

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Uma Demonstração do Teorema da Singularidade  
de Hawking

Carlos Yoshio Uehara Scarinci

Porto Alegre, 2 de Junho de 2009

Dissertação submetida por Carlos Yoshio Uehara Scarinci<sup>1</sup>, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

**Professor Orientador:**

Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

Prof. Dr. Artur Oscar Lopes

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Prof. Dr. Leonardo Fernandes Guidi

---

<sup>1</sup>Bolsista do CNPq-Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Aos meus pais, Geny e Carlos.

# Agradecimentos

Ao CNPq pela bolsa de mestrado que possibilitou meus estudos. À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em especial aos institutos de Matemática e de Física, pelos vários anos de aprendizado.

Ao professor Luiz Fernando pela valiosa orientação, pela amizade e pelas várias horas de sábios conselhos. Ao professor Artur pelo incentivo no estudo da matemática e pelos “empurrõezinhos” nas horas críticas. Ao professor Alexandre pelas boas discussões e escaladas. Ao professor Leonardo Guidi cujas sugestões enriqueceram este trabalho. E a todos professores que de alguma forma contribuíram para minha formação, em especial às professoras Ruth Schneider (*in memoriam*) e Victória Herscovitz.

Aos amigos, que muito ajudaram em minha formação, tanto acadêmica como pessoal.

À Lucia e ao Sérgio pelo apoio, confiança e carinho.

Ao meu pai, Carlos, pelo exemplo e incentivo à minha entrada no mundo acadêmico.

À minha mãe, Geny, pelo apoio incondicional. Devo tudo a ela.

Finalmente, à minha esposa, Di, pela paciência, força e companheirismo.

# Resumo

Apresentamos neste trabalho uma demonstração do teorema de singularidade de Hawking. Este é o mais simples de uma série de resultados em Relatividade Geral, os teoremas de Hawking-Penrose, que fornecem condições suficientes para a existência de singularidades geradas por colapsos gravitacionais. De fato, os teoremas nada falam da natureza destas singularidades, eles garantem apenas a incompletude geodésica, propriedade comumente aceita como o primeiro indício da existência de singularidades.

No primeiro capítulo deste trabalho, começamos uma breve apresentação sobre variedades semi-riemannianas, dando atenção especial às variedades lorentzianas. No capítulo seguinte, obtemos alguns resultados do cálculo das variações que se mostrarão úteis para a demonstração do teorema. No último capítulo passamos ao estudo da teoria de causalidade em variedades lorentzianas e, finalmente, à prova do teorema de Hawking.

# Abstract

We present in this work a proof of Hawking's singularity theorem. This is the most simple of a series of results in General Relativity, the Hawking-Penrose theorems, which provides sufficient conditions for the existence of singularities generated by gravitational collapse. In fact, the theorems say nothing about the nature of such singularities, they provide only geodesic incompleteness, property commonly accepted as the first evidence of such singularities.

In the first chapter of this work, we began a brief presentation on semi-riemannian manifolds, paying special attention to lorentzian manifolds. In the following chapter, we obtain some results on calculus of variations which turn out to be useful in the proof of the theorem. In the last chapter we start studying causality theory lorentzian manifolds and, finally, the proof of Hawking's theorem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Geometria Semi-riemanniana</b>	<b>1</b>
1.1	Conexões e métricas . . . . .	1
1.2	Curvas e vizinhanças convexas . . . . .	5
1.3	Alguns exemplos . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Cálculo das Variações</b>	<b>17</b>
2.1	Comprimento de curvas e variações . . . . .	17
2.2	Campos de Jacobi e pontos focais . . . . .	23
2.3	Existência de pontos focais . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Causalidade e Singularidades</b>	<b>28</b>
3.1	Causalidade em variedades lorentzianas . . . . .	28
3.2	Condições de causalidade . . . . .	31
3.3	Hiperbolicidade global e geodésicas maximais . . . . .	35
3.4	O Teorema de Hawking . . . . .	37

# Capítulo 1

## Geometria Semi-riemanniana

### 1.1 Conexões e métricas

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável, i.e.,  $C^\infty$ , conexa de dimensão  $n \geq 2$ . Seja  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$  um fibrado vetorial diferenciável sobre  $\mathcal{M}$ . Denotamos por  $\Gamma(E, \mathcal{M})$ , ou simplesmente  $\Gamma(E)$ , o espaço das seções diferenciáveis de  $E$ .

**Observação** Alguns casos particulares merecem notação especial:

- O fibrado tangente de  $\mathcal{M}$  é denotado por  $T\mathcal{M}$ . Seu espaço de seções diferenciáveis (espaço dos campos vetoriais diferenciáveis) é denotado por  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .
- O fibrado de  $k$ -formas diferenciais sobre  $\mathcal{M}$  é denotado por  $\bigwedge^k(T^*\mathcal{M})$ . Seu espaço de seções diferenciáveis (espaço das  $k$ -formas diferenciáveis) é denotado por  $\Omega^k(\mathcal{M})$ . Dado um fibrado vetorial  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ , denotaremos o espaço das  $k$ -formas diferenciais com valores em  $E$  (seções diferenciáveis do fibrado  $\bigwedge^k(T^*\mathcal{M}) \otimes E$ ) por  $\Omega^k(\mathcal{M}, E)$ .
- O fibrado tensorial de tipo  $(r, s)$  sobre  $\mathcal{M}$  é denotado por  $T_s^r\mathcal{M}$ . Seu espaço de seções diferenciáveis (espaço dos campos tensoriais diferenciáveis de tipo  $(r, s)$ ) é denotado por  $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$ .

Uma *conexão* em um fibrado vetorial  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$  é uma aplicação  $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ , denotada por  $(\mathbf{X}, \mathbf{s}) \mapsto \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s}$ , satisfazendo

- $\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{s} + b\mathbf{t}) = a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{t}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Gamma(E),$
- $\nabla_{(f\mathbf{X} + g\mathbf{Y})}\mathbf{s} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{s}, \quad \forall f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}), \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \mathbf{s} \in \Gamma(E),$
- $\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{s}) = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{s} + \mathbf{X}(f)\mathbf{s}, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}), \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \mathbf{s} \in \Gamma(E).$

A aplicação  $\nabla_{\mathbf{X}} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  é chamada *derivada covariante* em relação a  $\mathbf{X}$ .



Uma *conexão afim* em  $\mathcal{M}$  é uma conexão  $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  no fibrado tangente  $T\mathcal{M}$ . Ela fornece uma maneira intrínseca de derivar campos vetoriais em relação a qualquer vetor tangente a  $\mathcal{M}$ , como veremos em seguida.

Uma conexão afim estende-se naturalmente a uma conexão em cada fibrado tensorial  $T_s^r\mathcal{M}$ . Dados  $\mathbf{T} \in T_s^r(\mathcal{M})$  e  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  definimos  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T} \in T_s^r(\mathcal{M})$  por

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) &= \mathbf{X}(\mathbf{T}(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s)) \\ &+ \sum_{i=1}^r \mathbf{T}(\omega_1, \dots, \nabla_{\mathbf{X}}\omega_i, \dots, \omega_r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) - \sum_{i=1}^s \mathbf{T}(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{Y}_1, \dots, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_i, \dots, \mathbf{Y}_s), \end{aligned}$$

para quaisquer  $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega^1(\mathcal{M})$ ,  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ <sup>1</sup>.

Em coordenadas  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , uma conexão afim  $\nabla$  fica determinada por  $n^3$  funções diferenciáveis  $\Gamma_{jk}^i$ , chamadas componentes de  $\nabla$ , dadas por

$$\Gamma_{jk}^i \partial_i = \nabla_{\partial_j} \partial_k.$$

Escrevemos, então,

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k,$$

para  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= X^k \frac{\partial}{\partial x^k} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \Gamma_{kl}^{i_1} X^k T_{j_1 \dots j_s}^{li_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma_{kl}^{i_r} X^k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1} l} \\ &- \Gamma_{kj_1}^l X^k T_{lj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots - \Gamma_{kj_s}^l X^k T_{j_1 \dots j_{s-1} l}^{i_1 \dots i_r}, \end{aligned}$$

para  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $\mathbf{T} \in T_s^r(\mathcal{M})$ .

