

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução da Equação de Cinética de Difusão  
de Nêutrons em Geometria Cilíndrica  
Tridimensional**

por

Fernando Rodrigues de Oliveira

Trabalho submetido como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena  
Orientador

Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva  
Coorientador

Porto Alegre, maio de 2017.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Oliveira, Fernando Rodrigues de

Solução da Equação de Cinética de Difusão de Nêutrons em Geometria Cilíndrica Tridimensional / Fernando Rodrigues de Oliveira.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2017.

64 p.: il.

Tese (Doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2017.

Orientador: Vilhena, Marco Tullio Menna Barreto de; Coorientador: Silva, Fernando Carvalho da

Tese: Matemática Aplicada,  
Separação de variáveis, Fluxo, Concentração de precursores,  
Cinética de difusão

# Solução da Equação de Cinética de Difusão de Nêutrons em Geometria Cilíndrica Tridimensional

por

Fernando Rodrigues de Oliveira

Trabalho submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva

Banca examinadora:

Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto  
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Rubem Mário Figueró Vargas  
PUC-RS

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros  
UERJ

Prof. Dr. Carlos Hoppen  
Coordenador

# Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	vi
LISTA DE TABELAS . . . . .	vii
LISTA SIGLAS E SÍMBOLOS . . . . .	viii
RESUMO . . . . .	xi
ABSTRACT . . . . .	xii
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 SOLUÇÃO ANALÍTICA EM GEOMETRIA CARTESIANA E CILÍNDRICA (CASO MONOENERGÉTICO) . . . . .	6
2.1 Separação de Variáveis . . . . .	7
2.2 Resolução do problema espacial em geometria cilíndrica . . . . .	9
2.3 Resolução do problema de autovalores espaciais em geometria cartesiana . . . . .	21
2.4 Solução para a variável temporal . . . . .	24
2.5 Soluções explícitas . . . . .	26
2.5.1 Solução explícita para o caso cilíndrico . . . . .	26
2.5.2 Solução explícita para o caso cartesiano . . . . .	31
2.6 Resultados numéricos . . . . .	33
3 SOLUÇÃO ANALÍTICA EM GEOMETRIA CILÍNDRICA (CASO MULTIGRUPO) . . . . .	40
3.1 O modelo . . . . .	40
3.2 Solução considerando dois grupos de energia . . . . .	46
3.3 Resultados numéricos . . . . .	53
4 CONCLUSÕES . . . . .	58

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	61
--------------------------------------	----

## Lista de Figuras

Figura 2.1	Fluxo $\phi$ em $z=4$ cm. . . . .	33
Figura 2.2	Fluxo $\phi$ em $r=5$ cm. . . . .	33
Figura 2.3	Fluxo $\phi$ como função de $\theta$ . . . . .	34
Figura 2.4	Fluxo em função de $(r, t)$ . . . . .	34
Figura 2.5	Fluxo em função de $(z, t)$ . . . . .	34
Figura 2.6	Fluxo em função de $(\theta, t)$ . . . . .	35
Figura 2.7	Fluxo considerando $\kappa = 0.2$ . . . . .	37
Figura 2.8	Fluxo considerando $\kappa = 0.4$ . . . . .	37
Figura 2.9	Fluxo considerando $\kappa = 0.6$ . . . . .	37
Figura 2.10	Fluxo considerando $\kappa = 0.8$ . . . . .	37
Figura 2.11	O fluxo escalar com dependência temporal e azimutal com $r = 5$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	38
Figura 2.12	O fluxo escalar com dependência radial e azimutal com $t = 2$ and $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	39
Figura 3.1	Fluxo $\phi_1$ como função de $t$ . . . . .	54
Figura 3.2	Fluxo $\phi_2$ como função de $t$ . . . . .	54
Figura 3.3	Concentração $C$ como função de $t$ . . . . .	55
Figura 3.4	Fluxo $\phi_1$ como função de $r$ . . . . .	55
Figura 3.5	Fluxo $\phi_2$ como função de $r$ . . . . .	55
Figura 3.6	Fluxo $\phi_1$ como função de $\theta$ . . . . .	56
Figura 3.7	Fluxo $\phi_2$ como função de $\theta$ . . . . .	56
Figura 3.8	Concentração $C$ como função de $t$ . . . . .	56
Figura 3.9	Fluxo $\phi_1$ como função de $(z, t)$ . . . . .	57
Figura 3.10	$C$ como função de $(z, t)$ . . . . .	57
Figura 3.11	Fluxo $\phi_1$ como função de $(\theta, t)$ . . . . .	57

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Parâmetros nucleares. . . . .	33
Tabela 2.2	Parâmetros nucleares para duas regiões . . . . .	36
Tabela 2.3	Valores numéricos para a densidade de corrente $\vec{j}_1$ e $\vec{j}_2$ , para diferentes tempos e com $z = \frac{Z}{2}$ , $r = \frac{R}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	39
Tabela 3.1	Parâmetros para as equações de cinética de difusão. . . . .	54

# LISTA SIGLAS E SÍMBOLOS

## Lista de Siglas

<i>EDO</i>	Equação diferencial ordinária
<i>EDP</i>	Equação diferencial parcial
<i>GILTT</i>	Generalized Integral Laplace Transform Technique
<i>ODE</i>	Ordinary Differential Equation
<i>PDE</i>	Partial Differential Equation

## Lista de Símbolos

$\phi(\vec{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição $\vec{r}$ no instante $t$ ;
$C(\vec{r}, t)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados na posição $\vec{r}$ no instante $t$ ;
$\phi_g(\vec{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons do grupo $g$ de energia na posição $\vec{r}$ no instante $t$ ;
$C_i(\vec{r}, t)$	Concentração do $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons atrasados na posição $\vec{r}$ no instante $t$ ;
$D_{dif}$	Coefficiente de difusão de nêutrons;
$D_{dif}^{(g)}$	Coefficiente de difusão de nêutrons no grupo $g$ ;
$v_g$	Velocidade dos nêutrons no grupo $g$ ;
$\Sigma_{ag}$	Seção de choque macroscópica de absorção;

$\beta_i$	Fração de nêutrons atrasados do $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons atrasados;
$\beta$	Fração total de nêutrons atrasados;
$\nu_g$	Número médio de nêutrons emitidos na fissão causada por nêutrons do grupo $g$ ;
$\Sigma_{fg}$	Seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons
$\lambda_i$	Constante de decaimento do $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons atrasados.
$\chi_g^d$	Espectro de fissão do grupo $g$ para nêutrons atrasados;
$\chi_g^p$	Espectro de fissão do grupo $g$ para nêutrons prontos;
$\Sigma_{sg' \rightarrow g}$	Seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons do grupo $g'$ para o grupo $g$ .

## AGRADECIMENTOS

Eu agradeço à minha mãe Dorvalina Rodrigues de Oliveira, minha rainha, apoiadora em todos os momentos da vida, que sempre batalhou para eu poder estudar. Eu agradeço a minha noiva Michele Silva dos Santos por todo carinho e companheirismo que me proporcionou nesses anos.

Eu agradeço à instituição UFRGS por me proporcionar um ensino de qualidade, com professores altamente capacitados.

Eu agradeço ao Prof. Dr. Marco Tullio pela orientação e ensinamentos em todo o período do Mestrado e Doutorado.

Por fim, agradeço a todos os meus colegas e amigos que me apoiaram durante esses anos e com os quais aprendi muito.

## RESUMO

O presente trabalho soluciona o problema de cinética de difusão de nêutrons espacial em geometria cilíndrica analiticamente. A solução é exata no sentido que nenhuma aproximação é feita na sua derivação. Para isso, abordamos o estudo do problema de cinética espacial de duas formas, primeiramente, consideramos a técnica de separação de variáveis para resolver o problema monoenergético, com isso determinamos as autofunções espaciais apropriadas e analisamos todo o espectro de acordo com as condições de contorno. Além disso, considerando o mesmo modelo monoenergético, determinamos uma solução para um meio heterogêneo considerando duas células cilíndricas homogêneas adjacentes. A heterogeneidade do problema é devido ao fato de que cada seção cilíndrica tem um conjunto de parâmetros nucleares diferentes. Posteriormente, estudamos o problema de cinética espacial considerando um modelo multigrupo com  $G$  grupos de energia e com  $I$  grupos de precursores de nêutrons atrasados. A ideia básica da solução consiste em supor que os fluxos escalares e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados possam ser expressos como o produto de funções espaciais por funções temporais e, com isso, conseguimos determinar a solução do problema de cinética desacoplado, solucionando uma EDP para as funções espaciais e solucionando o sistema de EDO's para as funções temporais. Apresentamos algumas simulações numéricas para validar o estudo teórico feito no desenvolvimento dessa pesquisa.

# ABSTRACT

The present work solves the problem of spatial neutron diffusion kinetics in cylindrical geometry analytically. The solution is analytical in the sense that no approximation is made in its derivation. For this, we approach the study of the problem of spatial kinetics in three ways, firstly, we consider the technique of separation of variables to solve the monoenergetic problem, with that we determine the appropriate spatial eigenfunctions and analyze the entire spectrum according to the boundary conditions. In addition, considering the same monoenergetic model, we determined a solution for a heterogeneous medium considering two adjacent homogeneous cylindrical cells. The heterogeneity of the problem is due to the fact that each cylindrical section has a set of different nuclear parameters. Subsequently, we study the problem of spatial kinetics considering a multigroup model with  $G$  energy groups and with  $I$  groups of delayed neutron precursors. The basic idea of the solution is to assume that scalar fluxes and concentrations of delayed neutron precursors can be expressed as the product of spatial functions by time functions and, with that, we were able to determine the solution of the decoupled kinetic problem, solving an PDE for the spatial functions and solving the system of ODEs for the temporal functions. We present some numerical simulations to validate the theoretical study done in the development of this research.

# 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a literatura tem revelado um crescente interesse na determinação da representação analítica da solução para a equação de cinética de difusão de nêutrons. O que entendemos por representação analítica está no fato de que nenhuma aproximação é feita ao longo de sua derivação, ou seja, em sua derivação não há aproximação numérica. De fato, encontramos na literatura soluções analíticas para a equação de cinética de difusão de nêutrons em geometria cartesiana, para nêutrons monoenergéticos e para o modelo de multigrupo de energia (dois grupos), considerando tanto um como também seis grupos de precursores de nêutrons atrasados. Os problemas unidimensionais foram resolvidos tanto para placa plana homogênea bem como para o domínio de multiplaca, enquanto que os problemas em duas ou três dimensões foram resolvidos apenas para domínios homogêneos, ou seja, células homogêneas. É importante mencionar que essas soluções em representação analítica foram obtidas pelo método *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT). A ideia básica consistiu na expansão do fluxo escalar em autofunções e substituição dessa expansão na equação de cinética de difusão de nêutrons obtendo uma equação transformada na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares para funções temporais pela aplicação do momento, ou seja, multiplicação das equações de cinética pelas autofunções e subsequente integração. Cabe ainda observar que o sistema de equações transformadas tem solução analítica conhecida. Para ilustrar, citamos os seguintes trabalhos de Ceolin et al. (2015) e Petersen et al. (2014). Cientes da existência de outras soluções analíticas para problemas específicos na literatura, ressaltamos a relevância do método GILTT sobre os demais métodos, uma vez que esse método resolve uma classe abrangente de problemas de cinética de difusão de nêutrons supracitados. As soluções analíticas para esse tipo de problema em geometria cilíndrica é restrita ao trabalho de Hanerliogullari (2012) e de Oliveira (2013). No trabalho de Oliveira o espectro do operador associado à

equação de cinética de difusão de nêutrons em geometria cilíndrica é determinado pela solução do problema de Sturm-Liouville, associado ao operador Laplaciano, a mesma ideia ocorre nos trabalhos em geometria cartesiana acima citados. O espectro também é obtido pela solução do problema de Sturm-Liouville associado ao operador Laplaciano.

O objetivo deste trabalho de tese consiste na determinação de uma representação analítica para a solução da equação de cinética de difusão de nêutrons 3D, em geometria cilíndrica e domínio heterogêneo (duas células cilíndricas), considerando um modelo multigrupo de energia e  $I$  grupos de precursores de nêutrons atrasados. Inicialmente, construímos a solução analítica para este tipo de problema, considerando nêutrons monoenergéticos. Uma vez determinada essa solução obtemos de maneira hierárquica a solução desse problema para o modelo de multigrupo. Para alcançar a meta, inicialmente apresentamos a solução para o problema 3D de cinética de nêutrons monoenergéticos (OLIVEIRA et al., 2016). A ideia principal que foi usada para a determinação da solução consiste em supor que o fluxo escalar ( $\phi(\vec{r}, t)$ ) e a concentração de precursores de nêutrons atrasados ( $C(\vec{r}, t)$ ) fossem expressos como o produto de funções que dependessem apenas das variáveis independentes espaciais, por funções que dependessem apenas da variável temporal. Seguindo na determinação da solução, substituímos essa suposição no sistema de equações diferenciais parciais que modela o problema obtendo, por meio da técnica de separação de variáveis, um sistema de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem para as funções temporais e uma equação diferencial parcial (EDP) para as funções de variáveis espaciais que definem o fluxo escalar. A esse problema desacoplado surge uma constante real ( $\sigma_2$ ) que foi determinada de acordo com as condições de contorno, apropriadas para tornar o problema bem-posto, ou seja, a existência e a unicidade de uma solução de que depende continuamente das condições iniciais e de contorno. Apesar de resultar no mesmo método espectral, a diferença proposta nesse trabalho para a obtenção da solução, consiste em utilizar o operador total do problema de cinética de difusão.

Definimos as condições de contorno (tanto para o caso cilíndrico quanto para o caso cartesiano) influenciados pela simetria do problema com respeito às variáveis espaciais consideradas e, assim, solucionamos a EDP para a função espacial através da técnica de separação de variáveis (analisando todos os espectros possíveis que compõem os valores da constante de separação  $\sigma_2$ ), obtendo as autofunções espaciais associadas aos autovalores que caracterizam  $\sigma_2$ . A partir disso, prosseguimos na obtenção da solução para o problema de cinética de difusão, resolvendo o sistema de EDO's para as funções temporais que supomos na definição do fluxo e da concentração de precursores de nêutrons atrasados. Pelo uso do princípio da superposição de soluções, considerando todas as separações de variáveis e os espectros associados, obtemos a solução geral para o sistema de EDP's que modela o problema de cinética de difusão. Ainda, definimos operadores integrais, os quais aplicamos sobre as condições iniciais, tendo como objetivo determinar as constantes expressas na solução geral. Esses operadores integrais foram definidos de tal maneira a aplicar a propriedade da ortogonalidade das autofunções espaciais, e, dessa forma, determinar a solução única e exata (dependente apenas dos parâmetros nucleares e das condições iniciais e de contorno) tanto para o fluxo escalar, quanto para a concentração de precursores de nêutrons atrasados.

Ao final do segundo capítulo, apresentamos uma solução exata para o problema de cinética de difusão espacial tridimensional de nêutrons, considerando um problema heterogêneo, no qual, o mesmo foi composto por duas células cilíndricas homogêneas. A heterogeneidade do problema é devido ao fato de que cada seção cilíndrica tem um conjunto de parâmetros nucleares diferentes. Mais especificamente, consideramos um domínio composto por duas seções cilíndricas com diferentes parâmetros nucleares. Conhecida a solução do problema de cinética espacial para nêutrons monoenergéticos, construímos a solução para o modelo de multigrupo de nêutrons de maneira hierárquica. Nesse sentido, influenciados pela solução obtida para nêutrons monoenergéticos, supomos que o fluxo escalar para cada grupo de energia seria expresso como o produto de uma função que dependesse apenas das

variáveis espaciais por uma função que dependesse apenas da variável temporal. Diante disso, mostramos dois resultados que nos permitem supor que os fluxos escalares e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados tenham a mesma função espacial. Primeiramente, demonstramos que as funções espaciais definidas para os fluxos escalares formam uma decomposição para a concentração de precursores de nêutrons atrasados, ou seja, as mesmas funções espaciais definidas para os fluxos também definem as concentrações de precursores. Substituindo o que determinamos no primeiro resultado para as equações de balanço dos fluxos escalares, conseguimos mostrar no segundo resultado que o perfil espacial das funções se distingue por uma escala, ou seja as funções espaciais são múltiplas duas a duas. Ademais, o segundo resultado nos sugere uma maneira de determinar essas funções espaciais por meio da solução de uma EDP. A partir disso, podemos estudar o problema original de forma desacoplada: solucionando um sistema de EDO's para as funções temporais e solucionando uma EDP para a função espacial. Com as condições de contorno definidas, conseguimos determinar as autofunções espaciais que caracterizam os fluxos e as concentrações de precursores pela técnica de separação de variáveis. A seguir, apresentamos a solução geral para o problema de cinética de difusão considerando dois grupos de energia e um grupo de concentração de precursores de nêutrons atrasados. As constantes envolvidas na solução geral para os fluxos e as concentrações de precursores foram determinadas pela aplicação de operadores integrais sobre as condições iniciais, os quais foram definidos pela propriedade da ortogonalidade das autofunções obtidas. Por fim, apresentamos resultados que validam o estudo das soluções obtidas para os fluxos rápido e térmico, bem como a solução obtida para a concentração de precursores de nêutrons atrasados, quando consideramos  $G = 2$  e  $I = 1$ .

Nos capítulos 2 e 3 desta tese, vemos que as autofunções que definem o perfil radial para o problema em geometria cilíndrica são as funções de Bessel, as quais tem seu espectro associado não equidistante. Além disso, a característica geométrica do perfil cilíndrico, para um raio muito grande ( $R \gg 0$ ), se aproxima

de um perfil cartesiano. Em princípio, podemos expandir qualquer solução em uma base ortonormal completa, e por essa razão, esse tipo de problema ainda nos motiva a determinação de uma representação analítica para o problema de cinética de difusão de nêutrons multigrupo em geometria cilíndrica pelo uso da solução do mesmo problema em geometria cartesiana.

Para atingirmos o objetivo proposto, organizamos o trabalho da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos a solução para o problema de cinética de difusão de nêutrons monoenergéticos com um grupo de concentração de nêutrons atrasados pelo método de separação de variáveis, tanto para um modelo homogêneo quanto para um modelo com duas células homogêneas; no capítulo 3 solucionamos o mesmo problema considerando um modelo multigrupo ( $G$  grupos de energia) com  $I$  grupos de precursores de nêutrons atrasados. Em todos capítulos apresentamos resultados numéricos que validam as soluções obtidas. Por fim, apresentamos no capítulo 5 as considerações finais e perspectivas futuras.

