

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO
MESTRADO ACADÊMICO EM ADMINISTRAÇÃO

EDUARDO BERED FERNANDES VIEIRA

RESTRIÇÃO DE LIQUIDEZ PARA PORTFÓLIO DE
INVESTIMENTO COM BASE NO VOLUME FINANCEIRO
NEGOCIADO

Porto Alegre

Maio/2017

EDUARDO BERED FERNANDES VIEIRA

RESTRIÇÃO DE LIQUIDEZ PARA PORTFÓLIO DE
INVESTIMENTO COM BASE NO VOLUME FINANCEIRO
NEGOCIADO

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Administração pelo Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena

Porto Alegre

Maio/2017

CIP - Catalogação na Publicação

Vieira, Eduardo Bered Fernandes
Restrição de Liquidez para Portfólio de
Investimento com base no Volume Financeiro Negociado
/ Eduardo Bered Fernandes Vieira. -- 2015.
38 f.

Orientador: Tiago Pascoal Filomena.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa
de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS,
2015.

1. Otimização de Carteira de investimento. 2.
Liquidez. I. Filomena, Tiago Pascoal, orient. II.
Título.

EDUARDO BERED FERNANDES VIEIRA

RESTRIÇÃO DE LIQUIDEZ PARA PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO
COM BASE NO VOLUME FINANCEIRO NEGOCIADO

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Administração pelo Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena
(Orientador) - UFRGS

Prof. Dr. Cristiano Machado Costa -
UNISINOS

Prof. Dr. Denis Borenstein - UFRGS

Prof. Dr. João Frois Caldeira -
UFRGS

Prof. Dr. Marcelo Brutti Righi -
UFRGS

Porto Alegre
Maio/2017

RESUMO

Esse trabalho propõe a inserção de restrição de liquidez em um modelo de seleção de carteiras, visando aplicação no mercado brasileiro. No Brasil, a Comissão de Valores Imobiliários (CVM) expõe a importância do controle da liquidez de fundos de investimentos através de instrução publicada em 2012. A restrição proposta considera parâmetros utilizados nas normas brasileiras de controle de liquidez, como percentual do total negociado máximo, nível de liquidação e prazo para liquidação. O modelo é aplicado considerando-se diversos cenários, sendo variados parâmetros como valor da carteira formada e nível de liquidação aceitável, em diferentes intervalos de formação de carteiras. Verificam-se os níveis de liquidação das carteiras formadas e seu impacto no nível de risco das mesmas. Os resultados se mostraram consistentes, com bons níveis de percentual liquidado das carteiras formadas, próximos aos níveis de liquidação aceitáveis. Foi constatado também um aumento do nível de risco das carteiras mais restritas pela liquidez.

Palavras-chave: liquidez, seleção de carteiras, restrição de liquidez.

ABSTRACT

This work proposes the insertion of a liquidity constraint in a portfolio selection model, aiming to be applied in the Brazilian market. In Brazil, the "Comissão de Valores Imobiliários" (CVM) exposes the importance of controlling the liquidity of investment funds through the instruction published in 2012 . The constraint proposed in this work considers parameters used in the Brazilian regulatory standards of liquidity control parameters such as maximum percentage of monetary value, liquidation level and liquidation term date. The model is applied considering several scenarios, varying parameters such as the portfolio value and acceptable liquidation level, in different portfolio formation intervals. The liquidation levels of the portfolios formed and their impact on the risk of the portfolios are verified. The results were consistent, with good levels of liquidation of the portfolios formed, close to acceptable liquidation levels. There was also an increase in the risk of liquidity-restricted portfolios.

Keywords: liquidity, portfolio selection, liquidity constraint.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Teste 1, sem restrição de liquidez	24
Tabela 2 – Previsões de volatilidade no teste 1, sem restrição de liquidez	25
Tabela 3 – Intervalo de 20 dias, com restrição de liquidez	25
Tabela 4 – Intervalo de 40 dias, com restrição de liquidez	26
Tabela 5 – Intervalo de 60 dias, com restrição de liquidez	26
Tabela 6 – Previsões de volatilidade para o intervalo de 20 dias, com restrição de liquidez	27
Tabela 7 – Previsões de volatilidade para o intervalo de 40 dias, com restrição de liquidez	27
Tabela 8 – Previsões de volatilidade para o intervalo de 40 dias, com restrição de liquidez	27
Tabela 9 – Teste 2, sem restrição de liquidez	29
Tabela 10 – Previsões de volatilidade no teste 2, sem restrição de liquidez	30
Tabela 11 – Amostra 1 com restrição de liquidez	31
Tabela 12 – Amostra 2 com restrição de liquidez	31
Tabela 13 – Amostra 3 com restrição de liquidez	32
Tabela 14 – Previsões de volatilidade na amostra 1, com restrição de liquidez . . .	32
Tabela 15 – Previsões de volatilidade na amostra 2, com restrição de liquidez . . .	33
Tabela 16 – Previsões de volatilidade na amostra 3, com restrição de liquidez . . .	33

SUMÁRIO

	Lista de tabelas	6
1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Objetivo	9
1.2	Limitações	10
1.3	Organização da Proposta de Dissertação	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
2.1	Métricas de Liquidez de Ativos	11
2.1.1	Índices baseados em Volume	11
2.1.2	Índices baseados em Preços	12
2.2	Restrições de Liquidez	13
2.2.1	Filtragem Prévia	13
2.2.2	Média Ponderada	13
2.2.3	Restrição por ativos individuais	14
2.3	Outros tipos de restrições em modelo de seleção de carteiras	14
3	METODOLOGIA	17
3.1	O Modelo de Mínima Variância	17
3.2	Restrições de Liquidez	18
3.2.1	Modelo 1	18
3.2.2	Modelo 2	19
3.2.3	Modelo 3	21
4	TESTES EMPÍRICOS	23
4.1	Resultados	24
4.1.1	Teste 1: Intervalos de formação de carteiras de 20, 40 e 60 dias	24
4.1.2	Teste 2: Intervalo de formação de carteiras de 1 dia	29
5	CONCLUSÕES	34
	REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

A liquidez é um conceito muito conhecido e utilizado no mercado. Apesar disso, modelos de seleção de carteira clássicos como Markowitz (1952) costumam considerar apenas relações de risco e retorno ao analisar um investimento, assumindo que os ativos podem ser negociados continuamente, em qualquer quantidade. Geralmente, estes modelos não consideram a liquidez dos ativos envolvidos, o que pode trazer efeitos negativos ao investidor. Durante o processo de decisão, além da rentabilidade e do risco, o prazo que se estará disposto a permanecer na posição e a possibilidade de saída da posição se mostram importantes.

A posição de um investidor em um determinado ativo está relacionada com a quantidade de ativos e seu preço. Porém, dependendo da quantidade de ativos o fechamento da posição se torna impossibilitado no determinado preço. Um pequeno investidor provavelmente consiga vender todos os seus ativos pelo preço desejado, porém um grande investidor certamente não terá a mesma facilidade. Seria necessária uma redução no preço para a venda de todos os ativos. Portanto, uma grande oferta de ativos gera queda no preço do mesmo, reduzindo o retorno proveniente de sua venda.

A precificação de ativos tem na liquidez um importante fator. Quanto menor a liquidez, maior é o custo de negociação do ativo. Desta forma, se espera um retorno maior para um ativo com menor liquidez. Porém, investir em ativos com baixa liquidez muitas vezes não se torna vantajoso, se o período de investimento for curto, pois os custos de transação atuam de forma a reduzir os ganhos. Em muitos casos, são períodos longos que podem apresentar vantagens em investimentos em ativos com pouca liquidez. Portanto, na seleção de investimentos, é importante analisar a liquidez, além da relação risco-retorno.

No Brasil, a Comissão de Valores Imobiliários (CVM), responsável por normalizar e fiscalizar a atuação de agentes de mercado no Brasil, indica a respeito da importância do controle da liquidez dos fundos de investimento. Em 2012, em uma instrução, a CVM reformou as regras dos fundos de investimento, dando importância para a liquidez.

Em Pereira et al. (2015) é proposta uma restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras. A restrição proposta considera normas brasileiras de controle de liquidez e tem aplicação individual em todos os ativos participantes da carteira. O artigo citado acima é utilizado como ponto de partida para a presente dissertação. O principal ponto que difere de Pereira et al. (2015) está na maneira que a liquidez é considerada. Nesta dissertação é considerada a liquidez do portfólio como um todo. Portanto é adotado que não necessariamente todos os ativos participantes estejam individualmente atendendo às normas, mas sim a carteira formada.

Em Lo, Petrov e Wierzbicki (2003) é realizado um teste, comparando três medições de liquidez: taxa de turnover, volume negociado e *bid-ask spread*. Foi constatada grande

correlação entre as três medidas. Portanto, na presente dissertação foi escolhido o volume financeiro negociado como medida de liquidez pela facilidade de obtenção e manipulação dos dados. Em Pereira et al. (2015), onde é utilizado o volume monetário, é feita uma comparação de três medições de liquidez utilizando o volume: média móvel de 5 dias, média móvel de 30 dias e decaimento exponencial simples. Foi constatada grande correlação entre as três medidas. Para o presente trabalho foi escolhida a média móvel de 30 dias, pois apesar da alta correlação com as demais medidas, foi a medida que apresentou menores valores para percentual liquidado da carteira em Pereira et al. (2015). Portanto foi escolhido o caso que apresentou os piores resultados, apesar da alta correlação entre todas as opções.

