



Instituto de  
MATEMÁTICA  
E ESTATÍSTICA

UFRGS



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

EDUARDO ALVES DA SILVA

**UM PARALELO ENTRE AS IDEIAS DE FELIX KLEIN E OS EFEITOS DA OBMEP**

Porto Alegre  
2017

EDUARDO ALVES DA SILVA

**UM PARALELO ENTRE AS IDEIAS DE FELIX KLEIN E OS EFEITOS DA OBMEP**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento e Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Miriam Telichevesky

Porto Alegre

2017

EDUARDO ALVES DA SILVA

**UM PARALELO ENTRE AS IDEIAS DE FELIX KLEIN E OS EFEITOS DA OBMEP**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento e Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Banca examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Miriam Telichevesky – Orientadora  
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luisa Rodriguez Doering  
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Patrícia Kruse Klaser  
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

## AGRADECIMENTOS

Neste momento tão especial em minha vida, agradeço imensamente a Deus por todas as oportunidades que tive e por todo o Seu auxílio em minha trajetória, a qual muitas vezes não foi fácil persistir firme diante das dificuldades encontradas.

Agradeço do fundo do meu coração aos meus amados e queridos pais por todo o apoio, carinho e educação dados em toda a minha vida. Mesmo não sabendo da “dimensão” que a oportunidade de estudo pode nos proporcionar, sempre apoiaram a minha decisão de ingressar no Ensino Superior e torceram por mim. Essa “torcida” foi algo de extremo incentivo em toda esta etapa. Ambos sabiam e sabem do quanto tudo isto é importante para mim. Tenho vasta gratidão por todos os seus nobres exemplos e por serem aqueles que eu dedico este trabalho.

Agradeço, além de meus pais, a todo o restante da minha extensa família que também sempre me incentivou. Ser o primeiro graduado na família por parte de pai será uma honra inestimável. Isto demonstra o quanto estamos avançando em termos de proporcionar o acesso ao Ensino Superior às pessoas de baixa renda.

Existem pessoas que estão ao nosso lado, às vezes mesmo distantes, vibram com nossas conquistas e se importam verdadeiramente conosco. Elas se chamam amigos e não poderia deixar de agradecer-los.

Agradeço em especial aos meus melhores amigos de Vacaria, Erivelto W. e Jenifer B., pela amizade sincera desde os tempos de escola. Ficar longe de ambos, assim como da minha família, não foi fácil. Apreciar da companhia de vocês quando eu ia para minha cidade durante esse tempo foi algo muito importante para mim.

Agradeço também a minha amiga conterrânea Tainara G., também oriunda do Curso Normal (magistério), pelo companheirismo ao longo da graduação e durante o curso de verão no IMPA no verão de 2015, pelas longas e belas discussões matemáticas e por sempre estar disposta a ter ouvidos para esta pessoa que escreve.

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela formação de excelência que me proporcionou e agora está me proporcionando no Mestrado, e também pela oportunidade de conhecer pessoas diferentes e incríveis que hoje posso chamar de amigos. Agradeço a vocês: Rodrigo B., Maicon R., Maria Luiza C., Karen A., Jackson F., Juliano L., Marcos H., Rebeca F. e Tailana B.

Agradeço à Juliana A. por ser a minha “primeira amiga” da UFRGS no meu primeiro semestre, por me mostrar com tudo “funcionava” e principalmente por

estudarmos juntos a disciplina Análise Matemática A, muitas vezes indigesta em alguns momentos. Falando em Análise, tenho que agradecer aos amigos Júlia D. e Yuri T. pelo estudo conjunto também nessa disciplina. Descobrimos muitas coisas juntos e principalmente percebi o quanto o estudo em grupo pode fazer diferença na aprendizagem de uma pessoa.

Agradeço a todos os meus colegas pelos momentos de discussão matemática e pedagógica, pela troca de experiências e pelo apoio durante a graduação. Deixo agradecimentos a Darchan S. pelas belas e calorosas discussões de Álgebra. Penso que aprendemos muito um com o outro, sobretudo apontando os erros alheios.

Agradeço muito aos meus magníficos professores pelo ensino que me proporcionaram. Minha formação matemática e pedagógica é devida a todos vocês que têm o meu reconhecimento. Saibam que aprendi muito com cada um, que fez a sua maneira que eu desbravasse o universo da Matemática e da Educação e me orientou no maravilhoso mundo do conhecimento. Reservo agradecimentos especiais ao professor Eduardo Henrique de Mattos Brietzke pela prestatividade, paciência e valiosos ensinamentos ao longo das quatro disciplinas que pude cursar com sua pessoa.

Agradeço muito à professora Miriam Telichevesky por me aceitar orientar neste trabalho de conclusão de curso. Sua loucura e paixão pela Matemática me “conquistaram” desde a disciplina de Geometria II. Tenho orgulho de ter feito parte de uma das suas primeiras turmas como professora da UFRGS. Também agradeço por me convidar para ser seu monitor na sua turma do PIC Jr. e pela confiança depositada. Ao ver este trabalho concluído tenho a certeza de que formamos uma boa dupla.

Agradeço especialmente também às professoras Luisa Rodriguez Doering e Patrícia Kruse Klaser por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho e se disporem a analisá-lo.

É claro que não poderia deixar de agradecer à OBMEP, que representou e representa muito em minha vida, proporcionando-me experiências incríveis como o PIC Jr. e o PICME que me fizeram ainda ter mais apreço pela Matemática. Agradeço pela oportunidade de conhecer pessoas fantásticas que também gostam de Matemática entre professores e outros alunos do nosso país, alguns dos quais assim como na UFRGS, da mesma forma posso chamar de amigos.

Agradeço de um modo geral a todas as pessoas que colaboraram de alguma forma não somente para a realização deste trabalho, mas para que eu conseguisse chegar até aqui.

Senti durante o curso de Licenciatura em Matemática que o ato de escrever é de fato um exercício. Ao escrevermos podemos sistematizar a prática pedagógica, refletir sobre acertos e erros, pensar acerca da validade das experiências realizadas para o processo de ensino-aprendizagem, aprimorar e articular conhecimentos, principalmente relacionando a teoria com a prática. Certamente este trabalho de conclusão de curso foi uma peça muito importante para a minha formação docente.

Com base em todas as experiências vivenciadas durante o curso de Licenciatura assinalo que elaborar e planejar atividades de modo que o conhecimento matemático seja melhor aprendido, que mobilizem o aluno a pensar e permitam um entendimento do nosso mundo se constituem como grandes desafios contínuos para o educador.

Penso fortemente que a minha formação docente não se esgota aqui no final deste curso de Licenciatura e que ainda terei muitas experiências que auxiliarão a constituir minha identidade como profissional professor, ainda mais diante da evolução constante da Educação Matemática e suas tendências.

Por fim, a todos que fizeram parte nesta etapa tão importante para mim deixo meus sinceros agradecimentos.

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus amados e queridos pais que sempre fizeram de tudo para que eu pudesse me tornar a pessoa que sou hoje. Dedico também a minha madrinha Josefina (Zefa) (*in memoriam*) pelo exemplo digníssimo de pessoa.

*“Naruto: Por que ir tão longe por minha causa? Sacrificando a sua vida assim...  
Neji: Porque... me chamam de gênio...”*

Trecho do mangá Naruto



## RESUMO

Esta pesquisa propõe identificar e analisar as potencialidades do trabalho com questões da OBMEP, e suas contribuições para a aprendizagem dos alunos, examinando concomitantemente no ensino a exequibilidade da temática proposta por Klein, baseada na Matemática Elementar estudada na escola sob uma perspectiva superior.

**Palavras-chave:** OBMEP, Felix Klein, dupla descontinuidade, Matemática Elementar, Matemática Superior.

## **ABSTRACT**

This research proposes to identify and analyze the potentialities of work with OBMEP issues and its contributions to student learning, concomitantly examining in the teaching the feasibility of the theme proposed by Klein, based on Elementary Mathematics studied in school from a higher perspective.

**Key-words:** OBMEP, Felix Klein, double discontinuity, Elementary Mathematics, Higher Mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Estrutura organizacional do Projeto Klein de Matemática em Português...	27
Figura 2: Definição de poliedro.....	58
Figura 3: Sólido geométrico inicial.....	58
Figura 4: Sólidos geométricos .....	60
Figura 5: Questão 3 do Banco de Questões 2015 da OBMEP .....	64
Figura 6: Resposta do Aluno 2.....	67
Figura 7: Resposta do Aluno 6.....	67
Figura 8: Resposta do Aluno 8.....	67
Figura 9: Resposta do Aluno 4.....	68
Figura 10: Resposta do Aluno 10.....	68
Figura 11: Resposta do Aluno 11.....	68
Figura 12: Questão 28 do Banco de Questões 2015 da OBMEP .....	74
Figura 13: Problema 4.4 da apostila 1 do PIC Jr.....	78
Figura 14: Resposta do Aluno A.....	79
Figura 15: Resposta do Aluno C .....	80
Figura 16: Resposta do Aluno D .....	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: .....	20
-----------------	----

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: .....	61
-----------------	----

## LISTA DE SIGLAS

Todas as siglas utilizadas no texto não serão explicitadas, a menos que seu contexto inerente o exija para fins de compreensão.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

IMO – Olimpíada Internacional de Matemática

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PIC Jr. – Programa de Iniciação Científica Júnior

PICME – Programa de Iniciação Científica e Mestrado

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos

POTI – Polo Olímpico de Treinamento

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE ABREVIATURAS

MDC – Máximo Divisor Comum

MMC – Mínimo Múltiplo Comum

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>2. CONTEXTUALIZAÇÃO .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1. Olimpíadas de Matemática .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1.1. OBMEP e tópicos correlatos .....</b>	<b>18</b>
<b>2.2. As ideias de Felix Klein – dupla descontinuidade e Matemática Elementar de um ponto de vista superior .....</b>	<b>23</b>
<b>2.3. A temática da OBMEP em paralelo com as ideias de Klein.....</b>	<b>26</b>
<b>3. DELINEAMENTO ESTRUTURAL DA PESQUISA .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1. Objetivos .....</b>	<b>29</b>
<b>3.2. Metodologia .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2.1. Estudo de caso: caracterização .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2.2. Estudo de caso no contexto do presente trabalho .....</b>	<b>31</b>
<b>4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>35</b>
<b>4.1. Apontamentos gerais.....</b>	<b>35</b>
<b>4.2. As temáticas da pesquisa no cenário educacional .....</b>	<b>36</b>
<b>4.2.1. Alguns estudos sobre o uso de ferramentas da OBMEP na Educação Matemática.....</b>	<b>36</b>
<b>4.2.2. As ideias de Klein na Educação Matemática: alguns apontamentos e reflexões sobre as possíveis contribuições da OBMEP .....</b>	<b>41</b>
<b>5. PRÁTICAS DE ENSINO .....</b>	<b>49</b>
<b>5.1. Caracterização de elementos constituintes e coleta de dados da pesquisa .....</b>	<b>49</b>
<b>5.2. Apresentação dos casos .....</b>	<b>50</b>
<b>6. ATIVIDADES REALIZADAS NA PRÁTICA DE ENSINO, QUESTIONÁRIOS E ANÁLISE DOS DADOS .....</b>	<b>54</b>
<b>6.1. Prática de ensino no Colégio Estadual Paula Soares .....</b>	<b>55</b>
<b>6.1.1. Atividade Pensando na definição de poliedros .....</b>	<b>56</b>



6.1.2. Atividade relação de Euler e poliedros convexos .....	63
6.1.3. Outras atividades realizadas e mais apontamentos interessantes.....	69
6.2. Prática de ensino com alunos do PIC Jr. ....	73
6.2.1. Questão 28 - Nível 3 - Banco de Questões OBMEP 2015.....	74
6.2.2. Problema 4.4 da apostila 1 do PIC Jr.....	77
6.3. Questionários .....	81
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	87
8. REFERÊNCIAS.....	90
9. ANEXOS .....	96
9.1. Questionário aos professores habilitados do PIC/OBMEP na Escola alunos do curso de Licenciatura em Matemática.....	96
9.2. Questionário aos professores habilitados do PIC/OBMEP na Escola atuantes na Educação Básica .....	97
9.3. Termo de consentimento informado Colégio Estadual Paula Soares .....	98
9.4. Termo de consentimento informado PIC Jr. ....	99
9.5. Termo de consentimento informado para alunos .....	100
9.6. Termo de consentimento informado para professores do PIC Jr.....	101
10. APÊNDICE.....	102
10.1. Exemplos de questões da OBMEP .....	102
10.1.1. Questão 9 – 1ª fase – Nível 1 – OBMEP 2009 .....	102
10.1.2. Questão 5 – 2ª fase – Nível 1 – OBMEP 2011 .....	103
10.2. Planejamentos das atividades realizadas na prática de ensino no Colégio Estadual Paula Soares.....	104
10.2.1. Planejamento da atividade Pensando na definição de poliedros ...	104
10.2.2. Planejamento da atividade relação de Euler e poliedros convexos	105
10.3. Soluções das atividades realizadas nas práticas de ensino .....	107
10.3.1. Solução da atividade Pensando na definição de poliedros.....	107
10.3.2. Solução da atividade relação de Euler e poliedros convexos.....	108

<b>10.3.3. Solução da questão 28 - Nível 3 - Banco de Questões OBMEP 2015</b>	
.....	<b>109</b>
<b>10.3.4. Solução do problema 4.4 da apostila 1 do PIC Jr.....</b>	<b>110</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho de conclusão de curso foi motivado principalmente pelas minhas experiências com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e alguns de seus diversos programas, sendo um dos muitos alunos “capturados” pela competição que hoje estão envolvidos no meio acadêmico, seja em cursos de graduação ou pós-graduação da área de ciências exatas ou qualquer outra. Além disso, considero que as proposituras deste trabalho de conclusão de curso, de certa forma envoltas à OBMEP, podem trazer contribuições para a Educação Matemática.

As questões de pesquisa foram formuladas de modo a estabelecer aspectos convergentes entre as duas temáticas abrangidas pelo trabalho: a OBMEP e as ideias de Klein. Estas se principiam em: *“Relações entre a Matemática aprendida na escola e a Matemática vista no Ensino Superior podem ser contributivas para o processo de ensino-aprendizagem?”* e *“Como a OBMEP pode auxiliar com isso em relação às proposituras envolvidas à questão anterior?”*.

Atentaremos às formas que a OBMEP pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática de modo a contemplar o maior alunado possível e ao impacto desta para os alunos regulares<sup>1</sup>, mais especificamente para os alunos não medalhistas, em sua aprendizagem de Matemática e gosto pela disciplina.

Para responder tais questões, foram realizados estudos de caso com alunos do 3º ano do Ensino Médio e do PIC Jr. da OBMEP, bem como a aplicação de um questionário semiestruturado com professores do último programa. O estudo indica que a utilização dos materiais da OBMEP e seus programas parceiros na proposta deste trabalho vinculada às ideias de Klein possui potencial no processo de ensino-aprendizagem, e observou-se, sobretudo, que os alunos tornaram-se mais questionadores. A análise dos questionários revela que foram detectadas ambas as descontinuidades evidenciadas por Klein e que estas trazem consequências para o trabalho do professor em sala de aula.

---

<sup>1</sup> O sentido de aluno regular que está sendo adotado neste trabalho não é significado como o estudante que não possui deficiência ou algo do tipo, e sim como aquele aluno que não possui destaque na disciplina de Matemática.

## 2. CONTEXTUALIZAÇÃO

### 2.1. Olimpíadas de Matemática<sup>2</sup>

Uma olimpíada de Matemática possui similaridades com olimpíadas esportivas que são comumente conhecidas pelas pessoas em geral esportivas em razão do enfoque dado pelos meios de comunicação. É uma competição composta por regras e obrigações como em qualquer modalidade esportiva em que o candidato disputa com os demais concorrentes a fim de alcançar a vitória. Em particular, neste tipo de olimpíada o que se espera deste é a demonstração de sua capacidade de resolver problemas, o que requer habilidades como interpretação e criatividade.

Podemos entender, em suma, que uma olimpíada de Matemática pode ser caracterizada por uma sucessão de provas constituídas de problemas desafiadores em que é necessária a utilização da Matemática para resolvê-los. Neste caso, o treinamento equivalente ao de um atleta nas competições esportivas para um candidato dá-se por meio da resolução de problemas objetivando o desenvolvimento de competências lógicas assim como métodos adequados para solucioná-los a fim de organizar melhor o(s) raciocínio(s) envolvido(s).

Da mesma forma que nas demais competições olímpicas, existe uma premiação para os participantes com desempenho destacado, a qual consiste de medalhas e menções honrosas e em algumas delas, outras condecorações como bolsas de estudo. Em alguns casos particulares, os professores são premiados conforme o desempenho dos seus alunos e órgãos institucionais de educação como Secretarias Municipais de Educação também recebem uma distinção de acordo com a atuação da região de abrangência correspondente. Contudo, para muitos candidatos o maior prêmio é a possibilidade de competir e ter contato com outros indivíduos que sentem a mesma paixão pela Matemática.

As olimpíadas de Matemática não se remontam à atualidade ou a períodos de tempo relativamente recentes. Pesquisas apontam sobre a existência de competições matemáticas em caráter não oficial desde meados do século XVI. É evidente, pelo contexto histórico, que tais disputas não apresentavam a formatação atual.

---

<sup>2</sup> Em relação à obtenção de dados em que não foram explicitadas as referências no corpo do trabalho, foram feitas pesquisas nos sites das olimpíadas e outras fontes mencionadas ao longo deste. VIDE REFERÊNCIAS.

A primeira olimpíada de Matemática que se tem conhecimento com estruturação semelhante às atuais ocorreu na Hungria em 1894. A partir deste marco, outras competições matemáticas foram se originando na Europa e em outros lugares até chegarmos ao momento atual.

Em particular, a OBMEP foi inspirada nos moldes do projeto NUMERATIZAR, do estado do Ceará. Tal projeto apresentou sua primeira edição em 2003 sob a coordenação da Universidade Federal do Ceará, tendo o formato muito similar ao de uma olimpíada e possuindo proposituras a nível regional muito assemelhadas com as da OBMEP a nível nacional: o aprimoramento do ensino nas instituições públicas, a descoberta de novos talentos e o incentivo para o estudo da disciplina de Matemática.

Focalizando para o Brasil, as olimpíadas de abrangência geográfica nacional e internacional que se sobressaem são a OBMEP, a OBM e a IMO. Nas referências anteriormente supracitadas e em outros trabalhos acadêmicos da área o leitor pode encontrar mais informações sobre o contexto histórico de todas elas bem como em seus sites oficiais correspondentes. Neste trabalho nos atentaremos particularmente para a OBMEP.

### **2.1.1. OBMEP e tópicos correlatos**

Atualmente em sua 13ª edição, a OBMEP é uma iniciativa conjunta do IMPA e a SBM, responsáveis por sua coordenação acadêmica, em parceria com o Ministério de Ciência e Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e do Ministério da Educação (MEC).

Entre os objetivos da OBMEP, oriundos do seu site oficial (OBMEP 2017 - Regulamento, 2017), podemos destacar:

1. Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
2. Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que o maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
3. Promover a difusão da cultura matemática.
4. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
5. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
6. Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
7. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. (OBMEP 2017 - Regulamento, 2017)

Embora não esteja mencionado explicitamente na lista anterior outro objetivo culminante da referida competição é dar acesso a “todas as classes” sociais participarem como forma das instituições de ensino possuírem algum destaque no panorama olímpico. Como coerência em relação à própria denominação, o público alvo da OBMEP são estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio de instituições públicas de ensino municipais, estaduais e federais. O alunado contemplado pela competição é distribuído por meio de três níveis: Nível 1 (estudantes do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental), Nível 2 (estudantes do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental) e Nível 3 (estudantes do Ensino Médio). Entretanto, neste ano as instituições de ensino privadas estão sendo convidadas a participar da OBMEP.

Todas as provas da competição englobando todos os níveis são divididas em duas fases. A primeira fase consiste de uma prova composta por 20 questões<sup>3</sup> objetivas com cinco alternativas – (a), (b), (c), (d), (e) – em cada. Nela o aluno não precisa apresentar os cálculos e raciocínios correlatos e nesta etapa todos os discentes inscritos em escolas públicas participam da disputa, a qual é realizada nas próprias instituições de ensino correspondentes.

Para a segunda fase classificam-se os alunos com desempenho destacado na primeira. De acordo com o número total de acertos, é elaborada a listagem dos discentes classificados aptos para a segunda fase. A correção das provas e seleção dos estudantes são atribuídas à escola, perfazendo em média um total de 5% dos alunos inscritos pela instituição em cada nível.

A segunda fase constitui-se de uma prova de caráter discursivo em que neste caso as seis questões componentes divididas em itens não são mais objetivas, e sim dissertativas. Desta forma, os alunos devem exibir todos os cálculos e/ou estratégias por eles adotados deixando de maneira explícita o raciocínio envolvido. A correção das provas desta etapa fica ao encargo de uma comissão regional designada pela OBMEP, que após estabelecer uma pontuação de corte, estas são direcionadas a uma comissão nacional unificada que indica os premiados na competição.

Podemos perceber pela tabela a seguir construída a partir de dados do site oficial da OBMEP que nestes doze anos de olimpíada houve um crescimento significativo na quantidade de escolas e estudantes inscritos. Tais dados podem

---

<sup>3</sup> Exemplos de questões da primeira fase e segunda fase da OBMEP estão constados no apêndice deste trabalho.

indicar o reconhecimento e de certa forma uma confirmação de que a promoção da competição tem atingido seus objetivos, visto a expressiva adesão da comunidade escolar.

Tabela 1. OBMEP em Números

<b>Edição</b>	<b>Escolas inscritas 1ª fase</b>	<b>Escolas inscritas 2ª fase</b>	<b>Alunos inscritos 1ª fase</b>	<b>Alunos inscritos 2ª fase</b>	<b>Municípios inscritos 1ª fase</b>	<b>Municípios inscritos 2ª fase</b>
<b>2005</b>	31.031	29.074	10.520.831	457.725	93,5%	91,9%
<b>2006</b>	32.655	29.661	14.181.705	630.864	94,5%	92,4%
<b>2007</b>	38.450	35.483	17.341.732	780.333	98,1%	96,9%
<b>2008</b>	40.397	35.913	18.326.029	789.998	98,7%	96,9%
<b>2009</b>	43.854	39.387	19.198.710	841.139	99,1%	98,1%
<b>2010</b>	44.717	39.929	19.665.928	863.000	99,16%	98,3%
<b>2011</b>	44.691	39.935	18.720.068	818.566	98,9%	98,1%
<b>2012</b>	46.728	40.770	19.166.371	823.871	99,42%	98,5%
<b>2013</b>	47.144	42.480	18.762.859	954.926	99,35%	98,83%
<b>2014</b>	46.711	41.302	18.192.526	907.446	99,41%	99,41%
<b>2015</b>	47.580	42.316	17.972.333	889.018	99,48%	97,62%
<b>2016</b>	47.474	43.232	17.839.424	913.889	99,59%	99,05%
<b>2017</b>	53.230	–	18.240.170	–	99,57%	–

Fonte: (OBMEP 2017 - OBMEP em Números, 2017)

Ao confrontarmos a OBMEP com as demais olimpíadas de Matemática do mundo, tal competição configura-se como a maior delas em termos de participação (CGEE, 2011, p. 47). A âmbito nacional, segundo a última referência e informações fornecidas pelos gestores da olimpíada, os dados fazem de tal política pública uma das iniciativas governamentais de maior alcance territorial.