A expressão da derivada covariante em coordenadas nos fornece o seguinte lema.

**Lema 1.1.1** *Dados  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $\mathbf{T} \in T_s^r(\mathcal{M})$ , o valor da derivada covariante  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$  em um ponto  $p \in \mathcal{M}$  depende apenas da conexão  $\nabla$ , do vetor tangente  $\mathbf{X}(p) = \mathbf{X}_p$ , e dos valores de  $\mathbf{T}$  ao longo de qualquer caminho diferenciável que passe por  $p$  com velocidade  $\mathbf{X}_p$ .*

Podemos unificar a informação de todas as derivadas covariantes de um campo tensorial  $\mathbf{T} \in T_s^r(\mathcal{M})$  em um único objeto definindo sua *diferencial covariante*. Este é o campo tensorial de tipo  $(r, s+1)$   $\nabla\mathbf{T}$  dado por

$$\nabla\mathbf{T}(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s, \mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T}(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s).$$

Uma *métrica semi-riemanniana* em  $\mathcal{M}$  é uma seção,  $\mathbf{g}$ , do fibrado tensorial  $T_2^0\mathcal{M}$  satisfazendo:

<sup>1</sup>Notamos que fica implícito, nesta definição, a derivada covariante em relação a  $\mathbf{X}$  de uma 1-forma  $\omega$ :

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\omega)(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(\omega(\mathbf{Y})) - \omega(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}).$$

- $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}), \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ;
- $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$  para todo  $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  se e somente se  $\mathbf{X} = 0$ ;
- $\mathbf{g}$  possui índice constante<sup>2</sup>  $\nu$ , com  $0 \leq \nu \leq n$ .

Chamamos *variedade semi-riemanniana* um par  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  formado por uma variedade diferenciável e uma métrica semi-riemanniana sobre esta variedade<sup>3</sup>. Como casos particulares temos as variedades riemannianas, com  $\nu = 0$ , e as variedades *lorentzianas*, com  $\nu = 1$ .

Em cada espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$  de uma variedade semi-riemanniana, fica definida uma forma bilinear simétrica não-degenerada de índice  $\nu$ , que denotamos por  $\mathbf{g}_p$ . Assim, podemos definir uma noção de ortonormalidade: Diremos que um vetor  $\mathbf{u} \in T_p\mathcal{M}$  é *unitário* se  $|\mathbf{g}_p(\mathbf{u}, \mathbf{u})| = 1$  e que vetores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{M}$  são *ortogonais* se seu produto  $\mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ . Além disso, uma base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de  $T_p\mathcal{M}$  será dita *ortonormal* se satisfizer  $|\mathbf{g}_p(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)| = \delta_{ij}$ .

**Observação** Dado um ponto  $p \in \mathcal{M}$  podemos sempre encontrar  $n$  campos vetoriais  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n\}$  definidos em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  de modo que  $\{\mathbf{E}_1(q), \dots, \mathbf{E}_n(q)\}$  formam uma base ortonormal de  $T_q\mathcal{M}$ , para cada  $q \in \mathcal{U}$ . Mais ainda, podemos tomar  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n\}$  de modo que

$$\mathbf{g}_q(\mathbf{E}_i(q), \mathbf{E}_j(q)) = \begin{cases} \epsilon_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \forall q \in \mathcal{U},$$

onde  $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_\nu = -1$  e  $\epsilon_{\nu+1} = \dots = \epsilon_n = 1$ . Tal coleção de campos vetoriais é chamada *referencial ortonormal local*, ou simplesmente *referencial local*.

Notamos que, quando o índice de  $\mathbf{g}$  é maior que 0, temos uma nova classificação dos vetores tangentes a  $\mathcal{M}$  uma vez que existirão vetores não nulos ortogonais a si mesmos e vetores não nulos com norma negativa. Diremos, então, que um vetor tangente  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  é *tipo-tempo* se  $\mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ , *tipo-luz* se  $\mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  ou *tipo-espaço* se  $\mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ . Esta nova classificação dos vetores tangentes é chamada *característica causal*.

Em variedades lorentzianas, o conjunto dos vetores tipo-tempo em  $T_p\mathcal{M}$  é formado por duas componentes conexas convexas, chamados *cones de tempo em  $p$* . Dois vetores tipo-tempo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  estarão no mesmo cone de tempo se  $\mathbf{g}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < 0$  e em cones de tempo opostos se  $\mathbf{g}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0$ . Veremos que em algumas variedades lorentzianas podemos utilizar os cones de tempo para rotular globalmente os vetores tipo-tempo, o que nos fornecerá uma noção de orientabilidade temporal.

<sup>2</sup>Isto significa que, em cada espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$ , o subespaço onde a forma bilinear  $\mathbf{g}_p$  é negativo definida tem dimensão constante  $\nu$ .

<sup>3</sup>Usualmente denotamos uma variedade semi-riemanniana apenas por  $\mathcal{M}$ , ficando a métrica subentendida.

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade semi-riemanniana com métrica  $\mathbf{g}$  e uma conexão afim  $\nabla$ . Dizemos que

- $\nabla$  é *simétrica* quando  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ,  $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ;
- $\nabla$  é *compatível com  $\mathbf{g}$*  quando satisfaz  $\nabla\mathbf{g} = 0$ , ou seja, se

$$\mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}),$$

$$\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

**Teorema 1.1.2** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade semi-riemanniana. Existe única conexão afim  $\nabla$  simétrica e compatível com a métrica. Em coordenadas locais, os coeficientes desta conexão são dados por*

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right),$$

onde  $g_{ij}$  são as componentes de  $\mathbf{g}$  e  $g^{ij}$  são definidas por  $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$ .

**Demonstração** Supondo a existência de tal conexão, é fácil verificar a *fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} 2\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) - \mathbf{Z}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \\ &\quad + \mathbf{g}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - \mathbf{g}([\mathbf{X}, \mathbf{Z}], \mathbf{Y}) - \mathbf{g}([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}), \end{aligned}$$

para quaisquer  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Então, usando a não-degenerescência da métrica, mostra-se que esta fórmula determina univocamente uma conexão afim e, por verificação direta, que tal conexão é simétrica e compatível com a métrica.

Os símbolos de Christoffel são calculados diretamente da fórmula de Koszul. ■

Esta conexão é chamada *conexão de Levi-Civita* e seus coeficientes  $\Gamma_{jk}^i$  são chamados *símbolos de Christoffel*. A partir de agora, a menos de menção explícita em contrário, a única conexão afim a ser utilizada neste trabalho será a conexão de Levi-Civita. Além disso, passaremos a estudar apenas o caso lorentziano, de modo que  $\mathcal{M}$  sempre denotará, daqui em diante, uma variedade lorentziana. Notamos, entretanto, que boa parte dos resultados obtidos neste e no próximo capítulo permanecem válidos no caso de índices  $\nu \neq 1$ .

Dada uma conexão  $\nabla$  em um fibrado vetorial  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ , definimos a *curvatura* de  $\nabla$  como a 2-forma com valores nos endomorfismos de  $E$  definida por

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{s} = (\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]})\mathbf{s}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \mathbf{s} \in \Gamma(E).$$

Assim, no caso de uma conexão afim, a curvatura é, de fato, um campo tensorial  $\mathbf{R} \in \mathcal{T}_3^1(\mathcal{M})$ , chamado também *tensor curvatura*, dado por

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = (\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]})\mathbf{Z}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Em coordenadas  $\{x^1, \dots, x^n\}$ ,  $\mathbf{R}$  é dado por

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l.$$

Definimos o *tensor curvatura de Ricci*,  $\mathbf{Ric}$ , pelo traço do tensor curvatura. Mais precisamente,  $\mathbf{Ric}$  é um campo tensorial simétrico em  $\mathcal{T}_2^0(\mathcal{M})$  definido por

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathbf{g}(\mathbf{E}_i, \mathbf{R}(\mathbf{E}_i, \mathbf{X})\mathbf{Y}), \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

em termos de um referencial local  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n\}$ . Em coordenadas,  $\mathbf{Ric}$  é dado por

$$R_{ij} = R_{kij}^k.$$

## 1.2 Curvas e vizinhanças convexas

Uma *curva* em  $\mathcal{M}$  é uma aplicação diferenciável de um intervalo aberto  $I$  em  $\mathcal{M}$ . Diremos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  *liga um ponto*  $p \in \mathcal{M}$  *a uma ponto*  $q \in \mathcal{M}$  se existem  $t_1 < t_2$  em  $I$  tais que  $p = \alpha(t_1)$  e  $q = \alpha(t_2)$ .