Com o objetivo de aplicação no Brasil, parâmetros considerados em manuais de corretoras e bancos para o controle de liquidez estão presentes nas restrições aplicadas no presente trabalho. Segundo Pereira et al. (2015) a liquidez é controlada pelas corretoras e bancos, basicamente, com base em três indicadores: o percentual limite do volume total negociado, o prazo para liquidação, e o nível de liquidação aceitável.

O percentual limite do volume total negociado (pl_{max}) é o percentual máximo do total médio transacionado que se acredita que a sua venda não causará impacto no preço do ativo. O prazo para liquidação ($ppzo_{max}$) é o período máximo para que o total de um determinado ativo seja liquidado. O nível de liquidação aceitável ($pnvl_{min}$) representa uma flexibilização da exigência de liquidação total da posição, não sendo necessária a completa liquidação no prazo exigido. Em Pereira et al. (2015) é criada a constante β , que relaciona estes três parâmetros. Esta constante é adicionada na restrição de liquidez imposta pelos autores. O β é apresentado abaixo, na equação 1:

$$\beta = \frac{pl_{max} \cdot ppzo_{max}}{pnvl_{min}} \quad (1)$$

A inserção da restrição considerada no presente trabalho, com parâmetros de controle de liquidez, aplicado no mercado brasileiro, apresenta bons resultados para percentuais liquidados das carteiras formadas. Comparando com carteiras formadas na ausência da restrição, é observado um aumento considerável na liquidação das mesmas. Em diversos casos analisados o percentual liquidado se mostra sempre próximo ao nível aceitável. Como esperado, o risco das carteiras restritas pela liquidez se mostra com valores mais elevados, porém, as carteiras formadas se adequam às normas brasileiras, no que diz respeito ao controle da liquidação aceitável.

1.1 Objetivo

Esta dissertação visa a aplicação de restrição de liquidez em um modelo geral de seleção de carteira, visando aplicação no mercado brasileiro, sendo este o seu principal

objetivo. Aplicação de restrição que leve em consideração as normas brasileiras a respeito do controle da liquidez de fundos de investimento.

Objetivos específicos:

- Utilizar restrições de liquidez que sejam aplicáveis em vários modelos de investimento;
- Analisar a liquidez do portfólio como um todo, e não individualmente dos ativos participantes;
- Considerar o valor monetário do portfólio como variável da liquidez;
- Utilizar o volume financeiro como métrica de liquidez.

1.2 Limitações

A principal limitação do estudo realizado é o fato de ser considerado apenas um modelo de seleção de carteiras. Para simplificar, pelo elevado tempo de processamento, foi utilizado o modelo de mínima variância com variância amostral. Apesar disso, as restrições impostas não são dependentes do modelo de seleção utilizado, sendo possível utilizá-las em qualquer outro modelo de otimização. Outro ponto a ser comentado é que o modelo utilizado não leva em consideração a interação de liquidez entre os ativos, ou seja, a variação da liquidez de um ativo não afeta a liquidez dos demais.

1.3 Organização da Proposta de Dissertação

A seguir, no item 2, é apresentada uma revisão da literatura a respeito de liquidez; na seção 3 será exposto o modelo proposto e será descrito o banco de dados que será utilizado; a seção 4 apresenta um exemplo da aplicação das restrições propostas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em virtude da necessidade de se levar em conta os efeitos da liquidez, o interesse pelo tema da comunidade científica tem crescido. Nesta seção será apresentada uma base teórica que será utilizada no modelo do trabalho. Primeiramente serão apresentados os principais índices de liquidez. Em seguida, serão discutidas as formas de restrição de liquidez no modelo de seleção de carteira.

2.1 Métricas de Liquidez de Ativos

O estudo da liquidez possui um grande problema que é o fato da liquidez ser multidimensional. Este fato torna dificultada uma observação de forma direta da liquidez. A utilização de aproximações ocasiona, inevitavelmente, em erros de medição. Entre pesquisadores, não há unanimidade a respeito da melhor aproximação. Segundo Demsetz (1968), são determinantes da liquidez de um ativo: o volume financeiro transacionado, o número de negócios, a volatilidade, o tamanho da empresa e o preço da ação. É possível criar índices artificiais que tentam capturar da forma mais precisa possível o comportamento da liquidez. São apresentados a seguir os principais índices baseados em volume assim como os principais índices baseados em preços.

2.1.1 Índices baseados em Volume

O volume financeiro é bastante utilizado como aproximação para a liquidez. Segundo Gabrielsen, Marzo e Zagaglia (2011), índices baseados em informação fornecida pelo volume negociado estão relacionados com o impacto no preço das transações. Isso pode ser capturado simplesmente medindo-se o valor total de ações negociadas em um período definido. É intuitivo pensar que uma ação que negocia muito possui liquidez elevada. Apesar da simplicidade, o volume transacionado pode ser considerado uma medida confiável da liquidez, apesar de não ser unanimidade entre os pesquisadores.

Em Brennan, Chordia e Subrahmanyam (1998) é investigado se os retornos esperados são explicados por diversas características, entre elas a liquidez. Eles empregam o volume monetário transacionado como *proxy* para esta variável, pois consideraram uma medida mais apropriada para seu estudo devido a grande disponibilidade de uma longa série de dados, permitindo assim a realização de testes de hipótese mais robustos.

Outro índice baseado em volume é a taxa de turnover. Ela relaciona o volume total transacionado e o total de ativos emitidos. A taxa de turnover é definida na equação 2:

$$turnover_{i,t} = \frac{l_{i,t}}{\text{número de ações emitidas de } i \text{ em } t \cdot P_{i,t}} \quad (2)$$

Onde $l_{i,t}$ é o volume monetário transacionado do ativo i em t ; $P_{i,t}$ é o preço médio do ativo i em t .

Em Correia, Amaral e Bressan (2008), onde é examinado se o retorno das ações pode ser explicado pela liquidez, é utilizado o índice turnover como *proxy*. Alguns outros trabalhos que utilizam este índice como aproximação de liquidez são Datar, Naik e Radcliffe (1998), Marshall e Young (2003), Chan e Faff (2003) e Jun, Marathe e Shawky (2003). No estudo de Chordia, Subrahmanyam e Anshuman (2001) foi analisada a relação entre retornos esperados e duas *proxies* para liquidez: o volume transacionado e o índice turnover.

A taxa de liquidez convencional é bastante utilizada na análise de liquidez. Esta taxa relaciona a variação marginal no volume transacionado e a variação marginal no preço de um ativo. Ela é definida como:

$$LR_{i,T} = \frac{\sum_{t=1}^T l_{i,t}}{\sum_{t=1}^T |P_{i,t} - P_{i,t-1}|} \quad (3)$$

Outra medida de liquidez é a taxa de liquidez de Hui e Heubel (1984). Essa taxa trata de uma relação entre o volume transacionado no período de cinco dias e seu impacto nos preços dos ativos (GABRIELSEN; MARZO; ZAGAGLIA, 2011). A taxa de liquidez de Hui and Heubel pode ser calculada da seguinte forma:

$$LR_{HH} = \frac{(P_{máx} - P_{mín})/P_{mín}}{V/S \cdot \bar{P}} \quad (4)$$

Onde $P_{máx}$ e $P_{mín}$ são os preços máximo e mínimo do ativo dentro de um determinado período; V o volume transacionado do ativo nesse período; S o número total de ações emitidas e \bar{P} o preço médio do ativo nesse período.

2.1.2 Índices baseados em Preços

Uma medida de liquidez bastante utilizada por pesquisadores é a diferença entre o preço ofertado de um ativo e seu preço demandado, o *bid-ask spread*. Em Amihud e Mendelson (1986) a liquidez é aproximada pelo *bid-ask spread* para examinar a relação entre retorno e liquidez. Diversos outros autores como Brennan e Subrahmanyam (1996), Atkins e Dyl (1997), Jacoby, Fowler e Gottesman (2000) também utilizaram esta medida como aproximação para liquidez.

A análise direta da variação nos preços é utilizada para inferir a liquidez de um ativo ou um mercado. Os principais índices baseados em preços são a taxa de liquidez de March e Rock (1986) e a taxa de variância, segundo Gabrielsen, Marzo e Zagaglia (2011).

A taxa de liquidez de Marsh e Rock (1986) relaciona a variação no preço com o total transacionado. Entretanto, o volume negociado não é utilizado, mas sim o número de transações. Portanto, se aplica o pressuposto de que as mudanças nos preços não são influenciadas pelo volume transacionado. Já a taxa de variância relaciona variações de longo e de curto prazo nos preços dos ativos. Maiores detalhes podem ser encontrados em Gabrielsen, Marzo e Zagaglia (2011).

Em Amihud (2002) é proposta uma medida de iliquidez como sendo a razão entre o retorno absoluto e o volume financeiro negociado. Esta medida utiliza dados diários e pode ser interpretada como a resposta do preço associada com o volume negociado, sendo então uma medida de impacto no preço. Resultados mostram que os retornos são função crescente da iliquidez. A equação 5 mostra a medida de iliquidez de Amihud.

$$ILLIQ = \frac{R_i}{V_i} \quad (5)$$

Onde R_i é o retorno da ação i em um determinado mês e V_i é o volume financeiro da ação i no mesmo mês de análise.