Desde a sua primeira edição até a atual, estudos realizados por CGEE (2011) e Soares et al. (2014) apontam que a OBMEP promoveu um impacto positivo na Educação Básica em relação a aspectos negativos pertinentes. Ademais que possibilitou a revelação de novos talentos nas áreas científicas e tecnológicas e suscitou o surgimento de programas “amigos da competição” como o “OBMEP na Escola”, o “Portal da Matemática”, entre outros.

Acerca da olimpíada, diversos trabalhos de cunho estatístico e estudos de impacto na Educação Matemática e em avaliações educacionais como a Prova Brasil, ENEM e PISA vêm sendo feitos em âmbito nacional e internacional. Exemplos de referências neste sentido são os trabalhos realizados por Alves (2010), CGEE (2011), Soares et al. (2014), Schmidt et al. (2015) e Vilarinho (2015). Isto demonstra de certa forma a relevância da competição como temática de investigação dentro do cenário de pesquisa científica.

Apesar de algumas contribuições e dos aspectos positivos da OBMEP na educação, como contraponto vem a questão constatada por algumas das referências anteriores de como obter sucesso na competição em que poucos se destacam. Neste sentido podemos nos questionar se em uma pesquisa envolta à competição devem haver proposituras pedagógicas direcionadas somente a este último aspecto ou apenas aliadas ao processo de ensino-aprendizagem de forma geral e não tentando “reverter” a situação em questão.

Como observado por Todeschini (2012), no estudo de qualquer temática relacionada à OBMEP é relevante considerarmos o tipo de instituição a nível administrativo em que os alunos estão matriculados. Com efeito, inúmeras escolas públicas, dentre as quais muitas instituições federais e de Ensino Técnico, possuem procedimentos seletivos para o ingresso de seus estudantes. Assim, tais instituições relativamente possuem um corpo de alunos diferenciado, que já teve que passar por uma seleção rígida, e deste modo apresenta uma tendência a se destacar nas diversas áreas do conhecimento.



Neste sentido, ao longo dos anos a coordenação acadêmica da OBMEP ao observar que majoritariamente estavam se destacando apenas Colégios Militares, Colégios de Aplicação e Institutos Federais na competição tomou a atitude de alterar o regulamento vigente estabelecendo certa diferenciação entre instituições seletivas e não seletivas. Tal diferenciação deu-se por meio da restrição da quantidade de premiações para escolas seletivas, dando a possibilidade de que discentes de escolas não seletivas tivessem uma maior chance de conquistar uma medalha ou uma menção honrosa.

Em sua pesquisa envolta a OBMEP sob uma perspectiva da Resolução de Problemas Fideles (2014) na parte inerente às considerações sinaliza que as olimpíadas podem atuar mais do que meras competições no processo de ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática. Enxergamos, portanto, que a OBMEP pode ser melhor aproveitada em seu contexto pedagógico de modo que efetivamente auxilie na aprendizagem de Matemática, criando no aluno um apreço pela disciplina.

Algo que corrobora a consideração anterior não somente no panorama escolar são as diversas iniciativas da OBMEP na forma de programas que podemos considerar como “parceiros da competição”. Dentre os quais podemos citar: Portal da Matemática, OBMEP na Escola, Clubes de Matemática da OBMEP, PIC Jr., PICME, POTI e os tradicionais Banco de Questões. Assim, o professor tem ao seu alcance uma gama de possibilidades relativas à OBMEP para incrementar a sua prática pedagógica de modo a contribuir no processo de ensino-aprendizagem.

Em particular, como uma das práticas de ensino desta investigação foi realizada com alunos do PIC Jr. do nível 3 da região de abrangência de Porto Alegre, exporemos algumas palavras sobre tal programa. Este se constitui como uma oportunidade propiciada pela OBMEP, fora do âmbito escolar, aos estudantes premiados na competição de entrarem em contato com interessantes questões e assuntos no ramo da Matemática, aprimorando o seu conhecimento científico de forma a melhor prepará-los no engajamento de seus futuros projetos profissionais e acadêmicos.

O programa também possibilita a interação destes estudantes com outros, seja por meio de seus encontros presenciais ou pelo acesso a um fórum virtual chamado Hotel de Hilbert, gerenciado pela OBMEP, no qual são realizadas atividades de caráter complementar às aulas. Como um incentivo, os alunos participantes do PIC Jr. regularmente matriculados em escola pública da Educação Básica recebem uma

bolsa do CNPq, a qual se firma como um diferencial valorizando de maneira especial seus currículos.

## **2.2. As ideias de Felix Klein – dupla descontinuidade e Matemática Elementar de um ponto de vista superior**

Felix Christian Klein<sup>4</sup> – 25/04/1849 (ou 5<sup>2</sup>/2<sup>2</sup>/43<sup>2</sup>, como o próprio Klein gostava de ressaltar), Düsseldorf, Alemanha – 22/06/1925, Göttingen, Alemanha há mais de 100 anos afirmou a existência de uma dupla descontinuidade no ensino de Matemática, a qual denunciou na introdução de sua obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Esta destaca-se do seu legado, sendo um compêndio em três volumes abordando temas relativos à Aritmética, Álgebra e Geometria motivados pela sua constatação anterior. Segundo Rangel (2015), Klein concebeu esse trabalho com a intenção de “chamar a atenção dos professores de matemática e de ciências da escola básica para o valor dos seus estudos acadêmicos, especialmente de Matemática pura”<sup>5</sup> (KLEIN, 2010a, p.v, tradução nossa, apud RANGEL, 2015).

Tal autor identificou uma ruptura entre a Matemática escolar e a Matemática superior, as quais serão explicitadas sistematicamente adiante em consonância com as significações de Rangel (2015). O termo dupla refere-se a existência de *duas* descontinuidades na formação do professor de Matemática decorrentes dessa ruptura identificada.

Podemos tomar com o mesmo entendimento os termos Matemática superior, científica, acadêmica, universitária como sendo inerentes à Matemática abordada no ambiente acadêmico contemplando desde os conteúdos abrangidos nas disciplinas de formação matemática até resultados consequentes de pesquisas sofisticadas. Ao passo que a Matemática escolar é significada como aquela envolta à Educação Básica, englobando a seleção dos conteúdos ensinados, organização pedagógica e seus procedimentos metodológicos. (RANGEL, 2015)

---

<sup>4</sup> Em virtude das inúmeras vezes que tal autor irá ser citado neste trabalho, para não mencionar nome e sobrenome toda vez que for referenciado evidenciaremos apenas o sobrenome Klein.

<sup>5</sup> No original: “(Volumes on Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint were) to bring to the attention of secondary school teachers of mathematics and science the significance for their professional work of their academic studies, especially their studies in pure mathematics” (KLEIN, 2010, p.v)

Segundo Klein, no período correlato, “universitários ocupavam-se exclusivamente da sua ciência sem pensarem nas necessidades das escolas, sem se preocuparem com estabelecer conexões com a Matemática escolar” (KLEIN, 2009, p.1)

Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas em que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores, são confrontados com a necessidade de ensinar a Matemática Elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e, como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma conexão entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando seus estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p.1)

Conforme o autor, por um lado, há pouca identificação da Matemática estudada na Educação Básica com aquela vista no Ensino Superior, o que consiste em uma incoerência com os desenvolvimentos modernos e os progressos constantes da pesquisa matemática, havendo desta forma uma perda de contato.

Por outro lado, em particular, para os professores de Matemática há pouca relação entre a Matemática praticada na sala de aula e aquela estudada por eles nos cursos de licenciatura. Consoante autores como Ripoll et al. (2016b) e Salvador et al. (2011) estas situações identificadas por Klein ainda se mantêm atuais e têm provocado questões de pesquisa em Educação Matemática. Nesta direção, é importante ressaltar que muitos autores enfatizam que a ideia da dupla descontinuidade de Klein não é um fenômeno localizado temporal ou geograficamente.

Neste viés, podemos entender que a perspectiva da Matemática significada como uma ciência viva e construção humana não é completamente valorizada no ensino, tanto básico como superior. Em contrapartida, Courant (1970), autor que deu prosseguimento as ideias de Klein conforme Fiorentini e Oliveira (2013, p. 927), nas observações iniciais do seu livro aponta:

Os três séculos de existência da matemática moderna viram progressos tão importantes, não só na matemática pura, mas, também, na imensa variedade de suas aplicações à ciência e à engenharia, que as suas ideias fundamentais e, sobretudo, o conceito de função, se tornaram gradualmente conhecidos e, eventualmente, foram incluídos nos próprios programas secundários. (COURANT, 1970, p. 2)

Ainda que este seja um exemplo histórico neste âmbito, consideramos que tal organicidade e riqueza da Matemática podem estar mais presentes no processo de ensino-aprendizagem da disciplina.

Segundo Ripoll et al. (2016b), neste sentido, para Klein, sua intenção ao “denunciar” esta dupla descontinuidade teria sido propor um olhar para a Matemática Elementar e para a Matemática superior de um mesmo ponto de vista (perspectiva), como partes igualmente importantes na Matemática, não costumeiramente desmerecendo a primeira e supervalorizando a segunda.

As ideias de Klein quando interpretadas de certa forma provocam questões acerca do saber Matemática, mais especificamente, sobre a constituição desse saber, segundo a visão dos matemáticos e professores.

Também neste contexto podemos dizer que as ideias de Klein se entrelaçam com as considerações de (SCHUBRING, 2014 apud RIPOLL et al., 2016b): “o professor de matemática deve conhecer não apenas os conceitos e teorias a ensinar, como também compreender a própria natureza deste conhecimento.” Logo podemos dizer que surge a necessidade de um saber sobre o saber, ou seja, um metassaber do professor que será delineado com mais detalhes posteriormente na parte inerente ao referencial teórico. Em particular, como conclusão Rangel et al. (2014a) notaram uma contribuição oriunda da discussão colaborativa induzida pelo *concept study* para o desenvolvimento de um metassaber do docente da disciplina de Matemática.

Como complementaridade a estas considerações constituem-se também como referências os trabalhos de Melo et al. (2015), Salvador et al. (2011) e Rangel et al. (2013) que tratam dos diálogos entre a Matemática escolar e a Matemática acadêmica. Em particular a última desta listagem segue praticamente as mesmas linhas do trabalho realizado pelo mesmo conjunto de autores em 2014 citado anteriormente.

Melo et al. (2015) realizaram uma investigação sobre a construção de um livro didático que segundo os autores pode ajudar a entender as concepções docentes sobre Matemática (no sentido de Klein), uma vez que o recurso tem grande influência no trabalho do professor.

Salvador et al. (2011), em seu trabalho, explicam sucintamente sobre o Projeto Klein de Matemática em Português, o qual tem como um dos objetivos primordiais o desenvolvimento de material bibliográfico voltado para professores de Matemática da Educação Básica na direção das ideias de Klein. Os autores apresentam um breve

relato sobre uma oficina com professores neste espírito, que traz algumas noções contributivas para as ideias desta investigação. Sobretudo, acerca do ponto observado por Salvador et al. (2011) de que os docentes em geral não têm esta concepção acerca das relações existentes entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior.

### **2.3. A temática da OBMEP em paralelo com as ideias de Klein**

A fim de elucidarmos as convergências entre essas duas temáticas abrangidas na investigação nos direcionemos para o artigo de Baldin (2013). Esta referência tem sua fundamentação na pesquisa correlata devido ao fato de conter os objetivos e alcances do Projeto Klein de Matemática em Português para o século XXI lançado pela ICMI (International Commission on Mathematics Instruction) em colaboração com a IMU (International Mathematical Union) para celebrar o centenário das publicações de Klein para professores do ensino secundário.

Baldin (2013) argumenta neste trabalho sobre o papel das ideias de Klein na construção de conexões entre os avanços da Matemática e a Matemática escolar, sendo este um objetivo de destaque do projeto anterior de modo a promover melhorias almejadas na Educação Matemática.

Em particular, este trabalho estabelece de certa forma uma relação com as duas temáticas principais desta pesquisa em um esquema de possibilidades pedagógicas do Projeto Klein de Matemática em Português. Apresentamos a seguir tal esquema que indica um pouco da temática deste projeto e sua estrutura organizacional.

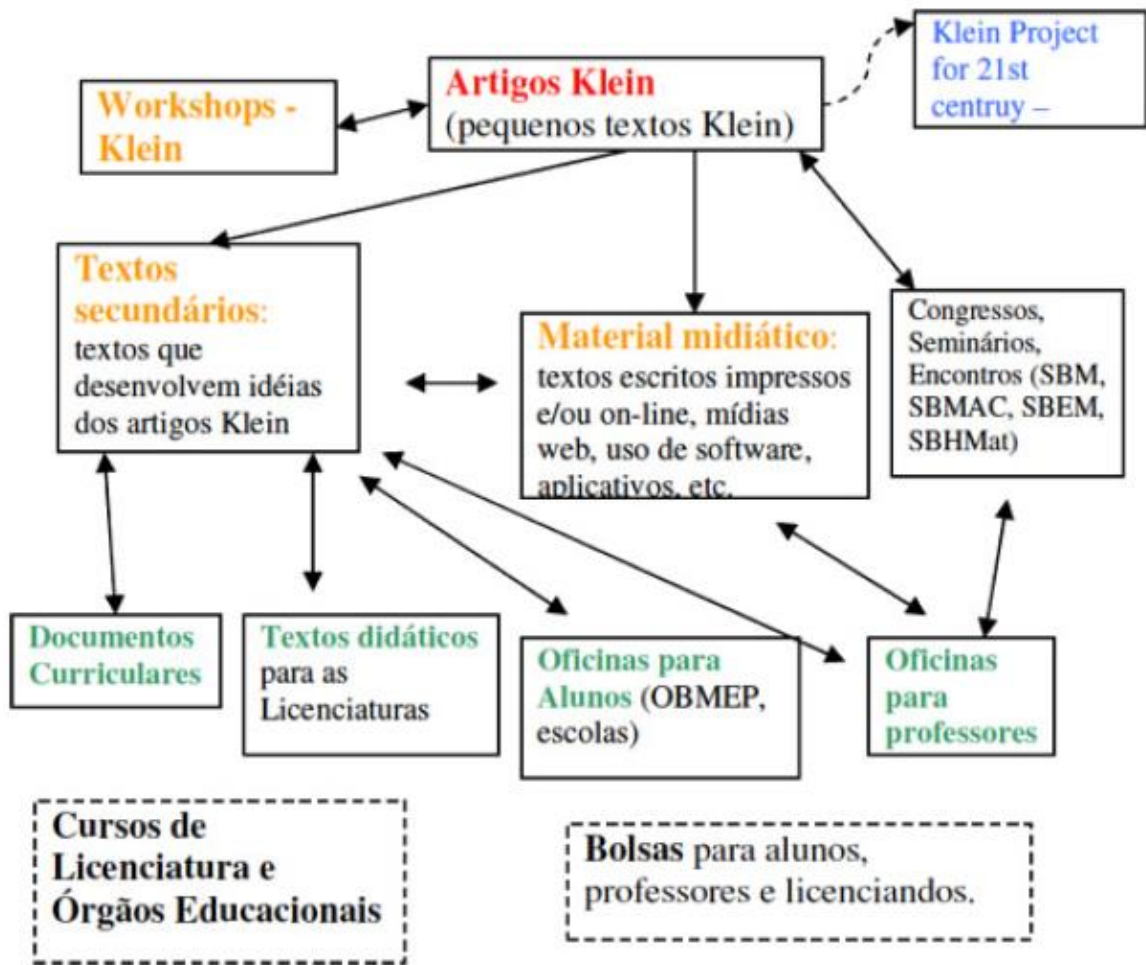


Figura 1: Estrutura organizacional do Projeto Klein de Matemática em Português

Fonte: (BALDIN, 2013)

Pela representação anterior podemos visualizar que a OBMEP pode atuar de forma a desenvolver ideias dos artigos Klein, que são contribuições da comunidade de pesquisadores de Matemática para o referido projeto. Assim, temos um trabalho colaborativo da OBMEP, tomando um papel contributivo para o projeto em questão, o que vai de encontro à consideração anterior no tocante à interligação com as ideias de Klein.

A autora afirma que, em geral, a ruptura entre a Matemática escolar e a Matemática acadêmica é provocada pela distância entre os pesquisadores da disciplina e os professores, ademais pelas distinções quanto à linguagem empregada e a forma como os resultados são apresentados, seguindo abordagens bem diferentes, em particular na redação de artigos de pesquisa. Esta característica torna ainda mais desafiadora dentro do projeto a produção de artigos Klein, para que

possam realmente ser apreciados por professores e incorporados ao seu conhecimento de modo a contribuir para o ensino da disciplina.

Baldin (2013) considera que as oficinas e o trabalho pedagógico em sala de aula segundo as linhas do Projeto Klein de Matemática em Português colocam o professor como pesquisador dos conteúdos matemáticos relevantes para aperfeiçoar o seu próprio conhecimento e assim aproximar a Matemática acadêmica das atividades aplicadas com seus alunos, que podem ser, pensando desta maneira, renovadas constantemente. Nesta direção, podemos entender que a temática do projeto em questão se configura como uma fonte de revigoração do conhecimento do próprio professor.

Assim, podemos argumentar que a OBMEP já aparece situada em temáticas associadas às ideias de Klein, assumindo um papel contributivo.

Em particular, no contexto deste trabalho a convergência das tuas temáticas se justifica pela possibilidade do trabalho com questões da OBMEP na escola poder proporcionar um tratamento da Matemática Elementar por um ponto de vista superior. Este é o elemento chave com o qual trabalhamos.

### 3. DELINEAMENTO ESTRUTURAL DA PESQUISA

#### 3.1. Objetivos

Com base nas considerações anteriores a pesquisa propõe identificar e analisar as potencialidades do trabalho com questões da OBMEP, e suas contribuições para a aprendizagem dos alunos, examinando concomitantemente no ensino a exequibilidade das ideias de Klein, baseada na Matemática Elementar estudada na escola sob uma perspectiva superior.

Fundamentando-se nestas ideias e suas proposituras apresentamos os objetivos a seguir:

- Elaborar e realizar atividades utilizando questões da OBMEP de modo a contribuir no processo de ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática, relacionando sua temática com as ideias de Klein, analisando as potencialidades do referido trabalho neste sentido;
- Atentar para o desempenho e características evidenciadas por alunos regulares que demonstram não possuir facilidade na disciplina de Matemática durante a prática de ensino;
- Extrapolar a compreensão pontual e isolada dos conteúdos matemáticos da prática de ensino, ou seja, reduzida a eles próprios, localizando-os no panorama abrangente da Matemática e problematizando-os no âmbito de sua fundamentação teórica, como defende Klein;
- Propiciar ao aluno uma concepção da Matemática como construção humana e uma ciência viva em constante desenvolvimento, proporcionando o contato com problemas que a movem, utilizando também, neste viés, questões de olimpíadas nas aulas da disciplina;
- Detectar discontinuidades segundo as considerações de Klein com alunos do curso de Licenciatura em Matemática e professores da disciplina participantes do PIC Jr. 2015 da OBMEP da região de abrangência de Porto Alegre.



## **3.2. Metodologia**

### **3.2.1. Estudo de caso: caracterização**

Nesta pesquisa será adotada a metodologia de estudo de caso. Como sua temática é singular, considerou-se, comparando com outras modalidades e seus delineamentos, que esta seria a mais propícia para o trabalho e aquela que melhor se ajusta na direção do que será desenvolvido.

A modalidade de pesquisa correlata pode apresentar certa indefinição, uma vez que seu âmago pode permitir o englobamento de diversas metodologias. Historicamente, nas ciências, durante muito tempo, o estudo de caso foi caracterizado como um método pouco rigoroso, sendo direcionado apenas para estudos de caráter exploratório.

Gil (2002) citando Yin (2001) coloca que o estudo de caso é considerado como o delineamento mais propício para a investigação de um fenômeno contemporâneo (o que pode corresponder na Educação Matemática a uma situação de aprendizagem nova ou singular, inclusive particular), dentro de seu contexto real, em que os limites entre o fenômeno e o contexto no qual está imerso não são claramente percebidos. Em suma, segundo Stake (2000), é o interesse num caso particular.

Uma das características da modalidade de pesquisa é a preservação do caráter unitário do objeto estudado e a busca pelo que reside ser mais importante e característico neste conforme os elementos que interessam ao pesquisador e que contribuam mais significativamente para a investigação.

Embora a gênese da metodologia de estudo de caso esteja intimamente ligada às Ciências Médicas e Sociais, segundo Ponte (2006), autor na área de Educação Matemática, estudos de caso têm sido utilizados para investigar pontos pertinentes como questões de aprendizagem dos alunos, programas de formação inicial e contínua de professores, projetos curriculares inovadores, temáticas novas no ensino de Matemática, entre outros. Em particular, no trabalho a ser realizado pela pesquisa sua concepção se adere mais a última exemplificação.

Segundo vários autores que têm procurado aprofundá-la, sistematizá-la e credibilizá-la, investigações em educação suportadas pela modalidade de pesquisa em questão têm ganhado uma notoriedade crescente neste campo, fazendo com que esta se consolide como uma possibilidade (capaz de dar resultados) no âmbito da

metodologia de investigação (PONTE, 2006; MEIRINHOS e OSÓRIO, 2010).  
Transladando para a Educação Matemática, consoante Ponte (2006):

Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse. (PONTE, 2006, p. 2)

Reafirmando esta consideração, para Ponte (2006) “um caso funciona sobretudo como um exemplo” (PONTE, 2006, p. 4) tendo aspectos marcadamente positivos, negativos e/ou neutros que o tornam particular. Um caso se constitui como uma entidade bem definida, inserida em um determinado contexto.

Neste sentido, o que justifica o carácter intrínseco e peculiar do caso adotado são suas determinantes internas. Visto isto, Ponte (2006) coloca que no estudo de um caso deve-se atenção a sua história (como se desenvolveu) e ao seu contexto: elementos exteriores da realidade local, natureza social, entre outros que permeiam sua posição dentro do ambiente onde está situado.

### **3.2.2. Estudo de caso no contexto do presente trabalho**

Por meio dos significados explicitados anteriormente, podemos perceber que o âmbito desta pesquisa convém para a metodologia de estudo de caso, pois um dos objetivos desta é buscar identificar e investigar as potencialidades do trabalho com questões da OBMEP, com *uma turma de uma instituição específica* na realização da prática de ensino correspondente à disciplina de Estágio em Educação Matemática III do curso de Licenciatura em Matemática. Ademais que outra parte da investigação no tocante à prática de ensino será realizada com uma *turma específica do Nível 3* do PIC Jr. da OBMEP.

Também, este trabalho tem como intento verificar as contribuições de tal trabalho para a aprendizagem dos alunos, examinando no ensino à mesma proporção a aplicabilidade das ideias de Klein, fundamentada na Matemática Elementar estudada na escola sob uma lente superior.

Para tanto também foram realizadas algumas atividades com os alunos do PIC Jr. da OBMEP de *uma turma específica* que contemplou um público determinado, que será explicitado adiante de forma a delimitar esta outra unidade-caso. Especialmente, juntando com a anterior, analisando as produções de discentes que possuam um desempenho regular ou não sejam um destaque na disciplina de Matemática.

Escolhida e bem posta a metodologia investigativa da pesquisa, faz-se necessário definirmos a sua abordagem, a qual em questão fundamentalmente pode ser quantitativa ou qualitativa.

Visto que o estudo de caso possui estes dois vieses primordiais, delimitaremos a abordagem desta pesquisa como qualitativa, pois, em linhas gerais, atenta para as produções dos pesquisados e os seus significados atribuídos a elementos concernentes da investigação. Ademais que esta pesquisa tem certo foco particular nos estudantes que não possuem destaque na disciplina de Matemática, sendo que a abordagem qualitativa neste sentido auxilia a identificar possíveis avanços e retrocessos de tais indivíduos, dando importância para as suas aceções, concepções e sensações durante as atividades realizadas.

