

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

**Modelo de Sacola Quiral com Superfície
Difusa: um estudo das propriedades dos
hádrons**

Fernando Gonçalves Pilotto

Tese realizada sob a orientação do Dr. Cesar A. Z. Vasconcellos e do Dr. Hélio T. Coelho, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, Fevereiro de 2003.

Resumo

O modelo de sacola difusa é um modelo hadrônico que possui aspectos tanto do modelo de sacola do MIT (conservação da energia e momentum, energia de vácuo da QCD) quanto dos modelos de potencial relativísticos (confinamento obtido através de um potencial). O modelo desenvolvido também é um modelo quiral, com a propriedade única de que o campo piônico é suprimido no interior da sacola por meio de um potencial escalar, e no entanto a simetria quiral é preservada. O modelo também é único em que pode-se controlar o quanto o campo piônico pode penetrar no interior da sacola (em todos os outros modelos, os píons ou entram livremente na sacola ou permanecem totalmente excluídos de seu interior). Nós calculamos as massas do octeto fundamental dos bárions levando em conta as correções de centro de massa, troca de um glúon e troca de um pión. Também calculamos a constante de acoplamento pión-núcleon, a carga axial do núcleon, assim como os raios de carga, momentos magnéticos e fatores de forma eletromagnéticos do próton e do neutron. Exceto pelos fatores de forma eletromagnéticos, a concordância com os resultados experimentais foi excelente, e os resultados indicam que o campo piônico é suprimido somente na vizinhança do centro da sacola.

Abstract

The fuzzy bag is a hadronic model which has features both of the MIT bag model (energy-momentum conservation, QCD vacuum energy) and of relativistic potential models (confinement achieved through a potential). It is also a chiral model, with the unique property that the pion field is suppressed in the interior of the bag by means of a scalar potential, and yet chiral symmetry is preserved. It is also unique in that one can control how far the pion field can penetrate in the interior of the bag (in all other models the pions either enter the bag freely or are not allowed to enter the bag). We calculate the masses of the fundamental baryon octet taking into account the center-of-mass, one-gluon exchange and one-pion exchange corrections. We also calculate the pion-nucleon coupling constant, the nucleon axial charge, as well as the charge radii, magnetic moments and electromagnetic form-factors of the proton and neutron. Except for the electromagnetic form-factors, the agreement with experiment is excellent, and the results indicate that the pion field is suppressed only very near the center of the bag.

Índice

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 4 |
| I Uma nova versão do modelo de sacola difusa | 9 |
| 1 O campo dos quarks | 10 |
| 1.1 Modelo de sacola do MIT | 11 |
| 1.2 Modelo de sacola difusa | 14 |
| 1.3 Tensor energia-momento | 19 |
| 1.4 Energia do vácuo | 21 |
| 1.5 Equação dinâmica para os quarks | 22 |
| 1.6 Condições de contorno para a função de onda dos quarks | 25 |
| 1.7 Função de supressão e potencial confinante | 27 |
| 1.8 Soluções para a função de onda dos quarks | 28 |
| 1.9 Equações de continuidade e de autovalores | 30 |
| 1.10 Normalização da função de onda dos quarks | 34 |
| 1.11 Massa dos bárions | 37 |
| 2 O campo piônico | 40 |
| 2.1 Simetria quiral | 41 |
| 2.2 Violação da simetria quiral | 42 |
| 2.3 O campo piônico em modelos hadrônicos | 43 |
| 2.4 Supressão do campo piônico | 45 |
| 2.5 Invariância quiral do campo piônico | 46 |
| 2.6 Acoplamento pión-quark | 48 |
| 2.7 Função de supressão e potencial para o campo piônico | 50 |
| 2.8 Solução da equação diferencial homogênea para o campo piônico | 54 |
| 2.9 Normalização da função de onda do pión | 57 |
| 2.10 Solução particular para o campo piônico | 59 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| II | Propriedades hadrônicas segundo o FBM | 62 |
| 3 | Correções à massa dos bárions | 63 |
| 3.1 | Correção de centro de massa | 63 |
| 3.2 | Troca de um glúon | 68 |
| 3.3 | Troca de um pión | 74 |
| 4 | Propriedades do núcleon | 86 |
| 4.1 | Raio de carga do núcleon | 87 |
| 4.2 | Fator de forma da interação pión-núcleon | 89 |
| 4.3 | Fator de forma axial do núcleon | 92 |
| 4.4 | Fatores de forma eletromagnéticos do núcleon | 97 |
| 4.4.1 | Fator de forma elétrico | 100 |
| 4.4.2 | Raio de carga do núcleon | 105 |
| 4.4.3 | Fator de forma magnético | 106 |
| 4.4.4 | Momento magnético do núcleon | 109 |
| 4.5 | Ajuste dos parâmetros e resultados | 110 |
| 5 | O potencial de oscilador harmônico | 113 |
| 5.1 | O campo dos quarks | 113 |
| 5.1.1 | Função de supressão dos quarks | 113 |
| 5.1.2 | Função de onda dos quarks | 115 |
| 5.1.3 | Equação de autovalores | 116 |
| 5.1.4 | Energia de vácuo | 118 |
| 5.1.5 | Massa dos bárions | 118 |
| 5.2 | O campo piônico | 119 |
| 5.2.1 | Potencial para o campo piônico | 119 |
| 5.2.2 | Função de onda do pión | 121 |
| 5.2.3 | Solução particular para o campo piônico | 122 |
| 5.3 | Correções à massa bariônica | 123 |
| 5.3.1 | Correção de centro de massa | 123 |
| 5.3.2 | Troca de um glúon | 124 |
| 5.3.3 | Troca de um pión | 125 |
| 5.4 | Fator de forma da interação pión-núcleon | 127 |
| 5.5 | Constante de acoplamento axial do núcleon | 128 |
| 5.6 | Raio de carga do núcleon | 128 |
| 5.7 | Momento magnético do núcleon | 129 |
| 5.8 | Ajuste dos parâmetros do modelo | 129 |
| 5.9 | Fator de forma elétrico do núcleon | 131 |
| 5.10 | Fator de forma magnético do núcleon | 131 |

| | |
|--|------------|
| Conclusão | 135 |
| Apêndices | 139 |
| A Quantização do campo piônico em modos normais esféricos | 140 |
| A.1 Campo piônico livre | 140 |
| A.2 Campo piônico sujeito a um potencial | 142 |
| B Correção de centro de massa | 144 |
| Referências | 148 |

Introdução

O modelo de sacola tem uma longa história, começando em 1974, quando foi publicado o artigo original pelo grupo do MIT [1]. Conhecido simplesmente como o “modelo de sacola do MIT”, este é provavelmente o modelo hadrônico mais simples encontrado na literatura. E é justamente nisto que reside o grande apelo gerado pelo modelo: a capacidade de traduzir e implementar em termos simples as principais características da física de hádrons para estados ligados. É como o modelo de pártons criado por Feynman para descrever o espalhamento profundamente inelástico — com poucos ingredientes, consegue-se fazer uma quantidade enorme de física.

O modelo de sacola do MIT tem sido aplicado a inúmeras áreas da física, como por exemplo no estudo de estrelas de quarks, estrelas de nêutrons, espalhamento hádron-hádron, decaimento do próton, efeitos nucleares devidos à subestrutura de quarks, etc., além, é claro, de ser aplicado no estudo das propriedades hadrônicas tradicionais, como fatores de forma eletromagnéticos, constantes de acoplamento, etc. Devido ao seu sucesso, o modelo do MIT deu origem a vários outros modelos, inclusive ao modelo de sacola difusa, que é assunto desta tese. Deve-se ressaltar entretanto que, na física de mésons, modelos deste tipo não obtiveram resultados muito bons, recorrendo-se então a formulações alternativas, como por exemplo a equação de Bethe-Salpeter [2, 3, 4].

A síntese de princípios físicos sólidos com um modelo matemático simples é frequentemente uma indicação de que os fenômenos físicos relevantes para o entendimento de uma determinada área da física foram bem compreendidos. Muitas vezes esta síntese permite também vislumbrar com clareza quais ingredientes físicos estão faltando ao modelo. No caso do modelo de sacola do MIT, as propriedades de confinamento dos quarks e de liberdade assintótica estavam incorporadas no modelo já desde a sua formulação, assim também como a diferença de energia entre os vácuos perturbativo e não-perturbativo da Cromodinâmica Quântica (QCD). Após as primeiras aplicações do modelo à física hadrônica, verificou-se a falta de um importante ingrediente físico, a conservação parcial da simetria quiral. Esta simetria desempenha um papel fundamental na física hadrônica, como é atestado na relação de Goldberger-Treiman e na teoria de perturbação quiral, apenas para citar dois exemplos.

Para tratar de modo mais correto a simetria quiral no modelo do MIT, adicionou-se ao modelo o campo piônico [5]. Ocorre que a simetria quiral, por si mesma, não é suficiente

para fixar univocamente a interação entre quarks e píons, como ocorre com as simetrias de calibre. Isto teve como consequência uma dezena de novos modelos hadrônicos, que diferem basicamente no modo como o pión é tratado. Assim, em alguns modelos os píons podem entrar no interior da sacola; em outros modelos os píons são mantidos somente no exterior. Diversos tipos de acoplamento pión-quark foram estudados, assim como várias realizações (linear e não-linear) da simetria quiral. Nos tratamentos iniciais, o campo piônico era tratado como um campo clássico, passando mais tarde a ser quantizado.

A quantização do campo piônico [6, 7] foi um passo muito importante, permitindo um estudo mais realístico da fenomenologia hadrônica. Neste novo formalismo é possível descrever a criação e destruição de bárions, assim como na teoria de campos quânticos, apesar dos bárions serem tratados como estados ligados de três quarks, e não como campos elementares. As flutuações quânticas dos campos dos píons e dos bárions foram deste modo incorporadas aos modelos de sacola e de potencial relativístico, sendo fundamentais no cálculo de determinados observáveis. Por exemplo, sem estas flutuações o cálculo do raio de carga do nêutron fornece um resultado nulo, já que a carga elétrica do nêutron é zero. Ao levarmos em conta as flutuações quânticas, o vetor de estado do nêutron recebe uma contribuição de estados de um próton e um pión, ambos com carga elétrica diferente de zero, e com isto o raio de carga do nêutron torna-se negativo, em acordo com os resultados experimentais.

A quantização do campo piônico também trouxe, sob o ponto de vista formal, um problema grave para o modelo de sacola do MIT. No formalismo quântico, um quark pode emitir um pión e logo depois absorvê-lo. Neste processo, o estado quântico do quark é modificado quando o quark emite o pión, e volta ao estado original quando o pión é absorvido. No estado intermediário, o momento angular e energia do quark dependerão dos valores respectivos para o pión. Estas flutuações quânticas têm como consequência que o propagador dos quarks seja modificado, de modo que a massa dos quarks seja alterada, gerando assim uma contribuição para a auto-energia do quark. Nos modelos de sacola e de potencial relativístico, em geral são utilizados somente quarks de valência na descrição dos bárions, mesmo para os estados intermediários. Mas, em princípio, todos os estados possíveis devem ser levados em conta neste processo. No estudo do modelo de sacola do MIT, descobriu-se que, quando todos os estados intermediários possíveis são levados em conta, a auto-energia do quark diverge, e esta divergência é causada pelo fato da superfície da sacola do MIT ter uma espessura infinitesimal. Esta divergência não é renormalizável e, sendo originada por uma característica intrínseca ao modelo do MIT, significa que este modelo chegou ao seu limite.

Para salvar o modelo do MIT, Y. Nogami e colaboradores criaram o modelo de sacola difusa [8, 9] (*fuzzy bag model*). Na sua versão original, o modelo de sacola difusa pretende ser uma modificação mínima do modelo do MIT, no qual somente a superfície da sacola é alterada, adquirindo uma espessura finita. A intenção era preservar os aspectos positi-

vos do modelo do MIT — liberdade assintótica, confinamento, incorporação de efeitos do vácuo — e eliminar a única característica reconhecidamente negativa — a superfície da sacola com espessura infinitesimal. Com isto, a divergência da auto-energia que mencionamos acima é eliminada, ou melhor, nem aparece, pois a superfície da sacola tem uma espessura finita. O modelo de sacola difusa possui ainda uma outra propriedade interessante, que está relacionada com o mecanismo que torna espessa a superfície da sacola. Este mecanismo faz com que o modelo de sacola difusa fique muito parecido com modelos de potencial relativístico, mas permite que, num determinado limite, o modelo do MIT seja recuperado. Deste modo, o modelo de sacola difusa serve como uma “ponte” entre o modelo do MIT e os modelos de potencial relativístico, que antes eram vistos como sendo bastante diferentes.

Entretanto, na versão original do modelo de sacola difusa foi esquecida uma propriedade importante: a conservação da energia e do momento linear. Esta propriedade é satisfeita no modelo do MIT e é, de fato, uma das principais características deste modelo. Na versão completa do modelo do MIT, a sacola pode ser, em princípio, deformada arbitrariamente. A requisição de que a ação seja mínima com respeito a pequenas deformações da sacola leva a uma equação que fixa dinamicamente a forma da sacola. Deste modo, a forma da sacola passa a depender do movimento dos quarks no seu interior. Uma das conseqüências disto é que a energia e o momento linear são conservados no modelo do MIT. Assim, ao tratarmos um próton, por exemplo, usando a sacola do MIT, podemos considerar este próton como sendo um sistema dinâmico fechado: para criá-lo, é necessário fornecer uma quantidade finita de energia, e esta energia é conservada pelo sistema, não sendo dispersa para o meio exterior. Em contraposição, nos modelos de potencial relativístico e na versão original do modelo de sacola difusa, a energia e o momento linear não são conservados. Assim, ao tratarmos um próton, por exemplo, seguindo estes modelos, não poderemos considerá-lo um sistema dinâmico independente.

Nesta tese, no capítulo 1, apresentamos uma nova versão do modelo de sacola difusa [10] que incorpora a propriedade de conservação da energia e do momento linear. De fato, esta propriedade é imposta no modelo. Uma das conseqüências é que a constante B do modelo do MIT adquire uma dependência na variável radial $B \rightarrow B(r)$, deixando portanto de ser uma constante. Fisicamente, a constante B representa a diferença de densidade de energia entre o vácuo perturbativo da QCD (presente no interior dos hádrons) e o vácuo não-perturbativo da QCD (presente no exterior dos hádrons). A constante B é positiva, pois o vácuo perturbativo da QCD é um estado meta-estável que, na ausência de quarks, decai para o vácuo verdadeiro, que é não-perturbativo. Na nossa versão do modelo de sacola difusa, a dependência radial faz com que a diferença de energia entre os estados de vácuo, representada por $B(r)$, tenha um valor positivo em $r = 0$ e diminua à medida que r aumenta, chegando ao valor nulo quando a fronteira da sacola é ultrapassada. Vemos assim uma transição contínua entre o interior e o exterior da sacola, o que representa uma

transição contínua do vácuo perturbativo para o vácuo não-perturbativo, à medida que passamos do interior para o exterior da sacola. Em contraposição, no modelo do MIT esta transição é abrupta e descontínua. Portanto, a incorporação da conservação da energia e do momento linear no modelo de sacola difusa, além de permitir que considere-se a sacola como sendo um sistema dinâmico fechado, permite também um tratamento mais consistente da energia de vácuo.

Voltando ao assunto da inclusão do campo piônico em modelos de sacola e de potencial relativístico, lembramos que o desenvolvimento do modelo de sacola difusa foi motivado pela já comentada divergência da auto-energia devida à interação pión-quark. Um outro ponto de interesse é se o campo piônico pode ou não entrar no interior da sacola. Alguns autores argumentam que sim, o campo piônico pode existir no interior da sacola, justificando que, no interior da sacola, o campo piônico simularia a presença de pares quark/anti-quark. Entretanto, pode-se levar em conta a presença de pares quark/anti-quark diretamente, sem necessidade de simular este efeito recorrendo-se ao campo piônico. Outros autores argumentam que não, o campo piônico não pode entrar no interior da sacola, justificando que o interior e o exterior da sacola representam estados diferentes do vácuo da QCD e estão relacionados com modos diferentes de realização da simetria quiral. No interior da sacola, a simetria quiral seria realizada no modo de Wigner e, no exterior, no modo de Goldstone. Como os píons são bósons de Goldstone, eles podem existir somente no exterior da sacola (isto será visto com mais detalhes no capítulo 2). Esta é, sem dúvida, a posição mais bem aceita na comunidade da física hadrônica. Podemos ainda adicionar um outro argumento em favor da exclusão do campo piônico do interior da sacola: a presença do campo piônico no interior da sacola fere a propriedade de liberdade assintótica, que é uma propriedade somente da interação quark-glúon, e, sendo assim, os píons devem existir somente no exterior da sacola.

Portanto, vimos que um modelo hadrônico realístico deve manter o campo piônico somente no exterior dos hádrons. No entanto, sob o ponto de vista pragmático, muitos autores postulam a existência do campo piônico entre no interior dos hádrons. O motivo era a falta de um mecanismo de exclusão do campo piônico nos modelos de potencial relativístico. Somente para o modelo do MIT era conhecido um mecanismo possível, estando ele relacionado com o fato da superfície da sacola do MIT ter uma espessura infinitesimal. Para modelos de potencial relativístico e para o modelo de sacola difusa, no qual a superfície tem uma espessura finita, é essencial que também se tenha um mecanismo que possa excluir o campo piônico do interior do hádron.

Um mecanismo possível foi apresentado em nossa dissertação de mestrado [11], e também publicado [12], sob o nome de modelo de sacola difusa modificado. O mecanismo foi inspirado [13] pelo próprio modelo de sacola difusa em sua versão original [8, 9], no qual uma assim chamada função de supressão dava origem a um potencial confinante para os quarks. No modelo de sacola difusa modificado, é introduzida uma função de su-

pressão para os píons, dando origem a um potencial escalar para os píons que os impede de entrar no interior da sacola. O ponto importante é que, mesmo com a presença deste potencial escalar para o campo piônico, a simetria quiral ainda é preservada. Isto será revisto em detalhes no capítulo 2 deste trabalho, constituindo um resultado sem similar na literatura.

Devemos ressaltar, no entanto, que a versão do mecanismo de supressão do campo piônico apresentado nos nossos trabalhos [11, 12], por implicar em uma densidade Lagrangeana muito complicada (para o significado mais preciso desta afirmação, ver o capítulo 2), impedia a quantização do campo piônico no modelo. Nesta tese, resolvemos este problema obtendo uma densidade Lagrangeana mais simples, que permite facilmente o procedimento de quantização. Com isto, podemos aplicar o modelo de sacola difusa de maneira mais realista.

Parte I

Uma nova versão do modelo de sacola difusa

Capítulo 1

O campo dos quarks

Neste capítulo vamos apresentar uma nova versão do modelo de sacola difusa (*Fuzzy Bag Model*, FBM). A idéia principal é incluir a conservação de energia e momento linear dos quarks no modelo. Esta propriedade não está presente na formulação original do FBM [8, 9], mas é de suma importância para a interpretação do modelo como sendo um modelo de sacola — isto é, como um modelo onde o raio da sacola é determinado pelo equilíbrio entre a pressão interna de expansão dos quarks e a pressão externa do vácuo não-perturbativo da QCD. Ao incluir a conservação de energia e momento no modelo, a presente versão do FBM pode ser então apropriadamente considerada como um modelo de sacola.

Para que a energia e o momento linear sejam conservados no nosso modelo, é necessário introduzir um termo B na densidade Lagrangeana. Este termo B é completamente análogo à constante B do modelo de sacola do MIT [1], e também tem o papel de simular alguns efeitos do vácuo não-perturbativo da QCD. Uma consequência imediata da conservação de energia e momento é que a “constante” de sacola B não é mais constante, como no modelo do MIT, mas adquire uma dependência da variável radial, $B = B(r)$. Além disso, a forma desta dependência em r pode ser estabelecida sem nenhuma arbitrariedade, além da escolha do potencial confinante dos quarks.

Adotaremos, nesta nova abordagem do FBM, o enfoque de trabalhos anteriores [11, 12], nos quais consideramos a sacola como tendo uma região interior, onde os quarks são livres, uma região de superfície, onde a função de onda dos quarks é gradualmente suprimida, e uma região exterior, onde a função de onda dos quarks é nula. A região interior da sacola representa o vácuo perturbativo da QCD, a região exterior representa o vácuo não-perturbativo da QCD, e a superfície da sacola representa a região de transição entre os dois tipos de vácuo.

Esperamos que os pontos discutidos acima tornem-se mais claros no decorrer deste capítulo. Na seção 1.1 introduzimos o modelo de sacola do MIT. A apresentação será breve, tendo como objetivo principal esclarecer os fundamentos conceituais do modelo. Uma discussão mais extensa e com vários detalhes técnicos pode ser encontrada na nossa

dissertação de mestrado [11]. Na seção 1.2 apresentamos o modelo de sacola difusa, já na nossa nova versão. A seção 1.3 apenas introduz os conceitos necessários para a seção 1.4, na qual veremos explicitamente o surgimento da dependência da constante B com respeito à variável radial, $B = B(r)$. Na seção 1.5 obtemos a equação dinâmica para a função de onda dos quarks, sendo na seção 1.6 derivadas as condições de contorno para esta função. Na seção 1.7 estipulamos uma forma para o potencial confinante dos quarks, sendo as seções 1.8 até 1.10 dedicadas essencialmente à solução das equações dinâmicas dos quarks. Por fim, na seção 1.11 calculamos a massa de um bárion segundo o nosso modelo.

1.1 Modelo de sacola do MIT

O modelo de sacola do MIT tem como proposta descrever os hádrons em geral, tanto os bárions como os mésons, de uma maneira que seja ao mesmo tempo simples, mas rica em física. Resumidamente, os aspectos físicos levados em conta são a liberdade assintótica, o confinamento, o movimento relativístico dos quarks e algumas considerações sobre o vácuo da QCD. No que segue, veremos em detalhes como estas motivações físicas são incorporadas no modelo.

Quando os quarks estão próximos uns dos outros, eles interagem muito fracamente, isto é, comportam-se aproximadamente como partículas livres. Esta propriedade foi chamada de liberdade assintótica, pois é observada experimentalmente em espalhamentos envolvendo grandes transferências de momento, $q^2 \rightarrow \infty$. Neste regime de altas transferências de momento, pode-se tratar a QCD com métodos perturbativos e demonstrar formalmente a propriedade de liberdade assintótica. No modelo de sacola do MIT os quarks são tratados como partículas livres, no sentido restrito do termo, enquanto estiverem no interior da sacola. Sendo os quarks partículas de spin $1/2$ e visto que a sua velocidade no interior dos hádrons é relativística, é adequado descrevê-los usando espinores de Dirac. Denotando o campo dos quarks por $q(x)$ e por m a respectiva massa, vemos que a densidade Lagrangeana mais simples que incorpora os aspectos físicos acima mencionados é a densidade Lagrangeana de uma partícula de Dirac livre,

$$\frac{i}{2}(\bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q - \partial_\mu \bar{q} \gamma^\mu q) - m \bar{q} q . \quad (1.1)$$

De acordo com a propriedade de confinamento, os quarks devem permanecer sempre ligados uns aos outros no interior dos bárions e mésons. Esta propriedade não pôde ainda ser derivada a partir da QCD, mas temos indicações de que seja correta, por exemplo, através dos cálculos de QCD na rede e através da derivação do potencial linear entre dois quarks estáticos, de massa infinita. Além do mais, caso pudesse ser produzido um quark livre, a sua detecção seria imediata e sem ambigüidades, e isto não aconteceu até este momento. No modelo de sacola do MIT, o mecanismo de confinamento consiste na

multiplicação da densidade Lagrangeana (1.1) pela função degrau de Heaviside, $\theta(R - r)$, onde R é o raio da sacola,

$$\left[\frac{i}{2} (\bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q - \partial_\mu \bar{q} \gamma^\mu q) - m \bar{q} q \right] \theta(R - r). \quad (1.2)$$

A distribuição $\theta(R - r)$ é definida por

$$\theta(R - r) = \begin{cases} 1 & , r < R \\ 0 & , r > R \end{cases}, \quad (1.3)$$

assim vemos que o campo dos quarks só existe na região esférica $r < R$, que é chamada de sacola. Na região $r > R$ a densidade Lagrangeana é identicamente nula: não existe nada fora da sacola, nem mesmo flutuações quânticas dos campos dos quarks.

Em $r = R$ temos a superfície da sacola, que é a fronteira entre o seu interior e o seu exterior. No modelo do MIT, a superfície tem uma espessura infinitesimal, que na literatura é chamada de superfície delgada, em contraposição à superfície da sacola no modelo de sacola difusa, que tem espessura finita, como será visto na próxima seção. Com o fim de obter a condição de contorno correta para o campo dos quarks na superfície da sacola, isto é, na região em que $r = R$, acrescenta-se mais um termo à densidade Lagrangeana (1.2),

$$\left[\frac{i}{2} (\bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q - \partial_\mu \bar{q} \gamma^\mu q) - m \bar{q} q \right] \theta(R - r) - \frac{1}{2} \bar{q} q \delta(R - r). \quad (1.4)$$

O novo termo envolve a função delta de Dirac, $\delta(R - r)$, e também pode ser compreendido como o caso limite de um potencial confinante sobre os quarks. Isto é, a função delta de Dirac seria o limite de um potencial escalar confinante $V_c(r)$, na medida em que a região onde $V_c(r)$ age torne-se cada vez menor enquanto que os valores de $V_c(r)$ nesta região tendam a infinito. Voltaremos a este ponto novamente na próxima seção.

Como vimos, as propriedades de confinamento e de liberdade assintótica foram incorporadas no modelo de sacola do MIT. Estas propriedades também fazem parte de todos os modelos hadrônicos, em especial dos modelos de potencial. Em termos de concepção física, o modelo de sacola do MIT pretende ir um pouco além, procurando levar em conta também algumas propriedades do vácuo da QCD. Mais exatamente, procura-se incorporar no modelo, de maneira aproximada, uma distinção entre as duas fases do vácuo da QCD.

Acredita-se que, se pudéssemos resolver a QCD, veríamos que o vácuo é dividido em duas fases, chamadas de vácuo perturbativo e vácuo não-perturbativo da QCD. O vácuo não-perturbativo corresponde à região exterior aos hádrons, envolvendo fenômenos que ocorrem na escala de 1 fm ou que envolvam transferências de momento na ordem de $200 \text{ MeV}/c$, para os quais a constante de acoplamento da QCD assume valores altos. No interior dos hádrons, a região na qual as interações quark-glúon ocorrem é menor,

tornando-se mais relevantes as contribuições com alta transferência de momento, e assim a constante de acoplamento da QCD assume valores menores (liberdade assintótica), possibilitando o uso de métodos perturbativos. Segundo estas considerações, o vácuo perturbativo seria um estado meta-estável: se retirarmos os quarks, ele decai para o vácuo “verdadeiro”, que é não-perturbativo. Portanto, a fase perturbativa do vácuo deve ter uma energia maior que a fase não-perturbativa. No modelo de sacola do MIT, esta diferença de energia é representada pelo termo BV , onde V é o volume da sacola e B é a chamada na literatura de constante do modelo de sacola do MIT. No modelo que iremos desenvolver a partir da próxima seção, esta quantidade B adquirirá uma dependência na variável radial r . Para manter uma terminologia uniforme em todo este trabalho, vamos nos referir a B como sendo a energia do vácuo, lembrando que, de fato, B é a diferença entre as densidades de energia das duas fases do vácuo da QCD.

A incorporação da energia de vácuo ao modelo pode ser feita adicionando-se à densidade Lagrangeana (1.4) o termo $-B\theta(R-r)$. A densidade Lagrangeana completa para o modelo de sacola do MIT é, finalmente, dada por

$$\mathcal{L}_{MIT} = \left[\frac{i}{2} (\bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q - \partial_\mu \bar{q} \gamma^\mu q) - m \bar{q} q - B \right] \theta(R-r) - \frac{1}{2} \bar{q} q \delta(R-r). \quad (1.5)$$

Vejam agora algumas conseqüências físicas decorrentes de (1.5). Em primeiro lugar, vemos que a energia da sacola E_{bag} é a soma das auto-energias E_q dos quarks e da contribuição do termo $B\theta(R-r)$. Integrando a densidade Lagrangeana (1.5) sobre o espaço, a contribuição deste termo é igual a BV (com sinal positivo, já que a densidade de energia é a transformada de Legendre da densidade Lagrangeana). Temos então

$$E_{bag}^{MIT} = \sum_q E_q + BV. \quad (1.6)$$

Note-se que o termo BV , e portanto a energia da sacola, cresce à medida em que o raio R da sacola aumenta. Os auto-valores de energia dos quarks têm o comportamento inverso: eles crescem à medida que R diminui, e isto pode ser compreendido qualitativamente. Na mecânica quântica, quando uma partícula está confinada a uma certa região do espaço, a energia mínima E_q que esta partícula pode ter está relacionada com o tamanho da região (seja isto em 1, 2 ou 3 dimensões do espaço). Quanto menor for o tamanho desta região, maior vai ser a energia mínima; e, inversamente, quanto maior for o tamanho da região, menor vai ser a energia mínima. A dependência qualitativa da energia da sacola E_{bag} como função do raio R é mostrada na figura 1.1. Vemos que a energia da sacola sempre terá um ponto de mínimo para um valor determinado de R , e este ponto é único.

No modelo de sacola do MIT, o raio R da sacola é determinado dinamicamente, como conseqüência de requerer-se que a ação seja invariante frente a pequenas alterações em R (ver, por exemplo [11]), o que é equivalente a requerer-se que a energia da sacola E_{bag} seja mínima com respeito a R ,

$$\frac{\partial E_{bag}}{\partial R} = 0. \quad (1.7)$$

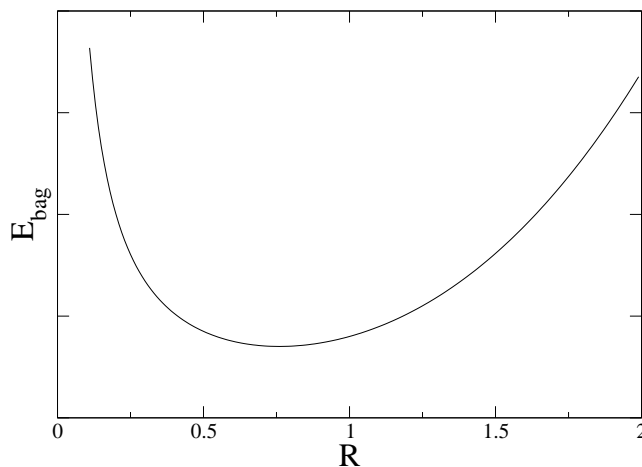


Figura 1.1: Comportamento qualitativo da energia da sacola como função de R .

Esta mesma condição também pode ser obtida a partir do requerimento de conservação do tensor energia-momento. Intuitivamente, isto pode ser pensado como um cancelamento da pressão interna dos quarks, que tende a expandir a sacola, com a pressão externa exercida pelo vácuo não-perturbativo, que tende a comprimir a sacola. Para um certo valor de R estas pressões são iguais e a sacola estará em equilíbrio.

O fato do raio da sacola no modelo do MIT ser determinado dinamicamente diferencia este modelo de todos os outros modelos hadrônicos na literatura. Note-se como é importante a inclusão do termo $B\theta(R - r)$, que representa a diferença de energia entre as duas fases do vácuo da QCD, na densidade Lagrangeana (1.5). É ele que proporciona o crescimento da energia da sacola com respeito a R , como vimos na figura 1.1, e faz com que a solução de (1.7) exista e seja finita.

A obtenção das equações dinâmicas para o modelo de sacola do MIT, a sua solução e interpretação estão além desta breve exposição. Uma descrição mais detalhada do modelo pode ser encontrada, por exemplo, no capítulo 2 de minha dissertação de mestrado [11].

1.2 Modelo de sacola difusa

O modelo de sacola difusa foi criado originalmente com o objetivo de sanar um problema relacionado à superfície delgada do modelo de sacola do MIT [8, 9]. O modelo continuou a ser desenvolvido por nós [11, 12], onde tratamos principalmente da inclusão do campo piônico, o que será visto no capítulo 2. Nesta tese, além de avançarmos no tratamento do campo piônico, iremos também melhorar o modelo no setor dos quarks, que é o assunto do presente capítulo.

Para que fiquem claras as motivações para o modelo de sacola difusa, voltemos ao

problema com o modelo do MIT mencionado acima. O problema surge quando os píons são incorporados ao modelo do MIT e tenta-se calcular a auto-energia de um hádron devida à interação dos quarks com o campo piônico. Foi mostrado (ver referências e mais detalhes em [11]) que esta auto-energia diverge, sendo a divergência ocasionada pela superfície delgada da sacola do MIT. Portanto, o problema é intrínseco ao modelo de sacola do MIT. Como a divergência é gerada pelo fato da superfície da sacola ter espessura infinitesimal, se a superfície da sacola adquirisse uma espessura finita, a divergência seria eliminada. É justamente isto que é feito no modelo de sacola difusa.

A maneira de fazer com que a superfície da sacola tenha uma espessura finita é substituir as distribuições $\theta(R - r)$ e $\delta(R - r)$ na densidade Lagrangeana do MIT (1.5) por funções suaves $F(r)$ e $G(r)$,

$$\mathcal{L} = \left[\frac{i}{2} (\bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q - \partial_\mu \bar{q} \gamma^\mu q) - m \bar{q} q - B \right] F(r) - \frac{1}{2} \bar{q} q G(r). \quad (1.8)$$

Estas funções $F(r)$ e $G(r)$ podem ser entendidas como sendo representações das distribuições $\theta(R - r)$ e $\delta(R - r)$, de modo que, num certo limite distribucional, a função $F(r)$ tenda à distribuição $\theta(R - r)$, e a função $G(r)$ tenda à distribuição $\delta(R - r)$,

$$\begin{aligned} F(r) &\longrightarrow \theta(R - r) \\ G(r) &\longrightarrow \delta(R - r). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Neste limite, o modelo de sacola difusa tende ao modelo de sacola do MIT. Isto é, todas as quantidades físicas que podem ser calculadas nos dois modelos assumem o mesmo valor, já que as densidades Lagrangeanas (1.8) e (1.5) tornam-se idênticas. Mesmo que o limite (1.9) não seja efetuado na prática, ele é uma importante referência sob o ponto de vista conceitual, pois auxilia na interpretação de várias quantidades físicas no FBM e auxilia também na reinterpretação de outras tantas quantidades físicas no modelo do MIT, como veremos a seguir neste capítulo.

Mais adiante veremos com detalhes as propriedades das funções $F(r)$ e $G(r)$, nesta seção estamos interessados em considerar apenas o comportamento qualitativo destas funções, apresentado na figura 1.2. Sob o ponto de vista matemático, estamos supondo que $F(r)$ assuma a seguinte forma,

$$F(r) = \begin{cases} 1 & , r < R_0 \\ \mathcal{F}(r) & , R_0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & , r > R_1 \end{cases}, \quad (1.10)$$

onde a função $\mathcal{F}(r)$ faz a transição contínua entre o valor $F(r) = 1$ em $r = R_0$ e o valor $F(r) = 0$ em $r = R_1$. A transição entre o interior e o exterior da sacola é então feita de maneira gradual, e a região onde ocorre esta transição é denominada de superfície da sacola. Torna-se claro que a superfície da sacola não tem mais uma posição bem definida

em $r = R$, como no modelo do MIT, e também que a superfície tem uma espessura finita, compreendendo no exemplo da figura 1.2 aproximadamente a região $0.5 < r < 1.7$. O fato da superfície da sacola não ter uma posição bem definida deu origem ao nome deste modelo: modelo de sacola difusa.

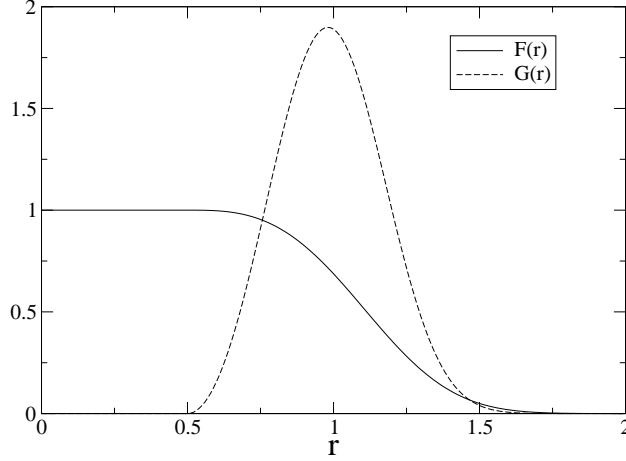


Figura 1.2: Comportamento qualitativo das funções $F(r)$ e $G(r)$.

O papel das funções $F(r)$ e $G(r)$ na densidade Lagrangeana (1.8) é fazer com que o campo dos quarks exista somente em uma região limitada do espaço — elas suprimem o campo $q(x)$ de modo que torne-se nulo no exterior da sacola. Por este motivo, as funções $F(r)$ e $G(r)$ são chamadas de funções de supressão. E para que seja feito corretamente o limite (1.9), no qual o modelo de sacola difusa tende ao modelo do MIT, devemos requerer que $F(r)$ e $G(r)$ sejam representações das distribuições $\theta(R-r)$ e $\delta(R-r)$. Estas funções devem portanto estar relacionadas segundo a equação

$$\frac{dF(r)}{dr} = -G(r) , \quad (1.11)$$

que é análoga à relação satisfeita por $\theta(R-r)$ e $\delta(R-r)$. As equações (1.8), (1.9) e (1.11) deixam bastante clara e explícita a relação entre o modelo de sacola do MIT e o modelo de sacola difusa.

A formulação do modelo de sacola difusa, no entanto, ainda não está completa. No trabalho original [9] sobre o modelo, foi mostrado que as soluções para o campo dos quarks $q(x)$ divergem quando r tende a infinito, e isto acontece para qualquer potencial que tenha a propriedade confinante — isto é, para qualquer potencial $V_c(r)$ que divirja quando r tende a infinito. Sendo assim, o campo $q(x)$ não pode representar o campo físico dos quarks. Seguindo [9], definimos um novo campo $\psi(x)$ a partir do campo $q(x)$,

$$\psi(t, \vec{r}) = \sqrt{F(r)} q(t, \vec{r}) . \quad (1.12)$$

Este campo $\psi(x)$ tem o comportamento assintótico correto, isto é, tende a zero quando r tende a infinito, e representa o campo físico dos quarks no modelo de sacola difusa. Note-se no entanto que, no limite (1.9) em que o modelo do MIT é recuperado, os campos $\psi(x)$ e $q(x)$ tornam-se idênticos. A densidade Lagrangeana (1.8) pode ser expressa em termos do novo campo $\psi(x)$, obtendo-se

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - [m + V_c(r)] \bar{\psi} \psi - B F(r). \quad (1.13)$$

Na fórmula acima, $V_c(r)$ é o potencial escalar responsável pelo confinamento dos quarks no interior da sacola, sendo chamado de potencial confinante. Este potencial está diretamente relacionado às funções $F(r)$ e $G(r)$ de acordo com as equações

$$V_c(r) = \frac{G(r)}{2 F(r)} = -\frac{1}{2 F(r)} \frac{dF(r)}{dr}. \quad (1.14)$$

Detalhes destes cálculos podem ser vistos em [11]. A forma esquemática para o potencial confinante dos quarks deve ser consistente com a expressão (1.10) para $F(r)$, sendo dada por

$$V_c(r) = \begin{cases} 0 & , r < R_0 \\ \mathcal{V}_c(r) & , R_0 \leq r \leq R_1 \\ \infty & , r > R_1 \end{cases}. \quad (1.15)$$

onde $\mathcal{V}_c(r)$ faz a transição contínua entre o valor $V_c(r) = 0$ em $r = R_0$ e o valor $V_c(r) = \infty$ em $r = R_1$. Finalmente, vemos que a equação (1.14), quando colocada na forma $F(r)V_c(r) = G(r)/2$, deixa clara a relação entre o potencial escalar confinante do modelo de sacola difusa e o termo envolvendo a função delta de Dirac na densidade Lagrangeana (1.5) do modelo do MIT. Além disso, a reformulação do modelo introduzida pela transformação (1.12) deixa evidente a sua semelhança com modelos de potencial relativístico. Podemos assim classificar o modelo de sacola difusa como uma “ponte”, uma transição suave, entre o modelo do MIT e os modelos de potencial relativístico.

Para que o modelo de sacola difusa seja capaz de reproduzir com maior fidelidade as massas dos bárions e outras propriedades hadrônicas, adicionamos ao modelo descrito por (1.13) um potencial escalar constante $V_0/2$ e um potencial vetorial $\gamma^0 [V_0/2 + V_c(r)]$, como é feito em geral na literatura. O potencial total assume então a forma $(1 + \gamma^0) V(r)$, sendo $V(r) = V_0/2 + V_c(r)$. Esta forma reduz a interação spin-órbita, em acordo com o que é observado no espectro hadrônico [14]. A densidade Lagrangeana para o modelo é então dada por

$$\mathcal{L}_{FBM} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - \bar{\psi} [m + (1 + \gamma^0) V(r)] \psi - B(r) F(r), \quad (1.16)$$

onde incluímos adicionalmente a dependência radial na constante da sacola, $B \rightarrow B(r)$, que será justificada na seção 1.4, onde investigaremos a conservação de energia e momento no modelo.

Note-se que todas as considerações físicas que motivaram o modelo do MIT também servem de base para o modelo de sacola difusa. As propriedades de confinamento e liberdade assintótica são satisfeitas assumindo-se para $F(r)$ um comportamento similar ao da figura 1.2. Se isto for garantido, a função $G(r)$ e o potencial confinante $V_c(r)$, que podem ser calculados a partir de $F(r)$ respectivamente através de (1.11) e de (1.14), também terão o comportamento esperado, condizentes com o confinamento de quarks e a liberdade assintótica. A energia de vácuo, que no modelo do MIT é dada por BV , agora é calculada como

$$E_{vac} = \int d^3r B(r) F(r) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 B(r) F(r), \quad (1.17)$$

e, como veremos em detalhes nas próximas duas seções, cumpre no FBM o mesmo papel que no modelo do MIT, que é o de garantir a conservação de energia e momento e de equilibrar a pressão interna dos quarks com a pressão externa do vácuo não-perturbativo da QCD.

Além de assegurarmos, nesta nova versão do FBM, as propriedades de confinamento e liberdade assintótica, e levarmos em conta a diferença de energia entre as duas fases do vácuo da QCD, tratamos a superfície da sacola de modo mais satisfatório que no modelo do MIT. Como a superfície tem espessura finita, a divergência da auto-energia causada pela interação quark-píon deixa de existir. Ademais, não é de se esperar que a transição entre o interior e o exterior dos hádrons seja tão abrupta como no modelo do MIT. Deste modo, a superfície da sacola torna-se no FBM uma região extendida, com uma espessura bem definida, e tem a função de confinar os quarks no interior da sacola. Em contraposição, no modelo do MIT a superfície da sacola tem espessura nula e simplesmente separa o interior do exterior da sacola.

No FBM, o interior, a superfície e o exterior da sacola podem ser definidos matematicamente através da função de supressão $F(r)$. Relembrando a figura 1.2, vemos que o interior da sacola é representado pela região em que $F(r) = 1$. Nesta região, que na figura corresponde aproximadamente ao intervalo $0 < r < 0.5$, o potencial confinante é nulo, $V_c(r) = 0$, e os quarks são livres. A superfície da sacola corresponde, na figura 1.2, à região $0.5 < r < 1.7$, na qual a função de supressão decresce até atingir o valor $F(r) = 0$. Simultaneamente, o potencial confinante aumenta, tendendo a infinito. O exterior da sacola corresponde à região $r > 1.7$, na qual os quarks foram totalmente suprimidos, sendo $F(r) = 0$ e $V_c(r) = \infty$. Lembramos que a figura 1.2 é apenas esquemática, representando o comportamento qualitativo da função de supressão $F(r)$. Feita esta ressalva, é interessante notar que, segundo esta figura, a espessura da superfície da sacola seria $1.7 - 0.5 = 1.2 \text{ fm}$. A função de supressão será definida mais precisamente na seção 1.7.

1.3 Tensor energia-momento

Na seção anterior foi mencionado que a energia do vácuo, representada nesta nova versão do modelo de sacola difusa pelo produto $B(r)F(r)$, seria determinada a partir da conservação de energia e momento. Nosso objetivo agora é calcular o tensor energia-momento e a sua divergência, deixando para a seção seguinte a determinação de $B(r)$.

Para uma densidade Lagrangeana que seja um funcional de um campo fundamental $q(x)$, o tensor energia-momento tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}[q, \partial_\mu q]}{\partial(\partial_\mu q)} \partial^\nu q + \partial^\nu \bar{q} \frac{\partial \mathcal{L}[q, \partial_\mu q]}{\partial(\partial_\mu \bar{q})} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}[q, \partial_\mu q], \quad (1.18)$$

onde deixamos explícita a dependência funcional de \mathcal{L} . No formalismo que desenvolvemos, o campo físico dos quarks $\psi(x)$ foi definido a partir do campo original $q(x)$, e todas as quantidades que envolviam $q(x)$ passaram a ser expressas em termos de $\psi(x)$. Seria útil também poder expressar o tensor energia-momento diretamente como funcional de $\psi(x)$. O primeiro passo é escrever $T^{\mu\nu}$ como um funcional do campo $\psi(x)$, que é o campo físico dos quarks, ao invés de $q(x)$. Como veremos, este procedimento é bastante similar a uma transformação de variáveis no caso de uma função. De acordo com a seção anterior, a lei de transformação dos campos é dada por

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{F(r)} q(x) \\ \partial_\mu \psi(x) &= \sqrt{F(r)} \partial_\mu q(x) + \frac{\partial_\mu F(r)}{2\sqrt{F(r)}} q(x), \end{aligned} \quad (1.19)$$

sendo a transformação inversa facilmente obtida,

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\sqrt{F(r)}} \psi(x) \\ \partial_\mu q(x) &= \frac{1}{\sqrt{F(r)}} \partial_\mu \psi(x) - \frac{\partial_\mu F(r)}{2F(r)^{3/2}} \psi(x). \end{aligned} \quad (1.20)$$

A derivada parcial com respeito a $\partial_\mu q$, que aparece na definição (1.18) do tensor energia-momento, pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu q)} = \frac{\partial(\partial_\mu \psi)}{\partial(\partial_\mu q)} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)} + \frac{\partial \psi}{\partial(\partial_\mu q)} \frac{\partial}{\partial \psi} = \sqrt{F(r)} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)}, \quad (1.21)$$

portanto os termos que envolvem $\partial_\mu q$ em (1.18) transformam-se no seguinte modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}[q, \partial_\mu q]}{\partial(\partial_\mu q)} \partial^\nu q &= \sqrt{F(r)} \frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \psi)} \left(\frac{1}{\sqrt{F(r)}} \partial^\nu \psi - \frac{\partial^\nu F(r)}{2F(r)^{3/2}} \psi \right) \\ \partial^\nu \bar{q} \frac{\partial \mathcal{L}[q, \partial_\mu q]}{\partial(\partial_\mu \bar{q})} &= \left(\frac{1}{\sqrt{F(r)}} \partial^\nu \bar{\psi} - \frac{\partial^\nu F(r)}{2F(r)^{3/2}} \bar{\psi} \right) \sqrt{F(r)} \frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \psi)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

A soma destas duas expressões é simplesmente

$$\frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial^\nu F(r)}{2F(r)} \left[\frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right]. \quad (1.23)$$

No caso da densidade Lagrangeana do FBM (1.16), o termo entre colchetes é igual a zero. Deste modo, o tensor energia-momento, expresso como funcional do campo físico dos quarks, tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi]}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}[\psi, \partial_\mu \psi], \quad (1.24)$$

que é análoga à forma (1.18) do tensor energia-momento como funcional do campo original $q(x)$. Este é um resultado interessante, dado que $\psi(x)$ é um campo suprimido. O tensor energia-momento pode então ser calculado diretamente a partir da densidade Lagrangeana (1.16) para o modelo de sacola difusa, obtendo-se

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{FBM}. \quad (1.25)$$

Em teoria de campos, a conservação de energia e momento está relacionada à divergência do tensor energia-momento. Se a divergência for nula, então energia e momento são conservados. A divergência de $T^{\mu\nu}$ é calculada como

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} = & \frac{i}{2} \left[\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \partial^\nu \psi - \partial_\mu \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right] \\ & - \frac{i}{2} \left[\partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi \right] \\ & + \partial^\nu [B(r) F(r)] + m \partial^\nu [\bar{\psi} \psi] + V(r) \partial^\nu [\bar{\psi} (1 + \gamma^0) \psi] \\ & + \bar{\psi} (1 + \gamma^0) \psi \partial^\nu V(r) \end{aligned} \quad (1.26)$$

onde a primeira linha corresponde à derivação dos termos entre colchetes em (1.25) e as três últimas linhas à derivação da densidade Lagrangeana. Cancelando termos similares, temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} = & i \left[\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right] + m \partial^\nu [\bar{\psi} \psi] + \partial^\nu [B(r) F(r)] \\ & + V(r) \partial^\nu [\bar{\psi} (1 + \gamma^0) \psi] + \bar{\psi} (1 + \gamma^0) \psi \partial^\nu V(r), \end{aligned} \quad (1.27)$$

A seguir, rearranjamos os termos de maneira mais conveniente,

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} = & \left[i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} + \bar{\psi} (1 + \gamma^0) V(r) \right] \partial^\nu \psi \\ & - \partial^\nu \bar{\psi} \left[i \partial_\mu \gamma^\mu \psi - m \psi - (1 + \gamma^0) V(r) \psi \right] \\ & + \partial^\nu [B(r) F(r)] + \bar{\psi} (1 + \gamma^0) \psi \partial^\nu V(r) . . \end{aligned} \quad (1.28)$$

Podemos reconhecer, nas expressões entre colchetes na primeira e na segunda linha, as equações dinâmicas para $\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x)$, respectivamente. A equação dinâmica para $\psi(x)$

será vista mais adiante na seção 1.5, sendo dada pela fórmula (1.36). Não obstante, usando as equações dinâmicas para $\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x)$, chegamos ao resultado

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial^\nu [B(r)F(r)] + \bar{\psi}(1 + \gamma^0)\psi \partial^\nu V(r). \quad (1.29)$$

Na equação acima, o termo $\bar{\psi}(1 + \gamma^0)\psi$ é independente do tempo, pois a exponencial e^{-iEt} proveniente de ψ é cancelada pela exponencial e^{iEt} proveniente de $\bar{\psi}$. Portanto, esta equação é trivialmente satisfeita para $\nu = 0$, pois não há nenhuma dependência temporal. Para o estado fundamental, o termo $\bar{\psi}(1 + \gamma^0)\psi$ também é independente das variáveis angulares, já que a combinação $1 + \gamma^0$ elimina a componente inferior do espinor de Dirac. Para $\nu = 1, 2, 3$, podemos escrever $\partial_\nu = \hat{r}^\nu \partial_r$, e o critério de conservação de energia e momento linear, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, implica então em

$$\partial_r [B(r)F(r)] + \sum_q \bar{\psi}_q(1 + \gamma^0)\psi_q \partial_r V_c(r) = 0, \quad (1.30)$$

onde agora colocamos explicitamente a soma sobre os quarks.

Para entender corretamente a equação (1.30), devemos postular que a função de supressão $F(r)$ tenha uma forma específica adequada, como será visto na seção 1.7. Isto implica que o potencial confinante tenha uma forma bem determinada, através de (1.14), e que as funções de onda dos quarks também sejam conhecidas, pois basta então resolver as equações dinâmicas, o que será feito na seção 1.5. Portanto, a única incógnita na equação (1.30) é a função $B(r)$, que descreve a dependência radial da diferença de densidade de energia entre o vácuo perturbativo e o vácuo não-perturbativo da QCD, como foi discutido no início do capítulo. Na próxima seção veremos que é possível determinar completamente a forma de $B(r)$ a partir da equação (1.30).

