#tear
Revista de Educação, Ciência e Tecnologia

O ESTUDO DE DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS NO CONTEXTO DE INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO ENVOLVENDO ENGENHARIA DIDÁTICA E SEQUÊNCIAS POLINOMIAIS DE FIBONACCI

Rannyelly Rodrigues de Oliveira*

Francisco Régis Vieira Alves**

Rodrigo Sychocki da Silva***

Resumo: O presente artigo apresenta uma abordagem de investigação no contexto da História da Matemática, envolvendo situações que visam oportunizar o entendimento da extensão, evolução e generalização de propriedades da Sequência de Fibonacci. Dessa forma, abordam-se duas situações. A primeira, envolvendo a descrição da fórmula de Binnet no campo dos inteiros. Logo em seguida, apresenta-se uma descrição e análise dos termos explícitos presentes na Sequência Polinomial de Fibonacci. O escopo da presente proposta de atividade busca a divulgação científica de noções envolvendo a generalização, ainda atual, fato que acentua o caráter ubíquo da Sequência de Fibonacci. À vista disso, a proposta de experimento didático está fundamentada na organizada das características da Engenharia Didática. Almeja-se, além da validação interna das hipóteses levantadas durante a investigação, contribuir com a formação inicial de estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática que virem a estudar o tema.

Palavras-chave: Atividades de investigação. Engenharia Didática. História da Matemática. Sequência Generalizada de Fibonacci.

1 Introdução

Os trabalhos de Alves & Borges Neto (2011) e Alves (2013) abordam aspectos matemáticos e epistemológicos em torno da evolução do assunto Sequência de Fibonacci (SF), o qual se mostra indene, passados séculos após a descrição do modelo de reprodução de pares de coelhos "imortais" (BROTHER, 1963b). Traz-se, nesta proposta de atividade para a sala de aula, definições e propriedades apresentadas em artigos científicos nas décadas de 1960 e 1970 (BROTHER, 1963a; 1963b; BROKE, 1964; KING, 1963; HOGGAT, 1968; HOGGAT & BICKNELL, 1973; WEBB, 1969; WELAND, 1967) que apresentam e descrevem a Sequência Polinomial de Fibonacci

* Professora efetiva na Rede Estadual de Ensino do Ceará – SEDUC. E-mail: nanny-rockstar@hotmail.com

** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). E-mail: fregis@ifce.edu.br

*** Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Departamento de Matemática Pura e Aplicada. E-mail: sychocki.rodrigo@gmail.com

(SPF), assunto ainda minimamente debatido nos livros e aulas de História da Matemática. À vista disso, por meio desta proposição de atividade, pretende-se apresentar uma abordagem de investigação sobre a extensão e generalização de propriedades da SF, considerando os aspectos epistemológicos dos conceitos matemáticos no que diz respeito à sua origem e evolução histórica.

Além do mais, a situação didática apresentada e debatida neste texto tem como base a estrutura da Engenharia Didática (ED), que será discutida a seguir, segundo as concepções dos autores Almouloud (2007), Almouloud e Silva (2012), Alves (2016), Carneiro (2005), Pais (2002) e Pommer (2013). Com base na concepção de Almouloud (2007, p. 171), a escolha pela ED está relacionada ao fato dessa metodologia se validar internamente, sem a necessidade de aplicação antecipada e posterior de testes, ocorrendo sua validação por meio da comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Com isso, o presente artigo foi organizado em seis seções: a primeira versa sobre ideias preliminares sobre Engenharia Didática, conseguintemente, apresenta-se e debate-se sobre os quatro estágios de desenvolvimento da proposta e por fim fazem-se considerações/projeções finais sobre o presente trabalho.

2 Engenharia didática: ideias preliminares

A Engenharia Didática teve sua gênese no início dos anos 1980, no âmbito da didática da Matemática numa vertente francesa[1], como uma proposta de metodologia de pesquisa, caracterizada "por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino" (ALMOULOUD, 2007, p. 171). Além disso, Pais (2002, p. 99) destaca que a ED permite uma organização metodológica para se realizar uma pesquisa, na qual se pretende considerar o elo entre teoria e prática, a fim de não diminuir seus significados dimensionais. Dessa forma, a ED torna-se uma possibilidade para o professor gerenciar a própria orientação investigativa dentro de um contexto de situação didática.