Adiante será caracterizado o estudo de caso como abordagem qualitativa. Ao lado desta, como mencionado anteriormente, existe a perspectiva quantitativa. Ainda que possam ser realizados estudos de caso quantitativos, embora não sejam frequentes, conforme Ponte (2006) investigações de natureza qualitativa geralmente trazem mais contribuições à Educação Matemática, e isto também não deixa de ser um dos propósitos deste trabalho.

A ponderação anterior possui legitimidade, pois para uma obtenção e/ou comprovação (efetiva) de dados estatísticos ou de qualquer outra natureza faz-se necessária a utilização de uma amostra maior ou relativamente significativa em termos de magnitude, visto que o estudo de caso é envolto a uma situação particular, tendo assim um número pequeno de elementos a serem analisados possibilitando deste modo que poucas variáveis sejam examinadas efetivamente (e irrefutavelmente).

Assim sendo, é importante ressaltar que existem diferenças entre as perspectivas qualitativa e quantitativa de investigação. Contudo, a abordagem qualitativa pode incluir evidências quantitativas que a fundamentem de modo a contribuir para a pesquisa correlata (MEIRINHOS e OSÓRIO, 2010; YIN, 2001).

### 3.3.2.1. Estudo de caso qualitativo

Lüdke e André (1986) embasadas em Bogdan e Biklen (1982) estabelecem características definidoras de um estudo de caso qualitativo. Explicitaremos tais propriedades elementares que ao longo desta parte trabalho veremos que possuem relações com conceituações e considerações de outros autores.

*A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. [...] A pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra através do trabalho intensivo de campo. (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 11, itálico como no original)*

Neste sentido não basta enfocarmos a sala de aula como o único ambiente em que a investigação se realiza, mas sim esta inserida dentro de um contexto, pois segundo as autoras as situações ocorrentes em uma pesquisa são muito influenciadas por tal elemento. Caso contrário, poderíamos inferir que determinadas circunstâncias foram consequências apenas do trabalho realizado, quando na verdade havia mais aspectos preponderantes para serem levados em consideração. Logo, podemos concluir que a pesquisa ocupa seu espaço na própria instituição escolar de realização e dentro da vida dos alunos.

Não obstante a isto, nos modelos de pesquisa qualitativos é costumeiramente sugerido que o investigador esteja no trabalho de campo, faça observações, apontamentos, direcionamentos, emita juízos de valor e que principalmente analise. Esta característica culmina no fato que é crucial que o investigador nunca perca o contato com o desenvolvimento dos acontecimentos e esteja sempre atento a estes, o que se relaciona com as elucidações das autoras.

De acordo com Lüdke e André (1986) “*os dados coletados são predominantemente descritivos*. O material obtido nestas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos”, entre outros (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 12, itálico como no original). Assim, procuraremos descrever no relato das atividades realizadas não somente o contexto físico, mas o familiar, econômico, o cultural, o social, o político e todos aqueles que auxiliarem a melhor compreender os casos determinados. Além disso, como salientado pelas autoras, elementos aparentemente simplórios ou tomados como triviais podem ser essenciais para o melhor entendimento das questões correlatas.

Outras características apontadas por Lüdke e André (1986) são:

*A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. O interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas. (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 12, itálico como no original)*

*O “significado” que as pessoas dão as coisas e a sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. Nesses estudos há sempre a tentativa de capturar a “perspectiva dos participantes”, isto é, a maneira como as informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas. Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo. (LÜDKE E ANDRÉ, 1986, p. 12, aspas e itálico como no original)*

Nesta abordagem de estudo de caso qualitativo não há um determinismo final a ser obtido, um resultado esperado. A própria complexidade do panorama educacional e do cotidiano escolar faz com que haja esta desapropriação anterior, implicando que o investigador dê relevância às causas do produto (ao processo) sistematicamente tratando-as em sua pesquisa e não “supervalorizando” fatores inerentes ao resultado (produto).

Desta forma, para as autoras “*a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos.*” (LÜDKE E ANDRÉ, 1986, p. 12, itálico como no original).

Como reafirmação das considerações anteriores, métodos qualitativos de pesquisa podem nos fazer observar diretamente como cada indivíduo experimenta (concretamente) a prática de ensino realizada, o que fortalece e dá sustentação ao trabalho desenvolvido, pois nesta metodologia particular o enfoque não está direcionado à obtenção de dados, sejam de quaisquer naturezas, e à validação e comprovação de resultados, mas sim no processo, no contexto e elementos que o viabilizaram (ANDRÉ, 2013).

## 4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 4.1. Apontamentos gerais

Como a OBMEP é uma temática relativamente recente, na busca por referências não pôde ser encontrado muito material diversificado acerca de efeitos positivos, assim como possíveis impressões negativas. De fato, comprovou-se que não existe ainda um *feedback* estruturado com o impacto da competição no tocante (estrito) à Educação Matemática e suas implicações no processo de ensino-aprendizagem da disciplina de forma geral, sobretudo em âmbito nacional e não se restringindo a determinado conteúdo matemático e/ou vertente da Educação Matemática.

Em virtude do caráter evocativo das olimpíadas de Matemática e seus problemas componentes, pois quando nos referenciamos a esta temática é comum a relacionarmos com este contexto, muitos trabalhos realizados a trataram sob a concepção da resolução de problemas como o de Todeschini (2012), Fideles (2014), Bernardo (2015), Martins (2015), Araújo et al. (2016) e Faxina (2016).

Acerca da própria OBMEP, outros trabalhos realizados debruçados sobre esta temática abordaram aspectos pertinentes como: altas habilidades por Maciel (2008) e Bagatini (2010), análise de comentários dos atores envolvidos neste cenário olímpico por Andrade (2015), e o impacto para o professor de Matemática sem experiência em olimpíadas e a sua importância para o estudante por Victor (2013).

Observou-se que também quanto à vinculação da OBMEP com as ideias de Klein é válida parcialmente a mesma consideração inicial desta parte da investigação.

De toda forma pode-se dizer que as referências correlatas foram consonantes em afirmar que as ideias de Klein se constituíram como um movimento internacional para a modernização da Matemática, configurando-se como um marco na história da Educação Matemática, estabelecendo-a como corpo de conhecimento estabelecido historicamente e sobretudo organicamente.

Embora as ideias de Klein não sejam recentes (e nem localizadas temporal ou geograficamente, como realçado por muitos autores), juntá-las com a temática da OBMEP na perspectiva desta pesquisa se constitui como algo novo. Conforme a busca por referências realizada, pode-se considerar que a concepção desta pesquisa

interligando tais elementos é algo original e que ainda não possui literatura científica discursiva.

Desta forma, este trabalho com sua temática se torna uma referência daqui para frente configurando novas discussões na Educação Matemática.

## **4.2. As temáticas da pesquisa no cenário educacional**

### **4.2.1. Alguns estudos sobre o uso de ferramentas da OBMEP na Educação Matemática**

Um dos objetivos centrais da OBMEP é estimular o estudo da Matemática e revelar talentos na área. Assim, podemos inferir que uma das possíveis consequências dessa principal propositura seja uma melhoria no ensino de Matemática.

Apesar de que tenhamos mencionado a inexistência de uma indicação explícita sobre o impacto da OBMEP para o ensino de Matemática de um modo geral, nos centraremos em algumas das referências supracitadas a fim de abstrair aspectos relevantes na direção dos propósitos deste trabalho.

A dissertação de mestrado de Fideles (2014) é de importante representatividade dentro do trabalho realizado, pois trata de um de seus assuntos principais.

O objetivo do trabalho do autor não foi estrito a como preparar os alunos para a OBMEP ou outras olimpíadas de Matemática, mas sim de como aprimorar a Educação Matemática e de quais maneiras a OBMEP pode contribuir com isto, mesmo para os discentes que não são destaque ou não possuem facilidade com a disciplina.

De certo modo, podemos considerar a legitimidade de tal objetivo, uma vez que não restringe o potencial da OBMEP a apenas uma competição para os estudantes, o que vai ao encontro deste trabalho.

Algo interessante e que apresenta de certa forma confluência com a temática da pesquisa é que o autor nunca foi premiado pela OBMEP e a escola onde atuou durante a realização do seu trabalho não contou com nenhum aluno premiado, sequer com uma menção honrosa. Apesar deste fato, Fideles (2014) percebeu um progresso dos estudantes à medida que adotava os problemas na OBMEP e demais materiais didáticos correlatos no trabalho em sala de aula. Em particular, isto foi uma das razões que o levou a abordar tal temática em sua dissertação de mestrado.

Frente aos índices e percentuais comprovados e constatações das poucas avaliações que puderam ser coletadas, o autor comenta que tais pesquisas de impacto apontaram que a OBMEP teve um impacto positivo, mesmo modesto, indicando que instituições que participam sucessivas vezes de edições da competição têm alcançado melhores resultados em exames de avaliação e afins em relação aos desempenhos anteriores.

Embora a diferença revelada entre estas duas pontuações seja modesta, é importante ressaltar que houve um crescimento e não decréscimo. Acreditamos que o comprometimento de todos, professores, equipe pedagógica das instituições e estudantes, aliadas a mais pesquisas direcionadas a este universo contemplado pela OBMEP possa trazer resultados mais expressivos em longo prazo.

Para Fideles (2014), este fato caracterizado como uma influência positiva se deve pela disponibilização por parte da OBMEP de vasto material didático baseado em problemas interessantes que auxiliam não somente a preparar-se para a competição, mas no ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática.

Embasado em autores representativos como Polya, Onuchic e Allevato da temática da Resolução de Problemas, o autor argumenta que esta pode ser uma ferramenta importante para atribuir significado à Matemática. Como um dos principais objetivos da OBMEP é estimular o estudo da Matemática por meio da resolução de problemas que agucem a curiosidade de estudantes e professores, segundo Fideles (2014) é necessário que o docente deva familiarizar-se com esta vertente da Educação Matemática para fazer uso pleno e apropriar-se do potencial do material disponibilizado pela competição.

O autor assinala duas razões importantes para a utilização da metodologia da Resolução de Problemas, uma diz respeito que é necessário no ensino da disciplina de Matemática desenvolver a habilidade de aplicar os conhecimentos assimilados para resolver problemas e é possível aprender seus conceitos concomitantemente ao se proceder desta forma. Outro motivo, tendo referência em outros autores é que no mundo contemporâneo é necessário “entender” e “ser capaz” de usar a Matemática, frente às transformações constantes na sociedade.

Podemos relacionar a última consideração com o fato do aluno de certa forma ter



acesso ao patrimônio científico e cultural da humanidade, considerado com um objetivo essencial para o ensino, [que] exige a apresentação da própria estrutura da matemática, como um campo de conhecimento orgânico, vivo e em permanente desenvolvimento. (RIPOLL et al., 2016b, p. XVII)

Este ponto de vista apontado pelos autores demanda do professor uma visão da Matemática escolar em conformidade com as ideias de Klein.

Nesta mesma direção, a sequência de passos sugerida por Polya na resolução de problemas apresenta relações com esta significação da OBMEP no ensino de Matemática. Dado que este método, segundo Fideles (2014), possui como característica a generalidade, este é aplicável a uma gama de problemas variados. Desta forma, o autor pontua que o professor, ao aplicá-lo, não dará a resposta de problemas propostos aos seus alunos, mas orientará e dará indicativos de quais perguntas apropriadas devem ser feitas a eles próprios na referida atividade.

Pensando desta maneira, a implicabilidade disto no processo de ensino-aprendizagem seria o desenvolvimento de uma autonomia por parte do discente e a elaboração de questionamentos adequados a si mesmo para resolver independentemente e também em grupos situações-problema de forma geral.

Assinalo que esta autonomia é um aspecto que pode contribuir significativamente para a aplicabilidade das propostas desta investigação em sala de aula, de modo que os questionamentos subsequentes dos alunos neste processo possam possibilitar ao professor “melhores condições” de estabelecer conexões entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior dentro da escola.

A referência de Bagatini (2010) contribui com este trabalho devido à exploração de questões da OBMEP com dois grupos de alunos de níveis de ensino diferentes, os quais foram alunos participantes do PIC Jr. da OBMEP e calouros do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, com apontamentos interessantes realizados. A exploração das questões da OBMEP deu-se pela adaptação, reformulação e aplicação direta destas.

Ao discorrer sobre olimpíadas de Matemática, o autor remete-se conseqüentemente a pensar na resolução dos problemas correlatos, mais especificamente de maneira um pouco mais genérica na temática da resolução de problemas. Trazendo esta para a educação, um dos seus grandes representantes é Polya, o qual estabeleceu um roteiro indicando etapas a serem seguidas na resolução de problemas.

Segundo Bagatini (2010), a metodologia de ensino de Matemática atual, muitas vezes fortemente embasada na repetição e foco na mecanização de resultados matemáticos, não contribui efetivamente para a construção do conhecimento, e a temática da resolução de problemas e a habilidade para resolvê-los não são devidamente exploradas de fato. Acrescentamos que isto na verdade contribui ainda mais para uma das rupturas identificadas por Klein acerca do distanciamento entre a Matemática Elementar e a Matemática superior.

Com base na prática de ensino realizada e sua análise posterior, o autor percebeu que os alunos não usam sempre a mesma sequência de pensamentos para resolver um determinado problema, embora costumeiramente a adaptem conforme. De maneira genérica, os estudantes iniciam observando o que o problema solicita, organizam dados e extraem informações explícitas e implícitas, o que condiz com as etapas iniciais da sequência sugerida por Polya.

Salientado por um licenciando da prática de ensino realizada por Bagatini (2010) em resposta a uma pergunta do questionário específico aplicado, o discente ao se deparar com algo em um molde diferente do que está acostumado na escola pode enfrentar impasses, e erros inesperados podem surgir quando está diante de um problema matemático que exija mais raciocínio do que outras metodologias imediatistas, o que pode causar desmotivações provenientes de sucessivos fracassos.

Com base nos depoimentos dos alunos da prática de ensino realizada por Bagatini (2010) foi possível inferir que a Matemática vista na escola não é, em geral, suficiente para se obter sucesso em uma olimpíada de Matemática. Por outro lado, os discentes admitiram que os conteúdos matemáticos abordados na prova respectiva são equiparáveis aos trabalhados na escola, sendo que o que causa possivelmente o insucesso nas referidas competições é o modo como são trabalhados, que não requer que o aluno raciocine ou pense no sentido real do que está fazendo.

Com este viés e como corroboração das considerações anteriores, para Bagatini (2010) a utilização de questões da OBMEP pode ser uma possibilidade para reverter esse último quadro deposto pelos alunos, se tornando uma possibilidade de suporte adequado para o estudante possuir um bom raciocínio para poder então aplicar apropriadamente os conteúdos matemáticos aprendidos na resolução de problemas.

Esta ponderação do autor está intimamente ligada às proposituras deste trabalho, pois além da utilização das questões da OBMEP em aula poder ser capaz de amenizar a situação citada no processo de ensino-aprendizagem, ainda possibilita um ganho de compreensão acerca dos próprios significados matemáticos dos conteúdos abordados, o que permite, em um sentido de facilitação, um estabelecimento de relações menos emblemático entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior.

Estas características dos referidos trabalhos ilustram a articulação da OBMEP com temáticas da Educação Matemática, enfocando sua riqueza e papel contributivo neste âmbito, o que demonstra que em particular as temáticas abrangidas nesta pesquisa possuem certo potencial.

Ainda acerca da articulação da OBMEP com a Educação Matemática, conforme Bagatini (2010) os conteúdos matemáticos abordados pelas provas da OBMEP seguem os sugeridos pelos PCN, havendo assim uma consonância com este importante documento da Educação tendo emparelhamentos com as proposituras da olimpíada.

Algo muito interessante e que novamente reforça as contribuições da olimpíada para o ensino de Matemática é que vem sendo produzida literatura para as escolas, de acordo com os PCN, a partir da OBMEP.

A recente obra de Baldin e Silva (2016) tem como proposta a indicação de alternativas de desenvolvimento de questões da OBMEP e outras correlatas, em conformidade com os currículos e parâmetros oficiais, no formato de atividades práticas e utilizando a metodologia de Resolução de Problemas para trabalho em sala de aula. Assim, podemos concluir que o material produzido possui certa intenção de integrar à OBMEP, bem como outras olimpíadas de Matemática, mais significativamente ao ensino da disciplina.

Tendo em vista todos os apontamentos anteriores relacionados à OBMEP na Educação Matemática consideramos que podemos utilizar seus problemas em sala de aula a fim de explorar a fundamentação matemática dos conceitos envolvidos e desvelar os “detalhes teóricos” por trás dos raciocínios empregados, sendo tal metodologia posicionada como uma abordagem distinta da tradicional focalizada na memorização e aplicação de algoritmos.

Assim, podemos dizer que a OBMEP vem sendo estudada na Educação Matemática e consoante aos estudos já realizados percebe-se que sua dimensão

pedagógica pode trazer significativas contribuições para o processo de ensino-aprendizagem.

#### **4.2.2. As ideias de Klein na Educação Matemática: alguns apontamentos e reflexões sobre as possíveis contribuições da OBMEP**

No decorrer do final do século XIX, as ideias de Klein se sobressaíram e tiveram relativa influência para a mudança de certos paradigmas existentes na época em Matemática. Um destes paradigmas tentado a transformações foi a extensão no processo de ensino-aprendizagem das confluências entre as áreas consideradas altamente distintas como a Álgebra e a Geometria. (FIORENTINI et al., 1993 apud SANTOS, 2016). Também, conforme os mesmos autores citados por Santos (2016) as ideias de Klein contribuíram para o Movimento da Matemática Moderna provocando mudanças no currículo do ensino nacional unificando disciplinas consideradas estanques como Álgebra, Aritmética, Geometria e Trigonometria incutindo os professores a realizarem conexões entre elas.

Relacionado com as ideias de Klein, um dos objetivos culminantes da obra de Ripoll et al. (2016b) é que por meio da abordagem dos conceitos na escola do ponto de vista de sua fundamentação teórica pode-se estreitar relações entre a Matemática acadêmica e a Matemática escolar, sem firmar uma hierarquia ou graduação entre estas e sem apresentar a última como diluição da primeira de maneira simplificada. É válido por outro lado constar que é evidente a existência de algumas notações e resultados matemáticos não adequados para a Educação Básica, mas que possuem relações coerentes com certos aspectos conceituais tratados neste nível de ensino.

As perspectivas de Klein propõem a Matemática como um corpo de conhecimento bem estruturado em certo sentido, com este contexto consoante Ripoll et al. (2016b) não podemos privar os alunos de estabelecer relações importantes entre conceitos advindas da sua abordagem. Neste ponto de vista, dado que também é papel da educação institucionalizada criar condições que façam o indivíduo refletir sobre o mundo e o seu conhecimento permeado, não se deve restringir apenas o papel da Matemática na escola reduzido a uma dimensão imediata de utilitarismo e de aplicação dos conceitos correlatos.

Ou seja, em suma, a percepção da Matemática pela própria Matemática também deve se fazer presente no processo de ensino-aprendizagem da disciplina.

Klein coloca em jogo a importância e a especificidade da formação do professor para o desenvolvimento da Matemática como ciência demonstrando também desta maneira sua preocupação com o seu ensino. (RANGEL, 2015)

Nesta direção, trasladando para a formação de professores, Fiorentini e Oliveira (2013) abrangem temas e fazem apontamentos e encaminhamentos que auxiliam a responder e tratar algumas das questões propostas para este trabalho como a posição da Matemática na formação do professor em termos das ideias de Klein via a sua constatação da dupla descontinuidade.

Os autores expõem em seu trabalho uma situação em que é desenvolvida uma atividade que trabalha os padrões da sequência fractal do triângulo de Sierpinski, cuja exploração dos alunos pôde provocar questões sobre noções relativas a infinitésimos ou limite da sequência, em que a sensibilidade do professor foi um fator determinante para a devida valorização de tais indagações. Tal sensibilidade pode ser resultado do seu conhecimento de Geometria que foi desenvolvido durante curso de graduação e/ou o estabelecimento de relações entre a Matemática aprendida neste e a Matemática escolar, que poderiam ser contributivas para o processo de ensino-aprendizagem, o que entra em conformidade com as ideias de Klein.

Estas relações, conforme os autores, também se manifestam na forma como ele elaborou a atividade ou situação-problema. Consoante Fiorentini e Oliveira (2013) esta situação revela não apenas o pensamento matemático dos alunos em ação e em processo de desenvolvimento, mas também entra em jogo o saber profissional do docente no contexto de sua prática pedagógica. Mais especificamente, esta situação pode nos sugerir a existência de um saber sobre o saber.

Os autores situam Klein como uma tentativa histórica de mudança na formação de professores de Matemática ao acusar uma dupla descontinuidade identificada nesta. Nos tempos atuais, Fiorentini e Oliveira (2013) interrogam sobre o que mudou acerca da formação matemática do professor e para estes, as pesquisas e experiências realizadas indicam que foi avançado muito pouco. Em particular, esta pesquisa busca reverter esta constatação e realizar novos apontamentos para este quadro.

Para os autores, Klein e outros matemáticos como Richard Courant e Bento de Jesus Caraça tentaram tratar a Matemática numa concepção não estritamente formal, explorando elementos importantes quanto a sua epistemologia e contexto cultural,

pondo em evidência a sua significação como conhecimento em construção, capital cultural, instrumento de leitura e intervenção do mundo.

Neste sentido, esta transformação no enfoque da formação matemática do professor possibilita alcançar uma dimensão mais compreensiva desta área do conhecimento, o que de acordo com pesquisadores na formação de professores é mais contributivo para o seu trabalho profissional.

Em suma, com base nos autores podemos inferir que o que se ausenta na formação inicial do professor é relacionar, conectar conceitos e ideias, problematizar a Matemática aprendida durante o curso de licenciatura com a prática pedagógica a ser realizada, de modo a melhor ajustar os papéis da Matemática escolar e superior neste processo.

Com isto, vimos que temos a noção de metassaber, um saber sobre o saber, tacitamente presente na epistemologia formativa do professor de Matemática conforme evidências reveladas pelos estudos realizados por Rangel et. al (2014a). Alguns autores que trataram desta temática procuraram relacionar o metassaber buscando indícios de aspectos implícitos e explícitos do saber pedagógico de conteúdo e do saber de conteúdo propriamente dito.

Intuicionamos que talvez o metassaber que o professor deve possuir possa ser trabalhado no PIC Jr. OBMEP juntamente pelo novo programa parceiro recentemente formulado, o OBMEP na Escola, pois as proposituras destas iniciativas são concernentes com as ideias de Klein e este conceito relativo ao saber pedagógico de conteúdo. Ainda pode ser cedo para inferir algo mais preciso, mas consideramos que tais programas podem auxiliar a constituir este metassaber visto as suas temáticas, em razão de um dos propósitos centrais ser a formação do professor da Educação Básica da escola pública e dos seus próprios planejamentos acadêmicos, cuja estruturas contemplam justamente tópicos de Matemática sob uma visão mais elevada do que a elementar.

Para elucidar nossas considerações a respeito das questões abordadas nesta parte da pesquisa recorreremos a Rangel (2015) cuja tese de doutorado é um trabalho muito recente referente às ideias de Klein no contexto da formação de professores e que teve muitas implicações nesta investigação. Percebeu-se que estas estão explicitadas no panorama contemplado pela pesquisa realizada pela autora, estabelecendo relações entre as considerações correlatas de Klein e concepções

mais recentes que remetem ao seu entendimento sobre Matemática e sobre a formação docente, em concordância, alinhamento ou diferença.