1.4 Energia do vácuo

Nesta seção vamos resolver a equação diferencial (1.30) para a energia do vácuo. Note-se que a equação (1.30) dificilmente poderá ser satisfeita se $B(r)$ for uma constante, já que as funções de onda $\psi(x)$ dependem diretamente do potencial confinante $V_c(r)$ que atua sobre os quarks, e o potencial $V_c(r)$ é definido a partir da função de supressão $F(r)$. Vemos assim que a dependência radial de $B(r)$ surge de modo natural e necessária nesta nova versão do FBM. Sendo (1.30) uma equação diferencial de primeira ordem, será possível determinar completamente a forma funcional de $B(r)$, desde que se forneça condições de contorno apropriadas. Neste caso, basta conhecer a função $B(r)$ para um determinado valor de r .

Para enfim resolver a já citada equação diferencial, vamos nos antecipar um pouco e utilizar as equações (1.38) e (1.48), que permitem escrever

$$\bar{\psi}(1 + \gamma^0)\psi = 2 \frac{1}{4\pi} \frac{u^2(r)}{r^2}, \quad (1.31)$$

onde $u(r)$ é a função de onda reduzida dos quarks definida em (1.48), o fator $1/4\pi$ é devido aos esféricos harmônicos e o fator 2 provém da soma matricial $1 + \gamma^0$. A equação diferencial (1.30) passa então a ser escrita como

$$\frac{d}{dr} [B(r) F(r)] = -\frac{1}{2\pi} \sum_q \frac{u_q^2(r)}{r^2} \frac{dV_c(r)}{dr}. \quad (1.32)$$

Integrando a equação acima de $r = 0$ até um certo valor r da variável radial, assumindo que $F(0) = 1$ e definindo $B_0 = B(0)$, obtemos

$$B(r) F(r) - B_0 = -\frac{1}{2\pi} \sum_q \int_0^r dr' \frac{u_q^2(r')}{r'^2} \frac{dV_c(r')}{dr'}. \quad (1.33)$$

Falta-nos apenas determinar o valor da constante B_0 . Para tanto, é bom lembrar que o produto $B(r)F(r)$ representa a diferença de energia entre o vácuo perturbativo e o vácuo não-perturbativo, e portanto deve tender a zero quando r aproxima-se do exterior da sacola, $r \rightarrow R_1$. Admitindo-se então que $B(R_1)F(R_1) = 0$, obtemos a partir de (1.33) que

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_q \int_0^{R_1} dr' \frac{u_q^2(r')}{r'^2} \frac{dV_c(r')}{dr'}. \quad (1.34)$$

Esta é portanto a condição de contorno para $B(r)$. Vemos que a energia do vácuo $B(r)$ fica univocamente determinada a partir das funções de onda reduzidas $u_q(r)$ de cada quark e da derivada do potencial confinante, $dV_c(r)/dr$. Substituindo (1.34) em (1.33), podemos finalmente escrever

$$B(r) F(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_q \int_r^{R_1} dr' \frac{u_q^2(r')}{r'^2} \frac{dV_c(r')}{dr'}. \quad (1.35)$$

Com a determinação da função $B(r)$, a formulação desta nova versão do FBM está completa. Em resumo, o modelo é descrito pela densidade Lagrangeana (1.16), pela equação (1.14), que relaciona a função de supressão $F(r)$ com o potencial confinante $V_c(r)$, e pela equação (1.35), que fixa a forma de $B(r)$. Para podermos aplicar o modelo ao estudo dos bárions, devemos estipular uma forma explícita para a função $F(r)$. Isto é análogo a escolher o potencial confinante em modelos de potencial, e será feito na seção 1.7.

1.5 Equação dinâmica para os quarks

A equação dinâmica para o campo dos quarks é obtida a partir da densidade Lagrangeana (1.16) usando-se as equações de Euler-Lagrange, sendo dada por

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - [m + (1 + \gamma^0) V(r)] \psi = 0. \quad (1.36)$$

Segundo foi visto na seção 1.2, o potencial $V(r)$ é a soma de uma parte constante, $V_0/2$, e do potencial confinante, $V_c(r)$,

$$V(r) = \frac{1}{2} V_0 + V_c(r) . \quad (1.37)$$

Como o potencial $V(r)$ não depende nem do tempo nem das variáveis angulares, podemos escrever o campo $\psi(x)$ na forma

$$\psi(x) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} g(r) \mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) \\ i f(r) \mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) \end{pmatrix} . \quad (1.38)$$

Assim, o operador $i\gamma^\mu \partial_\mu$ é simplificado para $\gamma^0 E + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$, e lembramos que as matrizes γ^μ são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.39)$$

A equação para $\psi(x)$ desdobra-se então no seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} E \phi_1 + i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi_2 - [m + 2V(r)] \phi_1 &= 0 \\ E \phi_2 + i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi_1 + m \phi_2 &= 0 . \end{aligned} \quad (1.40)$$

Para resolver este sistema, o primeiro passo é examinar a ação do operador $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}$ sobre as componentes superior e inferior do espinor de Dirac. Usando a identidade

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \left(\frac{d}{dr} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\ell}}{r} \right) \quad (1.41)$$

e também

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} \phi_1 &= -(\kappa + 1) \phi_1 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} \phi_2 &= (\kappa - 1) \phi_2 , \end{aligned} \quad (1.42)$$

e ainda

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{r} \mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) &= -\mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{r} \mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) &= -\mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) , \end{aligned} \quad (1.43)$$

obtemos, finalmente,

$$\begin{aligned} i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi_1 &= -i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} \right) g(r) \mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) \\ i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi_2 &= \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} \right) f(r) \mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) . \end{aligned} \quad (1.44)$$

Com isto, o sistema de equações (1.40) pode ser escrito somente em termos das funções radiais $g(r)$ e $f(r)$,

$$\begin{aligned} E g(r) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} \right) f(r) - [m + 2V(r)] g(r) &= 0 \\ E f(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 + \kappa}{r} \right) g(r) + m f(r) &= 0 . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Vemos de imediato que a segunda equação no sistema acima pode ser usada para determinar a função $f(r)$ em termos de $g(r)$,

$$f(r) = \frac{1}{E+m} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} \right) g(r). \quad (1.46)$$

Eliminando $f(r)$ na outra equação, vemos que a função $g(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial de segunda ordem,

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d g(r)}{dr} + \left[(E+m)(E-m-2V(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] g(r) = 0, \quad (1.47)$$

onde usamos a identidade $\ell(\ell+1) = \kappa(\kappa+1)$. É no entanto mais conveniente tratarmos com a função de onda reduzida $u(r)$, definida como

$$g(r) = u(r)/r, \quad (1.48)$$

e que obedece à equação

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[a - 2(E+m)V_c(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u(r) = 0, \quad (1.49)$$

onde

$$a = (E+m)(E-m-V_0). \quad (1.50)$$

Resolvendo a equação para $u(r)$ e impondo condições de contorno apropriadas (que serão obtidas na seção seguinte), podemos determinar os auto-valores E de energia correspondentes a determinados valores de m e V_0 . Tendo em vista o ajuste de parâmetros do modelo, vamos definir novas variáveis

$$\begin{aligned} E' &= E - V_0/2 \\ m' &= m + V_0/2, \end{aligned} \quad (1.51)$$

de modo que a equação (1.49) dependa explicitamente apenas de E' e m' , já que $a = E'^2 - m'^2$ e $E+m = E' + m'$, e não dependa explicitamente de V_0 .

Um resultado que facilita a determinação numérica do auto-valor de energia é mostrar que $a > 0$. Observamos primeiramente que $(u u')' = u'^2 + u u''$, e portanto

$$\int_0^{R_1} dr u(r) u''(r) = u(r) u'(r) \Big|_0^{R_1} - \int_0^{R_1} dr u'^2(r) = - \int_0^{R_1} dr u'^2(r), \quad (1.52)$$

onde a segunda igualdade foi obtida aplicando-se as condições de contorno $u(0) = u(R_1) = 0$, que serão justificadas na próxima seção. Agora, multiplicando (1.49) por $u(r)$ e rearranjando os termos, obtemos

$$a = \frac{\int_0^{R_1} dr \left[2(E+m)V_c(r) u^2(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u^2(r) + u'^2(r) \right]}{\int_0^{R_1} dr u^2(r)}. \quad (1.53)$$

Por suposição, o auto-valor E de energia é positivo, já que estamos investigando estados de partícula (e não de anti-partícula). O potencial confinante $V_c(r)$ também é positivo, por construção, para todos os valores de r . Deste modo, todos os termos na expressão acima são positivos, e portanto $a > 0$. Isto significa, em particular, que $E' > |m'|$.

1.6 Condições de contorno para a função de onda dos quarks

Vejam agora as condições de contorno para a função de onda dos quarks. Como $\psi(x)$ obedece à equação de Dirac (1.36), que é uma equação diferencial de primeira ordem, vamos exigir que $\psi(x)$ seja contínua e finita em todo o intervalo. Assim, em $r = 0$, vamos exigir simplesmente que as componentes radiais $g(r)$ e $f(r)$ sejam finitas. Para a função de onda reduzida $u(r) = g(r)/r$, isto significa que $u(0) = 0$. Deste modo ficam determinadas as condições de contorno para a função de onda dos quarks em $r = 0$, isto é, na origem do sistema de coordenadas.

Ao final da seção 1.4, mencionamos que a função de supressão $F(r)$ tem inicialmente o valor 1 e, à medida que r aumenta, $F(r)$ diminui até atingir o valor zero em $r = R_1$. Como também foi mencionado, não interessa neste momento se R_1 é finito ou infinito. Em consequência deste comportamento de $F(r)$, o potencial confinante $V_c(r)$ parte do valor zero e cresce indefinidamente à medida que r aumenta, divergindo em R_1 .

Visto que o potencial confinante $V_c(r)$ diverge em $r = R_1$, torna-se necessário examinar com cuidado o comportamento da função de onda neste ponto. Se estivéssemos tratando de uma partícula não-relativística, a função de onda obedeceria à equação de Schrödinger, e a condição de contorno seria $\psi(R_1) = 0$. No caso de uma partícula relativística de spin 1/2, a função de onda obedece à equação de Dirac, e a condição de contorno não é $\psi(R_1) = 0$, como mostraremos a seguir.

O procedimento para determinarmos a condição de contorno que a função de onda deve satisfazer no ponto em que o potencial torna-se infinito é o mesmo, tanto no caso não-relativístico como no caso relativístico. O primeiro passo é considerar um potencial $V_c(r)$ que em princípio pode ter uma forma funcional qualquer, desde que seja finito em $r \leq R_1$, constante na região $r \geq R_1$ e contínuo em $r = R_1$. Devido à continuidade do potencial em R_1 , vemos que $V_c(r) = V_c(R_1)$ para $r \geq R_1$. O segundo passo é obter a forma geral da solução para a função de onda. Lembramos então que, para um potencial central, o espinor de Dirac pode ser escrito na forma (1.38), onde a componente radial inferior $f(r)$ é determinada através de (1.46) pela componente radial superior $g(r)$, e por sua vez $g(r)$ é obtida a partir da função de onda reduzida $u(r)$ definida em (1.48) e que satisfaz a equação (1.49). Na região $r \leq R_1$, podemos escrever a função $u(r)$ na forma

$$u(r) = A\mathcal{U}(r) \quad , r \leq R_1 \quad (1.54)$$

onde $\mathcal{U}(r)$ é uma solução da equação (1.49) para $u(r)$ e A é uma constante de normalização. Na região $r \geq R_1$, podemos resolver explicitamente a equação para $u(r)$, encontrando no caso $\ell = 0$ a solução

$$u(r) = B e^{-kr} \quad , r \geq R_1 \quad (1.55)$$

onde

$$k = \sqrt{(E + m)(2V_c(R_1) + V_0 + m - E)} \quad (1.56)$$

e B é uma constante de normalização. O terceiro passo é impor condições de continuidade para a função de onda no ponto $r = R_1$. Como a equação de Dirac é uma equação diferencial de primeira ordem, devemos supor que o espinor seja contínuo em todo o intervalo. Isto implica que tanto $g(r)$ como $f(r)$ devam ser contínuas ou, equivalentemente, que $u(r)$ e sua derivada sejam contínuas, o que é consistente com o fato de $u(r)$ obedecer uma equação diferencial de segunda ordem. Assim sendo, pelo critério de continuidade obtemos as equações

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}(R_1) &= B e^{-kR_1} \\ A\mathcal{U}'(R_1) &= -k B e^{-kR_1} . \end{aligned} \quad (1.57)$$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos

$$\mathcal{U}'(R_1) = -k\mathcal{U}(R_1) . \quad (1.58)$$

O último passo é examinar o comportamento da função de onda no limite em que o potencial na região $r \geq R_1$ torna-se infinito, $V_c(R_1) \rightarrow \infty$. Neste limite, k também torna-se infinito, e, para que a componente radial inferior $f(r)$ do espinor de Dirac permaneça finita, $\mathcal{U}'(R_1)$ deve ser finita, e portanto, de acordo com a equação (1.59), $\mathcal{U}(R_1)$ deve tender a zero. Assim, o valor de $\mathcal{U}'(R_1)$ é finito porém indefinido, já que é proporcional ao produto $\infty \cdot 0$. Concluimos então que o fato do potencial tornar-se infinito em R_1 não restringe de modo algum os valores possíveis de $u'(R_1)$, mas determina de modo unívoco o valor de $u(R_1)$. As condições de contorno para a função de onda reduzida são então

$$\begin{aligned} u(R_1) &= 0 \\ u'(R_1) &\text{ constante} , \end{aligned} \quad (1.59)$$

e observamos que estes requerimentos são apropriados para uma função que satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem. Para o espinor de Dirac, as condições (1.59) significam que a componente superior é nula em R_1 e a componente inferior pode assumir qualquer valor, desde que seja finita.

Portanto, a condição de contorno não é simplesmente $\psi(R_1) = 0$, como no caso não-relativístico, como comentamos no início desta seção. Além disso, a condição de contorno (1.59) não é a mesma do modelo de sacola do MIT e do modelo de Bogoliubov (ver [11]), nos quais o confinamento dos quarks é produzido por um potencial puramente escalar.

No modelo que estamos considerando, o potencial é do tipo $(1 + \gamma^0)V(r)$, tendo uma componente escalar e uma componente vetorial. Assim vemos que, para um espinor de Dirac, a natureza do potencial confinante tem conseqüências sobre as condições de contorno.

1.7 Função de supressão e potencial confinante

Como foi visto na seção 1.2, a função de supressão dos quarks $F(r)$ tem o comportamento de uma função $\theta(R - r)$ suavizada, sendo representada de maneira qualitativa na figura 1.2. Também foi visto que a função de supressão pode ser usada para delimitar com precisão o interior, a superfície e o exterior da sacola. Postulamos para $F(r)$ a forma esquemática dada em (1.10),

$$F(r) = \begin{cases} 1 & , r < R_0 \\ \mathcal{F}(r) & , R_0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & , r > R_1 \end{cases} \quad (1.60)$$

A forma correspondente para o potencial confinante foi dada em (1.15). Neste capítulo vamos supor que R_1 é finito, assim podemos caracterizar precisamente o interior, a superfície e o exterior da sacola. O interior é representado pela região $r < R_0$, na qual os quarks são livres, $V_c(r) = 0$. A superfície é representada pela região $R_0 \leq r \leq R_1$, na qual os quarks são gradativamente suprimidos e o potencial confinante cresce de seu valor nulo em R_0 para infinito em R_1 . O exterior é representado pela região $r > R_1$, na qual os quarks são totalmente suprimidos e $V_c(r)$ é infinito.

Embora a função de supressão $F(r)$ tenha sido considerada até este momento como algo mais fundamental que o potencial confinante $V_c(r)$, sendo este calculado a partir de $F(r)$ segundo (1.14), sob o ponto de vista físico é mais natural estipular diretamente a forma de $V_c(r)$. Assim, integrando a equação (1.14), podemos determinar $F(r)$ a partir de $V_c(r)$,

$$F(r) = \exp\left(-2 \int_0^r dr' V_c(r')\right) \quad (1.61)$$

Com isto, adquirimos a liberdade de escolher a forma de $V_c(r)$ sem ferir o mecanismo de confinamento do FBM, que é sintetizado na relação (1.14).

Vejamos agora alguns requerimentos que o potencial confinante deve satisfazer. A forma esquemática de $V_c(r)$ foi dada em (1.15), deste modo podemos expressar as condições impostas sobre o potencial confinante em termos de $\mathcal{V}_c(r)$. A primeira condição, que já foi mencionada no início desta seção, é a continuidade de $V_c(r)$, que implica em

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_c(R_0) &= 0 \\ \mathcal{V}_c(R_1) &= \infty \end{aligned} \quad (1.62)$$

Além disso, como a derivada de $V_c(r)$ aparece na expressão (1.35) que determina a função $B(r)$, exigimos que

$$\frac{d\mathcal{V}_c(r)}{dr} \text{ contínua em } 0 < r < R_1. \quad (1.63)$$

Pode-se verificar facilmente que uma forma possível para $\mathcal{V}_c(r)$ que satisfaz todos estes requerimentos é dada por

$$\mathcal{V}_c(r) = \begin{cases} \frac{(r - R_0)^2}{(R_q - R_0)^2} \frac{\alpha}{(R_1 - R_q)^2}, & R_0 \leq r \leq R_q \\ \frac{\alpha}{(R_1 - r)^2}, & R_q \leq r \leq R_1 \end{cases} \quad (1.64)$$

onde introduzimos um novo parâmetro α , que regula a intensidade do potencial. A variável R_q não é livre, em vista da condição (1.63). Exigindo-se que a derivada de $\mathcal{V}_c(r)$ seja contínua em R_q , obtemos o seguinte valor para R_q ,

$$R_q = \frac{R_1 + R_0}{2}. \quad (1.65)$$

É claro que as condições (1.62) e (1.63) estão longe de especificar univocamente a forma de $\mathcal{V}_c(r)$, sendo (1.64) apenas uma entre várias possibilidades. No entanto, a forma específica de $\mathcal{V}_c(r)$ escolhida em (1.64) permite a obtenção de soluções analíticas para a função de onda dos quarks, como será visto nas próximas seções, e por este motivo foi selecionada.

A expressão de $\mathcal{F}(r)$ correspondente ao potencial confinante (1.64) é calculada a partir da relação (1.61), chegando-se ao resultado

$$\mathcal{F}(r) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{2(r - R_0)^3}{3(R_q - R_0)^2} \frac{\alpha}{(R_1 - R_q)^2}\right), & R_0 \leq r \leq R_q \\ \exp\left(-\frac{2\alpha(R_q - R_0)}{3(R_1 - R_q)^2} - 2\alpha\left[\frac{1}{R_1 - r} - \frac{1}{R_1 - R_q}\right]\right), & R_q \leq r \leq R_1 \end{cases} \quad (1.66)$$

Pode-se verificar também que a função de supressão, assim definida, é contínua em todos os valores de r , e especificamente em R_0 , R_q e R_1 .

Na maneira como foram definidas, a função de supressão $F(r)$ e o potencial confinante $V_c(r)$ dependem de três parâmetros: R_0 , R_1 e α . O valor de R_0 representa a escala em que os quarks podem ser considerados livres, e o valor de R_1 representa a escala de confinamento, na qual a função de onda dos quarks é completamente suprimida. O valor de α , como já foi dito, regula a intensidade do potencial.

1.8 Soluções para a função de onda dos quarks

Nesta seção vamos mostrar as soluções para a função de onda reduzida $u(r)$. Consideraremos somente o caso $\ell = 0$, o que é suficiente, pois mais tarde trataremos apenas de bárions no estado fundamental. Vimos que o potencial confinante é definido por (1.15) e (1.64), e portanto a equação (1.49) para $u(r)$ terá soluções diferentes nas várias regiões da sacola. Vamos então discutir cada caso separadamente.

Região $0 < r < R_0$

No interior da sacola, isto é, para $0 < r < R_0$, a equação para $u(r)$ é

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + a u(r) = 0 \quad (1.67)$$

e a solução que é regular (finita) em $r = 0$ é

$$u(r) = N_1 \text{sen}(\sqrt{a} r) . \quad (1.68)$$

Região $R_0 < r < R_q$

Na superfície da sacola, devemos considerar separadamente a solução $u(r)$ para $R_0 \leq r \leq R_q$ e para $R_q \leq r \leq R_1$. No primeiro intervalo temos

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[a - 2(E + m) \frac{(r - R_0)^2}{(R_q - R_0)^2} \frac{\alpha}{(R_1 - R_q)^2} \right] u(r) = 0 . \quad (1.69)$$

Introduzindo a notação

$$\beta^2 = \frac{2(E + m)}{(R_q - R_0)^2} \frac{\alpha}{(R_1 - R_q)^2} = \frac{32(E + m)\alpha}{(R_1 - R_0)^4} , \quad (1.70)$$

onde a segunda igualdade provém de (1.65), e efetuando a troca de variável

$$x = \beta (r - R_0)^2 , \quad (1.71)$$

podemos reescrever a equação para $u(r)$ como

$$4x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + 2 \frac{du(x)}{dx} + [a/\beta - x] u(x) = 0 . \quad (1.72)$$

Supondo que a solução possa ser escrita como $u(x) = e^{-x/2} w(x)$, a equação diferencial para $w(x)$ é

$$x \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + [1/2 - x] \frac{dw(x)}{dx} - \frac{1 - a/\beta}{4} w(x) = 0 . \quad (1.73)$$

Esta é a equação 13.1.1 de [15], cuja solução geral pode ser dada usando-se as fórmulas 13.1.11, 13.1.12 e 13.1.13 da mesma referência,

$$u(r) = N_1 e^{-\beta(r-R_0)^2/2} \left[N_2 M\left(\frac{1-a/\beta}{4}, \frac{1}{2}, \beta(r-R_0)^2\right) + N_3 \sqrt{\beta} (r-R_0) M\left(\frac{3-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, \beta(r-R_0)^2\right) \right] \quad (1.74)$$

sendo $M(a, b, z)$ uma função hipergeométrica confluyente.

Região $R_q < r < R_1$

No segundo intervalo que compõe a superfície da sacola temos

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[a - 2(E + m) \frac{\alpha}{(R_1 - r)^2} \right] u(r) = 0. \quad (1.75)$$

Efetuando a troca de variável $x = \sqrt{a}(R_1 - r)$, obtemos a equação

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[1 - \frac{2(E + m)\alpha}{x^2} \right] u(r) = 0. \quad (1.76)$$

A solução desta equação que satisfaz a condição de contorno (1.59) em $r = R_1$ é, usando a fórmula 9.1.49 de [15],

$$u(r) = N_1 N_4 \sqrt{\frac{R_1 - r}{R_1 - R_q}} \frac{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - r))}{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - R_q))}, \quad (1.77)$$

onde

$$\sigma = \sqrt{2(E + m)\alpha + 1/4}. \quad (1.78)$$

Em suma, a função de onda dos quarks é dada pelas expressões (1.68), (1.74) e (1.77). Elas foram escritas de forma conveniente: os coeficientes N_1 , N_2 , N_3 e N_4 são adimensionais, e o coeficiente N_1 é, de fato, o fator de normalização da função de onda.

Sendo conhecida a forma analítica da função de onda dos quarks e do potencial confinante, podemos verificar se a integral na expressão (1.35), que determina a função $B(r)$, é finita para os valores de r no intervalo $0 \leq r \leq R_1$. Uma rápida inspeção mostra que a integral é finita em quase todo o intervalo, exceto possivelmente no ponto $r = R_1$, onde o integrando possa ser divergente. Para analisar esta questão com mais cuidado, vejamos qual é o comportamento do integrando na vizinhança do ponto R_1 . Usando a fórmula 9.1.7 de [15], segundo a qual $J_\sigma(z) \approx cte z^\sigma$ para $z \approx 0$, o termo dominante do integrando no limite $r \rightarrow R_1$ é dado por

$$\frac{u(r)^2}{r^2} \frac{dV_c(r)}{dr} \approx \frac{cte}{r^2} (R_1 - r)^{2\sigma+1} \frac{1}{(R_1 - r)^3} = \frac{cte}{r^2} (R_1 - r)^{2\sigma-2}. \quad (1.79)$$

Portanto, a integral será finita se a inequação $2\sigma - 2 > -1$ for satisfeita. Através de (1.78), podemos expressar esta condição em termos do parâmetro α do potencial confinante, obtendo $(E + m)\alpha > 0$. Como α , E e m são positivos, a inequação é sempre satisfeita, e a integral é sempre finita.

1.9 Equações de continuidade e de autovalores

Sendo a equação de Dirac uma equação diferencial de primeira ordem, a função de onda $\psi(x)$ deve ser contínua para todos os valores de r . Na expressão (1.38) escrevemos $\psi(x)$

em termos das funções radiais $g(r)$ e $f(r)$, e estas funções, por sua vez, foram escritas em termos da função de onda reduzida $u(r)$ através da equação (1.48). Pode-se verificar que a continuidade de $g(r)$ implica na continuidade de $u(r)$ e, devido à equação (1.46), que a continuidade de $f(r)$ implica na continuidade de du/dr . Isto é o que esperávamos, pois $u(r)$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem.

Deste modo, tanto $u(r)$ como $u'(r)$ devem ser contínuas para todos os valores de r , e isto vale em particular para os pontos R_0 e R_q . Para estabelecermos as equações de continuidade, vamos precisar da derivada de $u(r)$ nas diversas regiões definidas na seção precedente, que são dadas abaixo:

Região $0 < r < R_0$

Nesta região a derivada de $u(r)$ é calculada com facilidade,

$$u'(r) = N_1 \sqrt{a} \cos(\sqrt{a} r) . \quad (1.80)$$

Região $R_0 < r < R_q$

Usando a fórmula 13.4.8 de [15], $M'(a, b, z) = a/b M(a + 1, b + 1, z)$, a derivada de $u(r)$ pode ser expressa, sem muito trabalho, como

$$\begin{aligned} u'(r) = & -\beta (r - R_0) u(r) + N_1 N_3 \sqrt{\beta} e^{-\beta(r-R_0)^2/2} M\left(\frac{3-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, \beta(r - R_0)^2\right) \\ & + N_1 \beta (r - R_0) e^{-\beta(r-R_0)^2/2} \left[N_2 (1 - a/\beta) M\left(\frac{5-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, \beta(r - R_0)^2\right) \right. \\ & \left. + N_3 \sqrt{\beta} (r - R_0) \frac{3 - a/\beta}{3} M\left(\frac{7-a/\beta}{4}, \frac{5}{2}, \beta(r - R_0)^2\right) \right] , \end{aligned} \quad (1.81)$$

onde a primeira parcela provém da derivação da exponencial, podendo então ser escrita em termos da própria função $u(r)$.

Região $R_q < r < R_1$

Usando a fórmula 9.1.27 de [15], $J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \nu/z J_\nu(z)$, a derivada de $u(r)$ é calculada como

$$\begin{aligned}
u'(r) &= -\frac{N_1 N_4}{2 \sqrt{(R_1 - R_q)(R_1 - r)}} \frac{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - r))}{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - R_q))} \\
&\quad - N_1 N_4 \sqrt{\frac{R_1 - r}{R_1 - R_q}} \frac{\sqrt{a}}{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - R_q))} \\
&\quad \times \left[-J_{\sigma+1}(\sqrt{a}(R_1 - r)) + \frac{\sigma}{\sqrt{a}(R_1 - r)} J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - r)) \right] \quad (1.82) \\
&= -N_1 N_4 \frac{\sigma + 1/2}{\sqrt{(R_1 - R_q)(R_1 - r)}} \frac{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - r))}{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - R_q))} \\
&\quad + N_1 N_4 \sqrt{a} \sqrt{\frac{R_1 - r}{R_1 - R_q}} \frac{J_{\sigma+1}(\sqrt{a}(R_1 - r))}{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - R_q))}.
\end{aligned}$$

Condições de continuidade

Podemos agora examinar as condições de continuidade nos pontos R_0 e R_q . A continuidade de $u(r)$ e de sua derivada em $r = R_0$ implicam em

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\sqrt{a} R_0) &= N_2 \\
\sqrt{a} \cos(\sqrt{a} R_0) &= \sqrt{\beta} N_3, \quad (1.83)
\end{aligned}$$

o que permite determinar imediatamente os coeficientes N_2 e N_3 . A continuidade de $u(r)$ em $r = R_q$ implica em

$$e^{-y/2} \left[N_2 M\left(\frac{1-a/\beta}{4}, \frac{1}{2}, y\right) + N_3 \sqrt{y} M\left(\frac{3-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, y\right) \right] = N_4, \quad (1.84)$$

onde achamos conveniente introduzir a variável y ,

$$y = \beta(R_q - R_0)^2 = \sqrt{2(E + m)} \alpha, \quad (1.85)$$

para simplificar um pouco as fórmulas. Usando os valores de N_2 e N_3 obtidos nas equações (1.83) e substituindo-os em (1.84), obtemos o valor de N_4 . A continuidade de $u'(r)$ em $r = R_q$ tem como conseqüência a equação

$$\begin{aligned}
& -\beta(R_q - R_0) N_4 + N_3 \sqrt{\beta} e^{-\beta(R_q - R_0)^2/2} M\left(\frac{3-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, \beta(R_q - R_0)^2\right) \\
& \quad + \beta(R_q - R_0) e^{-\beta(R_q - R_0)^2/2} \left[N_2 (1 - a/\beta) M\left(\frac{5-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, \beta(R_q - R_0)^2\right) \right. \\
& \quad \left. + N_3 \sqrt{\beta} (R_q - R_0) \frac{3 - a/\beta}{3} M\left(\frac{7-a/\beta}{4}, \frac{5}{2}, \beta(R_q - R_0)^2\right) \right] \\
& \quad = -N_4 \frac{\sigma + 1/2}{R_1 - R_q} + N_4 \sqrt{a} \frac{J_{\sigma+1}(\sqrt{a}(R_1 - R_q))}{J_\sigma(\sqrt{a}(R_1 - R_q))}. \quad (1.86)
\end{aligned}$$

Multiplicando esta equação por $(R_q - R_0)$, podemos usar a variável y , obtendo

$$\begin{aligned}
& -y N_4 + N_3 \sqrt{y} e^{-y/2} M\left(\frac{3-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, y\right) \\
& + y e^{-y/2} \left[N_2 (1 - a/\beta) M\left(\frac{5-a/\beta}{4}, \frac{3}{2}, y\right) + N_3 \sqrt{y} \frac{3 - a/\beta}{3} M\left(\frac{7-a/\beta}{4}, \frac{5}{2}, y\right) \right] \\
& = -N_4 \left(\sigma + \frac{1}{2} \right) + N_4 \sqrt{a} (R_q - R_0) \frac{J_{\sigma+1}(\sqrt{a}(R_1 - R_q))}{J_{\sigma}(\sqrt{a}(R_1 - R_q))}. \quad (1.87)
\end{aligned}$$

Como os valores de N_2 , N_3 e N_4 já foram determinados, a única incógnita nesta equação é E , a energia dos quarks. Desta forma, a condição de continuidade (1.87) torna-se a equação de autovalores de energia.

Comportamento do autovalor com respeito aos parâmetros do modelo

Vimos que a equação (1.87) determina os autovalores de energia. Seria interessante podermos conhecer o comportamento do autovalor com respeito aos parâmetros do modelo, que são R_0 , R_1 , α , m e V_0 . Nas figuras que veremos abaixo, fizemos o gráfico do autovalor de energia E' para o estado fundamental como função de um dos parâmetros, sendo cada curva obtida com valores diferentes dos outros parâmetros. Decidimos trabalhar com as variáveis E' e m' , pois assim eliminamos a dependência em V_0 . Lembramos que as variáveis originais E e m estão relacionadas com E' e m' através de (1.51).

Na figura 1.3, vemos o gráfico do autovalor de energia E' do estado fundamental como função de m' . Cada curva corresponde a uma combinação dos parâmetros $R_0 = \{0.4, 0.8\} fm$, $R_1 = \{1.0, 1.8\} fm$, $\alpha = \{0.01, 0.1, 1.0, 10.0\} fm$, perfazendo ao todo 12 curvas. O objetivo, tanto nesta como nas figuras seguintes, não é identificar cada curva, mas sim obter uma idéia intuitiva do comportamento do autovalor de energia. Percebemos então que, não importando qual seja a combinação específica dos parâmetros R_0 , R_1 e α , a dependência de E' com respeito a m' lembra uma hipérbole, e se $|m'| \rightarrow \infty$ vemos que E' é proporcional a m' . Este é o comportamento esperado, tendo em vista que, à medida que $|m'| \rightarrow \infty$, a energia potencial torna-se desprezível em relação à massa, sendo assim aplicável a fórmula $E^2 = m^2 + p^2$ da relatividade especial.

As figuras 1.4, 1.5 e 1.6 foram feitas com a mesma motivação da figura 1.3, e mostram a dependência de E' respectivamente como função de R_1 , R_0 e α . A partir da figura 1.4, notamos que a energia sempre decresce com R_1 , o que é razoável se lembrarmos a discussão a respeito do modelo do MIT feita acima da figura 1.1, onde dizíamos que quanto maior for o tamanho da região de confinamento, menor será a energia dos quarks. Na figura 1.5, vemos que quanto maior for R_0 , menor é a energia. Isto é o que se espera, já que, ao aumentarmos R_0 proporcionalmente em relação a R_1 , aumentamos a região em que os quarks estão livres. O que surpreende na figura é que, para certas combinações de

parâmetros, o autovalor seja aproximadamente constante com relação a R_0 . Finalmente, a figura 1.6 mostra que a energia sempre aumenta com α , pois este é o parâmetro que regula a intensidade do potencial confinante.

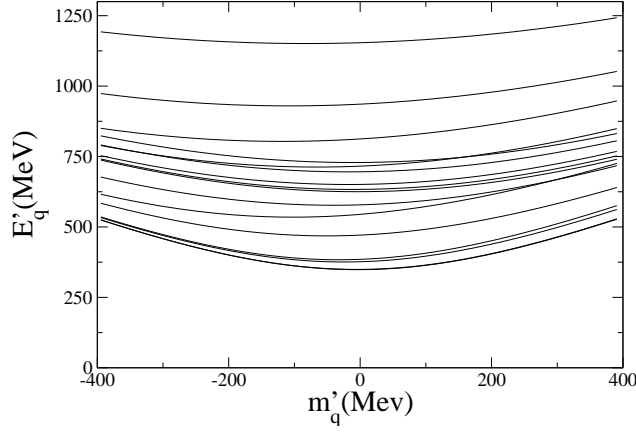


Figura 1.3: O autovalor de energia E' do estado fundamental como função de m' ; cada curva corresponde a uma combinação dos parâmetros $R_0 = \{0.4, 0.8\} fm$, $R_1 = \{1.0, 1.8\} fm$, $\alpha = \{0.01, 0.1, 1.0, 10.0\} fm$.

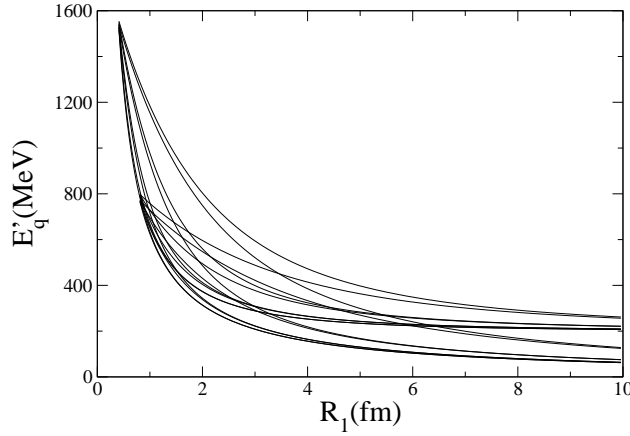


Figura 1.4: O autovalor de energia E' do estado fundamental como função de R_1 ; cada curva corresponde a uma combinação dos parâmetros $R_0 = \{0.4, 0.8\} fm$, $m' = \{0, 200\} MeV$, $\alpha = \{0.01, 0.1, 1.0, 10.0\} fm$.

1.10 Normalização da função de onda dos quarks

A função de onda dos quarks é normalizada segundo a condição usual de que a probabilidade de encontrarmos um quark seja 100% na região de confinamento,

$$\int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = 1. \quad (1.88)$$

Como foi mencionado na seção 1.8, isto determina o coeficiente N_1 da função de onda reduzida $u(r)$. Devemos ter em mente que, com as soluções obtidas na seção 1.8, a integral acima só poderá ser resolvida numericamente. Ocorre que a dificuldade em tratar esta integral é a mesma encontrada no cálculo da família de integrais

$$\langle r^n \rangle = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}) r^n \psi(\vec{r}), \quad (1.89)$$

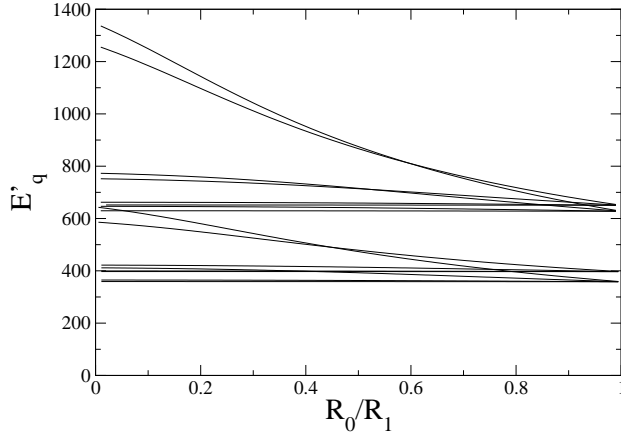


Figura 1.5: O autovalor de energia E' do estado fundamental como função de R_0 ; cada curva corresponde a uma combinação dos parâmetros $R_1 = \{1.0, 1.8\} fm$, $m' = \{0, 200\} MeV$, $\alpha = \{0.01, 0.1, 1.0, 10.0\} fm$.

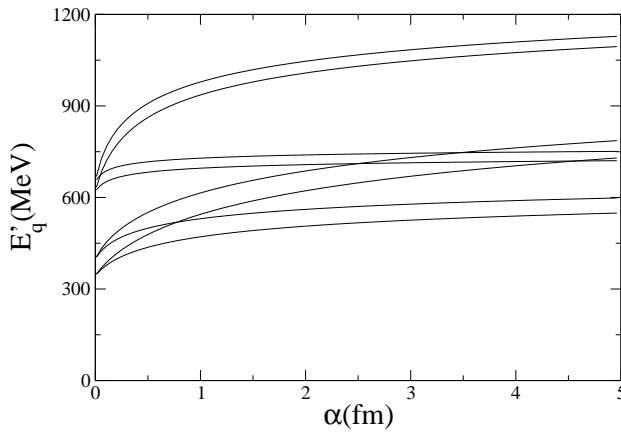


Figura 1.6: O autovalor de energia E' do estado fundamental como função de α ; cada curva corresponde a uma combinação dos parâmetros $R_0 = \{0.4, 0.8\} fm$, $R_1 = \{1.0, 1.8\} fm$ e $m' = \{0, 200\} MeV$.

que fornecem o valor esperado de r^n nas funções de onda dos quarks. Se $n = 0$, obtemos a integral que aparece em (1.88); se $n = 2$, a integral fornece o raio quadrático médio da função de onda dos quarks, que será visto no capítulo 4. Usando a expressão (1.38) que expressa $\psi(x)$ em termos das componentes superiores e inferiores do espinor de Dirac, obtemos

$$\langle r^n \rangle = \int_0^{R_1} dr r^{n+2} [g^2(r) + f^2(r)] . \quad (1.90)$$

Note-se que a integração sobre as variáveis angulares já foi feita, restando somente a variável radial r . Usando as relações (1.48) e (1.46), que expressam $g(r)$ e $f(r)$ em termos de $u(r)$, ficamos com o resultado

$$\begin{aligned} \langle r^n \rangle &= \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) + \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^n \left[\frac{du(r)}{dr} + \frac{\kappa u(r)}{r} \right]^2 \\ &= \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) + \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^n \left[\left(\frac{du(r)}{dr} \right)^2 + \frac{2\kappa u(r)}{r} \frac{du(r)}{dr} + \frac{\kappa^2 u^2(r)}{r^2} \right]^2 . \end{aligned} \quad (1.91)$$

Utilizando a identidade

$$(r^n u' u)' = r^n u'^2 + r^n u'' u + n r^{n-1} u' u, \quad (1.92)$$

e notando que $r^n u' u = 0$ tanto para $r=0$ como para $r=R_1$, podemos fazer integração por partes e obter

$$\langle r^n \rangle = \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) + \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^n \left[-u''(r) u(r) + \frac{2\kappa - n}{r} u'(r) u(r) + \frac{\kappa^2 u^2(r)}{r^2} \right]. \quad (1.93)$$

Utilizando ainda a identidade

$$\left[\frac{1}{2} r^{n-1} u^2 \right]' = r^{n-1} u' u + \frac{n-1}{2} r^{n-2} u^2 \quad (1.94)$$

podemos fazer uma nova integração por partes,

$$\langle r^n \rangle = \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) + \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^n \left[-u''(r) u(r) + \frac{[\kappa^2 - (\kappa - n/2)(n-1)] u^2(r)}{r^2} \right]. \quad (1.95)$$

Substituindo a equação diferencial (1.49) para $u(r)$ na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle r^n \rangle &= \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) + \frac{\kappa^2 - \kappa n + \kappa + n^2/2 - n/2}{(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^{n-2} u^2(r) \\ &+ \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) \left[(E+m) [E - m - 2V(r)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \\ &= \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) + \frac{n(n-1)/2 - \kappa n}{(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^{n-2} u^2(r) \\ &+ \frac{1}{(E+m)} \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) [E - m - 2V(r)], \end{aligned} \quad (1.96)$$

onde usamos $\kappa(\kappa+1) = \ell(\ell+1)$. Para simplificar esta expressão, juntamos o primeiro com o terceiro termo, chegando ao resultado final para o valor esperado de r^n ,

$$\langle r^n \rangle = \frac{2}{(E+m)} \int_0^{R_1} dr r^n u^2(r) [E - V(r)] + \frac{n^2 - n - 2\kappa n}{2(E+m)^2} \int_0^{R_1} dr r^{n-2} u^2(r). \quad (1.97)$$

A condição de normalização da função de onda envolve o valor esperado de $r^0 = 1$. Colocando $n=0$ na expressão acima, obtemos

$$\frac{2}{(E+m)} \int_0^{R_1} dr u^2(r) [E - V(r)] = 1. \quad (1.98)$$

Enfatizamos que este resultado é válido não somente para os estados com $\ell=0$, mas para qualquer função de onda na forma (1.38). Como a forma de $u(r)$ para $r \leq R_0$ é bastante simples, podemos fazer o cálculo analiticamente. Para $r > R_0$ o cálculo é feito numericamente. A equação final para N_1 é

$$N_1^2 E' R_0 \left(1 - \frac{\cos(\sqrt{a} R_0) \text{sen}(\sqrt{a} R_0)}{\sqrt{a} R_0} \right) + 2 \int_{R_0}^{R_1} dr u^2(r) [E' - V_c(r)] = E' + m'. \quad (1.99)$$

1.11 Massa dos bárions

Segundo o modelo que estamos desenvolvendo, a energia contida num bárion é dada pela soma das auto-energias dos quarks e da energia de vácuo, que foi definida em (1.17),

$$E_{bag} = \sum_q E_q + \int d^3r B(r) F(r) . \quad (1.100)$$

Formalmente, a fórmula acima é bastante similar à expressão (1.6) para a energia de um bárion no modelo de sacola do MIT. No modelo do MIT, $B(r)$ é constante, $B(r) = B$, $F(r)$ é a função $\theta(R - r)$ de Heaviside, e a integral acima pode ser feita facilmente, obtendo-se como resultado BV , onde V é o volume da sacola. Recuperamos então a fórmula (1.6) para a energia de um bárion no modelo do MIT, e vemos que a energia de vácuo no modelo do MIT é devida ao volume da sacola.

No nosso modelo, a integral em (1.100) pode ser trabalhada mais explicitamente usando-se as expressões para $B(r)$ obtidas na seção 1.4. Fazendo primeiramente as integrais angulares em (1.100), obtemos

$$E_{bag} = \sum_q E_q + 4\pi \int_0^\infty dr r^2 B(r) F(r) . \quad (1.101)$$

Note-se que, segundo a expressão (1.35), a função $B(r)$ é obtida através de uma integral, e portanto a integral acima em r é de fato uma integral dupla. Podemos simplificar a expressão acima aplicando o método de integração por partes na forma

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^3}{3} B(r) F(r) \right) = r^2 B(r) F(r) + \frac{r^3}{3} \frac{d}{dr} [B(r) F(r)] . \quad (1.102)$$

Como $r^3 B(r) F(r)$ é nulo tanto em $r = 0$ como em $r = \infty$, vemos que

$$E_{bag} = \sum_q E_q - \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dr r^3 \frac{d}{dr} [B(r) F(r)] . \quad (1.103)$$

Usando a equação (1.32), a expressão para a energia de um bárion pode então finalmente ser escrita como

$$E_{bag} = \sum_q E_q + \frac{2}{3} \sum_q \int_{R_0}^{R_1} dr r u_q^2(r) \frac{dV(r)}{dr} . \quad (1.104)$$

Sendo $dV(r)/dr > 0$, a contribuição da energia de vácuo será sempre positiva.

É interessante notar que, na expressão final para a energia de vácuo, apenas a superfície da sacola contribui. No nosso modelo, portanto, a energia de vácuo é devida à superfície da sacola, e não ao volume, como no modelo do MIT. De certo modo, é mais natural que seja assim, pois, sob o ponto de vista da construção do modelo (tanto o nosso como o do MIT), a origem da energia de vácuo é a conservação da energia e momento da sacola, e é somente na superfície da sacola que o fluxo de energia e momento dos quarks deve ser

compensado por um outro fluxo, de modo que o fluxo total de energia e momento seja nulo, como pode ser depreendido da equação (1.30).

No presente modelo então a energia de vácuo é devida à superfície da sacola, como foi calculado em (1.104). No limite em que o nosso modelo aproxima-se do modelo do MIT, isto é, no limite em que a função de supressão dos quarks $F(r)$ tende à função $\theta(R-r)$, a espessura da superfície da sacola torna-se infinitesimal, e recupera-se o resultado do MIT, de que a energia de vácuo é devida ao volume da sacola. (É claro que este processo limite em que $F(r) \rightarrow \theta(R-r)$ é difícil de ser aplicado diretamente à expressão (1.104), na obtenção da qual foram feitas várias integrações por partes, mas pode ser obtido quase que trivialmente a partir de (1.100), como de fato foi feito no texto que segue esta expressão.) No entanto, se a superfície da sacola tiver espessura finita, por menor que seja, a energia de vácuo será devida a esta superfície.

Finalmente, para determinarmos a massa de um bárion, vamos supor que o momento carregado pelo bárion é nulo. Esta suposição é natural, já que a sacola é estática, estando fixa na origem do sistema de coordenadas. A partir da conhecida fórmula da relatividade, $M^2 = E^2 - P^2$, e considerando nulo o termo P^2 , vemos que a massa da sacola é igual à energia nela contida, $M = E$, e portanto temos

$$M = \sum_q E_q + \frac{2}{3} \sum_q \int_{R_0}^{R_1} dr r u_q^2(r) \frac{dV(r)}{dr}. \quad (1.105)$$

No capítulo 3, veremos que o valor esperado do quadrado do momento linear total da sacola não é nulo, $\langle \vec{P}^2 \rangle \neq 0$, e a fórmula acima para a massa da sacola será apropriadamente corrigida.

Levantamento de degenerescências

A fórmula (1.105) permite calcular a massa de qualquer bárion nesta nova versão que desenvolvemos do modelo de sacola difusa. Na prática, aplicaremos o modelo ao estudo do octeto bariônico fundamental, que é constituído pelos bárions para os quais os seus quarks constituintes estão todos no estado de mais baixa energia. Estes bárions estão listados abaixo,

$$\left(N, \Delta \right), \left(\Lambda, \Sigma, \Sigma^* \right), \left(\Xi, \Xi^* \right), \left(\Omega^- \right), \quad (1.106)$$

sendo que os parênteses agrupam os bárions de mesma estranheza, em ordem decrescente, de 0 até -3 (o quark s tem estranheza -1). Em todo o trabalho, estaremos considerando que as massas dos quarks u e d são iguais, mas diferem da massa do quark s . Como a expressão (1.105) para a massa de um bárion depende somente do conteúdo de sabor de cada bárion, e não da sua função de onda completa, os estados que agrupamos em (1.106) são degenerados.

No capítulo 3 iremos adicionar várias correções à expressão (1.105) para a massa de um bárion. Temos a correção de centro de massa, a troca de um glúon, e a renormalização

devida à interação dos quarks com o campo piônico. Veremos que estas correções são capazes de levantar completamente as degenerescências entre as massas dos bárions do octeto fundamental. Antes disso, porém, discutiremos a inclusão do campo piônico nesta nova versão do FBM, que é o assunto do capítulo 2.

Capítulo 2

O campo piônico

Neste capítulo vamos tratar da inclusão do campo piônico no modelo de sacola difusa. O formalismo que desenvolveremos terá semelhanças com o formalismo do capítulo 1, envolvendo uma função de supressão e um potencial escalar que atuam sobre o campo piônico. Como consequência, obtemos um resultado único na literatura: apesar do campo piônico estar sujeito a um potencial escalar, a simetria quiral não é violada. Deste modo, o nosso modelo é o único em que o campo piônico é suprimido gradativamente à medida que entra na sacola. Isto permite que os píons sejam tratados de modo menos conflitante com as propriedades esperadas da QCD, como será discutido adiante. Além disso, o formalismo para o campo piônico desenvolvido no presente trabalho representa um avanço em relação aos nossos trabalhos anteriores [11, 12], pois a densidade Lagrangeana que obtivemos permite quantizar o campo piônico, o que antes não era possível, e deste modo levar em conta efeitos de flutuações quânticas do campo piônico e da sacola.

Na seção 2.1, vamos introduzir a simetria quiral e explicar por que ela é tão importante para a física de hádrons. Na seção 2.2 será visto que esta simetria é necessariamente violada em modelos hadrônicos. Para curar este problema, adiciona-se um campo piônico a estes modelos, e o modo como isto é tradicionalmente feito será visto na seção 2.3, onde veremos também algumas deficiências destes métodos. Na seção 2.4 é explicado o mecanismo de supressão piônica, sendo na seção 2.5 mostrado explicitamente que este mecanismo preserva a simetria quiral. Na seção 2.6 fazemos conexão com o capítulo 1, mostrando como o acoplamento pión-quark é capaz de restaurar a simetria quiral, que é violada se considerarmos somente o setor dos quarks. Na seção 2.7 definimos uma forma possível para a função de supressão dos píons, e na seção 2.8 discutimos a obtenção das soluções para o campo piônico. Na seção 2.9 obtemos um critério para a normalização das funções de onda do pión. Finalmente, na seção 2.10 obtemos a solução particular do campo piônico, que é gerada pelo termo de fonte devido aos quarks.

2.1 Simetria quiral

O principal motivo para a inclusão do campo piônico em modelos hadrônicos é a restauração da simetria quiral, que é violada no setor dos quarks. Para que isto fique claro, vamos primeiramente lembrar o que é a simetria quiral.