Usualmente precisaremos considerar curvas que são apenas diferenciáveis por partes. Chamamos *segmento de curva* a restrição de uma curva a um subintervalo compacto de seu domínio. Assim, uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  tal que existe uma partição  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  de  $I$  em que as restrições  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  são segmentos de curva é chamada *curva diferenciável por partes*.

Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  é dita *tipo-tempo*, *tipo-luz* ou *tipo-espaço*, se para cada  $t \in I$ ,  $\alpha'(t)$  é um vetor tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço, respectivamente. Caso  $\alpha$  seja apenas diferenciável por partes, então exigimos também que, em cada quebra  $t_i$ , tenhamos

$$\mathbf{g}_{\alpha(t_i)}(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+)) < 0,$$

onde  $\alpha'(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t)$  e  $\alpha'(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t)$ , de modo que  $\alpha'$  não mude de cone de tempo em nenhuma quebra.

Dadas duas variedades diferenciáveis  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  e uma aplicação diferenciável  $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ , chamamos *campo vetorial ao longo de*  $\varphi$  uma aplicação diferenciável  $\mathbf{X} : \mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $\mathbf{X}(p) \in T_{\varphi(p)}\mathcal{M}$  para todo  $p \in \mathcal{N}$ . Denotaremos o espaço de tais campos por  $\Gamma(\varphi, T\mathcal{M})$ . Estaremos interessados, nesta seção, com o caso particular em que a aplicação  $\varphi$  é uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  em uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$ . Então, um *campo vetorial ao longo de*  $\alpha$  é uma aplicação  $\mathbf{X}_\alpha : I \rightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $\mathbf{X}_\alpha(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{M}$  para todo  $t \in I$ .

**Proposição 1.2.1** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva em  $\mathcal{M}$ . A conexão de Levi-Civita  $\nabla$  de  $\mathcal{M}$  induz uma única aplicação  $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\alpha, T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\alpha, T\mathcal{M})$  satisfazendo*

- $\frac{\nabla}{dt}[\mathbf{X}_\alpha + \mathbf{Y}_\alpha] = \frac{\nabla}{dt}\mathbf{X}_\alpha + \frac{\nabla}{dt}\mathbf{Y}_\alpha, \quad \forall \mathbf{X}_\alpha, \mathbf{Y}_\alpha \in \Gamma(\alpha, \mathcal{M}),$
- $\frac{\nabla}{dt}[f\mathbf{X}_\alpha] = f\frac{\nabla}{dt}\mathbf{X}_\alpha + \frac{df}{dt}\mathbf{X}_\alpha, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(I), \mathbf{X}_\alpha \in \Gamma(\alpha, \mathcal{M}),$
- $\frac{\nabla}{dt}\mathbf{Z}|_\alpha = \nabla_{\alpha'}\mathbf{Z}, \quad \forall \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$

**Demonstração** Este resultado segue diretamente do lema 1.1.1.

O lema seguinte nos fornece duas propriedades muito úteis da conexão induzida.

**Lema 1.2.2** (1) Dada uma aplicação diferenciável a dois parâmetros  $h : I \times J \rightarrow \mathcal{M}$ , então

$$\frac{\nabla}{\partial t} \left[ \frac{\partial h}{\partial s} \right] = \frac{\nabla}{\partial s} \left[ \frac{\partial h}{\partial t} \right].$$

(2) Se  $\mathbf{V}$  é um campo vetorial sobre  $h$ , então

$$\frac{\nabla}{\partial t} \left[ \frac{\nabla \mathbf{V}}{\partial s} \right] - \frac{\nabla}{\partial s} \left[ \frac{\nabla \mathbf{V}}{\partial t} \right] = \mathbf{R} \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \mathbf{V}.$$

**Demonstração** (1) Dadas coordenadas locais  $\{x^1, \dots, x^n\}$  em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ , podemos escrever  $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h^i}{\partial t} \partial_i$  e  $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h^i}{\partial s} \partial_i$ . Fixando  $s$  e tomando a derivada covariante induzida de  $\frac{\partial h}{\partial s}$  ao longo da curva  $h_s$ , obtemos

$$\frac{\nabla}{\partial t} \left[ \frac{\partial h^i}{\partial s} \partial_i \right] = \left[ \frac{\partial^2 h^i}{\partial t \partial s} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial h^j}{\partial t} \frac{\partial h^k}{\partial s} \right] \partial_i,$$

que é simétrico em relação a  $t$  e  $s$ .

(2) Dadas coordenadas locais  $\{x^1, \dots, x^n\}$  em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ , escrevemos  $\mathbf{V} = V^i \partial_i$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{\partial t} \left[ \frac{\nabla \mathbf{V}}{\partial s} \right] &= \frac{\nabla}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial V^i}{\partial s} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial h^j}{\partial s} V^k \right) \partial_i \right] \\ &= \left[ \frac{\partial^2 V^i}{\partial t \partial s} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^m} \frac{\partial h^m}{\partial t} \frac{\partial h^j}{\partial s} V^k + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial^2 h^j}{\partial t \partial s} V^k \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial h^j}{\partial s} \frac{\partial V^k}{\partial t} + \Gamma_{lm}^i \frac{\partial h^l}{\partial t} \frac{\partial V^m}{\partial s} + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^l \frac{\partial h^m}{\partial s} \frac{\partial h^j}{\partial s} V^k \right] \partial_i. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{\partial t} \left[ \frac{\nabla \mathbf{V}}{\partial s} \right] - \frac{\nabla}{\partial s} \left[ \frac{\nabla \mathbf{V}}{\partial t} \right] &= \left[ \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{mk}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{lj}^i \Gamma_{mk}^l \right] \frac{\partial h^m}{\partial t} \frac{\partial h^j}{\partial s} V^k \partial_i \\ &= R_{mjk}^i \frac{\partial h^m}{\partial s} \frac{\partial h^j}{\partial t} V^k \partial_i = \mathbf{R} \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \mathbf{V}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A primeira propriedade mostra que ainda mantemos a simetria da conexão de Levi-Civita. A segunda propriedade nos mostra que a curvatura surge com a não-comutatividade das derivadas covariantes.

Diremos que um campo vetorial  $\mathbf{X}_\alpha$  ao longo de  $\alpha$  é *paralelo* (ao longo de  $\alpha$ ) quando  $\frac{\nabla}{dt}\mathbf{X}_\alpha = 0$  para todo  $t \in I$ .

**Proposição 1.2.3** *Dados  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  curva em  $\mathcal{M}$ ,  $0 \in I$  e  $\mathbf{u} \in T_{\alpha(0)}\mathcal{M}$ , existe único campo vetorial  $\mathbf{X}_\alpha \in \Gamma(\alpha, \mathcal{M})$  paralelo ao longo de  $\alpha$  tal que  $\mathbf{X}_\alpha(0) = \mathbf{u}$ .*

**Demonstração** Em coordenadas, a condição para o campo de vetores  $\mathbf{X}$  ser paralelo ao longo de  $\alpha$  é dada pela EDO linear de primeira ordem

$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\alpha^j}{dt} X^k = 0.$$

O resultado segue do teorema de existência e unicidade de soluções de EDOs lineares. ■

Tal campo  $\mathbf{X}_\alpha$  é chamado o *transporte paralelo de  $\mathbf{u}$  ao longo de  $\alpha$* .

**Observação** Dados  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\alpha(0)}\mathcal{M}$ , se  $\mathbf{X}_\alpha$  e  $\mathbf{Y}_\alpha$  são os transportes paralelos de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  ao longo de  $\alpha$ , respectivamente, então  $\mathbf{g}(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{Y}_\alpha) = \mathbf{g}_{\alpha(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

**Observação** Notamos que o transporte paralelo de um vetor tangente  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  ao longo de caminhos fechados, em geral, dependerá do caminho. Esta “não-integrabilidade” deve-se à não-comutatividade das derivadas covariantes, ou seja, à curvatura de  $\mathcal{M}$ , como vimos no lema 1.2.2.

Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  é chamada *geodésica* quando seu vetor tangente  $\gamma'$  é paralelo ao longo de  $\gamma$ , ou seja, quando

$$\gamma'' = \frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0.$$

**Observação** Notamos que se  $\gamma$  é geodésica, então  $\mathbf{g}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \mathbf{g}(\gamma'(0), \gamma'(0))$ , para todo  $t \in I$ .

**Proposição 1.2.4** *Dado um vetor tangente  $\mathbf{u} \in T_p\mathcal{M}$  existe única geodésica  $\gamma_{\mathbf{u}} : I_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que*

1. a velocidade inicial de  $\gamma_{\mathbf{u}}$  é  $\mathbf{u}$ , ou seja,  $\gamma'_{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}$ ;
2. o domínio de definição  $I_{\mathbf{u}}$  de  $\gamma_{\mathbf{u}}$  é o maior possível, ou seja, se  $\sigma : J \rightarrow \mathcal{M}$  é uma geodésica com velocidade inicial  $\mathbf{u}$ , então  $J \subseteq I_{\mathbf{u}}$  e  $\sigma = \gamma|_J$ .

**Demonstração** Em coordenadas, a condição para a curva  $\gamma$  ser uma geodésica é

$$\frac{d^2\gamma^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} = 0.$$

O resultado segue do teorema de existência e unicidade de soluções de EDOs. ■

A geodésica  $\gamma_{\mathbf{u}}$  é dita *maximal*, ou *inextensível*.

Dado  $p \in \mathcal{M}$ , seja  $\mathcal{E}_p$  o subconjunto de  $T_p\mathcal{M}$  formado pelos vetores  $\mathbf{u} \in T_p\mathcal{M}$  para os quais a geodésica inextensível  $\gamma_{\mathbf{u}}$  está definida pelo menos no intervalo  $[0, 1]$ . Definimos, então, a *aplicação exponencial* de  $\mathcal{M}$  em  $p$ ,  $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{M}$ , por

$$\exp_p(\mathbf{u}) = \gamma_{\mathbf{u}}(1).$$

Fixemos  $\mathbf{u} \in T_p\mathcal{M}$  e  $t \in \mathbb{R}$ . A curva  $s \mapsto \gamma_{\mathbf{u}}(ts)$  é também uma geodésica<sup>4</sup> e, claramente, possui velocidade  $t\gamma'_{\mathbf{u}}(0) = t\mathbf{u}$ . Então,

$$\gamma_{t\mathbf{u}}(s) = \gamma_{\mathbf{u}}(ts)$$

para todo  $s$  e  $t$  (tais que a equação está bem definida). Em particular, se  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_p$  e  $t \in [0, 1]$ , temos

$$\exp_p(t\mathbf{u}) = \gamma_{t\mathbf{u}}(1) = \gamma_{\mathbf{u}}(t).$$

Vemos, assim, que a aplicação exponencial  $\exp_p$  leva retas pela origem de  $T_p\mathcal{M}$  em geodésicas por  $p$  em  $\mathcal{M}$ .

**Proposição 1.2.5** *Para cada  $p \in \mathcal{M}$  existem vizinhanças abertas  $\tilde{\mathcal{U}}_p \subseteq \mathcal{E}_p$  contendo a origem em  $T_p\mathcal{M}$  e  $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{M}$  contendo  $p$  tais que  $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{U}}_p} : \tilde{\mathcal{U}}_p \rightarrow \mathcal{U}_p$  é um difeomorfismo.*

**Demonstração** Pela dependência diferenciável em relação às condições iniciais de EDOs, a aplicação exponencial é diferenciável. Dado  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_p$  temos

$$(d\exp_p)_0(\mathbf{u}) = \left. \frac{d}{dt} \exp_p(t\mathbf{u}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_{\mathbf{u}}(t) \right|_{t=0} = \mathbf{u}.$$

Logo  $(d\exp_p)_0 : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$  é a aplicação identidade<sup>5</sup>. O teorema da função inversa completa o resultado. ■

Quando a vizinhança  $\tilde{\mathcal{U}}_p$ , dada pela proposição anterior, é estrelada<sup>6</sup> em relação à origem, dizemos que  $\mathcal{U}_p$  é uma *vizinhança normal* de  $p$ . Neste caso, dado  $q \in \mathcal{U}_p$ ,

<sup>4</sup>De fato, a reparametrização  $\sigma(s) = \gamma(t(s))$  de uma geodésica  $\gamma$  é também uma geodésica se, e somente se,  $t(s) = As + B$ , com  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $A \neq 0$ .

<sup>5</sup>Aqui, estamos fazendo a identificação canônica entre  $T_0(T_p\mathcal{M})$  e  $T_p\mathcal{M}$ .

<sup>6</sup>Lembramos que um subconjunto aberto  $E$  de um espaço vetorial é dito *estrelado* em relação a um ponto  $\mathbf{v} \in E$  se  $\mathbf{w} \in E$  implica  $t\mathbf{w} \in E$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

claramente existe uma única geodésica ligando  $p$  a  $q$  em  $\mathcal{U}_p$ , de modo que podemos dizer que  $\mathcal{U}_p$  é estrelado em relação a  $p$ . Um subconjunto aberto  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$  será dito *convexo* se  $\mathcal{C}$  é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos. Em particular, entre cada par de pontos  $p, q \in \mathcal{C}$  existe única geodésica  $\gamma_{pq}$  ligando  $p$  a  $q$  que está inteiramente contida em  $\mathcal{C}$ .

Podemos introduzir, em vizinhanças normais, um sistema de coordenadas especialmente simples. Tomemos  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p\mathcal{M}$ , de modo que  $\mathbf{g}_p(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}\epsilon_j^7$ . Definimos as *coordenadas normais* em  $p$  em uma vizinhança normal  $\mathcal{U}_p$  associando a um ponto  $q = \exp_p(x^i \mathbf{e}_i)$  as coordenadas  $\{x^1, \dots, x^n\}$ . Mostra-se que, nestas coordenadas, os símbolos de Christoffel em  $p$  são identicamente nulos, o que facilita enormemente o cálculo tensorial.

**Lema 1.2.6** *Sejam  $p \in \mathcal{M}$  e  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_p \setminus \{0\}$ . Dados  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}(T_p\mathcal{M})$ , com  $\mathbf{v}$  radial<sup>8</sup>, temos*

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}((d \exp_p)_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}), (d \exp_p)_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})).$$

**Demonstração** Dados  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em  $T_{\mathbf{u}}(T_p\mathcal{M}) \simeq T_p\mathcal{M}$ , com  $\mathbf{v} \simeq \lambda \mathbf{u}$  radial, considere a aplicação  $\tilde{h} : I \times J \rightarrow T_{\mathbf{u}}(T_p\mathcal{M})$  dada por  $\tilde{h}(t, s) = t(\mathbf{u} + s\mathbf{w})$  e sua imagem pela exponencial  $h : I \times J \rightarrow T_p\mathcal{M}$  dada por  $h(t, s) = \exp_p(t(\mathbf{u} + s\mathbf{w}))$ . Claramente, temos  $(\partial \tilde{h} / \partial t)|_{(1,0)} = \mathbf{u}$  e  $(\partial \tilde{h} / \partial s)|_{(1,0)} = \mathbf{w}$  e, portanto,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{(1,0)} = (d \exp_p)_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}), \quad \left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_{(1,0)} = (d \exp_p)_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}).$$

Fixado  $s \in J$ , a curva longitudinal  $t \mapsto h(t, s)$  é uma geodésica com velocidade inicial  $\mathbf{u} + s\mathbf{w}$ . Logo,

$$\nabla \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) = \mathbf{g}(\mathbf{u} + s\mathbf{w}, \mathbf{u} + s\mathbf{w}),$$

para todo  $t \in I$ . Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) &= \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \nabla \frac{\partial h}{\partial s} \right) = \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \nabla \frac{\partial h}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{g}(\mathbf{u} + s\mathbf{w}, \mathbf{u} + s\mathbf{w}), \end{aligned}$$

de onde

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right|_{(t,0)} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

para todo  $t \in I$ . Integrando, obtemos

$$\mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) \Big|_{(t,0)} = t \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) \Big|_{(0,0)}.$$

<sup>7</sup>Note que os índices  $j$  não estão contraídos.