## 2 SOLUÇÃO ANALÍTICA EM GEOMETRIA CARTESIANA E CILÍNDRICA (CASO MONOENERGÉTICO)

Neste capítulo determinamos a solução do sistema de equações diferenciais parciais que modelam o problema de cinética de difusão de nêutrons em geometria cartesiana e cilíndrica. Supomos um meio homogêneo, monoenergético com um grupo de concentração de precursores de nêutrons atrasados.

Considerando os fenômenos usuais de difusão de nêutrons tais como: absorção, fissão e nêutrons atrasados, onde  $D_{dif}$  é o coeficiente de difusão, o sistema de equações diferenciais que modela este problema é

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) &= D_{dif} \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) + \lambda C(\vec{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} C(\vec{r}, t) &= -\lambda C(\vec{r}, t) + \beta \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde o operador  $\nabla^2[\cdot]$  é o operador Laplaciano que iremos tratar tanto para o caso cartesiano quanto para o caso cilíndrico,  $\phi(\vec{r}, t)$  é o fluxo escalar de nêutrons na posição  $\vec{r}$  no instante  $t$  e  $C(\vec{r}, t)$  é a concentração de precursores de nêutrons atrasados na posição  $\vec{r}$  no instante  $t$ . As condições iniciais são dadas em ambos os casos por

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, 0) &= \phi_0(\vec{r}) \\ C(\vec{r}, 0) &= \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\lambda} \phi_0(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

e em todas as equações envolvidas,  $v$  é a velocidade de nêutrons,  $\Sigma_a$  é a seção de choque macroscópica de absorção,  $\beta$  é fração de nêutrons atrasados e  $\lambda$  é a constante de decaimento. Também temos em  $\nu \Sigma_f$  o produto da seção de choque macroscópica de fissão pelo número médio de nêutrons emitidos na fissão.

## 2.1 Separação de Variáveis

Nesta seção apresentaremos o método de separação de variáveis, ferramenta matemática que aplicamos, nesta tese, para resolvermos o problema proposto. Devemos lembrar que estamos interessados na determinação de funções não triviais  $\phi(\vec{r}, t)$  e  $C(\vec{r}, t)$  que satisfaçam o sistema (2.1), ou seja estamos excluindo a solução em que  $\phi(\vec{r}, t) \equiv 0$  e  $C(\vec{r}, t) \equiv 0$  (observe que elas satisfazem o problema). Definiremos o **par solução** de (2.1) sujeito às condições iniciais (2.2), ou simplesmente, a **solução** de (2.1) se há duas funções  $\phi(\vec{r}, t)$  e  $C(\vec{r}, t)$  não ambas nulas que satisfaz (2.1)-(2.2). Denotaremos o par solução por  $(\phi(\vec{r}, t); C(\vec{r}, t))$ .

Antes de aplicar o método reescrevemos (2.1), alternando as constantes que expressam os parâmetros nucleares para facilitar a notação

$$\begin{aligned} A &= vD_{dif}; & B &= v[(1 - \beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a]; & D &= v\lambda; \\ E &= \beta\nu\Sigma_f; & H &= -\lambda; & P &= -\frac{E}{H}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ou seja, escrevemos o problema (2.1)-(2.2) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r}, t) &= A\nabla^2\phi(\vec{r}, t) + B\phi(\vec{r}, t) + DC(\vec{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t}C(\vec{r}, t) &= E\phi(\vec{r}, t) + HC(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

com as mesmas condições iniciais

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, 0) &= \phi_0(\vec{r}) \\ C(\vec{r}, 0) &= P\phi_0(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para aplicarmos o método de separação de variáveis, supomos, para cada ponto  $\vec{r}$  no domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , que existem funções  $F_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\phi(\vec{r}, t)$  e  $C(\vec{r}, t)$  possam ser expressos como

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= F_1(\vec{r})G_1(t), \\ C(\vec{r}, t) &= F_2(\vec{r})G_2(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Substituindo as expressões (2.6) em (2.4) obtemos:

$$F_1(\vec{r}) \frac{d}{dt} G_1(t) = G_1(t) [A \nabla^2 F_1(\vec{r}) + B F_1(\vec{r})] + D F_2(\vec{r}) G_2 \quad (2.7)$$

$$F_2(\vec{r}) \frac{d}{dt} G_2(t) = E F_1(\vec{r}) G_1(t) + H F_2(\vec{r}) G_2(t) \quad (2.8)$$

em (2.8) dividimos a equação por  $F_2 G_1$

$$\frac{\frac{d}{dt} G_2}{G_1} = E \frac{F_1}{F_2} + H \frac{G_2}{G_1} \quad (2.9)$$

como  $x$  e  $t$  são variáveis independentes e a primeira parcela da equação (2.9) só depende de  $\vec{r}$ , temos

$$\frac{\frac{d}{dt} G_2 - H G_2}{G_1} = \sigma_1 = E \frac{F_1}{F_2} \quad (2.10)$$

onde  $\sigma_1$  é uma constante de separabilidade, pois o parâmetro  $\sigma_1$  independe de  $\vec{r}$  (o extremo esquerdo de (2.10) não depende de  $\vec{r}$ ) e  $t$  (o extremo direito de (2.10) não depende de  $t$ ). De (2.10) temos duas relações

$$F_2(\vec{r}) = \frac{E}{\sigma_1} F_1(\vec{r}) \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} G_2(t) = \sigma_1 G_1(t) + H G_2(t). \quad (2.12)$$

No próximo passo substituímos a relação (2.11) na equação (2.7) e dividimos toda a equação por  $F_1 G_1$ . Com este processo obtemos:

$$\frac{\frac{d}{dt} G_1}{G_1} = \frac{A \nabla^2 F_1 + B F_1}{F_1} + \frac{D E}{\sigma_1} \frac{G_2}{G_1} \quad (2.13)$$

novamente, como a primeira parcela só depende de  $\vec{r}$  e a segunda parcela só depende de  $t$ , temos

$$\frac{\frac{d}{dt} G_1 - \frac{D E}{\sigma_1} G_2}{G_1} = \sigma_2 = \frac{A \nabla^2 F_1 + B F_1}{F_1} \quad (2.14)$$

onde  $\sigma_2$  é a constante de separabilidade. Com os procedimentos descritos acima, temos as relações:

$$\nabla^2 F_1(\vec{r}) + \frac{B - \sigma_2}{A} F_1(\vec{r}) = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} G_1(t) = \sigma_2 G_1(t) + \frac{D E}{\sigma_1} G_2(t). \quad (2.16)$$

O foco de análise nesse momento é determinarmos soluções para as equações (2.11)-(2.12)-(2.15)-(2.16), além de estudarmos os possíveis valores que as constantes envolvidas  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  possam assumir. Nas próximas duas seções trataremos da solução das equações (2.11) e (2.15) que dependem apenas das variáveis espaciais tanto para o caso cilíndrico e cartesiano. Em um terceiro momento trataremos das equações (2.12) e (2.16) que dependem apenas da variável temporal.

## 2.2 Resolução do problema espacial em geometria cilíndrica

Nesta subseção apresentamos uma solução analítica fechada para o problema tridimensional em coordenadas cilíndricas que servirá de apoio para comparações futuras. Para isso, consideremos as seguintes condições de fronteira para cada variável espacial envolvida do vetor posição  $\vec{r} = (r, \theta, z) \in \Omega_{cil} = (0, R] \times (-\infty, +\infty) \times [0, Z] \subset \mathbb{R}^3$  para que o problema esteja bem posto. São elas

- Condições de contorno sobre a variável espacial radial  $r$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, \theta, z, t) = 0 \quad (2.17)$$

$$\phi(R, \theta, z, t) = 0 \quad (2.18)$$

para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq z \leq Z$  e  $t > 0$ ;

- Condições de contorno periódicas sobre a variável angular  $\theta$

$$\phi(r, \theta, z, t) = \phi(r, \theta + 2\pi, z, t) \quad (2.19)$$

para todo  $0 < r \leq R$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq z \leq Z$  e  $t > 0$ ;

- Condições de contorno sobre a variável azimutal  $z$

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(r, \theta, 0, t) = 0 \quad (2.20)$$

$$\phi(r, \theta, Z, t) = 0 \quad (2.21)$$

para todo  $0 < r \leq R$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ .

A condição de contorno apresentada na equação (2.20) é devido ao fato que o problema admite uma simetria azimutal, ou seja:

**Afirmção 2.1.** *Para o caso cilíndrico, o sistema de equações descrito em (2.1) é simétrico com respeito ao eixo azimutal.*

**Dem.: 1.** *A demonstração é feita considerando a componente azimutal do operador Laplaciano. Logo, sejam os pontos do domínio tais que  $\tilde{z} = -z < 0$ , então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \frac{d\tilde{z}}{dz} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \right) = - \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \right) \frac{d\tilde{z}}{dz} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \phi(r, \theta, \tilde{z}, t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

isso implica um sistema similar ao dado em (2.1) mesmo para valores negativos de  $z$ .

Usando as condições de contorno descritas vamos determinar uma solução para a equação diferencial dada em (2.15), sob a análise da mesma técnica (Separação de Variáveis). Escrevendo na equação (2.15) o Laplaciano em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} F_1(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} F_1(r, \theta, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1(r, \theta, z) + \\ &+ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) F_1(r, \theta, z) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Seguindo, supomos que existem funções  $\tilde{F}_1 : (0, R] \times (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : [0, Z] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $F_1(r, \theta, z)$  possa ser expressa como

$$F_1(r, \theta, z) = \tilde{F}_1(r, \theta) h(z) \quad (2.24)$$

Reorganizando a equação (2.15), temos

$$0 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{F}_1(r, \theta) \right] h(z) + \tilde{F}_1(r, \theta) \left[ \frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) h(z) \right] \quad (2.25)$$

ou

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= - \frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{F}_1(r, \theta)}{\tilde{F}_1(r, \theta)} = \\ &= \frac{\frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) h(z)}{h(z)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde  $\sigma_3$  é a constante de separabilidade. Com isso, temos mais duas equações diferenciais

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}_1(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tilde{F}_1(r, \theta) + \sigma_3 \tilde{F}_1(r, \theta) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left[ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) - \sigma_3 \right] h(z) = 0 \quad (2.28)$$

Seguindo com a separação de variáveis, aplicamos a técnica sobre a equação (2.27) supondo que a função  $\tilde{F}_1(r, \theta)$  possa ser expressa como

$$\tilde{F}_1(r, \theta) = f(r)g(\theta) \quad (2.29)$$

assim, ao substituir a relação (2.29) em (2.27), teremos

$$0 = r^2 \left[ \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) + \sigma_3 f(r) \right] g(\theta) + \frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) f(r) \quad (2.30)$$

assim

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \frac{r^2 \left[ \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) + \sigma_3 f(r) \right]}{f(r)} = \\ &= - \frac{\frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta)}{g(\theta)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde  $\sigma_4$  é a constante de separabilidade. Isso implica a obtenção das duas últimas equações a serem solucionadas para esse caso

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) + (\sigma_3 r^2 - \sigma_4) f(r) = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) + \sigma_4 g(\theta) = 0 \quad (2.33)$$

A partir desse momento, o objetivo principal é determinar as soluções para as equações (2.26) relacionadas à variável azimutal, (2.32) relacionadas à variável radial e (2.33) relacionadas à variável angular. Para solucionar esse problema, devemos caracterizar as condições de contorno para essas equações de acordo com a seguinte afirmação

**Afirmção 2.2.** *Sob as condições de contorno dadas em (2.2), temos que*

- $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0$  e  $f(R) = 0$ ;
- $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ;
- $\frac{d}{dz} h(0) = 0$  e  $h(Z) = 0$ .

**Dem.: 2.** *Mostraremos item por item*

- *Para demonstrar a afirmação do segundo item, basta usar a equação (2.19). De  $\phi(r, \theta, z, t) = \phi(r, \theta + 2\pi, z, t)$ , para todo  $(\vec{r}, t) \in \Omega_{cil} \times (0, +\infty)$ , temos*

$$\begin{aligned} f(r)g(\theta)h(z)G_1(t) &= f(r)g(\theta + 2\pi)h(z)G_1(t) \Leftrightarrow \\ f(r)h(z)G_1(t)[g(\theta) - g(\theta + 2\pi)] &= 0 \Leftrightarrow \\ f(r)h(z)G_1(t) &= 0 \text{ ou } g(\theta) - g(\theta + 2\pi) = 0 \end{aligned}$$

*Mas observe que se  $f(r)h(z)G_1(t) = 0$  para todo  $0 < r \leq R$ ,  $0 \leq z \leq Z$  e  $t > 0$  implicaria*

$$\phi(\vec{r}, t) = F_1(\vec{r})G_1(t) = f(r)g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$$

*Ainda mais, se  $f(r) = 0$  ou  $h(z) = 0$ , implicaria*

$$\begin{aligned} F_1(\vec{r}) &= \tilde{F}_1(r, \theta)h(z) = f(r)g(\theta)h(z) = 0 \Rightarrow F_2(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \\ C(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

ou, se  $G_1(t) = 0$  implicaria, por (2.16), que  $G_2(t) = 0$ , ou seja  $C(\vec{r}, t) = 0$ . Logo, temos que  $f(r)h(z)G_1(t) \neq 0$ , o que nos mostra ser válido  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .

- Para mostrar o primeiro item, usamos a relação (2.18). Então de  $\phi(R, \theta, z, t) = 0$ , temos  $f(R)g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq z \leq Z$  e  $t > 0$ . Isso implica

$$f(R) = 0 \text{ ou } g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$$

Porém, se  $g(\theta)h(z)G_1(t) = 0$ , teríamos o par solução trivial. Isso é justificado, pois já sabemos que  $G_1(t) \neq 0$  e  $h(z) \neq 0$ , pelo item anterior, e se  $g(\theta) = 0$ , teríamos  $F_1(\vec{r}) = 0$ , o que implicaria  $F_2(\vec{r}) = 0$  (par solução trivial). Logo,  $f(R) = 0$ .

Por outro lado, de (2.17)

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, \theta, z, t) = g(\theta)h(z)G_1(t) \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) \Rightarrow \\ 0 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) \end{aligned}$$

Portanto  $f(R) = 0$  e  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = 0$  para todo  $0 < r \leq R$ .

- Para o terceiro item, temos das relações (2.20) e (2.21) que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \phi(r, \theta, 0, t) = f(r)g(\theta) \frac{d}{dz} h(0)G_1(t) \Rightarrow \frac{d}{dz} h(0) = 0 \\ 0 &= \phi(r, \theta, Z, t) = f(r)g(\theta)h(Z)G_1(t) \Rightarrow h(Z) = 0 \end{aligned}$$

pois já observamos que  $f(r) = 0$ , ou  $g(\theta) = 0$ , ou  $G_1(t) = 0$  não vale para todo  $0 < r \leq R$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ .

Isso conclui o resultado.

Nesse momento, temos todas as suposições para determinar a solução para o problema. Assim, vamos procurar os autovalores associados a cada um dos problemas estudados. Os três casos possíveis são

- $\sigma_4 = -\xi_4^2 < 0$

Supondo  $\sigma_4 < 0$ , teríamos para a equação (2.33) a solução geral

$$g(\theta) = c_1 \exp(\xi_4 \theta) + c_2 \exp(-\xi_4 \theta)$$

Mas ao aplicar a condição  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ , teríamos:

$$\begin{aligned} c_1 \exp(\xi_4 \theta) + c_2 \exp(-\xi_4 \theta) &= c_1 \exp(\xi_4(\theta + 2\pi)) + c_2 \exp(-\xi_4(\theta + 2\pi)) \Rightarrow \\ \exp(\xi_4 \theta) [c_1 - c_1 \exp 2\pi \xi_4] + \exp(-\xi_4 \theta) [c_2 - c_2 \exp -2\pi \xi_4] &= 0 \end{aligned}$$

Como o conjunto de funções de  $\theta$   $\{\exp(\xi_4 \theta); \exp(-\xi_4 \theta)\}$  é linearmente independente, temos

$$c_1 (1 - \exp(2\pi \xi_4 \theta)) = 0 \text{ e } c_2 (1 - \exp(-2\pi \xi_4 \theta)) = 0$$

O que implica  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ , pois  $\xi_4 \neq 0$ . Portanto, podemos desconsiderar esse caso.

- $\sigma_4 = 0$

Por (2.33), temos como solução geral

$$g(\theta) = c_1 + c_2 \theta$$

Quando aplicamos a condição  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ , temos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \theta &= c_1 + c_2 (\theta + 2\pi) \Rightarrow \\ 0 &= 2\pi c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

o que implica  $g(\theta) = c_1$ . Com isso, a equação (2.32) se torna

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) + (\sigma_3 r^2) f(r) = 0 \quad (2.34)$$

Dentro da análise do valor de  $\sigma_4 = 0$ , analisaremos o valor de  $\sigma_3$

$$- \sigma_3 = -\xi_3^2 < 0$$

Isso implica que a equação (2.34) é a equação modificada de Bessel de ordem zero, na qual tem como solução geral a expressão

$$f(r) = c_3 I_0(\xi_3 r) + c_4 K_0(\xi_3 r)$$

onde  $I_0$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem 0, e  $K_0$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem 0. Aplicando as condições de contorno temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\{ c_3 \frac{d}{dr} I_0(\xi_3 r) + c_4 \frac{d}{dr} K_0(\xi_3 r) \right\} \\ &\Leftrightarrow c_4 = 0, \text{ pois } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} K_0(r) = -\infty \end{aligned}$$

Por outro lado,  $0 = f(R) = c_3 I_0(\xi_3 R)$ , o que implica  $c_3 = 0$ , pois,  $I_0(r) \neq 0$  para todo  $r \in \mathbb{R}$ . Isso nos resultaria na solução trivial, portanto, podemos desconsiderar esse caso.

$$- \sigma_3 = 0$$

A equação (2.34) para essa suposição é a equação de Cauchy-Euler, na qual a solução geral é dada por:

$$f(r) = c_3 + c_4 \ln r$$

Aplicando as condições de fronteira, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} \{c_3 + c_4 \ln r\} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{c_4}{r} \\ &\Leftrightarrow c_4 = 0 \end{aligned}$$

Pela outra condição  $0 = f(R) = c_3$ , ou seja, a solução trivial. Esse caso também deve ser desconsiderado.

$$- \sigma_3 = \xi_3^2 > 0$$

Com essa suposição a equação (2.34) é a equação paramétrica de Bessel de ordem 0, na qual sua solução geral é expressa por

$$f(r) = c_3 J_0(\xi_3 r) + c_4 Y_0(\xi_3 r)$$

onde  $J_0$  representa a função de Bessel de primeira espécie de ordem 0, e  $Y_0$  é a função de Bessel de segunda espécie de ordem 0. Ao aplicarmos a condição de contorno radial, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} c_3 \frac{d}{dr} J_0(\xi_3 r) + c_4 \frac{d}{dr} Y_0(\xi_3 r) \\ &\Leftrightarrow c_4 = 0, \text{ pois } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} Y_0(r) = \infty \end{aligned}$$

Por outro lado,  $0 = f(R) = c_3 J_0(\xi_3 R)$ , o que implica  $\xi_3 R = \alpha_n$  onde  $J_0(\alpha_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim determinamos os autovalores

$$\xi_{3,n} = \frac{\alpha_n}{R} \quad (2.35)$$

e as autofunções  $f_n(r) = c_{3,n} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$  que fazem parte da solução do problema. Caracterizamos

$$\tilde{F}_{1,n}^{(\theta)}(r, \theta) = a_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right), \text{ onde } a_n = c_1 c_{3,n} \quad (2.36)$$

como as funções que satisfazem o problema da equação (2.27), considerando  $\sigma_4 = 0$  para cada  $\sigma_{3,n} = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2$ .