Considere-se então as correntes bariônicas vetorial e axial entre estados de isospin bem definidos e de estranheza, charme, etc., nulos. Isto é, consideraremos somente o nêutron, a ressonância Delta e estados excitados destas partículas. A corrente bariônica vetorial pode então ser denotada por $J_\mu^a(x)$, onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ é o índice de Lorentz e $a = 1, 2, 3$ é o índice de isospin, que corresponde aos 3 geradores do grupo $SU(2)$. Do mesmo modo, a corrente bariônica axial é denotada por $A_\mu^a(x)$, e comporta-se como um pseudo-vetor sob transformações de Lorentz. É importante distinguir a estrutura de grupo gerada pelas correntes vetorial e axial. Deste modo, dizemos que a corrente vetorial está relacionada ao grupo $SU_V(2)$, e a corrente axial ao grupo $SU_A(2)$. Os geradores de cada um destes grupos podem ser expressos em termos das correntes $J_\mu^a(x)$ e $A_\mu^a(x)$,

$$Q_V^a(t) = \int d^3r J_0^a(x) \quad Q_A^a(t) = \int d^3r A_0^a(x). \quad (2.1)$$

Se ambas as correntes forem conservadas, os geradores serão independentes do tempo e os estados bariônicos obedecerão à estrutura do grupo $SU_V(2) \times SU_A(2)$. Ocorre que, sob ação dos geradores Q_V^a , os estados referentes ao setor axial também são transformados e, sob ação dos geradores Q_A^a , os estados referentes ao setor vetorial são transformados. Para que a estrutura de grupo torne-se mais transparente, introduz-se os geradores

$$Q_R^a = \frac{1}{2} (Q_V^a + Q_A^a) \quad Q_L^a = \frac{1}{2} (Q_V^a - Q_A^a). \quad (2.2)$$

Pode-se mostrar (ver, por exemplo, [16]) que Q_R^a e Q_L^a comutam entre si e que separadamente são geradores do grupo $SU(2)$. Com estes geradores, a estrutura de grupo passa a ser escrita como $SU_R(2) \times SU_L(2)$. Este é o chamado grupo quiral, sendo R e L os dois estados possíveis de quiralidade. O gerador Q_R^a mistura apenas estados com quiralidade R , enquanto que Q_L^a mistura somente estados com quiralidade L . A simetria quiral corresponde a esta possibilidade de transformar de modo independente estados com quiralidades diferentes. O operador de paridade completa a estrutura do grupo, misturando estados com quiralidades opostas.

A simetria quiral desempenha um papel muito importante na Física Hadrônica, possibilitando inclusive relacionar propriedades da interação forte com propriedades da interação fraca. Apenas para citar alguns tópicos relacionados à simetria quiral, mencionamos a conservação parcial da corrente axial (PCAC), teoremas para píons de baixo momento, hipótese da dominância do pólo do pión no espalhamento a baixas energias, relação de Goldberger-Treiman, álgebra de correntes e a teoria de perturbação quiral. De fato, a simetria quiral é, depois da simetria de isospin, a que melhor é satisfeita na Física Hadrônica.

Tratando-se quarks e glúons como campos clássicos, a simetria quiral também está presente na QCD. As causas para a leve quebra desta simetria são as massas finitas dos quarks e a anomalia quiral, que tem origem no processo de renormalização. No nível em que estaremos trabalhando, a violação da simetria quiral será ocasionada pelas massas dos quarks e pela massa do pión. Enquanto estivermos verificando se esta simetria é satisfeita ou não, consideraremos nulas tanto m_q como m_π . A violação da simetria quiral introduzida por $m_q \neq 0$ e $m_\pi \neq 0$ é esperada e está de acordo com os resultados experimentais. O que não é esperado e também não se reflete nos resultados experimentais é a violação da simetria quiral ocasionada pelos termos de confinamento nos modelos hadrônicos, o que será visto na próxima seção.

2.2 Violação da simetria quiral

Na área de modelos fenomenológicos para hádrons, é comum falar-se em simetria quiral quando o que se está realmente verificando é a conservação da corrente axial. Ocorre que, como a corrente vetorial é em geral conservada, a condição para que a simetria quiral seja válida é a conservação da corrente axial. Os dois assuntos estão correlacionados, como vemos, sendo que um implica no outro, mas eles não devem ser confundidos. No que segue, continuaremos falando em simetria quiral, mas estaremos de fato investigando a conservação da corrente axial.

Considerando que os bárions são compostos por quarks, as correntes bariônicas vetorial e axial podem ser expressas em termos das correntes vetorial e axial carregadas pelos quarks, que são dadas por

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \\ a^\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x) . \end{aligned} \quad (2.3)$$

As funções de onda dos quarks com quiralidade bem definida são escritas como

$$\psi_R(x) = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi(x) \quad \psi_L(x) = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi(x) . \quad (2.4)$$

Pode-se verificar facilmente que as correntes vetorial e axial não misturam estados de quiralidade oposta,

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) \\ a^\mu(x) &= \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R(x) - \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L(x) , \end{aligned} \quad (2.5)$$

no entanto, o mesmo não acontece com a densidade escalar,

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) = \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) + \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) . \quad (2.6)$$

Portanto, termos do tipo (2.5) satisfazem a simetria quiral, já que podemos aplicar transformações independentes sobre $\psi_R(x)$ e $\psi_L(x)$ mantendo $j^\mu(x)$ e $a^\mu(x)$ invariantes. Enquanto isso, termos do tipo (2.6) violam a simetria quiral, pois para manter $\bar{\psi}(x) \psi(x)$ invariante, devemos conjugar a transformação de $\psi_R(x)$ com a de $\psi_L(x)$.

Observando-se as densidades Lagrangeanas (1.5) e (1.16) respectivamente do modelo do MIT e do modelo de sacola difusa, vemos que os termos cinéticos, que envolvem a derivada ∂_μ , são similares a (2.5), preservando a simetria quiral. Já o termo proporcional à função $\delta(R - r)$ encontrado em (1.5) e o termo proporcional ao potencial confinante $V_c(r)$ encontrado em (1.16) são do tipo (2.6), violando a simetria quiral. Estes últimos termos, no entanto, são essenciais para o confinamento dos quarks. Em qualquer modelo hadrônico, o confinamento dos quarks sempre envolve um termo escalar na densidade Lagrangeana, já que um potencial vetorial não pode confinar partículas relativísticas de spin 1/2, e deste modo a simetria quiral sempre será quebrada.

Como o setor dos quarks necessariamente viola a simetria quiral, introduz-se nos modelos hadrônicos um novo campo, o campo dos píons, cuja função primordial é restaurar a simetria. Na próxima seção vamos ver como isto é feito nos modelos em geral, comentando as deficiências destes procedimentos tradicionais. Na seção 2.4, veremos como o campo piônico é levado em conta no modelo de sacola difusa.

2.3 O campo piônico em modelos hadrônicos

Em grande parte dos modelos de sacola e de potencial relativístico, o campo piônico pode entrar livremente no interior de um bárion. Exceto pelo acoplamento dos píons com os quarks, que iremos considerar mais adiante, os píons comportam-se como partículas livres, e a densidade Lagrangeana correspondente é dada simplesmente por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - m_\pi^2 \vec{\phi}^2 \right] . \quad (2.7)$$

Contrastando com esta situação, em algumas versões do modelo de sacola, o campo piônico é impedido de entrar no interior dos bárions. A superfície da sacola pode então ser pensada como uma parede que impede os quarks de saírem e os píons de entrarem. Assim, o campo piônico é descrito pela densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - m_\pi^2 \vec{\phi}^2 \right] \theta(r - R) , \quad (2.8)$$

onde a função degrau $\theta(r - R)$ é igual a zero no interior da sacola e igual a 1 no exterior, de modo que os píons existem somente no exterior da sacola.

A principal vantagem de (2.7) é a simplicidade do tratamento. Alguns autores [6, 17] defendem (2.7) argumentando que a presença do campo piônico no interior do bárion é um substituto para efeitos de pares quark/anti-quark. No entanto, o modelo descrito por (2.7) sofre de uma grande deficiência, pois não satisfaz a propriedade de liberdade assintótica. Isto é, para grandes valores do momento transferido, ou para processos ocorrendo em pequenas regiões do espaço, os quarks não seriam aproximadamente livres, pois estariam ainda interagindo pela troca de píons. Lembramos que a liberdade assintótica é uma

propriedade da interação quark-glúon, pois neste caso a constante de acoplamento tende a zero quando o momento transferido aumenta. Como a interação quark-píon não possui a propriedade de liberdade assintótica, a única maneira de se garantir esta propriedade em modelos hadrônicos é eliminar o campo piônico do interior dos bárions. O modelo descrito por (2.8), portanto, possui liberdade assintótica, já que o campo piônico, por definição, não existe no interior do bárion.

Uma outra justificativa para (2.8) apoia-se na concepção de que o vácuo da QCD tenha duas fases. Mencionamos no início do capítulo 1 esta propriedade do vácuo da QCD e as suas conseqüências para os quarks. Vamos agora discutir os efeitos do vácuo da QCD sobre os píons. Assim, no interior dos hádrons, o vácuo é perturbativo e a simetria quiral é realizada no modo de Wigner. No exterior, o vácuo é não-perturbativo e a simetria quiral é realizada no modo de Goldstone¹ Os píons são considerados bósons de Goldstone, e só podem existir onde a simetria quiral for realizada no modo de Goldstone. Deste modo, em um modelo realístico os píons devem ser excluídos do interior da sacola, pois ali o vácuo da QCD é perturbativo e a simetria quiral é realizada no modo de Wigner.

Temos assim duas fortes indicações provenientes da QCD no sentido de excluir o campo piônico do interior dos hádrons. Uma é a liberdade assintótica, a outra é a concepção de que o vácuo da QCD tenha duas fases nas quais a simetria quiral seja realizada de modos diferentes. A densidade Lagrangeana (2.8) está em harmonia com ambas estas propriedades e, deste modo, deve ser preferida em relação à densidade Lagrangeana (2.7).

No entanto, a opção representada por (2.8) é bastante restritiva, pois somente faz sentido se os quarks estiverem confinados numa sacola como a do MIT, que tem um raio R bem definido. Em modelos de potencial, o raio de um bárion não tem uma definição tão precisa. Na maioria destes modelos a função de onda dos quarks estende-se até o infinito, e o raio do bárion é definido em geral como sendo o raio quadrático médio. Nestes modelos, portanto, não há como atribuir um sentido físico à exclusão do campo piônico a partir de um raio R , como é feito em (2.8). Por outro lado, como foi comentado na seção 1.2, o fato da sacola do MIT ter um raio R bem definido ocasiona a divergência da auto-energia de um hádron devida à interação píon-quark.

Chegamos então a um impasse. A teoria fundamental das interações fortes, QCD, favorece a densidade Lagrangeana (2.8), que somente faz sentido em conjunto com o modelo do MIT. No entanto, o modelo do MIT é fisicamente inconsistente, pois a auto-energia hadrônica diverge. O impasse seria resolvido se houvesse um mecanismo de exclusão do campo piônico que não pressuponha um raio R bem definido para os bárions. Uma maneira de impedir-se que o píon entre no interior dos bárions é submetê-lo a um potencial

¹No modo usual de realização de uma simetria, o modo de Wigner, a presença de uma simetria manifesta-se em estados degenerados de energia. No modo de Goldstone, a presença da simetria manifesta-se no aparecimento de uma partícula de massa nula e spin inteiro, chamada de bóson de Goldstone. A quebra da simetria conduz, no modo de Wigner, ao levantamento das degenerescências e, no modo de Goldstone, a uma massa não-nula para o bóson de Goldstone.

com forma apropriada. Mas novamente esbarramos numa dificuldade, pois este potencial violaria a simetria quiral.

Veremos no que segue o mecanismo de supressão do campo piônico proposto no modelo de sacola difusa. Este mecanismo não pressupõe que o bárion tenha um raio bem definido, estando em harmonia com o modelo hadrônico desenvolvido no capítulo 1, no qual a superfície da sacola tem uma espessura finita. Mostraremos que o mecanismo age, de fato, através de um potencial para o campo piônico, impedindo-o de entrar no interior da sacola. Veremos também, na seção 2.5, que no entanto a simetria quiral é preservada. Assim sendo, este modelo é único na literatura, sendo consistente com as propriedades já mencionadas da QCD e ao mesmo tempo consistente do ponto de vista da física, pois a auto-energia hadrônica devida à interação pión-quark não diverge.

2.4 Supressão do campo piônico

Para estabelecermos o mecanismo de supressão do campo piônico no modelo de sacola difusa, vamos substituir a função $\theta(r-R)$ na densidade Lagrangeana (2.8) por uma função de supressão suave $F_\pi(r)$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - m_\pi^2 \vec{\phi}^2 \right] F_\pi(r). \quad (2.9)$$

Note-se que a substituição de $\theta(r-R)$ por $F_\pi(r)$ não afeta em nada as propriedades da densidade Lagrangeana em relação à simetria quiral, e portanto (2.9) continua possuindo esta simetria. A equação dinâmica para o campo $\vec{\phi}(x)$ é obtida através da aplicação das equações de Euler-Lagrange à densidade Lagrangeana acima, sendo dada por

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} + m_\pi^2 \vec{\phi} \right) F_\pi(r) + \partial_\mu F_\pi(r) \partial^\mu \vec{\phi} = 0. \quad (2.10)$$

A aparência não-usual de (2.9) e (2.10) nos induz a redefinir o campo piônico de modo a tornar mais intuitivo o papel da função de supressão. Definindo o campo piônico físico de maneira similar à definição (1.12) do campo físico dos quarks,

$$\vec{\pi}(x) = \sqrt{F_\pi(r)} \vec{\phi}(x), \quad (2.11)$$

podemos escrever a equação dinâmica para o campo piônico em termos de $\vec{\pi}(x)$, obtendo [11, 12]

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi} = 0. \quad (2.12)$$

Observe-se que a equação dinâmica é agora facilmente interpretada: o campo $\vec{\pi}(x)$ descreve píons com massa m_π sujeitos ao potencial escalar $v_\pi(r)$. Ao fazermos a passagem de (2.10) para (2.12), vemos também que o potencial escalar $v_\pi(r)$ é determinado pela função de supressão $F_\pi(r)$, e tem a forma

$$v_\pi(r) = -\frac{\partial_\mu \partial^\mu \sqrt{F_\pi}}{\sqrt{F_\pi}} = \frac{1}{2F_\pi} \frac{d^2 F_\pi}{dr^2} - \left(\frac{1}{2F_\pi} \frac{dF_\pi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{rF_\pi} \frac{dF_\pi}{dr}. \quad (2.13)$$

Para determinarmos uma densidade Lagrangeana mais intuitiva para o campo piônico físico $\vec{\pi}(x)$, devemos percorrer um caminho um pouco mais tortuoso. Primeiramente, aplicando-se a transformação (2.11) na densidade Lagrangeana (2.9) para $\vec{\phi}(x)$, chegamos à seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{\vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \partial_\mu F_\pi(r)}{F_\pi(r)} + \frac{\vec{\pi}^2 \partial_\mu F_\pi(r) \partial^\mu F_\pi(r)}{4 F_\pi^2(r)} \right) - \frac{1}{2} m_\pi^2 \vec{\pi}^2. \quad (2.14)$$

É fácil, porém demorado, verificar que a equação de movimento (2.12) pode ser obtida a partir da densidade Lagrangeana acima usando-se as equações de Euler-Lagrange. No entanto, em vista da simplicidade da equação dinâmica para o campo piônico $\vec{\pi}(x)$, a densidade Lagrangeana (2.14) parece ser excessivamente complicada. De fato, pudemos descobrir a identidade abaixo,

$$-\frac{\vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \partial_\mu F_\pi(r)}{F_\pi(r)} + \frac{\vec{\pi}^2 \partial_\mu F_\pi(r) \partial^\mu F_\pi(r)}{4 F_\pi^2(r)} = -\partial_\mu \left(\frac{\vec{\pi}^2}{2 F_\pi} \partial^\mu F_\pi \right) - v_\pi(r) \vec{\pi}^2, \quad (2.15)$$

o que permite escrever a densidade Lagrangeana (2.14) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi}^2 - \partial_\mu \left(\frac{\vec{\pi}^2}{2 F_\pi} \partial^\mu F_\pi \right). \quad (2.16)$$

O termo de divergência total pode ser eliminado, e a densidade Lagrangeana para o campo piônico físico no nosso modelo é então dada por

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi}^2. \quad (2.17)$$

Enfatizamos que (2.17) é equivalente a (2.14), pois diferem somente por um termo de divergência total. Note-se também que a obtenção da equação dinâmica (2.12) fica bem mais simples se usarmos a densidade Lagrangeana (2.17). Note-se também que em (2.14) a função de supressão $F_\pi(r)$ parece acoplar-se (não-linearmente) com o campo piônico de maneira semelhante a um campo de uma partícula elementar (escalar). Mas como $F_\pi(r)$ não representa um campo de uma partícula, o procedimento de quantização da densidade Lagrangeana (2.14) torna-se dúbio. Em contraste, na densidade Lagrangeana (2.17) o campo piônico está sujeito a um potencial escalar, e o procedimento de quantização é direto, ocorrendo na maneira usual de se expandir o campo quântico nos modos normais do campo clássico, sendo os coeficientes de expansão operadores de criação e destruição.

2.5 Invariância quiral do campo piônico

Na seção anterior vimos que o mecanismo de supressão do campo piônico equivale à introdução de um potencial escalar para o pión. Também foi comentado que a simetria quiral foi preservada em todos os passos que levaram à formulação deste mecanismo de

supressão. No entanto, é sabido que potenciais escalares em geral violam a simetria quiral, e isto foi mostrado em detalhes para o caso dos quarks na seção 2.2. É interessante então entender por que a simetria quiral é preservada no modelo de sacola difusa, apesar da presença do potencial escalar $v_\pi(r)$.

Vejamos primeiramente como a simetria quiral é realizada para o campo piônico livre. Neste caso, o campo piônico é descrito pela densidade Lagrangeana (2.7), e a transformação quiral infinitesimal é dada por

$$\vec{\phi}'(x) = \vec{\phi}(x) + f_\pi \vec{\theta}, \quad (2.18)$$

onde $f_\pi = 93MeV$ é a constante de decaimento do pión. Considerando-se nula a massa do pión, esta transformação deixa (2.7) invariante, sendo portanto uma simetria do sistema. A transformação (2.18) também é uma simetria das densidades Lagrangeanas (2.8) e (2.9), que descrevem respectivamente pions totalmente suprimidos e pions suprimidos suavemente no interior da sacola. Isto deve estar claro, pois (2.8) e (2.9) são iguais à densidade Lagrangeana para pions livres (2.7), exceto pela multiplicação por $\theta(r - R)$ em um caso e por $F_\pi(r)$ no outro.

Para o campo piônico suprimido $\vec{\pi}(x)$, a transformação quiral é determinada pelas equações (2.11) e (2.18), sendo então dada por

$$\vec{\pi}'(x) = \vec{\pi}(x) + f_\pi \sqrt{F_\pi(r)} \vec{\theta}. \quad (2.19)$$

Para a realização da simetria quiral, o termo de divergência eliminado em (2.16) é importante. Deste modo, é mais simples trabalharmos diretamente com a densidade Lagrangeana (2.14). Com o objetivo de mostrar explicitamente a invariância quiral de (2.14) quando $m_\pi = 0$, calculamos a variação desta densidade Lagrangeana sob a transformação quiral (2.19) na seguinte forma,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\pi}} \cdot \delta\vec{\pi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\vec{\pi})} \cdot \delta(\partial_\mu\vec{\pi}). \quad (2.20)$$

Sendo a variação no campo $\vec{\pi}(x)$ determinada através de (2.19), temos $\delta\vec{\pi} = f_\pi \sqrt{F_\pi} \vec{\theta}$. Utilizando também a relação $\delta(\partial_\mu\vec{\pi}) = \partial_\mu(\delta\vec{\pi})$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left(-\frac{\partial_\mu\vec{\pi} \partial^\mu F_\pi}{2 F_\pi} + \frac{\vec{\pi} \partial_\mu F_\pi \partial^\mu F_\pi}{4 F_\pi^2} \right) \cdot (f_\pi \sqrt{F_\pi} \vec{\theta}) \\ &\quad + \left(\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{1}{2F_\pi} \vec{\pi} \partial^\mu F_\pi \right) \cdot (f_\pi \partial_\mu \sqrt{F_\pi} \vec{\theta} + f_\pi \sqrt{F_\pi} \partial_\mu \vec{\theta}) \\ &= f_\pi \sqrt{F_\pi} \left(\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{1}{2F_\pi} \vec{\pi} \partial^\mu F_\pi \right) \cdot \partial_\mu \vec{\theta}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Na transformação quiral (2.19), assim como em (2.18), o parâmetro infinitesimal $\vec{\theta}$ é uma constante, e deste modo $\partial_\mu \vec{\theta} = 0$. Assim, obtemos $\delta\mathcal{L} = 0$ e portanto fica mostrada a

invariância quiral no modelo. Como foi mencionado, este resultado era esperado, já que a passagem de (2.9) e (2.18) para (2.14) e (2.19) é apenas uma transformação de variável.

Em resumo, vemos que a simetria quiral é preservada no modelo, apesar da presença do potencial escalar $v_\pi(r)$, por que a própria transformação quiral adquire uma forma diferente da forma original, o que pode ser visto comparando-se (2.18) com (2.19). Observe-se que, para uma transformação quiral global, o parâmetro $\vec{\theta}$ da transformação é uma constante e, para uma transformação quiral local, o parâmetro $\vec{\theta}$ pode depender do espaço-tempo, $\vec{\theta} = \vec{\theta}(x)$. Em ambos os casos a transformação (2.19) é sempre uma transformação local, independentemente da natureza de $\vec{\theta}$, pois F_π depende de r . Isto lembra a invariância de calibre na eletrodinâmica, que permite fixar a fase da função de onda do elétron de modo arbitrário em cada ponto do espaço-tempo, sendo a informação sobre as fases carregada pelo campo dos fótons. No caso que estamos considerando, podemos adicionar ao campo piônico uma quantidade infinitesimal arbitrária $f_\pi \sqrt{F_\pi(r)} \vec{\theta}$ em cada ponto do espaço, sendo esta informação carregada pelos termos envolvendo $F_\pi(r)$ em (2.14) ou mais simplesmente pelo potencial $v_\pi(r)$ em (2.17).

Para determinarmos a corrente axial carregada pelo campo piônico $\vec{\pi}(x)$, deixamos que $\vec{\theta}$ tenha dependência local, podendo deste modo serem utilizadas as equações de Gell-Mann e Levy (ver por exemplo [11]). Estas equações permitem obter tanto a corrente como a sua divergência a partir da variação da densidade Lagrangeana com respeito a uma determinada transformação dos campos. Sob ação da transformação quiral (2.19), a variação da densidade Lagrangeana ainda é dada por (2.21), mesmo que $\vec{\theta}$ tenha dependência local. Obtemos então

$$\vec{j}_{A,\pi}^\mu(x) = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\vec{\theta})} = f_\pi \sqrt{F_\pi} \left(\partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2F_\pi} \vec{\pi} \partial^\mu F_\pi \right) \quad (2.22)$$

$$\partial_\mu \vec{j}_{A,\pi}^\mu(x) = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial\vec{\theta}} = 0. \quad (2.23)$$

Note-se que a corrente axial também pode ser escrita como $\vec{j}_{A,\pi}^\mu(x) = f_\pi F_\pi \partial^\mu \vec{\phi}$, que é a corrente axial para o campo $\vec{\phi}(x)$. Além disso, o resultado (2.23) mostra mais uma vez a invariância quiral.

2.6 Acoplamento pión-quark

Na seção 2.2 vimos que a simetria quiral é violada na densidade Lagrangeana dos quarks, e comentamos também que esta simetria seria restaurada pela interação pión-quark. Nas seções 2.4 e 2.5 tratamos do campo piônico isoladamente. Nesta seção, será visto como acoplar quarks e píons, e assim restaurar a simetria quiral.

A partir da discussão em torno das expressões (2.5) e (2.6), deve estar claro que a parte da densidade Lagrangeana do modelo de sacola difusa (1.16) que viola a simetria quiral é

$-[m_q + V(r)] \bar{\psi} \psi$. Vamos então substituir $\bar{\psi} \psi$ por

$$\bar{\psi} e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}} \psi, \quad (2.24)$$

onde $\vec{\phi}(x)$ é o campo piônico não-suprimido, e verificar que deste modo a simetria quiral é preservada. A transformação quiral para o campo dos quarks é dada por

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{-\frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}} \psi(x) \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x) e^{-\frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

(Note-se que em ambos os casos a exponencial tem sinal negativo, isto é devido essencialmente à relação de anti-comutação $\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0$.) Aplicando-se a transformação acima à expressão (2.24), obtemos

$$\bar{\psi}' e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}'} \psi' = \bar{\psi} e^{-\frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}} e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}'} e^{-\frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}} \psi. \quad (2.26)$$

Exigindo-se que a transformação do campo pseudo-escalar satisfaça à condição

$$e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}'} = e^{-\frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}} e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}} e^{-\frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}, \quad (2.27)$$

o termo de interação (2.24) será invariante frente à transformação quiral,

$$\bar{\psi}' e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}'} \psi' = \bar{\psi} e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}} \psi. \quad (2.28)$$

No caso de uma transformação infinitesimal, $|\vec{\theta}| \ll 1$, e para campos piônicos não muito intensos, $|\vec{\phi}| \ll f_\pi$, podemos expandir as exponenciais e a expressão (2.27) torna-se mais simples,

$$\vec{\phi}'(x) = \vec{\phi}(x) + f_\pi \vec{\theta}, \quad (2.29)$$

coincidindo com o que vimos em (2.18). O termo de acoplamento pión-quark é então escrito a partir de (2.24) como

$$-[m_q + V(r)] \bar{\psi} e^{\frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}} \psi = -[m_q + V(r)] \bar{\psi} \left(1 + \frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi} + \dots \right) \psi. \quad (2.30)$$

A expansão em série da exponencial mostra que o termo $-[m_q + V(r)] \bar{\psi} \psi$, que é essencial para o confinamento dos quarks, ainda está presente na densidade Lagrangeana. Como vimos acima, este é o termo que viola a simetria quiral, mas agora temos infinitos outros termos em (2.30) que envolvem o campo dos píons e que compensam a violação, restaurando a simetria.

Como é usual em modelos de sacola e de potencial relativístico, vamos levar em conta a expansão em séries (2.30) somente até a primeira ordem no campo dos píons. Utilizando a definição (2.11) para o campo piônico físico, obtemos a densidade Lagrangeana de interação no modelo de sacola difusa,

$$\mathcal{L}_I = -[m_q + V(r)] \bar{\psi} \left(\frac{i}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right) \psi. \quad (2.31)$$

A densidade Lagrangeana completa para o modelo é dada por (1.16), (2.17) e por (2.31),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MFBM} = & \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] - B F(r) - \bar{\psi} [m_q + (1 + \gamma^0) V(r)] \psi \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi}^2 - \frac{i [m_q + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi . \end{aligned} \quad (2.32)$$

A partir das equações de Euler-Lagrange obtemos as equações dinâmicas para o campo dos quarks $\psi(x)$ e para o campo dos píons $\vec{\pi}(x)$,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - [m_q + (1 + \gamma^0) V(r)] \psi = \frac{i [m_q + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi \quad (2.33)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi} = -\frac{i [m_q + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi . \quad (2.34)$$

2.7 Função de supressão e potencial para o campo piônico

Na seção 2.4 foi introduzida a função de supressão $F_\pi(r)$ para o campo piônico, onde mencionamos que $F_\pi(r)$ é uma forma suavizada da função de Heaviside $\theta(r - R)$. Vimos também que o papel de $F_\pi(r)$ é análogo ao da função de supressão $F(r)$ dos quarks. No entanto, a função de supressão dos píons impede que o campo piônico entre no interior da sacola, em vez de confiná-lo, como no caso do campo dos quarks.

Para obtermos uma forma esquemática para a função $F_\pi(r)$, lembramos primeiramente que o interior da sacola é definido por $0 < r < R_0$ e representa a região onde a simetria quiral é realizada no modo de Wigner, sendo portanto uma região na qual o campo piônico é nulo. Colocando $F_\pi(r) = 0$ no interior da sacola, impedimos que o campo piônico entre nesta região. O exterior da sacola é definido por $r > R_1$ e representa a região onde a simetria quiral é realizada no modo de Goldstone, sendo portanto uma região na qual não há nenhuma supressão do campo piônico. É natural então estipular que tenhamos $F_\pi(r) = 1$ no exterior da sacola. A superfície da sacola é definida pela região $R_0 < r < R_1$, e representa a transição entre as duas fases do vácuo da QCD. Nesta região, supomos que a função de supressão aumente monotonicamente a partir do seu valor 0 em R_0 até 1 em R_1 . Assim sendo, a forma geral de $F_\pi(r)$ pode ser escrita como

$$F_\pi(r) = \begin{cases} 0 & , r < R_0 \\ \mathcal{F}_\pi(r) & , R_0 \leq r \leq R_1 \\ 1 & , r > R_1 \end{cases} , \quad (2.35)$$

onde $\mathcal{F}_\pi(r)$ é uma função ainda a ser estipulada. Sendo $F_\pi(r)$ uma função contínua, devemos ter $\mathcal{F}_\pi(R_0) = 0$ e $\mathcal{F}_\pi(R_1) = 1$.

A forma esquemática para o potencial piônico $v_\pi(r)$ correspondente a (2.35) pode também ser facilmente estipulada. No exterior da sacola, $r > R_1$, o campo piônico não é suprimido, e portanto $v_\pi(r) = 0$. Na superfície da sacola, $R_0 < r < R_1$, inicia-se a supressão, e deste modo $v_\pi(r)$ deve aumentar continuamente. No interior da sacola, $0 < r < R_0$, o campo piônico é completamente suprimido, assim $v_\pi(r) = \infty$. Temos então

$$v_\pi(r) = \begin{cases} \infty & , r < R_0 \\ \mathcal{V}_\pi(r) & , R_0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & , r > R_1 \end{cases} . \quad (2.36)$$

onde $\mathcal{V}_\pi(r)$ é uma função ainda a ser estipulada. Sendo $v_\pi(r)$ uma função contínua, devemos ter $\mathcal{V}_\pi(R_0) = \infty$ e $\mathcal{V}_\pi(R_1) = 0$.

Lembramos que a equação (2.13) relaciona o potencial piônico $v_\pi(r)$ com a função de supressão $F_\pi(r)$, permitindo que se calcule $v_\pi(r)$ a partir de $F_\pi(r)$. No entanto, do mesmo modo que no capítulo 1, sob o ponto de vista físico é mais natural e prático estipular primeiro a forma do potencial. Escrevendo a equação (2.13) na forma

$$v_\pi(r) = \frac{1}{\sqrt{F_\pi}} \left(\frac{d^2 \sqrt{F_\pi}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\sqrt{F_\pi}}{dr} \right) , \quad (2.37)$$

podemos obter uma equação diferencial para $\sqrt{F_\pi}$,

$$\frac{d^2 \sqrt{F_\pi}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\sqrt{F_\pi}}{dr} - v_\pi(r) \sqrt{F_\pi} = 0 , \quad (2.38)$$

que pode ainda ser simplificada, obtendo-se

$$\frac{d^2 (r \sqrt{F_\pi})}{dr^2} - v_\pi(r) (r \sqrt{F_\pi}) = 0 . \quad (2.39)$$

Para um dado potencial $v_\pi(r)$, devemos determinar a solução desta equação que satisfaz as condições de contorno $F_\pi(R_0) = 0$ e $F_\pi(R_1) = 1$. Sendo esta uma equação diferencial de segunda ordem, a solução fica assim univocamente determinada.

Podemos enfim estipular uma forma funcional para $\mathcal{V}_\pi(r)$. Exigindo que o potencial $v_\pi(r)$ seja contínuo e que forneça soluções analíticas para a função de supressão do campo dos píons, escrevemos

$$\mathcal{V}_\pi(r) = \begin{cases} \frac{\alpha_\pi}{(r - R_0)^2} & , R_0 \leq r \leq R_\pi \\ \frac{\alpha_\pi}{(R_\pi - R_0)^2} \frac{(R_1 - r)}{(R_1 - R_\pi)} & , R_\pi \leq r \leq R_1 \end{cases} . \quad (2.40)$$

Verifica-se facilmente que $\mathcal{V}_\pi(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow R_0$, e também que $\mathcal{V}_\pi(r) = 0$ em $r = R_1$. Além disso, vê-se que o potencial $\mathcal{V}_\pi(r)$ é contínuo em R_π . Os parâmetros R_0 e R_1 já tinham sido introduzidos no capítulo 1. Agora estamos introduzindo mais dois

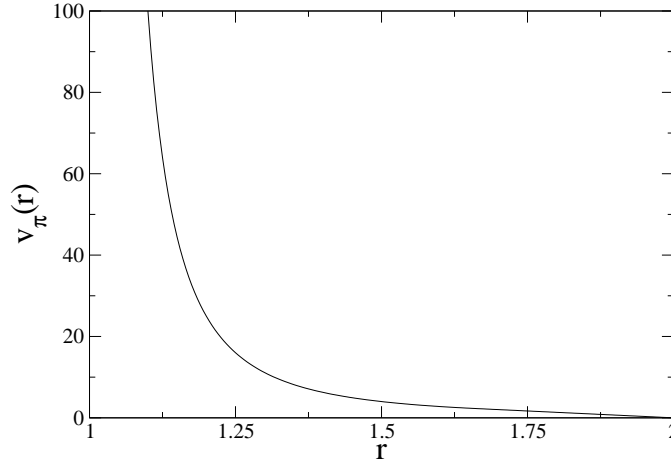


Figura 2.1: Gráfico do potencial piônico $v_\pi(r)$ para $R_0 = 1.0$, $R_1 = 2.0$ e $\alpha_\pi = 1.0$.

parâmetros, α_π e R_π . Para diminuir o número de parâmetros, vamos determinar R_π de modo que a derivada de $\mathcal{V}_\pi(r)$ seja contínua em $r = R_\pi$. Isto torna o potencial $\mathcal{V}_\pi(r)$ mais suave e fornece como resultado

$$R_\pi = \frac{2R_1 + R_0}{3}. \quad (2.41)$$

Ficamos deste modo somente com um parâmetro livre adicional, α_π , que regula a intensidade do potencial piônico. Na figura 2.1 apresentamos o gráfico de $v_\pi(r)$.

Determinação da função de supressão do campo piônico

A função de supressão do campo piônico $F_\pi(r)$ obedece à equação diferencial (2.39), estando sujeita às condições de contorno $F_\pi(R_0) = 0$ e $F_\pi(R_1) = 1$.

Região $R_0 < r < R_\pi$

Nesta região, a equação diferencial para $F_\pi(r)$ é

$$\frac{d^2 (r\sqrt{F_\pi})}{dr^2} - \frac{\alpha_\pi}{(r - R_0)^2} (r\sqrt{F_\pi}) = 0. \quad (2.42)$$

Fazendo a mudança de variável $x = r - R_0$ e definindo uma nova função $y(x) = r\sqrt{F_\pi(r)}$, temos

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \frac{\alpha_\pi}{x^2} y(x) = 0. \quad (2.43)$$

Supondo que a solução possa ser escrita na forma $y(x) = Ax^n$, obtém-se facilmente os valores possíveis de n ,

$$n = 1/2 \pm \sqrt{\alpha_\pi + 1/4}. \quad (2.44)$$

Estes dois valores de n representam as duas soluções linearmente independentes para $y(x)$. Como α_π é positivo, $\alpha_\pi > 0$, o sinal positivo em (2.44) implica em $n > 0$, enquanto que o sinal negativo implica em $n < 0$. A condição de contorno $F_\pi(R_0) = 0$ implica em $y(0) = 0$, e deste modo somente o valor positivo de n é aceitável. A solução para $r\sqrt{F_\pi(r)}$ na região $R_0 < r < R_\pi$ é dada por

$$r\sqrt{F_\pi(r)} = A (r - R_0)^{1/2 + \sqrt{\alpha_\pi + 1/4}} . \quad (2.45)$$

Região $R_\pi < r < R_1$

Nesta região, a equação diferencial para $F_\pi(r)$ é

$$\frac{d^2 (r\sqrt{F_\pi})}{dr^2} - \frac{\alpha_\pi}{(R_\pi - R_0)^2} \frac{(R_1 - r)}{(R_1 - R_\pi)} (r\sqrt{F_\pi}) = 0 . \quad (2.46)$$

Fazendo a mudança de variável $x = (R_1 - r)/(R_1 - R_\pi)$ e definindo uma nova função $y(x) = r\sqrt{F_\pi(r)}$, temos

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \frac{(R_1 - R_\pi)^2}{(R_\pi - R_0)^2} \alpha_\pi x y(x) = 0 . \quad (2.47)$$

Usando a equação (2.41) que determina R_π , ficamos com

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \frac{\alpha_\pi}{4} x y(x) = 0 . \quad (2.48)$$

De acordo com [15] (página 377), a solução desta equação pode ser escrita como

$$y(x) = B \sqrt{x} I_{1/3} (\sqrt{\alpha_\pi} x^{3/2}/3) + C \sqrt{x} K_{1/3} (\sqrt{\alpha_\pi} x^{3/2}/3) . \quad (2.49)$$

A condição de contorno $F_\pi(R_1) = 1$ implica em $y(0) = R_1$. Para um valor pequeno de seu argumento z , as funções de Bessel modificadas têm o seguinte comportamento [15] (fórmulas 9.6.7 e 9.6.9),

$$I_\nu(z) \approx \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \quad K_\nu(z) \approx \frac{\Gamma(\nu)}{2} (z/2)^{-\nu} , \quad (2.50)$$

e a condição $y(0) = R_1$ permite determinar o coeficiente C em (2.49),

$$C = \frac{2 R_1}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{\sqrt{\alpha_\pi}}{6} \right)^{1/3} . \quad (2.51)$$

Os coeficientes A e B são determinados pela condição de continuidade de $F_\pi(r)$ e sua derivada em $r = R_\pi$, ou equivalentemente pela condição de continuidade de $y(x)$ e sua derivada em $x = 1$. Assim, a continuidade de $y(x)$ em $x = 1$ implica em

$$A (R_\pi - R_0)^{1/2 + \sqrt{\alpha_\pi + 1/4}} = B I_{1/3} (\sqrt{\alpha_\pi}/3) + C K_{1/3} (\sqrt{\alpha_\pi}/3) , \quad (2.52)$$

e a continuidade da derivada de $y(x)$ em $x = 1$ implica em

$$A (R_\pi - R_0)^{1/2 + \sqrt{\alpha_\pi + 1/4}} = \frac{\sqrt{\alpha_\pi}}{\frac{5}{2} + \sqrt{\alpha_\pi + \frac{1}{4}}} [C K_{4/3}(\sqrt{\alpha_\pi}/3) - B I_{4/3}(\sqrt{\alpha_\pi}/3)] . \quad (2.53)$$

Para obter a expressão acima, fizemos diversas manipulações e usamos a fórmula 9.6.26 de [15], que desdobra-se nas equações

$$I'_\nu(z) = I_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} I_\nu(z) \quad K'_\nu(z) = -K_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} K_\nu(z) . \quad (2.54)$$

As equações (2.52) e (2.53) formam um sistema linear que permite determinar univocamente os coeficientes A e B . Notando que o lado esquerdo destas equações é igual, podemos expressar B como

$$B = C \frac{\sqrt{\alpha_\pi} K_{4/3}(\sqrt{\alpha_\pi}/3) - \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\alpha_\pi + \frac{1}{4}}\right) K_{1/3}(\sqrt{\alpha_\pi}/3)}{\sqrt{\alpha_\pi} I_{4/3}(\sqrt{\alpha_\pi}/3) + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\alpha_\pi + \frac{1}{4}}\right) I_{1/3}(\sqrt{\alpha_\pi}/3)} , \quad (2.55)$$

e então o coeficiente A pode ser determinado a partir de (2.52). O gráfico de $F_\pi(r)$ pode ser observado na figura 2.2.

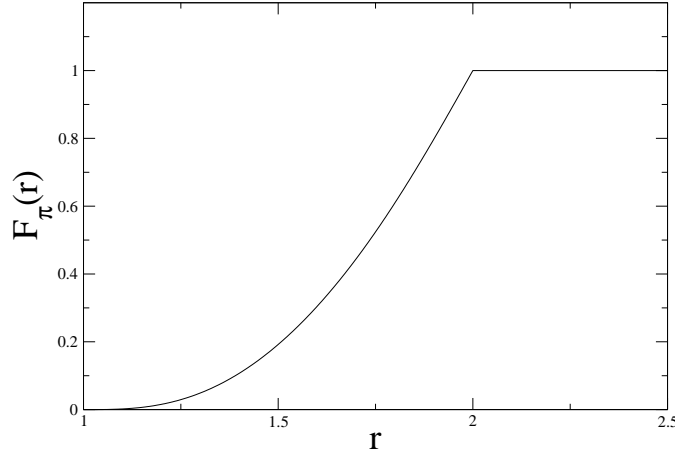


Figura 2.2: Gráfico da função de supressão $F_\pi(r)$ para $R_0 = 1.0$, $R_1 = 2.0$ e $\alpha_\pi = 1.0$.

2.8 Solução da equação diferencial homogênea para o campo piônico

No modelo de sacola difusa modificado, mesmo quando os píons não interagem com os quarks, o campo piônico não é livre, pois está submetido ao potencial $v_\pi(r)$. A equação

diferencial homogênea para o campo piônico segue da equação (2.34) desprezando-se o termo de fonte, sendo dada por

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi} = 0 . \quad (2.56)$$

A solução de (2.56) é separável, podendo ser escrita como o produto de funções envolvendo as variáveis angulares, a variável radial, o tempo e a parte de isospin,

$$\vec{\pi}(t, \vec{r}) = \hat{\alpha} e^{-i\omega_k t} \mathcal{R}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) , \quad (2.57)$$

onde $\hat{\alpha}$ é um vetor unitário no espaço de isospin, $\omega_k^2 = k^2 + m_\pi^2$ e $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. Interessamos somente a solução para momento angular orbital $\ell = 1$. A equação para $\mathcal{R}(r)$ é, então,

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{2}{r} \mathcal{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} - v_\pi(r) \right) \mathcal{R}(r) = 0 . \quad (2.58)$$

Introduzindo a função de onda reduzida $y(r)$ para o campo piônico, escrevemos $\mathcal{R}(r)$ na forma

$$\mathcal{R}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{y(r)}{kr} , \quad (2.59)$$

e obtemos a equação diferencial

$$y''(r) + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} - v_\pi(r) \right) y(r) = 0 . \quad (2.60)$$

Devido à forma do potencial piônico $v_\pi(r)$ estipulada em (2.40), esta equação deve ser resolvida numericamente nos intervalos $R_0 < r < R_\pi$ e $R_\pi < r < R_1$. Para $r > R_1$, o potencial piônico é nulo e a solução pode ser obtida analiticamente. Antes de discutirmos o método numérico para a obtenção da função de onda $y(r)$, vejamos como fica a equação diferencial (2.60) em cada um dos intervalos mencionados.

Na região $R_0 < r < R_\pi$, a equação diferencial para $y(r)$ é dada por

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} - \frac{\alpha_\pi}{(r - R_0)^2} \right) y(r) = 0 , \quad (2.61)$$

e lembramos que a condição de contorno para $y(r)$ é $y(R_0) = 0$. Efetuando a troca de variável $x = kr$, obtemos a equação

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{\alpha_\pi}{(x - X_0)^2} \right) y(x) = 0 , \quad (2.62)$$

onde $X_0 = kR_0$. A condição de contorno para $y(x)$ é $y(X_0) = 0$. Para $x \approx X_0$, a equação diferencial acima aproxima-se da equação (2.43), cuja solução foi obtida em (2.45). Portanto, para pequenos valores de $x - X_0$, a solução para $y(x)$ é dada por

$$y(x) = N_1 (x - X_0)^{1/2 + \sqrt{\alpha_\pi + 1/4}} , \quad (2.63)$$

onde N_1 é uma constante. Este resultado é importante para estabelecermos a convergência de certas integrais que aparecerão em outros capítulos deste trabalho, e é importante também para verificar se o método numérico de resolução da equação diferencial está funcionando corretamente.

Na região $R_\pi < r < R_1$, a equação diferencial para $y(r)$ é dada por

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} - \frac{\alpha_\pi}{(R_\pi - R_0)^2} \frac{(R_1 - r)}{(R_1 - R_\pi)} \right) y(r) = 0 . \quad (2.64)$$

Usando a fórmula (2.41) para R_π e efetuando a mudança de variável $x = kr$, temos

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{27 \alpha_\pi (X_1 - x)}{4 (X_1 - X_0)^3} \right) y(x) = 0 , \quad (2.65)$$

onde $X_1 = kR_1$.

Na região $r > R_1$, o potencial é nulo, $v_\pi(r) = 0$. Assim, a solução para $y(r)$ é

$$y(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} N_1 kr \left[N_2 j_1(kr) + N_3 y_1(kr) \right] , \quad (2.66)$$

onde N_2 e N_3 são constantes. O fator $2k/\pi$ foi inserido por conveniência, estando relacionado com a condição de normalização da função de onda do pión. Na figura 2.3, apresentamos o gráfico de $\mathcal{R}(r)$ para $k = m_\pi = 0.70 \text{ fm}^{-1}$, $R_0 = 1.0$, $R_1 = 2.0$ e $\alpha_\pi = 1.0$.

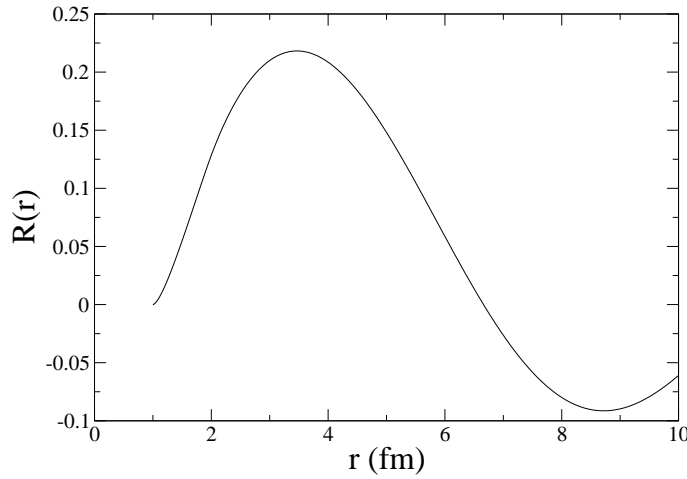


Figura 2.3: Gráfico da função radial do pión $\mathcal{R}(r)$ para $R_0 = 1.0$, $R_1 = 2.0$ e $\alpha_\pi = 1.0$.