2.2 Restrições de Liquidez

Nesta seção são abordadas formas de se inserir a liquidez como restrição no problema de seleção de carteira encontradas na literatura. Existem basicamente três maneiras de incluir esse parâmetro como restrição: a filtragem prévia, a média ponderada e a restrição individual no ativo.

2.2.1 Filtragem Prévia

A ideia é filtrar a amostra previamente, definindo uma liquidez de corte. Apenas ativos com liquidez mínima definida poderão fazer parte da carteira. Não se trata de uma restrição no modelo propriamente dito, mas uma exclusão de ativos que não possuam liquidez mínima exigida, funcionando como um pré-processamento, realizado antes do procedimento de otimização da carteira.

2.2.2 Média Ponderada

É possível, ao invés de filtragem prévia de ativos, ser utilizada uma restrição que considera a liquidez da carteira como um todo, definido por Lo, Petrov e Wierzbicki (2003). Utilizando essa métrica de liquidez no portfólio, é proposta uma restrição que assegura que a média ponderada da liquidez dos ativos participantes da carteira seja maior que um determinado nível. Dessa forma, ativos que possivelmente seriam excluídos na filtragem

prévia podem ser utilizados, aumentando o universo de soluções da seleção da carteira. A restrição de liquidez pela média ponderada da carteira pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^N l_i \cdot x_i \geq l_0 \quad (6)$$

Onde l_i é a liquidez do ativo i , x_i é o peso alocado no ativo i , l_0 é o nível de liquidez mínimo exigido e N é o número de ativos participantes da carteira.

Algumas limitantes dessa métrica de liquidez são abordadas por Lo, Petrov e Wierzbicki (2003). Ao ser utilizada a média ponderada como liquidez do portfólio, não está sendo considerada nenhuma interação entre os ativos. A liquidez de um ativo não é afetada pela liquidez de nenhum outro. Além disso, a imposição dessa restrição desconsidera o valor monetário dos portfólios formados, sendo analisado apenas o peso em cada um dos ativos. Portfólios com valores financeiros elevados possuem maior dificuldade de liquidação.

A utilização apenas dessa restrição de liquidez pode gerar escolhas por ativos pouco líquidos para a formação da carteira, devido ao seu alto retorno. Esses ativos com baixa liquidez são respaldados pela inclusão de ativos muito líquidos. Esse efeito na formação da carteira pode ser muitas vezes não desejável.

2.2.3 Restrição por ativos individuais

Nessa restrição é levado em consideração o valor financeiro alocado em cada ativo que faça parte da carteira. O valor máximo alocado em um determinado ativo é dependente de sua liquidez. Dessa forma, um ativo terá menos valor alocado caso sua liquidez for baixa. A restrição por ativos individuais pode ser escrita como:

$$x_i \cdot VTC \leq l_i \quad (7)$$

Onde VTC é o valor total da carteira formada.

Em Pereira et al. (2015) foi imposta uma restrição por ativos individuais na qual o valor monetário de um ativo é limitado por sua liquidez. Nesta restrição é inserida a constante β que multiplica a liquidez. Esta constante considera parâmetros de normas brasileiras para controle de liquidez. A restrição está demonstrada na equação 8.

$$x_i \cdot VTC \leq \beta \cdot l_i \quad (8)$$

2.3 Outros tipos de restrições em modelo de seleção de carteiras

Nesta seção, é feita uma breve revisão de outros casos de uso de restrições em seleção de carteira. Restrições são impostas de diversas formas, em diferentes variáveis

do modelo. Abaixo serão citados alguns exemplos de diferentes restrições utilizadas no modelo clássico de seleção de carteiras.

Em Lobo, Fazel e Boyd (2007) é considerado o problema de otimização de portfólio com restrições de custos de transação e exposição ao risco. A maximização do retorno esperado é analisada, sendo este modelo sujeito a diferentes tipos de restrições. Os custos de transações são inseridos de duas formas: custo fixo e custo linear de transação. O custo fixo seria a taxa de transação, independente do valor transacionado. Já o custo linear possui dependência do valor transacionado. São estudadas também restrições de diversificação, que limitam o valor máximo investido em cada ativo do portfólio. Como o problema analisado considera maximização do retorno esperado é inserida uma restrição que limita a variância do portfólio formado. Além disso, é estudada a imposição de restrição que limita o máximo valor de vendas à descoberto permitido. Outros exemplos de estudos relacionados à custos de transação são: Magill e Constantinides (1976), Patel e Subrahmanyam (1982), Davis e Norman (1990), Kellerer, Mansini e Speranza (2000) e Konno e Wijayanayake (2001).

Em Chang et al. (2000) é estudada a inserção de restrições que limitam a quantidade de ativos presentes na carteira formada, em um problema de seleção de carteiras com o objetivo de minimizar a variância, medida de risco utilizada. Além disso, outro estudo é realizado, no qual são impostas restrições que limitam o percentual máximo de valor alocado em cada ativo pertencente à carteira. É mostrado que o procedimento de solução fica mais complexo e que as fronteiras eficientes se mostram descontínuas na presença das restrições analisadas. Outros exemplos de estudos que discutem cardinalidade em problemas de seleção de carteira são: Maringer e Kellerer (2003), Shaw, Liu e Kopman (2008), Bertsimas e Shioda (2009) e Anagnostopoulos e Mamanis (2011).

Outro exemplo de restrições impostas ao modelo clássico de mínima variância está em DeMiguel et al. (2009). São impostas restrições na norma do vetor de pesos da carteira formada. A norma do vetor de pesos é limitada por um valor estipulado. Os resultados obtidos são comparados com outras estratégias encontradas na literatura, como em Jagannathan e Ma (2003), onde é apresentada uma estratégia com restrição na venda à descoberto do portfólio, e em Ledoit e Wolf (2003), onde a matriz de covariância é construída pela média de dois estimadores.

Em Bonami e Lejeune (2009) é considerado o modelo de seleção de carteiras com minimização da variância, onde o retorno esperado dos ativos é tido como estocástico. É inserida uma restrição probabilística que impõe que o retorno esperado do portfólio formado seja superior ao nível desejado, para um dado nível de confiança. Outros exemplos de estudos com restrição estocásticas em carteiras de investimento são: Dentcheva e Ruszczyński (2003), Dentcheva e Ruszczyński (2006), Huang (2007) e Hasuike, Katagiri e Ishii (2009).

Diversas estratégias de investimentos, utilizando otimização de portfólios, são

comparadas em Behr, Guettler e Miebs (2013). São propostas restrições nos pesos máximos e mínimos permitidos em cada ativo da carteira. Os resultados obtidos são comparados com portfólios de *benchmark*, sendo estes o portfólio igualmente distribuído ($1/N$) e o portfólio de mercado. Além da comparação com portfólios de *benchmark*, os resultados são comparados com diferentes estratégias como: restrições na venda à descoberto, restrições na norma do vetor de pesos e diferentes formas de construção da matriz de covariância.

3 METODOLOGIA

Em Lo, Petrov e Wierzbicki (2003) é realizado um teste, comparando três medições de liquidez: taxa de turnover, volume negociado e *bid-ask spread*. Foi constatada grande correlação entre as três medidas. Portanto, na presente dissertação foi escolhido o volume financeiro negociado como medida de liquidez pela facilidade de obtenção e manipulação dos dados. Em Pereira et al. (2015), onde é utilizado o volume monetário, é feita uma comparação de três medições de liquidez utilizando o volume: média móvel de 5 dias, média móvel de 30 dias e decaimento exponencial simples. Foi constatada grande correlação entre as três medidas. Para o presente trabalho foi escolhida a média móvel de 30 dias, pois apesar da alta correlação com as demais medidas, foi a medida que apresentou menores valores para percentual liquidado da carteira em Pereira et al. (2015). Portanto foi escolhido o caso que apresentou os piores resultados, apesar da alta correlação entre todas as opções.

3.1 O Modelo de Mínima Variância

O modelo tem como objetivo a minimização do risco da carteira. Este risco será medido pela variância dos ativos participantes do portfólio, dado um retorno mínimo exigido. A variância da carteira é calculada levando em consideração a interação entre os ativos, medida pela covariância. A função objetivo a ser minimizada pode ser escrita como:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \quad (9)$$

Onde x_i é o peso alocado no ativo i , σ_{ij} é a covariância dos retornos entre o ativo i e o ativo j , em uma carteira formada por N ativos.

As restrições são apresentadas abaixo. É adotado que todo o capital disponível será utilizado, ou seja, a soma dos pesos de todos os ativos que formam a carteira é igual a um. Como premissa, por simplificação, não serão consideradas vendas à descoberto. Portanto os pesos de todos os ativos deverão ser maiores ou iguais a zero. Também por simplificação, não será considerado retorno exigido para a carteira formada.