Para esse fato, atentamos para a  $n$ -ésima equação em (2.28)

$$\frac{d^2}{dz^2} h_n(z) + \left[ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) - \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2 \right] h_n(z) = 0 \quad (2.37)$$

Com isso, analisaremos mais três casos

1.  $\frac{B - \sigma_2}{A} - \left( \frac{\alpha_n}{R} \right)^2 = -\xi_{2,n}^2 < 0$

A solução geral para (2.37) é dada por

$$h_n(z) = c_5 \exp(\xi_{2,n} z) + c_6 \exp(-\xi_{2,n} z)$$

Aplicando as condições de contorno para a variável azimutal, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} h_n(0) = c_5 \xi_{2,n} - c_6 \xi_{2,n} = \xi_{2,n} (c_5 - c_6) \\ &\Rightarrow c_5 = c_6 \text{ pois } \xi_{2,n} \neq 0 \end{aligned}$$

Pela outra condição, temos

$$h_n(Z) = 0 \Rightarrow 0 = c_5 (\exp(\xi_{2,n}Z) + \exp(-\xi_{2,n}Z))$$

o que implica  $c_5 = 0 = c_6$ , logo desconsideramos esse caso

$$2. \frac{B - \sigma_2}{A} - \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 = 0$$

A solução geral é

$$h_n(z) = c_5 + c_6 z$$

com as condições de contorno, temos  $0 = \frac{d}{dz}h_n(0) = c_6$  e  $h_n(Z) = 0 = c_5$  o que nos dá a solução trivial. Portanto, atentaremos para o último caso

$$3. \frac{B - \sigma_2}{A} - \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 = \xi_{2,n}^2 > 0$$

A solução geral para (2.37) é dada por

$$h_n(z) = c_5 \cos(\xi_{2,n}z) + c_6 \sin(\xi_{2,n}z)$$

Assim, obtemos

$$\frac{d}{dz}h_n(0) = 0 = c_6 \xi_{2,n} \Rightarrow c_6 = 0$$

Logo,

$$h_n(Z) = 0 = c_5 \cos(\xi_{2,n}Z) \Rightarrow \xi_{2,n}Z = \frac{2k-1}{2}\pi$$

pois, se  $c_5 = 0$ , teríamos a solução trivial, isso implica

$$\begin{aligned} \xi_{2,n,k} &= \frac{2k-1}{2Z}\pi, \quad k = 1, 2, \dots \text{ e} \\ \sigma_{2,n,k} &= B - A \left[ \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2Z}\pi\right)^2 \right] \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos uma solução para as funções dependentes das variáveis espaciais

$$F_{1,n,k}(r, \theta, z) = b_{n,k} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}\right) \cos\left(\frac{2k-1}{2Z}\pi z\right) \quad (2.38)$$

$$F_{2,n,k}(r, \theta, z) = \frac{E}{\sigma_1} b_{n,k} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}\right) \cos\left(\frac{2k-1}{2Z}\pi z\right) \quad (2.39)$$

onde  $b_{n,k} = a_n c_{5,k}$ . Esse estudo de casos foi feito considerando  $\sigma_4 = 0$ , ainda falta analisar o último caso para  $\sigma_4 > 0$ .

- $\sigma_4 = \xi_4^2 > 0$

Pela equação (2.33), temos como solução geral

$$g(\theta) = c_1 \cos(\xi_4 \theta) + c_2 \sin(\xi_4 \theta)$$

Aplicando a condição de contorno para a variável angular  $\theta$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \cos(\xi_4 \theta) + c_2 \sin(\xi_4 \theta) - c_1 \cos(\xi_4 \theta + 2\pi \xi_4) + \\ &+ c_2 \sin(\xi_4 \theta + 2\pi \xi_4) \\ &= \cos(\xi_4 \theta) [c_1 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) - c_2 \sin(2\pi \xi_4)] + \\ &+ \sin(\xi_4 \theta) [c_2 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) - c_1 \sin(2\pi \xi_4)] \end{aligned}$$

O que implica pelo fato de o conjunto  $\{\cos(\xi_4 \theta); \sin(\xi_4 \theta)\}$  ser um conjunto linearmente independente

$$0 = c_1 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) - c_2 \sin(2\pi \xi_4) \quad (2.40)$$

$$0 = c_1 \sin(2\pi \xi_4) + c_2 (1 - \cos(2\pi \xi_4)) \quad (2.41)$$

Para não obter a solução  $c_1 = c_2 = 0$ , deve ser válido

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \cos(2\pi \xi_4))^2 + \sin^2(2\pi \xi_4) \\ &\Leftrightarrow \cos(2\pi \xi_4) = 1 \Leftrightarrow 2\pi \xi_4 = 2\pi l, \quad l = 1, 2, \dots \\ &\Rightarrow \xi_{4,l} = l \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim:

$$g^{(l)}(\theta) = c_{1,l} \cos(l\theta) + c_{2,l} \sin(l\theta), \quad \text{com } \sigma_{4,l} = l^2 \quad (2.43)$$

Logo, a equação (2.32) é escrita (em termos do parâmetro  $l$ )

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f^{(l)}(r) + r \frac{d}{dr} f^{(l)}(r) + (\sigma_{3,l} r^2 - l^2) f^{(l)}(r) = 0 \quad (2.44)$$

por essa última abordagem analisaremos o sinal de  $\sigma_{3,l}$ :

$$1. \sigma_{3,l} = -\xi_{3,l}^2 < 0$$

A equação (2.44), conhecida como a equação modificada de Bessel de parâmetro  $l$ , tem a solução geral dada por

$$f^{(l)}(r) = c_7 I_l(\xi_{3,l} r) + c_8 K_l(\xi_{3,l} r) \quad (2.45)$$

onde  $I_l$  é a função modificada de primeira espécie de Bessel de ordem  $l$ , e  $K_l$  é a função modificada de segunda espécie de Bessel de ordem  $l$ . Aplicando as condições de contorno, temos a solução trivial  $c_7 = 0 = c_8$  pelas propriedades destas funções

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} K_l(r) = -\infty, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

$$I_l(\xi_{3,l} R) \neq 0, \quad R > 0 \text{ e } l = 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

$$2. \sigma_{3,l} = 0$$

Com essa condição, (2.44) é a equação paramétrica de Cauchy-Euler de ordem  $l$ , na qual a solução geral é dada por

$$f^{(l)}(r) = c_7 r^l + c_8 r^{-l} \quad (2.48)$$

o que resulta, ao aplicar as condições de contorno radial,  $c_7 = 0 = c_8$ , assim:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} -l r^{-(l+1)} = -\infty, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

$$R^l \neq 0, \quad R > 0 \text{ e } l = 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

Com isso, temos o último caso a analisar

$$3. \sigma_{3,l} = \xi_{3,l}^2 > 0$$

Diante disso, (2.44) é a equação paramétrica de Bessel de ordem  $l$ , que tem como solução geral

$$f^{(l)}(r) = c_{7,l} J_l(\xi_{3,l} r) + c_{8,l} Y_l(\xi_{3,l} r) \quad (2.51)$$

onde  $J_l$  é a função de primeira espécie de Bessel de ordem  $l$ , e  $Y_l$  é a função de segunda espécie de Bessel de ordem  $l$ . Como

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} Y_l(r) = \infty \quad (2.52)$$

temos  $c_8 = 0$ , ainda  $f^{(l)}(R) = c_{7,l} J_l(\xi_{3,l} R) = 0$  implica

$$\xi_{3,l} = \frac{\alpha_{n,l}}{R}, \text{ onde } J_l(\alpha_{n,l}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.53)$$

Dessa forma, estamos caracterizando uma nova classe de funções que são soluções para nosso problema. As equações para a variável azimutal são analisadas analogamente ao caso anterior, sendo válido que

$$-\frac{B - \sigma_{2,n,l}}{A} - \left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}\right)^2 = \xi_{2,n,l}^2 > 0$$

O que implica

$$h^{(n,k,l)}(z) = c_{9,k} \cos(\xi_{2,n,k,l} z), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

com  $\xi_{2,n,k,l} = \frac{(2k-1)\pi}{2Z}$ . Para essa classe de soluções, determinamos os valores para  $\sigma_{2,n,k,l}$

$$\sigma_{2,n,k,l} = B - A \left[ \left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}\right)^2 + \left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}\right)^2 \right] \quad (2.55)$$

Por fim, para essa classe de soluções, obtemos

$$F_1^{(n,k,l)}(r, \theta, z) = b_{n,k,l} J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R} r\right) (c_{1,l} \sin(l\theta) + c_{2,l} \cos(l\theta)) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \quad (2.56)$$

$$F_2^{(n,k,l)}(r, \theta, z) = \frac{E}{\sigma_1} F_1^{(n,k,l)}(r, \theta, z) \quad (2.57)$$

onde  $b_{n,k,l}$ ,  $c_{1,l}$  e  $c_{2,l}$  são constantes arbitrárias.

## 2.3 Resolução do problema de autovalores espaciais em geometria cartesiana

Nesta seção apresentamos uma solução analítica fechada para o problema tridimensional no caso cartesiano.

As condições de contorno impostas foram motivadas pelo fato de que o sistema de equações que modela o problema é simétrico com respeito aos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$  (ver afirmação (2.1)).

As condições de fronteira para cada variável espacial envolvida do vetor posição  $\vec{r} = (x, y, z) \in \Omega_{\text{car}} = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z] \subseteq \mathbb{R}^3$  para todo  $t > 0$  são

- Condições de contorno sobre a variável espacial  $x$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \phi(0, y, z, t) = 0 \\ \phi(X, y, z, t) = 0 \end{array} \right\} \forall (y, z) \in [0, Y] \times [0, Z] \quad (2.58)$$

- Condições de contorno sobre a variável espacial  $y$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, 0, z, t) = 0 \\ \phi(x, Y, z, t) = 0 \end{array} \right\} \forall (x, z) \in [0, X] \times [0, Z] \quad (2.59)$$

- Condições de contorno sobre a variável espacial  $z$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, 0, t) = 0 \\ \phi(x, y, Z, t) = 0 \end{array} \right\} \forall (x, y) \in [0, X] \times [0, Y] \quad (2.60)$$

A definição do operador de Laplace para geometria cartesiana permite escrever (2.15) como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_1(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_1(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1(x, y, z) + \\ &+ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) F_1(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Seguindo com a mesma técnica, vamos supor que existem funções  $\tilde{F}_1 : [0, X] \times [0, Y] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : [0, Z] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $F_1(x, y, z)$  possa ser expressa como

$$F_1(x, y, z) = \tilde{F}_1(x, y) h(z) \quad (2.62)$$

Reorganizando a equação (2.15), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{F}_1(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{F}_1(x, y) \right] h(z) + \tilde{F}_1(x, y) \left[ \frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) h(z) \right] \\ \Rightarrow \sigma_3 &= - \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{F}_1(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{F}_1(x, y)}{\tilde{F}_1(x, y)} = \frac{\frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) h(z)}{h(z)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde  $\sigma_3$  independe de  $(x, y)$  e  $z$ . Portanto, caracterizamos duas equações

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{F}_1(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{F}_1(x, y) + \sigma_3 \tilde{F}_1(x, y) = 0 \quad (2.64)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} h(z) + \left[ \left( \frac{B - \sigma_2}{A} \right) - \sigma_3 \right] h(z) = 0 \quad (2.65)$$

Continuando a análise sobre a equação (2.64), supomos que  $\tilde{F}_1(x, y)$  possa ser separável como produto de duas funções

$$\tilde{F}_1(x, y) = f(x)g(y) \quad (2.66)$$

Ao substituir essa relação em (2.64), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \sigma_3 f(x) \right] g(y) + f(x) \left[ \frac{d^2}{dy^2} g(y) \right] \\ \Rightarrow \sigma_4 &= \frac{\frac{d^2}{dx^2} f(x) + \sigma_3 f(x)}{f(x)} = - \frac{\frac{d^2}{dy^2} g(y)}{g(y)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

aqui  $\sigma_4$  independe de  $x$  e  $y$ . Com isso, apresentamos as duas últimas equações para esse caso

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) + [\sigma_3 - \sigma_4] f(x) = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} g(y) + \sigma_4 g(y) = 0 \quad (2.69)$$

Como feito para o caso cilíndrico, podemos obter as condições de contorno para as equações (2.65), (2.68) e (2.69).

**Afirmção 2.3.** *Sob às condições de contorno dadas em (2.58), (2.59) e (2.60), temos que*

- $\frac{d}{dx}f(0) = 0$  e  $f(X) = 0$ ;
- $\frac{d}{dy}g(0) = 0$  e  $g(Y) = 0$ ;
- $\frac{d}{dz}h(0) = 0$  e  $h(Z) = 0$ .

A justificativa para essa afirmação pode ser dada por meio de uma adaptação da demonstração do terceiro item da afirmação (2.1). Com todas as hipóteses para solucionar o problema podemos adaptar o que foi visto para a análise das constantes  $\sigma_4$ ,  $\sigma_3$  e  $\sigma_2$  no caso anterior. Logo, para a equação (2.60), com condições dadas em (2.3), o único valor possível de  $\sigma_4$  para determinar soluções não triviais é  $\sigma_4 = \xi_4^2 > 0$ , no qual obtemos as autofunções

$$g^{(l)}(y) = c_{1,l} \cos(\xi_{4,l}y) \quad (2.70)$$

onde  $c_{1,l}$  são constantes arbitrárias e  $\xi_{4,l} = \frac{(2l-1)\pi}{2Y}$  são autovalores associados com  $l = 1, 2, \dots$ .

Seguindo com o mesmo raciocínio, as soluções não triviais para as (novas) equações em (2.68) são as autofunções

$$g^{(n,l)}(x) = c_{2,n,l} \cos(\xi_{3,n,l}x) \quad (2.71)$$

onde  $c_{2,n,l}$  são constantes arbitrárias e  $\xi_{3,n,l} = \frac{(2n-1)\pi}{2X}$  são autovalores associados com  $n = 1, 2, \dots$ . As equações em (2.68) só têm soluções não triviais se  $\sigma_{3,l} - \sigma_{4,l} = \xi_{3,l}^2 > 0$ , diante dessa relação, obtemos uma expressão para  $\sigma_{3,n,l}$

$$\sigma_{3,n,l} = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2X}\right)^2 + \left(\frac{(2l-1)\pi}{2Y}\right)^2 \quad (2.72)$$

Para finalizar essa análise, as soluções não triviais para as equações em (2.65) só existem se  $\left(\frac{B - \sigma_{2,n,l}}{A} - \sigma_{3,n,l}\right) = \xi_{2,n,l}^2 > 0$  e são dadas por

$$h^{(n,k,l)}(z) = c_{3,n,k,l} \cos(\xi_{2,n,k,l}z) \quad (2.73)$$

onde  $c_{3,n,k,l}$  são constantes arbitrárias, e  $\xi_{2,n,k,l} = \frac{(2k-1)\pi}{2Z}$  são autovalores com  $k = 1, 2, \dots$ . Portanto os valores de  $\sigma_{2,n,k,l}$  são dados por

$$\sigma_{2,n,k,l} = B - A \left[ \left( \frac{(2n-1)\pi}{2X} \right)^2 + \left( \frac{(2l-1)\pi}{2Y} \right)^2 + \left( \frac{(2k-1)\pi}{2Z} \right)^2 \right] \quad (2.74)$$

Por conseguinte, de acordo com as equações (2.11), (2.66) e (2.62) podemos caracterizar somente uma classe de soluções

$$F_1^{(n,k,l)}(x, y, z) = b_{n,k,l} \cos \left( \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right) \cos \left( \frac{(2l-1)\pi}{2Y} y \right) \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2Z} z \right) \quad (2.75)$$

$$F_2^{(n,k,l)}(x, y, z) = \frac{E}{\sigma_1} F_1^{(n,k,l)}(x, y, z) \quad (2.76)$$

com  $b_{n,k,l} = c_{1,l}c_{2,n,l}c_{3,n,k,l}$  constantes arbitrárias.

## 2.4 Solução para a variável temporal

Em toda abordagem feita até aqui podemos caracterizar duas classes de soluções para o caso cilíndrico ( $\sigma_4 = 0$  e  $\sigma_4 > 0$ ), e uma classe de soluções para o caso cartesiano. Nesses dois casos determinamos autofunções para as variáveis espaciais e valores para sequência  $\sigma_{2,n,k,l}$ . Diante disso, podemos explorar as equações (2.12) e (2.16) que envolvem as funções temporais dos problema.

Na forma matricial as equações (2.12) e (2.16) são expressas por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_2 & \frac{DE}{\sigma_1} \\ \sigma_1 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Para continuar a análise sobre a solução com respeito às funções da variável temporal, apresentaremos a seguinte afirmação:

**Afirmção 2.4.** *Considerando que os parâmetros nucleares são todos positivos, então o discriminante da equação característica resultante da solução do problema*

(2.77) para ambas as funções  $G_1(t)$  e  $G_2(t)$  é sempre positivo, assim sendo essa equação característica apresenta duas raízes reais distintas.

**Dem.: 3.** Após aplicar o método da eliminação para resolver o problema (2.77), obtemos o seguinte operador diferencial de segunda ordem

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} - (H + \sigma_2) \frac{d}{dt} + \sigma_2 H - DE \right) [\cdot] \quad (2.78)$$

o qual obtemos a seguinte expressão para o discriminante da equação característica

$$\Delta_{dis} = -(H + \sigma_2)^2 - 4(\sigma_2 H - DE) = (H - \sigma_2)^2 + 4DE > 0 \quad (2.79)$$

Pois,  $D = v\lambda > 0$  e  $E = \beta\nu\Sigma_f > 0$ , dado que os parâmetros nucleares são todos positivos, e isso conclui o resultado.