O termo Engenharia Didática, empregado ao trabalho do pesquisador, faz uma comparação com o trabalho de um engenheiro quanto aos momentos de concepção, elaboração e execução de um projeto arquitetônico. Tal como ocorre com o engenheiro

[1] A vertente conceitual teve início com os estudos da pesquisadora matemática francesa Michèle Artigue na década de oitenta.

que necessita de um modelo teórico para implementar o projeto, o mesmo acontece com o pesquisador na área da didática (PAIS, 2002, p. 100).

Dessa forma, podem-se compreender dois níveis de pesquisas na ED: a microengenharia, que estuda especificamente a complexidade dos fenômenos relacionados à sala de aula e a macroengenharia, que aborda as "dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais" referentes ao binômio ensino e aprendizagem. (ALVES, 2016, p. 70).

Neste trabalho apresenta-se uma proposta de aula que envolve a ação investigativa dos participantes sobre a extensão, a evolução e a generalização das propriedades oriundas da Sequência de Fibonacci, numa perspectiva de abordagem de conceitos da História da Matemática fundamentada nos princípios da Engenharia Didática (ED). Usa-se como proposta metodológica a microengenharia e a sistematização de duas variáveis: macrodidáticas e microdidáticas. Segundo Alves (2016, p. 70), as variáveis macrodidáticas se referem à estrutura geral da ED e as microdidáticas estão relacionadas à fase de experimentação da ED. Assim, a Engenharia tem uma peculiaridade na sua validação, que é o fato de se validar internamente, sem precisar de pré/pós testes, sendo necessário e suficiente uma comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori* (ALMOULOUD, 2007, p. 171).

Pommer (2013, p. 22) atenta para o fato de que as questões, a serem trabalhadas na sala de aula, devem-se apresentar como situações-problemas que permitam a realização do processo de aprendizagem. Isso exige que o professor estimule os estudantes a agirem de modo autônomo na formulação de estratégias de soluções partindo de seus conhecimentos prévios. Desse modo:

> As escolhas locais estão articuladas com previsões a respeito do comportamento dos alunos. Ao mesmo tempo em que explicamos como se vai tentar desenvolver um controle das relações entre os sentidos dos comportamentos dos alunos e as situações didáticas propostas, formulamos hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para validação da Engenharia. Procuramos deixar claro, nas setas do Mapa da Engenharia, que, cronologicamente, tomar decisões e formular hipóteses são ações simultâneas. Antes do Plano, as hipóteses estão implícitas. Tornam-se explícitas e verbalizadas após o delineamento do Plano de Ação, quando se tem idéia do todo. (CARNEIRO, 2005, p. 103)

Na concepção de Pommer (2013, p. 21), a ED é uma metodologia que possibilita, na análise *a priori*, prever o que vai acontecer durante a experimentação (situação didática), a partir das escolhas apropriadas das variáveis didáticas, que nortearão as possíveis estratégias de solução que o estudante possa elaborar. Além disso, na análise *a posteriori*, as hipóteses estabelecidas podem ser validadas, quando se compara os objetivos definidos com o comportamento dos estudantes durante o processo de aprendizagem.

Por conseguinte, Pais (2002, p. 101) descreve tal metodologia como um sistema organizado em quatro estágios ou fases sequenciais: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação, que serão apresentados, discutidos e relacionados com a proposta de trabalho apresentado neste artigo.

3 Estágio 1: análises preliminares

Almouloud & Silva (2012, p. 26) relatam que na análise preliminar o pesquisador se fundamenta em um quadro teórico, e a partir daí são feitas análises preliminares sobre o objeto de estudo. Nesse sentido, envolve-se nesta fase uma "análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática". Pommer (2013) neste aspecto argumenta:

> Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino. (POMMER, 2013, p. 23).

Desse modo, realizou-se uma pesquisa bibliográfica, a fim de se fazer uma pré-análise das definições e propriedades referentes à descrição da Sequência Polinomial de Fibonacci (SPF) apresentadas em artigos científicos das décadas de 1960 e 1970, dos autores: Brother (1963a; 1963b), Broke (1964), King (1963), Hoggat (1968), Hoggat & Bicknell (1973), Webb (1969) e Weland (1967).