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (10)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall x \quad (11)$$

Após testes iniciais foi constatado um elevado tempo de processamento. Para tornar possível a realização dos testes desejados foi necessário a utilização de uma adaptação do modelo original de Markowitz, que aprimora o desempenho computacional. Os dois modelos são equivalentes e chegam na mesma resposta. Foram construídas no total mais de 17 mil carteiras, variando o tempo de processamento de 30 segundos, podendo chegar a mais de 10 minutos em alguns casos para a formação de cada carteira. Isso se deve à complexidade da restrição imposta. Foi imposto um limite máximo de tempo para a tentativa de formação de carteiras. Ao chegar aos 10 minutos o procedimento é interrompido e a carteira não é formada. Apesar da imposição do modelo adaptado e do limite de tempo foi observado um elevado tempo computacional para a realização de todos os testes desejados.

A adaptação do modelo original de Markowitz utilizada, visando aprimorar o desempenho computacional, é proposta em Filomena e Lejeune (2012). A função objetivo, juntamente com a restrição imposta ao modelo, estão demonstrados nas equações 12 e 13, respectivamente.

Função Objetivo:

$$\min \frac{1}{\text{card}(T)} \cdot \sum_{t=1}^T y_t^2 \quad (12)$$

sujeito à:

$$y_t = \sum_{i=1}^N d_i f_{i,t} \cdot x_i \quad (13)$$

3.2 Restrições de Liquidez

3.2.1 Modelo 1

A primeira restrição proposta neste modelo tem como objetivo de flexibilizar a restrição imposta em Pereira et al. (2015), onde todos os ativos tem seu peso máximo limitado por sua liquidez multiplicada pelo β . Foi adicionado um termo que possui uma variável binária θ que multiplica uma constante M , com M sendo um valor arbitrário elevado. A restrição pode ser escrita como:

$$x_i \cdot VTC \leq \beta \cdot l_i + \theta_i \cdot M \quad (14)$$

Onde θ_i é zero se o ativo i possui restrição ativa e um se possui restrição inativa.

A adição do termo com a variável binária não torna obrigatório que todos os ativos sejam restritos por sua liquidez, apenas os ativos escolhidos. A escolha de quais ativos serão restringidos terá um contraponto, na restrição apresentada a seguir. Um custo será gerado, ao se retirar a restrição de um ativo, sendo o valor máximo da carteira reduzido.

A segunda restrição, apresentada a seguir trabalha em conjunto com a restrição previamente exposta. A restrição do valor do portfólio nos informa qual o valor máximo permitido, sabendo-se quais são ativos formadores da carteira e sabendo-se quais são os ativos que terão sua restrição individual relaxada. A variável binária u_i indica se o ativo i está fazendo parte da carteira formada. Esta restrição depende, portanto de duas variáveis binárias, além do parâmetro β e da liquidez dos ativos. A restrição do valor da carteira é exposta na equação 15:

$$VTC \leq \beta \cdot \sum_{i=1}^N l_i \cdot (u_i - \theta_i) \quad (15)$$

Onde u_i é uma variável binária, igual a um, se o ativo i é participante da carteira formada, e igual a zero caso não seja participante.

O valor máximo da carteira aumenta quando aumenta o número de ativos formadores da carteira. Porém, nota-se que o valor máximo implica que nenhum ativo sofre relaxamento da restrição individual. Ao se relaxar a restrição individual de um ativo, este ativo é eliminado do somatório dos volumes, utilizado na restrição do valor da carteira. Portanto, aumentando o número de ativos que possuem restrição relaxada, menor será o valor admissível que torna possível que se formem carteiras. Por outro lado, quanto maior é o valor da carteira desejada menor é o número de ativos nos quais a restrição individual poderá ser relaxada. O valor máximo para uma carteira a ser formada exige que todos os ativos tenham a restrição individual ativa, e pode ser escrito como:

$$VTC_{máx} \leq \beta \cdot \sum_{i=1}^N l_i \quad (16)$$

3.2.2 Modelo 2

Observando os resultados do modelo anterior, notou-se um problema com a restrição no valor do portfólio, pelo fato de ela não levar em consideração os pesos alocados nos ativos. Ocorreu que em alguns casos a alocação era mínima em determinados ativos apenas para que o seu volume entre no somatório, sendo possível a formação de carteiras com valores elevados, porém com baixa liquidez. Na realidade o ativo com um peso muito reduzido não contribui em nada para a liquidez da carteira. Na tentativa de solucionar o problema foi inserida uma nova restrição que relaciona o peso dos ativos que não possuem relaxamento na restrição individual e o nível de liquidação da carteira.

A nova restrição adicionada ao modelo leva em consideração o peso alocado nos ativos, relacionando com o valor da carteira formada. O valor alocado em ativos que não possuem restrição individual desligada precisa ser maior do que o valor mínimo necessário a ser liquidado. A ideia é que será considerado o mínimo entre o somatório do que é

possível liquidar de cada ativo com restrição individual não desligada e somatório dos valores alocados nos ativos com restrição individual não desligada.

$$VTC.pnvl_{min} \leq \sum_{i=1}^N VTC.x_i.d_i \quad (17)$$

Onde d é uma variável binária tal que:

$$d_i = u_i - \theta_i \quad (18)$$

A variável binária d informa quais ativos fazem parte da carteira e possuem restrição não desligada. Se $d = 1$ então $u = 1$ e $\theta = 0$.

Foi adicionada a restrição que impede que uma ação tenha a restrição desligada sem fazer parte da carteira. Se $u = 1$ então θ pode ser 0 ou 1. Se $u = 0$ então $\theta = 0$. Também foram adicionadas restrições que garantem que $u = 1$ quando o ativo faz parte da carteira e que $u = 0$ quando o ativo não faz parte da carteira.

$$u_i \geq \theta_i \quad (19)$$

$$x_i \leq u_i \quad (20)$$

$$u_i \leq M_2.x_i \quad (21)$$

O valor de M_2 é uma constante elevada, de forma que se $x = 0$ então $u = 0$, mas se $x > 0$ então $u = 1$. A escolha do valor de M_2 afeta o mínimo de peso que uma ação pode ter. Dessa forma x pode assumir valores de 0 ou entre $1/M_2$ e 1. O valor atribuído ao $1/M_2$ foi de 1000.

Devido a multiplicação entre uma variável contínua x e uma variável binária d a restrição se torna não-linear, sendo necessário linearizar a mesma para facilitar computacionalmente. Para isso foi utilizada uma formulação equivalente que torna a expressão linear. Considera-se a variável contínua $w_i = x_i.d_i$ e se adicionam 3 restrições ao problema. Considerou-se x entre 0 e 1.

$$w_i \leq d_i \quad (22)$$

$$w_i \leq x_i \quad (23)$$

$$w_i \geq x_i - (1 - d_i) \quad (24)$$

Dessa forma, reescrevendo a restrição, dividindo VTC dos dois lados:

$$pnvl_{min} \leq \sum_{i=1}^N w_i \quad (25)$$

3.2.3 Modelo 3

Foi constatado que a aplicação no Modelo 2 foi feita de forma que na realidade a liquidez não é garantida. No Modelo 2 foi considerado o mínimo entre o somatório do que é possível liquidar de cada ativo com restrição individual não desligada e somatório dos valores alocados nos ativos com restrição individual desligada. Sendo considerado assim, não é possível garantir que tudo que é preciso ser liquidado poderá ser de fato liquidado.

O mais correto seria analisar cada ativo, individualmente quanto ao que é possível ser liquidado. As duas possibilidades de liquidação para cada ativo são: liquidar todo o valor alocado no ativo ou liquidar o valor possível de ser liquidado. Na prática ocorre a possibilidade na qual apresenta o menor valor monetário. Portanto, para cada ativo, foi considerado o mínimo entre o valor alocado e o valor possível de ser liquidado do mesmo. Dessa forma a liquidação da carteira é o somatório do mínimo entre as duas possibilidades acima descritas de cada ativo. Ao se considerar o mínimo de cada ativo e posteriormente somando para todos os ativos é reduzido o valor máximo da carteira permitido, garantindo, teoricamente, que será liquidado o valor desejado.

$$VTC.pnvl_{min} \leq \sum_i \min[x_i.VTC; pl_{max}.ppzo_{max}.l_i] \quad (26)$$

Para a adição da equação 26 como uma restrição foi necessário escrever de uma forma que o otimizador consiga computá-la de forma eficiente. Para tanto ela foi escrita em uma forma equivalente com três restrições. Para isso, as duas expressões são somadas, porém cada uma é multiplicada por um termo dependente da variável binária h_i . Se $h_i = 1$, $VTC.x_i$ é menor que $pl_{max}.ppzo_{max}.l_i$, sendo zerado o segundo termo. Caso $h_i = 0$, o oposto ocorre.

$$VTC.pnvl_{min} \leq \sum_i [x_i.VTC.h_i + pl_{max}.ppzo_{max}.l_i.(1 - h_i)] \quad (27)$$

As próximas duas restrições tem o objetivo de escolher o valor de h para cada um dos ativos. Observando as equações 27 e 28 temos: $VTC.x_i \leq pl_{max}.ppzo_{max}.l_i$ se $h = 1$. $VTC.x_i \geq pl_{max}.ppzo_{max}.l_i$ se $h = 0$.

$$VTC.x_i + M.h_i \geq pl_{max}.ppzo_{max}.l_i \quad (28)$$

$$VTC.x_i \leq pl_{max}.ppzo_{max}.l_i + M.(1 - h_i) \quad (29)$$

Neste caso, é encontrado o mesmo problema de não-linearidade encontrado anteriormente, recorrente da multiplicação entre uma variável contínua x_i e uma variável binária h_i , sendo solucionado de maneira análoga.