Com essa afirmação, podemos garantir a existência da solução de funções exponenciais à variável temporal. Resolvendo analiticamente esse sistema pelo método da eliminação. Obtemos as funções temporais  $G_1(t)$  e  $G_2(t)$

$$G_1(t) = c_{10} \exp(\Lambda_1 t) + c_{11} \exp(\Lambda_2 t) \quad (2.80)$$

$$G_2(t) = \sigma_1 \left( \frac{c_{10} \exp(\Lambda_1 t)}{\Lambda_1 - H} + \frac{c_{11} \exp(\Lambda_2 t)}{\Lambda_2 - H} \right) \quad (2.81)$$

onde  $c_{10}$  e  $c_{11}$  são constantes arbitrárias, e  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são definidas como

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \left( H + \sigma_2 + \sqrt{(H + \sigma_2)^2 - 4(\sigma_2 H - DE)} \right) \quad (2.82)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \left( H + \sigma_2 - \sqrt{(H + \sigma_2)^2 - 4(\sigma_2 H - DE)} \right) \quad (2.83)$$

Observamos que a solução obtida para a função temporal  $G_2(t)$  em (2.81) evidencia a constante  $\sigma_1$ , a qual deveríamos estudar seus possíveis valores.

Entretanto como vimos anteriormente, a equação (2.11), que relaciona as funções das variáveis espaciais, apresenta um coeficiente fracionário com denominador dado por  $\sigma_1$ . Logo, pela definição de  $C(\vec{r}, t) = F_2(\vec{r}) G_2(t)$  e pelas expressões encontradas para  $F_2(\vec{r})$  e  $G_2(t)$ , não precisamos estudar os possíveis valores dessa constante.

## 2.5 Soluções explícitas

Finalizaremos esse capítulo apresentando as soluções explícitas para os casos cilíndrico e cartesiano. A partir do que já foi abordado até o momento, nós podemos explicitar as soluções separando em casos as geometrias abordadas.

### 2.5.1 Solução explícita para o caso cilíndrico

Nesse caso, observamos uma subdivisão de classes de soluções, primeiramente, considerando  $\sigma_4 = 0$ , e, depois  $\sigma_4 > 0$ .

- $\sigma_4 = 0$

Nessa classe de soluções, temos pelas relações em (2.6) as sequências de pares soluções  $(\phi^{(n,k)}; C^{(n,k)})$

$$\phi^{(n,k)}(\vec{r}, t) = (d_{1,n,k} \exp(\Lambda_{1,n,k} t) + d_{2,n,k} \exp(\Lambda_{2,n,k} t)) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \quad (2.84)$$

$$C^{(n,k)}(\vec{r}, t) = E \left( \frac{d_{1,n,k} \exp(\Lambda_{1,n,k} t)}{\Lambda_{1,n,k} - H} + \frac{d_{2,n,k} \exp(\Lambda_{2,n,k} t)}{\Lambda_{2,n,k} - H} \right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \quad (2.85)$$

- $\sigma_4 > 0$

Para esse caso, temos pelas relações em (2.6), as sequências de pares soluções  $(\phi^{(n,k,l)}; C^{(n,k,l)})$

$$\begin{aligned} \phi^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) &= (d_{1,n,k,l} \exp(\Lambda_{1,n,k,l} t) + d_{2,n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)) J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) \\ &\quad (c_{1,l} \sin(l\theta) + c_{2,l} \cos(l\theta)) \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2Z} z \right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} C^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) &= E \left( \frac{d_{1,n,k,l} \exp(\Lambda_{1,n,k,l} t)}{\Lambda_{1,n,k,l} - H} + \frac{d_{2,n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)}{\Lambda_{2,n,k,l} - H} \right) J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) \\ &\quad (c_{1,l} \sin(l\theta) + c_{2,l} \cos(l\theta)) \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2Z} z \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Agora, observe que para essas duas classes de pares de soluções, deve valer

$$\phi^{(n,k)}(\vec{r}, 0) = \phi_0^{(n,k)}(\vec{r}) = (d_{1,n,k} + d_{2,n,k}) J_0 \left( \frac{\alpha_n}{R} r \right) \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2Z} z \right) \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(n,k,l)}(\vec{r}, 0) &= \phi_0^{(n,k,l)}(\vec{r}) = (d_{1,n,k,l} + d_{2,n,k,l}) J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) \\ &\quad (c_{1,l} \sin(l\theta) + c_{2,l} \cos(l\theta)) \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2Z} z \right) \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde  $d_{1,n,k}$ ,  $d_{2,n,k}$ ,  $d_{1,n,k,l}$  e  $d_{2,n,k,l}$  são constantes não ambas nulas. Ainda sabendo que

$$C^{(n,k)}(\vec{r}, 0) = P\phi^{(n,k)}(\vec{r}, 0) \quad (2.90)$$

$$C^{(n,k,l)}(\vec{r}, 0) = P\phi^{(n,k,l)}(\vec{r}, 0) \quad (2.91)$$

faremos a análise das condições iniciais apenas para (2.90), pois, para (2.91), é análogo

$$\begin{aligned} d_{2,n,k} \left[ \frac{E}{\Lambda_{2,n,k} - H} - P \right] &= d_{1,n,k} \left[ P - \frac{E}{\Lambda_{1,n,k} - H} \right] \Rightarrow \\ d_{2,n,k} &= \zeta_{n,k} d_{1,n,k} \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde

$$\zeta_{n,k} = \frac{P(\Lambda_{2,n,k} - H)(\Lambda_{1,n,k} - H) - E(\Lambda_{2,n,k} - H)}{E(\Lambda_{1,n,k} - H) - P(\Lambda_{2,n,k} - H)(\Lambda_{1,n,k} - H)} \quad (2.93)$$

Usando o princípio da superposição de soluções encontramos uma forma fechada para a solução do nosso problema

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,n,k} (\exp(\Lambda_{1,n,k}t) + \zeta_{n,k} \exp(\Lambda_{2,n,k}t)) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) \\ & \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\exp(\Lambda_{1,n,k,l}t) + \zeta_{n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l}t)) \\ & J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) (c_{1,n,k,l} \sin(l\theta) + c_{2,n,k,l} \cos(l\theta)) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} C(\vec{r}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,n,k} E\left(\frac{\exp(\Lambda_{1,n,k}t)}{\Lambda_{1,n,k} - H} + \frac{\zeta_{n,k} \exp(\Lambda_{2,n,k}t)}{\Lambda_{2,n,k} - H}\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) \\ & \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E\left(\frac{\exp(\Lambda_{1,n,k,l}t)}{\Lambda_{1,n,k,l} - H} + \frac{\zeta_{n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l}t)}{\Lambda_{2,n,k,l} - H}\right) \\ & J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) (c_{1,n,k,l} \sin(l\theta) + c_{2,n,k,l} \cos(l\theta)) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Determinamos as constantes envolvidas no problema, de acordo com as condições iniciais. Primeiramente, para determinar as constantes  $d_{1,n,k}$  aplicamos, sobre a expressão que representa a condição inicial, o operador integral

$$\mathfrak{J}[\cdot] = \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\cdot] r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z}z\right) dr dz d\theta \quad (2.96)$$

onde  $\mathfrak{N}_{m,s} = \frac{\pi}{2} (1 + \zeta_{m,s}) (R J_1(\alpha_m))^2 Z$ , para todo  $m, s \in \mathbb{N}$  fixos. Logo, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] = & \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ d_{1,n,k} (1 + \zeta_{n,k}) \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^Z \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z}z\right) \right. \right. \\ & \left. \left. \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) dz d\theta \right] \int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) dr \right\} \end{aligned} \quad (2.97)$$

pois

$$\int_0^{2\pi} c_{1,n,k,l} \sin(l\theta) + c_{2,n,k,l} \cos(l\theta) d\theta = 0 \quad (2.98)$$

para todo  $l = 1, 2, \dots$ . Isso implica

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] = & \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ d_{1,m,k} (1 + \zeta_{m,k}) \frac{(R J_1(\alpha_m))^2}{2} \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} \int_0^Z \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z}z\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) dz d\theta \right\} \end{aligned} \quad (2.99)$$

pela propriedade da ortogonalidade das funções de Bessel de primeira espécie de ordem 0, com respeito à função peso identidade. Continuando

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}[\phi_0(\vec{r})] &= \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} d_{1,m,s} (1 + \zeta_{m,s}) \frac{(R J_1(\alpha_m))^2 Z}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \mathfrak{N}_{m,s}^{-1} d_{1,m,s} \mathfrak{N}_{m,s} = d_{1,m,s}\end{aligned}\quad (2.100)$$

Assim, obtemos as constantes  $d_{1,n,k}$

$$d_{1,n,k} = \mathfrak{N}_{n,k}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\phi_0(\vec{r})] r J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) dr dz d\theta \quad (2.101)$$

Para finalizar, devemos obter uma expressão para as outras duas sequências  $c_{1,n,k,l}$  e  $c_{2,n,k,l}$ . Ao determinar  $c_{1,n,k,l}$  aplicamos em  $\phi_0(\vec{r})$  o operador

$$\mathfrak{I}_{\text{sen}}[\cdot] = \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\cdot] r J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R} r\right) \sin(u\theta) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z} z\right) dr dz d\theta \quad (2.102)$$

portanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{\text{sen}}[\phi_0(\vec{r})] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ (1 + \zeta_{n,k,l}) \left[ \int_0^Z \int_0^R r J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R} r\right) J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R} r\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z} z\right) dr dz \right] \int_0^{2\pi} [\sin(u\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (c_{1,n,k,l} \sin(l\theta) + c_{2,n,k,l} \cos(l\theta))] d\theta \right\}\end{aligned}\quad (2.103)$$

pois,  $\int_0^{2\pi} \sin(u\theta) d\theta = 0$  para todo  $u \in \mathbb{N}$ . Como

$$0 = \int_0^{2\pi} \sin(u\theta) \cos(l\theta) d\theta, \quad \text{para todo } u, l \in \mathbb{N} \quad (2.104)$$

$$\pi \delta_{u,l} = \int_0^{2\pi} \sin(u\theta) \sin(l\theta) d\theta, \quad \text{para todo } u, l \in \mathbb{N} \quad (2.105)$$

onde  $\delta_{u,l}$  é o Delta de Kroenecker. Logo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_{\text{sen}}[\phi_0(\vec{r})] &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ c_{1,n,k,u} (1 + \zeta_{n,k,u}) \left[ \int_0^R r J_u\left(\frac{\alpha_{n,u}}{R}r\right) J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R}r\right) dr \right] \right. \\
&\quad \left. \int_0^Z \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z}z\right) dz \right\} = \\
&= \frac{\pi Z}{2} \delta_{k,s} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_{1,n,s,u} (1 + \zeta_{n,s,u}) \int_0^R r J_u\left(\frac{\alpha_{n,u}}{R}r\right) J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R}r\right) dr \right\} = \\
&= \frac{\pi Z}{2} c_{1,m,s,u} (1 + \zeta_{m,s,u}) \delta_{m,n} \frac{(R J_{u+1}(\alpha_{m,u}))^2}{2} = \\
&= \frac{\pi}{4} (1 + \zeta_{m,s,u}) (R J_{u+1}(\alpha_{m,u}))^2 Z c_{1,m,s,u} \tag{2.106}
\end{aligned}$$

Definindo  $\mathfrak{P}_{m,s,u} = \frac{\pi}{4} (1 + \zeta_{m,s,u}) (R J_{u+1}(\alpha_{m,u}))^2 Z$ , obtemos

$$\begin{aligned}
c_{1,n,k,l} &= \mathfrak{P}_{n,k,l}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R \phi_0(\vec{r}) r J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) \sin(l\theta) \\
&\quad \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) dr dz d\theta \tag{2.107}
\end{aligned}$$

Por um processo análogo ao descrito para determinar  $c_{1,n,k,l}$  definimos os valores de  $c_{2,n,k,l}$  aplicando, sobre a expressão que representa a condição inicial, o operador

$$\mathfrak{J}_{\text{cos}}[\cdot] = \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R [\cdot] r J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R}r\right) \cos(u\theta) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z}z\right) dr dz d\theta \tag{2.108}$$

obtendo, assim, uma expressão para  $c_{2,n,k,l}$

$$\begin{aligned}
c_{2,n,k,l} &= \mathfrak{P}_{n,k,l}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^Z \int_0^R \phi_0(\vec{r}) r J_l\left(\frac{\alpha_{n,l}}{R}r\right) \cos(l\theta) \\
&\quad \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) dr dz d\theta \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Com isso finalizamos o estudo da solução analítica do sistema descrito em (2.1), com condições iniciais dadas em (2.2) para o caso de geometria cilíndrica. Obtemos o par solução  $(\phi(r, \theta, z, t); C(r, \theta, z, t))$  onde  $\phi(r, \theta, z, t)$  é dado pela expressão (2.94), e  $C(r, \theta, z, t)$  é dado pela expressão (2.95) onde as constantes arbitrárias envolvidas são expressas em (2.101), (2.107) e (2.109).

### 2.5.2 Solução explícita para o caso cartesiano

O caso cartesiano apresenta uma classe de pares soluções, a saber pelas relações (2.75) e (2.76) juntamente com as expressões (2.80) e (2.81) determinamos as seqüências de pares soluções  $(\phi^{(n,k,l)}; C^{(n,k,l)})$

$$\begin{aligned} \phi^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) &= (d_{1,n,k,l} \exp(\Lambda_{1,n,k,l} t) + d_{2,n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2Y} y\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} C^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) &= E \left( \frac{d_{1,n,k,l} \exp(\Lambda_{1,n,k,l} t)}{\Lambda_{1,n,k,l} - H} + \frac{d_{2,n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)}{\Lambda_{2,n,k,l} - H} \right) \\ &\quad \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right) \cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2Y} y\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \end{aligned} \quad (2.111)$$

onde  $d_{1,n,k,l}$  e  $d_{2,n,k,l}$  são constantes não ambas nulas (caso contrário teríamos a solução trivial). Com a primeira equação da condição inicial (2.5) obtemos uma relação entre essas constantes, analogamente ao caso cilíndrico temos que

$$d_{2,n,k,l} = \zeta_{n,k,l} d_{1,n,k,l} \quad (2.112)$$

onde

$$\zeta_{n,k,l} = \frac{P(\Lambda_{2,n,k,l} - H)(\Lambda_{1,n,k,l} - H) - E(\Lambda_{2,n,k,l} - H)}{E(\Lambda_{1,n,k,l} - H) - P(\Lambda_{2,n,k,l} - H)(\Lambda_{1,n,k,l} - H)} \quad (2.113)$$

Pelo princípio da superposição de soluções conseguimos encontrar uma forma fechada para o par solução de (2.4) em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} d_{1,n,k,l} (\exp(\Lambda_{1,n,k,l} t) + \zeta_{n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)) \\ &\quad \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right) \cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2Y} y\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} C(\vec{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} d_{1,n,k,l} E \left( \frac{\exp(\Lambda_{1,n,k,l} t)}{\Lambda_{1,n,k,l} - H} + \frac{\zeta_{n,k,l} \exp(\Lambda_{2,n,k,l} t)}{\Lambda_{2,n,k,l} - H} \right) \\ &\quad \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right) \cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2Y} y\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z} z\right) \end{aligned} \quad (2.115)$$

As constantes  $d_{1,n,k,l}$  estão relacionadas com a função  $\phi_0(\vec{r})$  por uma integração em todo o domínio. Para determiná-las definimos o operador integral

$$\mathfrak{J}[\cdot] = \mathfrak{B}_{m,s,u}^{-1} \int_0^Z \int_0^Y \int_0^X [\cdot] \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2X}x\right) \cos\left(\frac{(2u-1)\pi}{2Y}y\right) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z}z\right) dx dy dz \quad (2.116)$$

onde  $\mathfrak{B}_{m,s,u} = \frac{XYZ(1 + \zeta_{m,s,u})}{8}$  aplicamos o operador sobre  $\phi_0(\vec{r})$ , e, então,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[\phi_0(\vec{r})] &= \mathfrak{B}_{m,s,u}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ d_{1,n,k,l} (1 + \zeta_{n,k,l}) \left[ \int_0^Z \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z}z\right) dz \right] \left[ \int_0^Y \cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2Y}y\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos\left(\frac{(2u-1)\pi}{2Y}y\right) dy \right] \left[ \int_0^X \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2X}x\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2X}x\right) dx \right] \right\} = \\ &= \mathfrak{B}_{m,s,u}^{-1} d_{1,n,k,l} (1 + \zeta_{n,k,l}) \delta_{n,m} \delta_{l,u} \delta_{k,s} \frac{XYZ}{8} = \\ &= d_{1,m,s,u} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Portanto, obtemos uma expressão para as constantes  $d_{1,n,k,l}$

$$d_{1,n,k,l} = \mathfrak{B}_{n,k,l}^{-1} \int_0^Z \int_0^Y \int_0^X [\phi_0(\vec{r})] \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2X}x\right) \cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2Y}y\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2Z}z\right) dx dy dz \quad (2.118)$$

A abordagem feita até aqui, construindo uma solução analítica (fechada) para o problema de cinética de difusão em meio homogêneo, considerando um grupo de energia e um grupo de precursores de nêutrons atrasados, servirá de base de comparação para a solução obtida por um método novo para a determinação do mesmo problema no caso cilíndrico. Ainda vale ressaltar que neste trabalho determinaremos uma solução analítica considerando mais grupos de energia e concentração de precursores de nêutrons atrasados.

## 2.6 Resultados numéricos

Nesta seção particularizamos a nossa solução para um determinado conjunto de parâmetros nucleares, além disso fixamos um cilindro de dimensões  $0 < r \leq R = 10 \text{ cm}$ ,  $0 \leq z \leq Z = 10 \text{ cm}$ . Os parâmetros cinéticos bem como os parâmetros das concentrações de nêutrons atrasados estão dispostos na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Parâmetros nucleares.

Parâmetro	$D_{dif}$ [cm]	$v$ [cm/s]	$\Sigma_a$ [cm <sup>-1</sup> ]	$\nu\Sigma_f$ [cm <sup>-1</sup> ]	$\lambda$	$\beta$
	0.96343	$1.1035 \cdot 10^7$	$1.5843 \cdot 10^{-2}$	$3.3303 \cdot 10^{-2}$	0.08	0.0065

Fonte: Adaptada de Oliveira et al., 2007.