Nesse sentido, Pais (2002, p. 101) recomenda que se organize uma descrição das dimensões epistemológicas, cognitivas e pedagógicas, que compõem o objeto de estudo e orientam o aspecto de ensino a ser estudado. Assim, quanto à dimensão epistemológica, considerou-se a gênese e a evolução dos conceitos matemáticos referentes à extensão e generalização das propriedades da SF. Na dimensão cognitiva, buscou-se por meio da situação de ensino proposta, mobilizar o pensamento intuitivo do aluno conduzindo-o ao desenvolvimento de um raciocínio inferencial. Na perspectiva didática, objetivou-se, por meio da transposição didática dos conceitos matemáticos da SF, transformá-los em um conteúdo a ser ensinado e que oportunizasse uma aprendizagem de qualidade.

Com isso, quando se pretende ensinar determinados conteúdos, pode-se compreender que é necessário definir objetivos. Assim, Astolfi & Develay (2012, p. 58-59) discutem sobre o conceito de objetivos-obstáculos. Dessa forma, a definição de objetivos está intimamente ligada à previsão *a priori* da dificuldade de alcançar o objetivo proposto na resolução de um problema e os obstáculos são as dificuldades que os estudantes encontram na aprendizagem do conceito científico. Assim, por meio dos objetivos-obstáculos, pretendeu-se definir/selecionar os objetivos a partir da definição dos obstáculos psicológicos e epistemológicos. Além disso:

> Em decorrência, o levantamento dos diversos obstáculos a serem considerados permitirá análise dos fatores que permitirão superar os problemas observados na aprendizagem, em conformidade com os objetivos da pesquisa, o que viabiliza a etapa seguinte: a concepção da sequência didática. (POMMER, 2013, p. 23).

O objetivo dessa atividade é investigar as relações dos conceitos indicados por $\left(f_n\right)_{n\in IN}$ e $\left(f_n\right)_{n\in Z}$, considerando-se a hipótese de que os estudantes partirão da descrição da fórmula de Binnet no campo dos inteiros e da descrição dos termos explícitos da SPF. Além disso, espera-se que os estudantes desenvolvam uma aprendizagem diferenciada da SF, tendo como fundamentação as propriedades resultantes da modelagem biológica do nascedouro de pares de coelhos. Com isso, um obstáculo nesta pesquisa pode ser a determinação da extensão e generalização de propriedades da SF, referentes à sua forma polinomial (SPF), cuja abordagem é mínima ou ignorada nos livros de História da Matemática.

Com efeito, no artigo de Hoggat & Bicknell (1973), encontra-se, por exemplo, a seguinte definição: denotamos a Sequência de Fibonacci por $\left(f_n(x)\right)_{n\in IN}, x \in IR$ e tal que $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = x$; $f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x) + f_{n-1}(x)$ (*). Nos compêndios da História da Matemática, a fórmula atribuída a Binnet (KOSHY, 2007) proporciona a descrição explícita para os termos de Fibonacci, indicada como $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$,com $n \geq 1$ (KOSHY, 2011, p. 79) (**). Por outro lado, a evolução do modelo concebido por

Leonardo Pisano, em 1202, oportuniza pensar, hodiernamente, numa fórmula de Binnet, em termos da introdução de uma variável real.

4 Estágio 2: concepção e análise *a priori*

Pais (2002, p. 101-102) explica que a etapa da concepção e da análise *a priori* se caracteriza pela determinação das variáveis que compõem o sistema de ensino e que exercem influência na situação didática. Ou seja, numa perspectiva microdidática, as variáveis são articuladas de modo a estabelecerem relações entre o conteúdo a ser ensinado e a situação-problema que serão propostos aos estudantes, almejando-se a construção e aprendizagem do conceito científico.

Além do mais, Almouloud & Silva (2012, p. 26) acentuam que, nesta etapa, o professor-pesquisador define um número determinado de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas) sobre as quais pretende atuar por meio do ensino. Para isso, na análise *a priori,* devem-se considerar os seguintes aspectos:

> • Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática[2] desenvolvida;
> • Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.
> • Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOUD e SILVA, 2012, p. 27).

Dessa forma, compreende-se que na análise *a priori*, deve ocorrer a elaboração de situações-problema, a fim de validar as hipóteses formuladas na análise preliminar. Tais situações-problema, segundo Almouloud (2007, p. 174), são questões subjetivas/objetivas colocadas dentro de um domínio de conhecimento, que não apresentam uma estrutura totalmente matematizada. Assim, “sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema”.