2.9 Normalização da função de onda do pión

As funções $\mathcal{R}(r)$ devem ser ortonormais. Com o campo piônico quantizado sendo escrito na forma (A.17), isto implica na condição (A.19),

$$\frac{2}{\pi} k_1 k_2 \int_0^\infty dr r^2 \mathcal{R}_{k_1}(r) \mathcal{R}_{k_2}(r) = \delta(k_1 - k_2), \quad (2.67)$$

que fixa a constante de normalização N_1 de $\mathcal{R}(r)$. Podemos escrever a condição (2.67) em termos da função de onda reduzida $y(r)$, que foi definida em (2.59),

$$\int_0^\infty dr y_{k_1}(r) y_{k_2}(r) = \delta(k_1 - k_2). \quad (2.68)$$

Utilizando a equação diferencial (2.60) para $y(r)$, obtemos

$$(k_1^2 - k_2^2) y_{k_1}(r) y_{k_2}(r) = y_{k_1}(r) y_{k_2}''(r) - y_{k_2}(r) y_{k_1}''(r), \quad (2.69)$$

e assim a integral de normalização pode ser expressa como

$$\int_0^\infty dr y_{k_1}(r) y_{k_2}(r) = \frac{1}{(k_1^2 - k_2^2)} \int_{R_0}^\infty dr [y_{k_1}(r) y_{k_2}''(r) - y_{k_2}(r) y_{k_1}''(r)]. \quad (2.70)$$

Usando a identidade

$$\begin{aligned} [y_{k_1}(r) y_{k_2}'(r) - y_{k_2}(r) y_{k_1}'(r)]' &= y_{k_1}'(r) y_{k_2}'(r) + y_{k_1}(r) y_{k_2}''(r) - y_{k_2}'(r) y_{k_1}'(r) - y_{k_2}(r) y_{k_1}''(r) \\ &= y_{k_1}(r) y_{k_2}''(r) - y_{k_2}(r) y_{k_1}''(r), \end{aligned} \quad (2.71)$$

podemos fazer integração por partes, obtendo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr y_{k_1}(r) y_{k_2}(r) &= \frac{1}{(k_1^2 - k_2^2)} [y_{k_1}(r) y_{k_2}'(r) - y_{k_2}(r) y_{k_1}'(r)] \Big|_{R_0}^\infty \\ &= \frac{1}{(k_1^2 - k_2^2)} \lim_{r \rightarrow \infty} [y_{k_1}(r) y_{k_2}'(r) - y_{k_2}(r) y_{k_1}'(r)], \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde a segunda igualdade segue, pois em $r = R_0$ a função $y(r)$ é igual a zero e $y'(r)$ é finita. Deste modo, a única contribuição para a integral de normalização vem da parte assintótica da função de onda do pión. Para valores grandes de r , a função $y(r)$ é dada por (2.66). Usando as identidades

$$\begin{aligned} j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \\ y_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

e desprezando os termos que decaem com r , temos

$$y(r) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}} N_1 [N_4 \cos(kr) + N_5 \sin(kr)]. \quad (2.74)$$

Usando esta aproximação na expressão entre colchetes em (2.72), obtemos

$$\begin{aligned}
& y_{k_1}(r) y'_{k_2}(r) - y_{k_2}(r) y'_{k_1}(r) \\
&= \frac{2N_1^2}{\pi} \left\{ \left[N_4 \cos(k_1 r) + N_5 \operatorname{sen}(k_1 r) \right] \left[N_4 \cos(k_2 r) + N_5 \operatorname{sen}(k_2 r) \right]' \right. \\
&\quad \left. - \left[N_4 \cos(k_2 r) + N_5 \operatorname{sen}(k_2 r) \right] \left[N_4 \cos(k_1 r) + N_5 \operatorname{sen}(k_1 r) \right]' \right\} \\
&= \frac{2N_1^2}{\pi} \left\{ k_2 \left[N_4 \cos(k_1 r) + N_5 \operatorname{sen}(k_1 r) \right] \left[-N_4 \operatorname{sen}(k_2 r) + N_5 \cos(k_2 r) \right] \right. \\
&\quad \left. - k_1 \left[N_4 \cos(k_2 r) + N_5 \operatorname{sen}(k_2 r) \right] \left[-N_4 \operatorname{sen}(k_1 r) + N_5 \cos(k_1 r) \right] \right\} \\
&= \frac{2N_1^2}{\pi} \left\{ -k_2 N_4^2 \cos(k_1 r) \operatorname{sen}(k_2 r) + k_2 N_4 N_5 \cos(k_1 r) \cos(k_2 r) \right. \\
&\quad - k_2 N_4 N_5 \operatorname{sen}(k_1 r) \operatorname{sen}(k_2 r) + k_2 N_5^2 \operatorname{sen}(k_1 r) \cos(k_2 r) \\
&\quad + k_1 N_4^2 \cos(k_2 r) \operatorname{sen}(k_1 r) - k_1 N_4 N_5 \cos(k_2 r) \cos(k_1 r) \\
&\quad \left. + k_1 N_4 N_5 \operatorname{sen}(k_2 r) \operatorname{sen}(k_1 r) - k_1 N_5^2 \operatorname{sen}(k_2 r) \cos(k_1 r) \right\}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

e, aplicando identidades trigonométricas conhecidas, ficamos com

$$\begin{aligned}
& y_{k_1}(r) y'_{k_2}(r) - y_{k_2}(r) y'_{k_1}(r) \\
&= \frac{N_1^2}{\pi} \left\{ -k_2 N_4^2 \left[\operatorname{sen}(k_2 r - k_1 r) + \operatorname{sen}(k_1 r + k_2 r) \right] + k_2 N_4 N_5 \left[\cos(k_1 r - k_2 r) + \cos(k_1 r + k_2 r) \right] \right. \\
&\quad - k_2 N_4 N_5 \left[\cos(k_1 r - k_2 r) - \cos(k_1 r + k_2 r) \right] + k_2 N_5^2 \left[\operatorname{sen}(k_1 r - k_2 r) + \operatorname{sen}(k_1 r + k_2 r) \right] \\
&\quad + k_1 N_4^2 \left[\operatorname{sen}(k_1 r - k_2 r) + \operatorname{sen}(k_2 r + k_1 r) \right] - k_1 N_4 N_5 \left[\cos(k_2 r - k_1 r) + \cos(k_2 r + k_1 r) \right] \\
&\quad \left. + k_1 N_4 N_5 \left[\cos(k_2 r - k_1 r) - \cos(k_2 r + k_1 r) \right] - k_1 N_5^2 \left[\operatorname{sen}(k_2 r - k_1 r) + \operatorname{sen}(k_2 r + k_1 r) \right] \right\} \\
&= \frac{N_1^2}{\pi} \left\{ (k_1 + k_2)(N_4^2 + N_5^2) \operatorname{sen}(k_1 r - k_2 r) + (k_1 - k_2)(N_4^2 - N_5^2) \operatorname{sen}(k_1 r + k_2 r) \right. \\
&\quad \left. - 2(k_1 - k_2) N_4 N_5 \cos(k_1 r + k_2 r) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

A integral de normalização assume então a forma

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dr y_{k_1}(r) y_{k_2}(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1^2 (N_4^2 + N_5^2)}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(k_1 r - k_2 r)}{k_1 - k_2} \\
&\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1^2 (N_4^2 - N_5^2)}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(k_1 r + k_2 r)}{k_1 + k_2} \\
&\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2 N_1^2 N_4 N_5}{\pi} \left[\frac{\cos(k_1 r + k_2 r)}{k_1 + k_2} \right] \\
&= N_1^2 (N_4^2 + N_5^2) \delta(k_1 - k_2) + N_1^2 (N_4^2 - N_5^2) \delta(k_1 + k_2) \\
&\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2 N_1^2 N_4 N_5}{\pi} \left[\frac{\cos(k_1 r + k_2 r)}{k_1 + k_2} \right].
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Sendo $k > 0$, as contribuições da função $\delta(k_1 + k_2)$ e do termo envolvendo o co-seno serão sempre nulas. Ficamos então com

$$\int_0^\infty dr y_{k_1}(r) y_{k_2}(r) = N_1^2 (N_4^2 + N_5^2) \delta(k_1 - k_2) , \quad (2.78)$$

e a condição de normalização (2.67) então implica em

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{N_4^2 + N_5^2}} . \quad (2.79)$$

2.10 Solução particular para o campo piônico

A equação diferencial com fonte para o campo piônico $\vec{\pi}(x)$ foi obtida em (2.34) na seção 2.6, que trata do acoplamento pión-quark. Escrevendo agora explicitamente a soma sobre quarks u e d , a equação (2.34) assume a forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi} = -\frac{i[m_u + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \psi_q , \quad (2.80)$$

onde m_u é a massa dos quarks u e d . A solução homogênea desta equação já foi determinada. Neste momento estamos interessados somente na solução particular, que é gerada pelo termo de fonte. Considerando-se um determinado bárion B do octeto fundamental, o campo piônico gerado por ele satisfaz a seguinte equação

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi} = -\frac{i[m_u + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \langle B | \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \psi_q | B \rangle . \quad (2.81)$$

Como o lado esquerdo desta equação não depende do tempo — a exponencial $e^{-iE_q t}$ proveniente de $\psi_q(x)$ é cancelada pela exponencial $e^{iE_q t}$ proveniente de $\bar{\psi}_q(x)$ — a solução particular para o campo piônico também não depende do tempo, $\vec{\pi}(t, \vec{r}) = \vec{\pi}(\vec{r})$. A equação que resulta para $\vec{\pi}(\vec{r})$ é

$$\nabla^2 \vec{\pi} - [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi} = \frac{i[m_u + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \langle B | \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \psi_q | B \rangle . \quad (2.82)$$

A solução desta equação pode ser escrita em forma separável de acordo com [18],

$$\vec{\pi}(\vec{r}) = \langle B | \sum_q (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q | B \rangle h(r) , \quad (2.83)$$

onde $h(r)$ é uma função que depende somente da variável radial r . Esta maneira de escrever a solução geral é equivalente, tanto na parte angular como na de isospin, à expressão (2.57), que foi utilizada para determinarmos as soluções homogêneas para o campo piônico. Entretanto, para os cálculos que seguem, a forma (2.83) é mais conveniente. O gradiente do campo piônico pode ser calculado utilizando-se [18] a identidade

$$\vec{\nabla} [\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r} h(r)] = h'(r) \hat{r} (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) + \frac{h(r)}{r} [\vec{\sigma}_q - \hat{r} (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r})] , \quad (2.84)$$

onde a segunda parcela é obtida pelo seguinte cálculo

$$\partial_i (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) = \partial_i (\sigma_{qj} \hat{r}_j) = \sigma_{qj} \partial_i \frac{r_j}{r} = \sigma_{qj} \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_j r_i}{r^3} \right) = \frac{1}{r} [\sigma_{qi} - \hat{r}_i (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r})] . \quad (2.85)$$

O laplaciano $\nabla^2 \vec{\pi}$ é obtido através da aplicação do divergente a $\vec{\nabla} \vec{\pi}$, com o resultado

$$\nabla^2 \vec{\pi} = \left(h'' + \frac{2h'}{r} - \frac{2h}{r^2} \right) \langle \text{B} | \sum_q (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q | \text{B} \rangle . \quad (2.86)$$

A equação para a parte radial do campo piônico fica então sendo escrita como

$$\left(h'' + \frac{2h'}{r} - m_\pi^2 - v_\pi(r) - \frac{2h}{r^2} \right) \langle \text{B} | \sum_q (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q | \text{B} \rangle = \frac{i [m_u + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \langle \text{B} | \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \psi_q | \text{B} \rangle . \quad (2.87)$$

Vamos agora trabalhar o lado esquerdo desta equação, que envolve os campos dos quarks. A função de onda dos quarks pode ser obtida a partir de (1.38). Levando-se em conta que $\ell = 0$, temos

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} g(r) \\ -i(\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r})f(r) \end{pmatrix} \chi^s , \quad (2.88)$$

onde s é o spin do quark (que pode ser $1/2$ ou $-1/2$) e χ^s é o espinor correspondente, $\chi^{1/2} = (1, 0)$ e $\chi^{-1/2} = (0, 1)$. Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_q \gamma_5 \psi_q &= \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger & \phi_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1 \\ &= -\frac{i}{2\pi} g(r) f(r) [\chi^s]^\dagger (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \chi^s , \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{i [m_u + V(r)]}{f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} \langle \text{B} | \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \psi_q | \text{B} \rangle = \frac{m_u + V(r)}{2\pi f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} g(r) f(r) \langle \text{B} | \sum_q (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q | \text{B} \rangle . \quad (2.89)$$

Com isto, a equação diferencial para a parte radial do campo piônico, $h(r)$, fica sendo dada por

$$h'' + \frac{2h'}{r} - \left(m_\pi^2 + v_\pi(r) + \frac{2}{r^2} \right) h = \frac{m_u + V(r)}{2\pi f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} g(r) f(r) . \quad (2.90)$$

Observe-se que os valores esperados de $(\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q$ nos dois lados da equação cancelam-se mutuamente. Isto garante que a parte radial do campo piônico seja a mesma para todos os bárions do octeto fundamental (bárions nos quais todos os quarks estão no estado fundamental).

Vejamos agora as condições de contorno para a função $h(r)$. Como o campo piônico não entra no interior da sacola, exigimos que $h(R_0) = 0$. Como o campo dos quarks é nulo no exterior da sacola, o termo de fonte também é nulo, e assim vemos que $h(R_1) = 0$. Utilizando estas condições de contorno, resolvemos numericamente a equação (2.90) usando o método descrito em [19]. A figura 2.4 apresenta o gráfico da solução particular.

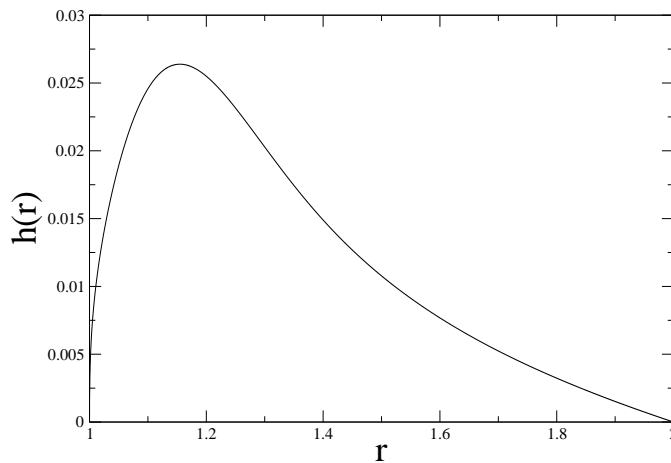


Figura 2.4: Gráfico da função radial do pion $h(r)$ para $R_0 = 1.0$, $R_1 = 2.0$, $\alpha_\pi = 1.0$, $m' = 181MeV$ e $\alpha = 7.0$.

Parte II

Propriedades hadrônicas segundo o FBM

Capítulo 3

Correções à massa dos bárions

3.1 Correção de centro de massa

O tratamento da correção de centro de massa é um problema inerente à maioria dos modelos hadrônicos. Tanto os modelos de sacola do tipo do MIT e modelos de potencial relativístico bem como outros tipos de modelos hadrônicos tratam de maneira inadequada o movimento do centro de massa dos hádrons. Nestes modelos, o mecanismo de confinamento é representado por um potencial ou por algo semelhante que atua em cada quark separadamente. Isto permite que as equações dinâmicas do sistema sejam resolvidas para cada quark de modo completamente independente dos demais quarks, o que representa uma grande vantagem. Porém, como não há nenhuma correlação entre o movimento de um quark e o movimento dos outros quarks, perde-se informação sobre o momento total do hádron. Assim, a energia cinética do movimento do hádron como um todo não pode ser calculada. O problema então é estimar o quanto esta energia contribui para a massa do hádron. Na literatura existem várias prescrições para estimar a contribuição da energia cinética do centro de massa, mas um método definitivo parece ainda não ter sido encontrado. No apêndice B descrevemos em detalhe o método de C. W. Wong [20], que devido à sua simplicidade é utilizado em muitos modelos hadrônicos e também será utilizado neste trabalho. De acordo com esta prescrição, a correção de centro de massa ΔE_{cm} para a massa de um hádron é dada pela expressão (B.15),

$$\Delta E_{cm} = \sqrt{\left(\sum_{q=1}^3 E_q\right)^2 - \sum_{q=1}^3 \langle p_q^2 \rangle} - \sum_{q=1}^3 E_q, \quad (3.1)$$

onde $\langle p_q^2 \rangle$ é o valor esperado do quadrado do momento linear do q -ésimo quark, calculado a partir das funções de onda independentes de cada quark,

$$\langle \vec{p}_q^2 \rangle = \int d^3 r \psi_q^\dagger(\vec{r}) \vec{p}_q^2 \psi_q(\vec{r}). \quad (3.2)$$

Vemos portanto que, obtido o valor esperado $\langle p_q^2 \rangle$, a correção de centro de massa ΔE_{cm} pode ser facilmente calculada a partir de (3.1).

No restante desta seção vamos nos dedicar a simplificar a expressão para $\langle p_q^2 \rangle$. Faremos o cálculo para um auto-estado qualquer com a forma (1.38), não somente para estados com $\ell = 0$, do mesmo modo como foi feito o cálculo do fator de normalização da função de onda dos quarks no capítulo 1. Utilizando então a forma (1.38) para o campo dos quarks e lembrando que

$$\vec{p}^2 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \vec{L}^2, \quad (3.3)$$

podemos expressar $\langle p_q^2 \rangle$ em termos das funções radiais $g(r)$ e $f(r)$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}^2 \rangle = \int_0^{R_1} dr r^2 \left\{ g(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] g(r) \right. \\ \left. + f(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell'(\ell'+1)}{r^2} \right] f(r) \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde suprimimos o índice q momentaneamente. De acordo com (1.46), a função $f(r)$ é proporcional à derivada de $g(r)$, e deste modo a expressão acima envolve a terceira derivada de $g(r)$. Veremos no entanto que, utilizando vários truques de integração, podemos chegar a uma expressão que não contém nenhuma derivada de $g(r)$.

O primeiro passo é separarmos as contribuições de $g(r)$ e $f(r)$ para $\langle p_q^2 \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}^2 \rangle &= I_g + I_f \\ I_g &= \int_0^{R_1} dr r^2 g(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] g(r) \\ I_f &= \int_0^{R_1} dr r^2 f(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell'(\ell'+1)}{r^2} \right] f(r). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Substituindo-se a equação diferencial (1.47) para $g(r)$ na expressão para I_g , obtemos

$$I_g = \int_0^{R_1} dr r^2 g(r) \left[(E+m)(E-m-2V(r)) \right] g(r), \quad (3.6)$$

e, escrevendo $g(r)$ em termos da função de onda reduzida $u(r)$, ficamos com

$$I_g = (E+m) \int_0^{R_1} dr u^2(r) \left[E-m-2V(r) \right]. \quad (3.7)$$

Esta expressão não envolve nenhuma derivada da função de onda. O próximo passo é simplificar o cálculo de I_f , e para isto devemos determinar a equação diferencial que a função $f(r)$ obedece.

A equação diferencial para $f(r)$

Vimos que as funções $g(r)$ e $f(r)$ obedecem às equações (1.45). A primeira equação deste sistema pode ser escrita na forma

$$g(r) = -\frac{1}{E-m-2V(r)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} \right) f(r). \quad (3.8)$$

Assim, podemos calcular a derivada de $g(r)$,

$$\begin{aligned} \frac{dg(r)}{dr} = & - \frac{2V'(r)}{[E - m - 2V(r)]^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} \right) f(r) \\ & - \frac{1}{E - m - 2V(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1 - \kappa}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1 - \kappa}{r^2} \right) f(r). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo-se este resultado na segunda equação do sistema (1.45), temos

$$\begin{aligned} (E + m) f(r) = & - \frac{2V'(r)}{[E - m - 2V(r)]^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} \right) f(r) \\ & - \frac{1}{E - m - 2V(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1 - \kappa}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1 - \kappa}{r^2} \right) f(r) \\ & - \frac{1}{E - m - 2V(r)} \left(\frac{1 + \kappa}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \kappa^2}{r^2} \right) f(r) \\ = & - \frac{2V'(r)}{[E - m - 2V(r)]^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} \right) f(r) \\ & - \frac{1}{E - m - 2V(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell'(\ell' + 1)}{r^2} \right) f(r), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde usamos $\kappa(\kappa - 1) = \ell'(\ell' + 1)$. Finalmente, multiplicando esta equação por $E - m - 2V(r)$, chegamos à equação diferencial obedecida pela função radial $f(r)$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{\ell'(\ell' + 1)f}{r^2} + \frac{2V'(r)}{E - m - 2V(r)} \left(\frac{df}{dr} + \frac{(1 - \kappa)f}{r} \right) \\ + (E + m) [E - m - 2V(r)] f = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Continuando...

Para simplificar o cálculo da contribuição I_f ao valor esperado do momento ao quadrado de um quark, vamos substituir a equação diferencial para $f(r)$ na expressão para I_f ,

$$I_f = \int_0^{R_1} dr r^2 f \left\{ \frac{2V'(r)}{E - m - 2V(r)} \left(\frac{df}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} f \right) + (E + m) [E - m - 2V(r)] f \right\} \quad (3.12)$$

Utilizando a equação (3.8), podemos simplificar o primeiro termo entre chaves na integral acima,

$$I_f = \int_0^{R_1} dr r^2 f(r) \left\{ -2V'(r) g(r) + (E + m) [E - m - 2V(r)] f(r) \right\}, \quad (3.13)$$

e usando (1.46) para escrever $f(r)$ em termos de $u(r)$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_f &= \frac{1}{E+m} \int_0^{R_1} dr \left[u'(r) + \frac{\kappa u(r)}{r} \right] \left\{ -2V'(r)u(r) + [E-m-2V(r)] \left[u'(r) + \frac{\kappa u(r)}{r} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{E+m} \int_0^{R_1} dr u'(r) \left\{ -2V'(r)u(r) + [E-m-2V(r)]u'(r) \right\} \\
&\quad + \frac{\kappa}{E+m} \int_0^{R_1} dr \frac{u(r)}{r} \left\{ -2V'(r)u(r) + 2[E-m-2V(r)]u'(r) \right\} \\
&\quad + \frac{\kappa^2}{E+m} \int_0^{R_1} dr \frac{u^2(r)}{r^2} [E-m-2V(r)] .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Notando-se a identidade

$$\begin{aligned}
\{[E-m-2V(r)]u'(r)u(r)\}' &= [E-m-2V(r)]u'^2(r) - 2V'(r)u'(r)u(r) \\
&\quad + [E-m-2V(r)]u''(r)u(r)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

podemos fazer integração por partes, obtendo

$$\begin{aligned}
I_f &= -\frac{1}{E+m} \int_0^{R_1} dr [E-m-2V(r)]u''(r)u(r) \\
&\quad + \frac{\kappa}{E+m} \int_0^{R_1} dr \frac{u(r)}{r} \left\{ -2V'(r)u(r) + 2[E-m-2V(r)]u'(r) \right\} \\
&\quad + \frac{\kappa^2}{E+m} \int_0^{R_1} dr \frac{u^2(r)}{r^2} [E-m-2V(r)] ,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

e notando-se a identidade

$$\begin{aligned}
\left\{ [E-m-2V(r)] \frac{u^2(r)}{r} \right\}' &= 2[E-m-2V(r)] \frac{u'(r)u(r)}{r} - 2V'(r) \frac{u^2(r)}{r} \\
&\quad - [E-m-2V(r)] \frac{u^2(r)}{r^2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

podemos fazer integração por partes, obtendo

$$\begin{aligned}
I_f &= -\frac{1}{E+m} \int_0^{R_1} dr [E-m-2V(r)]u''(r)u(r) \\
&\quad + \frac{\kappa}{E+m} \int_0^{R_1} dr [E-m-2V(r)] \frac{u^2(r)}{r^2} \\
&\quad + \frac{\kappa^2}{E+m} \int_0^{R_1} dr \frac{u^2(r)}{r^2} [E-m-2V(r)] .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Usando a equação diferencial para $u(r)$ e rearranjando os termos, ficamos com

$$\begin{aligned}
I_f &= \frac{1}{E+m} \int_0^{R_1} dr u^2(r) [E-m-2V(r)] \left[(E+m)[E-m-2V(r)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \\
&\quad + \frac{\kappa(\kappa+1)}{E+m} \int_0^{R_1} dr \frac{u^2(r)}{r^2} [E-m-2V(r)] .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Notando que $\kappa(\kappa + 1) = \ell(\ell + 1)$, temos

$$I_f = \int_0^{R_1} dr u^2(r) [E - m - 2V(r)]^2. \quad (3.20)$$

Finalizando...

Reunindo os resultados para I_g e I_f , vemos que o momento ao quadrado de um quark pode ser expresso como

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = 2 \int_0^{R_1} dr u^2(r) [E - V(r)] [E - m - 2V(r)]. \quad (3.21)$$

Tendo em vista ainda uma maior simplificação desta expressão, vamos escrever $\langle \vec{p}^2 \rangle$ como

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = 2(E - m) \int_0^{R_1} dr u^2(r) [E - V(r)] - 4 \int_0^{R_1} dr u^2(r) V(r) [E - V(r)]. \quad (3.22)$$

Usando a condição de normalização (1.98), podemos escrever o valor esperado do momento ao quadrado de maneira bastante elucidativa na forma

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = E^2 - m^2 - 4 \int_0^{R_1} dr u^2(r) V(r) [E - V(r)]. \quad (3.23)$$

Deste modo, percebe-se facilmente como a famosa fórmula de Einstein é modificada pela presença de um potencial do tipo $(1 + \gamma^0)V(r)$. Além disso, esta fórmula não contém nenhuma derivada da função de onda, o que facilita tanto os cálculos numéricos como os cálculos analíticos.

Para o cálculo efetivo de $\langle \vec{p}^2 \rangle$ é no entanto mais conveniente usarmos as variáveis E' e m' definidas em (1.51). Assim, re-escrevemos (3.21) como

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}^2 \rangle &= 2 \int_0^{R_1} dr u^2(r) [E' - V_c(r)] (E' - m' - 2V_c(r)) \\ &= 2(E' - m') \int_0^{R_1} dr u^2(r) [E' - V_c(r)] - 4 \int_0^{R_1} dr u^2(r) V_c(r) [E' - V_c(r)]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

e, usando a condição de normalização (1.98), obtemos a expressão

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = E'^2 - m'^2 - 4 \int_{R_0}^{R_1} dr u^2(r) V_c(r) [E' - V_c(r)], \quad (3.25)$$

que é bastante similar à fórmula (3.23).

Restrição para os valores possíveis do parâmetro α

Para que o valor esperado do momento ao quadrado $\langle \vec{p}_q^2 \rangle$ seja finito, as integrais em (3.5) que definem I_g e I_f devem ser finitas. O extremo de integração $r \rightarrow 0$ não oferece

problemas, pois tanto as funções de onda $g(r)$ e $f(r)$ como as suas derivadas tendem a zero ou são finitas neste limite. A dificuldade vem do outro extremo, $r \rightarrow R_1$, no qual o potencial confinante diverge. Na vizinhança de R_1 , a solução para a função de onda $u(r)$ é dada por (1.77), e usando a aproximação $J_\nu(z) \approx cte z^\nu$ para pequenos valores do argumento z da função de Bessel (fórmula 9.1.7 de [15]), vemos que

$$u(r) \approx cte (R_1 - r)^{\sigma+1/2}. \quad (3.26)$$

Deste modo, no caso de I_g , o comportamento dominante do integrando na vizinhança de R_1 é

$$r^2 g(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] g(r) \approx cte (R_1 - r)^{2\sigma+1-2}, \quad (3.27)$$

onde o fator $2\sigma + 1$ no expoente provém essencialmente de $u^2(r)$ e o fator -2 provém da derivada segunda. Para que a integral seja finita, devemos ter $2\sigma + 1 - 2 > -1$, e isto implica na condição $\sigma > 0$, que é trivialmente satisfeita. No caso de I_f , o comportamento dominante do integrando na vizinhança de R_1 é

$$r^2 \left(f(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2}{r^2} \right] f(r) \right) \approx cte (R_1 - r)^{2\sigma+1-4}, \quad (3.28)$$

onde o fator -4 provém da derivada segunda e do fato de $f(r)$ ser proporcional à derivada de $g(r)$. Para que a integral seja finita, devemos ter $2\sigma + 1 - 4 > -1$, e isto implica em $\sigma > 1$. Sendo σ dado por (1.78), obtemos a condição

$$(E + m) \alpha > \frac{3}{8}. \quad (3.29)$$

Levantamento de degenerescências

Para finalizar esta seção, observamos que a correção de centro de massa (3.1), assim como a expressão (1.105) para a massa de um bárion, depende somente do conteúdo de sabor de cada bárion. Portanto, após a correção de centro de massa, as massas dos bárions continuam com o mesmo padrão de degenerescência apresentado em (1.106).

3.2 Troca de um glúon

No modelo de sacola difusa, assim como em outros modelos hadrônicos, o potencial confinante modela a parte não-perturbativa da interação quark-glúon, sendo a parte perturbativa calculada na aproximação de troca de um glúon. Nesta seção veremos como calcular a contribuição da troca de um glúon para a massa dos bárions de acordo com o FBM.

Para incorporarmos os glúons no nosso modelo, vamos adicionar à densidade Lagrangeana (2.32) dos quarks e píons a densidade Lagrangeana da QCD,

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + g \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_a \psi A_\mu^a, \quad (3.30)$$

onde suprimimos os índices de cor e sabor dos quarks. O primeiro termo em \mathcal{L}_g descreve o campo não-abeliano dos glúons, sendo o tensor $F_{\mu\nu}^a$ dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (3.31)$$

Nesta expressão, f_{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(3)$ e g é a constante de acoplamento da QCD, tendo o mesmo valor nas auto-interações de três e de quatro glúons e também na interação quark-glúon, que é descrita pelo segundo termo em \mathcal{L}_g .

Como estaremos considerando somente a troca de um glúon, podemos desprezar os termos de auto-interação dos glúons. Isto equivale a considerar nulas as constantes f_{abc} , de modo que o terceiro termo em (3.31) desaparece. Nesta aproximação, a QCD torna-se muito semelhante à QED, com a diferença de que temos oito tipos de “fóton” para levar em conta. Do mesmo modo que na eletrodinâmica clássica, os campos elétrico e magnético de cor são definidos através do tensor $F_{\mu\nu}^a$ na forma

$$E_a^i(x) = F_a^{i0}(x) \quad B_a^i(x) = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_a^{jk}(x) . \quad (3.32)$$

Estes campos interagem com a corrente vetorial de cor dos quarks, que é definida como

$$j_a^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \lambda_a \psi(x) . \quad (3.33)$$

Lembrando a forma (1.38) para $\psi(x)$, vemos que a corrente vetorial de cor dos quarks é independente do tempo, pois a exponencial $e^{-iE_q t}$ proveniente de $\psi_q(x)$ é cancelada pela exponencial $e^{iE_q t}$ proveniente de $\bar{\psi}_q(x)$. Sendo $j_a^\mu(x)$ a fonte para os campos elétrico e magnético de cor, segue que estes campos também são independentes do tempo. As equações de Maxwell estáticas para os campos $\vec{E}^a(\vec{r})$ e $\vec{B}^a(\vec{r})$ são

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a(\vec{r}) &= -g \rho^a(\vec{r}) & \vec{\nabla} \times \vec{B}^a(\vec{r}) &= -g \vec{j}^a(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}^a(\vec{r}) &= \vec{0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^a(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $\rho^a(\vec{r}) = j^{a0}(\vec{r})$ é a densidade dos quarks. Observe-se o sinal negativo multiplicando a corrente dos quarks, que é contrário ao da eletrodinâmica. Sendo (3.34) um conjunto de equações lineares, podemos separar as contribuições de cada sabor de quark para os campos $\vec{E}^a(\vec{r})$ e $\vec{B}^a(\vec{r})$,

$$\vec{E}^a(\vec{r}) = \sum_q \vec{E}_q^a(\vec{r}) \quad \vec{B}^a(\vec{r}) = \sum_q \vec{B}_q^a(\vec{r}) . \quad (3.35)$$

No estado fundamental, a parte temporal e a parte espacial da corrente de cor dos quarks para um determinado sabor q são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_q^a(r) &= \frac{\lambda^a}{4\pi} [g_q^2(r) + f_q^2(r)] \\ \vec{j}_q^a(\vec{r}) &= \frac{\lambda_a}{2\pi} g_q(r) f_q(r) (\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) . \end{aligned} \quad (3.36)$$

A contribuição da troca de um glúon para a massa de um hádron é dada pela soma das energias eletrostática e magnetostática de cor e da energia de interação entre quarks e glúons,

$$\Delta E_g = \sum_a \int d^3r \left(\frac{1}{2} \vec{E}^a(\vec{r}) \cdot \vec{E}^a(\vec{r}) + \frac{1}{2} \vec{B}^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}^a(\vec{r}) + g \vec{j}^a(\vec{r}) \cdot \vec{A}^a(\vec{r}) \right). \quad (3.37)$$

Em geral, a contribuição da energia eletrostática de cor é muito pequena, sendo da ordem de $5MeV$ [21]. Assim, consideraremos somente a contribuição magnetostática de cor, que é bem maior (da ordem de $100MeV$), e que é dada por

$$\Delta E_{gM} = \sum_a \int d^3r \left(\frac{1}{2} \vec{B}_a(\vec{r}) \cdot \vec{B}_a(\vec{r}) + g \vec{j}_a(\vec{r}) \cdot \vec{A}_a(\vec{r}) \right). \quad (3.38)$$

A energia magnetostática de cor

Usando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$ juntamente com as equações $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e $\nabla \times \vec{B} = -g \vec{j}$, obtemos $\vec{B} \cdot \vec{B} = -g \vec{j} \cdot \vec{A} + \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$, e a energia magnetostática de cor pode ser escrita na forma

$$\Delta E_{gM} = \frac{1}{2} \sum_a \int d^3r \left(g \vec{j}_a \cdot \vec{A}_a + \nabla \cdot (\vec{A}_a \times \vec{B}_a) \right). \quad (3.39)$$

O segundo termo no integrando é uma divergência total e pode ser facilmente integrado, e como os campos $\vec{B}_a(\vec{r})$ e $\vec{A}_a(\vec{r})$ são nulos no infinito ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$), obtemos

$$\Delta E_{gM} = \frac{g}{2} \sum_{q \neq q'} \sum_a \int d^3r \vec{j}_q^a(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{q'}^a(\vec{r}), \quad (3.40)$$

onde usamos a linearidade das equações dos campos para expressar tanto a corrente dos quarks como o campo vetorial de cor como uma soma das contribuições de cada quark no hádron. Note-se que, na expressão acima, os termos de auto-energia dos quarks ($q = q'$) não foram considerados, pois já são levados em conta na massa m_q de cada quark.

Para calcularmos a contribuição magnetostática de cor à massa dos bárions, vamos expressar ΔE_{gM} diretamente em termos das correntes dos quarks. Assim, a equação $\nabla \times \vec{B}_a = -g \vec{j}_a$ para o campo magnético de cor pode ser escrita em termos do potencial vetorial $\vec{A}_a(\vec{r})$,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}_a) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}_a) - \nabla^2 \vec{A}_a = -g \vec{j}_a. \quad (3.41)$$

Escolhendo o calibre de Coulomb, no qual $\nabla \cdot \vec{A}_a = 0$, obtemos $\nabla^2 \vec{A}_a = g \vec{j}_a$. E, em vista da identidade,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.42)$$

podemos ver que o campo vetorial tem a seguinte dependência em relação à corrente dos quarks,

$$\vec{A}_q^a(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}_q^a(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.43)$$

Substituindo-se a fórmula acima na expressão para ΔE_{gM} , temos

$$\Delta E_{gM} = -\frac{g^2}{8\pi} \sum_{q \neq q'} \sum_a \int d^3r d^3r' \frac{\vec{j}_q^a(\vec{r}) \cdot \vec{j}_{q'}^a(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.44)$$

Se os quarks estiverem todos no estado fundamental, esta expressão pode ser escrita de maneira mais explícita usando-se a equação (3.36) para $\vec{j}_q^a(\vec{r})$,

$$\Delta E_{gM} = -\frac{g^2}{8\pi} \sum_{q \neq q'} \sum_a \int d^3r d^3r' \frac{\lambda_q^a g_q(r) f_q(r) (\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) \cdot \lambda_{q'}^a g_{q'}(r') f_{q'}(r') (\hat{r}' \times \vec{\sigma}_{q'})}{4\pi^2 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.45)$$

Como veremos, esta expressão pode ser bastante simplificada. O primeiro passo é fazer a integração angular em \vec{r}' , que pode ser isolada remanejando-se a expressão acima,

$$\Delta E_{gM} = -\frac{g^2}{32\pi^3} \sum_{q \neq q'} \sum_a \lambda_q^a \lambda_{q'}^a \int d^3r g_q(r) f_q(r) (\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) \cdot \int d^3r' r'^2 g_{q'}(r') f_{q'}(r') \int d\Omega' \frac{(\hat{r}' \times \vec{\sigma}_{q'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.46)$$

Escrevendo o vetor unitário \hat{r}' em termos dos harmônicos esféricos,

$$\begin{aligned} \hat{r}' &= (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{-Y_{1,1}(\theta', \phi') + Y_{1,-1}(\theta', \phi')}{\sqrt{2}}, \frac{-Y_{1,1}(\theta', \phi') - Y_{1,-1}(\theta', \phi')}{\sqrt{2}i}, Y_{1,0}(\theta', \phi') \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

e usando a identidade

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.48)$$

onde $r_{<} = \min(r, r')$ e $r_{>} = \max(r, r')$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int d\Omega' \frac{\hat{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int d\Omega' 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &\quad \times \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{-Y_{1,1}(\theta', \phi') + Y_{1,-1}(\theta', \phi')}{\sqrt{2}}, \frac{-Y_{1,1}(\theta', \phi') - Y_{1,-1}(\theta', \phi')}{\sqrt{2}i}, Y_{1,0}(\theta', \phi') \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{-Y_{1,1}(\theta, \phi) + Y_{1,-1}(\theta, \phi)}{\sqrt{2}}, \frac{-Y_{1,1}(\theta, \phi) - Y_{1,-1}(\theta, \phi)}{\sqrt{2}i}, Y_{1,0}(\theta, \phi) \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \hat{r}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Com este resultado para a integração angular em \vec{r}' , a energia magnetostática de cor fica sendo escrita como

$$\begin{aligned}\Delta E_{gM} &= -\frac{g^2}{32\pi^3} \sum_{q \neq q'} \sum_a \lambda_q^a \lambda_{q'}^a \int d^3r g_q(r) f_q(r) (\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) \\ &\quad \cdot \int dr' r'^2 g_{q'}(r') f_{q'}(r') \frac{4\pi}{3} (\hat{r} \times \vec{\sigma}_{q'}) \frac{r_{\leq}}{r_{>}^2} \\ &= -\frac{g^2}{24\pi^2} \sum_{q \neq q'} \sum_a \lambda_q^a \lambda_{q'}^a \int dr r^2 g_q(r) f_q(r) \\ &\quad \cdot \int dr' r'^2 g_{q'}(r') f_{q'}(r') \frac{r_{\leq}}{r_{>}^2} \int d\Omega (\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) \cdot (\hat{r} \times \vec{\sigma}_{q'}),\end{aligned}\tag{3.50}$$

onde na segunda igualdade foi isolada a integração na parte angular em \vec{r} . Notando que $(\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) \cdot (\hat{r} \times \vec{\sigma}_{q'}) = \epsilon_{abc} \hat{r}^b \vec{\sigma}_q^c \epsilon_{ade} \hat{r}^d \vec{\sigma}_{q'}^e = \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{q'} - (\hat{r} \cdot \vec{\sigma}_q)(\hat{r} \cdot \vec{\sigma}_{q'})$, esta integral pode ser feita sem dificuldades,

$$\int d\Omega (\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) \cdot (\hat{r} \times \vec{\sigma}_{q'}) = \left(4\pi - \frac{4\pi}{3}\right) \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{q'} = \frac{8\pi}{3} \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{q'},\tag{3.51}$$

forneendo então

$$\Delta E_{gM} = -\frac{g^2}{9\pi} \sum_{q \neq q'} \sum_a \lambda_q^a \lambda_{q'}^a \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{q'} \int_0^{R_1} dr r^2 g_q(r) f_q(r) \int_0^{R_1} dr' r'^2 g_{q'}(r') f_{q'}(r') \frac{r_{\leq}}{r_{>}^2},\tag{3.52}$$

onde agora colocamos os limites de integração para as duas integrais radiais. A integral em r' pode ser trabalhada na seguinte forma,

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{R_1} dr' r'^2 g_{q'}(r') f_{q'}(r') \frac{r_{\leq}}{r_{>}^2} \\ &= \int_0^r dr' r'^2 g_{q'}(r') f_{q'}(r') \frac{r'}{r^2} + \int_r^{R_1} dr' r'^2 g_{q'}(r') f_{q'}(r') \frac{r}{r'^2}.\end{aligned}\tag{3.53}$$

Como $f(r) = g'(r)/(E+m)$, podemos usar as identidades

$$\begin{aligned}g(r) f(r) &= \frac{1}{E+m} \left(\frac{1}{2} g^2(r)\right)' \\ \left(\frac{1}{2} g^2(r) r^3\right)' &= g(r) g'(r) r^3 + \frac{3}{2} g^2(r) r^2,\end{aligned}\tag{3.54}$$

e fazer integração por partes, obtendo

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{(E_{q'} + m_{q'}) r^2} \left[\frac{1}{2} g_{q'}^2(r') r'^3 \Big|_0^r - \frac{3}{2} \int_0^r dr' g_{q'}^2(r') r'^2 \right] + \frac{r}{(E_{q'} + m_{q'})} \frac{1}{2} g_{q'}^2(r') \Big|_r^{R_1} \\ &= -\frac{3}{2(E_{q'} + m_{q'}) r^2} \int_0^r dr' g_{q'}^2(r') r'^2.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Deste modo, a nova expressão para a energia magnetostática é

$$\Delta E_{gM} = \frac{g^2}{6\pi} \sum_{q \neq q'} \sum_a \frac{\lambda_q^a \lambda_{q'}^a \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{q'}}{(E_q + m_q)(E_{q'} + m_{q'})} \int_0^{R_1} dr g_q(r) g_{q'}(r) \int_0^r dr' g_q^2(r') r'^2. \quad (3.56)$$

Observamos ainda que

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} g_q^2(r) \int_0^r dr' g_{q'}^2(r') r'^2 \right) = g_q(r) g_{q'}(r) \int_0^r dr' g_{q'}^2(r') r'^2 + \frac{1}{2} g_q^2(r) g_{q'}^2(r) r^2, \quad (3.57)$$

e assim, fazendo integração por partes, temos

$$\int_0^{R_1} dr g_q(r) g_{q'}(r) \int_0^r dr' g_{q'}^2(r') r'^2 = -\frac{1}{2} \int_0^{R_1} dr g_q^2(r) g_{q'}^2(r) r^2. \quad (3.58)$$

Portanto, a expressão que resulta para a energia magnetostática é

$$\Delta E_{gM} = -\frac{\alpha_c}{3} \sum_{q \neq q'} \sum_a \frac{\lambda_q^a \lambda_{q'}^a \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{q'}}{(E_q + m_q)(E_{q'} + m_{q'})} \int_0^{R_1} dr r^2 g_q^2(r) g_{q'}^2(r), \quad (3.59)$$

onde introduzimos a constante de acoplamento $\alpha_c = g^2/4\pi$. Note-se que o cálculo de ΔE_{gM} tornou-se agora muito mais simples que a forma original (3.44), envolvendo somente uma integração em uma variável.

Como de praxe na literatura, escrevemos explicitamente as contribuições para ΔE_{gM} quando os quarks q e q' forem dois quarks u , um quark u e um quark s , ou dois quarks s ,

$$\Delta E_{gM} = \alpha_c (a_{uu} I_{uu} + a_{us} I_{us} + a_{ss} I_{ss}), \quad (3.60)$$

sendo as constantes $I_{qq'}$ relacionadas à parte espacial da função de onda dos quarks,

$$I_{qq'} = \frac{16}{9(E_q + m_q)(E_{q'} + m_{q'})} \int_0^\infty dr r^2 g_q^2(r) g_{q'}^2(r), \quad (3.61)$$

e as constantes $a_{qq'}$ relacionadas à parte de spin e de cor,

$$a_{qq'} = -\frac{3}{16} \langle B | \sum_a \lambda_q^a \lambda_{q'}^a \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{q'} | B \rangle, \quad (3.62)$$

onde B é um estado hadrônico. Os valores de $a_{qq'}$ para os bárions do octeto fundamental podem ser vistos na tabela 3.1.

Levantamento de degenerescências

Observando a tabela 3.1, vemos que a troca de um glúon levanta completamente a degenerescência entre as massas dos bárions do octeto fundamental. A razão disto pode ser encontrada na equação (3.62), onde notamos que os coeficientes $a_{qq'}$ dependem da função de onda no espaço de sabor e spin de cada bárion.

| | N | Δ | Λ | Σ | Σ^* | Ξ | Ξ^* | Ω^- |
|----------|----|----------|-----------|----------|------------|-------|---------|------------|
| a_{uu} | -3 | 3 | -3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| a_{us} | 0 | 0 | 0 | -4 | 2 | -4 | 2 | 0 |
| a_{ss} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |

Tabela 3.1: Coeficientes $a_{qq'}$ para o cálculo da energia magnética de cor.

3.3 Troca de um pión

Nos modelos hadrônicos quirais, o pión deve ser tratado como um campo quântico, que interage com os quarks criando uma nuvem piônica em torno dos bárions. Este tipo de tratamento foi explorado somente no início dos anos 80 com os trabalhos de C. E. De Tar [6, 17] e no *Cloudy Bag Model* [7, 22, 23, 24, 25], e é de fato uma adaptação do formalismo de Chew e Low [26, 27, 28] para a interação pión-núcleon. Na teoria de Chew e Low, o núcleon é tratado em uma aproximação estática, permanecendo fixo em um ponto do espaço, sem propagar-se. Isto também significa que: (i) o recuo do núcleon é desprezado, isto é, os núcleons comportam-se como se possuíssem massa infinita; (ii) os pares núcleon/anti-núcleon não são incluídos na teoria de perturbação. Este tipo de formalismo adapta-se perfeitamente aos modelos hadrônicos, nos quais o bárion permanece fixo na origem do sistema de coordenadas, tornando-se padrão tanto em modelos de sacola como em modelos de potencial relativístico.

Formalismo Hamiltoniano de segunda quantização

Começamos escrevendo o Hamiltoniano total para o sistema bárion-pión como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_\pi + \mathcal{H}_I, \quad (3.63)$$

onde \mathcal{H}_B é o Hamiltoniano para o bárion, \mathcal{H}_π é o Hamiltoniano para os píons, e \mathcal{H}_I é o Hamiltoniano de interação pión-bárion. O Hamiltoniano \mathcal{H}_B para um bárion livre pode ser escrito, em uma notação compacta, na forma

$$\mathcal{H}_B = \sum_B M_B^0 B^\dagger B, \quad (3.64)$$

onde B^\dagger e B são operadores de criação e destruição para estados bariônicos com massa M_B^0 . Obviamente, como estaremos tratando os bárions segundo o modelo de sacola difusa, a massa M_B^0 é dada pela soma das energias dos quarks e da energia de vácuo, conforme a equação (1.105). Os auto-estados de \mathcal{H}_B são os estados de sacola livre que estudamos no capítulo 1. Estes estados serão agora denotados por $|B\rangle$, onde B é um dos bárions do octeto bariônico fundamental,

$$(N, \Delta), (\Lambda, \Sigma, \Sigma^*), (\Xi, \Xi^*), (\Omega^-). \quad (3.65)$$

Os parênteses agrupam bárions de mesma estranheza. Como o pión não tem estranheza, somente os estados bariônicos de um mesmo grupo serão misturados pelo Hamiltoniano de interação. A normalização dos estados bariônicos é

$$\langle B|B' \rangle = \delta_{BB'} . \quad (3.66)$$

O Hamiltoniano para os pions, na versão do modelo de sacola difusa apresentada no capítulo 2, é determinado a partir da densidade Lagrangeana (2.17), sendo dado por

$$\mathcal{H}_\pi = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\partial_t \vec{\pi} \cdot \partial_t \vec{\pi} + \vec{\nabla} \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} \vec{\pi} + [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi}^2 \right) . \quad (3.67)$$

Os auto-estados de \mathcal{H}_π são determinados pelos modos normais do campo, encontrados na seção 2.8. O campo piônico quantizado, na aproximação estática ($t = 0$), pode ser escrito como (ver apêndice A)

$$\pi_j(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell m} \int_0^\infty \frac{dk k}{\sqrt{2\omega_k}} \mathcal{R}_{k\ell}(r) \left(a_{j\ell m}(k) Y_{\ell m}(\theta, \phi) + \text{c.h.} \right) , \quad (3.68)$$

onde c.h. denota o conjugado Hermiteano da expressão precedente, $\mathcal{R}_{k\ell}(r)$ é a função radial do pión que definimos na seção 2.8, e $a_{j\ell m}^\dagger(k)$ e $a_{j\ell m}(k)$ são operadores de criação e destruição de pions com isospin j , momento angular dado por ℓ e m , módulo do momento linear k e energia $\omega_k^2 = m_\pi^2 + \vec{k}^2$. O Hamiltoniano (3.67) é diagonal nesta representação, obtendo-se

$$\mathcal{H}_\pi = \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \omega_k a_{j\ell m}^\dagger(k) a_{j\ell m}(k) . \quad (3.69)$$

Os auto-vetores de estado piônicos serão denotados na forma $|\pi_{j\ell m}(k)\rangle$ para o estado de um pión, $|\pi_{j'\ell'm'}(k')\rangle$ para o estado com dois pions, etc. Estes estados são normalizados de acordo com

$$\langle \pi_{j\ell m}(k) | \pi_{j'\ell'm'}(k') \rangle = \delta_{jj'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta(k - k') . \quad (3.70)$$

O Hamiltoniano de interação pión-bárion é obtido a partir da densidade Lagrangeana (2.31) para a interação pión-quark, sendo dado por

$$\mathcal{H}_I = \frac{i}{f_\pi} \int d^3r \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \cdot \vec{\pi} \psi_q , \quad (3.71)$$

onde o somatório é feito apenas sobre os quarks u e d que constituem o bárion, pois somente estes quarks participam da interação com o pión. Como consideramos que os quarks u e d têm a mesma massa, $m_u = m_d$, o termo m_u aparece fora do somatório na fórmula acima. Tendo em vista expressar o Hamiltoniano de interação (3.71) em termos dos operadores de criação e destruição de bárions e pions, vamos considerar somente os elementos de matriz de \mathcal{H}_I que conectam estados bariônicos entre si,

$$\mathcal{H}_I = \frac{i}{f_\pi} \sum_{BB'} \langle B' | \left(\int d^3r \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \cdot \vec{\pi}(\vec{r}) \psi_q \right) | B \rangle B'^\dagger B , \quad (3.72)$$

onde a soma sobre B e B' inclui todos os estados em (3.65). Usando a expressão (3.68) para o campo piônico, obtemos

$$\mathcal{H}_I = \sum_{BB'} \sum_{j\ell m} \int dk \left[B'^{\dagger} B a_{j\ell m}(k) v_{j\ell m}^{BB'}(k) + B^{\dagger} B' a_{j\ell m}^{\dagger}(k) v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k) \right], \quad (3.73)$$

onde as funções $v_{j\ell m}^{BB'}(k)$ são denominadas funções de vértice, pois determinam a amplitude para que a interação ocorra, sendo definidas como

$$v_{j\ell m}^{BB'}(k) = \frac{i k}{\sqrt{\pi\omega_k f_{\pi}}} \int d^3 r \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_{\pi}(r)}} \langle B' | \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \tau_{jq} \psi_q | B \rangle \mathcal{R}_{k\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (3.74)$$

No Hamiltoniano de interação (3.73), os operadores $a_{j\ell m}^{\dagger}(k)$ e $a_{j\ell m}(k)$ criam e destróem píons com componente j no espaço de isospin. Sob o ponto de vista físico, é mais vantajoso escrever \mathcal{H}_i em termos de operadores que criam e destroem estados piônicos com carga elétrica bem definida. Estes estados são determinados de acordo com as combinações lineares

$$|\pi^+\rangle = -\frac{|\pi_x\rangle + i|\pi_y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\pi^0\rangle = |\pi_z\rangle, \quad |\pi^-\rangle = \frac{|\pi_x\rangle - i|\pi_y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.75)$$

do mesmo modo que as componentes esféricas de um vetor no espaço de isospin. Para criar ou para destruir um destes estados, devemos atuar com as componentes esféricas dos operadores de criação ou de destruição. Em vista da expressão (3.74) para a função de vértice, o somatório sobre j no Hamiltoniano de interação (3.73) envolve somente os operadores de criação e destruição e as matrizes $\vec{\tau}_q$, e indica um produto escalar no espaço de isospin. Este produto pode ser escrito em termos das componentes esféricas como

$$\sum_{j=1}^3 a_{j\ell m}(k) \tau_j = \sum_{j=-1}^1 a_{j\ell m}(k) \tau_j^{\dagger}. \quad (3.76)$$

No lado esquerdo da equação, j denota as componentes cartesianas de um vetor no espaço de isospin, assumindo os valores 1, 2 e 3, o que corresponderia no espaço real aos eixos x , y e z . No lado direito da equação, j denota as componentes esféricas de um vetor no espaço de isospin, assumindo os valores -1 , 0 e 1 , o que corresponde aos estados com carga elétrica -1 , 0 e $+1$. Portanto, escrevendo

$$v_{j\ell m}^{BB'}(k) = \frac{i k}{\sqrt{\pi\omega_k f_{\pi}}} \int d^3 r \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_{\pi}(r)}} \langle B' | \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \tau_{jq}^{\dagger} \psi_q | B \rangle \mathcal{R}_{k\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.77)$$

e assumindo que $j = -1, 0, 1$ no somatório em (3.73), estaremos trabalhando com estados piônicos de carga elétrica bem definida.

Nas aplicações que faremos, os quarks estarão sempre no estado fundamental. Isto permite simplificarmos um pouco a expressão para a função de vértice. Usando a equação

(2.89), obtemos

$$v_{j\ell m}^{\text{BB}'}(k) = \frac{k}{2\pi\sqrt{\pi\omega_k f_\pi}} \int d^3r \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \langle \text{B}' | \sum_q \vec{\sigma}_q \cdot \hat{r} \tau_{jq}^\dagger | \text{B} \rangle \mathcal{R}_{k\ell}(r) g(r) f(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (3.78)$$

As variáveis angulares podem ser integradas expressando-se o vetor unitário \hat{r} em termos de esféricos harmônicos,

$$\begin{aligned} \hat{r} &= (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(-\frac{Y_{1,1}(\theta, \phi) - Y_{1,-1}(\theta, \phi)}{\sqrt{2}}, -\frac{Y_{1,1}(\theta, \phi) + Y_{1,-1}(\theta, \phi)}{i\sqrt{2}}, Y_{1,0}(\theta, \phi) \right), \end{aligned} \quad (3.79)$$

e, devido à ortogonalidade dos esféricos harmônicos, vemos que somente os píons com momento angular $\ell = 1$ contribuem para a interação. O resultado pode ser escrito como

$$v_{j\ell m}^{\text{BB}'}(k) = \frac{\delta_{\ell 1} k}{\pi\sqrt{3\omega_k f_\pi}} \langle \text{B}' | \sum_q \vec{\sigma}_q \cdot \hat{\pi}_m \tau_{jq}^\dagger | \text{B} \rangle \int_{R_0}^{R_1} dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \mathcal{R}_k(r) g(r) f(r), \quad (3.80)$$

onde o vetor unitário $\hat{\pi}_m$ é dado por

$$\hat{\pi}_m = \left(-\frac{\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}}{\sqrt{2}}, -\frac{\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}}{i\sqrt{2}}, \delta_{m,0} \right). \quad (3.81)$$

Este vetor unitário projeta $\vec{\sigma}$ no conjugado hermiteano de suas componente esféricas,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \hat{\pi}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x - i\sigma_y) = \sigma_1^\dagger \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{\pi}_0 &= \sigma_z = \sigma_z^\dagger = \sigma_0^\dagger \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{\pi}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + i\sigma_y) = \sigma_{-1}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Deste modo, podemos finalmente escrever

$$v_{j\ell m}^{\text{BB}'}(k) = \frac{\delta_{\ell 1} k}{\pi\sqrt{3\omega_k f_\pi}} \langle \text{B}' | \sum_q \sigma_{mq}^\dagger \tau_{jq}^\dagger | \text{B} \rangle \int_{R_0}^{R_1} dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \mathcal{R}_k(r) g(r) f(r). \quad (3.83)$$

Como já foi dito, a função de vértice determina a amplitude para a troca de um pión entre dois bárions. Na expressão acima, reconhecemos um fator puramente “geométrico” ($\langle \text{B}' | \sum_q \sigma_{mq}^\dagger \tau_{jq}^\dagger | \text{B} \rangle$), que é calculado usando-se teoria de grupos, e fatores dinâmicos (os outros fatores da expressão), que envolvem as funções de onda dos quarks e dos píons. Uma palavra deve ser dita ainda sobre a convergência da integral acima. No extremo $r = R_1$, os termos relevantes são $V(r) g(r) f(r)$, e em vista da condição (3.29), a integral é convergente. No extremo $r = R_0$, os termos relevantes são $\mathcal{R}_k(r)/\sqrt{F_\pi(r)}$, e em vista de (2.45) e (2.63), a integral também é convergente.