Nas figuras (2.1) e (2.2) representamos o fluxo ( $\phi$ ) como função do raio do cilindro em  $z = 4 \text{ cm}$  e como função de  $z$  em  $r = 5 \text{ cm}$  para diferentes valores de tempo, assim observamos o comportamento decrescente com respeito à variável temporal. O mesmo comportamento observamos na figura (2.3) onde representamos o fluxo como função da variável angular  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  para diferentes valores de tempo, considerando  $r = 5 \text{ cm}$  e  $z = 4 \text{ cm}$

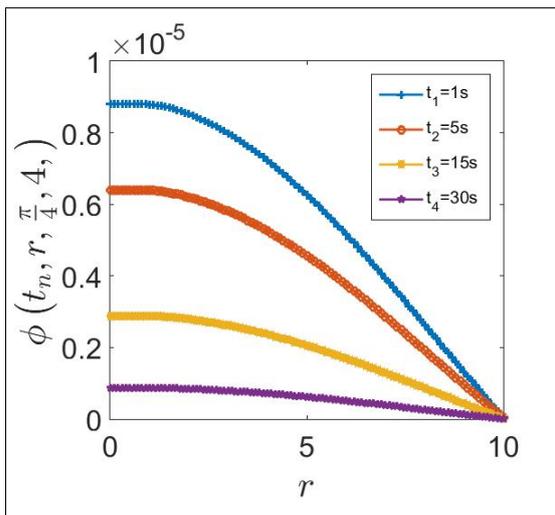


Figura 2.1: Fluxo  $\phi$  em  $z = 4 \text{ cm}$ .

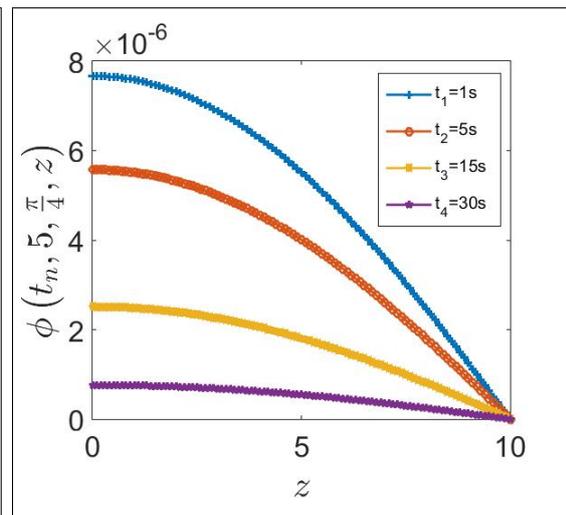


Figura 2.2: Fluxo  $\phi$  em  $r = 5 \text{ cm}$ .

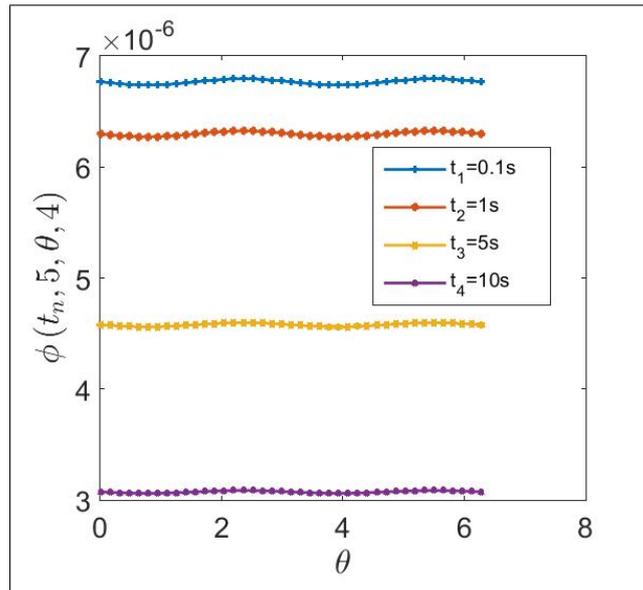


Figura 2.3: Fluxo  $\phi$  como função de  $\theta$ .

Para uma melhor visualização desse comportamento temporal, mostramos os gráficos do fluxo obtidos em função de  $(r, t)$ ,  $(z, t)$  e  $(\theta, t)$ , respectivamente nas figuras (2.4)-(2.5)-(2.6). Consideramos  $z = 4 \text{ cm}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  no primeiro gráfico,  $r = 5 \text{ cm}$  e  $z = 4 \text{ cm}$  no segundo gráfico e  $r = 5 \text{ cm}$  e  $z = 4 \text{ cm}$  no terceiro gráfico.

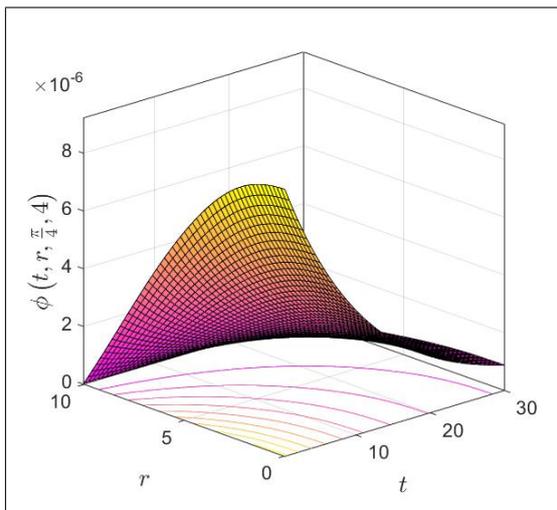


Figura 2.4: Fluxo em função de  $(r, t)$ .

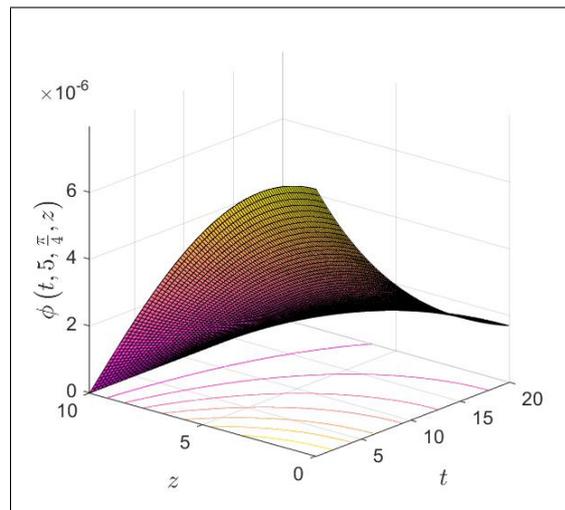


Figura 2.5: Fluxo em função de  $(z, t)$ .

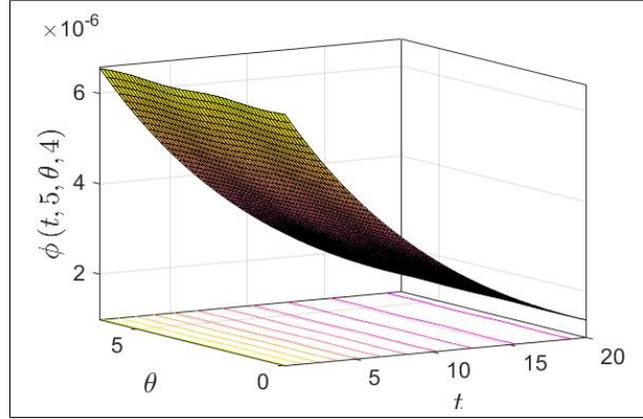


Figura 2.6: Fluxo em função de  $(\theta, t)$ .

Da análise dos primeiros resultados apresentados nas figuras acima ressaltamos o comportamento esperado do fluxo em que o máximo encontra-se mais próximo do centro radial do cilindro, enquanto que o fluxo é periódico e oscilatório com respeito à variável angular. Observa-se um comportamento exponencial decrescente quando avaliamos a variável temporal, isso é justificado pela determinação de

$$k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a (1 + B_{11}^2 L_T^2)}$$

onde  $B_{11} = \left(\frac{\alpha_{1,0}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2Z}\right)^2$  e  $L_T^2 = \frac{D_{dif}}{\Sigma_a}$ . Considerando os parâmetros nucleares da Tabela 2.1 e  $Z = R = 10 \text{ cm}$ , obtemos

$$k_{eff} \approx 0.35 < 1$$

o que nos leva a conclusão de que o sistema é subcrítico (LAMARSH, 2002), o que está de acordo com a solução apresentada.

Devemos lembrar que a escala temporal da barra de controle é muito maior do que a escala temporal da interação dos nêutrons, dessa forma, consideramos a interface azimuthal entre duas regiões invariantes ao longo do tempo. O estudo feito até este momento mostra que a estrutura da solução determinada é válida para qualquer um dos segmentos cilíndricos, ou seja, a célula cilíndrica superior  $z \in$

$[(1 - \kappa)Z, Z]$  ou a célula cilíndrica inferior  $z \in [0, (1 - \kappa)Z]$  com  $0 \leq \kappa \leq 1$ . Como mencionado, ambas as soluções exibem invariância sob transformação de escala, de modo que a escala arbitrária pode ser usada para coincidir com as soluções na interface  $z = (1 - \kappa)Z$ . Sejam as soluções nos respectivos elementos cilíndricos

$$\phi(\vec{r}, t) = \begin{cases} \phi^{[1]}(\vec{r}, t), \text{ se } 0 \leq z \leq (1 - \kappa)Z; \\ \phi^{[2]}(\vec{r}, t), \text{ se } (1 - \kappa)Z \leq z \leq Z. \end{cases} \quad (2.119)$$

então o grau de liberdade da escala permite satisfazer

$$\phi^{[1]}(r, \theta, (1 - \kappa)Z, t) = \phi^{[2]}(r, \theta, (1 - \kappa)Z, t); \quad (2.120)$$

$$-D_{dif}^{[1]} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{[1]}(\vec{r}, t) = -D_{dif}^{[2]} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{[2]}(\vec{r}, t) \quad (2.121)$$

Os parâmetros nucleares para a simulação numérica são dados pela Tabela 2.2 e para a nossa solução obtida apresentamos alguns resultados (veja as Figuras 2.7-2.10).

Tabela 2.2: Parâmetros nucleares para duas regiões

	$D_{dif}$	$v$	$\Sigma_a$	$\nu\Sigma_f$	$\lambda$	$\beta$
Reg. 1	0.96343	$1.1035 \times 10^7$	0.015843	0.033303	0.08	0.0065
Reg. 2	0.96343	$1.1035 \times 10^7$	0.115843	0.033303	0.08	0.0065

Nas figuras 2.11 e 2.12 mostramos, respectivamente, o fluxo escalar com dependência temporal e azimutal com as projeções sobre o plano  $zt$ , e o fluxo escalar com dependência radial e azimutal com projeções sobre o plano  $rz$ . Como estudo de caso consideramos também a inserção de uma barra de controle até metade da altura  $Z$ . Na Figura 2.11 é possível observar a diminuição do fluxo escalar com respeito ao tempo para um valor inicial adotado para  $\phi_0(\vec{r})$  e as condições de contorno em

$z = 0$  e  $z = Z$ . Assim, apresentamos alguns resultados da queda da barra em quatro posições diferentes em relação ao eixo azimutal. Note-se que a inserção do absorvedor em  $z = \frac{Z}{2}$  não é visível como consequência da continuidade do fluxo escalar na interface entre os dois elementos do cilindro. A conservação da densidade de corrente é mostrada na Tabela 2. A Figura 2.12 apresenta para  $t = 2$  a projeção no plano  $rz$ .

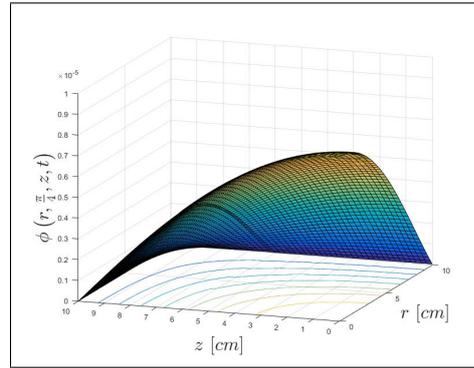
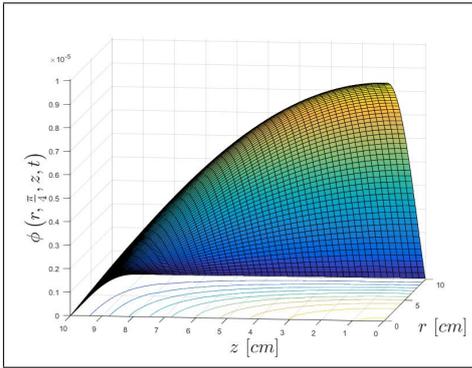


Figura 2.7: Fluxo considerando  $\kappa = 0.2$     Figura 2.8: Fluxo considerando  $\kappa = 0.4$

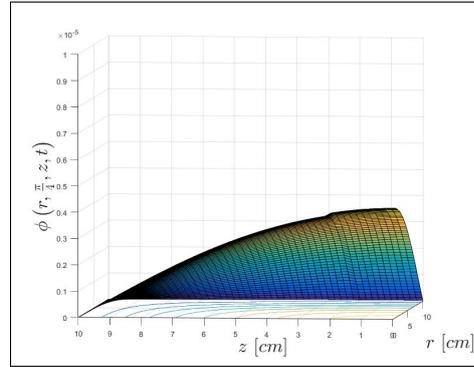
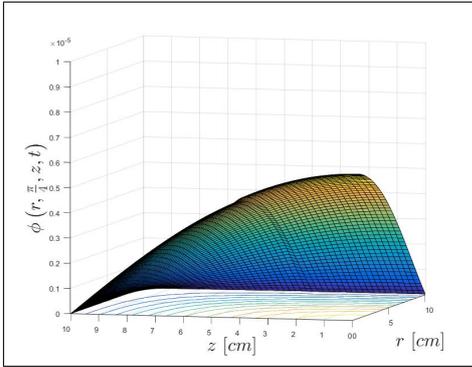


Figura 2.9: Fluxo considerando  $\kappa = 0.6$     Figura 2.10: Fluxo considerando  $\kappa = 0.8$

Novamente as condições de contorno (2.17)-(2.21) no centro e na borda são satisfeitas e uma linha no gráfico de superfície indica a separação entre os dois segmentos de cilindro em  $z = \frac{Z}{2}$ . Conforme esperado a continuidade do fluxo é

validada

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(r, \theta, 0.5Z + \epsilon, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(r, \theta, 0.5Z - \epsilon, t) \quad (2.122)$$

e a densidade de corrente é conservada como mostrado na tabela 2.3 (numericamente), onde alguns valores numéricos são mostrados em diferentes tempos para  $z = \frac{Z}{2}$ ,  $\frac{R}{2}$  e  $\frac{\pi}{4}$ .

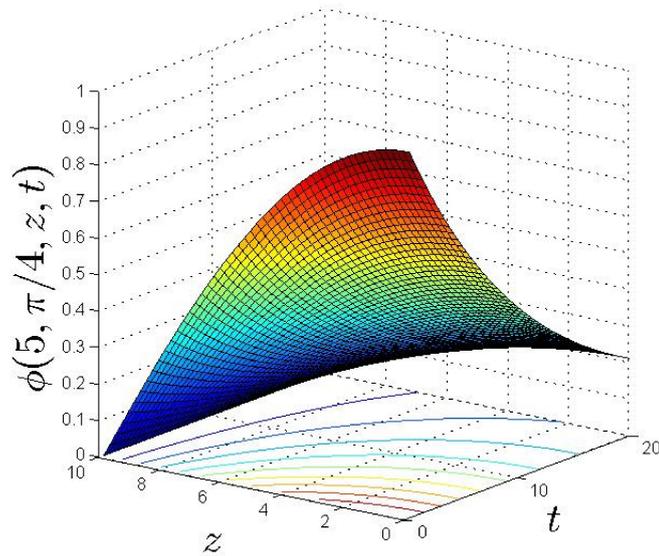


Figura 2.11: O fluxo escalar com dependência temporal e azimutal com  $r = 5$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

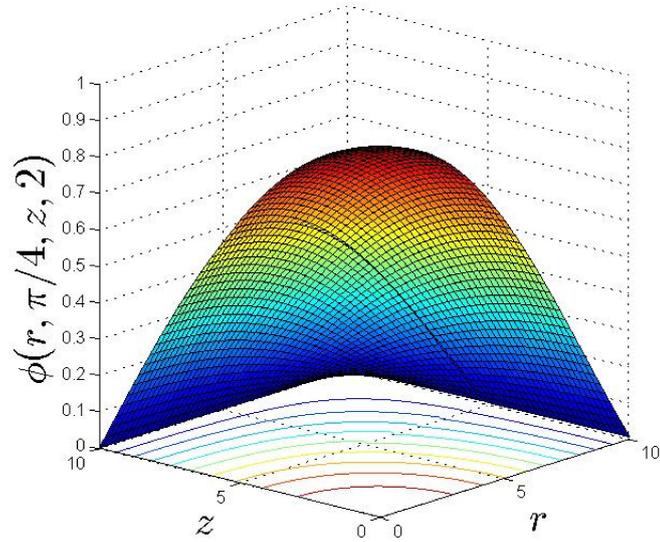


Figura 2.12: O fluxo escalar com dependência radial e azimutal com  $t = 2$  and  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Tabela 2.3: Valores numéricos para a densidade de corrente  $\vec{j}_1$  e  $\vec{j}_2$ , para diferentes tempos e com  $z = \frac{Z}{2}$ ,  $r = \frac{R}{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

	$\vec{j}_1 _{z=0.5Z}$	$\vec{j}_2 _{z=0.5Z}$
$t = 1s$	8.03053522862e-07	8.03053522865e-07
$t = 5s$	5.83799858347e-07	5.83799858389e-07
$t = 10s$	3.91889240654e-07	3.91889240795e-07
$t = 15s$	2.63064764268e-07	2.63064764463e-07

### 3 SOLUÇÃO ANALÍTICA EM GEOMETRIA CILÍNDRICA (CASO MULTIGRUPO)

#### 3.1 O modelo

O objetivo dessa seção é formalizarmos por meio dedutivo a determinação (exata) da solução para o sistema de EDP's que modelam o problema multigrupo de cinética de difusão de nêutrons considerando um meio homogêneo em geometria cilíndrica tridimensional. Por isso, vamos considerar, para  $G$  grupos de energia e  $I$  grupos de concentrações de nêutrons atrasados, o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\vec{r}, t) &= D_{dif}^{(g)} \nabla^2 \phi_g(\vec{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{gg'} \phi_{g'}(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^I \chi_g^d \lambda_i C_i(\vec{r}, t); \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (\vec{r}, t) \in \Omega \quad (3.1)$$

onde  $1 \leq g \leq G$ ,  $1 \leq i \leq I$  e

$$\Sigma_{gg'} = \begin{cases} \chi_g^p \nu_{g'} \Sigma_{fg'} (1 - \beta) + \Sigma_{sg' \rightarrow g}; & (g \neq g') \\ \chi_g^p \nu_g \Sigma_{fg} (1 - \beta) - \Sigma_{ag} - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{sg \rightarrow g'}; & (g = g') \end{cases} \quad (3.2)$$

Nesse sistema vamos considerar  $\vec{r} = (r, \theta, z) \in \Omega = (0, R) \times (-\infty, \infty) \times (0, Z)$  e o operador diferencial espacial  $\nabla^2[\cdot]$  como o Laplaciano em coordenadas cilíndricas. Assim, iniciamos fazendo a hipótese (única) de que os fluxos podem ser escritos como o produto de funções espaciais (dependentes apenas das variáveis espaciais) por funções temporais (dependentes apenas da variável temporal). Sejam as funções diferenciáveis  $F_g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{T}_g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bem definidas para todo  $1 \leq g \leq G$  tais que

$$\phi_g(\vec{r}, t) = F_g(\vec{r}) \tilde{T}_g(t). \quad (3.3)$$

Reparamos que nessa hipótese estamos supondo, em um primeiro momento, funções espaciais e temporais distintas para cada fluxo  $\phi_g$ . Com essa hipótese podemos concluir

**Afirmção 3.1.** *Supondo a decomposição para cada fluxo como  $\phi_g(\vec{r}, t) = F_g(\vec{r})\tilde{T}_g(t)$  com  $1 \leq g \leq G$ , então, considerando o problema (3.1), podemos afirmar que*

$$C_i(\vec{r}, t) = \sum_{g'=1}^G \tilde{\varphi}_{ig'}(t) F_{g'}(\vec{r}) \quad (3.4)$$

**Dem.:** 4. *Considerando as equações de balanço para os precursores de nêutrons atrasados de (3.1). Então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow e^{\lambda_i t} \frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) + \lambda_i e^{\lambda_i t} C_i(\vec{r}, t) &= \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} e^{\lambda_i t} \phi_{g'}(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (e^{\lambda_i t} C_i(\vec{r}, t)) &= \sum_{g'=1}^G \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} F_{g'}(\vec{r}) e^{\lambda_i t} \tilde{T}_{g'}(t) \\ \Rightarrow C_i(\vec{r}, t) &= \sum_{g'=1}^G \left( \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} e^{-\lambda_i t} \int e^{\lambda_i t} \tilde{T}_{g'}(t) dt \right) F_{g'}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Seja  $\tilde{\varphi}_{ig'}(t) = \beta_i \nu_{g'} \Sigma_{fg'} e^{-\lambda_i t} \int e^{\lambda_i t} \tilde{T}_{g'}(t) dt$ , e assim obtemos o resultado.