<sup>8</sup>Isto significa que  $\mathbf{v}$  é um múltiplo de  $\mathbf{u}$  quando fazemos a identificação canônica  $T_{\mathbf{u}}(T_p\mathcal{M}) \simeq T_p\mathcal{M}$ .



Agora, uma vez que  $h(0, s) = \exp_p(0) = p$  para todo  $s \in J$ ,  $(\frac{\partial h}{\partial s})|_{(0,0)} = 0$  e

$$\mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

Finalmente, fazendo  $t = 1$ ,

$$\mathbf{g}((d \exp_p)_u(\mathbf{u}), (d \exp_p)_u(\mathbf{w})) = \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) \Big|_{(1,0)} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Multiplicando por  $\lambda$  finalizamos a demonstração. ■

Em particular, a norma de vetores radiais é preservada. Assim, este lema nos mostra que a aplicação exponencial é uma isometria parcial, cujas distorções principais ocorrem nas direções ortogonais às direções radiais. Segue ainda, do lema anterior, o seguinte corolário.

**Corolário 1.2.7** *Seja  $\mathcal{C}_p$  uma vizinhança convexa de  $p \in \mathcal{M}$ . As geodésicas tipo-tempo por  $p$  são ortogonais às hipersuperfícies  $\zeta$  constante ( $< 0$ ), onde  $\zeta(q) = \mathbf{g}_p(\exp_p^{-1}(q), \exp_p^{-1}(q))$ , para  $q \in \mathcal{C}_p$ .*

**Demonstração** Seja  $\mathbf{X} : (-\delta, \delta) \rightarrow T_p\mathcal{M}$  uma curva com  $\mathbf{g}(\mathbf{X}(s), \mathbf{X}(s)) = -1$ . Tomando a aplicação  $h : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{C}_p$  dada por  $h(t, s) = \exp_p(t\mathbf{X}(s))$ . Claramente, as curvas  $t \mapsto h(t, s)$  são geodésicas e as curvas  $s \mapsto h(t, s)$  pertencem às hipersuperfícies de nível de  $\zeta$ , de modo que devemos mostrar que  $\mathbf{g}(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}) = 0$ . Pelos lemas 1.2.2 e 1.2.6, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) &= \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial h}{\partial t}} \frac{\partial h}{\partial s} \right) = \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial h}{\partial s}} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{g}(\mathbf{X}(s), \mathbf{X}(s)) = 0, \end{aligned}$$

pois

$$\frac{\partial h}{\partial t} = (d \exp_p)_{t\mathbf{X}(s)}(\mathbf{X}(s)).$$

Como, por outro lado,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = (d \exp_p)_{t\mathbf{X}(s)}(t \frac{\nabla}{ds} \mathbf{X}(s)),$$

temos que  $\frac{\partial h}{\partial s}|_{(0,s)} = 0$  e, portanto

$$\mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Notamos que, em particular, as hipersuperfícies  $\zeta < 0$  constante em vizinhanças convexas são tipo-espaço<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Dizemos que uma hipersuperfície  $\mathcal{S}$  é tipo-espaço, se todos os seus vetores normais são tipo-tempo.

Podemos coletar toda a informação das aplicações exponenciais  $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{M}$  em uma única aplicação  $\exp : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ , onde o subconjunto  $\mathcal{E} \subseteq T\mathcal{M}$  é o conjunto formado pelos vetores  $\mathbf{u} \in T\mathcal{M}$  para os quais a geodésica inextensível  $\gamma_{\mathbf{u}}$  está definida pelo menos no intervalo  $[0, 1]$ . É fácil ver que este conjunto é um aberto de  $T\mathcal{M}$ .

Se  $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é a projeção canônica de  $T\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{M}$ , definimos, também, uma aplicação  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  por

$$E(\mathbf{u}) = (\pi(\mathbf{u}), \exp(\mathbf{u})).$$

**Lema 1.2.8** *Se  $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{M}$  é não-singular em  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_p$ , então  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  é não-singular em  $\mathbf{u}$ .*

**Demonstração** Suponha que  $dE_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = 0$  para  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{u}}(T_p\mathcal{M})$ . Como temos  $\pi_1 \circ E = \pi$ , onde  $\pi_1 : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é a projeção sobre o primeiro fator, segue que

$$d\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (d\pi_1)_{E(\mathbf{u})}(dE_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) = 0.$$

Logo  $\mathbf{v}$  é vertical, ou seja, tangente a  $T_p\mathcal{M}$ , onde  $p = \pi(\mathbf{u})$ . Como  $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_p\mathcal{M}$ , então  $E|_{T_p\mathcal{M}} = (p, \exp_p)$  e, portanto,  $(d\exp_p)_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = 0$ . Logo  $\mathbf{v} = 0$ . ■

Como  $\exp_p$  é não-singular em  $0 \in T_p\mathcal{M} \subset T\mathcal{M}$ , o teorema da função inversa nos proporciona o seguinte lema.

**Lema 1.2.9** *Para cada  $p \in \mathcal{M}$  existem vizinhanças abertas  $\tilde{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{E}$  contendo a origem de  $T_p\mathcal{M}$  e  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  contendo  $(p, p)$  tais que  $E|_{\tilde{\mathcal{W}}} : \tilde{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{W}$  é um difeomorfismo.*

Agora, estamos em condições de demonstrar a existência de vizinhanças convexas em torno de cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ . Antes, porém, um lema.

**Lema 1.2.10** *Considere os conjuntos  $\mathcal{U}_p(\rho) = \{q \in \mathcal{U}_p; \sum_k (x^k)^2 < \rho^2\}$  e  $\mathcal{S}_p(\rho) = \{q \in \mathcal{U}_p; \sum_k (x^k)^2 = \rho^2\}$ . Existe  $c > 0$  tal que se  $0 < \rho < c$ , então qualquer geodésica tangente a  $\mathcal{S}_p(\rho)$  em um ponto  $q$  fica fora de  $\mathcal{U}_p(\rho)$  em uma vizinhança de  $q$ .*

**Demonstração do Lema 1.2.10** Seja  $\gamma$  a geodésica tangente a  $\mathcal{S}_p(\rho)$  em  $q = \gamma(0)$ . Definindo  $F(t) = \sum_i (\gamma^i(t))^2$ , temos

$$\begin{aligned} F(0) &= \rho^2, \\ \frac{dF}{dt} \Big|_{t=0} &= 2 \sum_i \gamma^i(0) \frac{d\gamma^i}{dt} \Big|_{t=0} = 0, \text{ e,} \\ \frac{d^2F}{dt^2} &= 2 \sum_i \left[ \left( \frac{d\gamma^i}{dt} \right)^2 + \gamma^i \frac{d^2\gamma^i}{dt^2} \right] = \left[ \delta_{jk} - \sum_i \Gamma_{jk}^i \gamma^i \right] \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt}. \end{aligned}$$

Como os símbolos de Christoffel se anulam em  $p$  existe  $c > 0$  tal que a forma quadrática com componentes  $\delta_{ij} - \sum_i \Gamma_{ij}^i x^i$  é positiva definida em  $\mathcal{U}_p(c)$ . Então, se  $0 < \rho < c$ , temos  $\frac{d^2F}{dt^2} \Big|_{t=0} > 0$  e, portanto,  $F(t) > \rho^2$  quando  $t \neq 0$  em uma vizinhança de 0. ■

**Proposição 1.2.11** *Cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  possui uma vizinhança convexa  $\mathcal{C}_p$ .*

**Demonstração** Dado  $p \in \mathcal{M}$ , seja  $\mathcal{U}_p$  uma vizinhança normal de  $p$  e  $\{x^1, \dots, x^n\}$  as coordenadas normais em  $p$  em  $\mathcal{U}_p$ . Para  $\rho > 0$  suficientemente pequeno, o conjunto  $\mathcal{U}_p(\rho) = \{q \in \mathcal{U}_p; \sum_k (x^k)^2 < \rho^2\}$  é uma vizinhança de  $p$  em  $\mathcal{U}_p$  difeomorfa a uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$ .