[2] Sobre as situações *a-didáticas* pode-se dizer que “o aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didácticas. Não somente pode, como deve fazê-lo, por que só terá verdadeiramente adquirido esse conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio às situações com que depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional. Uma tal situação é chamada situação a-didáctica.” (BROUSSEAU, 1996, p. 49)

No presente trabalho, descreve-se uma situação-problema, pela qual se pretende possibilitar a investigação das duas definições a seguir nas seguintes orientações:

(I) Descrever uma fórmula explícita em (**), para os números de Fibonacci, com índices inteiros e discutir seu significado relativo ao modelo que prevê a reprodução de coelhos, formulada por Leonardo Pisano em 1202.

(II) Considerar (*) e descrever uma fórmula explícita para seus termos.

5 Estágio 3: experimentação

Almouloud & Silva (2012, p. 27) explicam que a experimentação é a fase responsável pela aplicação da situação didática, por meio da inserção das situações-problema, partindo dos objetivos e hipóteses da pesquisa, buscando-se firmar o contrato didático. Carneiro (2005) colabora neste sentido:

> Durante a experimentação, coletamos e organizamos um *corpus* de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação. (CARNEIRO, 2005, p. 105).

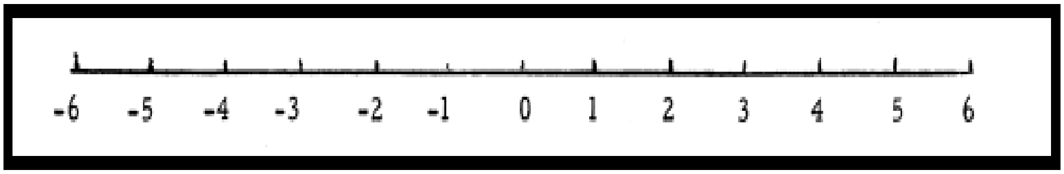
A aplicação da situação-problema é uma proposta a ser realizada com estudantes de Ensino Superior que cursam a disciplina de História da Matemática. Para tal, organizaram-se os seguintes questionamentos norteadores:

a) Quando consideramos a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : (1\,;1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;13\,;21\ldots.)$, podemos relacioná-la à produção de pares de coelhos. Todavia, que interpretação pode ser pensada no caso da mesma sequência, definida agora no campo dos inteiros?

b) Que nome ou terminologia poderíamos atribuir à sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $x\in\mathbb{R}$?

Além do mais, espera-se que durante a realização das atividades os estudantes explorem e discutam as relações conceituais entre os modelos indicados por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Com efeito, os estudantes poderão ser instigados a determinar os termos que se visualiza na figura 1 a seguir. Inicialmente, Brousseau (1965) indica a possibilidade conceitual de considerar os índices da SF à esquerda de 0 e prever seu comportamento. Logo em seguida, o arranjo proposto pela figura 2 pode ser discutido com os estudantes, com ênfase apenas na SF e desconsiderando, de modo preliminar, a Sequência de Lucas.

Figura 1: Conjectura os possíveis nomes do modelo de Fibonacci.



Fonte: Brousseau (1965, p. 2)

Figura 2: Descrição das sequências de Fibonacci e de Lucas, denotadas, respectivamente, por $(f_n)_{n\in Z}$ e $(L_n)_{n\in Z}$, no campo dos inteiros.

...	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	...
...	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	...
...	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	...
...	L_{-4}	L_{-3}	L_{-2}	L_{-1}	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	...

Fonte: Hoggat & Venner (1969, p. 27)

No que concerne ao 2º questionamento, torna-se imprescindível que os estudantes conheçam ou se tornem familiarizados com a descrição da fórmula explícita dos termos da SF, abordada na literatura especializada, como fórmula de Binnet. Por fim, as figuras 1 e 2 podem atuar no sentido de instigar a imaginação dos estudantes no que concerne à evolução do modelo matemático conceitual, sendo pensado de modo não estático.

6 Estágio 4: análise *a posteriori* e validação

A análise *a posteriori* e a validação das hipóteses ocorrem próximo à fase de experimentação. Nesse sentido, Almouloud & Silva (2012, p. 27) relatam que nesta fase acontece a análise dos dados coletados durante a aplicação das situações-problema e isso deve ser registrado fazendo-se uso do relato de observações, das gravações de vídeos e da escrita dos estudantes. De acordo com os autores, "nessa análise se faz necessário sua confrontação com a análise *a priori* para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação". Dessa forma, Pommer (2013) converge com o seguinte pensamento:

> [...] esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa. (POMMER, 2013, p. 26).