As conclusões que podemos tirar desse resultado é que as funções espaciais definidas como fatores para os fluxos  $\phi_g$  determinam uma decomposição às concentrações de precursores de nêutrons atrasados.

Podemos nesse momento analisar as equações de (3.1) para os fluxos  $\phi_g$ . Com isso, observamos que há relação entre as funções espaciais  $F_g(\vec{r})$ , e ainda uma maneira de determinar essas funções. Isso, procede conforme a seguinte afirmação

**Afirmção 3.2.** *Considerando a decomposição para cada fluxo  $\phi_g(\vec{r}, t) = F_g(\vec{r})\tilde{T}_g(t)$  que satisfazem as equações do problema (3.1), então podemos afirmar que para  $1 \leq g' \neq g \leq G$*

1. Existem  $\eta_{gg'}$  constantes reais não nulas tal que

$$F_{g'}(\vec{r}) = \eta_{gg'} F_g(\vec{r})$$

2. Existe  $\sigma$  constante real tal que

$$\nabla^2 [F_g(\vec{r})] = \sigma F_g(\vec{r}); \quad 1 \leq g \leq G$$

**Dem.: 5.** Considerando as equações para os fluxos  $\phi_g$  no sistema (3.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} F_g(\vec{r}) \frac{d}{dt} \tilde{T}_g(t) &= D_{dif}^{(g)} \nabla^2 [F_g(\vec{r})] \tilde{T}_g(t) + \Sigma_{gg} F_g(\vec{r}) \tilde{T}_g(t) + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{gg'} F_{g'}(\vec{r}) \tilde{T}_{g'}(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^I \chi_g^d \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

A partir do resultado obtido na afirmação 1, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} F_g(\vec{r}) \frac{d}{dt} \tilde{T}_g(t) &= \left[ D_{dif}^{(g)} \nabla^2 [F_g(\vec{r})] + \Sigma_{gg} F_g(\vec{r}) \right] \tilde{T}_g(t) + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{gg'} F_{g'}(\vec{r}) \tilde{T}_{g'}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^I \chi_g^d \lambda_i \sum_{g'=1}^G \tilde{\varphi}_{ig'}(t) F_{g'}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Defina

$$\tilde{F}_g(\vec{r}) := \frac{v_g}{F_g(\vec{r})} \left( D_{dif}^{(g)} \nabla^2 [F_g(\vec{r})] + \Sigma_{gg} F_g(\vec{r}) \right) \quad (3.6)$$

e multiplique toda a equação (3.5) por  $e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t}$ , obtendo

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \frac{d}{dt} \tilde{T}_g(t) - \tilde{F}_g(\vec{r}) e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \tilde{T}_g(t) &= \sum_{g' \neq g}^G v_g \Sigma_{gg'} \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \tilde{T}_{g'}(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^I v_g \chi_g^d \lambda_i e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \left( \tilde{\varphi}_{ig}(t) + \sum_{g' \neq g}^G \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} \tilde{\varphi}_{ig'}(t) \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \tilde{T}_g(t) \right) &= \sum_{g' \neq g}^G v_g \Sigma_{gg'} \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \tilde{T}_{g'}(t) + \\ \sum_{i=1}^I v_g \chi_g^d \lambda_i e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \tilde{\varphi}_{ig}(t) &+ \sum_{i=1}^I v_g \chi_g^d \lambda_i \sum_{g' \neq g}^G \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} \tilde{\varphi}_{ig'}(t); \end{aligned}$$

Cujo resultado é

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_g(t) &= \sum_{g' \neq g}^G v_g \Sigma_{gg'} \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} e^{\tilde{F}_g(\vec{r})t} \int \tilde{T}_{g'}(t) e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} dt + \\
&+ \sum_{i=1}^I v_g \chi_g^d \lambda_i e^{\tilde{F}_g(\vec{r})t} \int \tilde{\varphi}_{ig}(t) e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} dt + \\
&+ \sum_{i=1}^I v_g \chi_g^d \lambda_i \sum_{g' \neq g}^G \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} e^{\tilde{F}_g(\vec{r})t} \int \tilde{\varphi}_{ig'}(t) e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} dt.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para concluir o resultado devemos analisar como são as funções que envolvem as integrais do lado direito da igualdade de (3.7). Podemos observar que no lado esquerdo da igualdade temos funções temporais (dependentes apenas da variável temporal  $t$ )  $\tilde{T}_g(t)$ . Com isso posto e usando a expansão em série das funções exponenciais, temos

$$\begin{aligned}
e^{\tilde{F}_g(\vec{r})t} \int \tilde{T}_{g'}(t) e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} dt &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\tilde{F}_g(\vec{r})t\right)^n}{n!} \right] \left[ \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\tilde{F}_g(\vec{r})t\right)^m \tilde{T}_{g'}(t) dt \right] \\
&= \left[ 1 + \tilde{F}_g(\vec{r})t + \frac{\left(\tilde{F}_g(\vec{r})t\right)^2}{2!} + \dots \right] \left[ \int \tilde{T}_{g'}(t) dt - \tilde{F}_g(\vec{r}) \int t \tilde{T}_{g'}(t) dt + \right. \\
&+ \left. \frac{\left(\tilde{F}_g(\vec{r})\right)^2}{2!} \int \frac{t^2}{2!} \tilde{T}_{g'}(t) dt + \dots \right] \\
&= \int \tilde{T}_{g'}(t) dt + \tilde{F}_g(\vec{r}) \left( t \int \tilde{T}_{g'}(t) dt - \int t \tilde{T}_{g'}(t) dt \right) + \\
&+ \frac{\left(\tilde{F}_g(\vec{r})\right)^2}{2!} \left( \frac{t^2}{2!} \int \tilde{T}_{g'}(t) dt - t \int t \tilde{T}_{g'}(t) dt + \int \frac{t^2}{2!} \tilde{T}_{g'}(t) dt \right) + \dots \\
&= \int \tilde{T}_{g'}(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{F}_g(\vec{r})\right)^n \tilde{T}_{ng'}(t).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Analogamente ao que foi feito, podemos expressar as outras integrais como

$$e^{\tilde{F}_g(\vec{r})t} \int \tilde{\varphi}_{ig}(t) e^{-\tilde{F}_g(\vec{r})t} dt = \int \tilde{\varphi}_{ig}(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{F}_g(\vec{r})\right)^n \tilde{\varphi}_{nig}(t) dt \tag{3.9}$$

Portanto, concluimos

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_g(t) &= \sum_{g' \neq g}^G v_g \Sigma_{gg'} \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} \left( \int \tilde{T}_{g'}(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{F}_g(\vec{r}) \right)^n \tilde{T}_{ng'}(t) \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^I v_g \chi_g^d \lambda_i \left( \int \tilde{\varphi}_{ig}(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{F}_g(\vec{r}) \right)^n \tilde{\varphi}_{nig}(t) dt \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^I v_g \chi_g^d \lambda_i \sum_{g' \neq g}^G \frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} \left( \int \tilde{\varphi}_{ig'}(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{F}_g(\vec{r}) \right)^n \tilde{\varphi}_{nig'}(t) dt \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Como o lado direito dessa equação deve depender apenas da variável temporal para todo  $t > 0$ , temos que

$$\frac{F_{g'}(\vec{r})}{F_g(\vec{r})} = \text{Constante} = \eta_{gg'}, \quad 1 \leq g' \neq g \leq G \tag{3.11}$$

o que conclui o resultado para o primeiro item. Ainda, pelo fato do lado direito de (3.10) depender de  $\tilde{F}_g(\vec{r})$ , então

$$\tilde{F}_g(\vec{r}) = \text{Constante} = \tilde{\sigma}_g \tag{3.12}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
v_g D_{dif}^{(g)} \nabla^2 [F_g(\vec{r})] + v_g \Sigma_{gg} F_g(\vec{r}) &= \tilde{\sigma}_g F_g(\vec{r}) \\
\Rightarrow \nabla^2 [F_g(\vec{r})] + \left( \frac{v_g \Sigma_{gg} - \tilde{\sigma}_g}{v_g D_{dif}^{(g)}} \right) F_g(\vec{r}) &= 0 \\
\Rightarrow \nabla^2 [F_g(\vec{r})] = \left( \frac{\tilde{\sigma}_g - v_g \Sigma_{gg}}{v_g D_{dif}^{(g)}} \right) F_g(\vec{r}) &= \sigma_g F_g(\vec{r})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Seja  $g' \neq g$  e considera  $F_{g'}(\vec{r})$  e  $F_g(\vec{r})$ , então existem as constantes  $\sigma_g$  e  $\sigma_{g'}$  tais que valem

$$\nabla^2 [F_g(\vec{r})] = \sigma_g F_g(\vec{r}) \quad e \quad \nabla^2 [F_{g'}(\vec{r})] = \sigma_{g'} F_{g'}(\vec{r}) \tag{3.14}$$

Pelo resultado obtido no primeiro item, temos que existem as constantes reais e não nulas  $\eta_{gg'}$  tais que

$$\eta_{gg'}\sigma_g F_g(\vec{r}) = \eta_{gg'}\nabla^2 [F_g(\vec{r})] = \nabla^2 [\eta_{gg'}F_g(\vec{r})] = \nabla^2 [F_{g'}(\vec{r})] = \sigma_{g'}F_{g'}(\vec{r}) = \sigma_{g'}\eta_{gg'}F_g(\vec{r}) \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \eta_{gg'}F_g(\vec{r})(\sigma_g - \sigma_{g'}) = 0 \Rightarrow \sigma_g = \sigma_{g'}, \quad 1 \leq g' \neq g \leq G.$$

Assim, podemos concluir que

$$\nabla^2 [F_g(\vec{r})] = \sigma F_g(\vec{r}), \quad 1 \leq g \leq G, \quad \forall \vec{r} \in \Omega. \quad (3.16)$$

Finalizando a demonstração da afirmação.

O resultado dessa afirmação, nos permite avançar a respeito da determinação da solução para o sistema de EDP's, pois, podemos supor que os fluxos e as concentrações de precursores dependem da mesma função espacial. Ou seja, podemos supor

$$\phi_g(\vec{r}, t) := F(\vec{r}) T_g(t) \quad (3.17)$$

$$C_i(\vec{r}, t) := F(\vec{r}) \varphi_i(t)$$

Ao substituir essa decomposição no sistema original, devemos apenas determinar a solução para os problemas

$$\begin{cases} \nabla^2 [F(\vec{r})] = \sigma F(\vec{r}) \\ \frac{d}{dt} \vec{\Psi}(t) = M(\sigma) \vec{\Psi}(t), \end{cases} \quad (\vec{r}, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \quad (3.18)$$

onde  $\vec{\Psi}(t) = [T_1(t) \ T_2(t) \ \cdots \ T_G(t) \ \varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \cdots \ \varphi_I(t)]^T$ , e  $M(\sigma)$  é uma matriz de ordem  $G + I$ , definida como

$$M(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma v_1 D_{dif}^{(1)} + \Sigma_{11} & v_1 \Sigma_{12} & \cdots & v_1 \Sigma_{1G} & v_1 \chi_1^d \lambda_1 & v_1 \chi_1^d \lambda_2 & \cdots & v_1 \chi_1^d \lambda_I \\ v_2 \Sigma_{21} & \sigma v_2 D_{dif}^{(2)} + \Sigma_{22} & \cdots & v_2 \Sigma_{2G} & v_2 \chi_2^d \lambda_1 & v_2 \chi_2^d \lambda_2 & \cdots & v_2 \chi_2^d \lambda_I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_G \Sigma_{G1} & v_G \Sigma_{G2} & \cdots & \sigma v_G D_{dif}^{(G)} + \Sigma_{GG} & v_G \chi_G^d \lambda_1 & v_G \chi_G^d \lambda_2 & \cdots & v_G \chi_G^d \lambda_I \\ \beta_1 \nu_1 \Sigma_{f1} & \beta_1 \nu_2 \Sigma_{f2} & \cdots & \beta_1 \nu_G \Sigma_{fG} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 \nu_1 \Sigma_{f1} & \beta_2 \nu_2 \Sigma_{f2} & \cdots & \beta_2 \nu_G \Sigma_{fG} & 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_I \nu_1 \Sigma_{f1} & \beta_I \nu_2 \Sigma_{f2} & \cdots & \beta_I \nu_G \Sigma_{fG} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_I \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar que, através da definição das condições de contorno e iniciais, conseguimos determinar uma solução analítica (exata) quando  $G + I \leq 4$ . Na próxima seção abordaremos um caso específico, considerando  $G + I = 3$  em coordenadas cilíndricas.

### 3.2 Solução considerando dois grupos de energia

Sejam os fluxos  $\phi_1 = \phi_1(\vec{r}, t)$ ,  $\phi_2 = \phi_2(\vec{r}, t)$  e a concentração de precursores de nêutrons atrasados  $C = C(\vec{r}, t)$ , consideramos um problema que não há espalhamento de nêutrons do grupo térmico ( $g = 2$ ) para o grupo rápido ( $g = 1$ ), ou seja  $\Sigma_{s2 \rightarrow 1} = 0$  e também  $\chi_1^p = 1 = \chi_1^d$ ,  $\chi_2^p = 0 = \chi_2^d$ . Assim, temos o seguinte

problema

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 &= D_{dif}^{(1)} \nabla^2 \phi_1 + ((1 - \beta) \nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}) \phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2 + \lambda C \\
\frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2 &= D_{dif}^{(2)} \nabla^2 \phi_2 + \Sigma_{s1 \rightarrow 2} \phi_1 - \Sigma_{a2} \phi_2 \\
\frac{\partial C}{\partial t} &= \beta \nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1 + \beta \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2 - \lambda C
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde  $\nabla^2[\cdot] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) [\cdot] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\cdot] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\cdot]$ .

As condições de contorno para esse problema são dadas por

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial r} \phi_g(\vec{r}, t) &= 0 = \phi_g(R, \theta, z, t); \\
\frac{\partial}{\partial z} \phi_g(r, \theta, 0, t) &= 0 = \phi_g(r, \theta, Z, t); \\
\phi_g(r, \theta, z, t) &= \phi_g(r, \theta + 2\pi, z, t); \quad g \in \{1, 2\} \\
\phi_g(\vec{r}, 0) &= \phi_{0,g}(\vec{r}); \\
C(\vec{r}, 0) &= \frac{\beta}{\lambda} \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{0,g'}(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Usando todo o estudo feito na seção anterior, propomos que as funções que representam os fluxos e a concentração de precursores são dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_g(\vec{r}, t) &= F(\vec{r}) T_g(t); \quad g \in \{1, 2\} \\
C(\vec{r}, t) &= F(\vec{r}) T_3(t).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nesse primeiro momento, determinaremos (se existir) a constante  $\sigma$  tal que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} F(\vec{r}) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} F(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(\vec{r}) = \sigma F(\vec{r}) \tag{3.22}$$

Considerando a técnica de separação de variáveis supondo que  $F(\vec{r}) = f(r)j(\theta)h(z)$ , determinamos mais três equações diferenciais ordinárias

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f(r) + r \frac{d}{dr} f(r) + [\sigma_2 - (\sigma + \sigma_1) r^2] f(r) = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} j(\theta) - \sigma_2 j(\theta) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} h(z) + \sigma_1 h(z) = 0 \quad (3.25)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são constantes de separabilidade.

Por meio das condições de contorno propostas para  $\phi_g$  em (3.20), conseguimos mostrar que devem valer as seguintes condições

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d}{dr} f(r) &= 0 = f(R); \\ \frac{d}{dz} h(0) &= 0 = h(Z); \\ j(\theta) &= j(\theta + 2\pi). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ao resolver as equações com as condições de contorno acima, obtemos soluções não triviais apenas quando consideramos  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 \leq 0$  e  $-(\sigma + \sigma_1) > 0$  ( $\sigma < 0$ ). Assim, determinamos as autofunções:

$$f_{n,l}(r) = J_l \left( \frac{\alpha_{n,l} r}{R} \right) \quad (3.27)$$

$$j_l(\theta) = c_{1,l} \cos(l\theta) + c_{2,l} \sen(l\theta) \quad (3.28)$$

$$h_k(z) = \cos \left( \frac{(2k-1)\pi z}{2Z} \right) \quad (3.29)$$

para todo  $n, k \in \mathbb{N}^*$  e  $l \in \mathbb{N}$  onde  $c_{1,l}, c_{2,l}$  são constantes arbitrárias e  $\alpha_{n,l}$  é tal que  $J_l(\alpha_{n,l}) = 0$  com  $n > 0$ .