Tomemos as vizinhanças  $\tilde{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{E}$  contendo a origem de  $T_p\mathcal{M}$  e  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  contendo  $(p, p)$  como no lema 1.2.9. Podemos considerar, por continuidade, que  $\tilde{\mathcal{W}}$  é tal que, para cada  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{W}}$  e  $t \in [0, 1]$ ,  $t\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{W}}$  e que  $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_p(c) \times \mathcal{U}_p(c)$ . Mais ainda, podemos encontrar  $0 < a < c$  tal que  $\mathcal{U}_p(a) \times \mathcal{U}_p(a) \subset \mathcal{W}$ . Mostraremos que  $\mathcal{U}_p(a)$  é uma vizinhança convexa de  $p$ .

Seja  $\tilde{\mathcal{W}}(a) = E^{-1}(\mathcal{U}_p(a) \times \mathcal{U}_p(a)) \subset \tilde{\mathcal{W}}$  e, dado  $q \in \mathcal{U}_p(a)$ ,  $\tilde{\mathcal{W}}(a)_q = \tilde{\mathcal{W}}(a) \cap T_q\mathcal{M}$ . Por construção, a aplicação  $E|_{\tilde{\mathcal{W}}(a)_q}$  é um difeomorfismo sobre  $\{q\} \times \mathcal{U}_p(a)$ , logo  $\exp_q|_{\tilde{\mathcal{W}}(a)_q}$  é um difeomorfismo sobre  $\mathcal{U}_p(a)$ . Resta mostrarmos que  $\tilde{\mathcal{W}}(a)_q$  é estrelado em relação à origem de  $T_q\mathcal{M}$ .

Dado  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{W}}(a)_q$ , seja  $r = \exp_q(\mathbf{u}) \in \mathcal{U}_p(a)$ . A restrição da geodésica  $\gamma_{\mathbf{u}}$  ligando  $q = \gamma_{\mathbf{u}}(0)$  a  $r = \gamma_{\mathbf{u}}(1)$  ao intervalo  $[0, 1]$  esta completamente contida em  $\mathcal{U}_p(c)$  já que, para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $t\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{W}}$ . Como temos  $t\mathbf{u} = \exp_q^{-1}(\gamma_{\mathbf{u}}(t))$  para todo  $t \in [0, 1]$ , precisamos mostrar que  $\gamma_{\mathbf{u}}|_{[0,1]}$  está, de fato, contida em  $\mathcal{U}_p(a)$ .

Suponha que, por absurdo, que exista algum  $t \in [0, 1]$  tal que  $\gamma_{\mathbf{u}}(t) \notin \mathcal{U}_p(a)$  de modo que

$$F(t) = \sum_i (\dot{\gamma}^i(t))^2 \geq a^2.$$

Sendo  $t_0 \in (0, 1)$  o ponto onde  $F$  atinge seu máximo, temos

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=t_0} = 2 \sum_i \dot{\gamma}^i(t_0) \left. \frac{d\dot{\gamma}^i}{dt} \right|_{t=t_0} = 0,$$

de onde  $\dot{\gamma}_{\mathbf{u}}$  é tangente a  $\mathcal{S}_p(\rho_0)$ , onde  $\rho_0^2 = F(t_0) < a^2$ . Pelo lema 1.2.10, a geodésica  $\gamma_{\mathbf{u}}$  deve ficar fora de  $\mathcal{U}_p(\rho_0)$  em uma vizinhança de  $t_0$ . Contradição. ■

## 1.3 Alguns exemplos

### Espaço-tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski é o exemplo mais simples de variedade lorentziana. De fato, ele é o equivalente do espaço euclidiano da geometria riemanniana e o palco onde a teoria da Relatividade Especial é formulada.

Precisamente, o espaço-tempo de Minkowski é a variedade diferenciável  $\mathbb{R}_1^n = \mathbb{R}^{n+1}$  com a métrica plana

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

Notamos que, em geral, denotamos por  $\mathbb{R}_p^n$  a variedade  $\mathbb{R}^n$  com a métrica plana

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - \dots - (dx^\nu)^2 + (dx^{\nu+1})^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

No espaço-tempo de Minkowski, o cone de tempo em  $x$  é, de fato, o interior de um cone sólido de duas folhas em  $x$ . Sua fronteira é o cone de luz em  $x$ . Podemos dividir os vetores tipo-tempo em duas classes distintas dizendo que um vetor tipo-tempo  $x$  é futuro-orientado se sua primeira componente é positiva e passado-orientado caso esta seja negativa. Esta orientabilidade temporal será de extrema importância ao estudarmos a teoria da causalidade em variedades lorentzianas.

### Espaços-tempo de Sitter e anti-de Sitter

Sejam  $\mathbb{S}_1^n(r)$  e  $\mathbb{H}_1^n(r)$  os conjuntos dados, respectivamente, por

$$\mathbb{S}_1^n(r) = \left\{ x \in \mathbb{R}_1^{n+1}; -(x^1)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = r^2 \right\}$$

e

$$\mathbb{H}_1^n(r) = \left\{ x \in \mathbb{R}_2^{n+1}; -(x^1)^2 - (x^2)^2 + \sum_{i=3}^{n+1} (x^i)^2 = -r^2 \right\}.$$

Topologicamente,  $\mathbb{S}_1^n(r) = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$  e  $\mathbb{H}_1^n(r) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Obtemos em  $\mathbb{S}_1^n(r)$  e  $\mathbb{H}_1^n(r)$  métricas lorentzianas de curvatura constante induzidas pelas métricas de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  e  $\mathbb{R}_2^{n+1}$ .

A primeira variedade,  $\mathbb{S}_1^n(r)$ , é chamada espaço-tempo de Sitter e é o análogo lorentziano a um espaço esférico riemanniano. A segunda variedade,  $\mathbb{H}_1^n(r)$ , é chamada espaço-tempo anti-de Sitter. Esta variedade tem curvatura constante negativa, sendo análoga aos espaços riemannianos hiperbólicos.

### Espaço-tempo de Schwarzschild

O espaço-tempo de Schwarzschild é um modelo para o campo gravitacional de universo contendo um único corpo estático e esfericamente simétrico, descrevendo muito bem o campo gravitacional de estrelas isoladas com velocidade angular muito pequena como, por exemplo, nosso sistema solar. Ele é a única solução estática, esfericamente simétrica e assintoticamente plana da equação de Einstein<sup>10</sup> no vácuo. Vamos tornar mais preciso o que isto quer dizer.

Diremos que uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  é *estática*, quando existem

<sup>10</sup>A equação de Einstein,

$$\mathbf{Ric} - \frac{S}{2}\mathbf{g} = 8\pi\mathbf{T},$$

onde  $S$  é o traço do tensor de Ricci e  $\mathbf{T}$  é o tensor momentum-energia, é a equação que dita a relação entre a distribuição de matéria e a curvatura do universo. Veja [1] pg.74.

- um campo vetorial unitário tipo-tempo  $\mathbf{U}$  tal que, para cada  $p \in \mathcal{M}$ , existe uma hipersuperfície tipo-espaço  $\mathcal{S}_p$  de modo que  $\mathbf{U}(q)$  é ortogonal a  $\mathcal{S}_p$  para todo  $q \in \mathcal{S}_p$ , e
- uma função diferenciável positiva  $f$  em  $\mathcal{M}$

tais que o campo  $f\mathbf{U}$  é um *campo de Killing*, ou seja, o fluxo local gerado por  $f\mathbf{U}$  é uma família a um parâmetro de isometrias. Desta forma, as hipersuperfícies  $\mathcal{S}_p$  são permutadas isometricamente pelo fluxo de  $f\mathbf{U}$  e, localmente, a métrica de  $\mathcal{M}$  é dada por

$$\mathbf{g} = -Adt^2 + ds^2,$$

onde  $ds^2$  é uma métrica riemanniana em uma variedade diferenciável  $\mathcal{S}$  de dimensão 3 e  $A : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável positiva.