Rangel (2015) comenta que reflexões de muitos pesquisadores na área de formação de professores que traduzem os cenários contemporâneos desta temática sugerem paralelos com as ideias de Klein. Para a autora, Klein preocupou-se com a formação do professor de Matemática, reconhecendo a importância e as especificidades da formação docente para o desenvolvimento da própria Matemática como ciência, o que já foi mencionado neste trabalho.

Com esta perspectiva, podemos entender que a escola tem uma funcionalidade tão importante quanto a universidade na própria produção do conhecimento: criar condições e possibilidades para que o novo conhecimento superior seja produzido (RIPOLL et al., 2016b), o que particularmente valoriza de maneira significativa o trabalho do profissional professor e educador.

Segundo pesquisadores citados por Rangel (2015), estes observam que para Klein o desenvolvimento da Matemática como ciência dependia de mudanças consideráveis na Matemática escolar e sua relação com a Matemática acadêmica, atentando este elemento para a formação do futuro professor.

Para Klein, conforme a autora, o professor necessita ter um conhecimento além do que o é trabalhado com seus alunos. Klein assinala que o docente não deve ter somente ciência dos conteúdos matemáticos e teorias que ensina. Não basta isto, é necessário também saber relacionar e articular ideias decorrentes reconhecendo a sua natureza científica e o seu desenvolvimento histórico, não as compreendendo pontualmente ou isoladamente.

Klein situa como Matemática Elementar os elementos essenciais que encerram a capacidade de sustentar e estruturar a Matemática como ciência. Neste sentido, não há diferença de legitimidade entre o que é elementar e o que é superior nesta estruturação, desapropriando a Matemática superior como aquela dotada de um valor maior para o desenvolvimento da Matemática. Tais matemáticas são partes igualmente importantes, que se fundem, arranjam, combinam.

Assim, tendo como argumento estas relações intrínsecas entre estas instâncias, Klein coloca que a Matemática Elementar não é sinônimo de Matemática escolar, de uma Matemática facilitada, tampouco uma Matemática simples desprovida de significação e propriedades, mas constituída como um campo de conhecimento, integrando-se à Matemática permeando sua natureza teórica e epistemológica.

A autora expõe que Klein além de revelar uma concepção entre o saber elementar e o saber superior, traz juntamente sua percepção acerca da conexão com o conhecimento de conteúdo do professor, ressaltando a ideia fundamental da existência (crucial) de um metassaber, um saber sobre o saber.

Como exemplo de trabalhos realizados na tentativa de dirimir o distanciamento entre a Matemática Elementar e a Matemática superior citamos Franco (2016) e Dantas (2016) voltados ao conteúdo de números inteiros e aplicações da Aritmética modular e equações diofantinas lineares. Em particular, Franco (2016) aponta que existem aplicações elementares e simples que utilizam conceitos já aprendidos no Ensino Fundamental envolvendo tais assuntos matemáticos.

O autor coloca que problemas clássicos em que se pensa em soluções inteiras de determinadas equações, código de barras e demais códigos de identificação, ISBN (International Standard Book Number), CPF, calendário e outros fenômenos periódicos são exemplos neste sentido que podem ser discutidos na Educação Básica sem a utilização explícita de notações de congruências implicitamente envolvidas.

Em parcial contraposição a estas últimas considerações Selbach (2015) em seu trabalho verificou, com um grupo de alunos com determinada habilidade em Matemática, quais dos conjuntos numéricos já conhecidos e outros apresentados eram anéis, corpos e ideais, identificando principalmente quais eram as propriedades que identificavam estes conjuntos em questão com os novos conceitos expostos.

Apesar de haver alguns apontamentos críticos, Selbach (2015) assinala que o trabalho desenvolvido foi interessante e oportuno na medida em que alunos da prática de ensino já possuíam um conhecimento “elementar” dos conjuntos numéricos. Consideramos que esta perspectiva trata os conteúdos matemáticos em questão de maneira superior, pois os conjuntos não somente foram meramente apresentados e trabalhados, mas sim classificados segundo suas propriedades estruturais algébricas.

Um caso que ilustra de certa forma o contrário das ideias de Klein quanto à Educação Matemática é a tese de doutorado de Santos (2015) que constatou que as relações entre a Álgebra acadêmica e a Álgebra escolar na formação inicial do licenciando não foram suficientes e expressivas ao ponto de resignificarem os conhecimentos do futuro professor de Álgebra “elementar” e seu ensino, ou seja, o saber pedagógico de conteúdo não foi modificado.

Neste caso a dupla descontinuidade apontada por Klein existe, mas a sua possível reversibilidade proposta ao fomentar a Matemática Elementar de um ponto



de vista superior não trouxe resultados nesta situação, sendo que para a autora uma das principais causas é o modo como as relações entre a Álgebra acadêmica e a Álgebra escolar se constituem no processo de formação do professor.

De toda forma, Santos (2016) observou que um excesso de formalismo e supervalorização da Matemática acadêmica em sua forma abstrata e isolada tendo uma posição contrastante à Matemática escolar não é um tratamento adequado e cria obstáculos para o professor da disciplina em sua atuação docente por talvez não saber como aplicar os conhecimentos supostamente adquiridos ou relacioná-los diretamente com o processo de ensino-aprendizagem.

Por um lado, a autora embasada em (FIORENTINI, 2005) assinala que não se trata de reduzir um destes saberes ou algum ter um tratamento todo especial durante a formação docente, mas sim edificar um repertório de conhecimentos vinculados à própria construção do conhecimento matemático em sua gênese e especificidades.

Neste sentido, na prática de ensino da disciplina Estágio em Educação Matemática II do Curso de Licenciatura realizada em 2016/1 procurei tentar relacionar os conhecimentos de Álgebra vistos na universidade com a álgebra dos números inteiros na tentativa de explicar rigorosamente (claro que em uma boa medida para os alunos) o conteúdo correlato.

Isto se deu no tratamento de tal conjunto numérico visto como uma extensão do conjunto dos números naturais, na significação para as operações em tal conjunto, na compreensão das convencionais “Regras de sinais”, entre outros tópicos de fundamentação teórica. Por outro lado, vale constar que, por exemplo, é possível alguém deduzir significações para as operações com números inteiros sem ter conhecimentos formais de Álgebra, fato que pude observar durante a realização da prática de ensino.

Vinculando a temática da OBMEP com as práticas de ensino, sobretudo na tentativa de utilizar o material de seus diversos programas parceiros no planejamento, pude perceber sua validade no processo de ensino-aprendizagem, sendo que repeti esta postura também na prática de ensino da disciplina Estágio em Educação Matemática III do Curso de Licenciatura realizada no segundo semestre de 2016.

Em particular, uma conduta adotada foi adaptar alguns problemas da OBMEP e do seu Banco de Questões conforme o nível de conhecimento da turma. Isto se mostrou uma atitude válida, pois o professor deve ter cuidado ao indicar problemas, pois estes devem ser considerados de fato como problemas para os alunos (VIANNA,

2002). E, por outro lado considere a possibilidade de que trabalhar certos problemas mais difíceis pode causar o efeito contrário nos alunos caso não consigam resolvê-los em um primeiro momento, desmotivando-os para as atividades subsequentes propostas.

Por fim elencamos o trabalho de Corrêa et al. (2016) como exemplo da dupla descontinuidade evidenciada por Klein envolta ao conteúdo de matrizes abordado no Ensino Médio. Os autores apontam que o ensino deste conteúdo matemático sofre do problema da descontextualização (matemática) e inspirados nas ideias de Klein formulam atividades, principalmente no âmbito da Modelagem Matemática, com vistas a uma ressignificação dos estudantes.

Podemos notar que em alguns dos trabalhos citados certas tendências em Educação Matemática como a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática (no caso deste último) foram utilizadas para provocar uma ressignificação dos conceitos matemáticos, em outras palavras, trazer algum significado (matemático) para o aluno.

Considero que esta mescla de metodologias em Educação Matemática e as ideias de Klein no sentido da fundamentação teórica dos conteúdos correlatos podem gerar excelentes oportunidades de contextualização, mesmo que sejam restritas à Matemática. Conforme Ripoll et al. (2016b) esta forma de contextualização em relação à Matemática em si:

inclui o papel dos conceitos matemáticos em um dado campo teórico, sua articulação com outros conceitos nesse campo e com outras teorias, a adequação de representações e ferramentas teóricas para um dado problema ou aplicação, os problemas envolvidos na sua gênese e desenvolvimento histórico e aqueles que mantêm sua importância na matemática contemporânea. (RIPOLL et al., 2016b, p. XVII)

Mesmo que haja exemplos contrastantes entre si dentre os mencionados nesta investigação, acreditamos que a pesquisa não para por aqui, não se esgota, ademais que podemos observar que muitas das referências constadas são relativamente recentes, o que corrobora esta consideração. Além disso, como mencionado anteriormente nos apontamentos gerais da fundamentação teórica, estamos de certo modo inovando pondo a OBMEP ao lado das ideias de Klein. Acreditamos que com base nesta investigação alguns fatos possam ser esclarecidos acerca da concomitância entre estas duas temáticas, e por ventura a utilização de outras

metodologias de pesquisa possa se fazer presente futuramente por trabalhos científicos que as abordem.

## 5. PRÁTICAS DE ENSINO

### 5.1. Caracterização de elementos constituintes e coleta de dados da pesquisa

Uma das práticas de ensino da investigação foi realizada em uma instituição de ensino pública. Esta é uma preocupação pessoal em contribuir com a educação pública como oriundo desta e ciente de algumas de suas carências, e também no sentido de um “retorno” de forma a tentar aplicar na prática de ensino os conhecimentos aprendidos no Curso de Licenciatura.

As atividades que foram aplicadas e o planejamento das práticas de ensino tiveram embasamento na exploração de materiais didáticos e acadêmicos provenientes da OBMEP e programas parceiros, tendo também um suporte nas ideias de Klein já explicitadas.

A coleta de dados foi feita principalmente por meio da prática de ensino realizada, consistiu de um diário de campo constando de observações pertinentes desta, aulas planejadas com descrição de objetivos, produções e trabalhos dos alunos digitalizados, e transcrições de discursos destes considerados importantes e pontuais para a pesquisa.

Também se realizou um questionário avaliativo da prática de ensino em seguida da sua finalização de modo a identificar e compreender melhor aspectos positivos e negativos inerentes.

A outra prática de ensino desta investigação foi realizada também em uma instituição de ensino pública, mas não com os discentes desta propriamente em uma turma regular da disciplina de Matemática, e sim com os alunos do PIC Jr. da OBMEP pertencentes ao nível 3.<sup>6</sup>

Novamente, pelas mesmas razões já apontadas o foco desta última prática de ensino deu-se para alunos de escola pública, em particular oriundos de instituições não seletivas por meio de métodos avaliativos.

Isto em razão do PIC Jr. contemplar alunos de diversas instituições de ensino públicas e possuir uma quantidade considerável de discentes provenientes de instituições seletivas por formas avaliativas como os Colégios Militares e os Institutos Federais, os quais constituem um alunado diferenciado em relação ao de escolas não

---

<sup>6</sup> O PIC Jr. também possui níveis de divisão do seu alunado, os quais são correspondentes aos níveis da OBMEP.

seletivas. E mais uma vez, o mesmo argumento inicial nesta parte do trabalho pode ser estendido neste caso. Além das formas de coleta de dados constadas na prática de ensino anterior, também foram obtidos alguns áudios dos encontros gravados com celular, sem exposição do rosto dos discentes e com o total consentimento destes.

Foi realizada a aplicação de um questionário aos professores habilitados<sup>7</sup> do PIC Jr. da OBMEP da região de abrangência de Porto Alegre de forma a observar a presença (ou não) de descontinuidades conforme Klein em sua formação docente. Ainda que este método de recolha de dados esteja mais associado a técnicas de investigação quantitativas, contudo pode prestar um importante serviço à investigação qualitativa, baseando-se na criação de um formulário devidamente elaborado e normatizado (MEIRINHOS e OSÓRIO, 2010).

Como a prática de ensino desta pesquisa foi realizada no PIC Jr. da OBMEP e na disciplina de Estágio em Educação Matemática III do curso de Licenciatura em Matemática, pude acompanhar a evolução do desempenho dos alunos e possíveis progressos e retrocessos para comprovar a eficácia da proposta realizada.

Esta característica é interessante, pois permite a identificação de elementos emergentes durante a prática de ensino que podem contribuir para o trabalho realizado pela investigação em questão. E, esta relaciona-se tendo conformidade com um dos carizes atribuídos por Lüdke e André (1986) ao estudo de caso qualitativo: “contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra através do trabalho intensivo de campo” (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 11).

## **5.2. Apresentação dos casos**

Apresentaremos ambos os casos com certo nível de detalhe em razão da metodologia de pesquisa concernente como evidenciado pelos autores supracitados que a suportam. Esta demanda que vários aspectos sejam considerados e não apenas os intrínsecos do estudo, a fim que de a particularidade dos casos adotados não seja reduzida apenas a elementos próprios da pesquisa.

Para a realização de uma parte da prática de ensino desta pesquisa a instituição de ensino pública escolhida foi o Colégio Estadual Paula Soares localizado

---

<sup>7</sup> Os professores habilitados são docentes da Educação Básica e alunos do curso de Licenciatura em Matemática selecionados por meio de uma prova de habilitação, os quais serão preparados durante o programa para desenvolver atividades em suas escolas ou escolas vizinhas.

na rua General Auto, número 68 no bairro Centro no município de Porto Alegre – Rio Grande do Sul.

Na instituição de ensino são ofertados o Ensino Fundamental completo pela manhã, o Ensino Médio regular à tarde e o Ensino Médio na modalidade EJA à noite. Atentando para o Ensino Médio, nível da prática de ensino, este possui a carga horária diária e seis períodos de 55 minutos cada com um intervalo de 15 minutos entre o terceiro e o quarto. Em particular, a disciplina de Matemática possui carga horária semanal de quatro períodos.

O público alvo desta parte da investigação foram turmas do 3º ano do Ensino Médio, composta por 30 alunos em média, sendo um deles especial em uma delas, referente à prática de ensino da disciplina Estágio em Educação Matemática III.

Conversando com a supervisora pedagógica e diretora da escola estas informaram que a maioria dos alunos da escola é pertencente às classes sociais média alta e baixa, via pesquisas e sondagens que realizam com periodicidade de um ano. Outra característica de uma das turmas da prática de ensino é o fato de possuir um aluno especial, o que se configurou com um desafio, pois geralmente quando pensamos em novas estratégias e metodologias de ensino-aprendizagem em Educação Matemática nos voltamos (quase que estritamente) para os alunos regulares e suas dificuldades.

É importante ressaltar que nos meses antecedentes à realização da prática de ensino desta pesquisa houve o movimento de ocupação das escolas estaduais pautado em uma série de reivindicações dos mais diversos segmentos que compõem a comunidade escolar, principalmente em melhoria das condições estruturais das instituições. Em particular, durante o período de realização esta encontrava-se com seu terceiro pavimento interditado devido a motivos de estrutura e instalação elétrica. Muitos alunos da instituição escolar, inclusive da prática de ensino, estavam envolvidos com este movimento.

Certamente a característica de uma escola possuir muitos problemas de infraestrutura pode causar algum impacto no processo de ensino-aprendizagem, sobretudo se forem relativos ao espaço das aulas, pois estudantes e professores podem se sentir desconfortáveis e desmotivados, entre outros aspectos negativos decorrentes de tal situação.

Em particular, como as turmas da prática de ensino são do 3º ano do Ensino Médio é de praxe que os alunos estejam vivenciando tensões sobre concursos

vestibulares e o ENEM. Por um momento pensei que este fato pudesse se configurar como um empecilho para a investigação, já que os alunos poderiam não se interessar por outras atividades nas aulas da disciplina de Matemática. Mas os discentes das turmas em questão foram receptivos com as temáticas e objetivos deste trabalho.

Salientamos que a propositura desta prática de ensino não é treinar os alunos para a OBMEP e sim utilizar suas questões em sala de aula de modo a promover a aprendizagem de Matemática, sendo a competição propriamente dita e seus resultados uma possível consequência do trabalho desenvolvido.

Com efeito, pensar da última maneira restringe a OBMEP praticamente a apenas esta acepção dentro do universo escolar, não incitando uma discussão de como esta pode “interferir” no processo de ensino-aprendizagem.

A outra parte da prática de ensino da investigação foi realizada com os alunos do PIC Jr. da OBMEP. Este se constitui com um programa fora do âmbito da sala de aula em que os discentes estudam conteúdos usuais tratados na disciplina de Matemática e outros também sob um ponto de vista superior, tendo a possibilidade de interação com outros estudantes, todos orientados por um professor.

Os alunos participantes são selecionados por meio de seus resultados na competição quanto às medalhas conquistadas, e se porventura não houver interesse por parte destes, serão substituídos por outros que obtiveram menção honrosa, os quais serão convidados a participar do programa.

Os encontros do PIC Jr. ocorrem em locais de referência e também acontecem à distância por meio do Fórum do Hotel de Hilbert, no qual são fomentadas discussões virtuais acerca do conteúdo desenvolvido e realizadas outras atividades além das presenciais. Cada um destes locais de referência é denominado polo possuindo um coordenador específico.

Convém ressaltar que como incentivo à participação no programa, os discentes recebem uma bolsa de Iniciação Científica Jr. do CNPq.

O PIC Jr. se constitui como um caso que se configura na temática da pesquisa porque vai ao encontro de uma das ideias desta que é o tratamento da Matemática Elementar sob um ponto de vista superior.

A turma do PIC Jr. em que a prática de ensino foi realizada era do nível 3 e havia dois discentes provenientes de escolas públicas não seletivas, os quais estavam no 1º ano do Ensino Médio e eram oriundos do próprio polo de atuação.

Apesar desta certa disparidade de haver somente dois alunos de uma escola pública não seletiva enquanto que os outros eram todos do Colégio Militar de Porto Alegre e também da UFRGS isto não comprometeu de forma alguma a realização das atividades, uma vez que notei o esforço e comprometimento de ambos os segmentos. Contudo, eu sentia que esta característica às vezes os inibia, pois os demais alunos concluíam as atividades em um tempo relativamente menor. Assim, em tais circunstâncias tive que estimulá-los quase que constantemente.



## **6. ATIVIDADES REALIZADAS NA PRÁTICA DE ENSINO, QUESTIONÁRIOS E ANÁLISE DOS DADOS**

Nesta parte da pesquisa o que se pretende não é uma descrição detalhada da experiência vivenciada, mas sim comentários, percepções e análises qualitativas daquilo que foi considerado como relevante para os propósitos da investigação.

Procurou-se observar o dinamismo da prática de ensino e as reações dos alunos quanto à aplicação do material e às atividades desenvolvidas.

Como alguns dos trabalhos referenciados nesta pesquisa constados na temática da OBMEP trataram de alunos com bom desempenho na disciplina de Matemática, neste estudo buscou-se analisar com um olhar mais acurado para aqueles com um desempenho regular, que já foram significados neste texto.

No que segue, são analisadas as respostas de algumas atividades realizadas em ambas as práticas de ensino por meio de um apanhado geral de forma a mostrar as ideias de resolução e discussão mais comuns entre os discentes. Casos eventuais serão explicitados em virtude de elementos destaque como algum detalhe chamativo ou alguma maneira diferenciada de solucionar a atividade.

Acerca das duas práticas de ensino, além de ter um papel como pesquisador também era o próprio professor das turmas correlatas, mas somente de uma delas no Colégio Estadual Paula Soares. Assim, esta postura de professor-pesquisador foi muito interessante, pois me permitiu aprimorar a condução da prática pedagógica no processo de ensino-aprendizagem segundo uma perspectiva crítica das experiências realizadas.

A fim de não tornar a escrita do trabalho muito extensa em razão da quantidade de atividades aplicadas, apenas algumas questões oriundas da OBMEP e do seu Banco de Questões foram escolhidas para serem expostas na análise dos dados. No entanto, uma parte consta no apêndice deste trabalho.

De toda forma, para efeito de consideração de todas as atividades que foram aplicadas além daquelas elencadas neste trabalho, serão realizadas algumas ponderações acerca destas nesta parte da investigação na direção de um apanhado geral.

## 6.1. Prática de ensino no Colégio Estadual Paula Soares

Na preparação de grande parte dos planejamentos<sup>8</sup> a experiência teve majoritariamente influência dos materiais teóricos oriundos do Portal da Matemática OBMEP. Durante todo o período da prática de ensino foram abarcados praticamente quase a totalidade de conteúdos usuais de Geometria Espacial geralmente trabalhados no 2º ou 3º ano do Ensino Médio (dependendo da organização curricular instituição de ensino), os quais podem ser sintetizados em Geometria Espacial de posição, poliedros e volumes.

Uma postura necessária do pesquisador foi de adaptar os recursos supracitados no planejamento por conta própria e não aplicá-los tais quais, de modo a tentar imprimir de uma melhor maneira as ideias destes no processo de ensino-aprendizagem.

Esta adaptação necessária ocorreu em virtude do rendimento observado da turma no período de observações da prática de ensino da disciplina de Estágio em Educação Matemática III e pelo próprio teor matemático dos materiais correlatos, pois percebeu-se que caso contrário estes poderiam surtir efeitos contrários àqueles que se propõem.

Ao analisar tais recursos percebeu-se que estes possuem uma linguagem matemática rigorosa de modo a justificar adequadamente todos os resultados elementares abordados na Educação Básica por meio de definições bem postas e demonstrações. Ou seja, podemos dizer que tais materiais são de certo modo um tratamento da Matemática Elementar sob um ponto de vista superior.

De fato, houve dificuldades nesta adaptação e em como formular atividades que viessem ao encontro do que estava sendo proposto e que compatibilizassem de certa forma com outros recursos também utilizados. A mesma ponderação pode ser considerada acerca da adaptação das questões da OBMEP para as proposituras do trabalho bem como em relação à busca específica destas.

Desta forma, procurei não dar muita prevalência para o rigor matemático a fim de não confrontar os alunos com algo que poderia não ser tão contributivo no processo de ensino-aprendizagem e que também porventura poderia causar alguma espécie de desinteresse quanto às atividades desenvolvidas.

---

<sup>8</sup> Todos os planejamentos mencionados da prática de ensino no Colégio Estadual Paula Soares estão constados no apêndice deste trabalho.

Apesar de os materiais teóricos em questão fomentarem uma abordagem diferenciada da Matemática Elementar e de algumas questões da OBMEP não serem aplicáveis na íntegra, considero que a riqueza de tais recursos está contida no fato de eles poderem ser adaptáveis aos interesses do professor, em particular para as proposituras desta investigação.

Convém ressaltar que a existência de dicas no material teórico com sugestões de ajustamento e de outros materiais no Portal da Matemática OBMEP contendo exercícios relativos a cada um dos conteúdos abordados foram interessantes também neste sentido.

Salientamos que as aulas dadas para todas as turmas desta prática de ensino não foram dadas inteiramente envoltas à temática da OBMEP, visto que por uma solicitação da professora titular da disciplina outras atividades foram aplicadas em razão dos alunos também estarem se preparando para o ENEM e concursos vestibulares.

### 6.1.1. Atividade Pensando na definição de poliedros<sup>9</sup>

Esta atividade consistiu na construção de justificativas escritas de por que determinados sólidos geométricos não correspondiam à ideia intuitiva que temos do que um poliedro pode vir a ser, na primeira aula abordando tal conteúdo matemático. Tais sólidos geométricos foram obtidos de Neto (2016), autor de um dos materiais teóricos do Portal da Matemática OBMEP utilizados para o planejamento da aula correlata. Os referidos sólidos geométricos estão apresentados adiante na Figura 4 na página 64 de modo a facilitar a leitura das justificativas dos alunos.