Nas equações (3.64) e (3.69) expressamos os Hamiltonianos para bárions e píons em forma diagonal e em termos de operadores de criação e destruição. O Hamiltoniano de

interação entre bárions e píons também foi expresso em (3.73) de acordo com o formalismo de segunda quantização. No entanto, o Hamiltoniano \mathcal{H}_I não é diagonal nesta representação. Deste modo, o problema que temos agora é obter os auto-estados e auto-valores do Hamiltoniano total, \mathcal{H} . Este problema pode ser resolvido com teoria de perturbação, como veremos a seguir.

Teoria de perturbação

Para desenvolvermos a teoria de perturbação, é conveniente utilizarmos a representação de interação. Assim, vamos separar o Hamiltoniano total \mathcal{H} em dois termos,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I, \quad (3.84)$$

onde $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_\pi$ descreve bárions e píons livres e \mathcal{H}_I é o Hamiltoniano de interação. Os auto-estados de \mathcal{H}_0 são obtidos pelo produto direto dos auto-estados de \mathcal{H}_B e de \mathcal{H}_π , de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0|B\rangle &= M_B^0|B\rangle \\ \mathcal{H}_0|B, \pi_{j\ell m}(k)\rangle &= (M_B^0 + \omega_k)|B, \pi_{j\ell m}(k)\rangle \\ \mathcal{H}_0|B, \pi_{j\ell m}(k), \pi_{j'\ell'm'}(k')\rangle &= (M_B^0 + \omega_k + \omega'_k)|B, \pi_{j\ell m}(k), \pi_{j'\ell'm'}(k')\rangle, \end{aligned} \quad (3.85)$$

sendo óbvia a extensão do resultado para estados com 3 ou mais píons. Os auto-estados e auto-valores de \mathcal{H} serão denotados respectivamente por $|\tilde{B}\rangle$ e M_B , sendo também denominados de estado e massa física do bárion. Deste modo, temos

$$\mathcal{H}|\tilde{B}\rangle = M_B|\tilde{B}\rangle. \quad (3.86)$$

Uma simplificação do formalismo surge [29] ao considerarmos para o sistema de bárions e píons livres um novo Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}_0$ que produz a massa física M_B do bárion, ao invés da massa não-renormalizada M_B^0 . Assim, definindo a quantidade

$$\delta M = \sum_B (M_B - M_B^0) B^\dagger B, \quad (3.87)$$

vamos trabalhar com os Hamiltonianos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_0 &= \mathcal{H}_0 + \delta M = \sum_B M_B B^\dagger B + \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \omega_k a_{j\ell m}^\dagger(k) a_{j\ell m}(k) \\ \tilde{\mathcal{H}}_I &= \mathcal{H}_I - \delta M = \sum_{BB'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \left(B'^\dagger B a_{j\ell m}(k) v_{j\ell m}^{BB'}(k) + \text{c.h.} \right) - \delta M, \end{aligned} \quad (3.88)$$

e observamos que o Hamiltoniano total permanece invariante, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{H}}_I$. Com estas definições, os auto-estados de $\tilde{\mathcal{H}}_0$ e de \mathcal{H}_0 são os mesmos, mas os seus auto-valores não são iguais,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_0|B\rangle &= M_B|B\rangle \\ \tilde{\mathcal{H}}_0|B, \pi_{j\ell m}(k)\rangle &= (M_B + \omega_k)|B, \pi_{j\ell m}(k)\rangle \\ \tilde{\mathcal{H}}_0|B, \pi_{j\ell m}(k), \pi_{j'\ell'm'}(k')\rangle &= (M_B + \omega_k + \omega'_k)|B, \pi_{j\ell m}(k), \pi_{j'\ell'm'}(k')\rangle. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Na representação de interação, os auto-estados do Hamiltoniano total \mathcal{H} são escritos como combinações lineares dos auto-estados de \mathcal{H}_0 . Assim, o vetor de estado físico de um bárion B assume a forma esquemática

$$|\tilde{\text{B}}\rangle = Z_{\text{B}}^{1/2}|\text{B}\rangle + |\chi\rangle_{\text{B}}, \quad (3.90)$$

onde Z_{B} é a probabilidade de encontrarmos a componente de bárion livre $|\text{B}\rangle$ no vetor de estado físico, e $|\chi\rangle_{\text{B}}$ denota uma série infinita contendo estados com um bárion e um pión, um bárion e dois píons, etc.

O vetor de estado do bárion físico

A equação de auto-valores (3.86) para o Hamiltoniano total também pode ser escrita na forma

$$(\tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{H}}_I)|\tilde{\text{B}}\rangle = M_{\text{B}}|\tilde{\text{B}}\rangle. \quad (3.91)$$

Rearranjando os termos desta equação e usando a expressão (3.90) para o estado bariônico físico, obtemos

$$\tilde{\mathcal{H}}_I|\tilde{\text{B}}\rangle = (M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0)|\tilde{\text{B}}\rangle = (M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0) \left(Z_{\text{B}}^{1/2}|\text{B}\rangle + |\chi\rangle_{\text{B}} \right), \quad (3.92)$$

e sendo $|\text{B}\rangle$ auto-vetor de $\tilde{\mathcal{H}}_0$ com auto-valor M_{B} , chegamos ao resultado

$$\tilde{\mathcal{H}}_I|\tilde{\text{B}}\rangle = (M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0)|\chi\rangle_{\text{B}}. \quad (3.93)$$

A igualdade acima deve ser manipulada com algum cuidado. No lado direito, obviamente não existe nenhuma componente na direção de $|\text{B}\rangle$, pois $|\chi\rangle_{\text{B}}$ é uma combinação linear de estados com um ou mais píons, e o operador $\tilde{\mathcal{H}}_0$ não é capaz de destruir píons. No lado esquerdo, o estado $|\tilde{\text{B}}\rangle$ contém um termo na direção da componente $|\text{B}\rangle$, e o operador $\tilde{\mathcal{H}}_I$ é capaz de destruir píons. Assim, temos vários termos proporcionais ao estado $|\text{B}\rangle$, mas eles cancelam-se mutuamente. De fato, usando (3.93), podemos facilmente obter o resultado

$$\langle \text{B} | \tilde{\mathcal{H}}_I | \tilde{\text{B}} \rangle = 0. \quad (3.94)$$

Como o vetor de estado $|\chi\rangle_{\text{B}}$ é uma combinação linear dos auto-estados de $\tilde{\mathcal{H}}_0$, e como o vetor $\tilde{\mathcal{H}}_I|\tilde{\text{B}}\rangle$ não possui componentes na direção de $|\text{B}\rangle$, o inverso do operador $M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0$ é bem-definido. A partir de (3.93), podemos expressar o vetor de estado $|\chi\rangle_{\text{B}}$ em termos de $|\tilde{\text{B}}\rangle$ na forma

$$|\chi\rangle_{\text{B}} = \frac{1}{M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0} \tilde{\mathcal{H}}_I|\tilde{\text{B}}\rangle. \quad (3.95)$$

Substituindo a expressão acima na definição (3.90) do vetor de estado do bárion físico $|\tilde{\text{B}}\rangle$, obtemos uma equação que envolve $|\tilde{\text{B}}\rangle$ tanto no lado esquerdo como no lado direito,

$$|\tilde{\text{B}}\rangle = Z_{\text{B}}^{1/2}|\text{B}\rangle + \frac{1}{M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0} \tilde{\mathcal{H}}_I|\tilde{\text{B}}\rangle. \quad (3.96)$$

Sabemos que o vetor $\tilde{\mathcal{H}}_I|\tilde{\text{B}}\rangle$ não possui componentes na direção de $|\text{B}\rangle$, e que isto acontece devido ao cancelamento de vários termos. No entanto, estes termos provêm de diferentes ordens na expansão em séries de $|\tilde{\text{B}}\rangle$. Para eliminar estas contribuições espúrias na direção de $|\text{B}\rangle$ em cada ordem na série, vamos introduzir o operador $\Lambda = 1 - |\text{B}\rangle\langle\text{B}|$,

$$|\tilde{\text{B}}\rangle = Z_{\text{B}}^{1/2}|\text{B}\rangle + \frac{1}{M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0} \Lambda \tilde{\mathcal{H}}_I |\tilde{\text{B}}\rangle . \quad (3.97)$$

Iterando esta equação uma vez, ficamos com

$$|\tilde{\text{B}}\rangle = Z_{\text{B}}^{1/2}|\text{B}\rangle + Z_{\text{B}}^{1/2} \frac{1}{M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0} \Lambda \tilde{\mathcal{H}}_I |\text{B}\rangle + \frac{1}{M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0} \Lambda \tilde{\mathcal{H}}_I \frac{1}{M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0} \Lambda \tilde{\mathcal{H}}_I |\tilde{\text{B}}\rangle , \quad (3.98)$$

e, ao aplicarmos sucessivas iterações, geramos a série perturbativa para o vetor $|\tilde{\text{B}}\rangle$. Em primeira ordem, o resultado pode ser lido de (3.98),

$$|\tilde{\text{B}}\rangle = Z_{\text{B}}^{1/2}|\text{B}\rangle + Z_{\text{B}}^{1/2} \frac{1}{M_{\text{B}} - \tilde{\mathcal{H}}_0} \Lambda \tilde{\mathcal{H}}_I |\text{B}\rangle . \quad (3.99)$$

A ação de $\Lambda \tilde{\mathcal{H}}_I$ sobre o vetor $|\text{B}\rangle$ pode ser trabalhada no seguinte modo,

$$\Lambda \tilde{\mathcal{H}}_I |\text{B}\rangle = \Lambda (\mathcal{H}_I - \delta M) |\text{B}\rangle = \Lambda \mathcal{H}_I |\text{B}\rangle = \mathcal{H}_I |\text{B}\rangle , \quad (3.100)$$

e agora podemos sentir a utilidade do operador Λ : o vetor $\mathcal{H}_I |\text{B}\rangle$ não possui componentes na direção de $|\text{B}\rangle$, pois é formado por estados de um bárion e um pión, e a contribuição espúria $\delta M |\text{B}\rangle$ na direção de $|\text{B}\rangle$ foi eliminada. Usando a expressão (3.73) para \mathcal{H}_I , obtemos

$$\mathcal{H}_I |\text{B}\rangle = \sum_{\text{B}'} \sum_{j\ell m} \int dk v_{j\ell m}^{\text{BB}'\dagger}(k) |\text{B}', \pi_{j\ell m}(k)\rangle , \quad (3.101)$$

de modo que o vetor de estado do bárion físico fica sendo dado em primeira ordem por

$$|\tilde{\text{B}}\rangle = Z_{\text{B}}^{1/2}|\text{B}\rangle - Z_{\text{B}}^{1/2} \sum_{\text{B}'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{\text{BB}'\dagger}(k)}{M_{\text{B}'} + \omega_k - M_{\text{B}}} |\text{B}', \pi_{j\ell m}(k)\rangle . \quad (3.102)$$

O valor de Z_{B} é determinado pela condição de normalização dos estados físicos,

$$\langle \tilde{\text{B}} | \tilde{\text{B}}' \rangle = \delta_{\text{BB}'} . \quad (3.103)$$

Utilizando também as condições de normalização (3.66) e (3.70) dos estados de bárion e pión não-perturbados, Z_{B} é dada em primeira ordem por

$$Z_{\text{B}}^{-1} = 1 + \sum_{\text{B}'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{\text{BB}'}(k) v_{j\ell m}^{\text{BB}'\dagger}(k)}{(M_{\text{B}'} + \omega_k - M_{\text{B}})^2} . \quad (3.104)$$

A série (3.98) pode ser interpretada em termos de diagramas de Feynman. Na figura 3.1, mostramos os diagramas correspondentes à primeira ordem na interação.

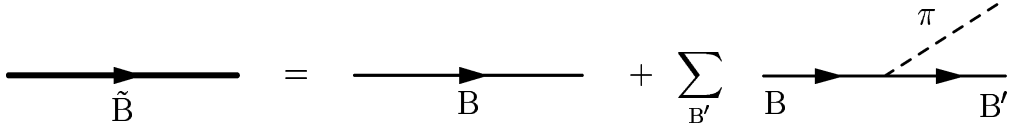


Figura 3.1: Renormalização da função de onda.

A massa do bárion físico

A massa física da sacola M_B é determinada a partir do resultado (3.94),

$$\langle B | \tilde{\mathcal{H}}_I | \tilde{B} \rangle = \langle B | \mathcal{H}_I - \delta M_B | \tilde{B} \rangle = 0, \quad (3.105)$$

que implica em $(M_B - M_B^0) \langle B | \tilde{B} \rangle = \langle B | \mathcal{H}_I | \tilde{B} \rangle$, que pode ser escrito como

$$M_B = M_B^0 + Z_B^{-1/2} \langle B | \mathcal{H}_I | \tilde{B} \rangle. \quad (3.106)$$

Para o cálculo em primeira ordem, podemos utilizar a fórmula (3.102) para o vetor de estado físico do bárion, obtendo

$$M_B = M_B^0 + \langle B | \mathcal{H}_I | B \rangle - \sum_{B'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k)}{M_{B'} + \omega_k - M_B} \langle B | \mathcal{H}_I | B', \pi_{j\ell m}(k) \rangle. \quad (3.107)$$

O segundo termo nesta expressão é nulo, pois o Hamiltoniano \mathcal{H}_I somente conecta estados que difiram em uma unidade no número de píons. Usando a expressão (3.73) para \mathcal{H}_I , vemos facilmente que

$$\langle B | \mathcal{H}_I | B', \pi_{j\ell m}(k) \rangle = v_{j\ell m}^{BB'}(k), \quad (3.108)$$

de modo que a massa física do bárion fica sendo dada em primeira ordem por

$$M_B = M_B^0 - \sum_{B'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{BB'}(k) v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k)}{M_{B'} + \omega_k - M_B}. \quad (3.109)$$

Definindo a correção piônica para a massa de um bárion como $\Delta E_{\pi B} = M_B - M_B^0$, temos

$$\Delta E_{\pi B} = - \sum_{B'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{BB'}(k) v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k)}{M_{B'} + \omega_k - M_B}. \quad (3.110)$$

O diagrama de Feynman que corresponde à série perturbativa para a auto-energia, em primeira ordem, é apresentado na figura 3.2.

Resultados para o octeto bariônico fundamental

Vejamos agora quais são os efeitos da troca de um pión levando-se em conta somente os bárions do octeto fundamental. Como a troca de píons não altera a estranheza dos bárions, e como os estados bariônicos não-perturbados são degenerados, $M_{B'} = M_B$,

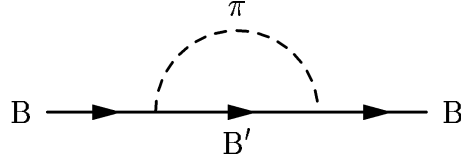


Figura 3.2: Diagrama de Feynman para o cálculo da auto-energia de um bárion.

podemos simplificar as fórmulas (3.102) para o vetor de estado bariônico, (3.104) para a constante Z_B e (3.110) para a correção piônica para a massa de um bárion,

$$\begin{aligned}
|\tilde{B}\rangle &= Z_B^{1/2} |B\rangle - Z_B^{1/2} \sum_{B'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k)}{\omega_k} |B', \pi_{j\ell m}(k)\rangle \\
Z_B^{-1} &= 1 + \sum_{B'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{BB'}(k) v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k)}{\omega_k^2} \\
\Delta E_{\pi B} &= - \sum_{B'} \sum_{j\ell m} \int_0^\infty dk \frac{v_{j\ell m}^{BB'}(k) v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k)}{\omega_k},
\end{aligned} \tag{3.111}$$

sendo a função de vértice $v_{j\ell m}^{BB'}(k)$ definida em (3.83). Para obtermos os valores esperados $\langle B' | \sum_q \sigma_{mq}^\dagger \tau_{jq}^\dagger | B \rangle$, notamos primeiramente que, para o núcleon, um cálculo explícito conduz ao resultado

$$\langle N | \sum_q \sigma_{mq}^\dagger \tau_{jq}^\dagger | N \rangle = \frac{5}{3} \langle N | \sigma_m \tau_j | N \rangle, \tag{3.112}$$

onde no lado esquerdo desta equação o núcleon é visto como uma partícula composta por quarks e, no lado direito, como uma partícula elementar. Usando a relação de Goldberger-Treiman, que relaciona a constante de decaimento do pión $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ com a constante de acoplamento axial $g_A = 1.2573$, a massa do núcleon M_N e a constante de acoplamento pión-núcleon $g_{NN\pi}^2/4\pi = 14.1$,

$$M_N g_A = g_{NN\pi} f_\pi, \tag{3.113}$$

e usando a relação entre as constantes de acoplamento pión-núcleon e $f_{NN\pi}^2 = 0.08$,

$$\frac{g_{NN\pi}}{2M_N} = \frac{\sqrt{4\pi} f_{NN\pi}}{m_\pi}, \tag{3.114}$$

podemos obter a relação aproximada

$$\frac{1}{f_\pi} = \frac{2\sqrt{4\pi} f_{NN\pi}}{m_\pi g_A}. \tag{3.115}$$

Deste modo, vemos que

$$\frac{\langle N | \sum_q \sigma_{mq}^\dagger \tau_{jq}^\dagger | N \rangle}{f_\pi} = \frac{5}{3} \frac{2\sqrt{4\pi} f_{NN\pi}}{m_\pi g_A} \langle N | \sigma_m \tau_j | N \rangle. \tag{3.116}$$

Seguindo a literatura [30, 31], generalizamos esta equação para quaisquer estados bárionicos, obtendo

$$\frac{\langle B' | \sum_q \sigma_{mq}^\dagger \tau_{jq}^\dagger | B \rangle}{f_\pi} \longrightarrow \frac{5}{3} \frac{2\sqrt{4\pi} f_{BB'\pi}}{m_\pi g_A} \langle B' | \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{T}_j^\dagger | B \rangle. \quad (3.117)$$

As constantes $f_{BB'\pi}$ são definidas pela equação acima, sendo chamadas de constantes de acoplamento do $SU(6)$, e seus valores [30, 31] estão na tabela 3.3. No lado esquerdo da equação acima, o bárion é visto como uma partícula composta por quarks e, no lado direito, como uma partícula elementar. As matrizes \mathcal{S}_m e \mathcal{T}_j que aparecem no lado direito são matrizes de spin de Pauli usuais se $B' = B$ e, se $B' \neq B$, são matrizes de spin de transição. A expressão (3.83) para a função de vértice passa a ser escrita como

$$v_{j\ell m}^{BB'}(k) = \frac{20}{3\sqrt{3\pi}} \frac{f_{BB'\pi}}{m_\pi g_A} \frac{\delta_{\ell 1} k}{\sqrt{\omega_k}} \langle B' | \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{T}_j^\dagger | B \rangle \int_{R_0}^{R_1} dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \mathcal{R}_k(r) g(r) f(r). \quad (3.118)$$

Para trabalharmos mais explicitamente a dependência de $v_{j\ell m}^{BB'}(k)$ em relação a cada bárion, é conveniente definir uma nova função de vértice $v(k)$ na forma

$$v_{j\ell m}^{BB'}(k) = \delta_{\ell 1} \langle B' | \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{T}_j^\dagger | B \rangle f_{BB'\pi} \frac{k}{\sqrt{\omega_k}} v(k), \quad (3.119)$$

com $v(k)$ sendo dado por

$$v(k) = \frac{20}{3\sqrt{3\pi} m_\pi g_A} \int_{R_0}^{R_1} dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \mathcal{R}_k(r) g(r) f(r). \quad (3.120)$$

Deste modo, percebendo que

$$\sum_{j\ell m} v_{j\ell m}^{BB'\dagger}(k) v_{j\ell m}^{BB'}(k) = \left(\sum_{mj} \langle B | \mathcal{S}_m \mathcal{T}_j | B' \rangle \langle B' | \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{T}_j^\dagger | B \rangle \right) f_{BB'\pi}^2 \frac{k^2}{\omega_k} v^2(k), \quad (3.121)$$

podemos expressar a constante Z_B e a correção piónica para a massa de um bárion dadas em (3.111) como

$$\begin{aligned} Z_B^{-1} &= 1 + \sum_{B'} C_{BB'} f_{BB'\pi}^2 \int_0^\infty dk \frac{k^2 v^2(k)}{\omega_k^3} \\ \Delta E_{\pi B} &= - \sum_{B'} C_{BB'} f_{BB'\pi}^2 \int_0^\infty dk \frac{k^2 v^2(k)}{\omega_k^2}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

sendo os coeficientes $C_{BB'}$ definidos por

$$C_{BB'} = \sum_{jm} \langle B | \mathcal{S}_m \mathcal{T}_j | B' \rangle \langle B' | \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{T}_j^\dagger | B \rangle. \quad (3.123)$$

Os valores de $C_{BB'}$ para as combinações relevantes de B e B' são dados na tabela 3.3. Introduzindo as integrais

| BB' | $f_{BB'\pi}/f_{NN\pi}$ | $C_{BB'}$ |
|--------------------|------------------------|-----------|
| NN | 1 | 9 |
| N Δ | $6\sqrt{2}/5$ | 4 |
| Δ N | $6\sqrt{2}/5$ | 1 |
| $\Delta\Delta$ | 1/5 | 225 |
| $\Lambda\Lambda$ | 0 | 0 |
| $\Lambda\Sigma$ | $-2\sqrt{3}/5$ | 9 |
| $\Sigma\Lambda$ | $-2\sqrt{3}/5$ | 3 |
| $\Sigma\Sigma$ | 4/5 | 6 |
| $\Lambda\Sigma^*$ | -6/5 | 6 |
| $\Sigma^*\Lambda$ | -6/5 | 1 |
| $\Sigma\Sigma^*$ | $-2\sqrt{3}/5$ | 4 |
| $\Sigma^*\Sigma$ | $-2\sqrt{3}/5$ | 2 |
| $\Sigma^*\Sigma^*$ | 2/5 | 30 |
| $\Xi\Xi$ | -1/5 | 9 |
| $\Xi\Xi^*$ | $-2\sqrt{3}/5$ | 6 |
| $\Xi^*\Xi$ | $-2\sqrt{3}/5$ | 3 |
| $\Xi^*\Xi^*$ | 1/5 | 45 |

Tabela 3.2: Constantes de acoplamento $f_{BB'\pi}$ e coeficientes $C_{BB'}$ para vários bárions.

$$Z_\pi = \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^3} \quad \delta_\pi = \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^2}, \quad (3.124)$$

e a constante C_B ,

$$C_B f_{NN\pi}^2 = \sum_{B'} C_{BB'} f_{BB'\pi}^2, \quad (3.125)$$

obtemos

$$Z_B^{-1} = 1 + Z_\pi f_{NN\pi}^2 C_B \quad \Delta E_{\pi B} = -\delta_\pi f_{NN\pi}^2 C_B. \quad (3.126)$$

Os valores de C_B podem ser encontrados na tabela 3.3.

| bárion | N | Δ | Λ | Σ | Σ^* | Ξ | Ξ^* | Ω^- |
|--------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|------------|
| C_B | $\frac{513}{25}$ | $\frac{297}{25}$ | $\frac{324}{25}$ | $\frac{180}{25}$ | $\frac{180}{25}$ | $\frac{81}{25}$ | $\frac{81}{25}$ | 0 |

Tabela 3.3: Coeficientes C_B para a correção de troca de um pión.

Levantamento de degenerescências

As equações (3.126) fornecem a correção da troca de um pión para as massas dos bárions do octeto fundamental. Esta correção também depende da função de onda no espaço de

sabor e spin de cada bárion, como é o caso da correção devida à troca de um glúon, mas as degenerescências não são levantadas completamente, já que $C_\Sigma = C_{\Sigma^*}$ e $C_\Xi = C_{\Xi^*}$, e portanto $\Delta E_{\pi\Sigma} = \Delta E_{\pi\Sigma^*}$ e $\Delta E_{\pi\Xi} = \Delta E_{\pi\Xi^*}$. É claro que, ao incluímos tanto a correção da troca de um pión como a correção da troca de um glúon, nenhuma degenerescência restará entre as massas dos bárions do octeto fundamental.

O vetor de estado do bárion físico, novamente

Com a redefinição (3.119) da função de vértice, o vetor de estado de um bárion físico dado por (3.102) passa a ser escrito como

$$|\tilde{B}\rangle = Z_B^{1/2} |B\rangle - Z_B^{1/2} \sum_{jmB'} \langle B' | \mathcal{S}_m \mathcal{T}_j | B \rangle f_{BB'\pi} \int_0^\infty dk \frac{k v(k)}{\omega_k^{3/2}} |B', \pi_{j1m}(k)\rangle. \quad (3.127)$$

Tendo em vista os cálculos a serem feitos no capítulo seguinte, é útil escrever explicitamente os vetores de estado físico para o próton e para o nêutron. Para o próton, temos

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_\uparrow\rangle = & Z_N^{1/2} |p_\uparrow\rangle - Z_N^{1/2} f_{NN\pi} \int_0^\infty dk \frac{k v(k)}{\omega_k^{3/2}} \left(|p_\uparrow, \pi_0^0(k)\rangle + \sqrt{2} |p_\downarrow, \pi_1^0(k)\rangle \right. \\ & \left. + \sqrt{2} |n_\uparrow, \pi_0^+(k)\rangle + 2 |n_\downarrow, \pi_1^+(k)\rangle \right) \\ & - Z_N^{1/2} f_{N\Delta\pi} \int_0^\infty dk \frac{k v(k)}{\omega_k^{3/2}} \left(|\Delta_{3/2}^{++}, \pi_{-1}^-(k)\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |\Delta_{1/2}^{++}, \pi_0^-(k)\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{-1/2}^{++}, \pi_1^-(k)\rangle \right. \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |\Delta_{3/2}^+, \pi_{-1}^0(k)\rangle + \frac{2}{3} |\Delta_{1/2}^+, \pi_0^0(k)\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} |\Delta_{-1/2}^+, \pi_1^0(k)\rangle \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{3/2}^0, \pi_{-1}^+(k)\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} |\Delta_{1/2}^0, \pi_0^+(k)\rangle + \frac{1}{3} |\Delta_{-1/2}^0, \pi_1^+(k)\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.128)$$

e, para o nêutron,

$$\begin{aligned} |\tilde{n}_\uparrow\rangle = & Z_N^{1/2} |n_\uparrow\rangle - Z_N^{1/2} f_{NN\pi} \int_0^\infty dk \frac{k v(k)}{\omega_k^{3/2}} \left(-\sqrt{2} |p_\uparrow, \pi_0^-(k)\rangle - 2 |p_\downarrow, \pi_1^-(k)\rangle \right. \\ & \left. - |n_\uparrow, \pi_0^0(k)\rangle - \sqrt{2} |n_\downarrow, \pi_1^0(k)\rangle \right) \\ & - Z_N^{1/2} f_{N\Delta\pi} \int_0^\infty dk \frac{k v(k)}{\omega_k^{3/2}} \left(+\frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{3/2}^+, \pi_{-1}^-(k)\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} |\Delta_{1/2}^+, \pi_0^-(k)\rangle + \frac{1}{3} |\Delta_{-1/2}^+, \pi_1^-(k)\rangle \right. \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |\Delta_{3/2}^0, \pi_{-1}^0(k)\rangle + \frac{2}{3} |\Delta_{1/2}^0, \pi_0^0(k)\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} |\Delta_{-1/2}^0, \pi_1^0(k)\rangle \\ & \left. + |\Delta_{3/2}^-, \pi_{-1}^+(k)\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |\Delta_{1/2}^-, \pi_0^+(k)\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{-1/2}^-, \pi_1^+(k)\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.129)$$

O fator de normalização Z_N pode ser calculado diretamente a partir dos vetores de estado acima ou a partir da fórmula (3.126), com o resultado

$$Z_N^{-1} = 1 + 9 f_{NN\pi}^2 Z_\pi + 4 f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi = 1 + \frac{513}{25} f_{NN\pi}^2 Z_\pi. \quad (3.130)$$

Capítulo 4

Propriedades do núcleon

Considerando-se as propriedades físicas dos bárions “leves”, entre as mais facilmente determinadas pela via experimental encontram-se a massa, o spin, o isospin e a estranheza. Estas são também as propriedades que identificam univocamente um bárion. Nos modelos de sacola e de potencial relativístico, o spin de um bárion é carregado completamente pelos quarks, de modo que o spin total do bárion é obtido corretamente ao utilizarmos funções de onda apropriadas. A mesma consideração vale para o isospin e a estranheza. Deste modo, a determinação da massa dos bárions passa a ser o objetivo principal dos modelos bariônicos, já que é uma propriedade dinâmica e portanto depende do modelo considerado. No modelo que desenvolvemos, a massa de um bárion foi obtida primeiramente no capítulo 1, sendo no capítulo 3 calculados três tipos de correção para a fórmula da massa.

É claro que um modelo hadrônico não deve limitar-se somente ao cálculo de massas. Outras propriedades físicas também são de interesse primordial. De maneira bastante ampla, podemos classificar as propriedades bariônicas em dois grandes grupos: as propriedades intrínsecas e as propriedades de interação. As propriedades intrínsecas de um bárion são aquelas que dependem somente do bárion em questão, como o seu tamanho, distribuição de carga elétrica, momento magnético, fatores de forma, etc. Em geral, para o cálculo destas propriedades pode-se considerar que o bárion está fixo em uma posição do espaço, e por isto estas propriedades são chamadas na literatura de propriedades estáticas. As propriedades de interação envolvem os diversos modos de decaimento de cada bárion, assim como as interações com outros bárions.

Em geral, nos modelos de sacola e de potencial relativístico, as propriedades estáticas são mais fáceis de serem calculadas do que as propriedades dinâmicas. Além disso, as primeiras são determinadas experimentalmente com muito maior precisão do que as segundas. Mais ainda, entre todos os bárions, aquele que tem suas propriedades físicas mais bem determinadas é o próton, vindo logo após o seu companheiro de isospin, o nêutron. Neste capítulo portanto, fixamos nossa atenção nas propriedades estáticas do núcleon.

Na primeira seção fazemos uma abordagem inicial ao cálculo do raio quadrático médio do próton e do nêutron. Na segunda seção calculamos o fator de forma da interação pión-

núcleon, sendo na terceira seção calculado o fator de forma axial do núcleon. Na quarta e última seção deste capítulo, calculamos os fatores de forma eletromagnéticos do próton e do nêutron.

4.1 Raio de carga do núcleon

Segundo o modelo de quarks, os bárions não são partículas elementares, pontuais, mas são compostos por quarks. É natural então que queira-se determinar o tamanho aproximado destas partículas. Uma medida para o tamanho aproximado de um sistema quântico é o raio quadrático médio deste sistema. O raio quadrático médio, por sua vez, está bastante relacionado com a distribuição de carga elétrica dentro do bárion, e o que é determinado experimentalmente é o raio quadrático médio desta distribuição de carga, também chamado de raio de carga. Considerando-se que o vetor de estado de um bárion seja descrito por somente uma sacola (correspondendo a uma partícula nua), o raio de carga do bárion é definido pela expressão

$$r_B^2 = \sum_q e_q \langle r_q^2 \rangle, \quad (4.1)$$

onde e_q e $\langle r_q^2 \rangle$ são respectivamente a carga elétrica e o raio quadrático médio de um dos quarks e o somatório é feito sobre todos os quarks que constituem o bárion. Como estaremos interessados em calcular o raio quadrático médio do próton e do nêutron, podemos assumir desde já que todos os quarks estão no estado fundamental e têm a mesma massa. Com isto, o valor de $\langle r_q^2 \rangle$ é igual para todos os quarks, e podemos escrever

$$r_B^2 = \left(\sum_q e_q \right) \langle r_q^2 \rangle = e_B \langle r^2 \rangle, \quad (4.2)$$

onde e_B é a carga elétrica do bárion. Vemos assim que o raio de carga de um bárion está diretamente relacionado com o raio quadrático médio da função de onda de um quark no estado fundamental, que é definido como

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}) r^2 \psi(\vec{r}). \quad (4.3)$$

A integral acima foi calculada na seção 1.10 para o caso geral em que, em vez de r^2 , temos r^n no integrando. Colocando-se então $n = 2$ na fórmula (1.97), que refere-se ao caso geral, obtemos

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2}{E' + m'} \int_0^{R_1} dr r^2 u^2(r) [E' - V_c(r)] + \frac{3}{(E' + m')^2} \int_0^{R_1} dr u^2(r). \quad (4.4)$$

Para $r \leq R_0$ podemos fazer o cálculo analiticamente, mas para $r > R_0$ o cálculo deve ser feito numericamente. A expressão final para o raio quadrático médio de um quark no

estado fundamental pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle &= \frac{E' R_0^3 N_1^2}{E' + m'} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2aR_0^2} + \frac{\cos(\sqrt{a}R_0) \operatorname{sen}(\sqrt{a}R_0)}{\sqrt{a}R_0} \left(\frac{1}{2aR_0^2} - 1 \right) - \frac{\cos^2(\sqrt{a}R_0)}{aR_0^2} \right] \\
&+ \frac{3 R_0 N_1^2}{2(E' + m')^2} \left[1 - \frac{\cos(\sqrt{a}R_0) \operatorname{sen}(\sqrt{a}R_0)}{\sqrt{a}R_0} \right] \\
&+ \frac{2}{E' + m'} \int_{R_0}^{R_1} dr r^2 u^2(r) [E' - V_c(r)] + \frac{3}{(E' + m')^2} \int_{R_0}^{R_1} dr u^2(r) .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Usando as expressões (3.128) e (3.129) para as funções de onda renormalizadas do próton e do nêutron respectivamente, podemos calcular o raio de carga destas partículas. Para o próton, vemos que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{p} | r_B^2 | \tilde{p} \rangle &= Z_N \langle p | r_B^2 | p \rangle + Z_N f_{NN\pi}^2 Z_\pi [3 \langle p | r_B^2 | p \rangle + 6 \langle n | r_B^2 | n \rangle] \\
&+ Z_N f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi \left[2 \langle \Delta^{++} | r_B^2 | \Delta^{++} \rangle + \frac{4}{3} \langle \Delta^+ | r_B^2 | \Delta^+ \rangle + \frac{2}{3} \langle \Delta^0 | r_B^2 | \Delta^0 \rangle \right] \\
&= Z_N \langle r_u^2 \rangle + 3 Z_N f_{NN\pi}^2 Z_\pi \langle r_u^2 \rangle + \frac{16}{3} Z_N f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi \langle r_u^2 \rangle \\
&= Z_N \langle r_u^2 \rangle \left(1 + \frac{459}{25} f_{NN\pi}^2 Z_\pi \right) .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde Z_π é dado por (3.124), Z_N é determinado pela normalização do estado físico (3.130), e $\langle r_u^2 \rangle$ é o raio quadrático médio da função de onda dos quarks u e d . Para o nêutron, temos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{n} | r_B^2 | \tilde{n} \rangle &= Z_N \langle n | r_B^2 | n \rangle + Z_N f_{NN\pi}^2 Z_\pi [6 \langle p | r_B^2 | p \rangle + 3 \langle n | r_B^2 | n \rangle] \\
&+ Z_N f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi \left[\frac{2}{3} \langle \Delta^+ | r_B^2 | \Delta^+ \rangle + \frac{4}{3} \langle \Delta^0 | r_B^2 | \Delta^0 \rangle + 2 \langle \Delta^- | r_B^2 | \Delta^- \rangle \right] \\
&= 6 Z_N f_{NN\pi}^2 Z_\pi \langle r_u^2 \rangle - \frac{4}{3} Z_N f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi \langle r_u^2 \rangle \\
&= \frac{54}{25} Z_N f_{NN\pi}^2 Z_\pi \langle r_u^2 \rangle .
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Note-se que, ao levarmos em conta o valor de Z_N calculado em (3.130), vemos que a expressão (4.6) para o raio do próton é sempre menor que o valor não-renormalizado, que é $\langle r_u^2 \rangle$. Para o nêutron, o valor não-renormalizado é nulo, e o efeito da renormalização é tornar o raio de carga um pouco maior do que zero.

Os cálculos acima supõem que o fóton no espalhamento elétron-núcleon interaja somente com os quarks. Mas o fóton também pode interagir com a nuvem piônica ao redor do núcleon. A maneira mais adequada de quantificar-se os efeitos desta interação é através de fatores de forma, e isto será visto na seção 4.4.

4.2 Fator de forma da interação píon-núcleon

A interação píon-núcleon pode ser vista de maneira simples tratando-se o píon e o núcleon como partículas elementares e supondo-se que o acoplamento seja do tipo Yukawa. Esta interação seria descrita pelo primeiro diagrama de Feynman na figura 4.1. A densidade Lagrangeana correspondente pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}_N \gamma^\mu \partial_\mu \psi_N - \partial_\mu \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi_N) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} - m_\pi^2 \vec{\phi}^2) - i g_{\pi NN} \bar{\psi}_N \gamma_5 \vec{\tau}_N \cdot \vec{\phi} \psi_N \quad (4.8)$$

onde $g_{\pi NN}$ é a constante de acoplamento da interação píon-núcleon e o fator i no termo de acoplamento garante a hermiticidade de \mathcal{L} .

Na figura 4.1 vemos que outros diagramas também contribuem para a interação píon-núcleon. Isto se deve às flutuações quânticas da função de onda, em que, por exemplo, um próton passa momentaneamente para um estado de um nêutron e um píon ou para um estado de uma ressonância Δ e um píon.

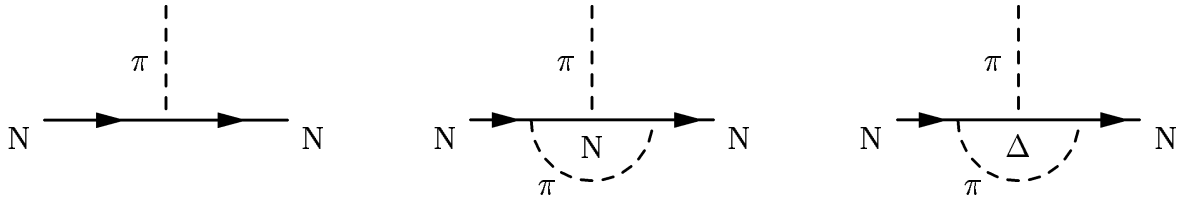


Figura 4.1: O acoplamento entre núcleons e píons elementares.

Estas flutuações quânticas não são detectadas experimentalmente. No laboratório, observa-se um núcleon no estado inicial e um núcleon no estado final; o que acontece durante a interação não é passível de medição. Entretanto, píons com momenta diferentes irão acessar componentes diferentes da função de onda do núcleon, e portanto irão interagir de maneira diferente com ele. Sob o ponto de vista experimental, o efeito observável das flutuações quânticas é como se, para cada valor do quadri-momento q do píon, a constante de acoplamento $g_{\pi NN}$ tivesse um valor diferente.

Deste modo, sob o ponto de vista experimental, a interação píon-núcleon acontece como na figura 4.2, onde temos um núcleon no estado inicial, um núcleon no estado final e nenhuma flutuação quântica. No entanto, a constante de acoplamento depende do quadri-momento q do píon, o que é simbolizado pela bola no vértice do diagrama de Feynman. A densidade Lagrangeana que descreve esta interação é idêntica à expressão (4.8), com a ressalva de que a constante de acoplamento $g_{\pi NN}$ é substituída pelo fator de forma $g_{\pi NN}(q^2)$. Dito de maneira mais explícita, o fator de forma $g_{\pi NN}(q^2)$ é o valor da constante de acoplamento $g_{\pi NN}$ para um determinado valor do quadri-momento q do píon.

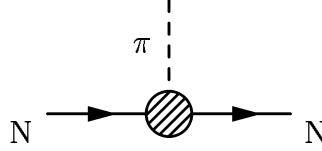


Figura 4.2: O fator de forma para o acoplamento entre núcleons e píons elementares.

No modelo de quarks, o fator de forma $g_{\pi NN}(q^2)$ é resultado não somente das flutuações quânticas da função de onda do núcleon, como também da sua própria estrutura interna de quarks. O núcleon passa a ser visto como uma partícula composta, de tamanho finito, e píons com momenta diferentes irão explorar regiões diferentes de seu interior, acarretando efetivamente numa variação da constante de acoplamento $g_{\pi NN}$ em relação ao quadri-momento q . Nesta descrição do núcleon, o píon interage diretamente com os quarks, como pode ser visto na figura 4.3.

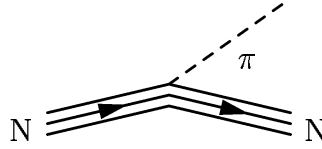


Figura 4.3: O fator de forma para o acoplamento entre núcleons e píons elementares.

Na seção 5.7 de nossa dissertação de Mestrado [11], mostramos a derivação completa da fórmula para o fator de forma $g_{\pi NN}(q^2)$. Resumidamente, o que fizemos foi seguir o procedimento padrão [32] e obter o fator de forma $g_{\pi NN}(q^2)$ exigindo que o valor esperado do Hamiltoniano de interação píon-núcleon $\langle N|H_I|N' \rangle$ tenha o mesmo valor quando calculado de duas formas: (i) entre estados de núcleon elementares e (ii) entre estados de núcleon compostos por quarks. Quando o elemento de matriz $\langle N|H_I|N' \rangle$ é calculado entre estados de núcleon elementares, o Hamiltoniano de interação é dado basicamente pelo termo de Yukawa,

$$H_I = i g_{\pi NN} \int d^3r \bar{\psi}_N \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi} \psi_N . \quad (4.9)$$

Quando o elemento de matriz é calculado entre estados de núcleon compostos por quarks, o Hamiltoniano de interação é obtido a partir do Lagrangeano de interação (2.31),

$$H_I = -\frac{i}{f_\pi} \sum_q \int d^3r \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} \bar{\psi}_q \gamma_5 \vec{\tau}_q \cdot \vec{\pi} \psi_q , \quad (4.10)$$

onde a soma é feita sobre todos os quarks com sabor u ou d . Comparando os elementos de matriz $\langle N|H_I|N' \rangle$ para os dois Hamiltonianos acima com estados de núcleon apropriados,

pode-se mostrar [11] que o fator de forma de interação píon-núcleon é dado por

$$g_{\pi\text{NN}}(q^2) = -\frac{20 M_N}{3 f_\pi q} \int_0^\infty dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} g(r) f(r) \mathcal{R}_q(r). \quad (4.11)$$

Uma maneira de conferir que a expressão acima está correta é compará-la com a expressão usual [32, 33] para $g_{\pi\text{NN}}(q^2)$. Fazendo a função de supressão, $F_\pi(r)$, tender a 1, o potencial para o campo piônico tenderá a 0, e a função de onda do campo piônico tenderá à função de onda do campo livre normalizada. Neste caso, a expressão para $g_{\pi\text{NN}}(q^2)$ toma a forma usual,

$$g_{\pi\text{NN}}(q^2) = -\frac{20 M_N}{3 f_\pi q} \int_0^\infty dr r^2 [m_u + V(r)] g(r) f(r) j_1(qr). \quad (4.12)$$

É interessante notar a semelhança da fórmula (4.11) com a expressão para a função de vértice dada por (3.120). Vemos então que o fator de forma da interação píon-núcleon é proporcional à função de vértice,

$$g_{\pi\text{NN}}(q^2) = -\frac{\sqrt{3\pi} m_\pi g_A M_N}{f_\pi q} v(q). \quad (4.13)$$

Constante de acoplamento píon-núcleon

O fator de forma $g_{\pi\text{NN}}(q^2)$ fornece a constante de acoplamento píon-núcleon em função do quadri-momento do píon, q^2 . Quando o píon está na camada de massa, ou seja, quando o píon é real, temos $q^2 = m_\pi^2$. O valor de $g_{\pi\text{NN}}(m_\pi^2)$ fornece, então, o valor da constante de acoplamento píon-núcleon, $g_{\pi\text{NN}}$. Formalmente, $g_{\pi\text{NN}}$ é definida por

$$g_{\pi\text{NN}} = g_{\pi\text{NN}}(m_\pi^2). \quad (4.14)$$

No entanto, é usual na literatura calcular-se a constante de acoplamento píon-núcleon através da aproximação $g_{\pi\text{NN}} = g_{\pi\text{NN}}(0)$. Lembrando que para valores pequenos de q temos $j_1(qr) \approx qr/3$, a fórmula (4.12) implica em

$$g_{\pi\text{NN}}(0) = -\frac{20 M_N}{9 f_\pi} \int_0^\infty dr r^3 [m_u + V(r)] g(r) f(r). \quad (4.15)$$

O valor experimental da constante de acoplamento da interação píon-núcleon é dado por [34]

$$\frac{g_{\pi\text{NN}}^2}{4\pi} = 14.1. \quad (4.16)$$

4.3 Fator de forma axial do núcleon

Os fatores de forma da corrente axial para o núcleon são de suma importância para a interação fraca e para a interação pión-núcleon. A corrente axial $A_\mu^i(x)$ transforma-se como um vetor nos índices de isospin e como pseudo-vetor nos índices de Lorentz. Tomando o elemento de matriz da corrente axial entre estados de núcleon livres e elementares, temos

$$\langle N(p', s') | A_\mu^i(0) | N(p, s) \rangle = \bar{u}_{s'}(p') \left[g_A(q^2) \gamma_\mu + \frac{g_P(q^2)}{2 M_N} q_\mu + \frac{g_T(q^2)}{2 M_N} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \gamma_5 \frac{\tau^i}{2} u_s(p). \quad (4.17)$$

Esta é a forma mais geral possível para este elemento de matriz. Aqui, $u_s(p)$ é a função de onda plana de um núcleon com quadri-momento p e projeção de spin s e $q = p' - p$ é o quadri-momento transferido. Vemos três fatores de forma sendo definidos, correspondentes às três únicas combinações que fornecem um iso-vetor pseudo-vetor com espinores de Dirac: $g_A(q^2)$ é o fator de forma axial, $g_P(q^2)$ é o fator de forma pseudo-escalar induzido e $g_T(q^2)$ é o fator de forma pseudo-tensorial induzido. Em termos de diagramas de Feynman, o elemento de matriz (4.17) corresponde à figura 4.4, onde não interessa como a corrente axial foi gerada, e leva-se em conta apenas a sua interação com o núcleon.

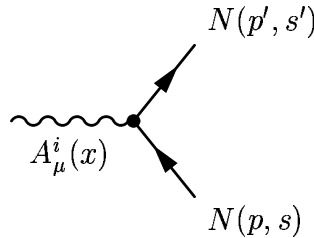


Figura 4.4: Interação de uma corrente axial com o núcleon.

Fator de forma axial

O fator de forma axial aparece em processos de baixa energia que envolvem a corrente axial bariônica, como por exemplo no decaimento β do núcleon na figura 4.5. Nesta figura, a bola cheia representa todos os diagramas de Feynman possíveis para o decaimento β , sendo os dois diagramas de mais baixa ordem apresentados no lado direito da igualdade. O fator de forma axial $g_A(q^2)$ é uma parametrização de todos estes diagramas.

No modelo de quarks, o nêutron e o próton são partículas compostas, e neste caso são os próprios quarks que sofrem o decaimento β . O fator de forma axial é determinado por diagramas análogos aos da figura 4.5, sendo os diagramas de mais baixa ordem apresentados na figura 4.6.

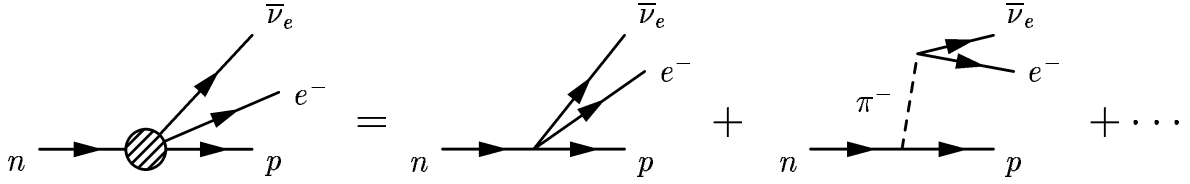


Figura 4.5: O decaimento β do nêutron.

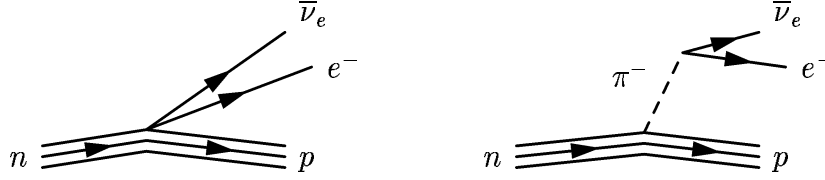


Figura 4.6: Decaimento β segundo o modelo de quarks.