Reescrevendo a equação 26:

$$VTC.pnvl_{min} \leq \sum_i \min[VTC.w_i; pl_{max}.ppzo_{max}.l_i.(1 - h_i)] \quad (30)$$

Onde w_i é uma variável contínua $w_i = x_i.h_i$.

4 TESTES EMPÍRICOS

Com base no Modelo 3 do capítulo anterior foram realizados testes, comparando resultados entre o modelo com restrição de liquidez e o modelo sem restrição. Foram considerados quatro intervalos diferentes de formação de carteiras, sendo eles de 1 dia, 20 dias, 40 dias e 60 dias. Em cada um dos intervalos foram utilizados três valores monetários para as carteiras formadas. Foram formadas carteiras de 1 milhão, 10 milhões e 100 milhões de reais. Nos testes com restrição de liquidez adotaram-se os valores de 30%, 50%, 70% e 100% para o nível de liquidação aceitável da carteira formada. Em todos os testes não foi considerado retorno exigido para a carteira. O objetivo é encontrar a carteira de mínima variância, qualquer que seja o seu retorno.

Para a realização dos testes com o intervalo de 20 dias foi considerada a amostra completa, com dados para 2120 dias. Desta forma, foram formadas carteiras a cada 20 dias, resultando em 106 dias em que ocorrem formações de carteiras. Os resultados obtidos para o intervalo de 20 dias foram utilizados também para analisar os intervalos de 40 e 60 dias, apenas eliminando as carteiras formadas em dias intermediários. Desta forma para o intervalo de 40 dias foram formadas carteiras em 53 dias e para o intervalo de 60 dias foram formadas carteiras em 35 dias.

Para a análise das carteiras formadas com um intervalo de apenas um dia não foi possível ser utilizada toda a amostra devido ao elevado tempo de processamento que seria necessário. Optou-se por extrair três amostras de 250 dias cada, em períodos diferentes, sendo uma delas no início do período, outra relativamente na parte média e a terceira no final do período com dados disponíveis. Portanto foram estudadas três amostras de 250 dias cada, com formação de carteira com o intervalo de 1 dia.

Devido ao tempo de processamento variar e em alguns casos chegar a valores muito elevados, foi necessário impor um tempo limite para seja encontrada uma solução. Foi imposto um tempo limite de 10 minutos para a formação de cada carteira. Caso o tempo seja atingido e a carteira ainda não estiver formada o processo será interrompido, seguindo para a próxima carteira a ser formada.

Em cada um dos testes são analisados: o percentual liquidado médio, entre todas as carteiras formadas, o número de dias em que foi possível formação de carteira, o retorno médio entre todas as carteiras formadas, o número médio de ativos participantes e o risco da carteira formada. Foram utilizadas três medições de previsão de volatilidade diferentes: um modelo de GARCH(1,1) e através de EWMA com parâmetro 0,94, além do desvio padrão amostral da carteira formada.

Ao se calcular o percentual que é possível liquidar da carteira formada é utilizado o volume observado no dia da liquidação e não o volume médio de 30 dias passados como utilizado na restrição do problema. Além disso, o valor da carteira é corrigido para o valor

Tabela 1 – Teste 1, sem restrição de liquidez

Intervalo	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
20 dias	1E+06	38,11%	1,18E-01	45,8	-0,049	106
20 dias	1E+07	19,85%	8,57E-02	45,8	-0,049	106
20 dias	1E+08	7,30%	4,69E-02	45,8	-0,049	106
40 dias	1E+06	37,95%	1,28E-01	45,9	-0,026	53
40 dias	1E+07	19,82%	8,84E-02	45,9	-0,026	53
40 dias	1E+08	7,28%	4,76E-02	45,9	-0,026	53
60 dias	1E+06	37,11%	1,19E-01	46,6	-0,019	36
60 dias	1E+07	19,23%	8,29E-02	46,6	-0,019	36
60 dias	1E+08	7,03%	4,57E-02	46,6	-0,019	36

no dia da liquidação. A carteira formada altera seu valor no dia da liquidação, devido a variações nos preços das ações que a compõe durante o período entre a formação e a liquidação.

Para a composição da base de dados do trabalho serão utilizados preços de fechamentos e volume monetário negociado, ambos na frequência diária. Serão obtidos estes dados para ativos de empresas listadas na BM&FBOVESPA através do software Economatica. A amostra inicial possui 610 ativos, no período entre 01/01/2007 e 02/08/2016. Foram retirados da amostra ativos com menos de 80% de dados disponíveis no período de análise. Foram removidas ações duplicadas de uma mesma empresa, deixando apenas um ativo por empresa (o ativo com maior volume negociado). Após a filtragem, 252 ativos permaneceram na amostra. Sendo retirados os feriados e datas com dados indisponíveis a amostra possui 2370 dias.

4.1 Resultados

4.1.1 Teste 1: Intervalos de formação de carteiras de 20, 40 e 60 dias

Os resultados de porcentagem liquidada média, juntamente com seu desvio padrão, número de carteiras formadas, número médio de ativos participantes e retorno anualizado médio, para carteiras formadas sem restrições de liquidez são demonstrados na Tabela 1. As carteiras formadas neste caso não dependem do valor da carteira estipulado, pelo fato de não estar presente a restrição de liquidez. Para os três valores de carteira analisados as carteiras formadas são idênticas no que diz respeito à porcentagem alocada em cada ativo. O valor da carteira foi considerado apenas ao se calcular o quanto foi possível liquidar em cada carteira, com base no volume financeiro negociado de cada ativo no dia da liquidação.

Foi observado um comportamento parecido para os três intervalos analisados. No

Tabela 2 – Previsões de volatilidade no teste 1, sem restrição de liquidez

Intervalo	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
20 dias	0,0648	0,0704	0,0763
40 dias	0,0649	0,0784	0,0960
60 dias	0,0650	0,0921	0,1036

Tabela 3 – Intervalo de 20 dias, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
0,3	1E+06	50,29%	1,0E-01	48,21	-0,0405	106
0,3	1E+07	29,37%	3,0E-02	52,48	-0,0319	106
0,3	1E+08	28,12%	1,5E-02	70,70	-0,0192	106
0,5	1E+06	54,29%	7,1E-02	50,44	-0,0444	106
0,5	1E+07	46,79%	2,7E-02	66,36	-0,0049	106
0,5	1E+08	46,52%	2,2E-02	83,97	0,0330	106
0,7	1E+06	65,80%	4,9E-02	57,62	-0,0055	106
0,7	1E+07	64,74%	3,5E-02	74,20	0,0375	106
0,7	1E+08	64,99%	3,0E-02	90,54	0,0677	106
1	1E+06	90,44%	5,8E-02	61,05	0,0458	105
1	1E+07	92,24%	4,2E-02	65,33	0,0896	104
1	1E+08	92,37%	4,3E-02	70,59	0,0116	106

intervalo de formação de carteiras de 20 dias foram observadas, para valores de carteira de R\$ 1 milhão, R\$ 10 milhões e R\$ 100 milhões percentagens liquidadas médias de 38,11%, 19,85% e 7,3%, respectivamente. Como esperado, quanto maior o valor da carteira, menor foi sua liquidez. Para uma mesma composição percentual de ativos, quanto maior o valor monetário da carteira menor será o seu percentual liquidado. Comparando diferentes intervalos, os resultados foram muito parecidos, tendo uma leve redução na liquidez conforme se aumenta o número de dias no intervalo. Portanto, o efeito do tempo de espera entre a formação da carteira e venda tem pouco impacto no percentual liquidado, porém este é reduzido ao se aumentar o intervalo.

Os resultados para previsão de volatilidade no dia da liquidação estão apresentados na Tabela 2. O desvio padrão se mostrou muito parecido nos três casos. As previsões realizadas através de GARCH e EWMA apresentaram volatilidades com valores mais elevados.

Para os casos com presença de restrições na liquidez no modelo, os resultados foram divididos pelo intervalo de formação das carteiras. Nas Tabelas 3, 4 e 5 estão apresentados resultados para os intervalos de 20, 40 e 60 dias, respectivamente. Já os resultados para previsões de volatilidade são demonstrados nas Tabelas 6, 7 e 8.