Formalmente, um poliedro  $P$  é uma união de um número finito de polígonos planos satisfazendo as condições a seguir:

- (1)  $P$  é **conexo**, ou seja, dois polígonos quaisquer contidos em  $P$  são conectados<sup>10</sup>.
- (2) Cada lado de um polígono contido em  $P$  é lado de exatamente mais um polígono contido em  $P$ .
- (3) Se  $v$  é vértice de um polígono contido em  $P$ , todos os polígonos que tem  $v$  como vértice formam um único circuito<sup>11</sup>.

<sup>9</sup> Todas as atividades das práticas de ensino têm “uma” solução apresentada no apêndice deste trabalho. Atentamos para a palavra “uma”, pois lembramos que as soluções não são únicas.

<sup>10</sup> Dois polígonos  $f$  e  $f'$  contidos em  $P$  são chamados conectados se existe uma sequência de polígonos adjacentes  $f_0, f_1, \dots, f_n$  ( $n \geq 1$ ) contidos em  $P$  e tais que  $f = f_0$ ,  $f_n = f'$  e  $f_{i-1}$  é adjacente a  $f_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

<sup>11</sup> Um conjunto  $f_0, f_1, \dots, f_n$  ( $n \geq 2$ ) de polígonos contidos em um poliedro é dito um circuito, se  $f_{i-1}$  é adjacente a  $f_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , e  $f_n$  é adjacente a  $f_0$ .

(4) Dois polígonos adjacentes contidos em  $P$  são sempre não coplanares. (NETO, 2016, p. 1, negrito como no original)

Assim, um dos objetivos da atividade é elucidar a definição de poliedro apresentada aos alunos que será citada adiante, evidentemente com distinções da anterior que é extremamente formal.

No início do encontro em questão os poliedros foram tratados por meio de uma motivação matemática realizada oralmente e com registros no quadro no sentido de uma extensão de conceitos do plano anteriormente trabalhados na trajetória escolar dos alunos, principalmente acerca da ideia de polígono.

Isto porque muitos dos conteúdos anteriores trabalhados de Geometria Espacial de posição foram resultados matemáticos ampliados do plano para o espaço.

Nesta perspectiva, explanei sobre a própria etimologia da palavra poliedro procurando relacioná-la com o seu significado, assim como fiz o mesmo acerca da palavra polígono, que é o conceito equivalente no caso do plano, sendo o primeiro uma “extensão”, um “análogo” do segundo.

Abordando inicialmente de maneira intuitiva com os alunos um poliedro como um sólido geométrico constituído por três elementos básicos: vértices, arestas e faces, percebi que muitos deles sabiam esses conceitos apropriadamente, pois já foram trabalhados implicitamente em atividades anteriores correspondentes aos conteúdos de Geometria Espacial de posição.

Quando questionados oralmente sobre propriedades de poliedros fornecidos como exemplo que podiam ser observadas, os quais foram entregues xerocados e uma parte representada no quadro, alguns alunos acusaram propriedades na direção da sua definição matemática como: cada aresta faz parte de apenas duas faces, duas arestas nunca se cruzam no meio, no sentido de que tais sólidos geométricos possuem como faces polígonos “bem comportados”, é “fechado” (no sentido de dividir o espaço em duas regiões: a de “dentro” e a de “fora”), entre outras.

Comentei que adiante estas propriedades dos poliedros restridentes a sua definição iriam ser trabalhadas. Na verdade, a própria definição matemática formal de poliedro é uma questão delicada e pode ser tomada com um pouco de confusão diante das suas especificidades contidas.

A tentativa de passar algo para os alunos que não fugisse do rigor matemático, mas ao mesmo tempo que não fosse envolto em um formalismo demasiado configurou-se como um desafio durante a preparação e execução do planejamento.

Tanto que tive que ter certo cuidado ao discorrer sobre alguns “preciosismos” envolvendo a noção de poliedro para não me confundir e também para não confundir os estudantes.

A definição de poliedro apresentada xerocada para os alunos e discutida baseou-se em Neto (2016), Lima et al. (2006) e Dante (2014) de modo a ponderar sobre as ideias de tais autores tratando-a sobre a linha desta investigação. Expomos tal definição a seguir:

Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais chamadas **faces** e a região do espaço determinada por elas. Cada lado de uma dessas regiões é também lado de uma outra única região poligonal. A interseção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces é chamado **aresta** do poliedro. E cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.

Atente-se! Cada vértice do poliedro é um ponto comum a três ou mais arestas.

Figura 2: Definição de poliedro

Fonte: Autor

Concorda-se com Lima et al. (2006) que tal definição de poliedro adotada em sala de aula é relativamente simples e inteligível, contudo permite algumas impropriedades que, seguramente, não necessitam ser objeto de discussão em um primeiro estudo dos poliedros. Por exemplo, a figura a seguir oriunda de Neto (2016), a qual também foi apresentada xerocada para os alunos nos ilustra um sólido geométrico que, de acordo com a definição adotada é um poliedro, mas na verdade não o é.

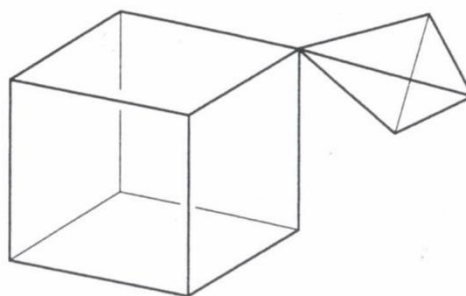


Figura 3: Sólido geométrico inicial

Fonte: (LIMA et al., 2006)

Aproveitando tal figura, solicitei que os estudantes justificassem, mesmo que intuitivamente, o porquê desta não ser um poliedro. Notei que surgiram justificativas diferentes entre si e muito interessantes com argumentos diversificados, as quais são similares às aquelas expostas no Quadro 1 na página 61. Pude observar que uma parte delas foi baseada nas considerações da definição anterior.

Durante este encontro, um aluno perguntou se existe um critério para definir o que é um poliedro, talvez induzido pelo contexto da atividade. Apontei para tal aluno que a definição formal e rigorosa de poliedro é cheia de restrições. Porém, mesmo frente a estas características é perfeitamente possível construir um critério de verificabilidade de poliedros, embora não seja usualmente aplicável. Algo notável é que a atividade realizada seria algo neste sentido.

Observou-se que os alunos não utilizaram uma linguagem matemática formal para as suas justificativas. Pode-se dizer que estes escreveram como entenderam aquilo que foi proposto, e esta era justamente a intenção da atividade naquele momento.

Por exemplo, expressões como “uma determinada aresta pertence a uma face” e “a interseção de duas faces é uma determinada aresta” foram postas como “uma determinada aresta participa de uma face” e “há o compartilhamento de uma determinada aresta pelas duas faces”.

É claro que não podemos exigir dos alunos um rigor matemático elevado, mas que estes exponham argumentos que de fato justifiquem de alguma maneira os conceitos matemáticos envolvidos. Com efeito, saber expressar apropriadamente as ideias envolventes à Matemática é algo imprescindível para a sua fundamentação assim como em relação à qualquer outra área do conhecimento.

Algo muito interessante escrito por um aluno<sup>12</sup> foi uma espécie de argumentação da não verificação de uma restrição adicional<sup>13</sup> à definição de poliedro apresentada em sala de aula acerca do poliedro 1 constado na Figura 4 na página 60.

*“não é um poliedro a Figura 1 porque tem duas arestas que se cruzam de forma que continuam formando este sólido”* - Justificativa do aluno 1

---

<sup>12</sup> Designaremos por números os alunos da primeira prática de ensino e por letras os alunos da segunda prática de ensino.

<sup>13</sup> Se  $v$  é vértice de um polígono contido em um poliedro, todos os polígonos que têm  $v$  como vértice formam um único circuito.

Tal restrição adicional é construída por Neto (2016) por meio do conceito de circuito de polígonos<sup>14</sup>, o qual não foi passado aos alunos em razão da complexidade.

A justificativa do aluno 1 na verdade ilustra justamente o que pode acontecer se a restrição adicional não for satisfeita pelo poliedro em questão, podendo ser considerada como um critério para verificar se um sólido geométrico pode ser um. Tal justificativa não foi percebida por mim no momento em que li o material de Neto (2016) e pode-se dizer que ela pode ser tomada como uma versão fraca da restrição adicional.

Percebeu-se que muitas das respostas dos alunos à atividade realizada são versões informais das condições de definição de um poliedro e algumas vezes nem tão informais assim em razão da linguagem empregada. Em certos casos apenas ditas de outra maneira ou com algum termo errôneo, mas com a ideia básica correta. Podemos notar essa consideração no quadro a seguir de algumas justificativas dos alunos:

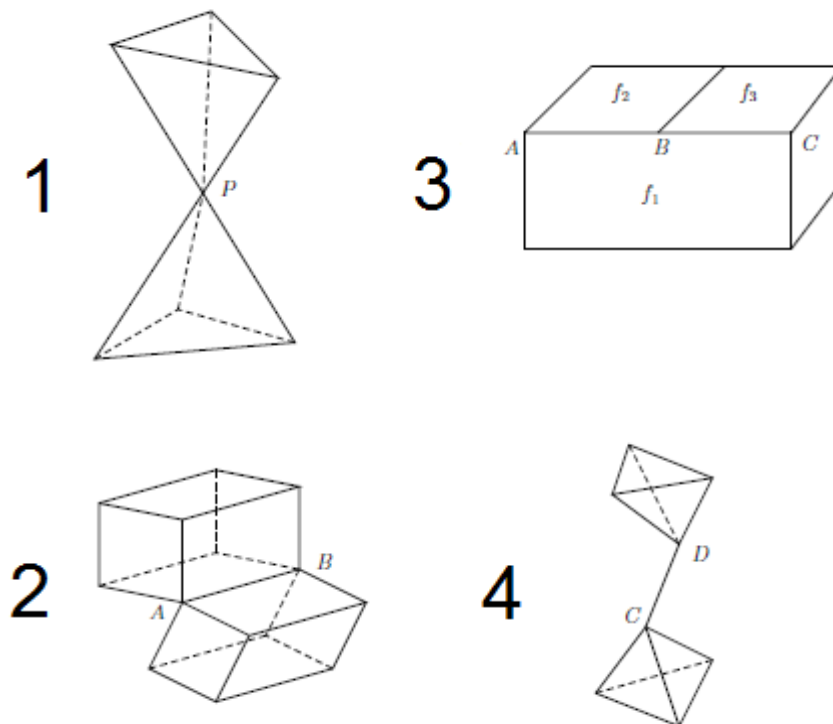


Figura 4: Sólidos geométricos

Fonte: (NETO, 2016)

<sup>14</sup> Um conjunto  $f_0, f_1, \dots, f_n$  ( $n \geq 2$ ) de polígonos contidos em um poliedro é dito um circuito, se  $f_{i-1}$  é adjacente a  $f_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , e  $f_n$  é adjacente a  $f_0$ .

Quadro 1: Justificativas dos alunos

<b>Sólido geométrico</b>	<b>Justificativas dos alunos</b>
Sólido geométrico inicial	<p><i>“Não é um poliedro pois as arestas (algumas) estão participando de infinitos planos, enquanto [que] em um poliedro, a aresta participa apenas de 2 planos.” – Aluno 2</i></p> <p><i>“A aresta que liga os dois desenhos faz com que eles não sejam poliedros, pois só pode determiná-los se cada um tivesse sua própria aresta, pois não pode haver dois poliedros em uma mesma aresta.” – Aluno 3</i></p> <p><i>“Esta figura não é um poliedro pois estão ligados em uma aresta. São 2 poliedros!” – Aluno 4</i></p>
Sólido geométrico 1	<p><i>“Não é poliedro pois uma aresta tem 4 faces.” – Aluno 4</i></p>
Sólido geométrico 2	<p><i>“Não pois existe o compartilhamento da reta AB.” – Aluno 5</i></p>
Sólido geométrico 3	<p><i>“Este exemplo possui uma aresta “cortando” o poliedro, assim, ela acaba fazendo parte de mais faces do que deveria.” – Aluno 6</i></p> <p><i>“Não é poliedro pois uma aresta tem 3 faces.” – Aluno 4</i></p>
Sólido geométrico 4	<p><i>“Não é porque tem uma aresta que não participa de nenhum plano.” – Aluno 1</i></p> <p><i>“Não é porque entre o[s] ponto[s] D e C não conseguem delimitar um espaço</i></p>



	<p><i>pele fato de estar em apenas 1 dimensão.” – aluno 7</i></p> <p><i>“A linha circulada [segmento CD] não funciona como uma aresta então não é um poliedro.” – Aluno 8</i></p>
--	---

Fonte: Autor

Podemos observar que apareceu um termo interessante na justificativa do aluno 7: a palavra dimensão.

Assim, aproveitei esta oportunidade para discutir este conceito com os alunos, associando a ideia de uma dimensão a objetos retilíneos, de duas dimensões a objetos planares e de três dimensões a objetos que ocupam um espaço, também relacionando com o sistema de coordenadas cartesianas no plano e no espaço.

Após esta discussão, procurei fazer com que os alunos deduzissem que os poliedros, a grosso modo, podem ser vistos como colagens de objetos de dimensão dois, enquanto que os polígonos como colagens de objetos de dimensão um. Desta forma, isto proporcionou uma visão superior de um conceito da Matemática Elementar.

Com base nas respostas dos alunos, pode-se inferir que compreenderam a definição de poliedro e saberiam identificar aspectos notáveis em um sólido geométrico que não permitiriam que este o fosse como, por exemplo, “colagens” de poliedros por meio de apenas um vértice (sólido geométrico inicial) ou aresta (sólido geométrico 2). Porém assim como houve respostas interessantes, houve também argumentos imprecisos e sem fundamentação, mesmo que de forma intuitiva.

Assim, algo interessante em atividades deste tipo é que elas nos permitem ter uma concepção de como os alunos estão crescendo no seu processo de aprendizagem, como expressam certas ideias matemáticas e sobretudo sobre qual é o entendimento “real” destas para eles próprios. Por exemplo, nas justificativas dos alunos 2 e 1 quanto ao sólido geométrico inicial e ao sólido geométrico 4, respectivamente, estes pensaram cada face do poliedro, um polígono planar, como um “plano propriamente dito” ou esta pertencente a um plano.

Também vale ressaltar que de um modo geral, com base nas justificativas dos discentes, a aplicação da atividade também mostrou que estes souberam abstrair

apropriadamente os elementos básicos de um poliedro: vértices, arestas e faces, o que é fundamental para sua realização.

Em vez de darmos uma definição formal de poliedro em sala de aula perspectivando a Matemática Superior, as exemplificações dadas no material de Neto (2016) possibilitaram que os alunos analisassem quando um sólido geométrico não é um poliedro e tentassem se apropriar sob um ponto de vista superior este conceito.

Ressaltamos que nem sempre o que é formal e também legítimo matematicamente precisa estar posto sob a forma de definições e teoremas no sentido matemático estrito dos termos.

Logo, podemos intuir que o tratamento superior nesta atividade fez com que os alunos compreendessem bem com que conceito estão trabalhando, o que é essencial para o bom andamento do processo de ensino-aprendizagem. É claro que esse compreender foi em certa medida, pois não é possível garantir que apenas uma atividade consiga fazer com que os discentes assimilem o devido conceito satisfatoriamente, porém ela junto com a vivência do aluno (que desconhecemos) pode ser suficiente.

### **6.1.2. Atividade relação de Euler e poliedros convexos**

Esta atividade consistiu da aplicação da questão 3 do Banco de Questões 2015 da OBMEP e de questionamentos acerca desta de modo a tratá-la sob a perspectiva deste trabalho, ambos apresentados xerocados aos alunos.

Basicamente a referida questão solicita o número de vértices, arestas e faces de um poliedro obtido a partir de um cubo por meio de determinados cortes.

Os conteúdos matemáticos envolvidos nesta atividade foram o conceito de poliedro convexo e relação de Euler.

Analisaremos aqui a referida questão apresentada aos alunos da maneira a seguir e alguns dos questionamentos realizados.

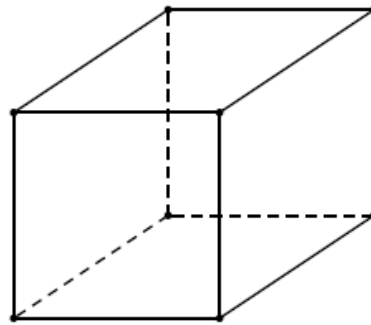
### 3 *Cubo cortado*

Francisco acaba de aprender em sua aula de geometria espacial a *Relação de Euler* para poliedros convexos:

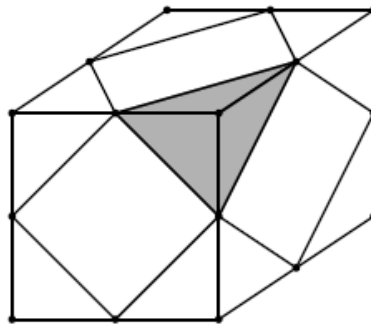
$$V + F = A + 2.$$

Na equação acima,  $V$ ,  $A$  e  $F$  representam o número de vértices, de arestas e de faces do poliedro, respectivamente. Podemos verificar que a Relação de Euler é válida no cubo abaixo, pois existem 6 faces, 12 arestas, 8 vértices e

$$V + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2.$$



João decidiu verificar a Relação de Euler em outro poliedro obtido de um cubo de madeira. Ele marcou os pontos médios de cada aresta e, em cada face, os uniu formando quadrados, como mostra a figura abaixo. Em seguida, ele cortou as 8 pirâmides formadas em torno de cada vértice, obtendo um novo poliedro. Determine:



- o novo número de vértices;
- o novo número de arestas;
- o novo número de faces.

Figura 5: Questão 3 do Banco de Questões 2015 da OBMEP  
Fonte: (ASSIS et al., 2015)

A relação de Euler foi abordada inicialmente com os discentes por meio de uma motivação inicial. Para tanto expus sobre tal conteúdo no contexto de grafos indicando muito informalmente que este é um conjunto de pontos, a rigor, vértices do plano no qual alguns deles estão ligados por linhas, a rigor, arestas, e fazendo registros no quadro.

A relação explanada entre esses dois conceitos, grafos e relação de Euler, deu-se por meio do segundo conteúdo matemático ser utilizado como verificação da planaridade do primeiro, ou seja, a possibilidade de representá-lo no plano sem nenhuma interseção entre as arestas.

Uma das aplicações dessa conexão entre essas duas ideias, a qual foi assinalada para os alunos oralmente, dá-se na resolução de problemas práticos, como por exemplo, acerca da possibilidade das tubulações e encanamentos em uma mesma profundidade de um bairro ou qualquer lugar geográfico que possam conter canos que não sejam retos.

Como a profundidade sob o solo deve ser única, podemos pensar que todos os canos são como linhas em um mesmo plano e as casas, demais logradouros e as empresas fornecedoras como pontos todos coplanares. Logo, podemos esquematizar a situação correlata por meio de um grafo que de acordo com a questão indaga-se sobre sua planaridade.

Observei que a explanação de uma motivação do estudo da relação de Euler provocou os alunos a pensarem um pouco mais sobre ela, uma vez que houve uma resposta à clássica pergunta: “Para que serve a Matemática?” ou mais precisamente “Para que serve isto que estou estudando?”, e sobretudo uma percepção da Matemática Elementar sob uma lente superior.

Discorri também sobre mais resultados matemáticos referentes à relação de Euler como, por exemplo, expondo que esta não é verificada por todos os poliedros de acordo com a definição apresentada, mas que é satisfeita por uma classe maior do que os poliedros convexos.

Esta última consideração juntamente com a existência de poliedros que não são convexos que satisfazem a relação de Euler motiva a definição de poliedro euleriano.

Diante disto, indaguei os alunos sobre a validade da afirmação de que todo poliedro convexo é euleriano e sua recíproca. Os estudantes apontaram que esta não

se verifica, pelo fato da recíproca não ser necessariamente verdadeira conforme a discussão anterior.

Nesta direção, expus em sala de aula que os poliedros eulerianos são justamente aqueles não possuem “buracos”, pois a definição de poliedro apresentada permite esta característica. Isto, no seguinte sentido informal: considerando que a superfície do poliedro seja maleável, podemos inflá-lo até se tornar uma esfera e espera-se que esta deformação seja reversível. Caso contrário, se após este processo de inflação não for possível transformá-lo numa esfera em razão da existência de buracos, logo podemos concluir que o respectivo poliedro não é euleriano.

Formalmente, podemos entender que tal processo nada mais é do que uma transformação contínua invertível com inversa contínua entre o poliedro e a esfera, a qual recebe o nome de homeomorfismo.

Conceitos como convexidade e a ideia informal desta transformação fazem parte de uma área da Matemática chamada Topologia, a qual se dedica ao estudo de propriedades de figuras geométricas ou conjuntos mais gerais (espaços topológicos) sob o efeito de funções contínuas.

Evidentemente, mencionar tais especificidades contidas num estudo aprofundado de Topologia não é recomendável na sala de aula no ensino básico. Porém, este aspecto conceitual teve uma relação importante no sentido de perspectivar a Matemática Elementar sob um ponto de vista superior.

Acerca da atividade aplicada, em um primeiro momento a turma sentiu dificuldade em abstrair o procedimento de cortes realizados no cubo, sendo que aproveitei uma caixa cúbica que estava no espaço da sala de aula para ilustrá-lo de certa maneira.

Os alunos realizaram a contagem de elementos do poliedro em questão de diversas maneiras. Algo interessante é que muitos alunos não fizeram uma contagem “um por um” e utilizaram a perspectiva simétrica do poliedro correlato para deduzir a contagem. Estes justificaram praticamente como “tudo o que aparece na frente, também aparece atrás”.

Outros discentes perceberam que o poliedro em questão era convexo e tendo encontrado dois valores dentre o número de vértices, arestas ou faces, utilizaram a relação de Euler para encontrar o terceiro.

Entretanto, a turma de um modo geral não conseguiu relacionar os números encontrados do novo poliedro em relação ao poliedro original, nem também justificá-

los quando questionados oralmente. Desta forma, procurei auxiliar os discentes nesta parte da atividade colocando questionamentos sobre o efeito de cada corte realizado no cubo em relação aos valores iniciais e anteriores em cada etapa, e possíveis relações funcionais entre estes como dobro, triplo, metade, entre outras.

Algo que me surpreendeu é que justamente nas questões mais envoltas à temática deste trabalho que buscavam tratar aspectos conceituais os alunos da turma não sentiram tanta dificuldade quanto à parte em determinar os valores solicitados.

Uma parte dos estudantes escreveu respostas bem perspicazes acerca dos conceitos envolvidos, exibindo desenhos em algumas delas de modo a ilustrá-las e conseguindo justificar suas ideias. Pode-se dizer com base nas respostas que tais alunos compreenderam o efeito de um corte em um cubo no tocante a sua convexidade como podemos observar a seguir:

- Para qualquer corte plano feito no cubo, o novo poliedro formado satisfaz a Relação de Euler? Por qual razão?

SIM, QUALQUER CORTE QUE FOSE FEITO NO CUBO PARA DEIXÁ-LO CONVEXO AINDA.

Figura 6: Resposta do Aluno 2  
Fonte: Autor

- Para qualquer corte plano feito no cubo, o novo poliedro formado satisfaz a Relação de Euler? Por qual razão?

Por que essa fórmula é exata, para qualquer poliedro pois compensa cada valor A, V e F pois no final teremos que somar ou dividir, dando o resultado exato [com apenas um corte em um poliedro convexo não deixará ele não-convexo, portanto a fórmula ainda vale]

Figura 7: Resposta do Aluno 6  
Fonte: Autor

- Para qualquer corte plano feito no cubo, o novo poliedro formado satisfaz a Relação de Euler? Por qual razão?

que seja feita ele continuará sendo convexo.