O fator de forma $g_A(q^2)$ é definido pelo requerimento de que o valor esperado da corrente axial do núcleon entre estados de partícula elementar,

$$\vec{j}_{A,N}^\mu(q) = g_A(q^2) \bar{\psi}_N \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\vec{\tau}_N}{2} \psi_N, \quad (4.18)$$

seja igual ao valor esperado da corrente axial entre estados do núcleon constituídos por quarks,

$$\vec{j}_{A,N}^\mu(q) = \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left[\sum_q \vec{j}_{A,q}^\mu(\vec{r}) + \vec{j}_{A,\pi}^\mu(\vec{r}) \right]. \quad (4.19)$$

Nesta expressão, $\vec{j}_{A,q}^\mu(\vec{r})$ e $\vec{j}_{A,\pi}^\mu(\vec{r})$ são respectivamente as contribuições dos quarks e dos píons para a corrente axial total carregada pelo núcleon. Nos modelos de sacola, ambas estas correntes são determinadas como função da posição \vec{r} , por isso devemos tomar a transformada de Fourier, como foi feito acima. Tomando-se o valor esperado de (4.18) e (4.19) entre estados apropriados do núcleon, vemos que

$$\langle N | \sigma_N^i \frac{\vec{\tau}_N}{2} | N \rangle g_A(q^2) = \langle N | \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left[\sum_q \vec{j}_{A,q}^i(\vec{r}) + \vec{j}_{A,\pi}^i(\vec{r}) \right] | N \rangle. \quad (4.20)$$

Contribuição dos quarks

A contribuição dos quarks para o fator de forma axial do núcleon é descrita no primeiro diagrama de Feynman na figura 4.6. Para calculá-la, vemos que a corrente axial carregada pelos quarks é dada por

$$\vec{j}_{A,q}^i(\vec{r}) = \bar{\psi}_q \gamma^i \gamma_5 \frac{\vec{\tau}_q}{2} \psi_q. \quad (4.21)$$

Usando a expressão (1.38) de duas componentes para a função de onda dos quarks, podemos escrever $\vec{j}_{A,q}^i(\vec{r})$ como

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{A,q}^i(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \left(\phi_1^\dagger, \phi_2^\dagger \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_q^i \\ -\sigma_q^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \vec{\tau}_q \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \phi_1^\dagger \sigma_q^i \vec{\tau}_q \phi_1 + \frac{1}{2} \phi_2^\dagger \sigma_q^i \vec{\tau}_q \phi_2 \\
&= \frac{1}{2} g^2(r) \left[\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) \right]^\dagger \sigma_q^i \mathcal{Y}_{\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) \vec{\tau}_q + \frac{1}{2} f^2(r) \left[\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) \right]^\dagger \sigma_q^i \mathcal{Y}_{\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) \vec{\tau}_q \\
&= \frac{1}{8\pi} \{ g^2(r) + [1 - 2 \text{sen}^2(\theta)] f^2(r) \} \sigma_q^i \vec{\tau}_q,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde deixamos implícitos os graus de liberdade de spin e isospin dos quarks. Colocando a expressão acima em (4.20), vemos que a contribuição dos quarks para o fator de forma axial é

$$\begin{aligned}
\langle N | \sigma_N^i \vec{\tau}_N | N \rangle g_{A,q}(q^2) &= \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \{ g^2(r) + [1 - 2 \text{sen}^2(\theta)] f^2(r) \} \langle N | \sum_q \vec{\sigma}_q \vec{\tau}_q | N \rangle.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Os elementos de matriz nos lados esquerdo e direito da equação acima estão relacionados por (ver, por exemplo, [35])

$$\langle N | \sum_q \vec{\sigma}_q \vec{\tau}_q | N \rangle = \frac{5}{3} \langle N | \vec{\sigma}_N \vec{\tau}_N | N \rangle, \tag{4.24}$$

e portanto

$$g_{A,q}(q^2) = \frac{5}{12\pi} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \{ g^2(r) + [1 - 2 \text{sen}^2(\theta)] f^2(r) \}. \tag{4.25}$$

A integral angular na expressão acima pode ser feita usando-se os resultados

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta \text{sen}(\theta) e^{iqr \cos(\theta)} &= \frac{2 \text{sen}(qr)}{qr} \\
\int_0^\pi d\theta \text{sen}(\theta) e^{iqr \cos(\theta)} [1 - 2 \text{sen}^2(\theta)] &= \frac{2 \text{sen}(qr)}{qr} + \frac{8 \cos(qr)}{(qr)^2} - \frac{8 \text{sen}(qr)}{(qr)^3}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

obtendo-se

$$g_{A,q}(q^2) = \frac{5}{6} \int_0^\infty dr r^2 \left[g^2(r) \frac{2 \text{sen}(qr)}{qr} + f^2(r) \left(\frac{2 \text{sen}(qr)}{qr} + \frac{8 \cos(qr)}{(qr)^2} - \frac{8 \text{sen}(qr)}{(qr)^3} \right) \right]. \tag{4.27}$$

Notamos que a função $f(r)$ é a derivada de $g(r)$, o que complica a avaliação numérica da integral. Para tornar a expressão acima mais simples, vamos examinar o termo que depende de $f(r)$. Assim, usando-se (1.46), uma integral do tipo

$$\int_0^\infty dr r^2 f^2(r) I(r) = \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^\infty dr r^2 g'^2(r) I(r), \tag{4.28}$$

onde $I(r)$ é uma função qualquer de r , pode ser transformada através de integração por partes. Observando que

$$\begin{aligned} [r^2 g(r) g'(r) I(r)]' &= 2r g(r) g'(r) I(r) + r^2 g'^2(r) I(r) + r^2 g(r) g''(r) I(r) \\ &\quad + r^2 g(r) g'(r) I'(r) \\ &= r^2 g'^2(r) I(r) + r^2 g(r) I(r) \left[g''(r) + \frac{2}{r} g'(r) \right] + r^2 g(r) g'(r) I'(r) \end{aligned} \quad (4.29)$$

e, deste modo,

$$\int_0^\infty dr r^2 f^2(r) I(r) = \frac{-1}{(E+m)^2} \int_0^\infty dr r^2 \left\{ g(r) I(r) \left[g''(r) + \frac{2}{r} g'(r) \right] + g(r) g'(r) I'(r) \right\}. \quad (4.30)$$

A partir da equação diferencial (1.47) para $g(r)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 f^2(r) I(r) &= \frac{1}{(E+m)} \int_0^\infty dr r^2 g^2(r) I(r) [E_q - m_q - 2V(r)] \\ &\quad - \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^\infty dr r^2 g(r) g'(r) I'(r). \end{aligned} \quad (4.31)$$

A segunda integral na expressão acima pode ainda ser simplificada, novamente através de integração por partes. Observando que

$$\left[\frac{1}{2} r^2 g^2(r) I'(r) \right]' = r^2 g(r) g'(r) I'(r) + r g^2(r) I'(r) + \frac{1}{2} r^2 g^2(r) I''(r), \quad (4.32)$$

temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 f^2(r) I(r) &= \frac{1}{(E+m)} \int_0^\infty dr r^2 g^2(r) I(r) [E - m - 2V(r)] \\ &\quad + \frac{1}{2(E+m)^2} \int_0^\infty dr r^2 g^2(r) \left[I''(r) + \frac{2}{r} I'(r) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Substituindo-se este resultado em (4.27) e aplicando-se a notação $g(r) = u(r)/r$, temos

$$\begin{aligned} g_{A,q}(q^2) &= \frac{5}{3} \int_0^\infty dr u^2(r) \frac{\text{sen}(qr)}{qr} + \frac{5}{3(E+m)} \int_0^\infty dr u^2(r) I(r) [E - m - 2V(r)] \\ &\quad + \frac{5}{6(E+m)^2} \int_0^\infty dr u^2(r) \left[I''(r) + \frac{2}{r} I'(r) \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde

$$I(r) = \frac{\text{sen}(qr)}{qr} + \frac{4 \cos(qr)}{(qr)^2} - \frac{4 \text{sen}(qr)}{(qr)^3} = -\frac{1}{3} j_0(qr) - \frac{4}{3} j_2(qr), \quad (4.35)$$

e $j_0(qr)$ e $j_2(qr)$ são funções de Bessel esféricas. Usando as equações diferenciais para as funções de Bessel esféricas, temos

$$\begin{aligned} g_{A,q}(q^2) &= \frac{5}{3} \int_0^\infty dr u^2(r) j_0(qr) \\ &\quad - \frac{5}{9(E+m)} \int_0^\infty dr u^2(r) [E - m - 2V(r)] [j_0(qr) + 4j_2(qr)] \\ &\quad + \frac{5q^2}{18(E+m)^2} \int_0^\infty dr u^2(r) \left[j_0(qr) + 4j_2(qr) - \frac{2}{3(qr)^2} j_2(qr) \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Este é o resultado final para a contribuição dos quarks ao fator de forma axial. O restante das integrações em (4.36) deve ser feito numericamente.

Para a comparação com resultados experimentais, vamos calcular a constante de acoplamento axial, que é definida como sendo o fator de forma axial calculado em $q^2 = 0$, ou seja, $g_A = g_A(0)$. A equação para g_A é

$$g_{A,q} = \frac{5}{3} \int_0^\infty dr u^2(r) - \frac{5}{9(E+m)} \int_0^\infty dr u^2(r) [E - m - 2V(r)]. \quad (4.37)$$

Usando a condição de normalização (1.98), podemos simplificar bastante o cálculo de $g_{A,q}$, obtendo

$$g_{A,q} = \frac{20}{9} \int_0^\infty dr u^2(r) - \frac{5}{9}. \quad (4.38)$$

Contribuição dos píons

A contribuição dos píons para o fator de forma axial do núcleon é descrita no segundo diagrama de Feynman na figura 4.6. Para calculá-la, vemos que a corrente axial carregada pelos píons é dada por

$$\vec{j}_{A,\pi}^i(x) = f_\pi \sqrt{F_\pi} \left(\partial^i \vec{\pi} - \frac{1}{2F_\pi} \vec{\pi} \partial^i F_\pi \right). \quad (4.39)$$

Substituindo (4.39) na equação (4.20) para o fator de forma axial, vemos que a contribuição piônica é dada por

$$\langle N | \sigma_N^i \frac{\vec{\tau}_N}{2} | N \rangle g_{A,\pi}(q^2) = f_\pi \langle N | \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \sqrt{F_\pi} \left(\partial^i \vec{\pi} - \frac{1}{2F_\pi} \vec{\pi} \partial^i F_\pi \right) | N \rangle. \quad (4.40)$$

No que segue, estaremos interessados somente na constante axial do núcleon, que vimos ser dada por $g_A = g_A(0)$. Deste modo,

$$\langle N | \sigma_N^i \frac{\vec{\tau}_N}{2} | N \rangle g_{A,\pi} = f_\pi \langle N | \int d^3r \sqrt{F_\pi} \left(\partial^i \vec{\pi} - \frac{1}{2F_\pi} \vec{\pi} \partial^i F_\pi \right) | N \rangle. \quad (4.41)$$

Nos modelos encontrados na literatura, a contribuição piônica para g_A é nula [18]. Este é um resultado geral, que pode ser derivado a partir da forma geral da corrente axial piônica. No nosso modelo de sacola, entretanto, a forma da corrente axial piônica é diferente da usual, por causa da supressão do campo piônico, como pode ser visto em (2.22), e assim obtemos uma contribuição não-nula para o segundo diagrama na figura 4.6. Utilizando a identidade

$$\partial^i (\sqrt{F_\pi} \vec{\pi}) = \sqrt{F_\pi} \partial^i \vec{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\vec{\pi}}{\sqrt{F_\pi}} \partial^i F_\pi, \quad (4.42)$$

podemos fazer integração por partes, e obtemos

$$\langle N | \sigma_N^i \frac{\vec{\tau}_N}{2} | N \rangle g_{A,\pi} = -f_\pi \langle N | \int d^3r \frac{1}{\sqrt{F_\pi}} \vec{\pi} \partial^i F_\pi | N \rangle. \quad (4.43)$$

Para os modelos encontrados na literatura, podemos assumir que $F_\pi(r) = 1$, deste modo a integral acima torna-se nula. No nosso modelo, a contribuição é finita.

No cálculo de $g_{A,\pi}$, o campo piônico não representa um estado de espalhamento (que é solução da equação diferencial homogênea (2.56)), como acontece no cálculo de $g_{\pi NN}$. O que acontece é que o campo piônico é criado pela corrente axial dos quarks, que é o termo de fonte na equação diferencial para o campo piônico, equações (2.34) e (2.80). Devemos, portanto, utilizar no cálculo de $g_{A,\pi}$, a solução particular (2.83) para o campo piônico [18]. Substituindo (2.83) em (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \langle N | \sigma_N^i \frac{\vec{\tau}_N}{2} | N \rangle g_{A,\pi} &= -f_\pi \langle N | \int d^3r \frac{1}{\sqrt{F_\pi}} \sum_q (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q h(r) \partial^i F_\pi | N \rangle \\ &= -f_\pi \langle N | \int d^3r \frac{1}{\sqrt{F_\pi}} \sum_q (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q h(r) \partial_r F_\pi \hat{r}^i | N \rangle . \end{aligned} \quad (4.44)$$

e usando-se a relação (4.24), ficamos com

$$\langle N | \sigma_N^i \frac{\vec{\tau}_N}{2} | N \rangle g_{A,\pi} = -\frac{5 f_\pi}{3} \langle N | \int d^3r \frac{1}{\sqrt{F_\pi}} (\vec{\sigma}_N \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_N h(r) \partial_r F_\pi \hat{r}^i | N \rangle . \quad (4.45)$$

A integral sobre as variáveis angulares na expressão acima é calculada como

$$\int d\theta d\phi \sin(\theta) (\vec{\sigma}_N \cdot \hat{r}) \hat{r}^i = \frac{4\pi}{3} \sigma_N^i , \quad (4.46)$$

onde utilizamos a identidade

$$\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r} = \sin(\theta) \cos(\phi) \sigma_x + \sin(\theta) \sin(\phi) \sigma_y + \cos(\theta) \sigma_z . \quad (4.47)$$

Deste modo, a contribuição piônica à constante de acoplamento axial é dada por

$$g_{A,\pi} = -\frac{40\pi f_\pi}{9} \int_0^\infty dr r^2 h(r) \frac{\partial_r F_\pi}{\sqrt{F_\pi}} . \quad (4.48)$$

O valor experimental de g_A é [36]

$$g_A = 1.2573 \pm 0.0028 . \quad (4.49)$$

4.4 Fatores de forma eletromagnéticos do núcleon

Os fatores de forma eletromagnéticos do núcleon surgem na descrição do espalhamento elétron-núcleon, como descrito pelo diagrama de Feynman 4.7, onde se supõem que somente um fóton é trocado. Os fatores de forma eletromagnéticos do núcleon foram revisados e discutidos de maneira extensa em [37]. Verificou-se que a aproximação de troca de apenas um fóton é bastante boa, assim a amplitude de espalhamento é dada essencialmente pelo produto das correntes leptônica e bariônica. Para o elétron, a corrente é simplesmente a

expressão usual para um espinor de Dirac, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Para o núcleon, a corrente tem uma estrutura mais complexa, sofrendo correções devido à interação forte. A despeito do modo como estas interações sejam levadas em conta, a simetria de Lorentz e a conservação da corrente eletromagnética implicam que a forma mais geral possível para o elemento de matriz da corrente eletromagnética $J_\mu(x)$ entre estados de núcleon livres e elementares seja escrita como

$$\langle N(p', s') | J_\mu(0) | N(p, s) \rangle = \bar{u}_{s'}(p') \left[e F_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{e F_2(q^2)}{2 M_N} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u_s(p) . \quad (4.50)$$

Aqui, $u_s(p)$ é o espinor de Dirac correspondente a um núcleon com quadri-momento p e projeção de spin s , $q = p' - p$ é o quadri-momento transferido e $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são fatores de forma. Obviamente, a interação eletromagnética quebra a simetria de isospin, e fala-se no “núcleon” apenas por medida de economia. Como o próton e o nêutron têm cargas elétricas e momentos magnéticos diferentes, os fatores de forma são específicos para cada um.

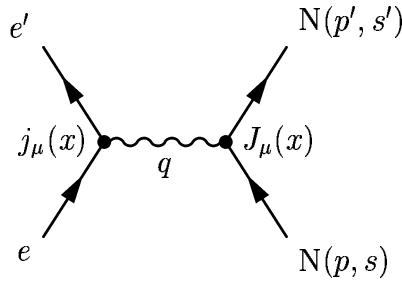


Figura 4.7: O espalhamento elétron-núcleon.

Enquanto que os fatores de forma do próton podem ser medidos diretamente a partir do espalhamento elétron-próton, os fatores de forma do nêutron são determinados de maneira indireta a partir do espalhamento elétron-dêuteron. Isto faz com que os dados experimentais para o nêutron sejam bem menos precisos que os do próton. Uma maneira de diminuir-se os erros experimentais na determinação dos fatores de forma é trabalhar com as combinações [37]

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M_N^2} F_2(q^2) \\ G_M(q^2) &= F_1(q^2) + F_2(q^2) , \end{aligned} \quad (4.51)$$

que definem os fatores de forma elétrico e magnético para o núcleon. Eles são assim chamados pois a derivada em relação a q^2 de $G_E(q^2)$ e $G_M(q^2)$ fornecem respectivamente o raio de carga e a distribuição espacial do momento magnético do núcleon. Deveríamos

ainda em (4.51) colocar índices para denotar os fatores de forma para o próton e nêutron, $G_E^{p,n}(q^2)$ e $G_M^{p,n}(q^2)$. Apesar da simetria de isospin ser quebrada, às vezes é conveniente trabalhar-se com os fatores de forma iso-escalar e iso-vetorial, definidos através de

$$\begin{aligned} G_{E,M}^p(q^2) &= G_{E,M}^S(q^2) + G_{E,M}^V(q^2) \\ G_{E,M}^n(q^2) &= G_{E,M}^S(q^2) - G_{E,M}^V(q^2) . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Os fatores de forma $G_E(q^2)$ e $G_M(q^2)$ podem ser entendidos como sendo as transformadas de Fourier das densidades de carga e de dipolo magnético. Assim, para $q^2 = 0$, estes fatores de forma para o próton e nêutron são normalizados de acordo com a carga elétrica e momento magnético anômalo da respectiva partícula,

$$G_E^p(0) = 1 \qquad G_E^n(0) = 0 \quad (4.53)$$

$$G_M^p(0) = 2.79 \qquad G_M^n(0) = -1.91 . \quad (4.54)$$

Cálculo dos fatores de forma eletromagnéticos em modelos hadrônicos

Depois desta breve introdução aos fatores de forma eletromagnéticos do núcleon, vejamos como calculá-los usando modelos hadrônicos. O cálculo torna-se mais simples no referencial de Breit. Separando as componentes temporal e espaciais da corrente eletromagnética, obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} \langle N(\vec{q}/2, s') | J^0(0) | N(-\vec{q}/2, s) \rangle &= e \chi_{s'}^\dagger \chi_s [G_E^S(q^2) + \tau_3 G_E^V(q^2)] \\ \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} \langle N(\vec{q}/2, s') | \vec{J}(0) | N(-\vec{q}/2, s) \rangle &= e \chi_{s'}^\dagger \frac{i(\vec{\sigma} \times \vec{q})}{2M_N} \chi_s [G_M^S(q^2) + \tau_3 G_M^V(q^2)] , \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde $\tau_3 = +1$ para o próton e $\tau_3 = -1$ para o nêutron. No limite estático ($M_N \rightarrow \infty$), definindo

$$\lim_{M_N \rightarrow \infty} \langle N(\vec{q}/2, s') | J^\mu(0) | N(-\vec{q}/2, s) \rangle = \langle N(\vec{0}, s') | J^\mu(-\vec{q}^2) | N(\vec{0}, s) \rangle , \quad (4.56)$$

e denotando por $|N(s)\rangle$ um próton ou nêutron com momento nulo e projeção de spin s , podemos calcular os fatores de forma elétrico e magnético segundo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} \langle N(s') | J^0(-\vec{q}^2) | N(s) \rangle &= e \chi_{s'}^\dagger \chi_s [G_E^S(q^2) + \tau_3 G_E^V(q^2)] \\ \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} \langle N(s') | \vec{J}(-\vec{q}^2) | N(s) \rangle &= e \chi_{s'}^\dagger \frac{i(\vec{\sigma} \times \vec{q})}{2M_N} \chi_s [G_M^S(q^2) + \tau_3 G_M^V(q^2)] . \end{aligned} \quad (4.57)$$

Lembramos que a corrente eletromagnética carregada pelo núcleon no espaço de momento está relacionada com a corrente eletromagnética no espaço real através de uma transformada de Fourier

$$J^\mu(-\vec{q}^2) = \int d^3r J^\mu(\vec{r}) e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}} . \quad (4.58)$$

Ao considerarmos a corrente eletromagnética, devemos lembrar que ela é a soma da corrente dos quarks e a corrente dos píons

$$J^\mu(\vec{r}) = J_c^\mu(\vec{r}) + J_\pi^\mu(\vec{r}) , \quad (4.59)$$

sendo que a corrente eletromagnética total dos quarks $J_c^\mu(\vec{r})$ é a soma das correntes $j_q^\mu(\vec{r})$ de cada quark,

$$J_c^\mu(\vec{r}) = \sum_{q=1}^3 j_q^\mu(\vec{r}) = \sum_{q=1}^3 e_q \bar{\psi}_q(\vec{r}) \gamma^\mu \psi_q(\vec{r}) . \quad (4.60)$$

O índice c em $J_c^\mu(\vec{r})$ refere-se ao “cerne” do núcleon, que é composto por quarks. Lembramos ainda que em (4.57) devemos usar o estado físico do núcleon.

4.4.1 Fator de forma elétrico

Vamos primeiro calcular o fator de forma elétrico do núcleon e, de acordo com o que vimos acima, considerar em separado as contribuições dos quarks e dos píons.

Contribuição dos quarks

Na seção anterior vimos que o fator de forma elétrico do núcleon está relacionado ao valor esperado da componente temporal da corrente eletromagnética entre estados do núcleon físico. A contribuição dos quarks é dada por

$$\langle \tilde{N}(s') | J_c^0(-\vec{q}^2) | \tilde{N}(s) \rangle = \langle \tilde{N}(s') | \sum_{q=1}^3 e_q j_q^0(\vec{q}) | \tilde{N}(s) \rangle . \quad (4.61)$$

Nas aproximações que utilizamos, o núcleon físico é composto somente por quarks u e d , que consideramos ter a mesma massa. Como estes quarks ocupam o estado fundamental, podemos escrever a componente temporal da corrente vetorial $j_q^\mu(\vec{r})$ como

$$j^0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} [g^2(r) + f^2(r)] , \quad (4.62)$$

onde o índice q foi omitido, já que as funções de onda são as mesmas para todos os quarks. A transformada de Fourier de $j^0(\vec{r})$ pode então ser facilmente calculada,

$$\begin{aligned} j^0(\vec{q}) &= \int d^3r j^0(\vec{r}) e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^\infty dr r^2 [g^2(r) + f^2(r)] e^{iqr \cos(\theta)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty dr r^2 [g^2(r) + f^2(r)] e^{iqr x} = \int_0^\infty dr r^2 [g^2(r) + f^2(r)] j_0(qr) , \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde $j_0(z) = \text{sen}(z)/z$ é a função de Bessel esférica de ordem zero. O termo envolvendo a função radial $f(r)$ pode ser simplificado usando-se integração por partes. Vemos que

$$\int_0^\infty dr r^2 f^2(r) j_0(qr) = \frac{1}{q(E+m)^2} \int_0^\infty dr r g'^2(r) \text{sen}(qr) \quad (4.64)$$

e, com a identidade abaixo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [r g(r) g'(r) \text{sen}(qr)] &= g(r) g'(r) \text{sen}(qr) + r g'^2(r) \text{sen}(qr) \\ &+ r g(r) g''(r) \text{sen}(qr) + qr g(r) g'(r) \cos(qr), \end{aligned} \quad (4.65)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 f^2(r) j_0(qr) &= \frac{-1}{q(E+m)^2} \int_0^\infty dr \left[g(r) g'(r) \text{sen}(qr) \right. \\ &\left. + r g(r) g''(r) \text{sen}(qr) + qr g(r) g'(r) \cos(qr) \right]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Usando integração por partes novamente no primeiro e terceiro termos do integrando acima, chegamos à expressão

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 f^2(r) j_0(qr) &= \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^\infty dr \left[g^2(r) \cos(qr) \right. \\ &\left. - \frac{r}{q} g(r) g''(r) \text{sen}(qr) - \frac{qr}{2} g^2(r) \text{sen}(qr) \right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Finalmente, substituímos a equação diferencial (1.47) para $g(r)$ na integral acima e expressamos $g(r)$ em termos de $u(r)$, obtendo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 f^2(r) j_0(qr) &= \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{u^2(r)}{r^2} \cos(qr) \right. \\ &\left. + \frac{r}{q} g(r) \left(\frac{2}{r} g'(r) + [a - 2(E+m)V_c(r)] g(r) \right) \text{sen}(qr) - \frac{q}{2} \frac{u^2(r)}{r} \text{sen}(qr) \right], \end{aligned} \quad (4.68)$$

e, com uma nova integração por partes, chegamos à expressão

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 f^2(r) j_0(qr) &= \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^\infty dr \left[\frac{1}{qr} u^2(r) [a - 2(E+m)V_c(r)] \text{sen}(qr) \right. \\ &\left. - \frac{q}{2} \frac{u^2(r)}{r} \text{sen}(qr) \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Deste modo podemos escrever

$$\begin{aligned} j^0(\vec{q}) &= \frac{1}{(E+m)^2} \int_0^\infty dr \left[(E+m)^2 u^2(r) \frac{\text{sen}(qr)}{qr} \right. \\ &\left. + \frac{1}{qr} u^2(r) [a - 2(E+m)V_c(r)] \text{sen}(qr) - \frac{q}{2} \frac{u^2(r)}{r} \text{sen}(qr) \right], \end{aligned} \quad (4.70)$$

ou, de modo equivalente,

$$j^0(\vec{q}) = \left[\frac{2E - V_0}{E + m} - \frac{q^2}{2(E + m)^2} \right] \int_0^\infty dr u^2(r) \frac{\text{sen}(qr)}{qr} - \frac{2}{E + m} \int_0^\infty dr u^2(r) \frac{\text{sen}(qr)}{qr} V_c(r). \quad (4.71)$$

Definindo a carga elétrica e_B de um bárion através de

$$\langle B | \sum_{q=1}^3 e_q | B \rangle = e_B, \quad (4.72)$$

e usando o estado físico do núcleon (ver equação (3.127)),

$$|\tilde{N}\rangle = Z_N^{1/2} |N\rangle - Z_N^{1/2} \sum_{jmB} \langle B | \mathcal{S}_m \mathcal{T}_j | N \rangle f_{NB\pi} \int_0^\infty dk \frac{k v(k)}{\omega_k^{3/2}} |B, \pi_{j1m}(k)\rangle, \quad (4.73)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{N}(s') | J_c^0(-\vec{q}^2) | \tilde{N}(s) \rangle &= \delta_{ss'} j^0(\vec{q}) \langle \tilde{N}(s) | \sum_{q=1}^3 e_q | \tilde{N}(s) \rangle \\ &= \delta_{ss'} j^0(\vec{q}) Z_N \left[e_N + \sum_B C_{NB\pi} e_B f_{NB\pi}^2 Z_\pi \right], \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde Z_π foi definido em (3.124). A fórmula acima permite que se obtenha o valor esperado de $J_c^0(-\vec{q}^2)$ tanto para o próton como para o nêutron.

Para o próton, os estados intermediários possíveis $|B\pi\rangle$, multiplicados pelo coeficiente de Clebsch-Gordan correspondente, são

$$\sqrt{2/3} |n\pi^+\rangle, \quad -\sqrt{1/3} |p\pi^0\rangle, \quad \sqrt{1/2} |\Delta^{++}\pi^-\rangle, \quad -\sqrt{1/3} |\Delta^+\pi^0\rangle, \quad \sqrt{1/6} |\Delta^0\pi^+\rangle. \quad (4.75)$$

Destes estados, $|n\pi^+\rangle$ e $|\Delta^0\pi^+\rangle$ não contribuem, pois para eles o bárion tem carga elétrica nula. Assim, para o próton temos

$$\langle \tilde{p}(s') | J_c^0(-\vec{q}^2) | \tilde{p}(s) \rangle = \delta_{ss'} e j^0(\vec{q}) Z_N \left[1 + \frac{1}{3} C_{NN\pi} f_{NN\pi}^2 Z_\pi + \frac{4}{3} C_{N\Delta\pi} f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi \right]. \quad (4.76)$$

A fórmula acima pode ser interpretada em termos dos diagramas de Feynman mostrados na figura 4.8. O primeiro termo entre colchetes é representado pelo primeiro diagrama, e corresponde à interação do fóton diretamente com o próton (contribuição do estado não-perturbado $|p\rangle$). O segundo termo entre colchetes é representado pelo segundo diagrama, e corresponde à interação do fóton com um estado intermediário de próton, sendo o pión somente um espectador (contribuição do estado $|p\pi^0\rangle$). Os terceiro e quarto termos entre colchetes são representados pelo terceiro diagrama, e correspondem à interação do fóton com estados intermediários de ressonância Δ , sendo o pión somente um espectador (contribuição dos estados $|\Delta^{++}\pi^-\rangle$ e $|\Delta^0\pi^+\rangle$).

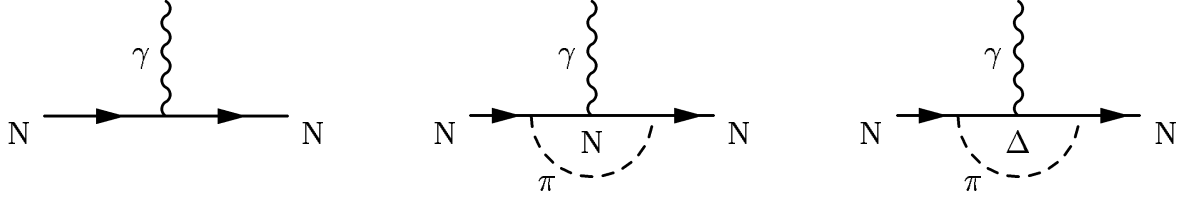


Figura 4.8: Contribuições dos quarks para o fator de forma elétrica do núcleon.

Finalmente, usando a tabela 3.3 chegamos à expressão

$$\langle \tilde{p}(s') | J_c^0(-\vec{q}^2) | \tilde{p}(s) \rangle = \delta_{ss'} e j^0(\vec{q}) Z_N \left[1 + \frac{459}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right]. \quad (4.77)$$

Usando a notação

$$G_E^0(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right)^{1/2} j^0(\vec{q}) = \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right)^{1/2} \int_0^\infty dr r^2 [g^2(r) + f^2(r)] j_0(qr), \quad (4.78)$$

podemos escrever a contribuição dos quarks para o fator de forma elétrica do próton como

$$G_{E,q}^p(q^2) = Z_N \left[1 + \frac{459}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] G_E^0(q^2). \quad (4.79)$$

Para o nêutron, os estados intermediários possíveis $|B\pi\rangle$, multiplicados pelo coeficiente de Clebsh-Gordan correspondente, são

$$\sqrt{1/3} |n\pi^0\rangle, \quad -\sqrt{2/3} |p\pi^-\rangle, \quad \sqrt{1/6} |\Delta^+\pi^-\rangle, \quad -\sqrt{1/3} |\Delta^0\pi^0\rangle, \quad \sqrt{1/2} |\Delta^-\pi^+\rangle. \quad (4.80)$$

Destes estados, $|n\pi^0\rangle$ e $|\Delta^0\pi^0\rangle$ não contribuem, pois para eles o bárioon tem carga elétrica nula. Assim, para o nêutron temos

$$\langle \tilde{n}(s') | J_c^0(-\vec{q}^2) | \tilde{n}(s) \rangle = \delta_{ss'} e j^0(\vec{q}) Z_N \left[0 + \frac{2}{3} C_{NN\pi} f_{NN\pi}^2 Z_\pi - \frac{1}{3} C_{N\Delta\pi} f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi \right]. \quad (4.81)$$

A fórmula acima também pode ser interpretada em termos dos diagramas de Feynman mostrados na figura 4.8. O primeiro termo entre colchetes é representado pelo primeiro diagrama, e corresponde à interação do fóton diretamente com o nêutron (contribuição do estado não-perturbado $|n\rangle$). Como foi mencionado, a contribuição deste diagrama é nula, pois a carga elétrica do nêutron é zero. O segundo termo entre colchetes é representado pelo segundo diagrama, e corresponde à interação do fóton com um estado intermediário de próton, sendo o pión somente um espectador (contribuição do estado $|p\pi^-\rangle$). Os terceiro e quarto termos entre colchetes são representados pelo terceiro diagrama, e correspondem à interação do fóton com estados intermediários de ressonância Δ , sendo o pión somente um espectador (contribuição dos estados $|\Delta^+\pi^-\rangle$ e $|\Delta^-\pi^+\rangle$). Usando a tabela 3.3 chegamos à expressão

$$\langle \tilde{n}(s') | J_c^0(-\vec{q}^2) | \tilde{n}(s) \rangle = \delta_{ss'} e j^0(\vec{q}) Z_N \left[\frac{54}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right], \quad (4.82)$$

e podemos escrever a contribuição dos quarks para o fator de forma elétrico para o nêutron como

$$G_{E,q}^n(q^2) = Z_N \left[\frac{54}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] G_E^0(q^2). \quad (4.83)$$

Contribuição piônica

Vejamos agora a contribuição dos píons para o fator de forma elétrico do núcleon. Em primeira ordem, esta contribuição é dada pelos diagramas de Feynman na figura 4.9. Mas os píons, assim como os núcleons, são partículas compostas. Portanto, esperamos também para a interação fóton-píon um fator de forma, análogo aos fatores de forma que estamos calculando para o núcleon.

Ocorre que estamos tratando o píon como uma partícula elementar, sem estrutura interna. Não tentaremos aplicar o nosso modelo de sacola ao píon, pois, tradicionalmente, modelos de sacola e similares não reproduzem bem as propriedades do píon, como por exemplo a sua massa. Acredita-se que a razão disto é que o píon ocupe um lugar especial no espectro hadrônico, jogando o papel de bóson de Goldstone e estando assim estreitamente ligado à quebra de simetria quiral e às propriedades do vácuo da QCD.



Figura 4.9: Contribuições piônicas para o fator de forma elétrico do núcleon.

Seguiremos então cálculos similares feitos por outros autores [33, 25, 38], nos quais o fator de forma do píon é introduzido fenomenologicamente. Lembramos então as definições dos fatores de forma iso-escalar e iso-vetorial dadas em (4.52). A maior contribuição do píon é para o fator de forma iso-vetorial, e esta é também a contribuição mais conhecida tanto teóricamente (modelo de dominância vetorial) como experimentalmente. A contribuição piônica para o fator de forma elétrico iso-vetorial do núcleon é dada por

$$G_{E,\pi}^V(q^2) = G_{E,\pi}^V(0) F_\pi(q^2) e^{-q^2\Lambda^2/4} = G_{E,\pi}^V(0) \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2 \right) e^{-q^2\Lambda^2/4}, \quad (4.84)$$

onde $F_\pi(q^2)$ é o fator de forma do píon, $\langle r^2 \rangle_\pi^{1/2} = 0.78 fm$ é o valor experimental do raio de carga do píon e $\exp(-q^2\Lambda^2/4)$ é um fator de corte, com $\Lambda^2 = 2 fm^2$. A constante $G_{E,\pi}^V(0)$ tem o papel de assegurar que as cargas elétricas do próton e do nêutron estejam corretas. O seu valor é

$$G_{E,\pi}^V(0) = \frac{54}{25} Z_N Z_\pi f_{NN\pi}^2. \quad (4.85)$$

A contribuição piônica para o fator de forma elétrico iso-escalar do núcleon é considerada nula. Deste modo, os fatores de forma elétricos do próton e do nêutron são dados por

$$\begin{aligned} G_E^p(q^2) &= Z_N \left[1 + \frac{459}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] G_E^0(q^2) + \frac{54}{25} Z_N Z_\pi f_{NN\pi}^2 \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2 \right) e^{-q^2 \Lambda^2/4} \\ G_E^n(q^2) &= Z_N \left[\frac{54}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] G_E^0(q^2) - \frac{54}{25} Z_N Z_\pi f_{NN\pi}^2 \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2 \right) e^{-q^2 \Lambda^2/4}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

4.4.2 Raio de carga do núcleon

Na seção 4.1 calculamos a contribuição dos quarks para o raio de carga do próton e do nêutron, e mencionamos que faltava ainda a contribuição piônica. Tendo em vista o cálculo feito na seção anterior do fator de forma elétrico para o núcleon, podemos agora calcular o raio de carga do próton e do nêutron através da fórmula

$$\langle r^2 \rangle_N = -6 \left. \frac{\partial G_E^N(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0}. \quad (4.87)$$

A partir de (4.86) temos

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_p &= -6 Z_N \left[1 + \frac{459}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] \left. \frac{\partial G_E^0(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0} + \frac{54}{25} Z_N Z_\pi f_{NN\pi}^2 \left(\langle r^2 \rangle_\pi + \frac{3}{2} \Lambda^2 \right) \\ \langle r^2 \rangle_n &= -6 Z_N \left[\frac{54}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] \left. \frac{\partial G_E^0(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0} - \frac{54}{25} Z_N Z_\pi f_{NN\pi}^2 \left(\langle r^2 \rangle_\pi + \frac{3}{2} \Lambda^2 \right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Lembrando a expressão (4.78) para $G_E^0(q^2)$ e a definição de $j^0(\vec{q})$ feita logo após a equação (4.63), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_E^0(q^2)}{\partial q^2} &= \frac{1}{8 M_N^2} \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right)^{-1/2} j^0(\vec{q}) \\ &+ \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right)^{1/2} \int_0^\infty dr r^2 \frac{r}{2q} \left(\frac{\cos(qr)}{qr} - \frac{\text{sen}(qr)}{(qr)^2} \right) [g^2(r) + f^2(r)]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Tomando o limite $q^2 \rightarrow 0$, obtemos

$$-6 \left. \frac{\partial G_E^0(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0} = -\frac{3}{4 M_N^2} + \langle r^2 \rangle_q, \quad (4.90)$$

onde $\langle r^2 \rangle_q$ foi calculado em (4.5). Portanto

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_p &= Z_N \left[1 + \frac{459}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] \left(-\frac{3}{4 M_N^2} + \langle r^2 \rangle_q \right) + \frac{54}{25} Z_N Z_\pi f_{NN\pi}^2 \left(\langle r^2 \rangle_\pi + \frac{3}{2} \Lambda^2 \right) \\ \langle r^2 \rangle_n &= Z_N \left[\frac{54}{25} Z_\pi f_{NN\pi}^2 \right] \left(-\frac{3}{4 M_N^2} + \langle r^2 \rangle_q \right) - \frac{54}{25} Z_N Z_\pi f_{NN\pi}^2 \left(\langle r^2 \rangle_\pi + \frac{3}{2} \Lambda^2 \right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

4.4.3 Fator de forma magnético

Assim como fizemos no cálculo do fator de forma elétrico do núcleon, vamos também, para o fator de forma magnético, considerar em separado as contribuições dos quarks e dos píons.

Contribuição dos quarks

De acordo com a equação (4.57), o fator de forma magnético do núcleon está relacionado ao valor esperado das componentes espaciais da corrente eletromagnética entre estados do núcleon físico. A contribuição dos quarks para a corrente eletromagnética é dada por

$$\langle \tilde{N}(s') | \vec{J}_c(-\vec{q}^2) | \tilde{N}(s) \rangle = \langle \tilde{N}(s') | \sum_{q=1}^3 e_q \vec{j}_q(\vec{q}) | \tilde{N}(s) \rangle . \quad (4.92)$$

Se os quarks estiverem todos no estado fundamental, as componentes espaciais da corrente vetorial $j_q^\mu(\vec{r})$ de cada quark são dadas por

$$\vec{j}_q(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} g(r) f(r) (\hat{r} \times \vec{\sigma}_q) . \quad (4.93)$$

O cálculo da transformada de Fourier de $\vec{j}_q(\vec{r})$ é simples, mas envolve algumas sutilezas. Vamos primeiramente escrever

$$\vec{j}_q(\vec{q}) = \int d^3r \vec{j}_q(\vec{r}) e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}} = \vec{I}(\vec{q}) \times \vec{\sigma}_q , \quad (4.94)$$

onde na segunda igualdade usamos a variável temporária $\vec{I}(\vec{q})$, que é definida por

$$\vec{I}(\vec{q}) = \frac{1}{2\pi} \int d^3r \hat{r} g(r) f(r) e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}} . \quad (4.95)$$

Como $\vec{I}(\vec{q})$ é um vetor, e o único vetor disponível é \vec{q} , deduzimos que $\vec{I}(\vec{q})$ deve ser necessariamente proporcional a \vec{q} , portanto

$$\vec{I}(\vec{q}) = \frac{\hat{q}}{2\pi} \int d^3r \hat{r} \cdot \hat{q} g(r) f(r) e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}} . \quad (4.96)$$

Calculando esta integral, temos

$$\begin{aligned} \vec{I}(\vec{q}) &= \frac{\hat{q}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \cos(\theta) \int_0^\infty dr r^2 g(r) f(r) e^{iqr \cos(\theta)} . \\ &= \hat{q} \int_{-1}^1 dx x \int_0^\infty dr r^2 g(r) f(r) e^{iqr x} \\ &= 2i \hat{q} \int_0^\infty dr r^2 g(r) f(r) j_1(qr) , \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde $j_1(z) = \text{sen}(z)/z^2 - \text{cos}(z)/z$ é a função de Bessel esférica de ordem um. Definindo a função $j^e(\vec{q})$ através de $\vec{I}(\vec{q}) = -i \vec{q} j^e(\vec{q})$, podemos expressar a transformada de Fourier de $\vec{j}_q(\vec{r})$ como

$$\begin{aligned} \vec{j}_q(\vec{q}) &= -i (\vec{q} \times \vec{\sigma}_q) j^e(\vec{q}) = i (\vec{\sigma}_q \times \vec{q}) j^e(\vec{q}) \\ j^e(\vec{q}) &= -\frac{2}{q} \int_0^\infty dr r^2 g(r) f(r) j_1(qr) . \end{aligned} \quad (4.98)$$

O valor esperado das componentes espaciais da corrente eletromagnética entre estados do núcleon físico pode então ser escrito como

$$\langle \tilde{N}(s') | \vec{J}_c(-\vec{q}^2) | \tilde{N}(s) \rangle = i j^e(\vec{q}) \langle \tilde{N}(s') | \sum_{q=1}^3 e_q (\vec{\sigma}_q \times \vec{q}) | \tilde{N}(s) \rangle . \quad (4.99)$$

Usando o estado físico do núcleon (4.73), pode-se mostrar [25] que, para o próton,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}(s') | \vec{J}_c(-\vec{q}^2) | \tilde{p}(s) \rangle &= e i \chi_{s'}^\dagger (\vec{\sigma} \times \vec{q}) \chi_s j^e(\vec{q}) Z_N \\ &\times \left[1 + \frac{1}{27} C_{NN\pi} f_{NN\pi}^2 Z_\pi + \frac{20}{27} C_{N\Delta\pi} f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi + \frac{128}{15} f_{NN\pi}^2 Z_\pi \right] , \end{aligned} \quad (4.100)$$

e, para o nêutron,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}(s') | \vec{J}_c(-\vec{q}^2) | \tilde{n}(s) \rangle &= -\frac{2}{3} e i \chi_{s'}^\dagger (\vec{\sigma} \times \vec{q}) \chi_s j^e(\vec{q}) Z_N \\ &\times \left[1 + \frac{2}{9} C_{NN\pi} f_{NN\pi}^2 Z_\pi + \frac{5}{18} C_{N\Delta\pi} f_{N\Delta\pi}^2 Z_\pi + \frac{64}{5} f_{NN\pi}^2 Z_\pi \right] , \end{aligned} \quad (4.101)$$

As fórmulas acima podem ser interpretadas em termos dos diagramas de Feynman mostrados na figura 4.10. O primeiro termo entre colchetes é representado pelo primeiro diagrama, e corresponde à interação do fóton diretamente com o núcleon. O segundo termo entre colchetes é representado pelo segundo diagrama, e corresponde à interação do fóton com um estado intermediário de núcleon, sendo o pión somente um espectador. O terceiro termo entre colchetes é representado pelo terceiro diagrama, e corresponde à interação do fóton com um estado intermediário de ressonância Δ , sendo o pión somente um espectador. O quarto termo entre colchetes é representado pelo quarto e quinto diagramas, e corresponde à interação do fóton com um estado intermediário de núcleon gerando um estado intermediário de ressonância Δ (quarto diagrama) e à interação do fóton com um estado intermediário de ressonância Δ gerando um estado intermediário de núcleon (quinto diagrama), sendo o pión somente um espectador.

Finalmente, usando a tabela 3.3 chegamos a

$$\langle \tilde{p}(s') | \vec{J}_c(-\vec{q}^2) | \tilde{p}(s) \rangle = e i \chi_{s'}^\dagger (\vec{\sigma} \times \vec{q}) \chi_s j^e(\vec{q}) Z_N \left[1 + \frac{87}{5} f_{NN\pi}^2 Z_\pi \right] , \quad (4.102)$$

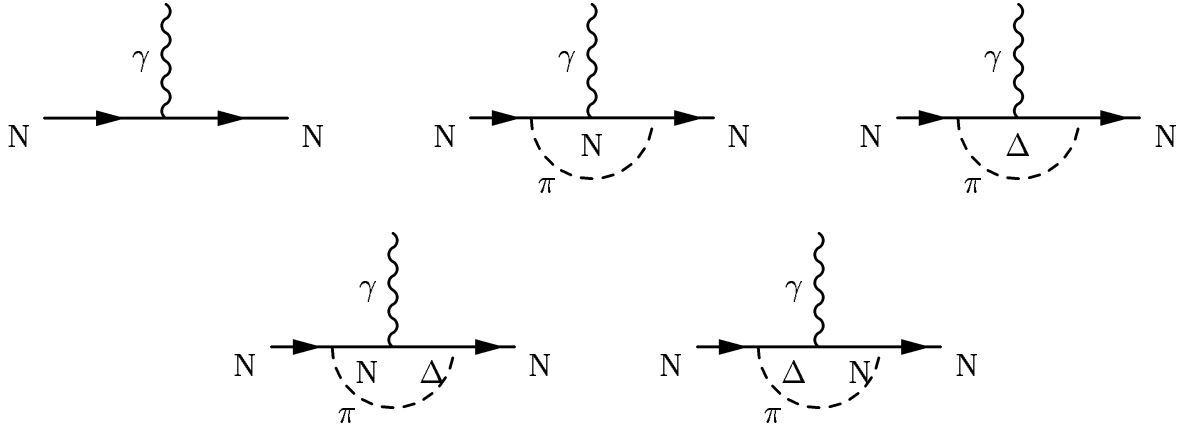


Figura 4.10: Contribuições dos quarks para o fator de forma magnético do núcleon.

e, para o nêutron,

$$\langle \tilde{n}(s') | \vec{J}_c(-\vec{q}^2) | \tilde{n}(s) \rangle = -\frac{2}{3} e i \chi_{s'}^\dagger (\vec{\sigma} \times \vec{q}) \chi_s j^e(\vec{q}) Z_N [1 + 18 f_{NN\pi}^2 Z_\pi] , \quad (4.103)$$

Usando a notação

$$\begin{aligned} G_M^0(q^2) &= 2M_N \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} j^e(\vec{q}) \\ &= -\frac{4M_N}{q} \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty dr r^2 g(r) f(r) j_1(qr) , \end{aligned} \quad (4.104)$$

podemos escrever a contribuição dos quarks para os fatores de forma magnéticos do próton e do nêutron (em unidades de magnéton nuclear, $\mu_N = e/2M_N$) como

$$\begin{aligned} G_{M,q}^p(q^2) &= Z_N \left[1 + \frac{87}{5} f_{NN\pi}^2 Z_\pi\right] G_M^0(q^2) \\ G_{M,q}^n(q^2) &= -\frac{2}{3} Z_N [1 + 18 f_{NN\pi}^2 Z_\pi] G_M^0(q^2) . \end{aligned} \quad (4.105)$$

Contribuição piônica

A contribuição piônica para o fator de forma magnético do núcleon é representada pelos diagramas Feynman da figura 4.9, que também representam a contribuição para o fator de forma elétrico. No caso da contribuição para o fator de forma magnético, o cálculo é bastante longo [25], sendo o resultado no limite $q^2 \rightarrow 0$ dado, em unidades de magnéton nuclear, por

$$G_{M,\pi}^V(0) = \tau_3 \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} . \quad (4.106)$$

A dependência de $G_{M,\pi}^V$ em relação a q^2 é dada de maneira fenomenológica, através de fatores de forma, como foi feito para o caso de $G_{E,\pi}^V$ na equação (4.84),

$$\begin{aligned} G_{M,\pi}^V(q^2) &= G_{M,\pi}^V(0) F_\pi(q^2) e^{-q^2\Lambda^2/4} \\ &= \tau_3 \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2\right) e^{-q^2\Lambda^2/4}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Assim como no caso do fator de forma elétrico, a contribuição dos píons se dá somente na componente iso-vetorial. Deste modo, os fatores de forma magnéticos do próton e do nêutron são dados por

$$\begin{aligned} G_M^p(q^2) &= Z_N \left[1 + \frac{87}{5} f_{NN\pi}^2 Z_\pi\right] G_M^0(q^2) \\ &\quad + \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2\right) e^{-q^2\Lambda^2/4} \\ G_M^n(q^2) &= -\frac{2}{3} Z_N [1 + 18 f_{NN\pi}^2 Z_\pi] G_M^0(q^2) \\ &\quad - \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2\right) e^{-q^2\Lambda^2/4}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

4.4.4 Momento magnético do núcleon

O momento magnético do núcleon, em unidades de magneton nuclear, pode ser calculado tomando-se o limite $q^2 \rightarrow 0$ do fator de forma magnético. Temos então

$$\begin{aligned} \mu_p &= Z_N \left[1 + \frac{87}{5} f_{NN\pi}^2 Z_\pi\right] G_M^0(0) + \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} \\ \mu_n &= -\frac{2}{3} Z_N [1 + 18 f_{NN\pi}^2 Z_\pi] G_M^0(0) - \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

O valor de $G_M^0(0)$ é calculado através de (4.104) usando-se $j_1(z) \approx z/3$, com o resultado

$$G_M^0(0) = -\frac{4}{3} M_N \int_0^\infty dr r^3 g(r) f(r). \quad (4.110)$$

Substituindo-se a equação (1.46), que expressa $f(r)$ em termos de $g(r)$, temos

$$\begin{aligned} G_M^0(0) &= -\frac{4M_N}{3(E' + m')} \int_0^\infty dr r^3 g(r) g'(r) \\ &= \frac{2M_N}{E' + m'} \int_0^\infty dr r^2 g^2(r), \end{aligned} \quad (4.111)$$

onde usamos integração por partes para obter a segunda igualdade.

4.5 Ajuste dos parâmetros e resultados

O modelo de sacola que apresentamos tem 8 parâmetros: m_u , m_s , R_0 , R_1 , α , V_0 , α_π e α_c . Este pode ser considerado um conjunto mínimo de parâmetros, tendo-se em vista todos os ingredientes físicos do modelo. As massas dos quarks, por exemplo, são imprescindíveis em qualquer modelo hadrônico, e devem ser ajustadas de acordo com cada modelo específico. O mesmo se aplica à constante de acoplamento quark-gluon α_c . As constantes V_0 e α fixam a profundidade e a intensidade do potencial confinante dos quarks, e portanto ambos parâmetros têm sentido físico. De modo similar, α_π regula a intensidade do potencial dos píons. Finalmente, R_0 fornece a escala em que podemos considerar os quarks como sendo livres e os píons completamente suprimidos e R_1 fornece a escala em que podemos considerar os quarks como sendo completamente suprimidos e os píons sendo livres.

Para ajustarmos os 8 parâmetros mencionados acima, exigimos que os valores calculados para determinadas quantidades físicas fossem o mais próximo possível dos respectivos valores experimentais. As quantidades físicas envolvidas no ajuste foram as massas dos bárions do octeto fundamental, a constante de acoplamento pión-núcleon, o raio quadrático médio e momento magnético do próton e do nêutron. A constante axial do núcleon não foi envolvida no ajuste dos parâmetros. O melhor ajuste ocorreu com as seguintes combinações dos parâmetros,

$$\begin{aligned} m'_u &= 181 MeV & m'_s &= 356 MeV & V_0 &= -368 MeV \\ \alpha &= 7.0 & \alpha_\pi &= 0.002 & \alpha_c &= 0.77 \\ R_0 &= 0.04 fm & R_1 &= 3.4 fm \end{aligned} \quad (4.112)$$

o que implica em

$$m_u = 365 MeV \quad m_s = 540 MeV . \quad (4.113)$$

Os resultados para as massas dos bárions do octeto fundamental estão na tabela 4.1, onde discriminamos as contribuições de cada termo de energia. Lembramos que a massa de um bárion é composta pelos seguintes termos

$$M = E_B + E_{vac} + \Delta E_{cm} + \Delta E_g + \Delta E_\pi , \quad (4.114)$$

onde E_B é a soma das energias de cada quark, E_{vac} é a energia de vácuo, ΔE_{cm} é a correção de centro de massa, ΔE_g é a correção devida à parte magnética de cor da troca de um glúon, e ΔE_π é a correção devida à troca de um pión.

Os resultados para a constante de acoplamento pión-núcleon, a constante axial do núcleon, e para o raio quadrático médio e momento magnético do próton e do nêutron estão na tabela 4.2.

Os gráficos dos fatores de forma elétricos do próton e do nêutron podem ser vistos nas figuras 4.11 e 4.12.

| hádron | N | Δ | Λ | Σ | Σ^* | Ξ | Ξ^* | Ω^- |
|-----------------|------|----------|-----------|----------|------------|-------|---------|------------|
| experim. | 939 | 1232 | 1116 | 1193 | 1385 | 1318 | 1533 | 1672 |
| teoria | 941 | 1232 | 1123 | 1185 | 1383 | 1328 | 1526 | 1662 |
| E_B | 1144 | | 1260 | | | 1375 | | 1491 |
| E_{vac} | 312 | | 304 | | | 296 | | 287 |
| ΔE_{cm} | -246 | | -229 | | | -215 | | -204 |
| ΔE_g | -113 | 113 | -113 | -95 | 104 | -103 | 96 | 88 |
| ΔE_π | -156 | -91 | -99 | -55 | | -26 | | 0 |

Tabela 4.1: A massa dos bárions do octeto fundamental (todas as quantidades em MeV).

| | $g_{\pi NN}^2/4\pi$ | g_A | $\langle r^2 \rangle_p$ | $\langle r^2 \rangle_n$ | μ_p | μ_n |
|----------|---------------------|--------|-------------------------|-------------------------|---------|---------|
| experim. | 14.1 | 1.2573 | $0.743 fm^2$ | $-0.119 fm^2$ | 2.7928 | -1.9130 |
| teoria | 14.58 | 1.1837 | $0.740 fm^2$ | $-0.094 fm^2$ | 2.730 | -2.11 |

Tabela 4.2: Propriedades do núcleon.

Os gráficos dos fatores de forma magnéticos do próton e do nêutron podem ser vistos nas figuras 4.13 e 4.14.