Supondo que  $\mathcal{S}$  tem simetria esférica, podemos supor que  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^3 - \{0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  com a métrica  $ds^2 = B(\rho)d\rho^2 + C(\rho)d\sigma^2$ , onde  $\rho \in \mathbb{R}^+$  e  $d\sigma^2$  é a métrica usual da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Fazemos, então, uma mudança de variáveis de modo a obter  $C(\rho) = r^2$  e ficamos com a métrica

$$\mathbf{g} = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\sigma^2.$$

A escolha desta normalização implica que em cada hipersuperfície com  $t$  constante, as superfícies  $r$  constante tem métrica  $r^2d\sigma$  sendo, portanto, isométricas às esferas  $\mathbb{S}^2(r)$ .

A hipótese de que  $\mathcal{M}$  é uma solução da equação de Einstein no vácuo nos dá que a curvatura de Ricci é identicamente nula,  $\mathbf{Ric} = 0$ , o que se traduz em duas equações diferenciais em  $A(r)$  e  $B(r)$ . A primeira é  $\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0$ , o que implica  $AB = \text{constante}$ . A condição assintótica nos diz que, para  $r$  suficientemente grande, devemos ter

$$\mathbf{g} \simeq -dt^2 + dr^2 + r^2d\sigma^2,$$

logo  $A(r) \rightarrow -1$  e  $B(r) \rightarrow +1$  quando  $r \rightarrow +\infty$ , de modo que obtemos  $AB = -1$ . Podemos utilizar esta relação para reescrever a segunda equação em termos de  $B$ , obtendo

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r}{B} \right] = \frac{B - B'r}{B^2} = 1.$$

Resolvendo para  $B$ , ficamos com

$$B = \frac{r}{r - 2M}, \quad A = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right),$$

onde  $M$  é uma constante positiva chamada *massa de Schwarzschild*. Assim, obtemos a *métrica de Schwarzschild*

$$\mathbf{g} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( \frac{r}{r - 2M} \right) dr^2 + r^2d\sigma^2.$$

## Espaço-tempo de Robertson-Walker

Um espaço-tempo de Robertson-Walker é um modelo cosmológico do universo baseado no princípio cosmológico (homogeneidade espacial e isotropia). Embora esta hipótese não pareça satisfatória em nossa escala cotidiana ela é, de fato, razoável em grande escala, da ordem de bilhões de anos-luz.

Assumindo o princípio cosmológico, a variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  que modela o universo deve ser folheada por hipersuperfícies tipo-espaço de curvatura constante. Assim, temos que  $\mathcal{M} = I \times \mathcal{S}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e  $\mathcal{S}$  é uma variedade riemanniana 3-dimensional conexa com curvatura seccional  $K = -1, 0$  ou  $+1$ , com a métrica da forma

$$\mathbf{g} = -dt^2 + f(t)^2\mathbf{h},$$

onde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável positiva em  $I$  e  $\mathbf{h}$  é a métrica de  $\mathcal{S}$ . É usual considerarmos que  $\mathcal{S}$  é simplesmente conexa, de modo que as únicas possibilidades são  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^3$  ou  $\mathcal{S} = \mathbb{H}^3$ . Isto claramente implica que os espaços-tempo de Minkowski, de Sitter e anti-de Sitter são casos particulares de Robertson-Walker.

Chamando  $\mathbf{U}$  o campo vetorial tipo-tempo unitário obtido pelo levantamento do campo vetorial  $\frac{d}{dt}$  em  $I$ , temos que  $\mathbf{U}$  é sempre normal às hipersuperfícies  $t$  constante,  $\mathcal{S}_t$ . Alguns cálculos nos fornecem

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \frac{-3f''}{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{U} = \frac{3f'}{f},$$

onde  $\operatorname{div}\mathbf{U}$  é a contração da diferencial covariante de  $\mathbf{U}$ . Estamos interessados nestes objetos pois  $\operatorname{div}\mathbf{U}$  fornece a taxa de variação logarítmica, na direção de  $\mathbf{U}$ , do elemento de volume das hipersuperfícies  $\mathcal{S}_t$  e  $\mathbf{Ric}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$  nos fornece a taxa de variação de  $\operatorname{div}\mathbf{U}$ .

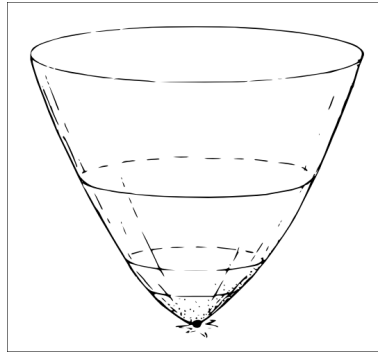
**Proposição 1.3.1** *Se  $H_0 = \operatorname{div}\mathbf{U}(t_0) > 0$  para algum  $t_0 \in I$ , e  $\mathbf{Ric}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) > 0$  para todo  $t \in I$ , então  $I$  tem um ponto inicial  $t_*$  com  $t_0 - \frac{1}{H_0} < t_* < t_0$  e ou (1)  $f' > 0$  ou (2)  $f$  assume um valor máximo depois de  $t_0$ , e  $I$  é um intervalo finito  $I = (t_*, t^*)$ .*

**Demonstração** Uma vez que  $\mathbf{Ric}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \frac{-3f''}{f}$  e  $f > 0$ , obtemos  $f'' < 0$  em  $I$ . Assim, o gráfico de  $f$  encontra-se abaixo do gráfico da reta  $F(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) = H_0 f(t_0)(t - t_0)$ . Como  $F(t_0 - H_0^{-1}) = 0$ ,  $f$  apresenta uma singularidade em algum ponto  $t_*$  entre  $t_0 - \frac{1}{H_0}$  e  $t_0$ .

Como  $f'' < 0$ , ou  $f'$  é sempre positiva em  $I$  ou  $f$  assume um máximo depois do qual  $f' < 0$ . Neste último caso, um argumento como o anterior garante outra singularidade de  $f$  em um ponto  $t^* > t_0$ .

As hipóteses desta proposição são bem razoáveis, uma vez que a condição  $\mathbf{Ric}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) > 0$  diz simplesmente que, em média, a gravitação é uma força atrativa e a condição  $H_0 > 0$

nos diz que o espaço  $\mathcal{S}_t$  encontra-se em expansão no instante  $t_0$ . De fato, fisicamente,  $H_0$  representa a constante de Hubble e, de acordo com medidas realizadas com o telescópio Hubble em 2001<sup>11</sup>, seu valor é da ordem de  $10^{-18}s^{-1}$ . Assim, assumindo que nosso universo é Robertson-Walker, estes números mostram que nosso universo não pode ter mais do que  $\frac{1}{H_0} \approx 10^{10}$ anos (algumas dezenas de bilhões de anos).



De fato, nosso universo não satisfaz perfeitamente as condições do princípio cosmológico e o resultado pode não valer no caso de universos menos simétricos. Veremos, entretanto, que o teorema de Hawking generaliza a proposição 1.3.1 de forma que singularidades também ocorrerão em universos livres das simetrias do modelo de Robertson-Walker.

---

<sup>11</sup>Veja [2].

## Capítulo 2

# Cálculo das Variações

### 2.1 Comprimento de curvas e variações

Dada uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  ligando  $p = \alpha(0)$  a  $q = \alpha(b)$ , definimos o comprimento do segmento  $\alpha|_{[0,b]}$  por

$$L[\alpha] = \int_0^b |\mathbf{g}(\alpha'(t), \alpha'(t))|^{1/2} dt.$$

No caso de uma curva diferenciável por partes, tomamos a soma das integrais de suas partes diferenciáveis.

No caso de variedades lorentzianas, as geodésicas não são curvas de comprimento mínimo como acontece no caso riemanniano. De fato, a próxima proposição mostra justamente o oposto.

