apr. 1969.
- 14 - CHAMPAGNOLO, J. L. "Análise experimental das deformações devido à flexão em lajes de concreto armado". Porto Alegre, UFRGS, Tese de Mestrado, Abr. 1980.
- 15 - CRISFIELD, M. A. "Accelerated Solution Techniques and Concrete Cracking". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 33:585-607 , 1982.
- 16 - \_\_\_\_\_ "A faster modified Newton-Raphson iteration". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering . 20:267-278, 1979.
- 17 - DARVALL, P. L. ; BILLINGTON, D. P. e MARK, R. "Model analysis of a continuous microconcrete cylindrical shell". ACI Journal, 68(11), Nov. 1971.
- 18 - FUNG, Y. C. "A first Course In Continuum Mechanics". Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall , 1969.

- 19 - GASTAL, F. P. S. L. "Análise Numérico-Experimental de um Modelo Reduzido de uma Estrutura de Contenção para Centrais Nucleares". Porto Alegre, UFRGS, Tese de Mestrado, 1979.
- 20 - GILBERT, R. I. e WARNER, R. F. "Tension Stiffening in RC slabs". Journal of the Structural Division .12:1885-1900, Dec. 1978.
- 21 - GREEN, A. E. e ZERNA, W. "Theoretical elasticity". Oxford, Clarendon Press, 1968 .
- 22 - GUPTA, A. K. e MAESTRINI, S. R. "Post-Cracking Behavior of Membrane Reinforced Concrete Elements Including Tension-Stiffening". Journal of Structural Engineering. 115(4):957-976, Apr. 1989.
- 23 - ——— "Unified Approach to Modeling Post-Cracking Membrane Behavior of RC" . Journal of Structural Engineering. 115(4):977-993, Apr. 1989.
- 24 - GUPTA, A. K. e AKBAR, H. "Cracking in RC Analysis". Journal of Structural Engineering. 110(8):1735-1746, Aug. 1984.
- 25 - HAN, K. J. e MAU, S. T. "Membrane Behavior of RC Shell element and limits on reinforcement". Journal of Structural Engineering. 114(2):425-444, Fev. 1988.
- 26 - HEDGREN JR., A. W. e BILLINGTON, D. P. "Mortar model test on a cylindrical shell of varying curvature and thickness". ACI Journal. 64(2):73-83, Fev. 1967.
- 27 - JOFRIET, J. C. e MCNEICE, G. M. "Finite element analysis of reinforced concrete slabs". Journal of the structural Division. 97(3):785-806, Mar. 1971.
- 28 - KOITER, W. T. "A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells". Symposium on the theory of thin elastic shells, DELFT, Aug. 1959.

Proceedings. Amsterdam, North-Holland, 1960.

- 29 - LEONHARDT, F. e MONNING, E. "Construções de Concreto, volume 2 : Casos Especiais de Dimensionamento de Concreto Armado". Rio de Janeiro, Interciência, 1978.
- 30 - MARTINS, A. S. F. "Estudo do comportamento de estruturas compostas por peças laminares de concreto armado, solicitadas por cargas paralelas e normais ao seu plano médio, através do método de elementos finitos". Porto Alegre, UFRGS, Tese de Mestrado, Dez. 1989.
- 31 - OWEN, D. R. J.; FIGUEIRAS, J. A. e DAMJANIC, F. "Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 41(3):323-366, Dec. 1983.
- 32 - RIERA, J. D. ; CUDMANI, R. C. ; REIMUNDIN, J. C. ; DANESI, R. "Ensayos a la Ruptura de Cascas de Hormigón Armado sobre Modelos a Escala Reducida". La Ingeniería, 1006, Dez. 1969.
- 33 - SCHIRMBECK, F. R. G. "Diagramas momento - curvatura para elementos estruturais de concreto armado submetidos à carregamento cíclico ou monotônico". Porto Alegre, UFRGS, Tese de Mestrado, Jul. 1988 .
- 34 - TRIGO, N. A. "Análise de cascas ortotrópicas de revolução submetidas a cargas arbitrárias". Porto Alegre, UFRGS, Tese de Mestrado, 1981.
- 35 - VEBO, L. e GHALI, A. "Moment-Curvature relation of RC slabs". Journal of the Structural Division. ASCE, 103(3):515-531, Mar. 1977.
- 36 - ZIENKIEWICZ, O. C. "The finite element method in engineering science". New York, McGraw-Hill, 1971.