Os resultados para os fatores de forma eletromagnéticos do núcleon apresentam boa concordância com os resultados experimentais para valores pequenos de momentum transferido, exceto no caso do fator de forma elétrico no nêutron, para o qual as incertezas experimentais também são grandes. Para valores maiores do momentum transferido, os resultados apresentados devem ser corrigidos pelas correções de recuo e de centro de massa [38].

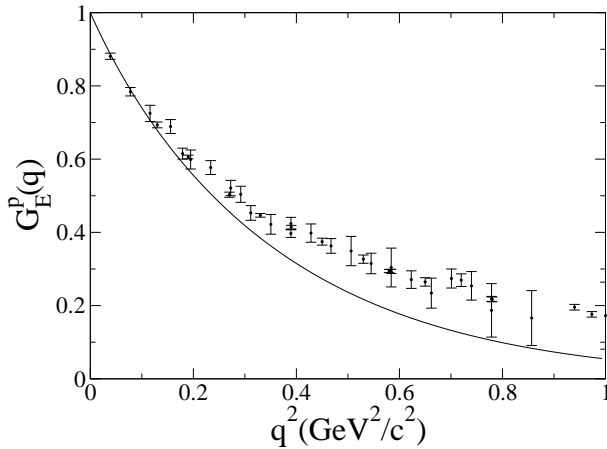


Figura 4.11: Fator de forma elétrico do próton como função de q^2 .

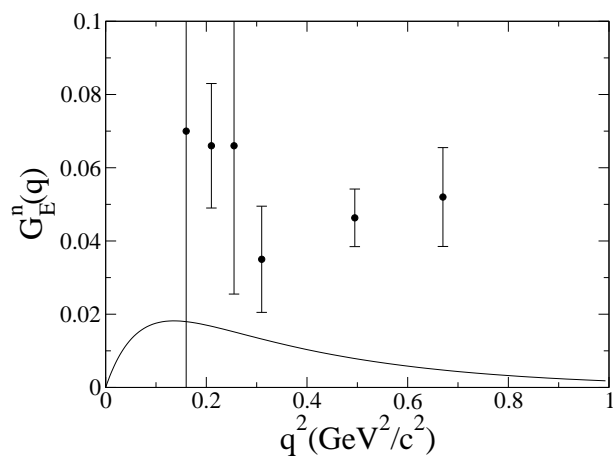


Figura 4.12: Fator de forma elétrico do nêutron como função de q^2 .

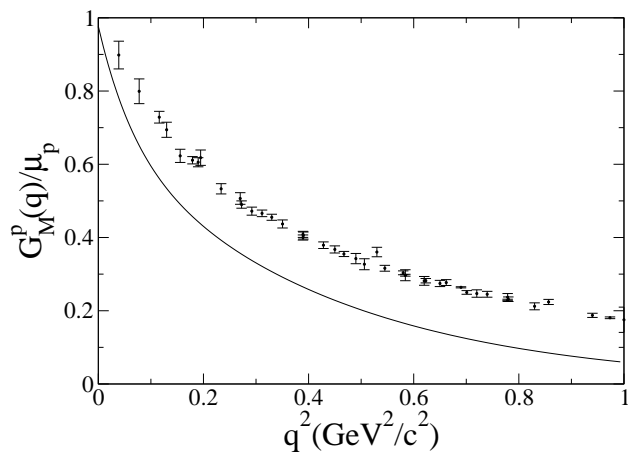


Figura 4.13: Fator de forma magnético do próton como função de q^2 .

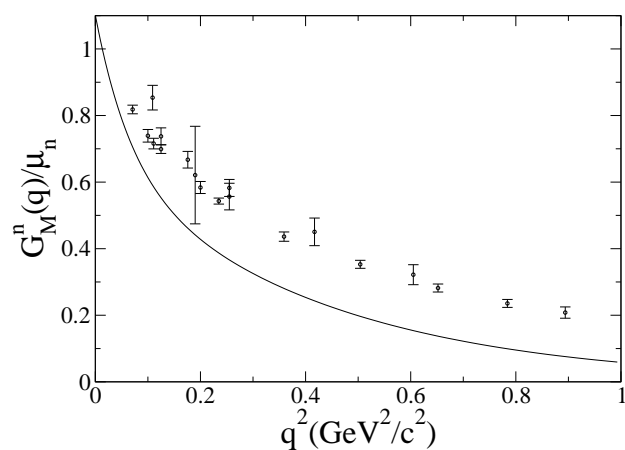


Figura 4.14: Fator de forma magnético do nêutron como função de q^2 .

Capítulo 5

O potencial de oscilador harmônico

O potencial de oscilador harmônico foi consagrado na fenomenologia hadrônica como sendo um dos tipos mais utilizados de potencial confinante para os quarks. Isto se deve a três características importantes: este potencial permite obter soluções exatas para as funções de onda dos quarks, permite obter expressões analíticas para diversas quantidades físicas, e, além disso, reproduz fielmente várias propriedades dos hádrons.

Ao estudarmos o modelo hadrônico desenvolvido nos capítulos anteriores usando um potencial confinante do tipo oscilador harmônico, poderemos fazer dois tipos de avaliação do modelo. Por um lado, ao comparar os resultados obtidos nos capítulos anteriores com os resultados deste capítulo, poderemos avaliar como o nosso modelo se comporta quando é sujeito a potenciais confinantes diferentes. Por outro lado, ao comparar os resultados obtidos neste capítulo com os resultados de modelos hadrônicos encontrados na literatura que utilizam o mesmo potencial de oscilador harmônico, poderemos avaliar como o nosso modelo se comporta em relação a outros modelos.

5.1 O campo dos quarks

5.1.1 Função de supressão dos quarks

Se recordarmos a formulação do nosso modelo feita no capítulo 1, o ponto de partida é a densidade Lagrangeana (1.16), que reproduzimos novamente aqui,

$$\mathcal{L}_{FBM} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - B(r) F(r) - \bar{\psi} [m + (1 + \gamma^0) V(r)] \psi . \quad (5.1)$$

Nesta expressão, $\psi(x)$ é o campo, m é a massa e $F(r)$ é a função de supressão dos quarks. A função $B(r)$ desenvolve um papel análogo à constante B do MIT, sendo determinada pelo requerimento de conservação de energia e momento total da sacola. O potencial $V(r)$ é definido como

$$V(r) = V_0/2 + V_c(r) , \quad (5.2)$$

onde V_0 é uma constante e $V_c(r)$ é o potencial confinante. Lembramos ainda que em (5.1) está implícita uma soma sobre os sabores de quarks.

Como foi mencionado no início deste capítulo, iremos trabalhar com um potencial do tipo oscilador harmônico. Assim o potencial confinante para os quarks será definido como

$$V_c(r) = \frac{\lambda}{2} r^2 . \quad (5.3)$$

Lembramos que o potencial confinante $V_c(r)$ e a função de supressão $F(r)$ estão relacionados um com o outro. Inicialmente deduzimos a relação (1.14), que depois foi invertida em (1.61), permitindo deste modo a determinação de $F(r)$ a partir de $V_c(r)$. A expressão para a função de supressão dos quarks correspondente ao potencial de oscilador harmônico é então dada por

$$F(r) = \exp\left(-\frac{\lambda}{3} r^3\right) . \quad (5.4)$$

Na seção 1.7, a função de supressão e o potencial confinante foram definidos de modo a satisfazerem vários critérios, tanto de natureza física como matemática. Em face a estes critérios, a função de supressão (5.4) tem um comportamento adequado, já que tende a 1 quando $r \rightarrow 0$ e tende a 0 quando $r \rightarrow \infty$. Mas com a função de supressão (5.4), no entanto, não há uma separação clara entre o interior e o exterior da sacola, como foi o caso no capítulo 1, onde usamos a função de supressão definida por (1.10) e (1.66). Isto também pode ser conferido visualmente na figura 5.1, onde é apresentado o gráfico da função de supressão e do potencial confinante para um determinado valor de λ .

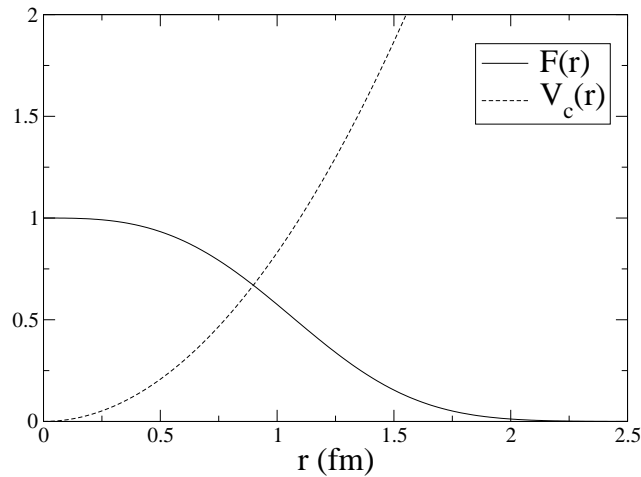


Figura 5.1: Gráfico de $F(r)$ e $V_c(r)$ (em fm^{-1}) para $\lambda = 1.66 fm^{-3}$.

5.1.2 Função de onda dos quarks

Como vimos no capítulo 1, a função de onda dos quarks pode ser escrita de modo separável na forma (1.38),

$$\psi(x) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} g(r) \mathcal{Y}_{j\ell}^{j_z}(\hat{r}) \\ i f(r) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{j_z}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

onde E é o auto-valor de energia. Se o quark estiver no estado fundamental, a relação entre as funções de onda radiais $g(r)$ e $f(r)$ é dada por (1.46). Tomando-se $\kappa = -1$, temos

$$f(r) = \frac{1}{E+m} \frac{dg(r)}{dr}. \quad (5.6)$$

Além disso, é útil escrever a função $g(r)$ de acordo com (1.48) em termos da função de onda reduzida, $g(r) = u(r)/r$. A equação diferencial para $u(r)$ quando os quarks estão sujeitos a um potencial do tipo $V(r) = V_0/2 + V_c(r)$ foi determinada em (1.49), sendo válida para qualquer forma do potencial confinante $V_c(r)$. Substituindo $V_c(r)$ pelo potencial do oscilador harmônico (5.3) na equação (1.49), temos

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[a - \lambda(E+m)r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u(r) = 0, \quad (5.7)$$

onde $a = (E+m)(E-m-V_0)$. Para resolver esta equação diferencial, escrevemos $u(r)$ na forma

$$u(r) = r^{\ell+1} e^{-r^2/2r_0^2} G(r), \quad (5.8)$$

onde $r_0^{-4} = \lambda(E+m)$. Substituindo a expressão acima para $u(r)$ em (5.7), vemos que a função $G(r)$ satisfaz a equação

$$\frac{d^2 G(r)}{dr^2} + \left(\frac{2(\ell+1)}{r} - \frac{2r}{r_0^2} \right) \frac{dG(r)}{dr} + \left(a - \frac{3+2\ell}{r_0^2} \right) G(r) = 0. \quad (5.9)$$

Efetuando a troca de variável $r \rightarrow z = r^2/r_0^2$, e sendo $G(r) = L(z)$, obtemos

$$z \frac{d^2 L(z)}{dz^2} + \left(\ell + \frac{3}{2} - z \right) \frac{dL(z)}{dz} + \left(\frac{ar_0^2}{4} - \frac{\ell}{2} - \frac{3}{4} \right) L(z) = 0. \quad (5.10)$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem, e portanto tem duas soluções linearmente independentes. Levando em conta a condição de contorno $u(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, a única solução possível é o polinômio generalizado de Laguerre [15],

$$L(z) = L_{\beta}^{(\alpha)}(z) = \sum_{n=0}^{\beta} \frac{(-1)^n (\beta+\alpha)!}{(\alpha+n)! (\beta-n)!} \frac{z^n}{n!}, \quad (5.11)$$

onde $\alpha = \ell + 1/2$ e β é um número inteiro. O valor de β é

$$\beta = \frac{ar_0^2}{4} - \frac{\ell}{2} - \frac{3}{4}. \quad (5.12)$$

A condição de que β seja um número inteiro faz de (5.12) a equação de auto-valores para a energia dos quarks. A solução geral, então, é dada por

$$u(r) = \frac{N}{r_0} r^{\ell+1} e^{-r^2/2r_0^2} L_{\beta}^{(\alpha)}(r^2/r_0^2), \quad (5.13)$$

onde N é o fator de normalização. No estado fundamental, os valores de ℓ e β são $\ell = 0$ e $\beta = 0$, as componentes superior e inferior do espinor de Dirac ficam sendo dadas por

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{N}{r_0} e^{-r^2/2r_0^2} \\ f(r) &= -\frac{N r}{r_0^3 (E + m)} e^{-r^2/2r_0^2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

e a equação de auto-valores para a energia (5.12) pode ser escrita como $a r_0^2 = 3$, ou

$$\sqrt{\frac{E + m}{\lambda}} (E - m - V_0) = 3. \quad (5.15)$$

O fator de normalização N é determinado de modo que a função de onda para os quarks satisfaça a condição

$$\int d^3r \psi^\dagger \psi = 1, \quad (5.16)$$

que no capítulo 1 foi simplificada ao máximo, sendo obtida a expressão (1.98),

$$\frac{2 E'}{E' + m'} \int_0^{R_1} dr u^2(r) - \frac{2}{E' + m'} \int_0^{R_1} dr u^2(r) V_c(r) = 1. \quad (5.17)$$

Resolvendo-se as integrais, o fator de normalização para o estado fundamental pode ser escrito como

$$N^2 = \frac{8 (E' + m')}{\sqrt{\pi} r_0 (3E' + m')}. \quad (5.18)$$

Na figura abaixo vemos o gráfico das funções de onda radiais $g(r)$ e $f(r)$ para os quarks u e s com os valores dos parâmetros obtidos em (5.74) e (5.75).

5.1.3 Equação de autovalores

Para determinarmos os auto-valores de energia dos quarks, será conveniente expressar os resultados em termos das seguintes variáveis,

$$\begin{aligned} E' &= E - V_0/2 \\ m' &= m + V_0/2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

que também foram utilizadas no capítulo 1. A equação de auto-valores (5.15) assume então a forma

$$\sqrt{E' + m'} (E' - m') = 3 \sqrt{\lambda}. \quad (5.20)$$

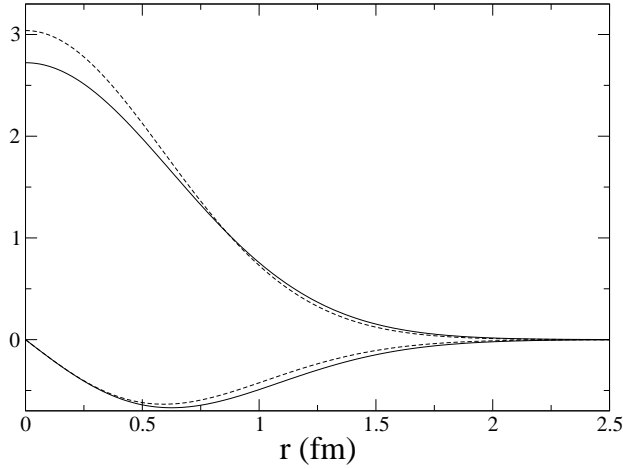


Figura 5.2: Gráfico das funções de onda radiais $g(r)$ e $f(r)$ para os quarks u (—) e s (---); note-se que $g(r)$ é sempre positiva, enquanto que $f(r)$ é sempre negativa.

Para resolver esta equação, vamos primeiro elevá-la ao quadrado, obtendo

$$E'^3 - m' E'^2 - m'^2 E' + m'^3 = 9 \lambda . \quad (5.21)$$

Esta é uma equação cúbica em E' . Dependendo do valor do discriminante D , ela pode ter três tipos de soluções: se $D > 0$, temos uma solução real e duas soluções complexas conjugadas; se $D = 0$, temos três soluções reais, sendo pelo menos duas iguais; e se $D < 0$, temos três soluções reais, onde nenhuma é igual à outra. No caso que estamos considerando, o discriminante é dado por

$$D = \frac{81 \lambda^2}{4} - \frac{8 \lambda m'^3}{3} = \frac{81 \lambda^2}{4} \left(1 - \frac{32 m'^3}{243 \lambda} \right) . \quad (5.22)$$

Isto significa que, se a condição $\alpha < 1$ for satisfeita, onde

$$\alpha = \frac{32 m'^3}{243 \lambda} , \quad (5.23)$$

então temos somente uma solução real para a equação de autovalores. Usando a fórmula tradicional para a solução real de uma equação cúbica encontrada em livros de matemática, temos

$$\begin{aligned} E' &= \sqrt[3]{\frac{9 \lambda}{2} - \frac{8 m'^3}{27} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{9 \lambda}{2} - \frac{8 m'^3}{27} - \sqrt{D}} + \frac{m'}{3} \\ &= \left(\frac{9 \lambda}{2} \right)^{1/3} \left[(1 - \alpha/2 + \sqrt{1 - \alpha})^{1/3} + (1 - \alpha/2 - \sqrt{1 - \alpha})^{1/3} \right] + \frac{m'}{3} \\ &= \left(\frac{9 \lambda}{2} \right)^{1/3} \left[(1 - \alpha/2 + \sqrt{1 - \alpha})^{1/3} + \frac{(\alpha^2/4)^{1/3}}{(1 - \alpha/2 + \sqrt{1 - \alpha})^{1/3}} \right] + \frac{m'}{3} . \end{aligned} \quad (5.24)$$

A expressão final dada acima para E' , na terceira igualdade, tem a vantagem de ser numericamente estável para valores pequenos de α , enquanto que a expressão na segunda igualdade é mais adequada para valores de α próximos de 1.

Se a condição $\alpha < 1$ não for satisfeita, é mais simples resolver numericamente a equação de autovalores do que encontrar as raízes analiticamente. Devemos notar que esta condição implica em

$$m' < 387.8 \lambda^{1/3} \text{MeV} , \quad (5.25)$$

com λ sendo dado nas unidades naturais (neste caso, fm^{-3}).

5.1.4 Energia de vácuo

Tendo sido determinados a função de onda e os autovalores de energia dos quarks, podemos calcular a forma da função $B(r)$, que é responsável pela conservação da energia e momento da sacola, sendo o análogo à constante B do modelo do MIT. No capítulo 1 vimos que $B(r)$ obedece à equação (1.35),

$$B(r) F(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_q \int_r^\infty dr' \frac{u_q^2(r')}{r'^2} \frac{dV_c(r')}{dr'} . \quad (5.26)$$

Substituindo na expressão acima a forma da função de onda (5.14) e do potencial confinante (5.3), podemos resolver a integral analiticamente,

$$\begin{aligned} B(r) F(r) &= \frac{\lambda}{2\pi} \sum_q \frac{N_q^2}{r_{0q}^2} \int_0^r dr r e^{-r^2/r_{0q}^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \sum_q N_q^2 \int_0^{r^2/r_{0q}^2} dx e^{-x} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \sum_q N_q^2 e^{-r^2/r_{0q}^2} . \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.1.5 Massa dos bárions

No capítulo 1 vimos que a massa de um bárion é dada pela soma das auto-energias E_q de cada quark e da energia de volume da sacola, de acordo com a equação (1.100). Temos então

$$\begin{aligned} M &= \sum_q E_q + \int d^3r B(r) F(r) = \sum_q E_q + \lambda \sum_q N_q^2 \int_0^\infty dr r^2 e^{-r^2/r_{0q}^2} \\ &= \sum_q E_q + \frac{\sqrt{\pi} \lambda}{4} \sum_q N_q^2 r_{0q}^3 = \sum_q \left(E_q + \frac{2 \sqrt{\lambda (E'_q + m'_q)}}{3E'_q + m'_q} \right) . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Escrevendo a equação de autovalores (5.20) na forma

$$E_q'^2 - m_q'^2 = 3 \sqrt{\lambda (E'_q + m'_q)} , \quad (5.29)$$

podemos expressar a massa de um bárion como

$$M = \sum_q \left(E_q + \frac{2(E_q'^2 - m_q'^2)}{3(3E_q' + m_q')} \right). \quad (5.30)$$

5.2 O campo piônico

5.2.1 Potencial para o campo piônico

Lembrando a discussão feita no capítulo 2, vimos que o campo piônico é introduzido em modelos hadrônicos com o intuito de restaurar a simetria quiral, que é quebrada no setor dos quarks. Também no capítulo 2 foi desenvolvida a teoria para a supressão do campo piônico, onde argumentamos que o campo piônico deve ser excluído do interior da sacola, de modo que a propriedade de liberdade assintótica dos quarks seja respeitada e que o tratamento do pión como um bóson de Goldstone seja mais consistente com as idéias atuais sobre o vácuo da QCD.

De acordo com estas idéias, a densidade Lagrangeana para o campo piônico físico no nosso modelo foi obtida em (2.17), sendo reproduzida aqui,

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} [m_\pi^2 + v_\pi(r)] \vec{\pi}^2. \quad (5.31)$$

Nesta expressão, $\vec{\pi}(x)$ é o campo dos píons, m_π é a massa dos píons e $v_\pi(r)$ é o potencial escalar que atua sobre o campo piônico. Lembramos que o potencial $v_\pi(r)$ está diretamente ligado à função de supressão do campo piônico, $F_\pi(r)$. Em princípio, a função de supressão determina a forma do potencial $v_\pi(r)$, mas, do mesmo modo que no capítulo 2, vamos entender a relação entre ambos como sendo dada pela equação diferencial (2.39), que determina $F_\pi(r)$ a partir de uma dada forma funcional de $v_\pi(r)$,

$$\frac{d^2 (r \sqrt{F_\pi})}{dr^2} - v_\pi(r) (r \sqrt{F_\pi}) = 0. \quad (5.32)$$

A fim de estipular uma forma adequada para o potencial piônico, lembramos que o papel primordial de $v_\pi(r)$ é impedir que o campo piônico entre no interior do hádron, porém deixando que o pión propague-se livremente no exterior do hádron. Deste modo, $v_\pi(r)$ deve ser um potencial repulsivo e deve tender a zero quando r aumenta. Guiados pela idéia de efetuar analiticamente a maioria dos cálculos no restante deste capítulo, escolhemos o potencial para o campo piônico na forma

$$v_\pi(r) = \begin{cases} \alpha_\pi/r^2 & , r < R_\pi \\ 0 & , r > R_\pi \end{cases}. \quad (5.33)$$

Com isto, temos dois novos parâmetros no modelo, α_π e R_π . O significado físico de α_π é bastante claro: α_π regula a intensidade do potencial. Como o termo de repulsão

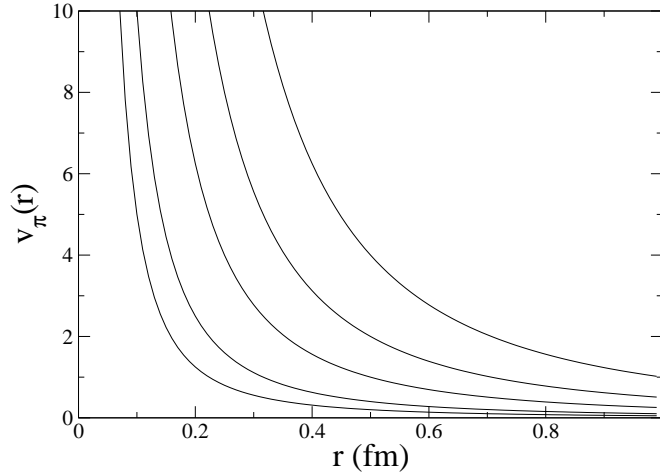


Figura 5.3: Gráfico de $v_\pi(r)$ como função de r . Na curva inferior temos $\alpha_\pi = 0.05$, na curva acima desta temos $\alpha_\pi = 0.1$, vindo depois as curvas referentes a $\alpha_\pi = 0.25$, $\alpha_\pi = 0.5$ e, na curva superior, $\alpha_\pi = 1.0$.

α_π/r^2 decai muito lentamente com r , introduzimos o parâmetro R_π , que simboliza uma distância a partir da qual o potencial piônico pode ser considerado nulo. A introdução deste parâmetro R_π também possibilitará que a função de supressão $F_\pi(r)$ tenha uma forma funcional adequada, como veremos a seguir. O gráfico de $v_\pi(r)$ pode ser observado na figura 5.3 para vários valores de α_π .

Para determinar a função de supressão do campo piônico $F_\pi(r)$, substituímos o potencial $v_\pi(r)$ dado por (5.33) na equação diferencial (5.32). Para $r < R_\pi$, esta equação assume a forma

$$\frac{d^2 (r \sqrt{F_\pi})}{dr^2} - \frac{\alpha_\pi}{r^2} (r \sqrt{F_\pi}) = 0, \quad (5.34)$$

e a sua solução finita em $r = 0$ pode ser encontrada na fórmula 2.148 de [39],

$$F_\pi(r) = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\sqrt{4\alpha_\pi+1}-1}, \quad (5.35)$$

onde α é uma constante ainda a ser determinada. Para $r > R_\pi$, a equação diferencial (5.32) para a função de supressão do campo piônico assume a forma

$$\frac{d^2 (r \sqrt{F_\pi})}{dr^2} = 0, \quad (5.36)$$

e a sua solução pode ser facilmente encontrada,

$$F_\pi(r) = (1 + \beta/r)^2, \quad (5.37)$$

onde β é uma constante a ser determinada. A forma para $F_\pi(r)$ encontrada acima é razoável sob o ponto de vista físico, pois claramente tende a 1 quando $r \rightarrow \infty$, o que

significa que o campo piônico não é suprimido quando está afastado da sacola. Entretanto, o novo parâmetro β em (5.37) nos parece supérfluo, pois, para $r > R_\pi$, o potencial $v_\pi(r)$ é identicamente nulo, e esperaríamos que não houvesse nenhuma supressão do campo piônico, ou seja, esperaríamos que $F_\pi(r)$ tivesse exatamente o valor 1. Tomaremos então $\beta = 0$. Exigindo que $F_\pi(r)$ seja contínua em R_π , pode-se deduzir facilmente que $\alpha = R_\pi$. Portanto, a forma final para a função de supressão é

$$F_\pi(r) = \begin{cases} (r/R_\pi)^{\sqrt{4\alpha_\pi+1}-1} & , r < R_\pi \\ 1 & , r > R_\pi \end{cases} . \quad (5.38)$$

Note-se que foi a introdução do parâmetro R_π , com $v_\pi(r) = 0$ para $r > R_\pi$, que possibilitou que pudéssemos obter $F_\pi(r) = 1$ assintoticamente. O gráfico de $F_\pi(r)$ pode ser observado na figura 5.4 como função de r/R_π para vários valores de α_π .

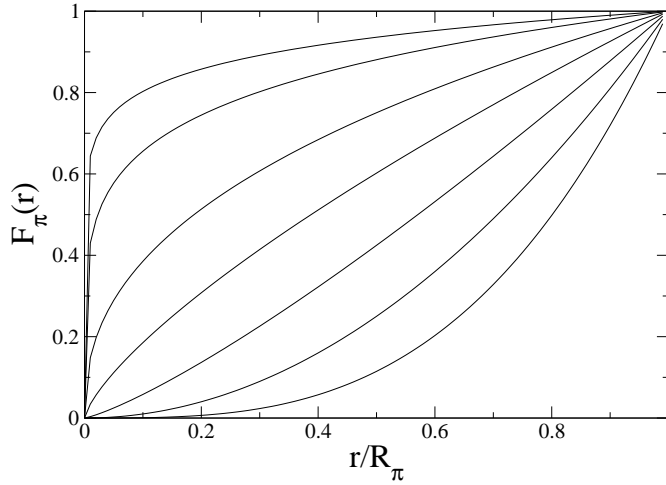


Figura 5.4: Gráfico de $F_\pi(r)$ como função de r/R_π . Na curva superior temos $\alpha_\pi = 0.05$, na curva abaixo desta temos $\alpha_\pi = 0.1$, vindo depois as curvas referentes a $\alpha_\pi = 0.25$, $\alpha_\pi = 0.5$, $\alpha_\pi = 1.0$, $\alpha_\pi = 2.0$ e, na curva inferior, $\alpha_\pi = 4.0$.

5.2.2 Função de onda do pión

A equação para a parte radial do campo piônico $\mathcal{R}(r)$ foi escrita para um potencial $v_\pi(r)$ arbitrário em (2.58). No caso particular do potencial dado por (5.33), esta equação adquire, para $r < R_\pi$, a forma

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{2}{r} \mathcal{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{2 + \alpha_\pi}{r^2} \right) \mathcal{R}(r) = 0 , \quad (5.39)$$

e sua solução regular na origem pode ser facilmente obtida,

$$\mathcal{R}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N_1}{\sqrt{kr}} J_\nu(kr) , \quad (5.40)$$

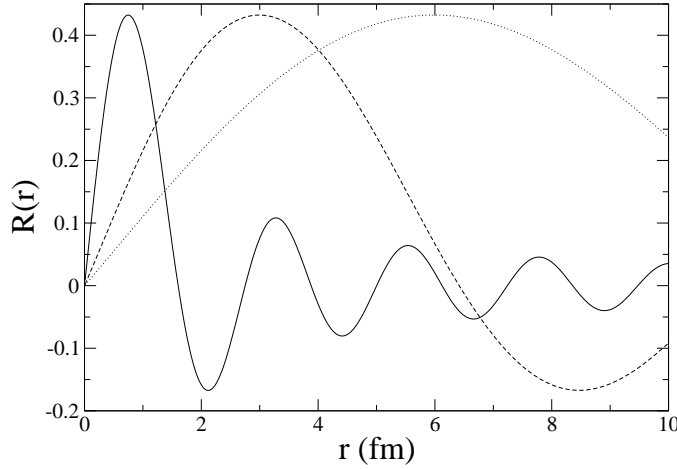


Figura 5.5: Gráfico de $\mathcal{R}(r)$ como função de r para $\alpha_\pi = 0.06$. Na curva contínua temos $k = 4 m_\pi$, na curva tracejada temos $k = m_\pi$ e na curva pontilhada temos $k = 0.5 m_\pi$.

sendo $\nu = \sqrt{\alpha_\pi + 9/4}$. Para $r > R_\pi$, a equação para a parte radial do campo piônico $\mathcal{R}(r)$ é

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{2}{r} \mathcal{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \mathcal{R}(r) = 0, \quad (5.41)$$

e sua solução pode ser facilmente obtida,

$$\mathcal{R}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N_1}{\sqrt{kr}} [N_2 J_{3/2}(kr) + N_3 Y_{3/2}(kr)] = N_1 [N_2 j_1(kr) + N_3 y_1(kr)]. \quad (5.42)$$

Exigindo-se a continuidade de $\mathcal{R}(r)$ e de sua derivada em $r = R_\pi$, pode-se determinar as constantes N_2 e N_3 de acordo com o sistema de equações

$$\begin{aligned} N_2 J_{3/2}(kR_\pi) + N_3 Y_{3/2}(kR_\pi) &= J_\nu(kR_\pi) \\ N_2 J_{5/2}(kR_\pi) + N_3 Y_{5/2}(kR_\pi) &= J_{\nu+1}(kR_\pi) - \frac{\nu - 3/2}{kR_\pi} J_\nu(kR_\pi). \end{aligned} \quad (5.43)$$

No modo como foi escrita, a função de onda do pión já está normalizada conforme a condição de normalização (A.19). Na figura 5.5 podemos ver o gráfico de $\mathcal{R}(r)$ para $k = 0.5 m_\pi, m_\pi, 4 m_\pi$.

5.2.3 Solução particular para o campo piônico

A equação para o campo piônico com fonte foi investigada na seção 2.10. Lembramos que a solução foi escrita na forma (2.83),

$$\vec{\pi}(\vec{r}) = \langle B | \sum_q (\vec{\sigma}_q \cdot \hat{r}) \vec{\tau}_q | B \rangle h(r), \quad (5.44)$$

onde a função de onda radial $h(r)$ obedece à equação diferencial (2.90),

$$h'' + \frac{2h'}{r} - \left(m_\pi^2 + v_\pi(r) + \frac{2}{r^2} \right) h = \frac{m'_u + V_c(r)}{2\pi f_\pi \sqrt{F_\pi(r)}} g(r) f(r). \quad (5.45)$$

Substituindo-se na equação acima as expressões encontradas neste capítulo para $v_\pi(r)$, $F_\pi(r)$, $V_c(r)$, $g(r)$ e $f(r)$, obtemos as seguintes equações para a função de onda radial $h(r)$,

$$\begin{aligned} h'' + \frac{2h'}{r} - \left(m_\pi^2 + \frac{2 + \alpha_\pi}{r^2} \right) h &= \frac{-2\lambda(E'_u + m'_u)}{(3E'_u + m'_u)} \frac{2m'_u + \lambda r^2}{\pi^{3/2} f_\pi} \left(\frac{R_\pi}{r} \right)^{\sqrt{\alpha_\pi + 1/4} - 1/2} \frac{r}{r_0} e^{-r^2/r_0^2} \\ h'' + \frac{2h'}{r} - \left(m_\pi^2 + \frac{2}{r^2} \right) h &= -\frac{2\lambda(E'_u + m'_u)}{(3E'_u + m'_u)} \frac{2m'_u + \lambda r^2}{\pi^{3/2} f_\pi} \frac{r}{r_0} e^{-r^2/r_0^2}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

A equação de cima vale para $r < R_\pi$, enquanto que a equação de baixo vale para $r > R_\pi$. Fazendo a troca de variável $x = r/r_0$ em ambas as equações e usando a definição de r_0 , obtemos

$$\begin{aligned} h'' + \frac{2h'}{x} - \left(m_\pi^2 r_0^2 + \frac{2 + \alpha_\pi}{x^2} \right) h &= \frac{-2(E'_u{}^2 - m'_u{}^2)}{3(3E'_u + m'_u)} \frac{2m'_u + \lambda r_0^2 x^2}{\pi^{3/2} f_\pi} \left(\frac{R_\pi}{r_0 x} \right)^{\sqrt{\alpha_\pi + 1/4} - 1/2} x e^{-x^2} \\ h'' + \frac{2h'}{x} - \left(m_\pi^2 r_0^2 + \frac{2}{x^2} \right) h &= \frac{-2(E'_u{}^2 - m'_u{}^2)}{3(3E'_u + m'_u)} \frac{2m'_u + \lambda r_0^2 x^2}{\pi^{3/2} f_\pi} x e^{-x^2}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde a equação de cima vale para $x < R_\pi/r_0$, enquanto que a equação de baixo vale para $x > R_\pi/r_0$. Ao ajustarmos os parâmetros do modelo, veremos que o valor de R_π/r_0 é maior que 6, e isto implica que o termo de fonte na segunda equação em (5.47) é muito pequeno, pois $x^3 e^{-x^2} < 5 \cdot 10^{-14}$ para $x > 6$. Deste modo, podemos considerar que o termo de fonte é nulo para $x > R_\pi/r_0$, e portanto que a função de onda particular $h(x)$ também é nula neste mesmo intervalo. Como consequência, temos de resolver somente a primeira equação em (5.47), sendo as condições de contorno dadas por $h(0) = h(R_\pi/r_0) = 0$. Na figura 5.6 podemos ver o gráfico de $h(x)$ como função de x .

5.3 Correções à massa bariônica

5.3.1 Correção de centro de massa

A correção de centro de massa é um ingrediente importante nos modelos de sacola e de potencial relativístico, já que nestes modelos os quarks são tratados com funções de onda de partícula única. A motivação para a correção de centro de massa foi vista no capítulo 3, enquanto que a teoria foi revisada no apêndice B. A quantidade que controla

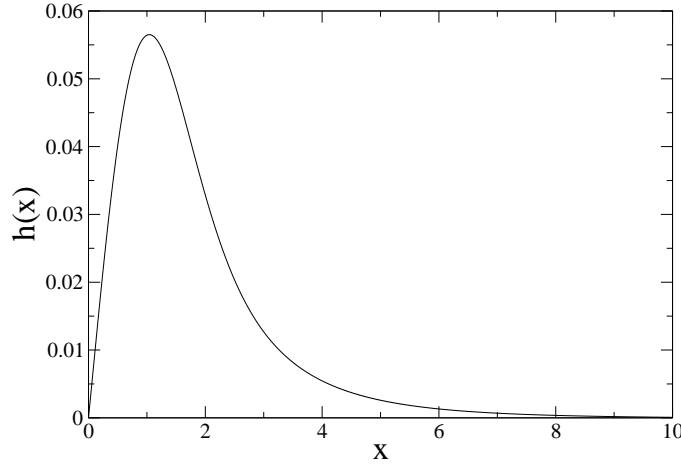


Figura 5.6: Gráfico de $h(x)$ como função de x para $\alpha_\pi = 0.06$ e $R_\pi/r_0 = 11.1$.

a grandeza da correção de centro de massa é o valor esperado do quadrado do momento linear dos quarks,

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}) \vec{p}^2 \psi(\vec{r}) . \quad (5.48)$$

No capítulo 3, depois de diversas manipulações desta expressão, obtivemos a fórmula (3.23),

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = 2 \int_0^\infty dr [E - V(r)] [E - m - 2V(r)] u^2(r) , \quad (5.49)$$

que, com as funções de onda e o potencial do oscilador harmônico, pode ser avaliada analiticamente, fornecendo o resultado

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = \frac{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)}{6(3E' + m')} . \quad (5.50)$$

A correção para a massa dos bárions é dada pela fórmula (3.1),

$$\Delta E_{cm} = \left(\left(\sum_{q=1}^3 E_q \right)^2 - \sum_{q=1}^3 \langle p_q^2 \rangle \right)^{1/2} - \sum_{q=1}^3 E_q . \quad (5.51)$$

Os valores de ΔE_{cm} para cada bárion do octeto fundamental podem ser vistos na tabela 5.1, sendo todos da ordem de $175 MeV$. Para o núcleon e para a ressonância Δ , isto significa uma correção de 18% sobre a energia dos quarks E_B . Para os outros bárions a correção é menor, tanto em valor absoluto como em valor relativo.

5.3.2 Troca de um glúon

A correção à massa dos bárions devida à parte magnética de cor da troca de um glúon, ΔE_g , será feita de maneira análoga aos cálculos no capítulo 3. Vimos que ΔE_g é escrita

na forma (3.60)

$$\Delta E_g = \alpha_c (a_{uu} I_{uu} + a_{us} I_{us} + a_{ss} I_{ss}) , \quad (5.52)$$

onde os coeficientes $a_{qq'}$ para os bárions do octeto fundamental podem ser vistos na tabela 3.1 e os valores de $I_{qq'}$ são dados por (3.61),

$$I_{qq'} = \frac{16}{9 (E_q + m_q) (E_{q'} + m_{q'})} \int_0^\infty dr r^2 g_q^2(r) g_{q'}^2(r) . \quad (5.53)$$

Usando a expressão para a função de onda dos quarks, podemos calcular diretamente o valor de $I_{qq'}$, obtendo

$$\begin{aligned} I_{qq'} &= \frac{16 N_q^2 N_{q'}^2}{9 r_{0q}^2 r_{0q'}^2 (E_q + m_q) (E_{q'} + m_{q'})} \int_0^\infty dr r^2 e^{-r^2(1/r_{0q}^2 + 1/r_{0q'}^2)} \\ &= \frac{16 N_q^2 N_{q'}^2}{9 r_{0q}^2 r_{0q'}^2 (E_q + m_q) (E_{q'} + m_{q'}) (1/r_{0q}^2 + 1/r_{0q'}^2)^{3/2}} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} \\ &= \frac{256}{9\sqrt{\pi}} \frac{1}{(3E_q' + m_q')} \frac{1}{(3E_{q'}' + m_{q'}')} \frac{1}{(r_{0q}^2 + r_{0q'}^2)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (5.54)$$

Usando a equação de autovalores na forma $(E'^2 - m'^2)r_0^2 = 3$, podemos escrever

$$I_{qq'} = \frac{256}{9\sqrt{\pi}} \frac{1}{R_{qq'}^3} \frac{1}{(3E_q' + m_q')} \frac{1}{(3E_{q'}' + m_{q'}')} , \quad (5.55)$$

onde o termo $R_{qq'}$ é definido como

$$R_{qq'}^2 = \frac{3}{(E_q'^2 - m_q'^2)} + \frac{3}{(E_{q'}'^2 - m_{q'}'^2)} . \quad (5.56)$$

5.3.3 Troca de um pión

Como vimos no capítulo 3, a expressão para a função de vértice (3.120) pode ser escrita como

$$v(k) = \frac{20}{3\sqrt{3\pi} m_\pi g_A} \int_0^\infty dr r^2 \frac{m'_u + V_c(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} g_u(r) f_u(r) \mathcal{R}_k(r) , \quad (5.57)$$

onde o índice u serve para salientar que somente os quarks u e d dos bárions contribuem para a troca de pions (lembramos que estamos supondo $m_u = m_d$, e portanto as funções de onda para os quarks u e d são as mesmas). Substituindo as funções de onda dos quarks, o potencial confinante e a função de supressão do campo piônico nesta expressão, obtemos

$$\begin{aligned} v(k) &= -\frac{20N_1}{3\sqrt{6} m_\pi g_A} \frac{N^2 R_\pi^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}-\frac{1}{2}}}{r_0^4 (E+m)} \int_0^{R_\pi} dr r^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r^2}{r^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}-\frac{1}{2}}} e^{-r^2/r_0^2} \frac{J_\nu(kr)}{\sqrt{kr}} \\ &\quad - \frac{20N_1}{3\sqrt{6} m_\pi g_A} \frac{N^2}{r_0^4 (E+m)} \int_{R_\pi}^\infty dr r^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r^2}{\sqrt{kr}} e^{-r^2/r_0^2} [N_2 J_{3/2}(kr) + N_3 Y_{3/2}(kr)] . \end{aligned} \quad (5.58)$$

Escrevendo as integrais em $v(k)$ usando a variável adimensional $x = r/r_0$, temos

$$v(k) = -\frac{20N_1N^2}{3\sqrt{6}m_\pi g_A(E+m)} \left\{ \left(\frac{R_\pi}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}-\frac{1}{2}} \int_0^{R_\pi/r_0} dx x^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2}{x^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}-\frac{1}{2}}} e^{-x^2} \frac{J_\nu(kr_0x)}{\sqrt{kr_0x}} \right. \\ \left. + \int_{R_\pi/r_0}^\infty dx x^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2}{\sqrt{kr_0x}} e^{-x^2} [N_2 J_{3/2}(kr_0x) + N_3 Y_{3/2}(kr_0x)] \right\} \quad (5.59)$$

A segunda integral na expressão acima é imprópria, pois a região de integração é infinita. Entretanto, a presença da função exponencial e^{-x^2} leva a crer que a contribuição de valores grandes de x seja muito pequena. Esta integral será então avaliada numericamente integrando-se em x de 1 até um certo valor finito y . O erro incorrido nesta aproximação pode ser facilmente estimado,

$$|\text{erro}| \equiv \left| \int_y^\infty dx x^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2}{\sqrt{kr_0x}} e^{-x^2} [N_2 J_{3/2}(kr_0x) + N_3 Y_{3/2}(kr_0x)] \right| \\ < \frac{1}{\sqrt{2}} \int_y^\infty dx x^3 \frac{|m'| + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2}{\sqrt{kr_0x}} e^{-x^2} \\ < \frac{1}{\sqrt{2kr_0}} \int_y^\infty dx x^3 (|m'| + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2) e^{-x^2} \\ < \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{2kr_0}} \left[|m'| \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 \left(\frac{y^4}{2} + y^2 + 1\right) \right]. \quad (5.60)$$

A primeira desigualdade segue por que o valor absoluto máximo da função de Bessel pode ser estimado (fórmula 9.1.60 de [15]) como $|J_\nu(x)| \leq 1/\sqrt{2}$ se $\nu \geq 1$; a segunda desigualdade segue pois $x > 1$; a última desigualdade segue resolvendo-se explicitamente a integral. Escolhendo, por exemplo, $y = 6$ podemos ver que o erro será bem pequeno,

$$|\text{erro}| < 10^{-14} \left(\frac{2|m'|}{5} + 8\lambda r_0^2 \right). \quad (5.61)$$

A função de vértice fica então sendo dada por

$$v(k) = -\frac{20N_1N^2}{3\sqrt{6}m_\pi g_A(E+m)} \left\{ \left(\frac{R_\pi}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}-\frac{1}{2}} \int_0^{R_\pi/r_0} dx x^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2}{x^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}-\frac{1}{2}}} e^{-x^2} \frac{J_\nu(kr_0x)}{\sqrt{kr_0x}} \right. \\ \left. + \int_{R_\pi/r_0}^6 dx x^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2}{\sqrt{kr_0x}} e^{-x^2} [N_2 J_{3/2}(kr_0x) + N_3 Y_{3/2}(kr_0x)] \right\} \quad (5.62)$$

Tendo sido calculada a função de vértice, podemos determinar os valores dos fatores de renormalização Z_π e δ_π , que foram definidos em (3.124). Lembramos que Z_π é o fator de renormalização da função de onda bariônica, enquanto que δ_π está relacionado à renormalização da massa (termo de auto-energia). As integrais (3.124) para Z_π e δ_π ficam

mais simples se mudarmos a variável de integração de k para $k' = kr_0$,

$$\begin{aligned} Z_\pi &= \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^3} = \int_0^\infty dk' k' \frac{v^2(k')}{(m_\pi^2 r_0^2 + k'^2)^{3/2}} \\ \delta_\pi &= \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^2} = \frac{1}{r_0} \int_0^\infty dk' k' \frac{v^2(k')}{(m_\pi^2 r_0^2 + k'^2)}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

sendo $v(k') = \sqrt{k'} v(k)$, ou seja,

$$\begin{aligned} v(k') &= -\frac{20 N_1 N^2}{3\sqrt{6} m_\pi g_A (E + m)} \left\{ \left(\frac{R_\pi}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}-\frac{1}{2}} \int_0^{R_\pi/r_0} dx x^3 \frac{m' + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2}{x^{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha_\pi+1}}} e^{-x^2} J_\nu(k'x) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k'} \int_{R_\pi/r_0}^6 dx x^3 (m' + \frac{1}{2}\lambda r_0^2 x^2) e^{-x^2} [N_2 j_1(k'x) + N_3 y_1(k'x)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

5.4 Fator de forma da interação pión-núcleon

Como foi visto na seção 4.2, o fator de forma da interação pión-núcleon $g_{\pi NN}(q^2)$ pode ser calculado, levando-se em conta a sub-estrutura de quarks do núcleon, a partir da interação pión-quark. Segundo esta concepção, a expressão para $g_{\pi NN}(q^2)$ é dada por (4.11),

$$g_{\pi NN}(q^2) = -\frac{20 M_N}{3 f_\pi q} \int_0^\infty dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} g(r) f(r) \mathcal{R}_q(r). \quad (5.65)$$

Para o cálculo explícito do fator de forma da interação pión-núcleon, lembramos que $g_{\pi NN}(q^2)$ é proporcional à função de vértice $v(k)$ definida em (3.120), como foi visto na equação (4.13). Com os quarks sujeitos ao potencial de oscilador harmônico, a função de vértice foi calculada na seção 5.3.3.

Vejamos agora o valor da constante de acoplamento pión-núcleon, $g_{\pi NN}$. Esta constante foi definida em (4.14) de modo que seja igual ao fator de forma da interação pión-núcleon quando o quadri-momento transferido é igual à massa do pión, $g_{\pi NN} = g_{\pi NN}(m_\pi^2)$. Lembramos também que, na literatura, freqüentemente usa-se a aproximação $g_{\pi NN} = g_{\pi NN}(0)$ para facilitar os cálculos, de modo que a expressão para $g_{\pi NN}$ seja dada por (4.15). Aplicando esta mesma aproximação à nossa fórmula (5.65), obtemos

$$\begin{aligned} g_{\pi NN}(0) &= \lim_{q \rightarrow 0} g_{\pi NN}(q^2) \\ &\rightarrow -\frac{20 M_N}{3 f_\pi q} \int_0^\infty dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} g(r) f(r) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N_1}{\sqrt{qr}} J_\nu(qr) \\ &\rightarrow -\frac{20 M_N}{3 f_\pi q} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty dr r^2 \frac{m_u + V(r)}{\sqrt{F_\pi(r)}} g(r) f(r) \frac{N_1 (qr/2)^\nu}{\sqrt{qr} \Gamma(\nu + 1)} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.66)$$

onde usamos a expansão da função de Bessel $J_\nu(z)$ para pequenos valores do argumento z (fórmula 9.1.7 de [15]), e o último resultado segue pois $\nu = \sqrt{\alpha_\pi + 9/4}$ e é sempre maior que $3/2$. A fórmula (4.15) usada na literatura pode ser obtida no nosso modelo no limite em que o potencial piônico $v_\pi(r)$ torna-se nulo, ou seja, $\alpha_\pi = 0$, o que implica também que $F_\pi(r) = 1$ e $\nu = 3/2$. No entanto, com $\alpha_\pi \neq 0$, devemos calcular a constante de acoplamento pión-núcleon a partir da fórmula $g_{\pi NN} = g_{\pi NN}(m_\pi^2)$.

5.5 Constante de acoplamento axial do núcleon

A constante de acoplamento axial do núcleon foi descrita na seção 4.3, e vimos que ela recebe contribuições em separado dos quarks e dos píons. A contribuição dos quarks foi calculada em (4.38),

$$g_{A,q} = \frac{20}{9} \int_0^\infty dr u^2(r) - \frac{5}{9}. \quad (5.67)$$

Com o potencial de oscilador harmônico e a função de onda dos quarks obtidas neste capítulo, a integral acima podem ser feitas analiticamente. O resultado pode ser escrito como

$$g_{A,q} = \frac{5(5E' + 7m')}{9(3E' + m')}. \quad (5.68)$$

A contribuição dos píons foi calculada na equação (4.48), que pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} g_{A,\pi} &= -\frac{40\pi f_\pi}{9} \int_0^\infty dr r^2 h(r) \frac{\partial_r F_\pi}{\sqrt{F_\pi}} \\ &= -\frac{40\pi f_\pi}{9} (\sqrt{4\alpha_\pi + 1} - 1) \int_0^\infty dr r h(r) \sqrt{F_\pi} \\ &= -\frac{40\pi f_\pi r_0^2}{9} (\sqrt{4\alpha_\pi + 1} - 1) \int_0^\infty dx x h(x) \left(\frac{x r_0}{R_\pi}\right)^{\sqrt{\alpha_\pi + 1/4} - 1/2}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

5.6 Raio de carga do núcleon

O raio de carga de um hádron foi definido na seção 4.1. Nos modelos de sacola, existem dois tipos de contribuição para o raio de carga. Em um tipo o fóton interage com os quarks que constituem o hádron, no outro tipo o fóton interage com a nuvem piônica em volta do hádron. O cálculo de ambas estas contribuições foi feito na seção 4.4, com o resultado final dado pela equação (4.91), que reproduzimos aqui,

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_p &= Z_N \left[1 + \frac{459}{25} Z f_{NN\pi}^2 \right] \left(-\frac{3}{4M_N^2} + \langle r_q^2 \rangle \right) + \frac{54}{25} Z_N Z f_{NN\pi}^2 \left(\langle r^2 \rangle_\pi + \frac{3}{2} \Lambda^2 \right) \\ \langle r^2 \rangle_n &= Z_N \left[\frac{54}{25} Z f_{NN\pi}^2 \right] \left(-\frac{3}{4M_N^2} + \langle r_q^2 \rangle \right) - \frac{54}{25} Z_N Z f_{NN\pi}^2 \left(\langle r^2 \rangle_\pi + \frac{3}{2} \Lambda^2 \right), \end{aligned} \quad (5.70)$$

e lembramos que $\langle r^2 \rangle_\pi^{1/2} = 0.78 fm$ é o valor experimental do raio de carga do pión e Λ provém de um fator de corte fenomenológico, tendo o valor $\Lambda^2 = 2fm^2$. Além disso,

$\langle r_q^2 \rangle$ é o raio quadrático médio de um quark no estado fundamental, que foi calculado na fórmula (4.4) da seção 4.1. O valor de $\langle r_q^2 \rangle$ pode ser calculado analiticamente usando-se as funções de onda dos quarks encontradas neste capítulo, obtendo-se o resultado

$$\langle r_q^2 \rangle = \int d^3r \psi^\dagger r^2 \psi = \frac{3}{2} \frac{(11E' + m')}{(3E' + m')(E'^2 - m'^2)}. \quad (5.71)$$

A inclusão dos efeitos da nuvem piônica (mais especificamente, renormalização da função de onda), produz [25] o raio de carga negativo para o nêutron e altera levemente o raio de carga do próton.