As autofunções obtidas estão associadas aos autovalores

$$\sigma_{n,k,l} = - \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} \right)^2 - \left( \frac{(2k-1)\pi}{2Z} \right)^2. \quad (3.30)$$

Nesse momento, determinamos autofunções espaciais que cumprem  $\nabla^2 F^{(n,k,l)}(\vec{r}) = \sigma_{n,k,l} F^{(n,k,l)}(\vec{r})$ . Concluindo que

$$F^{(n,k,l)}(\vec{r}) = J_l\left(\frac{\alpha_{n,l} r}{R}\right) [c_{1,l} \cos(l\theta) + c_{2,l} \sin(l\theta)] \cos\left(\frac{(2k-1)\pi z}{2Z}\right). \quad (3.31)$$

Com a determinação das autofunções espaciais, devemos considerar os  $nkl$  sistemas de EDO's resultantes para as funções temporais  $T_1^{(n,k,l)}(t)$ ,  $T_2^{(n,k,l)}(t)$  e  $T_3^{(n,k,l)}(t)$ . Definimos

$$\begin{aligned} A_1 &= v_1 D_{dif}^{(1)}; & B_1 &= v_1 (\nu_1 \Sigma_{f1} (1 - \beta) - \sigma_{a1} - \Sigma_{s1 \rightarrow 2}); & D_1 &= v_1 \nu_2 \Sigma_{f2} (1 - \beta); \\ E_1 &= v_1 \lambda; & B_2 &= v_2 \Sigma_{s1 \rightarrow 2}; & A_2 &= v_2 D_{dif}^{(2)}; \\ D_2 &= -v_2 \Sigma_{a2}; & B_3 &= \beta \nu_1 \Sigma_{f1}; & D_3 &= \beta \nu_2 \Sigma_{f2}; \\ E_3 &= -\lambda. \end{aligned}$$

Temos a representação em forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_1^{(n,k,l)}(t) \\ T_2^{(n,k,l)}(t) \\ T_3^{(n,k,l)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \sigma_{n,k,l} + B_1 & D_1 & E_1 \\ B_2 & A_2 \sigma_{n,k,l} + D_2 & 0 \\ B_3 & D_3 & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{(n,k,l)}(t) \\ T_2^{(n,k,l)}(t) \\ T_3^{(n,k,l)}(t) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Podemos resolver esse problema determinando os autovalores e os autovetores que solucionam esse sistema de EDO's. A equação característica em  $\Lambda$  é dada por

$$\begin{aligned} (A_1 \sigma_{n,k,l} + B_1 - \Lambda) (A_2 \sigma_{n,k,l} + D_2 - \Lambda) (E_3 - \Lambda) + E_1 B_2 D_3 - \\ E_1 B_3 (A_2 \sigma_{n,k,l} + D_2 - \Lambda) - D_1 B_2 (E_3 - \Lambda) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Reorganizando os termos, podemos expressar a equação característica como

$$\Lambda^3 + a_1(n, k, l) \Lambda^2 + a_2(n, k, l) \Lambda + a_3(n, k, l) = 0 \quad (3.34)$$

onde

$$a_1(n, k, l) = -(A_1\sigma_{n,k,l} + B_1 + A_2\sigma_{n,k,l} + D_2 + E_3) \quad (3.35)$$

$$a_2(n, k, l) = (A_1\sigma_{n,k,l} + B_1)(A_2\sigma_{n,k,l} + D_2) + E_3(A_1\sigma_{n,k,l} + B_1 + A_2\sigma_{n,k,l} + D_2) - E_1B_3 - D_1B_2 \quad (3.36)$$

$$a_3(n, k, l) = E_1B_3(A_2\sigma_{n,k,l} + D_2) - E_3(A_1\sigma_{n,k,l} + B_1)(A_2\sigma_{n,k,l} + D_2) + D_1B_2E_3 + E_1B_2D_3. \quad (3.37)$$

Agora, observe que pelos parâmetros nucleares é válido que:

$$\Delta = 18a_1(n, k, l)a_2(n, k, l)a_3(n, k, l) - 4a_1^3(n, k, l)a_3(n, k, l) + a_1^2(n, k, l)a_2^2(n, k, l) - 4a_2^3(n, k, l) - 27a_3^2(n, k, l) > 0 \quad (3.38)$$

para todo  $n, k \in \mathbb{N}^*$  e  $l \in \mathbb{N}$ , o que nos mostra que todos os autovalores são reais.

Para tanto, construímos os valores de  $\Lambda$  da seguinte forma

$$\Delta_0 = a_1^2(n, k, l) - 3a_2(n, k, l) \quad (3.39)$$

$$\Delta_1 = 2a_1^3(n, k, l) - 9a_1(n, k, l)a_2(n, k, l) + 27a_3^2(n, k, l) \quad (3.40)$$

$$\Delta_2 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \quad (3.41)$$

e assim:

$$\Lambda_p^{(n,k,l)} = -\frac{1}{3} \left( a_1(n, k, l) + \mu^p \Delta_2 + \frac{\Delta_0}{\mu^p \Delta_2} \right); \quad p = 0, 1, 2 \quad (3.42)$$

onde  $\mu = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  tal que  $i^2 = -1$ . Para determinar os autovetores devemos determinar uma base para núcleo de  $M - \Lambda_p^{(n,k,l)} I_{3 \times 3}$  onde

$$M = \begin{bmatrix} A_1\sigma_{n,k,l} + B_1 & D_1 & E_1 \\ B_2 & A_2\sigma_{n,k,l} + D_2 & 0 \\ B_3 & D_3 & E_3 \end{bmatrix},$$

ou seja, devemos determinar  $\mathfrak{H}_1^{(p)}(n, k, l)$ ,  $\mathfrak{H}_2^{(p)}(n, k, l)$  e  $\mathfrak{H}_3^{(p)}(n, k, l)$  tal que

$$(M - \Lambda_p^{(n,k,l)} I_{3 \times 3}) \begin{bmatrix} \mathfrak{H}_1^{(p)}(n, k, l) \\ \mathfrak{H}_2^{(p)}(n, k, l) \\ \mathfrak{H}_3^{(p)}(n, k, l) \end{bmatrix} = \vec{O}_{3 \times 1}. \quad (3.43)$$

O que nos leva à seguinte base

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_3^{(p)}(n, k, l) &= 1 \\ \mathfrak{H}_2^{(p)}(n, k, l) &= \frac{E_1 B_2}{(A_1 \sigma_{n,k,l} + B_1 - \Lambda_p^{(n,k,l)}) (A_2 \sigma_{n,k,l} + D_2 - \Lambda_p^{(n,k,l)}) - D_1 B_2} \\ \mathfrak{H}_1^{(p)}(n, k, l) &= -\frac{D_1 \mathfrak{H}_2^{(p)}(n, k, l) + E_1}{A_1 \sigma_{n,k,l} + B_1 - \Lambda_p^{(n,k,l)}} \end{aligned}$$

E, por conseguinte, às soluções para  $T_1^{(n,k,l)}(t)$ ,  $T_2^{(n,k,l)}(t)$  e  $T_3^{(n,k,l)}(t)$

$$\begin{bmatrix} T_1^{(n,k,l)}(t) \\ T_2^{(n,k,l)}(t) \\ T_3^{(n,k,l)}(t) \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^2 d_p^{(n,k,l)} e^{\Lambda_p^{(n,k,l)} t} \begin{bmatrix} \mathfrak{H}_1^{(p)}(n, k, l) \\ \mathfrak{H}_2^{(p)}(n, k, l) \\ \mathfrak{H}_3^{(p)}(n, k, l) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Com isso, para todo  $n, k \in \mathbb{N}^*$  e  $l \in \mathbb{N}$ , conseguimos compor as soluções para o problema (3.19)

$$\begin{aligned} \phi_1^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) &= J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) [c_{1,l} \cos(l\theta) + c_{2,l} \sin(l\theta)] \cos \left( \frac{(2k-1)\pi z}{2Z} \right) \\ &\quad \sum_{p=0}^2 d_p^{(n,k,l)} \mathfrak{H}_1^{(p)}(n, k, l) e^{\Lambda_p^{(n,k,l)} t} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) &= J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) [c_{1,l} \cos(l\theta) + c_{2,l} \sin(l\theta)] \cos \left( \frac{(2k-1)\pi z}{2Z} \right) \\ &\quad \sum_{p=0}^2 d_p^{(n,k,l)} \mathfrak{H}_2^{(p)}(n, k, l) e^{\Lambda_p^{(n,k,l)} t} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} C^{(n,k,l)}(\vec{r}, t) &= J_l \left( \frac{\alpha_{n,l}}{R} r \right) [c_{1,l} \cos(l\theta) + c_{2,l} \sin(l\theta)] \cos \left( \frac{(2k-1)\pi z}{2Z} \right) \\ &\quad \sum_{p=0}^2 d_p^{(n,k,l)} \mathfrak{H}_3^{(p)}(n, k, l) e^{\Lambda_p^{(n,k,l)} t} \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde  $c_{1,l}$ ,  $c_{2,l}$  e  $d_p^{(n,k,l)}$  para  $p = 0, 1, 2$  são constantes arbitrárias. Usando o princípio da superposição das soluções determinamos a solução geral para o problema (3.19)

$$\phi_g(\vec{r}, t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \phi_g^{(n,k,0)}(\vec{r}, t) + \sum_{n,k,l=1}^{\infty} \phi_g^{(n,k,l)}(\vec{r}, t); \quad g = 1, 2, \quad (3.48)$$

$$C(\vec{r}, t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} C^{(n,k,0)}(\vec{r}, t) + \sum_{n,k,l=1}^{\infty} C^{(n,k,l)}(\vec{r}, t). \quad (3.49)$$

As constantes  $c_{1,0}d_2^{(n,k,0)}$ ,  $c_{1,l}d_2^{(n,k,l)}$  e  $c_{2,l}d_2^{(n,k,l)}$  envolvidas na solução geral do problema podem ser determinados aplicando operadores integrais sobre as condições iniciais. Ao aplicar sobre as condições iniciais do problema, os seguintes operadores definidos em

$$\mathfrak{J}^{(m,s,0)}[\cdot] = \int_{\Omega} [\cdot] r J_0\left(\frac{\alpha_{m,0}}{R} r\right) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z} z\right) d\Omega \quad (3.50)$$

$$\mathfrak{J}_{\text{sen}}^{(m,s,u)}[\cdot] = \int_{\Omega} [\cdot] r J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R} r\right) \text{sen}(u\theta) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z} z\right) d\Omega \quad (3.51)$$

$$\mathfrak{J}_{\text{cos}}^{(m,s,u)}[\cdot] = \int_{\Omega} [\cdot] r J_u\left(\frac{\alpha_{m,u}}{R} r\right) \cos(u\theta) \cos\left(\frac{(2s-1)\pi}{2Z} z\right) d\Omega \quad (3.52)$$

podemos determinar, por meio da propriedade da ortogonalidade das autofunções espaciais e da solução de sistemas de equações lineares algébricas, as constantes envolvidas na representação da solução

$$\begin{bmatrix} c_{1,l}d_0^{(n,k,l)} \\ c_{1,l}d_1^{(n,k,l)} \\ c_{1,l}d_2^{(n,k,l)} \end{bmatrix} = \mathbf{m}_{n,k,l}^{(-1)} \begin{bmatrix} \mathfrak{H}_1^{(0)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_1^{(1)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_1^{(2)}(n,k,l) \\ \mathfrak{H}_2^{(0)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_2^{(1)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_2^{(2)}(n,k,l) \\ \mathfrak{H}_3^{(0)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_3^{(1)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_3^{(2)}(n,k,l) \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{\text{cos}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,1}] \\ \mathfrak{J}_{\text{cos}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,2}] \\ -\frac{1}{E_3} \left( B_3 \mathfrak{J}_{\text{cos}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,1}] + D_3 \mathfrak{J}_{\text{cos}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,2}] \right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{2,l}d_0^{(n,k,l)} \\ c_{2,l}d_1^{(n,k,l)} \\ c_{2,l}d_2^{(n,k,l)} \end{bmatrix} = \mathbf{m}_{n,k,l}^{(-1)} \begin{bmatrix} \mathfrak{H}_1^{(0)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_1^{(1)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_1^{(2)}(n,k,l) \\ \mathfrak{H}_2^{(0)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_2^{(1)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_2^{(2)}(n,k,l) \\ \mathfrak{H}_3^{(0)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_3^{(1)}(n,k,l) & \mathfrak{H}_3^{(2)}(n,k,l) \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{\text{sen}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,1}] \\ \mathfrak{J}_{\text{sen}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,2}] \\ -\frac{1}{E_3} \left( B_3 \mathfrak{J}_{\text{sen}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,1}] + D_3 \mathfrak{J}_{\text{sen}}^{(n,k,l)}[\phi_{0,2}] \right) \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{m}_{n,k,l} = \begin{cases} \frac{\pi Z (R J_1(\alpha_{n,0}))^2}{2}, & \text{se } l = 0 \\ \frac{\pi Z (R J_{l+1}(\alpha_{n,l}))^2}{4}, & \text{se } l > 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

Com isso, obtemos uma solução exata (analítica) para o problema de cinética de difusão de nêutrons dependente apenas dos parâmetros nucleares e das condições de contorno.

### 3.3 Resultados numéricos

Nessa seção apresentamos resultados numéricos após aplicar o estudo da teoria feito até o momento. Para tanto, consideraremos os seguintes parâmetros nucleares

Tabela 3.1: Parâmetros para as equações de cinética de difusão.

Parâmetro	$D_g$ [cm]	$v_g$ [cm/s]	$\Sigma_{ag}$ [cm <sup>-1</sup> ]	$\Sigma_{sg' \rightarrow g}$ [cm <sup>-1</sup> ]	$\nu_g \Sigma_{fg}$ [cm <sup>-1</sup> ]
Grupo 1 ( $g = 1$ )	1.0	$10^7$	0.02	0.01	0.005
Grupo 2 ( $g = 2$ )	0.5	$3 \cdot 10^5$	0.08	0	0.099

Fonte: Adaptada de Nagaya e Kobayashi, 1995.

Além disso, consideraremos  $\beta = 0.0065$  e  $\lambda = 0.08$ . A aplicação foi feita para um cilindro de  $R = 10$  cm e  $Z = 10$  cm. Nas figuras (3.1) e (3.2) apresentamos o comportamento gráfico dos fluxos rápido ( $\phi_1(\vec{r})$ ) e térmico ( $\phi_2(\vec{r})$ ) com relação à variação temporal para diferentes valores de  $r$  e considerando  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $z = 5$

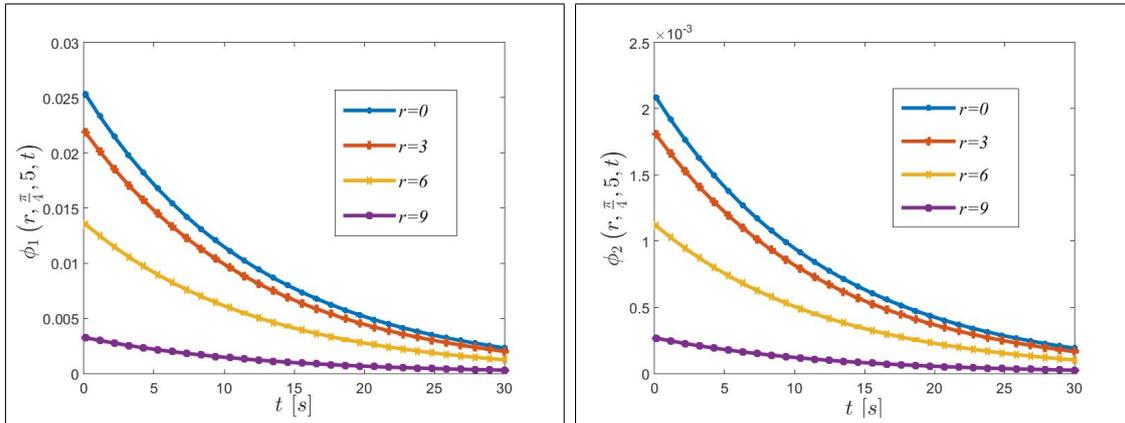


Figura 3.1: Fluxo  $\phi_1$  como função de  $t$ . Figura 3.2: Fluxo  $\phi_2$  como função de  $t$ .

Observamos o comportamento exponencial previsto pelas funções temporais encontradas. Além disso, podemos verificar que o fluxo rápido é maior do que o fluxo térmico. Como visto pela teoria apresentada, validamos por meio da

figura (3.3), um comportamento similar ao da concentração de precursores ( $C(\vec{r})$ ) com respeito aos fluxos rápido e térmico.

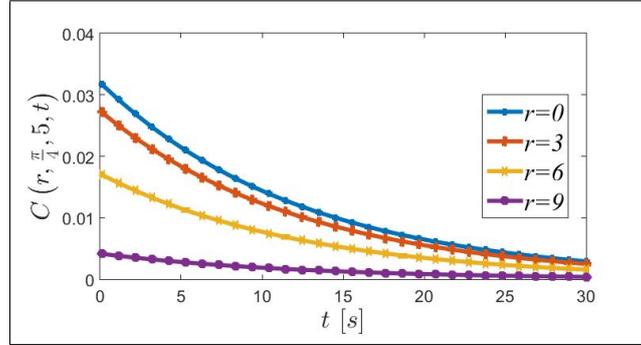


Figura 3.3: Concentração  $C$  como função de  $t$ .

Nas figuras (3.4) e (3.5) observamos o comportamento gráfico decrescente dos fluxos com respeito à variável radial  $0 \leq r \leq R$  para diferentes valores de  $t$ . O comportamento está de acordo com o que propusemos nas condições de contorno para a variável radial.