Figura 8: Resposta do Aluno 8  
Fonte: Autor

- Como cortar o cubo para transformá-lo em um poliedro que não é convexo?

Previsão de mais de um corte para não ser convexo. Fazendo um corte em V o poliedro ~~se~~ se transforma em não convexo.

Figura 9: Resposta do Aluno 4

Fonte: Autor

- Como cortar o cubo para transformá-lo em um poliedro que não é convexo?

se eu possuir um cubo e fazer um corte em V, quando for traçar uma reta, vou possuir dois pontos, sendo assim não-convexo.



Figura 10: Resposta do Aluno 10

Fonte: Autor

- Como cortar o cubo para transformá-lo em um poliedro que não é convexo?

há algumas maneiras de tomar um cubo que não seja convexo uma delas é atravessar o cubo por uma espada e então após retirar a espada ele ficará com um vão dentro do cubo fazendo com que ele não seja convexo

Figura 11: Resposta do Aluno 11

Fonte: Autor

As respostas ao primeiro questionamento ilustram que os alunos perceberam que um corte plano não altera a convexidade do cubo. Estas foram fundamentadas no fato que a convexidade é uma condição suficiente para garantir que a Relação de Euler seja satisfeita pelo poliedro em questão.

Em particular, formalmente em Matemática condições necessárias e suficientes se constituem como uma ferramenta que auxilia na elucidação de muitas ideias envolvidas aos conceitos matemáticos.

Quanto as respostas ao segundo questionamento podemos observar que os estudantes notaram que apenas um corte plano não é capaz de transformar o cubo em um poliedro que não é convexo. Não obstante a isto, faz-se necessário haver mais de um corte plano, o qual poderá ser em formato de V como argumentado pelo aluno 4.

Neste sentido, o aluno 10 também notou que este corte em formato de V nos garante a existência de pontos no novo poliedro tais que o segmento de reta que os liga não está estritamente contido neste, o que contraria a definição de convexidade. A rigor, em um contexto lógico esta é a negação de tal definição, a qual foi discutida em sala de aula na explicitação da resposta do referido estudante.

Alguns discentes expuseram que cortes curvos (não planos), mais especificamente, apenas um corte curvo é capaz de gerar um sólido geométrico não convexo, porém ressaltai que este não é um poliedro, uma vez que seguramente uma de suas “faces” não é uma região poligonal. Desta forma, esta possibilidade imediata fez com que tais alunos atentassem que os cortes devessem ser todos planos para assegurarmos a construção de um novo poliedro, a qual é certamente uma perspectiva superior de seções genéricas em um cubo.

Convém ressaltar que nesta atividade os alunos assinalaram outras formas de cortar o cubo por meio de cortes planos distintas das que foram exibidas neste trabalho, mas que não deixam de ser pequenas variações destas.

Assim, pode se dizer que os alunos conseguiram vislumbrar os conceitos abrangidos pelos questionamentos realizados um ponto de vista superior, visto que os próprios de certa forma já o exigiam.

### **6.1.3. Outras atividades realizadas e mais apontamentos interessantes**

Exporemos nesta parte do trabalho mais alguns fatos pertinentes relativos a outras atividades realizadas nesta prática de ensino e outros apontamentos interessantes.

Muitas explicações minhas sobre os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula no âmbito de sua fundamentação teórica e também do seu desenvolvimento histórico foram induzidos pelos materiais provenientes da OBMEP e algumas de suas questões. Tais explicações principalmente possibilitaram a tentativa



do estabelecimento de relações entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior.

Tópicos como outras geometrias além da euclidiana (menções em certa medida), certas condições de paralelismo e perpendicularismo, posições relativas em Geometria Espacial de posição a partir das possibilidades de interseção entre objetos foram discutidos com os alunos sob um ponto de vista superior. Na verdade, durante esta prática de ensino percebi que há mais relações do que aquelas que possivelmente eram aparentes para mim.

No trabalho inicial com Geometria Espacial, na realização de exemplos evocando diversas situações geométricas, escrevendo por extenso as relações entre os elementos geométricos correspondentes um aluno questionou se poderia escrever algumas delas simbolicamente de maneira compacta utilizando a notação  $\in$  e  $\notin$ . Ao longo deste “período inicial” outros discentes também realizaram a mesma interrogação, ou seja, parece que sentiram a necessidade efetiva de escrever tais relações matemáticas de outra maneira.

Neste sentido, comentei que o emprego de notações matemáticas em sala de aula torna-se como um recurso matemático eficiente para “simplificar” diversas proposições matemáticas, conforme Ripoll et al. (2016b), o que permite “traduzir e generalizar” muitas delas e evita confusões e ambiguidades, casos os conceitos envolvidos sejam muitos.

Considero que a notação compacta para representar tais relações geométricas e o trabalho com símbolos se configuram como algo importante no processo de ensino-aprendizagem, pois é totalmente concebível que os alunos tenham ciência da linguagem simbólica empregada pela Matemática como área do conhecimento. Nisto, assinalei que esta, como ciência, possui sua própria linguagem, e que muitas vezes sua notação por meio da simbologia sintetiza inúmeras ideias, que se fossem descritas por palavras necessitariam de muitas delas.

Assim, a necessidade desta “simplificação matemática” possibilitou tratar de um ponto de vista superior a legitimidade da notação matemática, não a reduzindo como mera conveniência do ensino.

Um fato interessante surgiu em uma aula da turma desta prática de ensino no início do trabalho com Geometria Espacial. Diante de questionamentos provocadores acerca das limitações físicas de representações reais dos objetos geométricos, também constados nos materiais oriundos da OBMEP e induzidos por estes, um aluno

assinalou: “É verdade que tudo tem um volume?”. Neste momento, percebi o quão perspicaz era sua pergunta, a qual respondi com um termo canônico como resposta a este tipo de questão “depende...” e apontei alguns argumentos de acordo com os meus conhecimentos.

Tais argumentos foram expostos na direção de uma definição do que é “volume” no sentido de ser um número associado ao “espaço” ocupado por um objeto e de como determiná-lo, e também (em certa medida) evocando certos exemplos que colocam em xeque essa ideia como as noções geométricas primitivas (ponto, reta e plano) e fractais no plano e no espaço.

Podemos afirmar que tal indagação do aluno indica uma consequência desta discussão realizada em sala de aula acerca da espessura das representações reais dos objetos geométricos.

Frente a esta situação considero que o professor precisa possuir um conhecimento fundamentalmente sólido para não cometer imprecisões, não que isto seja pejorativamente condenável. Em particular, questões semelhantes às do referido aluno têm a similaridade de possuírem enunciados extremamente simples, cujas respostas podem necessitar até de conceitos avançados de Matemática como neste caso de uma Geometria axiomática, Análise Geométrica ou mesmo Topologia e Teoria da Medida.

Neste sentido, parece que há a necessidade de um saber sobre o saber que irá ser ensinado no tocante a sua fundamentação teórica, o qual já foi evidenciado neste trabalho, e defrontar-me com esta situação na própria prática de ensino foi muito interessante, a qual trouxe a oportunidade de expor a questão de que a Matemática vista na escola não é diluída da Matemática da universidade. Pois, circunstâncias como essa no processo de ensino-aprendizagem induzem a legitimar relações entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior.

Nesta direção, concorda-se com Ripoll et al. (2016b) no sentido de que não podemos privar os alunos de formularem questionamentos advindos da fundamentação teórica dos conceitos e sua abordagem, porque estes propiciam um tratamento da problematização destes na escola como também a compreensão da própria natureza desse conhecimento.

Podemos sintetizar que a aplicação de questões da OBMEP e atividades derivadas propiciou que os alunos questionassem mais sobre os conteúdos e fizessem indagações interessantes acerca da sua problematização, embora alguns

deles não tivessem um desempenho razoável e/ou excelente ou que os problemas propostos pudessem ser revolidos integralmente por toda a turma ou parcialmente.

Muitas dessas interrogações foram provenientes da multiplicidade de casos de diversas proposições matemáticas como por exemplo: “Mas e se fosse de outro jeito?”, o que é extremamente comum em Geometria, ou relacionadas a pensamentos do tipo: “Se eu tenho “isso”, então o que acontece? O que implica?”. Estas questões possibilitaram o tratamento da Matemática Elementar nas linhas deste trabalho, bem como o estabelecimento de ligações desta com o conhecimento aprendido no curso de Licenciatura.

Principalmente durante a realização de atividades em sala de aula, notou-se que muitos discentes se sentiram encorajados a tentar estabelecer conexões entre os conceitos trabalhados segundo uma concepção matemática mais abstrata, e não tanto vinculada à realidade.

No acompanhamento dos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem observei um pouco da dimensão pedagógica da OBMEP na Educação Matemática, sendo que os materiais provenientes de seus programas parceiros possibilitaram o norteamento de alguns tópicos do planejamento.

De um modo geral, pensar desta maneira de acordo com a temática desta investigação possibilitou o questionamento sobre o próprio conhecimento matemático construído em sala de aula como ilustrado no caso da indagação perspicaz do aluno sobre volume e outras interrogações dos discentes. Em alguns momentos, notei que as questões da OBMEP e atividades derivadas que atuaram de certo modo em segundo plano e serviram como fatores provocadores neste sentido. Todavia, considero que se não fossem estas imersas no processo de ensino-aprendizagem os estudantes não teriam tido essas interrogações sobre o conteúdo trabalhado.

Com efeito, as atividades aplicadas trouxeram um pouco mais de interesse dos alunos nas aulas, pois percebi que estes de fato se empenharam para realizá-las e também discutiram bastante entre eles. Todavia, não foi possível aferir se houve um contributo significativo em relação ao conhecimento matemático dos alunos, mesmo em virtude do tempo, pois as aulas não foram baseadas somente na temática desta pesquisa. Mas por outro lado, notei que os alunos observaram que podemos justificar as ideias envolvidas nos conteúdos matemáticos trabalhos e principalmente a existência de relações entre a Matemática Elementar e a Superior.

Assim, visto que esta forma de abordagem segundo a temática da pesquisa é diferente do método tradicional já significado neste texto, e com base na análise realizada, podemos inferir que esta admite potencial para trabalhos prolongados do professor no processo de ensino-aprendizagem em razão das contribuições dadas: propiciação de questionamentos dos alunos sobre aspectos pertinentes dos conteúdos matemáticos e uma maior compreensão da fundamentação teórica destes, havendo um maior interesse e curiosidade nas aulas.

## **6.2. Prática de ensino com alunos do PIC Jr.**

As proposituras desta prática de ensino se assemelham as da experiência anterior. Nesta, conforme já explicitado, os alunos possuem um contato maior com uma visão superior da Matemática Elementar segundo as diretrizes do PIC Jr, pois estudam determinados temas de modo mais aprofundado e com maior rigor matemático em relação à escola. Desta forma, tal prática de ensino se justifica neste trabalho pelo fato de ser interessante percebermos o quanto a temática da investigação está imersa no processo de aprendizagem de estudantes que já estão participando de atividades em uma proposta semelhante, bem como um dos objetivos do programa ser incentivar o aprimoramento do conhecimento matemático do próprio professor. Assim, podemos notar que o PIC Jr. pode estabelecer articulações entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior, havendo assim uma suavização da dupla descontinuidade evidenciada por Klein.

Parte de todos os planejamentos é preparada pela Coordenação Acadêmica do PIC Jr. com base nos materiais dos programas parceiros e o restante é deixado à livre escolha do professor, contanto que sejam atividades relacionadas aos assuntos do encontro, podendo ser selecionadas de diversas fontes recomendadas.

Na referida turma do PIC Jr. havia alunos do 1º e 3º anos do Ensino Médio e também alunos já ingressantes na universidade. Frente a esta situação em que os alunos possuem diferentes bagagens de conhecimento matemático, em alguns momentos também se fizeram necessárias certas adaptações no planejamento assim como na prática de ensino anterior.

Observou-se que no início desta prática de ensino os alunos do 1º ano do Ensino Médio, ambos de escola pública não seletiva estavam um pouco inibidos em relação aos demais justamente por esta diversidade na turma e sentiam um pouco de

dificuldade em relação a alguns conteúdos trabalhados. Entretanto, no decorrer desta experiência tais estudantes foram ficando mais participativos e demonstrando seus conhecimentos matemáticos, inclusive melhorando significativamente seus resultados em atividades e avaliações.

### 6.2.1. Questão 28 - Nível 3 - Banco de Questões OBMEP 2015<sup>15</sup>

Esta atividade consistiu na aplicação da questão 28 do Nível 3, pág. 56, do Banco de Questões 2015 apresentada xerocada aos alunos em uma aula acerca de conteúdos de Aritmética, a qual durante as suas etapas de resolução foram discutidos os conceitos matemáticos envolvidos.

#### **28** *Trocando números usando MDC e MMC*

Em uma lousa são escritos os 2014 inteiros positivos de 1 até 2014. A operação permitida é escolher dois números  $a$  e  $b$ , apagá-los e escrever em seus lugares os números  $mdc(a, b)$  (Máximo Divisor Comum) e  $mmc(a, b)$  (Mínimo Múltiplo Comum). Essa operação pode ser feita com quaisquer dois números que estão na lousa, incluindo os números que resultaram de operações anteriores. Determine qual a maior quantidade de números 1 que podemos deixar na lousa.

Figura 12: Questão 28 do Banco de Questões 2015 da OBMEP

Fonte: (ASSIS et al., 2015)

Uma primeira abordagem para a referida questão foi realizar uma exemplificação para um caso simples com os números naturais de 1 a 20 e reservar um espaço no quadro para a anotação de observações e descobertas realizadas pelos alunos.

Em particular, tal estratégia de reduzir para casos mais simples para depois procurar intuir algo para os casos mais genéricos, que usualmente são mais complexos, é muito comum na resolução de atividades e problemas matemáticos em geral.

<sup>15</sup> Como já mencionado neste trabalho, as atividades desta prática de ensino também têm “uma” de suas soluções expostas no apêndice deste trabalho.

Conforme o andamento da resolução do problema e os conceitos e propriedades matemáticas que eram abrangidos, estes foram discutidos procurando perspectivá-los sob um ponto de vista superior.

Após o registro dos números naturais de 1 a 20, os alunos em um primeiro momento escolheram os pares aleatoriamente. Neste emaranhado inicial de escolhas algumas não produziram 1's, mas possibilitaram abordar algumas propriedades interessantes do MDC e MMC. Por exemplo, quando se escolhe um par em que um número divide o outro, esta escolha não alterará os números já existentes, pois o MDC é o menor e MMC é o maior entre eles, e podemos dizer isto uma vez que os números escolhidos são distintos.

Quando a situação máxima de 1's da questão foi obtida, ou seja, aquela em que a quantidade de 1's é exatamente a metade dos números já existentes, os alunos foram indagados sobre a possibilidade desta poder ser maior. Destacamos a seguir um diálogo tido com o aluno A neste momento<sup>16</sup>:

**Professor:** *Fala aí aluno A o que você ia falar. (outro aluno havia pedido para testar outro par no momento em que o aluno A pretendia expor algo)*

**Aluno A:** *Que não tem número ímpar maior que 1.*

**Professor:** *Como assim? O número de 1's é ímpar?*

**Aluno A:** *É... Não, não! Um número ímpar pra escolher.*

**Professor:** *Ah, tem que ser um número ímpar pra fazer com o que...*

**Aluno A:** *Com um par.*

**Professor:** *O par que eu tenho que escolher tem que ser um par e um ímpar pra dar certo?*

**Aluno A:** *É!*

Tal observação foi registrada na parte do quadro destinada para as descobertas. Apesar da minha indagação inicial não compreender explicitamente o que o aluno pretendia dizer, podemos dizer que ele percebeu que para produzir mais 1's deveríamos escolher um número ímpar maior que 1 e outro número par qualquer. Esta descoberta revela que o aluno provavelmente imaginou todas as possibilidades de escolha de pares de números quanto à paridade e percebeu certas propriedades do MDC e do MMC como por exemplo: o MDC e MMC de números pares são sempre números pares.

---

<sup>16</sup> Como já mencionado neste trabalho, os alunos desta prática de ensino serão referenciados por meio de letras.

Desta forma, aproveitei para questionar os discentes sobre tal propriedade matemática e suas outras versões quanto à paridade. Em seguida, os alunos perceberam que de fato tínhamos obtido a situação máxima do problema e que transformamos todos os números ímpares em 1's e todos os números pares em outros números pares. Também notaram que esta foi consequência de termos escolhido no mínimo 9 vezes um par de números composto por um número ímpar com um número par de tal forma que o número par não possuísse fatores em comum em sua decomposição em fatores primos (ou também divisor) com o número ímpar em questão.

Na verdade esta condição exprime-se mencionando que os números tomados são primos entre si, ou seja, o MDC entre eles é 1, e por conseguinte, seu MMC, que neste caso é o produto dos dois números, é par, pois um dos números escolhidos o é.

Adiante, os alunos conseguiram concluir que a maior quantidade de 1's que podemos deixar em um caso geral é sempre metade da inicial, se esta for um número par é claro.

Mas ainda restava a questão de como obter esta situação máxima por meio de um processo algorítmico, pois inicialmente no caso reduzido anterior havíamos conseguido por meio de tentativas aleatórias até certo ponto. Então, o aluno B sugeriu escolhermos os números "lado a lado", ou seja, números consecutivos e realizarmos a operação em cada par, pois sabendo que os números consecutivos não têm fator comum, seu MDC será 1 e seu MMC será um número par, pois seguramente um deles é um número par.

Posta esta resolução da questão, ainda questionei os estudantes de que faltava justificar mais uma coisa, a qual era um invariante no decorrer das operações realizadas, a saber, a quantidade de números pares. Uma justificativa para este invariante é praticamente a mesma obtida pelos alunos para comprovar a situação máxima.

Os estudantes não perceberam em um primeiro momento este invariante, mas comentaram a existência de outro relacionado a uma propriedade anterior do MDC e MMC que havia sido trabalhada em sala de aula: o produto de todos os números. Isto se justificava porque dados dois inteiros positivos, o seu produto é igual ao produto MDC e MMC entre eles. Este invariante não havia sido percebido por mim, e apesar

de não ser “útil” para resolver a questão, possibilitou a discussão e revisão de uma propriedade importante do MDC e MMC.

Após algumas discussões da turma acerca de tal invariante e induzido por um colega que havia trivialmente dito que este poderia ser a quantidade de números correspondente, o aluno C mencionou que este na verdade era justamente a quantidade de números pares, o que não havia sido deduzido por nenhum outro colega.

Durante a resolução do problema os alunos concluíram que era melhor lidar por conveniência com os números na sua forma fatorada para calcular o MDC e o MMC via decomposição em fatores primos. Assim, esta forma que não só permite que abordemos o MDC e o MMC reforçando suas definições, também nos permite calculá-los eficientemente em certos casos.

De fato, MMC e MDC são conceitos estudados no Ensino Fundamental sendo tratados no 5º e 6º anos em certo nível que muitas vezes circunda apenas a defini-los e calculá-los. A abordagem dada no PIC Jr. nos dá uma perspectiva superior destes conceitos, pois remete a sua fundamentação teórica e a propriedades e problemas de aplicação interessantes.

Desta forma, a aplicação da questão possibilitou a discussão em sala de aula sobre estes temas e outros padrões envolvendo o MDC e MMC, os quais foram fundamentais para resolvê-la, e não ficando apenas reduzida a cálculos por si próprios.

#### **6.2.2. Problema 4.4 da apostila 1 do PIC Jr.**

Esta atividade consistiu na aplicação do problema 4.4 da Apostila 1 do PIC Jr. de Hefez (2005), a qual é disponibilizada a todos os alunos do programa do nível 3, após o trabalho inicial na primeira aula abordando a aritmética dos restos da divisão por um certo número fixado via o conceito de congruência.



**Problema 4.4.** Dados  $a, b$  e  $c$  inteiros quaisquer e  $m$  um inteiro maior do que 1, mostre as seguintes afirmações:

(a)  $a \equiv a \pmod{m}$ .

(b) Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$ .

(c) Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$ , então  $a \equiv c \pmod{m}$ .

Figura 13: Problema 4.4 da apostila 1 do PIC Jr.

Fonte: (HEFEZ, 2015)

Nos encontros já realizados com os discentes a ideia de congruência de certa forma já foi explorada implicitamente em relação a alguns conteúdos anteriores e problemas envolvendo o calendário, dias da semana, horas do relógio, ângulos e arcos, por exemplo. Neste sentido, expus que o conceito de congruência nos ajudaria a formalizar e também entender melhor sob um ponto de vista superior muitos resultados matemáticos que foram discutidos nestes encontros.

Valendo-se das considerações anteriores, solicitei outros exemplos para a turma de fenômenos periódicos, que dão relativa importância para o resto, o qual está particularmente presente em muitos problemas sobre divisibilidade.

Nesta primeira aula acerca da ideia de congruência, alguns alunos interrogaram sobre qual a conveniência da sua definição e onde ela é aplicada diretamente. Nisto, procurei reforçar as observações anteriores bem como explicar sobre sua utilidade dentro da própria Aritmética (Teoria dos Números) e outras áreas da Matemática da mesma forma que em aplicações como a criptografia RSA.

Em seguida, foi demonstrada junto com os alunos e o auxílio de suas argumentações decorrentes, uma proposição que nos fornece uma equivalência à definição usual de congruência baseada na igualdade dos restos dados pelo algoritmo da divisão. Também foram discutidas consequências imediatas a partir de tal definição usual.

De um modo geral e com base em algumas das resoluções a seguir notou-se que os estudantes resolveram a atividade sem utilizar um formalismo matemático muito pronunciado, com argumentações muito interessantes, muitas das quais provenientes da proposição anterior.

Embora alguns argumentos não estejam totalmente justificados ou estejam errôneos, estes de certa forma não deixam de ser “legítimos” e contribuir para a realização da atividade.

Acerca da própria atividade podemos observar que esta demonstra que a “congruência módulo  $m$ ” é uma relação de equivalência, e nisto procurou-se relacionar tais propriedades com as satisfeitas pela relação de igualdade.

A seguir expomos os registros de alguns alunos:

4.4 - a)  $a - a$  sempre resultara em 0 que pode ser dividido por qualquer numero sem deixar resto, o que valida  $a \equiv a \pmod{m}$

b) Um numero é considerado congruente a outro numero quando a diferença entre eles ~~podem~~ pode ser dividida pelo modulo sem deixar resto, portanto se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$ , pois a ordem na qual ~~elas aparecem~~  $a$  e  $b$  aparecem não ~~vetora~~ influencia ~~na~~ na diferença entre eles.

c) Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $a$  e  $b$  possuem o mesmo resto dividido por  $m$ , e o unico jeito de  $c$  também ser congruente com  $a$  e  $b$  dividido por  $m$  é tendo o mesmo resto que  $a$  e  $b$  dividido por  $m$ , sendo assim  $a \equiv c \pmod{m}$ , pois  $b \equiv c \pmod{m}$ .

Figura 14: Resposta do Aluno A  
Fonte: Autor

a)  $a - a = 0$   $\frac{0}{\text{qualquer número}}$  deixa este 0.

b) Se  $a - b = x$   
então  $b - a = -x$

$x$  e  $-x$  deixam o mesmo resto quando divididos por  $m$ .

c) Se  $A \equiv B \pmod{m}$ , significa que  $a - b = K \cdot m$ ,  
e se  $B \equiv C \pmod{m}$ , significa que  $b - c = L \cdot m$ ,  
 $a - c = m(K + L)$  ←  $(a - b) + (b - c) = (K \cdot m) + (L \cdot m)$   
 $a - c = m(K + L)$

isto implica que  $a - c$  é divisível por  $m$ .