Vale ressaltar que, pelo fato do presente artigo se tratar de uma organização e proposição de experimento didático, discute-se neste tópico do artigo, o que se espera ou projeta-se que aconteça na fase da análise *a posteriori* e validação da ED, considerando-se como pressupostos os questionamentos e as discussões realizadas na aplicação da situação-problema (experimentação), a fim de validar as hipóteses levantadas durante a investigação. Portanto, não se apresentam dados coletados e sim, se faz um ensaio sobre a matemática e as relações entre os objetos em estudo.

Com embasamento matemático apoiado pelos conhecimentos prévios acerca da Sequência de Fibonacci, percebe-se que, com origem nas figuras 1 e 2, há a necessidade de efetuar os cálculos dos termos $(\ldots, f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots)$ e conclui-se que a extensão ao campo dos inteiros viabiliza uma espécie de afastamento da realidade, posto que não se vincula mais ao modelo biológico da geração de coelhos.

Do ponto de vista matemático, os seguintes argumentos, que se encontram no manuscrito de Hoggat (1969, p. 28), respondem a orientação da tarefa I, quando o mesmo escreve: $f_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n - \left(\frac{1}{\beta}\right)^n}{\alpha - \beta}$. E, considerando o fato de que $|\alpha\beta|=1$, conclui:

$$f_{-n} = \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = \frac{(-1)^n(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} = \frac{(-1)^n(-1)(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)} = (-1)^{n+1}\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) = (-1)^{n+1} f_n.$$

No caso da formulação (*), os estudantes devem buscar avaliar, termo a termo, a sequência: $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$. Uma dos elementos a serem observados, diz respeito ao fato de que os elementos do tipo $(f_n(x))_{n \in IN}$ são funções polinomiais.

Por outro lado, semelhantemente ao modelo de Binnet, divulgado pelos autores de livros de História da Matemática, pode-se considerar agora, na variável ‘Y’ e tomar a equação auxiliar $Y^2 = x \cdot Y + 1 \leftrightarrow Y^2 - x \cdot Y - 1 = 0$ que tem as seguintes raízes

$\alpha(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$, $\beta(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ onde $(\alpha(x))^2=x\cdot\alpha(x)+1$, $(\beta(x))^2=x\cdot\beta(x)+1$ e ainda que $\alpha(x)-\beta(x)=\sqrt{x^2+4}$.

No passo seguinte, nota-se que: $f_1(x)=1=\dfrac{(\alpha(x))^1-(\beta(x))^1}{\alpha(x)-\beta(x)}$ e que $f_2(x)=x=\dfrac{(\alpha(x)+\beta(x))}{1}=\dfrac{(\alpha(x)-\beta(x))(\alpha(x)+\beta(x))}{\alpha(x)-\beta(x)}=\dfrac{(\alpha(x))^2-(\beta(x))^2}{\alpha(x)-\beta(x)}$. Em seguida, empregando-se a fórmula recursiva $f_{n+1}(x)=x\cdot f_n(x)+f_{n-1}(x)$, deve-se aplicar o modelo indutivo:

$$f_{n+1}(x)=x\cdot\left(\frac{(\alpha(x))^n-(\beta(x))^n}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)+\left(\frac{(\alpha(x))^{n-1}-(\beta(x))^{n-1}}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)=\frac{\left(x(\alpha(x))^n-x(\beta(x))^n+(\alpha(x))^{n-1}-(\beta(x))^{n-1}\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

$$=\frac{\left(x(\alpha(x))^n+(\alpha(x))^{n-1}-x(\beta(x))^n-(\beta(x))^{n-1}\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}=\frac{\left((\alpha(x))^{n-1}[x\alpha(x)+1]-(\beta(x))^{n-1}[x\beta(x)+1]\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}=$$

$$\underset{(\beta(x))^2=x\cdot\beta(x)+1}{\overset{(\alpha(x))^2=x\cdot\alpha(x)+1}{=}}\frac{\left((\alpha(x))^{n-1}(\alpha(x))^2-(\beta(x))^{n-1}(\beta(x))^2\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}=$$

$$=\frac{\left((\alpha(x))^{n+1}-(\beta(x))^{n+1}\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}\therefore f_{n+1}(x)=\left[\frac{\left((\alpha(x))^{n+1}-(\beta(x))^{n+1}\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right].$$

Portanto, para $n\geq 1$, tem-se agora que $f_{n+1}(x)=\dfrac{\left((\alpha(x))^{n+1}-(\beta(x))^{n+1}\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}$, o que poderíamos chamar de uma versão da fórmula de Binnet, na variável 'x'.