5.7 Momento magnético do núcleon

O momento magnético do núcleon, em unidades de magneton nuclear, pode ser calculado tomando-se o limite $q^2 \rightarrow 0$ do fator de forma magnético. Temos então

$$\begin{aligned} \mu_p &= Z_N \left[1 + \frac{87}{5} f_{NN\pi}^2 Z \right] G_M^0(0) + \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} \\ \mu_n &= -\frac{2}{3} Z_N [1 + 18 f_{NN\pi}^2 Z] G_M^0(0) - \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

sendo $G_M^0(0)$ dado através de (4.111) por

$$G_M^0(0) = \frac{2M_N}{E' + m'} \int_0^\infty dr r^2 g^2(r) = \frac{4M_N}{3E' + m'}. \quad (5.73)$$

5.8 Ajuste dos parâmetros do modelo

O modelo apresentado neste capítulo tem 7 parâmetros: m_u , m_s , V_0 , λ , α_c , α_π e R_π . Este pode ser considerado praticamente um conjunto mínimo de parâmetros, tendo-se em vista todos os ingredientes físicos do modelo. As massas dos quarks, por exemplo, são imprescindíveis em qualquer modelo hadrônico, e devem ser ajustadas de acordo com cada modelo específico. O mesmo se aplica à constante de acoplamento quark-gluon α_c . As constantes V_0 e λ fixam a profundidade e a intensidade do potencial confinante dos quarks, e portanto ambos parâmetros têm sentido físico. Para o potencial dos píons temos α_π e R_π . O valor de α_π regula a intensidade do potencial piônico, sendo portanto fisicamente necessário, enquanto que R_π é de natureza mais matemática do que física, tendo o papel de possibilitar que $F_\pi(r)$ tenha o comportamento assintótico adequado, como foi explicado logo após a equação (5.38). Deste modo, somente um dos parâmetros do modelo, R_π , não tem uma fundamentação física realmente forte.

Para ajustarmos os 7 parâmetros mencionados acima, exigimos que os valores calculados para determinadas quantidades físicas fossem o mais próximo possível dos respectivos valores experimentais. As quantidades físicas envolvidas no ajuste foram as massas dos

bárions do octeto fundamental, a constante de acoplamento pión-núcleon, o raio quadrático médio e momento magnético do próton e do nêutron. A constante axial do núcleon não foi envolvida no ajuste dos parâmetros. Com o objetivo de otimizar os programas de computador, o ajuste foi feito usando-se combinações dos parâmetros. Assim, notando que R_π aparece em todas as fórmulas sempre dividido por r_{0u} (que é o valor de r_0 , definido no texto logo após a equação (5.8), calculado para o quark u), usamos como parâmetro a variável R_π/r_0 . As outras combinações que utilizamos foram m'_u e m'_s , sendo m' definida em (5.19). O melhor ajuste ocorreu com as seguintes combinações dos parâmetros,

$$\begin{aligned} m'_u &= 148 \text{ MeV} & m'_s &= 305 \text{ MeV} & V_0 &= -275 \text{ MeV} & \lambda &= 1.4 \text{ fm}^{-3} \\ \alpha_c &= 0.8 & \alpha_\pi &= 0.07 & R_\pi/r_0 &= 16 \end{aligned} \quad (5.74)$$

o que implica em

$$m_u = 285.5 \text{ MeV} \quad m_s = 442.5 \text{ MeV} \quad R_\pi = 10.8 \text{ fm} . \quad (5.75)$$

Os resultados para as massas dos bárions do octeto fundamental estão na tabela 5.1, onde discriminamos as contribuições de cada termo de energia. Lembramos que a massa de um bárion é composta pelos seguintes termos

$$M = E_B + E_{vac} + \Delta E_{cm} + \Delta E_g + \Delta E_\pi , \quad (5.76)$$

onde E_B é a soma das energias de cada quark, E_{vac} é a energia de vácuo, ΔE_{cm} é a correção de centro de massa, ΔE_g é a correção devida à parte magnética de cor da troca de um glúon, e ΔE_π é a correção devida à troca de um pión.

Os resultados para a constante de acoplamento pión-núcleon, a constante axial do núcleon, e para o raio quadrático médio e momento magnético do próton e do nêutron estão na tabela 5.2.

| hádron | N | Δ | Λ | Σ | Σ^* | Ξ | Ξ^* | Ω^- |
|-----------------|------|----------|-----------|----------|------------|-------|---------|------------|
| experim. | 939 | 1232 | 1116 | 1193 | 1385 | 1318 | 1533 | 1672 |
| teoria | 935 | 1250 | 1116 | 1192 | 1393 | 1327 | 1528 | 1655 |
| E_B | 1168 | | 1268 | | | 1369 | | 1469 |
| E_{vac} | 296 | | 289 | | | 282 | | 275 |
| ΔE_{cm} | -206 | | -196 | | | -187 | | -179 |
| ΔE_g | -113 | 113 | -113 | -96 | 105 | -104 | 97 | 90 |
| ΔE_π | -209 | -121 | -132 | -73 | | -33 | | 0 |

Tabela 5.1: A massa dos bárions do octeto fundamental (todas as quantidades dadas em MeV).

| | $g_{\pi NN}^2/4\pi$ | g_A | $\langle r^2 \rangle_p$ | $\langle r^2 \rangle_n$ | μ_p | μ_n |
|----------|---------------------|--------|-------------------------|-------------------------|---------|---------|
| experim. | 14.1 | 1.2573 | 0.743 fm | -0.119 fm ² | 2.7928 | -1.9130 |
| teoria | 12.4 | 1.1496 | 0.853 fm | -0.100 fm ² | 2.9458 | -2.2728 |

Tabela 5.2: Propriedades do núcleon.

5.9 Fator de forma elétrico do núcleon

Na seção 4.4.1 foram calculados os fatores de forma elétricos do próton e do nêutron, com o resultado final sendo expresso na equação (4.86),

$$\begin{aligned}
G_E^p(q^2) &= Z_N \left[1 + \frac{459}{25} Z f_{NN\pi}^2 \right] G_E^0(q^2) + \frac{54}{25} Z_N Z f_{NN\pi}^2 \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2 \right) e^{-q^2 \Lambda^2/4} \\
G_E^n(q^2) &= Z_N \left[\frac{54}{25} Z f_{NN\pi}^2 \right] G_E^0(q^2) - \frac{54}{25} Z_N Z f_{NN\pi}^2 \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2 \right) e^{-q^2 \Lambda^2/4}.
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Lembramos que em ambas as equações acima a primeira parcela corresponde à contribuição da interação fóton-quark, e a segunda parcela à contribuição da interação fóton-píon. A função $G_E^0(q^2)$ foi obtida em (4.78),

$$G_E^0(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right)^{1/2} \int_0^\infty dr r^2 [g^2(r) + f^2(r)] j_0(qr), \tag{5.78}$$

e, com as funções de onda do oscilador harmônico, chegamos ao resultado

$$G_E^0(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{q^2}{2(E' + m')(3E' + m')} \right] e^{-q^2 r_0^2/4}. \tag{5.79}$$

Os gráficos dos fatores de forma elétricos do próton e do nêutron podem ser vistos nas figuras 5.7 e 5.8.

5.10 Fator de forma magnético do núcleon

Na seção 4.4.3 foram calculados os fatores de forma magnéticos do próton e do nêutron, com o resultado final sendo expresso na equação (4.108),

$$\begin{aligned}
G_M^p(q^2) &= Z_N \left[1 + \frac{87}{5} f_{NN\pi}^2 Z \right] G_M^0(q^2) \\
&\quad + \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2 \right) e^{-q^2 \Lambda^2/4} \\
G_M^n(q^2) &= -\frac{2}{3} Z_N [1 + 18 f_{NN\pi}^2 Z] G_M^0(q^2) \\
&\quad - \frac{528}{25} M_N Z_N f_{NN\pi}^2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{v^2(k)}{\omega_k^4} \left(1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_\pi q^2 \right) e^{-q^2 \Lambda^2/4}.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Lembramos que em ambas as equações acima a primeira parcela corresponde à contribuição da interação fóton-quark, e a segunda parcela à contribuição da interação fóton-píon. A função $G_M^0(q^2)$ foi obtida em (4.104),

$$G_M^0(q^2) = -\frac{4M_N}{q} \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty dr r^2 g(r) f(r) j_1(qr), \quad (5.81)$$

e, com as funções de onda do oscilador harmônico, chegamos ao resultado

$$G_M^0(q^2) = \frac{4M_N}{3E' + m'} \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2}\right)^{1/2} e^{-q^2 r_0^2/4}. \quad (5.82)$$

Os gráficos dos fatores de forma magnéticos do próton e do nêutron podem ser vistos nas figuras 5.9 e 5.10.

Os resultados para os fatores de forma eletromagnéticos do núcleon apresentam boa concordância com os resultados experimentais para valores pequenos de momentum transferido, exceto no caso do fator de forma elétrico no nêutron, para o qual as incertezas experimentais também são grandes. Para valores maiores do momentum transferido, os resultados apresentados devem ser corrigidos pelas correções de recuo e de centro de massa [38].

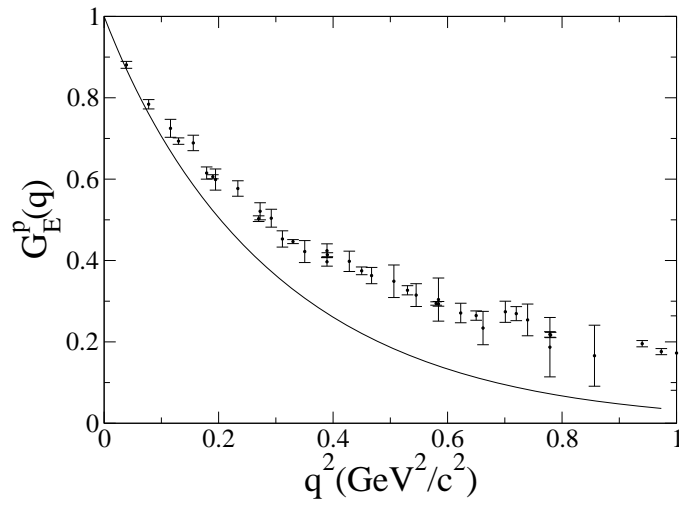


Figura 5.7: Fator de forma elétrico do próton como função de q^2 .

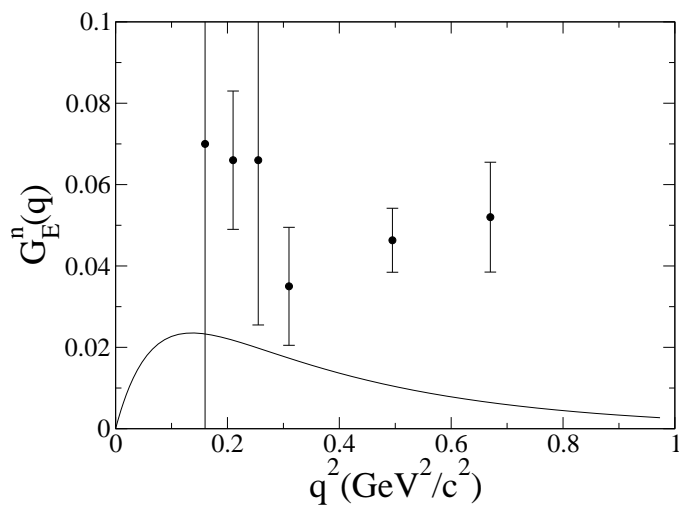


Figura 5.8: Fator de forma elétrico do nêutron como função de q^2 .

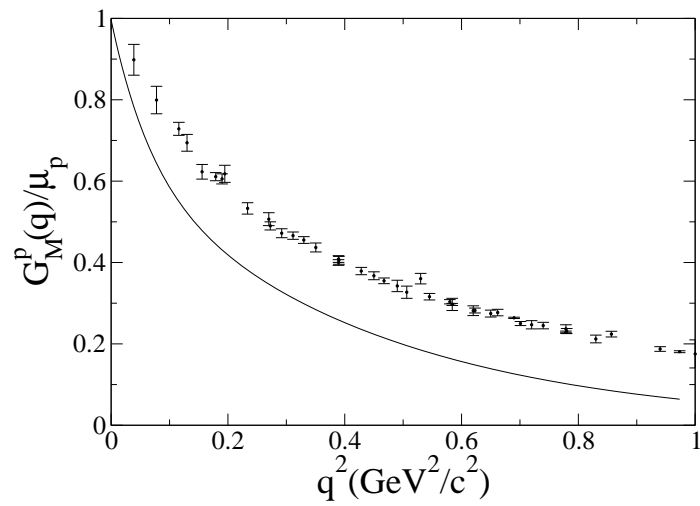


Figura 5.9: Fator de forma magnético do próton como função de q^2 .

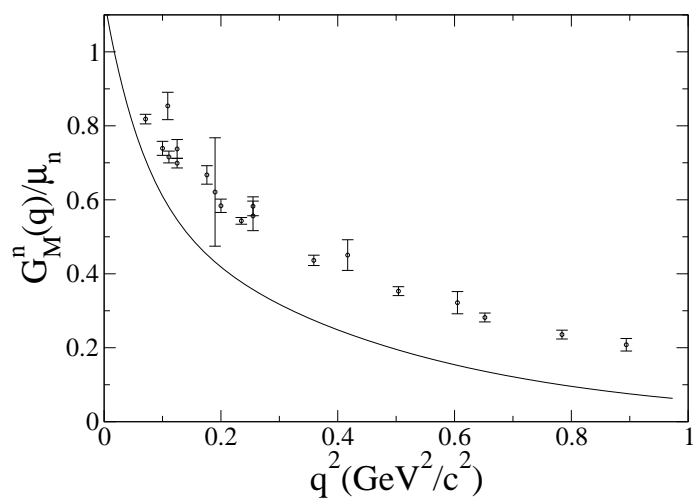


Figura 5.10: Fator de forma magnético do nêutron como função de q^2 .

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos um novo modelo hadrônico e o aplicamos na descrição das massas do octeto bariônico fundamental e nas propriedades estáticas do núcleon.

No setor dos quarks, o modelo que desenvolvemos apresenta características tanto de modelos de potencial relativístico como de modelos de sacola do tipo do MIT. Assim, o modelo incorpora a energia de vácuo, que representa a diferença de energia entre os vácuos perturbativo e não-perturbativo da QCD, incorpora a conservação de energia e momentum, mas não possui as descontinuidades do modelo do MIT, tendo uma superfície suave, com espessura finita.

No setor piônico, o modelo apresenta características inovadoras na realização da simetria quiral, tendo como consequência o fato único na literatura de que esta simetria é conservada, mesmo sendo o campo piônico submetido a um potencial escalar. Em vista disso, o cálculo de várias propriedades hadrônicas é modificado. Em particular, o valor da carga axial g_A passa a receber uma contribuição dos píons, enquanto que em outros modelos esta contribuição é nula [18].

O modelo de sacola que desenvolvemos também permitiu (no âmbito fenomenológico) a conciliação das duas mais importantes propriedades hadrônicas: o confinamento e a simetria quiral. Nos modelos hadrônicos, a propriedade de confinamento é realizada através de um termo escalar na densidade Lagrangeana. Este termo viola a simetria quiral e, para restaurá-la, é introduzido o campo piônico. De acordo com o pensamento atual, no interior hadrônico a simetria quiral é realizada no modo de Wigner e, no exterior, no modo de Goldstone. Como os píons são bósons de Goldstone, eles não devem estar presentes no interior dos hádrons. Além disso, a propriedade de liberdade assintótica seria violada se os píons pudessem entrar no interior hadrônico. Nos modelos do tipo do MIT, por terem uma superfície de espessura infinitesimal, é possível excluir os píons do interior dos hádrons. No entanto, o fato da superfície ter espessura infinitesimal ocasiona a divergência da auto-energia devida à interação pión-quark [8]. Por outro lado, nos modelos de potencial relativístico, a auto-energia que mencionamos é finita, mas não é possível excluir os píons do interior hadrônico. Somente no modelo que desenvolvemos é possível excluir os píons e manter finita a auto-energia devida à interação pión-quark, e assim pudemos conciliar o confinamento dos quarks com os modos de realização da simetria quiral.

No nosso modelo, portanto, podemos considerar de maneira consistente que o interior da sacola representa o vácuo perturbativo da QCD, onde os quarks são aproximadamente livres, devido à liberdade assintótica, e os píons não estão presentes, pois a simetria quiral é realizada no modo de Wigner. Analogamente, o exterior da sacola representa o vácuo não-perturbativo da QCD, onde os quarks não estão presentes, devido ao confinamento, e os píons são livres, pois a simetria quiral é realizada no modo de Goldstone. O interior e o exterior da sacola estão separados pela superfície, que representa uma região de transição, onde o vácuo perturbativo transforma-se gradualmente em vácuo não-perturbativo e a realização da simetria quiral transforma-se gradualmente do modo de Wigner para o modo de Goldstone.

Na formulação do modelo feita nos capítulos 1 e 2, procuramos realçar as características acima mencionadas nas funções de supressão dos quarks $F(r)$ e dos píons $F_\pi(r)$. Assim, estas funções dependem dos parâmetros R_0 e R_1 , sendo que R_0 assinala a região $0 < r < R_0$ em que os quarks podem ser considerados livres e os píons não estão presentes, e R_1 assinala a região $r > R_1$ onde os quarks não estão presentes e os píons são livres. Nesta formulação, boa parte dos cálculos teve de ser feita numericamente. Deste modo, apresentamos no capítulo 5 uma formulação mais simples, que no entanto tem a vantagem de permitir a obtenção de resultados analíticos para a maior parte dos observáveis.

Os resultados que obtivemos na formulação do modelo feita nos capítulos 1 e 2 (que passaremos a denominar de versão 1) foram apresentados na seção 4.5, e os resultados da formulação feita no capítulo 5 (que passaremos a denominar de versão 2) foram apresentados nas seções 5.8, 5.9 e 5.10. Na tabela 5.3 comparamos os resultados para as massas dos bárions do octeto fundamental obtidos nas duas versões apresentadas do nosso modelo com os resultados de outros modelos da literatura (um modelo de potencial relativístico e o modelo de sacola do MIT). Vemos que a versão 1 de nosso modelo apresenta o ajuste mais homogêneo, pois o erro médio é $5.5MeV$ e o maior erro é de $10MeV$, ocorrendo para as massas dos bárions Ξ e Ω^- , enquanto que a versão 2 apresenta um erro médio de $7.75MeV$ e um erro máximo de $18MeV$ para a massa do bárion Δ , o modelo de potencial relativístico apresenta um erro médio de $6.25MeV$ e um erro máximo de $16MeV$ para as massas dos bárions Ξ e Λ , e o modelo do MIT apresenta um erro médio de $12MeV$ e um erro máximo de $49MeV$ para a massa do bárion Σ .

Na tabela 5.4 comparamos os resultados para diversas propriedades do núcleon obtidas nas duas versões apresentadas do nosso modelo com os resultados de outros modelos da literatura (um modelo de potencial relativístico, o modelo de sacola do MIT e o *cloudy bag model*). Para a constante de acoplamento pión-núcleon $g_{\pi NN}$, o resultado da versão 1 é claramente superior. A constante de acoplamento axial g_A é razoavelmente bem reproduzida por todos os modelos, exceto o modelo do MIT. Entretanto, nos modelos P-REL e CBM foi aplicada uma correção de centro de massa. O raio quadrático médio do próton é obtido quase que exatamente na versão 1, sendo mal reproduzido nos outros

| hádron | N | Δ | Λ | Σ | Σ^* | Ξ | Ξ^* | Ω^- |
|-----------------------|-----|----------|-----------|----------|------------|-------|---------|------------|
| experimento | 939 | 1232 | 1116 | 1193 | 1385 | 1318 | 1533 | 1672 |
| versão 1 (cap. 1 e 2) | 941 | 1232 | 1123 | 1185 | 1383 | 1328 | 1526 | 1662 |
| versão 2 (cap. 5) | 935 | 1250 | 1116 | 1192 | 1393 | 1327 | 1528 | 1655 |
| P-REL (ref. [30, 33]) | 939 | 1231 | 1132 | 1196 | 1392 | 1334 | 1539 | 1673 |
| MIT (ref. [21]) | 938 | 1233 | 1105 | 1144 | 1382 | 1289 | 1529 | 1672 |

Tabela 5.3: Comparação das duas formulações do modelo de sacola difusa com trabalhos de outros autores para os resultados da massa dos bárions do octeto fundamental. Todas as quantidades são dadas em MeV .

modelos, especialmente no modelo do MIT e no CBM. O raio quadrático médio do neutron é bem reproduzido por todos os modelos, exceto o modelo do MIT, sendo que o modelo P-REL fornece quase exatamente o resultado experimental. Para o momento magnético do próton, o modelo do MIT fornece o pior resultado, e a versão 1 e o modelo P-REL fornecem os resultados mais próximos ao experimental. Para o momento magnético do neutron, o modelo do MIT fornece novamente o pior resultado, enquanto que a versão 1, o modelo P-REL e o CBM fornecem resultados de mesma magnitude.

| | $g_{\pi NN}^2/4\pi$ | g_A | $\langle r^2 \rangle_p (fm^2)$ | $\langle r^2 \rangle_n (fm^2)$ | $\mu_p (\mu_N)$ | $\mu_n (\mu_N)$ |
|-----------------------|---------------------|--------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------|-----------------|
| experimento | 14.1 | 1.2573 | 0.743 | -0.119 | 2.7928 | -1.9130 |
| versão 1 (cap. 1 e 2) | 14.58 | 1.1837 | 0.740 | -0.094 | 2.730 | -2.11 |
| versão 2 (cap. 5) | 12.4 | 1.1496 | 0.853 | -0.100 | 2.9458 | -2.2728 |
| P-REL (ref. [30, 33]) | 13.0 | 1.182 | 0.624 | -0.118 | 2.730 | -1.975 |
| MIT (ref. [21]) | — | 1.09 | 0.533 | 0 | 1.9 | -1.267 |
| CBM (ref. [25]) | — | 1.33 | 0.533 | -0.130 | 2.6 | -2.01 |

Tabela 5.4: Comparação das duas formulações do modelo de sacola difusa com trabalhos de outros autores para os resultados das propriedades do núcleo.

Novamente, lembramos que os resultados do modelo P-REL e CBM incorporam correções de centro de massa para todos os observáveis apresentados. Na literatura existem vários tipos de prescrição para estas correções, mas elas muitas vezes não concordam nem mesmo se o sinal da correção é positivo ou negativo. Por este motivo, nos abstermos de aplicar este tipo de correção nos nossos resultados, exceto no cálculo das massas bariônicas, para o qual as diversas prescrições são muito parecidas. Esperamos no entanto que estas correções possam melhorar os resultados do nosso modelo, assim como é o caso nos modelos P-REL e CBM. Reservamos para uma ocasião futura uma investigação detalhada da correção de centro de massa e sua aplicação no nosso modelo.

Nas seções 4.5, 5.9 e 5.10 apresentamos os resultados das duas versões de nosso modelo para os fatores de forma eletromagnéticos do núcleon. Os resultados das duas versões são quase idênticos, apresentando boa concordância com os resultados experimentais para valores pequenos de momentum transferido, exceto no caso do fator de forma elétrico no nêutron, para o qual as incertezas experimentais também são grandes. Para valores maiores do momentum transferido, os resultados apresentados devem ser corrigidos pelas correções de recuo e de centro de massa. Um estudo destas correções está planejado para o futuro.

Concluimos que o modelo hadrônico desenvolvido nesta tese representa um avanço em relação a modelos similares, como o modelo de potencial relativístico, o modelo do MIT e o CBM. Acreditamos que as fundamentações conceituais presentes em nosso modelo sejam mais sólidas que as dos modelos citados, e acreditamos que este fato é refletido nos resultados que obtivemos.

Apêndices

Apêndice A

Quantização do campo piônico em modos normais esféricos

Neste apêndice mostraremos como expressar o campo piônico quantizado em termos de operadores de criação e destruição que excitam modos normais radiais e angulares. Este assunto não é usualmente abordado em livros de teoria de campos. Uma das exceções é o livro de E. Henley e W. Thirring [40].

A.1 Campo piônico livre

Na sua forma usual de apresentação, o Hamiltoniano que descreve píons livres é escrito como

$$\mathcal{H}_\pi = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\partial_t \vec{\pi} \cdot \partial_t \vec{\pi} + \vec{\nabla} \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} \vec{\pi} + m_\pi^2 \vec{\pi}^2 \right), \quad (\text{A.1})$$

e o campo piônico livre quantizado $\pi_j(t, \vec{r})$ é dado por

$$\pi_j(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_j(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega_k t} + a_j^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega_k t} \right), \quad (\text{A.2})$$

sendo $a_j^\dagger(\vec{k})$ e $a_j(\vec{k})$ operadores de criação e destruição de píons com isospin j e momento linear \vec{k} . Além disso, temos as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\partial_t \pi_j(t, \vec{r}), \pi_{j'}(t, \vec{r}')] &= -i \delta_{jj'} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ [a_j(\vec{k}), a_{j'}^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{jj'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A solução (A.2) para o campo piônico permite colocar o Hamiltoniano em ordem normal, obtendo-se

$$\mathcal{H}_\pi = \sum_j \int d^3k \omega_k a_j^\dagger(\vec{k}) a_j(\vec{k}). \quad (\text{A.4})$$

Queremos expressar o campo piônico através de operadores de criação e destruição com momento angular bem definido. O primeiro passo é expandir a onda plana, que é

um estado com momento linear bem definido, em harmônicos esféricos, que são estados com momento angular bem definido,

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} j_{\ell}(kr) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta_k, \phi_k) Y_{\ell m}(\theta_r, \phi_r). \quad (\text{A.5})$$

Substituindo esta fórmula na expressão (A.2) para o campo piônico livre, obtemos

$$\pi_j(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \left(a_j(\vec{k}) \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} j_{\ell}(kr) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta_k, \phi_k) Y_{\ell m}(\theta_r, \phi_r) e^{-i\omega_k t} + \text{c.h.} \right). \quad (\text{A.6})$$

Usando a notação $d\Omega_k = d\theta_k d\phi_k \sin\theta_k$, definimos um novo operador de destruição,

$$a_{j\ell m}(k) = i^{\ell} k \int d\Omega_k a_j(\vec{k}) Y_{\ell m}^*(\theta_k, \phi_k), \quad (\text{A.7})$$

e assim a expressão para o campo piônico quantizado livre assume a forma

$$\pi_j(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell m} \int_0^{\infty} \frac{dk k}{\sqrt{2\omega_k}} j_{\ell}(kr) \left(a_{j\ell m}(k) Y_{\ell m}(\theta_r, \phi_r) e^{-i\omega_k t} + \text{c.h.} \right). \quad (\text{A.8})$$

Podemos ver que a definição (A.7) está correta, pois usando a relação de comutação (A.3) e a identidade

$$\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{k^2 \sin\theta_k} \delta(k - k') \delta(\theta_k - \theta_{k'}) \delta(\phi_k - \phi_{k'}), \quad (\text{A.9})$$

obtemos

$$\begin{aligned} [a_{j\ell m}(k), a_{j'\ell'm'}^{\dagger}(k')] &= i^{\ell-\ell'} k k' \int d\Omega_k Y_{\ell m}^*(\theta_k, \phi_k) \int d\Omega_{k'} Y_{\ell' m'}(\theta_{k'}, \phi_{k'}) [a_j(\vec{k}), a_{j'}^{\dagger}(\vec{k}')] \\ &= \delta_{jj'} i^{\ell-\ell'} k k' \int d\Omega_k Y_{\ell m}^*(\theta_k, \phi_k) \int d\Omega_{k'} Y_{\ell' m'}(\theta_{k'}, \phi_{k'}) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ &= \delta_{jj'} \delta(k - k') i^{\ell-\ell'} \int d\Omega_k Y_{\ell m}^*(\theta_k, \phi_k) Y_{\ell' m'}(\theta_k, \phi_k) \\ &= \delta_{jj'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta(k - k'). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Um cálculo análogo mostra que as seguintes regras de comutação também são válidas,

$$[a_{j\ell m}(k), a_{j'\ell'm'}^{\dagger}(k')] = [a_{j\ell m}^{\dagger}(k), a_{j'\ell'm'}(k')] = 0. \quad (\text{A.11})$$

Da mesma maneira, podemos ver que a definição (A.8) está correta, pois, usando as propriedades

$$\begin{aligned} \sum_{\ell m} \text{sen}(\theta) Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') &= \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\ \frac{2}{\pi} r r' \int dk k^2 j_{\ell}(kr) j_{\ell}(kr') &= \delta(r - r') \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e partindo da relação de comutação (A.3),

$$\begin{aligned}
[\partial_t \pi_j(\vec{x}, t), \pi_{j'}(\vec{x}', t)] &= \frac{2}{\pi} \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \int \frac{dk k}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{dk' k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \omega_k j_\ell(kr) j_{\ell'}(k'r') \\
&\times \left(-i [a_{j\ell m}(k), a_{j'\ell' m'}^\dagger(k')] Y_{\ell m}(\theta_r, \phi_r) Y_{\ell' m'}^*(\theta'_r, \phi'_r) e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} + \text{c.h.} \right) \\
&= -i \frac{2}{\pi} \delta_{jj'} \sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta_r, \phi_r) Y_{\ell m}^*(\theta'_r, \phi'_r) \int dk k^2 j_\ell(kr) j_\ell(kr') \\
&= -i \delta_{jj'} \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta_r, \phi_r) Y_{\ell m}^*(\theta'_r, \phi'_r) \\
&= -i \delta_{jj'} \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta_r)} \delta(r - r') \delta(\theta_r - \theta'_r) \delta(\phi_r - \phi'_r) \\
&= -i \delta_{jj'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') .
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Na representação de momento angular (A.8) para o campo piônico, o Hamiltoniano, quando colocado em ordem normal, é dado por

$$\mathcal{H}_\pi = \sum_{j\ell m} \int dk \omega_k a_{j\ell m}^\dagger(k) a_{j\ell m}(k) . \tag{A.14}$$

A.2 Campo piônico sujeito a um potencial

O formalismo para o campo piônico sujeito a um potencial (ou campo piônico suprimido) foi desenvolvido no capítulo 2, onde no entanto não tratamos da quantização do campo. O importante aqui é lembrar que a parte radial da função de onda do pión obedece à equação (2.58)

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{2}{r} \mathcal{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - v_\pi(r) \right) \mathcal{R}(r) = 0 . \tag{A.15}$$

Fazendo a mudança de variável $y = kr$, vemos que podemos expressar a parte radial da função de onda do pión como $\mathcal{R}_\ell(kr)$.

Na seção anterior vimos que a quantização do campo piônico é baseada nas regras de comutação (A.3), que envolvem o momento canônico conjugado, $\partial_t \vec{\pi}$. A partir da densidade Lagrangeana para o campo piônico suprimido (2.17), podemos ver que o momento canônico conjugado a $\vec{\pi}(x)$ é

$$\vec{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \vec{\pi})} = \partial_t \vec{\pi} . \tag{A.16}$$

Portanto, no modelo de sacola difusa modificado, o momento canônico conjugado, $\vec{\Pi}(x)$, tem a forma usual. O mesmo resultado pode ser obtido a partir da densidade Lagrangeana (2.14). A quantização do campo piônico suprimido procede-se então nos mesmos moldes

da quantização canônica. O campo piônico suprimido quantizado pode ser escrito como

$$\pi_j(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell m} \int \frac{dk k}{\sqrt{2\omega_k}} \mathcal{R}_\ell(kr) \left(a_{j\ell m}(k) Y_{\ell m}(\theta, \phi) e^{-i\omega_k t} + \text{c.h.} \right), \quad (\text{A.17})$$

onde os operadores $a_{j\ell m}^\dagger(k)$ e $a_{j\ell m}(k)$ criam e destróem, respectivamente, estados de um pión cujo isospin é j , cujo momento angular orbital é $\ell(\ell + 1)$, cuja projeção do momento angular orbital no eixo z é dada por m , e cujo módulo do momento linear é k . A relação de comutação (A.3) para o campo piônico implica em uma condição de normalização para as funções $\mathcal{R}_{k\ell}(r)$,

$$\frac{2}{\pi} r r' \int dk k^2 \mathcal{R}_\ell(kr) \mathcal{R}_\ell(kr') = \delta(r - r'), \quad (\text{A.18})$$

que é análoga à condição de normalização (A.12) para as funções de Bessel esféricas. A condição acima pode ser escrita na sua forma mais usual (e completamente equivalente),

$$\frac{2}{\pi} k k' \int dr r^2 \mathcal{R}_\ell(kr) \mathcal{R}_\ell(k'r) = \delta(k - k'). \quad (\text{A.19})$$

Apêndice B

Correção de centro de massa

Descreveremos neste apêndice um dos métodos utilizados para fazer a correção devida ao movimento espúrio do centro de massa no cálculo de observáveis hadrônicos. Não há consenso na literatura sobre qual seja o método mais adequado, mesmo depois de várias abordagens do tema [41, 42, 20, 43, 38, 44, 45]. Neste trabalho adotaremos a prescrição de C. W. Wong [20], cujo princípio básico é restaurar a simetria translacional, sendo baseado na projeção de Peierls e Yoccoz [46], conhecida na física nuclear.

Como veremos, a fórmula final para a correção de centro de massa, segundo a prescrição de C. W. Wong, é bastante simples. No entanto o embasamento para esta fórmula final é um tanto intrincado. Denotaremos por $|3q, \vec{X}\rangle$ o estado hadrônico que podemos calcular de acordo com algum modelo de quarks, indicando que este estado é constituído pelas funções de onda independentes de 3 quarks e que o centro do hádron é dado pelo vetor \vec{X} . Vamos também supor que no mesmo espaço de Hilbert gerado pelos vetores $|3q, \vec{X}\rangle$ existam estados hadrônicos com momento linear total \vec{P} bem definidos. Estes estados serão denotados por $|H_n(\vec{P})\rangle$, onde n simboliza o n -ésimo estado excitado do hádron, e H é o hádron que estamos tratando.

Formalmente, podemos escrever o estado $|3q, \vec{X}\rangle$ como uma combinação linear dos estados $|H_n(\vec{P})\rangle$,

$$|3q, \vec{X}\rangle = \sum_n \int d^3P \phi(n, \vec{P}, \vec{X}) |H_n(\vec{P})\rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde deixamos explícito que os coeficientes da expansão $\phi(n, \vec{P}, \vec{X})$ dependem também de onde a sacola (ou a origem do potencial central) está posicionada, isto é, do vetor \vec{X} . A expressão (B.1) é geral e exata, mas devemos observar que os estados hadrônicos $|H_n(\vec{P})\rangle$ não são conhecidos. Supondo que a contribuição mais importante provenha do estado fundamental $n = 0$, simplificamos a notação com $|H_0(\vec{P})\rangle \equiv |H(\vec{P})\rangle$, e obtemos

$$|3q, \vec{X}\rangle = \int d^3P \phi(\vec{P}, \vec{X}) |H(\vec{P})\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Usualmente, a expressão (B.2) é o ponto de partida para os cálculos de correção de centro de massa que utilizam a projeção de Peierls-Yoccoz. O coeficiente $\phi(\vec{P}, \vec{X})$ pode ser

escrito na forma $\psi(\vec{P}, \vec{X}) \phi(\vec{P})$ sendo $\psi(\vec{P}, \vec{X})$ a amplitude para que um hádron livre com momento linear \vec{P} esteja posicionado em \vec{X} e sendo $\phi(\vec{P})$ a amplitude para que o hádron tenha momento \vec{P} . Supondo-se que o movimento do hádron seja não-relativístico, isto é, para baixos valores do momento total do hádron, faz-se a aproximação de que $\psi(\vec{P}, \vec{X})$ seja uma onda plana. O correto seria utilizar um espinor de Dirac para núcleons, um espinor de Harita-Schwinger para a ressonância Delta, etc. Mas, de acordo com a aproximação mencionada, temos então

$$|3q, \vec{X}\rangle = \int \frac{d^3 P}{W(\vec{P})} e^{i\vec{P}\cdot\vec{X}} \phi(\vec{P}) |H(\vec{P})\rangle, \quad (\text{B.3})$$

onde a normalização dos estados hadrônicos $|H(\vec{P})\rangle$ é dada por

$$\langle H(\vec{P}) | H(\vec{P}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{P}') W(\vec{P}), \quad (\text{B.4})$$

e

$$W(\vec{P}) = \frac{\sqrt{(M_B^2 + \vec{P}^2)}}{M_B}. \quad (\text{B.5})$$

A escolha (B.5) é conveniente mas arbitrária, os resultados físicos não dependem dela. Entretanto, falta ainda determinar a função $\phi(\vec{P})$.

Um conceito chave na prescrição de Peierls-Yoccoz é a função de *overlap* de Hill-Wheeler, $I(\vec{X})$, definida como

$$I(\vec{X}) = \langle 3q, \vec{0} | 3q, \vec{X} \rangle. \quad (\text{B.6})$$

A função de *overlap* deve ser calculada a partir das funções de onda independentes para os quarks, que são obtidas segundo o modelo hadrônico utilizado. No entanto, usando-se a aproximação (B.3), é possível relacionar $I(\vec{X})$ com a função $\phi(\vec{P})$,

$$\begin{aligned} I(\vec{X}) &= \int \frac{d^3 P'}{W(\vec{P}')} \frac{d^3 P}{W(\vec{P})} e^{i\vec{P}\cdot\vec{X}} \phi^*(\vec{P}') \phi(\vec{P}) \langle H(\vec{P}') | H(\vec{P}) \rangle \\ &= \int \frac{d^3 P'}{W(\vec{P}')} \frac{d^3 P}{W(\vec{P})} e^{i\vec{P}\cdot\vec{X}} \phi^*(\vec{P}') \phi(\vec{P}) (2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{P}') W(\vec{P}) \\ &= (2\pi)^3 \int \frac{d^3 P}{W(\vec{P})} e^{i\vec{P}\cdot\vec{X}} \phi^2(\vec{P}). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

A transformada de Fourier de $I(\vec{X})$ é definida como

$$\tilde{I}(\vec{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 X e^{-i\vec{P}\cdot\vec{X}} I(\vec{X}). \quad (\text{B.8})$$

Tomando-se a aproximação (B.7) para $I(\vec{X})$, vemos que

$$\tilde{I}(\vec{P}) = \int d^3 P' d^3 X e^{i(\vec{P}' - \vec{P})\cdot\vec{X}} \frac{\phi^2(\vec{P}')}{W(\vec{P}')} = (2\pi)^3 \frac{\phi^2(\vec{P})}{W(\vec{P})}. \quad (\text{B.9})$$

Deste modo, calculando a função de *overlap* a partir das funções de onda dos quarks através de (B.6) e obtendo-se a sua transformada de Fourier através de (B.8), podemos calcular os coeficientes $\phi(\vec{P})$ de acordo com

$$\phi^2(\vec{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} W(\vec{P}) \tilde{I}(\vec{P}) . \quad (\text{B.10})$$

Portanto, ao obtermos a função de *overlap*, podemos calcular os coeficientes na aproximação (B.3).

Tendo sido determinada a função $\phi(\vec{P})$, é agora possível estimar o valor esperado de qualquer função que dependa do operador momento total do hádron, $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, para os estados hadrônicos que o modelo de sacola (ou de potencial relativístico) fornece. Estes estados são dados usualmente por $|3q, \vec{0}\rangle$, o que corresponde à situação em que o centro do hádron coincide com a origem do sistema de coordenadas. Temos então

$$\begin{aligned} \langle 3q, \vec{0} | \mathcal{F}(\vec{P}) | 3q, \vec{0} \rangle &= \int \frac{d^3 P'}{W(\vec{P}')} \frac{d^3 P}{W(\vec{P})} \phi^*(\vec{P}') \phi(\vec{P}) \langle H(\vec{P}') | \mathcal{F}(\vec{P}) | H(\vec{P}) \rangle \\ &= \int \frac{d^3 P'}{W(\vec{P}')} \frac{d^3 P}{W(\vec{P})} \phi^*(\vec{P}') \phi(\vec{P}) \mathcal{F}(\vec{P}) (2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{P}') W(\vec{P}) \\ &= (2\pi)^3 \int \frac{d^3 P}{W(\vec{P})} \phi^2(\vec{P}) \mathcal{F}(\vec{P}) \\ &= \int d^3 P \tilde{I}(\vec{P}) \mathcal{F}(\vec{P}) , \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde vemos novamente o papel fundamental da função de *overlap*.

O cálculo de (B.11) é, na prática, bastante complicado. Uma simplificação surge quando $\mathcal{F}(\vec{P}) = \vec{P}^2$. Sendo $\vec{P}^2 = \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + \vec{p}_3^2$, obtemos diretamente

$$\begin{aligned} \langle 3q, \vec{0} | \vec{P}^2 | 3q, \vec{0} \rangle &= \langle 3q, \vec{0} | \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + \vec{p}_3^2 | 3q, \vec{0} \rangle \\ &= \langle 1q, \vec{0} | \vec{p}_1^2 | 1q, \vec{0} \rangle + \langle 1q, \vec{0} | \vec{p}_2^2 | 1q, \vec{0} \rangle + \langle 1q, \vec{0} | \vec{p}_3^2 | 1q, \vec{0} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 \langle \vec{p}_i^2 \rangle , \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde $|1q, \vec{0}\rangle$ são as funções de onda independentes dos quarks calculadas no modelo hadrônico.

A correção para a massa de um hádron

Vejamos então como obter a correção para a massa de um hádron em um modelo hadrônico segundo a prescrição de C. W. Wong. Se o valor esperado de \vec{P}^2 fosse nulo, a massa do hádron seria claramente dada pela soma das energias dos quarks, $M = E_{\text{total}} = \sum_{q=1}^3 E_q$. Mas como $\langle \vec{P}^2 \rangle \neq 0$, temos

$$M = \langle \sqrt{E_{\text{total}}^2 - P^2} \rangle . \quad (\text{B.13})$$

Segundo [45], uma boa aproximação para o valor esperado acima consiste em calcular

$$M = \sqrt{\langle E_{\text{total}}^2 \rangle - \langle P^2 \rangle} = \sqrt{\left(\sum_{q=1}^3 E_q\right)^2 - \sum_{q=1}^3 \langle p_q^2 \rangle}. \quad (\text{B.14})$$

A correção para a massa dos hádrons é então dada por

$$\Delta E_{cm} = \sqrt{\left(\sum_{q=1}^3 E_q\right)^2 - \sum_{q=1}^3 \langle p_q^2 \rangle} - \sum_{q=1}^3 E_q. \quad (\text{B.15})$$

Referências

- [1] CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, New York, v. 9, n. 12, p. 3471–3494, June 1974.
- [2] BELKOV, A. A.; DILLIG, M.; PILOTTO, F. Dynamics of heavy mesons in the instant and the front form. *Acta Physica Polonica B*, Krakow, v. 27, n. 11, p. 3371–3375, Nov. 1996.
- [3] MICHEL, B.; DILLIG, M.; PILOTTO, F. G.; VASCONCELLOS, C. A. Z. Static Bethe-Salpeter approach to bound states of light scalar mesons. *Nuovo Cimento A*, Bologna, v. 111, n. 3, p. 251–266, Mar. 1998.
- [4] VASCONCELLOS, C.; DILLIG, M.; LÜTZ, E.; PILOTTO, F.; MARRANGHELLO, G. Front form approach to $q\bar{Q}$ mesons with harmonic confinement. In: ELZE, H.-T. et al. (Eds.) *New states of matter in hadronic interactions*. Melville: American Institute of Physics, 2002. p. 704–712. (AIP conference proceedings, v. 631).
- [5] CHODOS, A.; THORN, C. B. Chiral invariance in a bag theory. *Physical Review D*, New York, v. 12, n. 9, p. 2733–2743, Nov. 1975.
- [6] DeTAR, C. E. Quark-bag model with low-energy pion interactions. I. Theory. *Physical Review D*, New York, v. 24, n. 3, p. 752–761, Aug. 1981.
- [7] THÈBERGE, S.; THOMAS, A. W.; MILLER, G. A. Pionic corrections to the MIT bag model: the (3,3) resonance. *Physical Review D*, New York, v. 22, n. 11, p. 2838–2852, Dec. 1980.
- [8] NOGAMI, Y.; SUZUKY, A. Divergence disease of the pion-baryon interaction in quark-based models. *Progress of Theoretical Physics*, Kyoto, v. 69, n. 4, p. 1184–1194, Apr. 1983.
- [9] NOGAMI, Y.; SUZUKY, A.; YAMANISHI, N. Fuzzy bag model: nucleon self-energy due to pion interaction. *Canadian Journal of Physics*, Ottawa, v. 62, n. 6, p. 554–561, June 1984.

- [10] PILOTTO, F.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; COELHO, H. T. The fuzzy bag model revisited. *Modern Physics Letters A*, Singapore, v. 17, n. 9, p. 543–553, Mar. 2002.
- [11] PILOTTO, F. G. *Modelo de sacola difusa modificado*. 1995. 114 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1995.
- [12] VASCONCELLOS, C. A. Z.; COELHO, H. T.; PILOTTO, F.; BODMANN, B. E. J.; DILLIG, M.; RAZEIRA, M. A chiral bag model with a soft surface: structure and solutions of the Fuzzy and the modified Fuzzy Bag Model. *European Physical Journal C*, Berlin, v. 4, n. 1, p. 115–127, June 1998.
- [13] COELHO, H. T.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J.; PILOTTO, F. A chiral bag model with a soft surface. In: DILLENBURG, D. et al. (Eds.) *Current topics in nuclear physics and quantum field theory: festschrift for Th. A. J. Maris*. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 1994. p. 241–261.
- [14] PAGE, P. R.; GOLDMAN, T.; GINOCCHIO, J. N. Relativistic symmetry suppresses quark spin-orbit splitting. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 86, n. 2, p. 204–207, Jan. 2001.
- [15] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (Eds.). *Handbook of mathematical functions*. Washington: National Bureau of Standards, 1964.
- [16] LEE, T. D. *Particle physics and introduction to field theory*. Chur: Harwood Academic Publishers, 1988.
- [17] DeTAR, C. E. Quark-bag model with low energy pion interactions. II. Application. *Physical Review D*, New York, v. 24, n. 3, p. 762–774, Aug. 1981.
- [18] TEGEN, R.; SCHEDL, M.; WEISE, W. On the axial charge and other static properties of the quark core in nucleons. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 125, n. 1, p. 9–13, May 1983.
- [19] CARNAHAN, B.; LUTHER, H. A.; WILKES, J. O. *Applied numerical methods*. New York: John Wiley, 1969.
- [20] WONG, C. W. Center-of-mass correction in the MIT bag model. *Physical Review D*, New York, v. 24, n. 5, Comments p. 1416–1419, Sept. 1981.
- [21] DeGRAND, T.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; KISKIS, J. Masses and other parameters of the light hadrons. *Physical Review D*, New York, v. 12, n. 7, p. 2060–2076, Oct. 1975.

- [22] MILLER, G. A.; THOMAS, A. W.; THÈBERGE, S. Pion-nucleon scattering in the Brown-Rho bag model. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 91, n. 2, p. 192–195, Apr. 1980.
- [23] THÈBERGE, S.; THOMAS, A. W.; MILLER, G. A. Erratum: Pionic corrections to the MIT bag model: the (3,3) resonance. *Physical Review D*, New York, v. 23, n. 9, p. 2106, May 1981.
- [24] MILLER, G. A.; THÈBERGE, S.; THOMAS, A. W. Pionic corrections in the MIT bag model. *Comments on Nuclear and Particle Physics*, London, v. 10, n. 3, p. 101–108, June 1981.
- [25] THOMAS, A. W.; THÈBERGE, S.; MILLER, G. A. Cloudy bag model of the nucleon. *Physical Review D*, New York, v. 24, n. 1, p. 216–229, July 1981.
- [26] CHEW, G. F. Renormalization of meson theory with a fixed extended source. *Physical Review*, New York, v. 94, n. 6, p. 1748–1754, June 1954.
- [27] CHEW, G. F.; LOW, F. E. Effective-range approach to the low-energy p-wave pion-nucleon interaction. *Physical Review*, New York, v. 101, n. 5, p. 1570–1579, Mar. 1956.
- [28] WICK, G. C. Introduction to some recent work in meson theory. *Reviews of Modern Physics*, New York, v. 27, n. 4, p. 339–362, Oct. 1955.
- [29] SCHWEBER, S. S. *An introduction to relativistic quantum field theory*. Evanston: Row, Peterson, 1961.
- [30] BARIK, N.; DASH, B. K. Mass spectrum of low-lying baryons in the ground state in a relativistic potential model of independent quarks with chiral symmetry. *Physical Review D*, Woodbury, v. 33, n. 7, p. 1925–1933, Apr. 1986.
- [31] NOGAMI, Y.; OHTSUKA, N. Incorporating pion effects into the naive quark model. *Physical Review D*, New York, v. 26, n. 1, p. 261–274, July 1982.
- [32] WEISE, W. *Quarks and nuclei*. Singapore: World Scientific, 1984. p. 58–189.
- [33] BARIK, N.; DASH, B. K. Electromagnetic form factors and the static properties of the nucleon in a relativistic potential model of independent quarks with chiral symmetry. *Physical Review D*, Woodbury, v. 34, n. 7, p. 2092–2103, Oct. 1986.
- [34] MARKOPOLOU-KALAMARA, F. G.; BUGG, D. V. A new determination of the πNN coupling constant f^2 . *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 318, n. 3, p. 565–567, Dec. 1993.

- [35] BHADURI, R. K. *Models of the nucleon: from quarks to soliton*. New York: Addison-Wesley, 1988.
- [36] PARTICLE DATA GROUP. Review of particle properties. *Physical Review D*, Woodbury, v. 50, n. 3, p. 1175–1825, Aug. 1994.
- [37] HAND, L. N.; MILLER, D. G.; WILSON, R. Electric and magnetic form factors of the nucleon. *Reviews of Modern Physics*, New York, v. 35, n. 2, p. 335–349, Apr. 1963.
- [38] TEGEN, R.; BROCKMANN, R.; WEISE, W. Electromagnetic properties of relativistic quarks in confining potentials. *Zeitschrift für Physik A*, Berlin, v. 314, n. 4, p. 339–350, Sept. 1982.
- [39] KAMKE, E. *Differentialgleichungen*. 3. ed. New York: Chelsea Publishing, 1948.
- [40] HENLEY, E. M.; THIRRING, W. *Elementary quantum field theory*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [41] BARNHILL, M. V. Bag-model electromagnetic form factors. *Physical Review D*, New York, v. 20, n. 3, p. 723–726, Aug. 1979.
- [42] DONOGHUE, J. F.; JOHNSON, K. The pion and an improved static bag model. *Physical Review D*, New York, v. 21, n. 7, p. 1975–1985, Apr. 1980.
- [43] LIU, K. F.; WONG, C. W. MIT bag model with center-of-mass correction. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 113, n. 1, p. 1–5, June 1982.
- [44] BETZ, M.; GOLDFLAM, R. Boosting the bag. *Physical Review D*, New York, v. 28, n. 11, p. 2848–2861, Dec. 1983.
- [45] BARTELSKI, J.; SZYMACHA, A.; MANKIEWICZ, L.; TATUR, S. Center-of-mass corrections to the static properties of hadrons in the bag model. *Physical Review D*, Woodbury, v. 29, n. 5, p. 1035–1038, Mar. 1984.
- [46] PEIERLS, R. E.; YOCCOZ, J. The collective model of nuclear motion. *Proceedings of the Physical Society*, London, v. 70, n. 5, p. 381–387, May 1957.