Figura 15: Resposta do Aluno C

Fonte: Autor

4.4. a)  $a \equiv a \pmod{m}$  como eles não iguais, os dois divididos por  $m$  terão o mesmo resto  
 $a - a = 0$  0 resto sempre divisível por qualquer  $m$ .

b) Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$   
se  $m | a - b$ ,  $m | b - a$  pois o sinal do quociente ser trocado ao mudar de ordem

c) Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$ , então  $a \equiv c \pmod{m}$   
↳  $b$  e  $c$  divididos por  $m$  também deixam o mesmo resto.  
↓  
 $a$  e  $b$ , divididos por  $m$ , deixam o mesmo resto  
 $b$  dividido por  $m$  sempre deixará o mesmo resto, então  $a$  e  $c$  tem que deixar o mesmo resto que  $b$ , então  $a \equiv c \pmod{m}$

Figura 16: Resposta do Aluno D

Fonte: Autor

De todo modo, para efeitos de comparação, também foi realizada uma demonstração matemática formal. Os estudantes pronunciaram que preferiam seus argumentos porque eram da forma como eles tinham entendido e um pouco mais simples também.

Observei que como nesta experiência uma perspectiva da Matemática Superior teve de certa forma uma prevalência, os alunos precisaram e de fato escreveram melhor em relação à outra prática de ensino. Destaco que semelhantemente, também neste sentido de comparação e com base nas atividades realizadas, novamente podemos inferir que os estudantes tornaram-se mais questionadores, os quais gradativamente aprimoraram seus resultados no decorrer desta prática de ensino.

Assim, da mesma forma enfatizo que o contato com o PIC Jr. fez com que a Matemática Elementar sob um ponto de vista superior fosse menos emblemática para os alunos, possibilitando avanços na aprendizagem destes conforme a consideração anterior.

### **6.3. Questionários**

A referida aplicação realizou-se no III Conexão - Encontro Regional do PIC<sup>17</sup> ocorrido nas dependências do Everest Porto Alegre Hotel, localizado na Rua Duque de Caxias, 1357 – Bairro Centro Histórico, Porto Alegre. Tal encontro teve o objetivo de promover uma integração entre os alunos e professores participantes do PIC Jr. e do programa OBMEP na Escola 2016 em umas das regiões de abrangência de ambos os programas gerenciada pelos coordenadores regionais. As questões foram aplicadas para 15 professores graduados e dois alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

Procurou-se produzir um questionário semiestruturado, ou seja, baseado em um roteiro de maneira que este acontecesse de forma como uma conversa/sondagem natural sem prender o educador, pois não queríamos que se sucedesse uma sequência de interrogações convencional apenas fixada em perguntas e respostas fechadas.

---

<sup>17</sup> Os encontros Conexão PIC RS tiveram origem pela iniciativa de um conjunto de professores envolvidos com a OBMEP de criarem um evento representativo da competição a nível estadual de modo a possibilitar uma integração entre alunos e professores. A inspiração para tal iniciativa foi o fato de já existir um evento da OBMEP a nível nacional nos mesmos moldes, o Encontro do Hotel de Hilbert.

Realizamos este questionário de modo a verificar a legitimidade das ideias de Klein acerca da dupla descontinuidade e a presença real ou não desta com um conjunto de professores de certa forma já imerso em uma proposta de ensino e um programa de formação, cujas algumas de suas proposituras se assemelham aos seus apontamentos e possuem relações com as questões de pesquisa deste trabalho. Assim, a realização deste nos permite encontrar indícios para respondê-las mais apropriadamente.

Antes da aplicação propriamente dita do questionário, expliquei para os professores as proposituras da pesquisa, as ideias de Klein e a questão da dupla descontinuidade na formação do professor de Matemática.

Muitos educadores pareceram concordar com as ideias de Klein mencionando que elas possuíam legitimidade na Educação Matemática. Após a entrega do questionário, alguns afirmaram imediatamente que “concordavam” com as ideias expostas nas questões e que estas eram muito interessantes. Também houve professores que assinalaram que desabafaram após responder as interrogações.

Esquematzaremos a descrição por meio da explicitação das questões aplicadas e de uma compactação de suas respostas, seguida com algumas citações de professores. Para fins de concordância, destacamos que as questões 1 e 4 tiveram seus enunciados adaptados para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Seus enunciados explícitos poderão ser encontrados no apêndice.

Pode-se dizer que ao analisar este questionário, de acordo com alguns aspectos da metodologia de pesquisa da investigação, estamos novamente estudando um caso, algo que já está imerso ou um pouco na direção desta.

**Questão 1:** Como foi o primeiro impacto em sala de aula após a conclusão do seu curso de graduação?

**Sobre as respostas:** Podemos empregar um pleonasma para dizer que quase unanimemente foi impacto “impactante”. A justificativa para tanto se deu por razões como a “ausência” de diversos elementos como uma boa estrutura das escolas, o interesse dos alunos pelo estudo da disciplina de Matemática e a sua contextualização, que deveria relacioná-la com a realidade dos estudantes.

Outras razões apontadas foram o grau de dificuldade dos discentes e também a dificuldade dos docentes em lidar com a “descontinuidade” dos conteúdos, no sentido destes não possuírem uma relação estrita com aqueles aprendidos durante o

seu curso de graduação, estando desta forma “distantes”. Um professor colocou que isto gera certo desconforto no início da carreira docente.

Alguns professores relataram que suas aulas se resumiam ao método tradicional, sendo basicamente aplicações de fórmulas, sem definições e demonstrações, ou seja, o pensamento matemático dedutivo em tais aulas não estava sendo trabalhado. Uma parte desses docentes argumentou que isto ocorre em virtude da organização curricular dos conteúdos matemáticos não permitir de certa forma outra abordagem.

Entretanto, um professor relatou uma tentativa frustrada de trabalhar nesse sentido:

*“[...] Lembro que em uma das minhas primeiras aulas, resolvi “mostrar” aos alunos as regras da potenciação, percebi o quanto isso não fez sentido naquele dia...”* – Professor 1

Reparou-se que muitos educadores indicaram um impacto maior em relação ao Ensino Fundamental, principalmente por causa da “elementaridade” dos conteúdos abordados e da dificuldade em explicá-los, e frente a esta situação colocaram que precisaram estudá-los. Assim, parece que para os professores, eles próprios deveriam possuir um saber sobre o saber, o que vai ao encontro das considerações de Rangel (2015). Apresentamos a seguir um trecho da resposta de um professor que ilustra as ideias apresentadas:

*“[...] Quando comecei o trabalho com o 6º ano, pensei: “Sério que vou ter que explicar potência e raiz quadrada?” Óbvio que eu deveria saber desde o início mas só “caiu a ficha” neste momento. Saí da faculdade tendo recentemente visto álgebra, análise, etc. e me senti um pouco deslocada precisando explicar coisas tão “triviais”. Levou um tempo até que eu me acostumassem com essa ideia e “engrenassem”*” – Professor 2

**Questão 2:** No seu caso, você se identifica ou já se identificou com alguma ou ambas as descontinuidades evidenciadas por Klein na Educação Matemática? Como foi e em que momento?

**Sobre as respostas:** Todos os professores afirmaram ter passado por pelo menos uma descontinuidade em sua formação, sendo muitas vezes tal momento nada

animador, embora um deles de certa forma “previu” que a segunda parte da descontinuidade referente ao contato com a escola posterior à graduação pudesse possivelmente acontecer. Assim, as descontinuidades evidenciadas por Klein na Educação Matemática foram detectadas em todas as respostas da referida questão, as quais podem ser observadas cada uma delas explicitamente nas que citamos a seguir:

*“O maior divisor de águas na minha vida foi a 1ª aula de Geometria I na graduação. Cheguei na aula atrasada e todos os colegas estavam discutindo como fazer um triângulo equilátero, no Cabri<sup>18</sup>, fiquei pensando como não sabem que um triângulo equilátero tem 3 lados iguais. Fiz 3 segmentos do mesmo tamanho e montei o triângulo. E o professor veio e desconstruiu tudo. Naquele momento percebi que a matemática da universidade não era a matemática que estudei”.* – Professor 1

*“Sim, principalmente, no final do curso, o foco é o conhecimento matemático avançado. Dessa forma, saí da graduação com uma bagagem ampla de conteúdos que, ao chegar na sala de aula, não iria sequer mencionar. Foi complicado, pois precisar repensar o conteúdo, revê-lo para depois ensiná-lo.”* – Professor 3

*“[...] principalmente no início em que a “linguagem matemática” é trabalhada. O momento foi um tanto assustador, visto que tive impressão de que tudo que estudei na educação básica era ínfimo perante o que deveria aprender.”* – Professor 4

Como elucidação da citação da resposta do professor, outro docente em resposta à Questão 1 coloca que essa mudança drástica explica as taxas de reprovação nas disciplinas introdutórias do curso de Licenciatura em Matemática.

Os relatos dos educadores nos sugerem de fato a existência de duas matemáticas: a estudada na Educação Básica e a estudada no Ensino Superior, sendo as duas díspares e com uma diferença muito grande quanto ao teor matemático. Muitos professores comentaram que a Matemática da Educação Básica não é suficiente para compreender a Matemática do Ensino Superior na transição da escola para a universidade. Entretanto, alguns comentaram que o fato de terem

---

<sup>18</sup> O Cabri Géomètre (ou simplesmente Cabri) é um software de Geometria Dinâmica desenvolvido pela companhia francesa Cabrilog.

apreço pela Matemática fez com esta descontinuidade fosse de certa forma não sentida com tanto impacto.

Consequências dessas descontinuidades foram colocadas em algumas respostas como a dificuldade em trabalhar os conteúdos matemáticos, sobretudo os mais “elementares”, parecendo ser um empecilho a sua não compreensão plena no sentido de sua fundamentação teórica. Mas também ao lado deste despreparo decorrente, alguns educadores expuseram que a realidade encontrada nas escolas é tão distante que às vezes fica inviável tentar mostrar ideias mais avançadas, no sentido de aplicar os conhecimentos matemáticos aprendidos na graduação em sala de aula.

Outro aspecto ressaltado por parte dos professores é que é dado pouco espaço para se trabalhar para problemas de Ensino fundamental e Médio durante a graduação, o que poderia contribuir ainda mais para a existência da dupla descontinuidade.

**Questão 3:** Você considera que a reformulação do PIC agora mais envolta à escola e aos professores da Educação Básica pública pode de alguma forma amenizar alguma ou ambas as descontinuidades evidenciadas por Klein na Educação Matemática? Se sim, de que maneira? Se não, por quê?

**Sobre as respostas:** As opiniões se dividiram e mesmo aqueles docentes que indicaram positivamente, expuseram algumas ressalvas para que isso pudesse acontecer, as quais também funcionaram como justificativas para as respostas negativas. Neste sentido, o PIC pode ser uma forma de amenizar a dupla descontinuidade, sendo o início de todo um processo nesta direção. Dentre essas ressalvas apontadas podemos destacar: o tempo (o PIC amenizaria as descontinuidades, porém a longo prazo), educadores com uma formação deficitária em Matemática na graduação, a formatação atual do programa que não atinge um contingente considerável de alunos e professores e uma adequação necessária da estrutura do currículo escolar de maneira a entrar em conformidade com as temáticas do programa.

Entretanto, alguns docentes pontuaram que o PIC está atuando como uma ponte entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior, propiciando um contato com esta última. Neste estabelecimento de relações para construí-la, para eles o



professor acaba tendo mais entendimento dos conteúdos matemáticos assim como os próprios alunos, possibilitando uma perspectiva superior destes.

Para dois dos professores algo que o PIC poderia contribuir mais concretamente seria a preparação adequada dos futuros licenciandos, que já teriam na Educação Básica conexões entre Matemática Elementar e a Superior.

**Questão 4:** Como professor de Matemática, como utilizar os problemas da OBMEP e os materiais de seus programas parceiros em sala de aula? Você já utilizou? Como foi a experiência?

**Sobre as respostas:** Apareceram poucas respostas não. Os professores que indicaram positivamente unanimemente expuseram que já utilizaram os problemas da OBMEP e os materiais de seus programas parceiros nas aulas como exercícios e desafios para os estudantes, bem como também inserindo-os em avaliações, sempre procurando relacionar com o conteúdo matemático trabalhado e nivelar de acordo com o rendimento da turma.

Na maioria das vezes esta abordagem teve efeitos positivos para o processo de ensino-aprendizagem, estimulando principalmente o raciocínio dos estudantes. Entretanto, algumas questões da OBMEP e determinados conteúdos de seus programas parceiros não foram plenamente compreendidos pela maioria dos estudantes.

Em particular, um professor colocou que incentiva seus alunos a acessarem o site da OBMEP e seus programas parceiros, enquanto que outro apontou que utiliza inteiramente todos os recursos do Portal da Matemática OBMEP.

Novamente, um professor indicou outro aspecto já mencionado sobre as respostas das outras interrogações: a questão de que o currículo escolar é muito fechado para proporcionar essa adequação da OBMEP em sala de aula, salientando que uma vez que houver uma reformulação no todo, esta ficará mais fácil de ser realmente aplicável.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em vista do contraponto de não haver muito material acerca da temática da investigação, é necessário começar a estudar mais atentamente o tipo de relação que pode ter entre a OBMEP e a Matemática Elementar de um ponto de vista superior dentro da sala de aula. Na imersão neste ambiente de investigação meu papel como pesquisador foi importante, pois em geral os professores não têm este ponto de vista.

Nas práticas de ensino realizadas podemos perceber indicativos das ideias de Klein acerca da dupla descontinuidade na formação do professor de Matemática. Ambas as abordagens metodológicas destas embasadas nos materiais da OBMEP e seus programas parceiros fizeram com que questões sobre a fundamentação teórica dos conteúdos matemáticos correlatos surgissem naturalmente.

Também com a ajuda de tais questões, notei que há mais relações do que parece haver em um primeiro momento ao se pensar que tipo de conexões existem entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior.

Na primeira prática de ensino os alunos conseguiram se convencer de que o estudo da Geometria Espacial em certo sentido é mais complexo do que a Geometria Plana em virtude da primeira ter uma “dimensão a mais” em relação à segunda, o que de certa forma implicaria em um número maior de axiomas em virtude das possibilidades de visualização. Podemos entender tal perspectiva como um ponto de vista superior das ideias acerca dos conceitos inerentes à Matemática Elementar.

Como exemplificação nesta mesma direção também cito o fato dos alunos desta prática de ensino intuírem, talvez induzidos por questionamentos provocadores realizados em sala de aula, que podemos estudar as posições relativas entre as noções primitivas de Geometria Espacial (ponto, reta e plano) por meio das possibilidades de interseção entre os elementos considerados.

Isto oportunizou que eu comentasse em sala de aula alguns resultados matemáticos utilizados que são critérios para decidir se determinadas posições relativas são satisfeitas, os quais são usualmente tratados no Ensino Superior nas disciplinas de Geometria Espacial e Geometria Analítica. Desta forma, houve no processo de ensino-aprendizagem uma espécie de contato entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior, sendo que a observação anterior dos estudantes é algo que permite uma perspectiva fundamentada de posições relativas no espaço e o estabelecimento de resultados matemáticos que as identificam.

No tocante as duas práticas de ensino a tentativa de abordar a Matemática Elementar do ponto de vista superior foi algo que despertou o interesse dos alunos. Novamente, como uma exemplificação disto nestas experiências citamos a Relação de Euler relacionada com a existência de um homeomorfismo entre a esfera e os poliedros que a satisfazem e com o problema da planaridade de um grafo.

Pensamos que a proposta deste trabalho foi válida para o processo de ensino-aprendizagem de ambas as práticas de ensino e portanto respondemos de forma positiva à questão de pesquisa “Relações entre estas matemáticas (Elementar e Superior) podem ser contributivas para o processo de ensino-aprendizagem?”.

Com efeito, a maioria dos alunos tornou-se mais questionadora perante os conteúdos matemáticos e a sua perspectiva da Matemática como disciplina foi repensada, entre outros elementos elencados na análise das práticas de ensino. De todo modo, intuo que talvez minha própria “sensibilidade” foi um fator determinante para a devida valorização de tais indagações no processo de ensino-aprendizagem, assim como a permissibilidade de certa flexibilidade deste, pois as discussões decorrentes levaram certo tempo.

Em resposta à outra questão que se resume em: “Como a OBMEP pode contribuir com tudo isso?”, na verdade assinalamos que já está contribuindo de acordo com as respostas dadas pelos professores nos questionários. Mais especificamente, as experiências realizadas puderam nos indicar que a utilização dos materiais da OBMEP e seus programas parceiros segundo a temática desta pesquisa auxiliou no planejamento pedagógico, permitindo o tratamento da Matemática Elementar sob um viés mais elevado fornecendo uma abordagem nesta direção e problemas interessantes que estimulam o raciocínio dos estudantes.

Ponderamos que esta utilização não precisa induzir aulas inteiramente baseadas nestes recursos, por exemplo, não foi o que ocorreu em alguns encontros da primeira prática de ensino, e apesar dessa característica pode-se dizer que foram obtidos bons resultados.

Analisando os questionários respondidos pelos professores do PIC Jr. detectamos ambas as discontinuidades evidenciadas por Klein e que estas trazem consequências para o trabalho do professor em sala de aula como a dificuldade em abordar determinados conteúdos matemáticos em razão do não entendimento da fundamentação teórica destes.

Segundo Ripoll et al. (2016b), as ideias de Klein nos remetem a pensar a Matemática Elementar e a Matemática Superior sob uma mesma perspectiva, não havendo um patamar hierarquicamente inferior da primeira em relação à segunda, considerando-as como elementos importantes da Matemática. Em particular, durante ambas as práticas de ensino procurei frisar este aspecto.

Neste sentido, é interessante promover ao aluno uma concepção da Matemática como construção humana e uma ciência viva em constante desenvolvimento, proporcionando o contato com problemas que a movem, utilizando também, neste viés, os materiais da OBMEP e seus programas parceiros nas aulas da disciplina.

Concorda-se com Ripoll et al. (2016b) no pressuposto de que a problematização dos conceitos matemáticos trabalhados na Educação Básica tem o potencial de propiciar aos alunos a verdadeira experiência de criação matemática, não sendo estritamente necessário nortear-se pelo formalismo e rigor da Matemática Superior.

Em virtude do que pôde ser desenvolvido em termos de tempo, nesta direção deixamos aqui uma questão pertinente oriunda do desenvolvimento do trabalho do realizado e da consideração anterior, a qual não foi tratada neste: “Que matemática “avançada” é mais adequada para ser incluída nos currículos das nossas escolas?”.

Sabemos que dentre as inúmeras metodologias atuais presentes na Educação Matemática, nenhuma delas é totalmente eficaz conseguindo atingir êxito em 100% dos alunos, pois estes naturalmente possuem variadas formas de aprender. De todo modo, conforme a pesquisa realizada pôde-se concluir que sua temática admite certo potencial no processo de ensino-aprendizagem e portanto encorajamos os professores a utilizarem os materiais da OBMEP e seus programas como recursos didáticos em suas aulas, de modo a também propiciar a visão superior da Matemática Elementar.

Assim, consideramos que isto corrobora nossa constatação da riqueza de articulações da OBMEP na Educação Matemática, a qual foi evidenciada na fundamentação teórica deste trabalho, e acreditamos que esta ainda possa gerar mais delas para poder contribuir cada vez mais para o aprendizado dos estudantes.

## 8. REFERÊNCIAS

12º PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP. **12º PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP**, 2017. Disponível em: <<http://12pic.obmep.org.br/>>. Acesso em: 2017.

ALVES, Washington José Santos. **O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública**. 2010. 91 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.

ANDRADE, Francisco Pereira de. **As Olimpíadas de Matemática ampliando e fortalecendo o processo de ensino-aprendizagem**. 2015. 81 f. Dissertação. (PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional). Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró, 2015.

ANDRÉ, M. O que é um estudo de caso qualitativo em educação? **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95-103, julho 2013.

ASSIS, C.; BARBOSA, R.; FEITOSA, S. **OBMEP - Banco de Questões 2015**. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015.

ARAÚJO, Joselito Elias de; SILVA, Flávia Aparecida Bezerra da; Maciel, Aníbal de Menezes. In: IX EPBEM – Encontro Paraibano de Educação Matemática. O estudo dos registros de representação semiótica na resolução de problemas matemáticos da OBMEP. Campina Grande, Paraíba, 2016. **Anais**. Campina Grande: 2016

BAGATINI, Alessandro. **Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas**. 2010. 82 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

BALDIN, Y. Y. O Projeto Klein de Matemática em Português: uma ponte entre a matemática avançada e a escola. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 8, n. 8, p. 411-419, 2013.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F. D. **Resolução de problemas na sala de aula - Uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, v. 1, 2016.

BERNARDO, Paola Rossato. **Uma proposta para o ensino de funções para o Ensino Médio**. 2015. 115 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2015.

CENTRO DE GESTÃO E ESTUDOS ESTRATÉGICOS – CGEE. **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas – OBMEP 2010**. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011.

CORRÊA, Bruna Moustapha; PAULA, Michel Cambrinha de; CÔRTEZ, Adriano Maurício de Almeida. ANTUNES, Gladson Octaviano. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Matrizes: uma tecnologia de ponta. São Paulo – SP. 1. Brasil. **Anais**. São Paulo: 2016. p. 1-8.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial e Integral – Volume 1**. 1ª. ed. Porto Alegre: Globo, 1970.

DANTAS, Alexsandro Cavalcanti. **O estudo de restos, congruência e divisibilidade: uma abordagem teórica aplicada ao Ensino Médio no Brasil**. 2016. 39 f. Curso De Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Currais Novos, 2016.

DANTE, L. R. **Matemática - Contexto & aplicações - Volume 2**. 2ª. ed. São Paulo: Ática, v. 2, 2014.

FAXINA, Maria Lúcia Beltrami. **Uma sequência didática sobre porcentagem e tratamento da informação utilizando problemas da OBMEP**. 2016. 141 f. Dissertação. (Programa de Pós-Graduação em Ensino De Ciências Exatas). Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2016.

FIDELES, Eduardo Cordeiro. **A OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas**. 2014. 58 f. Dissertação. (PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional). Universidade Federal de Goiás. Brasília, 2014.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. D. C. C. D. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **BOLEMA (Boletim de Educação Matemática – Mathematics Education Bulletin)**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, dezembro 2013.

FRANCO, Tânia Regina Rodrigues. **Divisibilidade e Congruências: Aplicações no Ensino Fundamental II**. 2016. 89 f. Dissertação. (PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional). Instituto de Ciências Exatas. Universidade de Brasília. Jataí, 2016.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HEFEZ, A. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, v. 1, 2005. (Apostila 1 do PIC Jr.).

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 2**. 6<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2016. (Coleção do professor de Matemática).

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação Matemática: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária (EPU), 1986. 11-24 p.

MACIEL, Marcos Vinicius Milan. **GEMaTh – A criação de um grupo de estudos segundo fundamentos da Educação Matemática Crítica: uma proposta de Educação Inclusiva**. 2008. 135 f. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio do Sul. Porto Alegre, 2008.

MARTINS, Lucione de Bitencourt. **Um estudo sobre as estratégias de resolução de questões da OBMEP**. 2015. 162 f. (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio do Sul. Porto Alegre, 2015.

MEIRINHOS, M.; OSÓRIO, A. O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. **EDUSER: revista de educação**, Bragança, v. 2, n. 2, 2010.