Vale destacar ainda, que existem outras formas de representar a sequência de Fibonacci. Benoumhani (2003, p. 3) escreve sob a forma $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{4x+1}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{4x+1}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Neste caso, observa-se que Posamentier & Lehmann (2007, p. 207) investigaram o comportamento dos dígitos e sua ocorrência na SF e, assinalaram que, apesar de expresso por intermédio de potências de $\sqrt{5}$, elas parecem desaparecer ao final do processo (POSAMENTIER & LEHMANN, 2007, p. 300 - 301).

De modo semelhante, na atividade (II), os estudantes devem ser estimulados ao debate científico, estabelecendo e comparando o comportamento das funções polinomiais, obtidas em (*), com a expressão indicada por Benoumhani, com uma aparência de uma função racional, do tipo

$$f_{n+1}(x)=\frac{\left((\alpha(x))^{n+1}-(\beta(x))^{n+1}\right)}{\alpha(x)-\beta(x)}=\frac{\left(\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\sqrt{x^2+4}}$$ (***), isto é, envolvendo o quociente entre duas funções polinomiais. Na figura 3, ao lado esquerdo, podem-se observar termos originados da definição (*).

Figura 3: Lista dos primeiros elementos definidos a partir de sequências recursivas polinomiais, indicadas por $\left(f_n(x)\right)_{n\in IN}$ e $\left(L_n(x)\right)_{n\in IN}$.

Fibonacci and Lucas Polynomials

n	F_n	$L_n(x)$
1	1	x
2	x	$x^2 + 2$
3	$x^2 + 1$	$x^3 + 3x$
4	$x^3 + 2x$	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^5 + 4x^3 + 3x$	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$	$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$
8	$x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$	$x^9 + 9x^7 + 25x^5 + 30x^3 + 9x$

Fonte: Hoggat & Bicknell (1973, p. 272)

Dessa forma, com a inspeção de casos particulares extraídos de (***) (comparar com a figura 3), pode-se inferir que, embora a expressão tenha a aparência de não resultar uma função polinomial, sentimento semelhante assinalado por Posamentier & Lehmann (2007), no caso da fórmula de Binnet, para o caso da definição (*), obtêm-se expressões na variável '*x*'. Desse modo, originado a partir de um debate cientifico entre os estudantes e mediado pelo professor, o termo "Sequência Polinomial de Fibonacci (SPF)" pode ser caracterizado como um conteúdo de apreciação, reflexão, aprendizagem e elemento que responde ao 2º questionamento apresentado anteriormente.

7 Considerações e projeções a partir do exposto

Apresentou-se uma proposta de atividade investigativa que versa a extensão e a generalização das propriedades oriundas da SF numa perspectiva evolutiva da História da Matemática fundamentada na Engenharia Didática. Dessa forma, a proposição de atividade planejada preliminarmente e elaborada *a priori*, foi sistematizada em quatro estágios consecutivos: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. A aplicação da situação-problema é feita na fase da experimentação, sendo analisada posteriormente, seguida da validação das hipóteses.

Na atividade proposta, observa-se a relevância de proporcionar aos estudantes um tirocínio distinguido, que envolve a possibilidade de generalização do modelo da SF, definida para índices inteiros extrapolando, por tal via, as propriedades herdadas da modelização biológica do nascedouro de pares de coelhos. E, ainda, a mobilização de uma ideia que envolve empregar um modelo *standard*, abordados por autores de livros de História da Matemática, na obtenção de termos explícito na SF, conhecido como fórmula de Binnet, fato que suscita conjecturar a possibilidade da identidade polinomial descrita por $f_{-n}(x)=(-1)^{n+1}f_n(x)$, não comentado/discutido por Hoggat & Bicknell (1973), para $\forall x \in IR$.

Com o escopo final de oportunizar aos aprendizes uma atividade investigativa, pode-se proporcionar e estimular a ação na formulação de definições matemáticas que, num ambiente de graduação, consiste em dar "nomes" ou "etiquetas" aos objetos teórico-conceituais. Dessa forma, estimula-se que um possível significado seja atribuído pelos próprios aprendizes, relativo à seguinte lista $(\ldots,f_{-5},f_{-4},f_{-3},f_{-2},f_{-1},f_0)$, com origem na demonstração de Hoggat (1969, p. 28).