Comparando os testes foi observado um aumento no percentual liquidado médio

Tabela 4 – Intervalo de 40 dias, com restrição de liquidez

pnvl	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
0,3	1E+06	49,98%	1,03E-01	48,68	-0,0290	53
0,3	1E+07	28,95%	3,73E-02	51,77	-0,0239	53
0,3	1E+08	27,39%	2,21E-02	70,94	0,0011	53
0,5	1E+06	54,06%	8,14E-02	50,77	-0,0172	53
0,5	1E+07	45,51%	4,13E-02	66,23	-0,0087	53
0,5	1E+08	45,09%	3,05E-02	84,47	0,0304	53
0,7	1E+06	64,21%	6,15E-02	57,81	0,0058	53
0,7	1E+07	62,68%	4,89E-02	73,21	0,0269	53
0,7	1E+08	62,97%	3,98E-02	90,58	0,0621	53
1	1E+06	87,25%	6,87E-02	60,29	0,0633	52
1	1E+07	89,19%	6,01E-02	65,63	0,0778	51
1	1E+08	89,14%	5,74E-02	70,64	0,1216	53

Tabela 5 – Intervalo de 60 dias, com restrição de liquidez

pnvl	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
0,3	1E+06	48,80%	1,01E-01	47,64	-0,0186	36
0,3	1E+07	28,56%	3,37E-02	52,69	-0,0107	36
0,3	1E+08	26,91%	2,22E-02	71,25	0,0062	36
0,5	1E+06	52,06%	7,49E-02	50,89	-0,0221	36
0,5	1E+07	44,71%	3,57E-02	66,53	0,0012	36
0,5	1E+08	44,69%	3,06E-02	80,64	0,0365	36
0,7	1E+06	63,54%	6,34E-02	58,31	0,0075	36
0,7	1E+07	61,96%	4,57E-02	73,53	0,0326	36
0,7	1E+08	62,35%	3,90E-02	90,06	0,0659	36
1	1E+06	85,90%	6,36E-02	60,38	0,0272	34
1	1E+07	87,28%	5,73E-02	64,64	0,0947	33
1	1E+08	88,26%	5,44E-02	70,00	0,1000	36

Tabela 6 – Previsões de volatilidade para o intervalo de 20 dias, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,065	0,074	0,087
0,3	1E+07	0,067	0,077	0,087
0,3	1E+08	0,074	0,083	0,092
0,5	1E+06	0,067	0,075	0,088
0,5	1E+07	0,073	0,081	0,091
0,5	1E+08	0,093	0,103	0,107
0,7	1E+06	0,070	0,080	0,089
0,7	1E+07	0,087	0,096	0,100
0,7	1E+08	0,121	0,132	0,129
1	1E+06	0,088	0,101	0,102
1	1E+07	0,118	0,134	0,125
1	1E+08	0,178	0,197	0,177

Tabela 7 – Previsões de volatilidade para o intervalo de 40 dias, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,065	0,079	0,096
0,3	1E+07	0,067	0,082	0,096
0,3	1E+08	0,074	0,089	0,099
0,5	1E+06	0,067	0,082	0,095
0,5	1E+07	0,074	0,086	0,099
0,5	1E+08	0,093	0,109	0,112
0,7	1E+06	0,070	0,085	0,096
0,7	1E+07	0,087	0,104	0,107
0,7	1E+08	0,121	0,192	0,133
1	1E+06	0,088	0,106	0,107
1	1E+07	0,116	0,140	0,130
1	1E+08	0,178	0,315	0,177

Tabela 8 – Previsões de volatilidade para o intervalo de 40 dias, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,066	0,098	0,105
0,3	1E+07	0,067	0,088	0,103
0,3	1E+08	0,074	0,095	0,106
0,5	1E+06	0,066	0,088	0,104
0,5	1E+07	0,074	0,092	0,105
0,5	1E+08	0,093	0,113	0,115
0,7	1E+06	0,070	0,098	0,102
0,7	1E+07	0,087	0,106	0,110
0,7	1E+08	0,121	0,142	0,134
1	1E+06	0,087	0,106	0,110
1	1E+07	0,113	0,133	0,126
1	1E+08	0,179	0,200	0,181

das carteiras com presença de restrição de liquidez. Foi observada uma liquidação média, nos casos com restrição, que se aproxima do nível de liquidação aceitável (pnvl), inserido no modelo. Quando as carteiras são liquidadas 20 dias após suas formações, considerando um nível de liquidação aceitável de 70% (pnvl= 0,7) e valor da carteira de R\$ 10 milhões, por exemplo, a liquidação média é de 64,74%. Considerando o mesmo nível de liquidação aceitável e mesmo valor de carteira, porém sendo as mesmas liquidadas 40 dias após a formação, a liquidação média fica em 62,68%, como pode ser visto na Tabela 4. Para o intervalo de 60 dias o valor cai para 61,96%. Em todos os casos a liquidação média ficou próxima ao nível de liquidação aceitável, porém sempre um pouco abaixo, devido ao período entre a formação da carteira e a sua venda. Apenas em dois casos a liquidação média se mostrou acima do nível de liquidação aceitável, quando o valor de carteira é de R\$ 1 milhão, com níveis de liquidação aceitáveis de 30% e 50%. Nesses dois casos isso ocorreu, pois os valores de carteira reduzidos, combinados com níveis de liquidação aceitáveis baixos, deixaram a restrição de liquidez inativa na maioria dos dias, ou seja, a carteira formada sem restrição de liquidez possui liquidação superior ao nível de liquidação aceitável.

Analisando o percentual liquidado e os diferentes valores de carteira analisados não foram observadas diferenças significativas para os diferentes valores de carteira, nos casos em que a carteira está totalmente restrita. Com exceção dos casos em que a restrição de liquidez não está ativa, o percentual liquidado não mostrou depender do valor da carteira estipulado. Portanto, a restrição imposta considera, independentemente do valor da carteira estipulado, um valor mínimo a ser liquidado. Obviamente a dificuldade de formação de carteiras com valores elevados será maior, porém, após formada, o seu percentual liquidado não dependerá do valor monetário.

Foi observado um aumento no número de ativos participantes no modelo com restrição de liquidez, como previsto. Foi constatado também um aumento no número de ativos participantes para carteiras com valores elevados. Considerando o nível de liquidação aceitável de 50% e intervalo de 40 dias o número médio de ativos participantes foi de 50,7, com o valor de carteira de R\$ 1 milhão. Considerando o valor de carteira de R\$ 100 milhões o número de ativos médio sobe para 84,5.

Analisando o risco das carteiras formadas com restrição de liquidez, observou-se um aumento no mesmo, como esperado, comparado com as carteiras formadas sem restrição de liquidez. Quanto mais restrito é o problema, maior é o risco encontrado. Considerando os parâmetros de entrada do problema (pnvl e VTC), o problema se mostra mais restrito, ou seja, com restrição de liquidez mais fortemente ativa, para valores elevados de nível de liquidação aceitável e/ou valores elevados de VTC.

Tabela 9 – Teste 2, sem restrição de liquidez

	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
Amostra 1	1E+06	30,89%	12,93%	30,0	-1,14E-03	250
	1E+07	12,35%	7,48%	30,0	-1,14E-03	250
	1E+08	2,01%	1,99%	30,0	-1,14E-03	250
Amostra 2	1E+06	28,69%	9,04%	26,3	3,75E-04	250
	1E+07	15,58%	6,97%	26,3	3,75E-04	250
	1E+08	4,99%	2,94%	26,3	3,75E-04	250
Amostra 3	1E+06	32,17%	6,89%	61,6	7,78E-04	250
	1E+07	17,28%	4,63%	61,6	7,78E-04	250
	1E+08	9,01%	2,43%	61,6	7,78E-04	250

4.1.2 Teste 2: Intervalo de formação de carteiras de 1 dia

No segundo teste realizado o intervalo de formação de carteiras é de apenas um dia. A carteira é formada e no dia seguinte liquidada. Devido ao custo computacional, não foi possível utilizar toda a amostra disponível, de 2370 dias, como realizado no Teste 1. Foram consideradas então três amostras de 250 dias cada para a realização do Teste 2. As três análises realizadas na presente seção são equivalentes, sendo alterado apenas o período de análise. A amostra 1 corresponde ao período entre Janeiro de 2009 e Janeiro de 2010, a amostra 2 possui o período entre Setembro de 2011 e Setembro de 2012 e a amostra 3 corresponde ao período entre Julho de 2015 e Julho de 2016. As três amostras foram analisadas de forma independente. Os resultados para carteiras formadas sem restrição estão apresentados na Tabela 9.

Os percentuais liquidados médios foram semelhantes nas três amostras analisadas. A amostra 3 apresentou maior liquidação e menor risco, tendo um número de ativos participantes consideravelmente maior. A amostra 1 apresentou os menores percentuais liquidados, para os dois maiores valores de carteira estudados, 10 milhões e 100 milhões de reais. Para o maior valor de carteira considerado (R\$: 100 milhões) o percentual liquidado médio foi sempre abaixo de 10%. Já para as carteiras com o valor de R\$: 1 milhão a liquidação média ficou em torno de 30%. Foi observado que carteiras com valor elevado apresentaram menor liquidação, como era previsto. As carteiras formadas nas amostras 1 e 2 apresentaram número de ativos participantes semelhantes. Porém, apesar de apresentar liquidação próxima às demais amostras, na amostra 3 o número médio de ativos participantes foi de 61,6, muito superior ao resultado das demais amostras.

A Tabela 10 mostra os resultados para a média do risco encontrado na amostra analisada, para as três medições realizadas. A amostra 1 apresentou risco consideravelmente mais alto que as outras amostras, possivelmente devido ao período de análise desta amostra, no qual o país passava por alta turbulência econômica. As previsões de volatilidade através

Tabela 10 – Previsões de volatilidade no teste 2, sem restrição de liquidez

	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
Amostra 1	0,1037	0,1120	0,0894
Amostra 2	0,0578	0,0604	0,0570
Amostra 3	0,0452	0,0484	0,0458

dos três métodos ficaram próximas em todos os casos.

Os resultados para o modelo com restrições de liquidez estão demonstrados em tabelas, sendo cada tabela para cada amostra analisada. As Tabelas 11, 12 e 13 mostram os resultados para as amostras 1, 2 e 3, respectivamente.