MELO, Lucas Medeiros e; ROSISTOLATO; Rodrigo; GIRALDO, Victor. In: XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. **Matemática Científica e Escolar: Saberes, Crenças e Concepções de Professores na Construção Coletiva de um Livro Didático**. Chiapas, México, 2015. **Anais**. Chiapas: 2015. p. 1-12.

NETO, Â. P. Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 1 - Fundamentos - Poliedros - Parte 1 - Terceiro Ano do Ensino Médio. **Portal da Matemática OBMEP**. Disponível em:  
<[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/5x00kfbImiw44.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5x00kfbImiw44.pdf)>. Acesso em: 24 agosto 2016.

OBMEP 2017 - OBMEP em Números. **13ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**, 2017. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>>. Acesso em: junho 2017.

OBMEP 2017 - Regulamento. **13ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**, 2017. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>>. Acesso em: junho 2017.

OBMEP 2017. **13ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**, 2017. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/>>. Acesso em: 2017.

OBMEP na Escola. **OBMEP na Escola**, 2017. Disponível em: <<https://obmepnaescola.obmep.org.br/>>. Acesso em: 2017.

OLIMPÍADA Brasileira de Matemática. **Olimpíada Brasileira de Matemática**, 2017. Disponível em: <<http://www.obm.org.br/>>. Acesso em: 2017.

PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado. **PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado**, 2017. Disponível em: <<http://picme.obmep.org.br/>>. Acesso em: 2017.

PORTAL da Matemática OBMEP. **Portal da Matemática OBMEP**, 2017. Disponível em: <<http://matematica.obmep.org.br/>>. Acesso em: 2017.

RANGEL, Letícia Guimarães. **Teoria de sistemas – Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo – Estabelecendo relações em um estudo colaborativo**. 2015. 268 f. Tese de doutorado. (Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação). Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2015.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. Conhecimento de Matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 8, n. 2, p. 42-70, 2014a.

RANGEL, Letícia Guimarães; GIRALDO, Victor; MACULAN, Nelson. In: VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM) São Carlos, São Paulo, 2013. **Anais**. São Carlos: 2013. p. 1-11.



RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. Matemática Elementar e saber pedagógico de conteúdo - estabelecendo relações. **Professor de Matemática Online**, v. 2, n. 1, p. 1-14, 2014b.

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica – Números Inteiros**. Rio de Janeiro: SBM, v. II, 2016a.

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica – Números Naturais**. Rio de Janeiro: SBM, v. I, 2016b.

SALVADOR, José Antonio; BALDIN, Yuriko Yamamoto; BISOGNIN, Eleni. In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional. CMAC Sudeste. Sobre o Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa. Uberlândia – MG. 1. Brasil. **Anais**. Uberlândia: 2011. p. 472-475.

SANTOS, Daniela Miranda Fernandes. **A relação entre a Álgebra Acadêmica e a Álgebra Escolar em um curso de Licenciatura em Matemática: concepções de alunos e professores**. 2016. 230 f. Tese de doutorado. (Programa de Pós-Graduação em Educação). Faculdade de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual Paulista. Presidente Prudente, 2016.

SCHMIDT, A. M.; MORAES, C. P. D.; MIGON, H. S. A Hierarchical Dynamic Beta Regression Model of School Performance in the Brazilian Mathematical Olympiads for Public Schools. **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, julho 2015.

SELBACH, Cássio Volpato. **Uma introdução ao estudo de anéis e corpos**. 2015. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2015.

SOARES, Camila M. Machado; CIPRIANO, Elisabette Leo G.; SOARES, José Francisco. **Impacto da Olimpíada Brasileira de Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho em matemática na Prova Brasil, ENEM e PISA**. 2014. Disponível em: <<http://server22.OBMEP.org.br:8080/media/servicos/recursos/420951.o>>. Acesso em 01 maio 2016.

STAKE, R. E. Case studies. In: DENZIN, N.; LINCOLN, Y. **Hand book of qualitative research**. 2ª. ed. Thousand Oaks: Sage, 2000.

VIANNA, C. R. Resolução de Problemas. In: **Temas em Educação I, o livro das Jornadas de 2002**. [S.l.]: [s.n.], 2002. p. 401-410.

TODESCHINI, Isabel Lovison. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas**. 2012. 53 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012.

VICTOR, Carlos Alberto da Silva. **Olimpíada de Matemática: que preciosidades envolvem os problemas desta competição e qual o seu impacto para o professor de matemática sem experiência em olimpíadas e a sua importância para o estudante?** 2013. 103 f. Dissertação. (PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional). Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica – Rio de Janeiro, 2013.

VILARINHO, Ana Paula Lima. **Uma Proposta de Análise de Desempenho dos Estudantes e de Valorização da Primeira Fase da OBMEP**. 2015. 100 f. Dissertação. (PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional). Instituto de Ciências Exatas. Universidade de Brasília. Brasília, 2015.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 2ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

## 9. ANEXOS

### 9.1. Questionário aos professores habilitados do PIC/OBMEP na Escola alunos do curso de Licenciatura em Matemática

1. Como está sendo o impacto em sala de aula durante o curso de Licenciatura?

2. No seu caso, você se identifica ou já se identificou com alguma ou ambas as discontinuidades evidenciadas por Klein na Educação Matemática? Como foi e em que momento?

3. Você considera que a reformulação do PIC agora mais envolta à escola e aos professores da Educação Básica pública pode de alguma forma amenizar alguma ou ambas as discontinuidades evidenciadas por Klein na Educação Matemática? Se sim, de que maneira? Se não, por quê?

4. Tendo em vista que você se tornará professor de Matemática, como utilizar os problemas da OBMEP e os materiais de seus programas parceiros em sala de aula? Você já utilizou? Como foi a experiência?

## **9.2. Questionário aos professores habilitados do PIC/OBMEP na Escola atuantes na Educação Básica**

1. Como foi o primeiro impacto em sala de aula após a conclusão do seu curso de graduação?

2. Você se identifica ou já se identificou com alguma ou ambas as descontinuidades evidenciadas por Klein na Educação Matemática? Como foi e em que momento?

3. Você considera que a reformulação do PIC agora mais envolta à escola e aos professores da Educação Básica pública pode de alguma forma amenizar alguma ou ambas as descontinuidades evidenciadas por Klein na Educação Matemática? Se sim, de que maneira? Se não, por quê?

4. Como professor de Matemática, como utilizar os problemas da OBMEP e os materiais de seus programas parceiros em sala de aula? Você já utilizou? Como foi a experiência?

### 9.3. Termo de consentimento informado Colégio Estadual Paula Soares



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística



#### Termo de consentimento informado

O Colégio Estadual Paula Soares, escola da rede pública estadual, neste ato, representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Eduardo Alves da Silva, brasileiro, solteiro, estudante de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a utilizar a proposta de aula: Utilização dos problemas da OBMEP e programas parciais em sala de aula, segundo os ideais de Klein nas turmas do terceiro ano do Ensino Médio, e analisá-la em seu Trabalho de Conclusão de Curso, que é uma exigência parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O trabalho será orientado pela Profa. Miriam Telichevesky, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientadora do TCC, e pela Profa. Maria Delfina de Oliveira Alvarez, professora de Matemática do Colégio Estadual Paula Soares.

O autorizado por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, 26 de agosto de 2016.

Silvia Martins

Diretora da Escola

Silvia Maria Sieben Martins  
ID.: 1864050/02-C. E. Paula Soares  
Vice-Diretora/Subst. Legal

Eduardo Alves da Silva

Eduardo Alves da Silva

De acordo:

Miriam Telichevesky

Profa. Miriam Telichevesky

Maria Delfina de Oliveira Alvarez

Maria Delfina de Oliveira Alvarez

#### 9.4. Termo de consentimento informado PIC Jr.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística



##### Termo de consentimento informado

O Programa de Iniciação Científica Jr. da OBMEP, neste ato, representado pela coordenação por intermédio do presente instrumento, autoriza Eduardo Alves da Silva, brasileiro, solteiro, estudante de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a utilizar a proposta de aula: Utilização dos problemas da OBMEP e programas parceiros em sala de aula, segundo as ideias de Klein na turma do Nível 3 no polo de Porto Alegre localizado na região RS01, e analisá-la em seu Trabalho de Conclusão de Curso, que é uma exigência parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O trabalho será orientado pela Profa. Miriam Telichevesky, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientadora do TCC.

O autorizado por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, 13 de junho de 2016.

Miriam Telichevesky

Coordenador do PIC Jr. da OBMEP

Eduardo Alves da Silva

Eduardo Alves da Silva

De acordo:

Miriam Telichevesky

Profa. Miriam Telichevesky

## 9.5. Termo de consentimento informado para alunos

### TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, responsável pelo(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, da turma \_\_\_\_\_, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada \_\_\_\_\_, desenvolvida pelo pesquisador Eduardo Alves da Silva. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Miriam Telichevesky, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (XX) XXXXXXXXX ou e-mail miriamt@mat.ufrgs.br

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Examinar no ensino a exequibilidade da temática proposta pelo matemático Felix Klein (1849-1925), baseada na Matemática elementar estudada na escola sob um ponto de vista superior.
- Identificar e analisar as potencialidades do trabalho com questões de olimpíadas na escola, especialmente em relação à OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e suas contribuições para a aprendizagem dos alunos.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação e com os rostos borrados.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo telefone (XX) XXXXXXXXX e e-mail alvesdasilva\_eduardo@yahoo.com.br .

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da Orientadora da pesquisa:

## 9.6. Termo de consentimento informado para professores do PIC Jr.

### TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada “Utilização dos problemas da OBMEP e programas parceiros em sala e aula, segundo as ideias de Klein”, desenvolvida pelo pesquisador Eduardo Alves da Silva. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Miriam Telichevesky, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (XX) XXXXXXXXX ou e-mail miriamt@mat.ufrgs.br .

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Examinar no ensino a exequibilidade da temática proposta pelo matemático Felix Klein (1849-1925), baseada na Matemática elementar estudada na escola sob um ponto de vista superior.
- Identificar e analisar as potencialidades do trabalho com questões de olimpíadas na escola, especialmente em relação à OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e suas contribuições para a aprendizagem dos alunos.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome.

A colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra. No caso de fotos, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação e com os rostos borrados.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo telefone (XX) XXXXXXXXX e e-mail alvesdasilva\_eduardo@yahoo.com.br .

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da Orientadora da pesquisa:



## 10. APÊNDICE

### 10.1. Exemplos de questões da OBMEP

#### 10.1.1. Questão 9 – 1ª fase – Nível 1 – OBMEP 2009

9. Daniela fez uma tabela mostrando a quantidade de água que gastava em algumas de suas atividades domésticas.

Atividade	Consumo	Frequência
Lavar roupa	150 litros por lavagem	1 vez ao dia
Tomar um banho de 15 minutos	90 litros por banho	1 vez ao dia
Lavar o carro com mangueira	100 litros por lavagem	1 vez na semana

Para economizar água, ela reduziu a lavagem de roupa a 3 vezes por semana, o banho diário a 5 minutos e a lavagem semanal do carro a apenas um balde de 10 litros. Quantos litros de água ela passou a economizar por semana?

- A) 1010
- B) 1110
- C) 1210
- D) 1211
- E) 1310



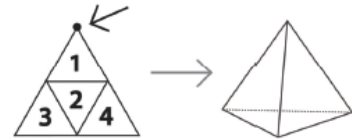
10.1.2. Questão 5 – 2ª fase – Nível 1 – OBMEP 2011

6 NÍVEL 1

Respostas sem justificativa não serão consideradas



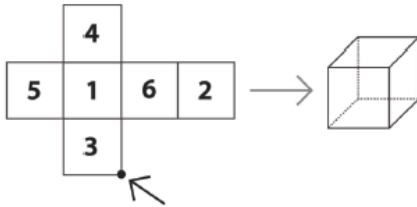
5. As figuras mostram planificações de sólidos com faces numeradas. Após montados esses sólidos, dizemos que o *valor de um vértice* é a soma dos números escritos nas faces que contêm esse vértice. Por exemplo, a figura ao lado mostra a planificação de uma pirâmide; quando essa pirâmide é montada, o valor do vértice correspondente ao ponto indicado na figura é  $1 + 3 + 4 = 8$ .



a) Qual é o maior valor de um vértice da pirâmide acima?

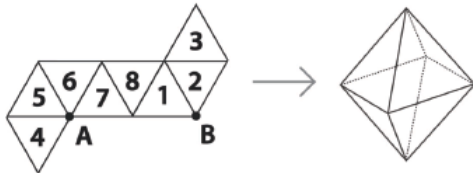
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) A figura mostra a planificação de um cubo. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto indicado?



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) A figura mostra a planificação de um sólido chamado *octaedro*. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto A?



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

d) Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto B na planificação do item anterior?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

## 10.2. Planejamentos das atividades realizadas na prática de ensino no Colégio Estadual Paula Soares

### 10.2.1. Planejamento da atividade Pensando na definição de poliedros

**Conteúdo:** Poliedros.

**Objetivos:** - Entender que os diversos sólidos geométricos, em particular os poliedros, possuem variados formatos;

- Identificar sólidos geométricos que são poliedros e características inerentes que contrariam uma definição intuitiva deste conteúdo;
- Abstrair elementos de um poliedro como vértices, faces e arestas.

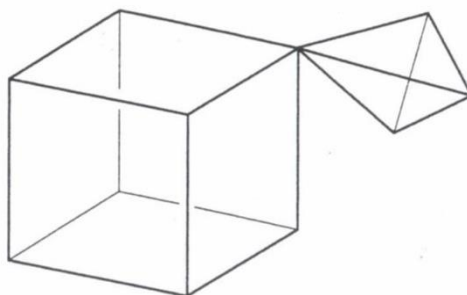
**Procedimentos didáticos:** - Entregar xerocado e discutir com os alunos procurando justificar as considerações correspondentes.

Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais chamadas **faces** e a região do espaço determinada por elas. Cada lado de uma dessas regiões é também lado de uma outra única região poligonal. A interseção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

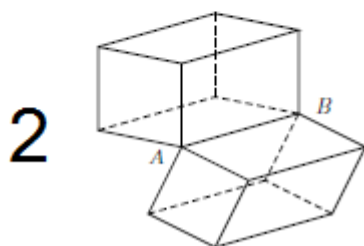
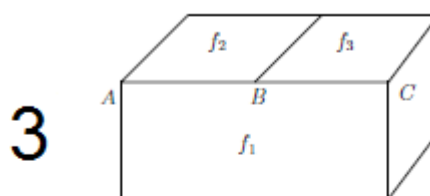
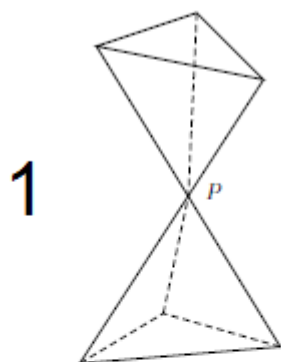
Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces é chamado **aresta** do poliedro. E cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.

Atente-se! Cada vértice do poliedro é um ponto comum a três ou mais arestas.

- Comentar com os alunos que a definição trabalhada de poliedro é simples e bastante compreensível, mas permite certas liberdades que, na verdade, não precisam necessariamente ser objeto de discussão em um primeiro estudo dos poliedros. Entregar xerocada a figura a seguir, que mostra um sólido que, de acordo, com essa definição é um poliedro.



- Entregar os sólidos geométricos a seguir xerocados e solicitar para que os alunos justifiquem por que estes não correspondem à ideia intuitiva que temos do que um poliedro deve vir a ser.



### 10.2.2. Planejamento da atividade relação de Euler e poliedros convexos

**Conteúdo:** - Poliedros convexos;  
- Relação de Euler.

**Objetivos:** - Reconhecer propriedades dos poliedros e poliedros convexos;  
- Aplicar a Relação de Euler;

- Reconhecer a Relação de Euler como propriedade matemática de uma classe de poliedros, os chamados poliedros eulerianos;

**Procedimentos didáticos:** - Entregar xerocado.

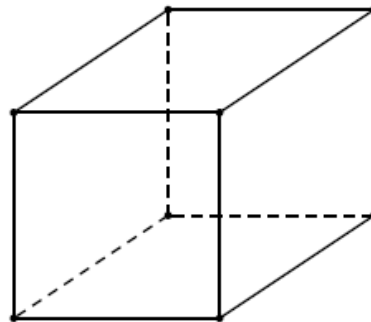
### **3** *Cubo cortado*

Francisco acaba de aprender em sua aula de geometria espacial a *Relação de Euler* para poliedros convexos:

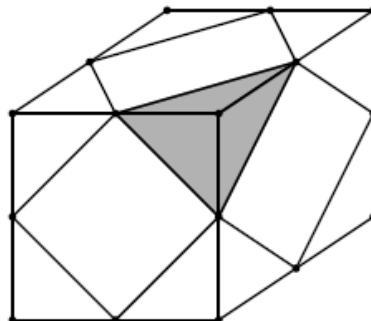
$$V + F = A + 2.$$

Na equação acima,  $V$ ,  $A$  e  $F$  representam o número de vértices, de arestas e de faces do poliedro, respectivamente. Podemos verificar que a Relação de Euler é válida no cubo abaixo, pois existem 6 faces, 12 arestas, 8 vértices e

$$V + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2.$$



João decidiu verificar a Relação de Euler em outro poliedro obtido de um cubo de madeira. Ele marcou os pontos médios de cada aresta e, em cada face, os uniu formando quadrados, como mostra a figura abaixo. Em seguida, ele cortou as 8 pirâmides formadas em torno de cada vértice, obtendo um novo poliedro. Determine:



- o novo número de vértices;
- o novo número de arestas;
- o novo número de faces.

- Solicitar para que os alunos escrevam a Relação de Euler para o novo poliedro formado.
- Solicitar para que os alunos respondam os questionamentos a seguir sobre a última atividade.
- Registrar no quadro:

Questionamentos sobre a Questão 3 do Nível 3 do Banco de Questões da OBMEP  
2015

- Para qualquer corte plano feito no cubo, o novo poliedro formado satisfaz a Relação de Euler? Por qual razão?
- Como cortar o cubo para transformá-lo em um poliedro que não é convexo?

### 10.3. Soluções das atividades realizadas nas práticas de ensino

Apresentamos neste apêndice soluções de todas as atividades realizadas na prática de ensino. Ressaltamos que elas são “uma” dentre as inúmeras possíveis.

#### 10.3.1. Solução da atividade Pensando na definição de poliedros

**Justificativa para o sólido geométrico inicial:** Podemos perceber que há um vértice no qual dois outros sólidos geométricos (poliedros) são “conectados” e que uma das arestas incidentes pertence a uma das faces de cada um destes outros. Isto contraria a definição de poliedro. Na verdade, neste caso é como se tivéssemos dois poliedros.

**Justificativa para o sólido geométrico 1:** Idem anterior.

**Justificativa para o sólido geométrico 2:** A aresta dada pelo segmento AB pertence a mais de uma face do sólido geométrico. Isto contraria a definição de poliedro.

**Justificativa para o sólido geométrico 3:** A aresta AC da face  $f_1$  pertence às faces superiores  $f_2$  e  $f_3$ . Isto contraria a definição de poliedro. Observe que pela sua

definição matemática, faces coplanares não são permitidas, e neste caso temos que as faces  $f_2$  e  $f_3$  possuem essa propriedade.

**Justificativa para o sólido geométrico 4:** Observe que o segmento CD por si só não é um polígono, e portanto temos algo que não é um polígono pertencendo ao sólido geométrico. Logo, não é um poliedro. Também, note que o segmento CD não possui as propriedades usuais de uma aresta.

### 10.3.2. Solução da atividade relação de Euler e poliedros convexos

Solução para a questão 3 do nível 3 do Banco de Questões 2015 da OBMEP extraída da própria fonte.

#### **3** *Cubo cortado – Solução*

- Os vértices do novo poliedro são exatamente os pontos médios das arestas do cubo original. Como o cubo tem 12 arestas, o novo poliedro possui 12 vértices.
- Cada aresta do novo poliedro é um lado de um dos quadrados formados nas faces. Como o cubo possui 6 faces e cada uma delas possui os 4 lados de um dos quadrados, o total de arestas procurado é  $4 \cdot 6 = 24$ .
- Existem 8 faces triangulares que são as bases das pirâmides removidas e 6 faces quadradas formadas nas faces do cubo original. Temos então  $8 + 6 = 14$  faces.

Veja que a Relação de Euler é válida também para esse novo poliedro, pois

$$V + F = 12 + 14 = 24 + 2 = A + 2.$$

Soluções dos questionamentos:

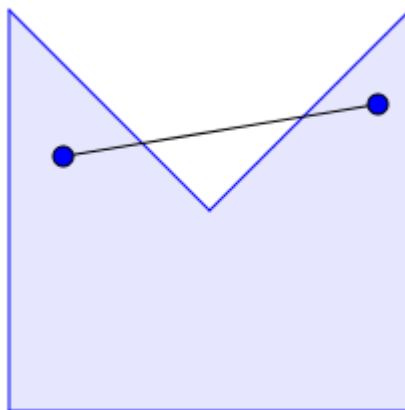
**Para qualquer corte plano feito no cubo, o novo poliedro formado satisfaz a Relação de Euler? Por qual razão?**

Sim, pois como o corte é plano o poliedro obtido é sempre convexo, e portanto satisfaz a relação de Euler.

**Como cortar o cubo para transformá-lo em um poliedro que não é convexo?**

Pela questão anterior podemos notar que apenas um corte plano não transforma o cubo em poliedro que não é convexo. Assim, faz-se necessário haver mais um corte plano. Atentamos que os cortes devem ser planos, pois queremos construir outro poliedro. É evidente que cortes não planos (ou mais apropriadamente curvos), transformam o cubo em um sólido geométrico que não é convexo. Entretanto, tal sólido geométrico não é um poliedro.

Um modo de cortar é realizar um corte no formato de V em qualquer uma das faces como exposto na figura a seguir de uma visão lateral do novo poliedro. Neste caso, podemos observar a existência de pontos no novo poliedro tais que o segmento de reta que os liga não está estritamente contido neste.



**10.3.3. Solução da questão 28 - Nível 3 - Banco de Questões OBMEP 2015**

Solução para a questão 28 do nível 3 do Banco de Questões 2015 da OBMEP extraída da própria fonte



### **28** *Trocando números usando MDC e MMC – Solução*

A maior quantidade de números 1 que podemos deixar é 1007. Primeiro vamos mostrar como obtê-los. Para isso, basta tomar os pares de números consecutivos, (1,2), (3,4), (5,6), ..., (2013,2014) e realizar a operação em cada par. Sabendo que números consecutivos não têm fator comum, cada um dos máximos divisores comuns será 1.

Não é possível obter mais do que isso pois a quantidade de números pares não se altera no decorrer das operações. Isso ocorre pois, se operarmos com dois números pares, teremos como resultado dois números pares, se operarmos com dois números ímpares teremos como resultado dois números ímpares e se operarmos com um número par e um número ímpar obteremos também um número par e um número ímpar. Começamos com 1007 números pares e sempre teremos 1007 números pares.

#### **10.3.4. Solução do problema 4.4 da apostila 1 do PIC Jr**

(a) Observe que  $m \mid a - a = 0$ . Logo,  $a \equiv a \pmod{m}$ .

(b) Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $m \mid b - a$ . Disto, temos que  $m \mid -(b - a) = a - b$ . Logo,  $b \equiv a \pmod{m}$ .

(c) Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $m \mid b - a$ , e se  $b \equiv c \pmod{m}$ , então  $m \mid c - b$ . Disto, temos que  $m \mid (c - b) + (b - a) = c - b + b - a = c - a$ . Logo,  $a \equiv c \pmod{m}$ .