Por fim, os estudantes podem se dar conta ao longo desta investigação que $(f_n(1))_{n\in IN}=(f_n)_{n\in IN}$, ou seja, ao assumir um valor particular para a variável '*x*', restaura-se a SF original, onde as propriedades do modelo já foram apresentadas e debatidas por Leonardo Pisano (WELLAND, 1967).

THE STUDY OF MATHEMATICAL DEFINITIONS IN THE CONTEXT OF HISTORICAL RESEARCH: A DIDACTIC EXPERIMENT INVOLVING DIDACTIC ENGINEERING AND FIBONACCI POLYNOMIAL SEQUENCES

Abstract: This article presents a research approach within the context of History of Mathematics, involving situations that aim to provide an understanding of the extension, evolution and generalization of properties of the Fibonacci Sequence. In this way, two situations are addressed. The first, involving the description of Binet's formula in the integer field. Then, a description and analysis of the explicit terms present in the Fibonacci Polynomial Sequence is presented. The scope of this activity proposal seeks the scientific dissemination of notions involving generalization, still current, a fact that accentuates the ubiquitous character of the Fibonacci Sequence. Thus the proposal of didactic experiment is based on the organized in the characteristics of Didactic Engineering, beyond the internal validation of the hypotheses raised during the investigation this paper aims at contributing to initial education of undergrad Mathematicsof students that may come to study the subject.

Keywords: Research activities. Didactic Engineering. History of Mathematics. Generalized Fibonacci Sequence.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F.. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.18, n. 1, p. 61-93, 2016.

ALVES, F. R. V; BORGES NETO, H. A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. **BOLETIM GEPEM,** n.59, p.135-140, 2011.

ALVES, F. R. V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da Sequência de Fibonacci apoiada na Tecnologia. **Anais do VI HTEM,** p.1-17, 2013.

ASTOLFI, J. P.; DEVELAY, M. **A didática das ciências**. 16. ed. Campinas: Papirus, 2012.

BENOUMHANI. M. A sequence of Binomial Coefficients related to the Lucas and Fibonacci Numbers. **Journal of Integers Sequences**, v. 6, p.1-10, 2003.

BROTHER, A. Exploring Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 1, .n. 1, February, p.57-63, 1963a.

BROTHER, A. Dying Rabbit Problem Revived. **The Fibonacci Quarterly**. v. 1. n. 4, February, p.53-57, 1963b.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean (Dir.). **Didáctica das Matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Horizontes Pedagógicos. 1996.

BROUSSEAU, B.A. **An introduction to Fibonacci Discovery.** Santa Clara, California: California University, The Fibonacci Association, 1965.

BROKE, M. Fibonacci numbers: their History through 1900. **The Fibonacci Quarterly**, v. 2, n. 2, April, p.149-154, 1964.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike**, Campinas: UNICAMP, v. 13, n.23, p. 85-118, 2005.

HOGGAT. V. E. Generalized Rabbits for Generalized Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quartely**, v. 6, n. 3, p.05 – 112, dec.1968.

HOGGAT, V. E. Fibonacci and Lucas numbers. **The Fibonacci Quartely**, v. 6, n.3, p. 105-112, dec.1969.

HOGGAT, V. E.; BICKNELL,M. **Fibonacci Quartely**, v. 11, n.3, p.271-275, 1973.

HOGGAT, Jr. V. E.; VENNER, E. **Fibonacci and Lucas Numbers**. Santa Clara: Fibonacci Association Publishers. 1969.

KING, C. Leonardo Fibonacci. **The Fibonacci Quartely**, v. 1, n. 4, p.15-21, dec.1963.

KOSHY. T. **Fibonacci and Lucas Numbers and Applications**. New York: John Willey and Sons, 2011.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo: [s.n.], 2013.

POSAMENTIER, A., LEHMANN, I.. **The Fabulous Fibonacci Numbers**. New York: Prometheus Books, 2007.

WEBB, W. A. Divisibility Properties of Fibonacci Polynomials. **The Fibonacci Quarterly**, v. 7, n.5, p.457-464, dec. 1969.

WELAND, K. Some Rabbit Production Results Involving Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 5, n.2, p.195-201, abr.1967.