Semelhante ao teste 1, as porcentagens liquidadas médias se mostraram próximas ao nível aceitável de liquidação. Porém, com o intervalo entre formação de carteira e liquidação da mesma de apenas um dia resultaram em maior proximidade entre porcentagem liquidada e nível aceitável de liquidação, quando comparado com intervalos de 20,40 e 60 dias. Em alguns casos, quando a restrição de liquidez se mostra inativa, a porcentagem liquidada chega a ser maior do que o nível aceitável. Na amostra 1, por exemplo, foi encontrada a porcentagem liquidada média de 43,61% no caso de nível de liquidação aceitável de 30%. Para o caso mais restrito, com nível de liquidação aceitável de 100%, o percentual liquidado médio ficou em torno de 99%.

Comparando o nível de liquidação aceitável com o número de ativos formadores da carteira observou-se uma tendência de aumento do número de ativos com o aumento do nível aceitável de liquidação. Na amostra 1, para o valor de R\$: 10 milhões, o número médio de ativos foi de 53,3, para o nível de liquidação de 0,3. O número sobe para 64 e 69,2 respectivamente para os casos de níveis aceitáveis de liquidação de 0,5 e 0,7. Já para o nível de 100% ocorreu uma queda para 63,1. Uma hipótese para explicar esta queda é de que com este nível aceitável de liquidação as alternativas de possíveis ativos formadores da carteira se reduzem, podendo ser escolhidos apenas os ativos com elevados valores de liquidez.

Dos 250 dias em que carteiras foram formadas, em cada amostra, foi possível a formação de carteira em praticamente todos os casos. Porém, em alguns poucos casos a carteira ótima não foi encontrada, devido ao tempo limite de tentativa de solução se esgotar. Na amostra 1 o tempo limite foi atingido em 11 carteiras. Na amostra 2 ocorreu em 5 carteiras e na amostra 3 em 15 carteiras. Em todos os casos de tempo limite atingido o nível de liquidação aceitável é de 100%. Com o problema mais restrito a dificuldade computacional se mostra mais elevada.

A porcentagem liquidada não se mostrou depender do valor da carteira formada, para os casos em que a restrição de liquidez se mostra ativa. Em todos os casos a porcentagem liquidada se mostrou próximo ao nível de liquidez, independente do valor da carteira atribuído. Porém, foi observado um aumento no número de ativos participantes

Tabela 11 – Amostra 1 com restrição de liquidez

pnvl	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
0,3	1E+06	43,61%	11,18%	38,7	8,68E-07	250
0,3	1E+07	30,07%	1,13%	53,3	-3,95E-07	250
0,3	1E+08	29,72%	0,26%	74,2	-1,23E-06	250
0,5	1E+06	52,71%	5,11%	42,6	-2,47E-06	250
0,5	1E+07	49,50%	0,40%	64,0	-4,44E-06	250
0,5	1E+08	49,56%	0,36%	95,3	-4,86E-06	250
0,7	1E+06	69,78%	2,26%	49,6	3,45E-06	250
0,7	1E+07	69,29%	0,48%	69,2	2,09E-06	250
0,7	1E+08	69,42%	0,44%	103,6	1,28E-06	250
1	1E+06	99,00%	0,89%	50,9	-4,25E-06	250
1	1E+07	98,95%	0,57%	63,1	1,21E-05	245
1	1E+08	99,25%	0,57%	81,6	-9,80E-07	244

Tabela 12 – Amostra 2 com restrição de liquidez

pnvl	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
0,3	1E+06	41,97%	8,66%	36,57	6,65E-06	250
0,3	1E+07	30,30%	4,47%	43,57	-1,77E-06	250
0,3	1E+08	29,80%	0,21%	56,28	-4,38E-06	250
0,5	1E+06	51,25%	3,59%	42,84	-5,10E-06	250
0,5	1E+07	49,66%	0,39%	60,19	-7,04E-08	250
0,5	1E+08	49,64%	0,34%	66,77	-6,53E-06	250
0,7	1E+06	69,39%	0,67%	51,43	1,59E-06	250
0,7	1E+07	69,49%	0,41%	65,52	7,99E-06	250
0,7	1E+08	69,42%	0,47%	77,30	9,81E-07	250
1	1E+06	99,07%	1,25%	52,05	3,49E-06	249
1	1E+07	99,28%	0,51%	55,62	4,87E-06	247
1	1E+08	99,13%	0,71%	70,58	-1,19E-06	249

para carreiras com maior valor. Na amostra 1, por exemplo, considerando o nível de liquidação de 70%, o número médio de ativos participantes passa de 49,6, no caso de R\$: 1 milhão, para 103,6, no caso de R\$: 100 milhões.

As Tabelas 14, 15 e 16 apresentam os resultados para o risco médio encontrado nas carteiras formadas durante as amostras. Novamente, os resultados foram semelhantes aos resultados do teste 1. Analisando as 3 diferentes medições de risco foi observado um aumento no risco juntamente com o aumento do nível de liquidação aceitável. Para a amostra 1, fixando o valor da carteira em R\$: 10 milhões, temos um aumento do desvio

Tabela 13 – Amostra 3 com restrição de liquidez

pnvl	VTC (R\$)	Porcentagem Liquidada Média	Desvio Padrão da liquidação	Número médio de ativos participantes	Retorno médio	Número de portfólios formados
0,3	1E+06	41,08%	8,97%	57,7	-3,61E-06	250
0,3	1E+07	29,79%	0,54%	67,1	-5,07E-06	250
0,3	1E+08	29,86%	0,13%	79,1	9,61E-07	250
0,5	1E+06	50,90%	3,36%	62,6	-2,00E-06	250
0,5	1E+07	49,63%	0,55%	81,8	-4,54E-07	250
0,5	1E+08	49,77%	0,19%	78,9	3,27E-06	250
0,7	1E+06	69,31%	1,21%	71,0	4,43E-06	250
0,7	1E+07	69,50%	0,57%	84,5	5,40E-06	250
0,7	1E+08	69,67%	0,26%	81,0	5,37E-07	250
1	1E+06	98,99%	1,45%	69,8	6,85E-06	238
1	1E+07	99,31%	0,58%	70,6	4,28E-06	247
1	1E+08	99,38%	0,48%	55,6	6,42E-06	250

Tabela 14 – Previsões de volatilidade na amostra 1, com restrição de liquidez

pnvl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,104	0,112	0,090
0,3	1E+07	0,110	0,120	0,089
0,3	1E+08	0,129	0,140	0,099
0,5	1E+06	0,107	0,117	0,091
0,5	1E+07	0,127	0,138	0,097
0,5	1E+08	0,177	0,189	0,127
0,7	1E+06	0,118	0,129	0,095
0,7	1E+07	0,156	0,165	0,111
0,7	1E+08	0,245	0,256	0,167
1	1E+06	0,158	0,174	0,121
1	1E+07	0,216	0,230	0,145
1	1E+08	0,369	0,367	0,244

padrão de 0,11, quando o nível está em 30%, chegando a 0,216 quando o nível está em 100%. Já no modelo sem restrição de liquidez o valor fica em 0,108. Portanto é observado um aumento do risco da carteira formada ao tornar ativa a restrição de liquidez inserida. Assim, sendo elevado o percentual liquidado médio de 12,35% para 98,95% foi constatado que o risco passa de 0,108 para 0,216, considerando o desvio padrão. A mesma conclusão vale para as duas demais medidas de risco.

Tabela 15 – Previsões de volatilidade na amostra 2, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,058	0,061	0,057
0,3	1E+07	0,060	0,064	0,058
0,3	1E+08	0,064	0,068	0,064
0,5	1E+06	0,060	0,063	0,059
0,5	1E+07	0,066	0,069	0,064
0,5	1E+08	0,078	0,080	0,076
0,7	1E+06	0,066	0,067	0,066
0,7	1E+07	0,079	0,082	0,074
0,7	1E+08	0,100	0,101	0,095
1	1E+06	0,091	0,106	0,092
1	1E+07	0,108	0,138	0,101
1	1E+08	0,147	0,194	0,140

Tabela 16 – Previsões de volatilidade na amostra 3, com restrição de liquidez

pnl	VTC (R\$)	Desvio Padrão	GARCH	EWMA
0,3	1E+06	0,046	0,049	0,046
0,3	1E+07	0,048	0,050	0,049
0,3	1E+08	0,053	0,055	0,055
0,5	1E+06	0,048	0,050	0,048
0,5	1E+07	0,055	0,059	0,058
0,5	1E+08	0,068	0,074	0,073
0,7	1E+06	0,054	0,057	0,055
0,7	1E+07	0,069	0,074	0,074
0,7	1E+08	0,091	0,099	0,099
1	1E+06	0,074	0,077	0,075
1	1E+07	0,101	0,110	0,108
1	1E+08	0,136	0,188	0,149

5 CONCLUSÕES

A aplicação de restrição de liquidez em um modelo de seleção de carteiras foi realizada, sendo esta analisada no mercado brasileiro. Foram inseridos, na restrição proposta, parâmetros utilizados em normas brasileiras para o controle de liquidez de fundos de investimento. Controles de liquidez passaram a ser realizados mais fortemente por corretoras e bancos a partir de 2012, quando foi publicada pela CVM a instrução que exige implementação de controles efetivos dos níveis de liquidez. Portanto, o modelo adotado no trabalho se mostra adequado para utilização no mercado brasileiro.