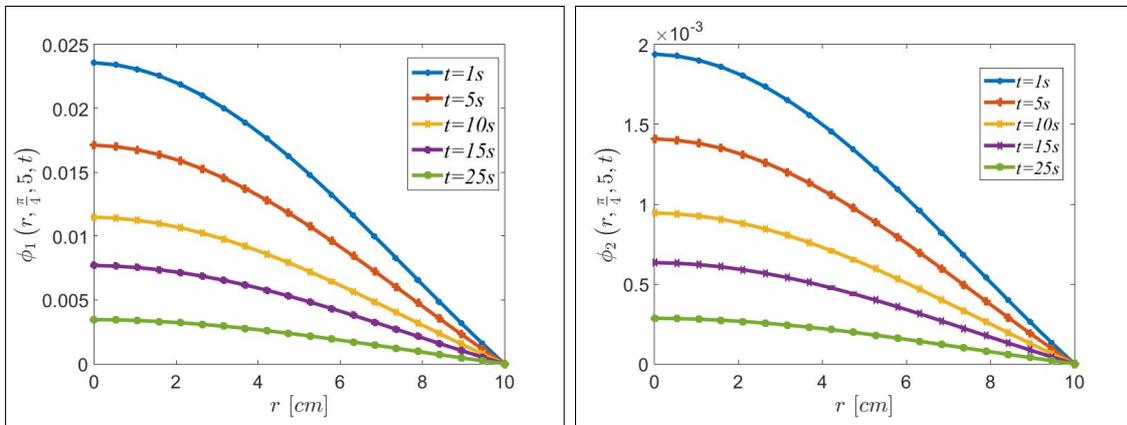


Figura 3.4: Fluxo  $\phi_1$  como função de  $r$ . Figura 3.5: Fluxo  $\phi_2$  como função de  $r$ .

Podemos analisar nas figuras (3.6), (3.7) e (3.8) o comportamento periódico dos fluxos e da concentração de precursores considerando a variável angular  $\theta$ , o que vai ao encontro da condição suposta para essa variável com respeito à periodicidade.

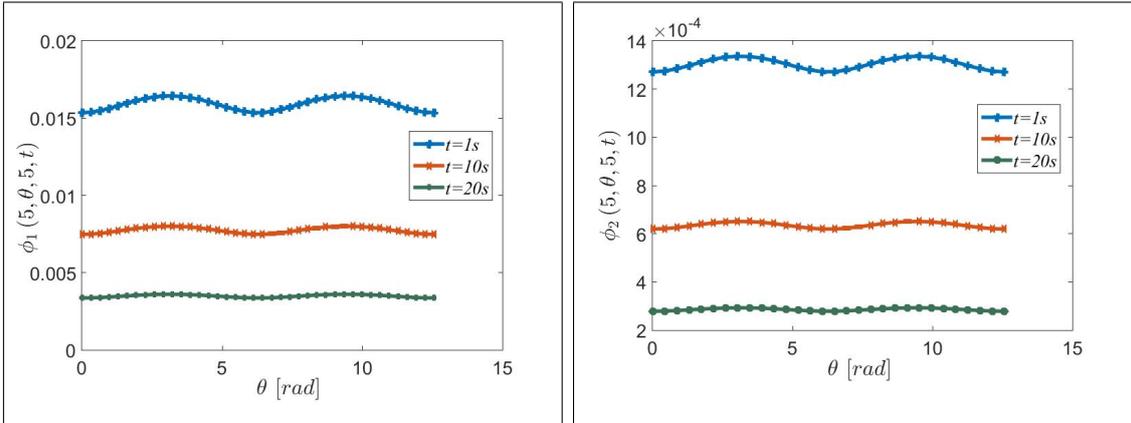


Figura 3.6: Fluxo  $\phi_1$  como função de  $\theta$ . Figura 3.7: Fluxo  $\phi_2$  como função de  $\theta$ .

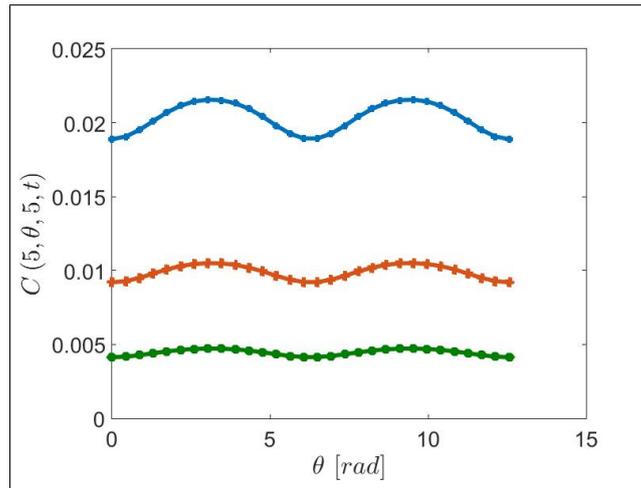


Figura 3.8: Concentração  $C$  como função de  $t$ .

Além disso, podemos verificar que conforme o valor de  $t$  aumenta, o comportamento angular tende a ficar uniforme. Para uma melhor visualização, apresentamos nas figuras (3.9) e (3.10) o comportamento gráfico do fluxo rápido e da concentração de precursores de nêutrons atrasados como função do tempo e da variável azimutal. Observamos no gráfico do fluxo a simetria com respeito à variável azimutal, fato estudado no capítulo 2.

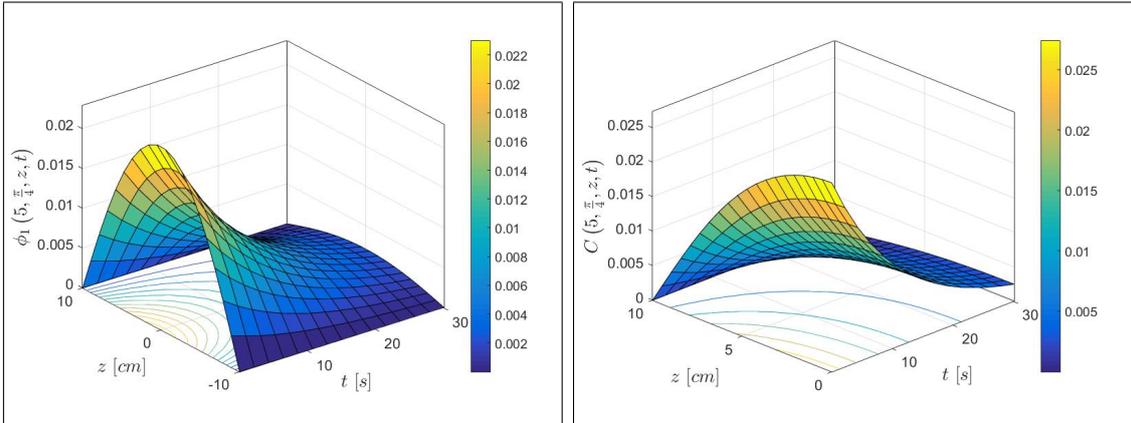


Figura 3.9: Fluxo  $\phi_1$  como função de  $(z, t)$ . Figura 3.10:  $C$  como função de  $(z, t)$ .

Por fim, podemos perceber pela figura (3.11) a variação do fluxo rápido com respeito à variável angular na medida em que  $t$  cresce.

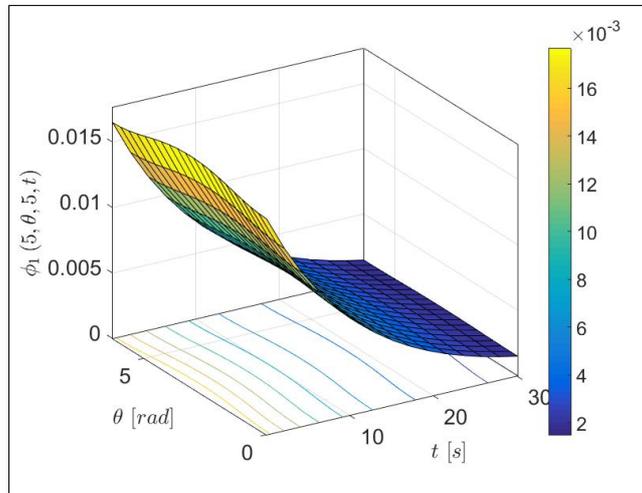


Figura 3.11: Fluxo  $\phi_1$  como função de  $(\theta, t)$ .

No próximo capítulo descreveremos um método para solucionarmos o problema de cinética espacial em geometria cilíndrica, usando o espectro obtido para o mesmo problema em geometria cartesiana, dando ênfase para duas dimensões espaciais.

## 4 CONCLUSÕES

No presente trabalho determinamos uma solução analítica para a equação de cinética espacial de nêutrons considerando um conjunto de três problemas, sendo o primeiro respectivo aos nêutrons monoenergéticos com um grupo de concentração de nêutrons atrasados em geometria cilíndrica. Dessa forma, a solução é analítica na medida em que nenhuma aproximação é feita ao longo da derivação da solução. Especificamente, a solução para esse problema foi desenvolvida pelo uso da técnica de separação de variáveis, a qual também foi aplicada a um cenário com duas células cilíndricas homogeneizadas adjacentes com diferentes parâmetros nucleares em cada seção. A escolha do conjunto de parâmetros foi para imitar a inserção de uma barra de controle, e como resultado, apresentamos o fluxo escalar com dependência espacial e temporal. Para ilustrar, apontamos uma simulação numérica, inicialmente, para a solução, considerando um meio homogêneo e, posteriormente, para a configuração levando em conta as duas células cilíndricas adjacentes. Para esse fim, todas as possíveis constantes de separação foram analisadas, com finalidade de compor o espectro mais geral que faz sentido do ponto de vista físico. Considerando a heterogeneidade do domínio, os resultados encontrados estão de acordo com o que foi esperado para tal cenário, ou seja quando o meio absorvente é inserido.

Uma das peculiaridades do presente problema é que condições iniciais e de contorno mantêm a invariância de escala da solução do problema de cinética espacial. Este grau de liberdade de escala permite construir a solução de cada célula cilíndrica homogênea, utilizando a mesma estrutura funcional, cuja a diferença na solução provém do fato de que o espectro para cada célula é distinto devido às diferenças nas suas propriedades físicas, ou seja diferenças no conjunto de parâmetros. Por outras palavras, utilizando os espectros apropriados, determinados a partir do conjunto de parâmetros nucleares juntamente com a invariância de escala, nos permite fixar escalas de modo a obter uma solução global. Ao passo que a continuidade

do fluxo escalar esteja simplesmente ajustando a magnitude do fluxo, o segundo grau de liberdade vem do fato de que embora a estrutura das funções de base seja a mesma, uma escala espectral típica é diferente, e portanto não existe ortogonalidade entre as autofunções utilizadas na célula 1 e na célula 2, respectivamente. De fato, a densidade de corrente depende, além da magnitude do fluxo, de uma escala típica que define o espectro, de modo que a fixação dessas escalas implica a continuidade do fluxo escalar por meio da borda celular e ainda estabelece a conservação na densidade de corrente. Vale ressaltar que o acoplamento na interface não aparece explicitamente no formalismo estabelecido, mas é conseguido por estiramento ou contração das escalas acima mencionadas.

Uma das grandes preocupações na determinação da solução para o problema de cinética de difusão de nêutrons é utilizar um método, que em princípio, permite derivar uma solução exata. A presente abordagem é um primeiro passo para obter uma solução analítica para o sistema de equações que modelam o problema de cinética 3-D em geometria cilíndrica considerando também o modelo multigrupo com dois grupos de energia e com seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.

Nos capítulos 2 e 3 desse trabalho, concluímos uma solução analítica sem recorrer a métodos numéricos. A solução é analítica no sentido que nenhuma aproximação é feita na sua derivação, sendo os coeficientes da série que a representa, calculados pela propriedade da ortogonalidade das autofunções envolvidas, eliminando desse modo, a necessidade de truncamento. Assim, toda solução obtida depende apenas dos parâmetros nucleares envolvidos no modelo e das condições iniciais e de fronteira. A fórmula encontrada para a solução do problema de cinética considerado é apropriada para códigos e implementação de computação simbólica, visto que só depende dos parâmetros nucleares do problema. Para efetuar o cálculo dos fluxos e da concentração de precursores, as séries foram truncadas apropriadamente, levando em consideração a parte do espectro que produz a solução com precisão desejada. Cumpre ressaltar que essa representação encontrada para o mo-

delo multigrupo é exata quando consideramos  $G + I \leq 4$  devido à garantia da existência de uma solução exata para a equação característica (polinomial). Devido à analiticidade, podemos calcular os fluxos escalares bem como as concentrações de precursores em qualquer ponto no interior do cilindro e em qualquer tempo.

Devido à dificuldade encontrada na determinação dos autovalores, que são caracterizados com os zeros das funções de Bessel, relacionados às autofunções radiais (não são igualmente espaçados), apresentamos no capítulo 4 um método que permite contornar o problema. Determinamos a solução do problema cilíndrico usando as autofunções espaciais que solucionam o problema em geometria cartesiana, conseguimos, pelo método proposto nessa pesquisa, determinar a solução para o problema multigrupo (dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados) com uma representação analítica para a solução.

Cumpramos finalmente observar que pelo Teorema de Cauchy-Kowalesky esse problema tem solução e é única. Estamos cientes do fato de que a solução estaria completa provando a convergência (além da existência e da unicidade) do método abordado, mas apesar de determinarmos a solução com espectro completo, não abordamos o critério que relaciona a precisão da solução com o truncamento do espectro. Focamos nossa atenção na generalização dessa solução analítica ao modelo multigrupo em um meio heterogêneo, o qual não podemos aplicar os métodos usados neste trabalho para tentar solucioná-lo por se tratar de um problema em que os parâmetros nucleares não são constantes. Essas questões em aberto serão abordadas em trabalhos futuros.

## Referências Bibliográficas

- [1] ABOANBER, A. E., AND HAMADA., Y. M. Generalized runge-kutta method for two- and three-dimensional space-time diffusion equations with a variable time step. *Annals of Nuclear Energy v.35*, 6 (2008), 1024–1040.
- [2] ABOANBER, A. E., AND HAMADA., Y. M. Computation accuracy and efficiency of a power series analytic method for two- and three- space-dependent transient problems. *Progress in Nuclear Energy 51*, 3 (2009), 451–464.
- [3] ABOANBER, A. E., AND NAHLA., A. A. Solution of two-dimensional spacetime multigroup reactor kinetics equations by generalized padé and cut-product approximations. *Annals of Nuclear Energy 33*, 3 (2006), 209–222.
- [4] ABOANBER, A. E., AND NAHLA., A. A. Adaptive matrix formation amf method of space-time multigroup reactor kinetics equations in multidimensional model. *Annals of Nuclear Energy 34*, 1-2 (2007), 103–119.
- [5] CEOLIN, C., SCHRAMM, M., VILHENA, M. T., AND BODMANN., B. E. J. On the neutron multi-group kinetic diffusion equation in a heterogeneous slab: An exact solution on a finite set of discrete points. *Annals of Nuclear Energy v.76* (2015), 271–282.
- [6] DAHMANI, M., BAUDRON, A. M., LAUTARD, J. J., AND ERRADI., L. A 3d nodal mixed dual method for nuclear reactor kinetics with improved quasistatic model and a semi-implicit scheme to solve the precursor equations. *Annals of Nuclear Energy 28*, 8 (2001), 805–824.
- [7] DiBENEDETTO., E. *Partial Differential Equations: Second Edition*, 2nd ed. Birkhäuser Boston, 2009.

- [8] DUDERSTADT, J. J., AND HAMILTON., L. J. *Nuclear Reactor Analysis*, 1st ed. John Wiley & Sons, 1976.
- [9] EVANS., L. C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. American Mathematical Society, 2010.
- [10] GONZÁLEZ-PINTOR, S., GINESTAR, D., AND VERDÚ., G. Time integration of the neutron diffusion equation on hexagonal geometries. *Mathematical and Computer Modelling* 52, 7-8 (2010), 1203–1210.
- [11] GROSSMAN, L. M., AND HENNART., J. P. Nodal diffusion methods for spacetime neutron kinetics. *Progress in Nuclear Energy v.49*, 3 (2007), 181–216.
- [12] GUPTA, A., MODAK, R. S., GUPTA, H. P., KUMAR, V., AND BHATT., K. Parallelised krylov subspace method for reactor kinetics by iqs approach. *Annals of Nuclear Energy* 32, 15 (2005), 1693–1703.
- [13] HANERLIOGULLARI., A. Neutronic calculations at uranium powered cylindrical reactor by using bessel differential equation. *Nuclear Science and Technology* (2012), 15–24.
- [14] LAMARSH., J. R. *Introduction to Nuclear Reactor Theory*. American Nuclear Society, 2002.
- [15] MIRÓ, R., GINESTAR, D., VERDÚ, G., AND HENNIG., D. A nodal modal method for the neutron diffusion equation. application to bwr instabilities analysis. *Annals of Nuclear Energy* 29, 10 (2002), 1171–1194.
- [16] NAGAYA, Y., AND KOBAYASHI., K. Solution of 1d multigroup time-dependent diffusion using the coupled reactors theory. *Annals of Nuclear Energy v.22* (1995), 421–440.

- [17] OLIVEIRA, F. L., MAIORINO, J. R., AND SANTOS., R. S. The analytical benchmark solution of spatial diffusion kinetics in source driven systems for homogeneous media. *International Nuclear Atlantic Conference - INAC* (2007).
- [18] OLIVEIRA, F. R. Solução analítica da equação de multigrupo de cinética de nêutrons em geometria cartesiana e cilíndrica unidimensionais. Master's thesis, UFRGS, 2013.
- [19] OLIVEIRA, F. R., BODMANN, B. E. J., VILHENA, M. T., AND CARVALHO., F. On an analytical formulation for the mono-energetic neutron space-kinetic equation in full cylinder symmetry. *Annals of Nuclear Energy* 99 (2016), 253–257.
- [20] PETERSEN, C. Z., BODMANN, B. E. J., VILHENA, M. T., AND BARROS., R. C. Recursive solutions for multi-group neutron kinetics diffusion equations in homogeneous three-dimensional rectangular domains with time dependent perturbations. *Kerntechnik(1987) v.79* (2014), 494–499.
- [21] QUINTERO-LEYVA., B. The multi-group integro-differential equations of the neutron diffusion kinetics. solutions with the progressive polynomial approximation in multi-slab geometry. *Annals of Nuclear Energy* 37, 5 (2010), 766–770.
- [22] SELIVERSTOV., V. V. Kinetic diffusion equation in a one-dimensional cylindrical geometry. *Atomic Energy* 115 (2014), 319–327.
- [23] SHIMJITH, S. R., TIWARI, A. P., NASKAR, M., AND BANDYOPADHYAY., B. Space-time kinetics modeling of advanced heavy water reactor for control studies. *Annals of Nuclear Energy* 37, 3 (2010), 310–324.

- [24] TAMITANI, M., IWAMOTO, T., AND MOORE., B. R. Development of kinetics model for bwr core simulator aetna. *Journal of Nuclear Science and Technology* 40, 4 (2003), 201–212.
- [25] WANG, D., LI, F., GUO, J., WEI, J., ZHANG, J., AND HAO., C. Improved nodal expansion method for solving neutron diffusion equation in cylindrical geometry. *Nuclear Engineering and Design* 240 (2010), 1997–2004.