O modelo de seleção de carteiras de mínima variância foi utilizado no presente trabalho. Foi encontrada uma grande dificuldade computacional, devido ao grande número de testes realizados e carteiras formadas. Com o objetivo de atenuar essa dificuldade foram realizados alguns procedimentos como inserir tempo limite para tentativa de solução e utilização de um modelo de Markowitz adaptado, proposto por Filomena e Lejeune (2012).

Dentre as medidas de liquidez apresentadas, a medida utilizada no presente trabalho foi a de volume financeiro negociado. A mesma medida foi considerada em Pereira et al. (2015), artigo que foi utilizado como ponto de partida para a presente dissertação. Além disso é apresentado em Lo, Petrov e Wierzbicki (2003) uma comparação, onde é encontrada grande correlação entre as medidas de volume negociado, taxa de turnover e *bid-ask spread*.

Na análise de resultados foram encontrados níveis de liquidação elevados, na presença da restrição de liquidez imposta, quando comparados aos níveis em casos sem restrição imposta. Os níveis de liquidação obtidos se mostraram próximos aos níveis aceitáveis impostos na restrição de liquidez. Foi observado, através das três medições realizadas, que o risco da carteira formada aumenta na medida que a formação da carteira se torna mais restrita devido a limitações de liquidez dos ativos disponíveis. Essa limitação se eleva com o aumento do nível de liquidez aceitável da carteira e com o valor da carteira formada impostos.

O presente trabalho apresenta algumas limitações, presentes principalmente pela presença de dificuldades computacionais. Foi utilizado apenas o modelo de mínima variância, com variância amostral. Entretanto, a restrição foi construída de forma a ser independente do modelo de seleção utilizado, podendo esta ser aplicada em outros modelos. Não foram considerados nos casos de estudos analisados o retorno exigido e custos de transação das operações realizadas para as carteiras formadas, devido ao grande custo computacional exigido.

Um estudo mais completo, adicionando custos de transação ao modelo de forma endógena ao modelo pode ser explorado para trabalhos futuros. Pode ser mencionado também para estudos futuros a inserção de diferentes retornos exigidos para a carteira, e

a maneira como o nível de liquidação obtido é afetado. Resultados podem ser comparados para diferentes modelos de seleção de carteiras. No âmbito computacional, estudos com o objetivo de diminuição de tempo de obtenção de solução se mostram importantes.

REFERÊNCIAS

- AMIHUD, Yakov. Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects. *Journal of financial markets*, Elsevier, v. 5, n. 1, p. 31–56, 2002.
- AMIHUD, Yakov; MENDELSON, Haim. Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 223–249, 1986.
- ANAGNOSTOPOULOS, KP; MAMANIS, G. The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 11, p. 14208–14217, 2011.
- ATKINS, Allen B; DYLL, Edward A. Transactions costs and holding periods for common stocks. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 309–325, 1997.
- BEHR, Patrick; GUETTLER, Andre; MIEBS, Felix. On portfolio optimization: Imposing the right constraints. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 1232–1242, 2013.
- BERTSIMAS, Dimitris; SHIODA, Romy. Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 43, n. 1, p. 1–22, 2009.
- BONAMI, Pierre; LEJEUNE, Miguel A. An exact solution approach for portfolio optimization problems under stochastic and integer constraints. *Operations research, INFORMS*, v. 57, n. 3, p. 650–670, 2009.
- BRENNAN, Michael J; CHORDIA, Tarun; SUBRAHMANYAM, Avaniidhar. Alternative factor specifications, security characteristics, and the cross-section of expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 49, n. 3, p. 345–373, 1998.
- BRENNAN, Michael J; SUBRAHMANYAM, Avaniidhar. Market microstructure and asset pricing: On the compensation for illiquidity in stock returns. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 41, n. 3, p. 441–464, 1996.
- CHAN, Howard W; FAFF, Robert W. An investigation into the role of liquidity in asset pricing: Australian evidence. *Pacific-Basin Finance Journal*, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 555–572, 2003.
- CHANG, T-J; MEADE, Nigel; BEASLEY, John E; SHARAIHA, Yazid M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 27, n. 13, p. 1271–1302, 2000.
- CHORDIA, Tarun; SUBRAHMANYAM, Avaniidhar; ANSHUMAN, V Ravi. Trading activity and expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 3–32, 2001.
- CORREIA, Laise Ferraz; AMARAL, Hudson Fernandes; BRESSAN, Aureliano Angel. O efeito da liquidez sobre a rentabilidade de mercado das ações negociadas no mercado acionário brasileiro. Universidade do Vale do Rio dos Sinos, 2008.

- DATAR, Vinay T; NAIK, Narayan Y; RADCLIFFE, Robert. Liquidity and stock returns: An alternative test. *Journal of Financial Markets*, Elsevier, v. 1, n. 2, p. 203–219, 1998.
- DAVIS, Mark HA; NORMAN, Andrew R. Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of Operations Research*, INFORMS, v. 15, n. 4, p. 676–713, 1990.
- DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; NOGALES, Francisco J; UPPAL, Raman. A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, INFORMS, v. 55, n. 5, p. 798–812, 2009.
- DEMSETZ, Harold. The cost of transacting. *The quarterly journal of economics*, JSTOR, p. 33–53, 1968.
- DENTCHEVA, Darinka; RUSZCZYNSKI, Andrzej. Optimization with stochastic dominance constraints. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 14, n. 2, p. 548–566, 2003.
- DENTCHEVA, Darinka; RUSZCZYŃSKI, Andrzej. Portfolio optimization with stochastic dominance constraints. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 30, n. 2, p. 433–451, 2006.
- FILOMENA, Tiago P; LEJEUNE, Miguel A. Stochastic portfolio optimization with proportional transaction costs: convex reformulations and computational experiments. *Operations Research Letters*, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 212–217, 2012.
- GABRIELSEN, Alexandros; MARZO, Massimiliano; ZAGAGLIA, Paolo. Measuring market liquidity: An introductory survey. Quaderni DSE Working Paper, 2011.
- HASUIKE, Takashi; KATAGIRI, Hideki; ISHII, Hiroaki. Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns. *Fuzzy Sets and systems*, Elsevier, v. 160, n. 18, p. 2579–2596, 2009.
- HUANG, Xiaoxia. A new perspective for optimal portfolio selection with random fuzzy returns. *Information Sciences*, Elsevier, v. 177, n. 23, p. 5404–5414, 2007.
- HUI, B.; HEUBEL, B. *Comparative liquidity advantages among major U.S. stock markets*. Data Resources inc., 1984. (DRI Financial Information Group study series). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=WRwcAQAAMAAJ>>.
- JACOBY, Gady; FOWLER, David J; GOTTESMAN, Aron A. The capital asset pricing model and the liquidity effect: A theoretical approach. *Journal of Financial Markets*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 69–81, 2000.
- JAGANNATHAN, Ravi; MA, Tongshu. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 58, n. 4, p. 1651–1684, 2003.
- JUN, Sang-Gyung; MARATHE, Achla; SHAWKY, Hany A. Liquidity and stock returns in emerging equity markets. *Emerging Markets Review*, Elsevier, v. 4, n. 1, p. 1–24, 2003.
- KELLERER, Hans; MANSINI, Renata; SPERANZA, M Grazia. Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 99, n. 1-4, p. 287–304, 2000.

- KONNO, Hiroshi; WIJAYANAYAKE, Annista. Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints. *Mathematical Programming*, Springer, v. 89, n. 2, p. 233–250, 2001.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of empirical finance*, Elsevier, v. 10, n. 5, p. 603–621, 2003.
- LO, Andrew W; PETROV, Constantin; WIERZBICKI, Martin. It's 11pm—do you know where your liquidity is? the mean-variance-liquidity frontier. *The World of Risk Management*, v. 1, n. 1, p. 47, 2003.
- LOBO, Miguel Sousa; FAZEL, Maryam; BOYD, Stephen. Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 152, n. 1, p. 341–365, 2007.
- MAGILL, Michael JP; CONSTANTINIDES, George M. Portfolio selection with transactions costs. *Journal of Economic Theory*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 245–263, 1976.
- MARINGER, Dietmar; KELLERER, Hans. Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *Or Spectrum*, Springer, v. 25, n. 4, p. 481–495, 2003.
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MARSHALL, Ben R; YOUNG, Martin. Liquidity and stock returns in pure order-driven markets: evidence from the Australian stock market. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 173–188, 2003.
- PATEL, Nitin R; SUBRAHMANYAM, Marti G. A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs. *Management Science*, INFORMS, v. 28, n. 3, p. 303–314, 1982.
- PEREIRA, Gabriel Matos; SANT'ANNA, Leonardo Riegel; FILOMENA, Tiago Pascoal; BECKER, João Luiz. Restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras (liquidity constraint for portfolio selection models). *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 13, n. 2, p. 288, 2015.
- SHAW, Dong X; LIU, Shucheng; KOPMAN, Leonid. Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization. *Optimisation Methods & Software*, Taylor & Francis, v. 23, n. 3, p. 411–420, 2008.