**Proposição 2.1.1** *Seja  $p \in \mathcal{M}$  e  $q$  um ponto contido em uma vizinhança convexa  $\mathcal{C}_p$  de  $p$ . Se  $p$  e  $q$  podem ser conectados por uma curva tipo-tempo diferenciável por partes em  $\mathcal{C}_p$ , então a geodésica que liga  $p$  a  $q$  em  $\mathcal{C}_p$  é tipo-tempo e é a única curva ligando  $p$  a  $q$  que realiza o comprimento máximo.*

**Demonstração** Seja  $\alpha$  a curva tipo-tempo ligando  $p$  a  $q$  em  $\mathcal{C}_p$ . Seja  $\Lambda(p) \subset T_p\mathcal{M}$  o cone de tempo em  $p$  contendo  $\alpha'(0)$ . Tomemos  $\tilde{\alpha} = \exp_p^{-1} \circ \alpha$  a curva em  $T_p\mathcal{M}$  que corresponde a  $\alpha$  pelo difeomorfismo  $\exp_p$ . Como  $(d\exp_p)_0$  é a aplicação identidade, temos que  $\tilde{\alpha}'(0)$  é tipo-tempo, de modo que a curva  $\tilde{\alpha}$  entra, inicialmente, em  $\Lambda(p)$ .

Notamos que  $\exp_p(\Lambda(p)) \cap \mathcal{C}_p$  é o subconjunto de  $\mathcal{C}_p$  formado pelos pontos  $r$  tais que  $\zeta(r) < 0$ , onde  $\zeta(q) = \mathbf{g}_p(\exp_p^{-1}(q), \exp_p^{-1}(q))$ . Logo, já que as hipersuperfícies  $\zeta$  constante são tipo-espaço e  $\alpha$  é tipo-tempo,  $\alpha$  não pode ser tangente a tais hipersuperfícies. Assim,  $\zeta$  deve decrescer monotonicamente ao longo de  $\alpha$  o que implica  $\zeta(q) < 0$  e, portanto,  $q \in \exp_p(\Lambda(p))$ . Claramente, o segmento de geodésica  $\gamma$  ligando  $p = \gamma(0)$  a  $q = \gamma(b)$  em



$\mathcal{C}_p$  é tipo-tempo. Notamos que seu comprimento é dado por

$$\begin{aligned} L[\gamma] &= \int_0^b |\mathbf{g}(\gamma'(t), \gamma'(t))|^{1/2} dt \\ &= |\mathbf{g}(\exp_p^{-1}(q), \exp_p^{-1}(q))|^{1/2} = |\zeta(q)|^{1/2}. \end{aligned}$$

Mostraremos que o comprimento de  $\alpha$ ,  $L[\alpha]$ , ligando  $p = \alpha(0)$  a  $q = \alpha(B)$  é menor do que  $|\zeta(q)|^{1/2}$ .

Suponhamos, primeiramente, que  $\alpha$  não possui quebras. Dado um segmento de curva  $\mathbf{X} : [0, B] \rightarrow T_p\mathcal{M}$  em  $T_p\mathcal{M}$  com  $\mathbf{g}(\mathbf{X}(s), \mathbf{X}(s)) = -1$ , definimos  $h(t, s) = \exp_p(t\mathbf{X}(s))$ . Então, dado o segmento  $\alpha$ , podemos encontrar  $\mathbf{X}$  como acima e  $f : [0, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  função diferenciável tais que

$$\alpha(s) = h(f(s), s).$$

Assim, obtemos

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{df}{ds} + \frac{\partial h}{\partial s}.$$

Como  $\frac{\partial h}{\partial t}$  é tangente a geodésicas tipo-tempo e  $\frac{\partial h}{\partial s}$  é tangente a hipersuperfícies  $\zeta$  constante, segue do corolário 1.2.7 que  $\mathbf{g}(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}) = 0$ . Mais que isto, pela característica causal das hipersuperfícies  $\zeta$  constante, temos  $\mathbf{g}(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}) \geq 0$ , com a igualdade se e só se  $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$ , e, pelo lema 1.2.6,  $\mathbf{g}(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(s), \mathbf{X}(s)) = -1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}\left(\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\alpha}{ds}\right) &= \mathbf{g}\left(\frac{\partial h}{\partial t} \frac{df}{ds} + \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \frac{df}{ds} + \frac{\partial h}{\partial s}\right) \\ &= \mathbf{g}\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) \left(\frac{df}{ds}\right)^2 + \mathbf{g}\left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right) \\ &= -\left(\frac{df}{ds}\right)^2 + \mathbf{g}\left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right) \geq -\left(\frac{df}{ds}\right)^2, \end{aligned}$$

com a igualdade se e só se  $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$ . Assim,

$$L[\alpha] = \int_0^B |\mathbf{g}(\alpha', \alpha')|^{1/2} ds \leq \int_0^B \frac{df}{ds} ds = f(B) - f(0).$$

Agora, por definição,  $\zeta(\alpha(s)) = -(f(s))^2$ , de onde  $f(s) = |\zeta(\alpha(s))|^{1/2}$  e, finalmente,

$$L[\alpha] \leq |\zeta(q)|^{1/2} = L[\gamma]. \quad \blacksquare$$

Dado um segmento de curva causal<sup>1</sup>  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  curva em  $\mathcal{M}$ , uma *variação* de  $\alpha$  é uma aplicação diferenciável a dois parâmetros

$$h : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M},$$

<sup>1</sup>Chamamos um vetor tangente  $\mathbf{u}$  *causal* se  $\mathbf{u}$  não for tipo-espaço. A extensão desta característica para curvas é feita da maneira natural.

tal que  $h(t, 0) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Chamamos o campo vetorial  $\mathbf{V} : [a, b] \rightarrow T\mathcal{M}$  ao longo de  $\alpha$  definido por  $t \mapsto \mathbf{V}(t) = \frac{\partial h}{\partial s}|_{(t,0)}$  *campo variação* de  $h$ .

Uma variação  $h$  de um segmento de curva diferenciável por partes  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  é dita *diferenciável por partes* se  $h$  é contínua e, para uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  de  $[a, b]$ , a restrição de  $h$  a cada  $[t_{k-1}, t_k] \times (-\delta, \delta)$  é diferenciável. Notamos que não perdemos generalidade ao supor que  $\alpha$  e  $h$  possuem as mesmas quebras uma vez que podemos adicionar quebras triviais, onde  $\alpha$  ou  $h$  são, de fato, diferenciáveis. Notamos que o campo variação  $\mathbf{V}$  de uma variação diferenciável por partes  $h$  será sempre diferenciável por partes em contraste com o campo velocidade  $\alpha'$ , que apresentará descontinuidades em cada quebra não-trivial. Para medirmos tais descontinuidades, introduzimos os vetores

$$\Delta\alpha'(t_i) = \alpha'(t_i^+) - \alpha'(t_i^-) \in T_{\alpha(t_i)}\mathcal{M}.$$

Dada uma variação diferenciável por partes  $h : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$  de um segmento de curva diferenciável por partes  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ , iremos denotar, para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ , o comprimento do segmento  $h_s : t \mapsto h(t, s)$  por  $L_h(s)$ . Analisando a primeira e segunda derivada da *função comprimento de arco* em  $h$ ,  $L_h : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , iremos obter condições suficientes para que a curva  $\alpha$  tenha comprimento maximal.

**Proposição 2.1.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  um segmento de curva tipo-tempo diferenciável por partes parametrizado pelo comprimento de arco ligando  $p = \alpha(a)$  a  $q = \alpha(b)$ . Se  $h$  é uma variação diferenciável por partes de  $\alpha$  e  $L_h$  é o comprimento de arco em  $h$ , então a primeira variação de  $L_h$  é dada por*

$$\dot{L}_h(0) = \int_a^b \mathbf{g}(\alpha'', \mathbf{V}) dt + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{g}(\Delta\alpha'(t_i), \mathbf{V}(t_i)) - \mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V})|_a^b,$$

onde  $a = t_0 < \dots < t_N = b$  são as quebras de  $\alpha$  e  $h$ .

**Demonstração** Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, os segmentos  $h_s$  são tipo-tempo, e a função  $|h'| = [-\mathbf{g}(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t})]^{1/2}$  será diferenciável em cada  $(s, t)$  onde  $h$  for diferenciável. Assim, temos

$$\dot{L}_h(0) = \int_a^b \frac{d}{ds} \left[ -\mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \right]^{1/2} \Big|_{s=0} dt = \int_a^b \frac{d}{ds} |h'| \Big|_{s=0} dt.$$

Pelo lema 1.2.2,

$$\frac{d}{ds} |h'| = \frac{1}{|h'|} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} \right) = \frac{1}{|h'|} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right).$$

Fazendo  $s = 0$ , obtemos  $\frac{\partial h}{\partial t}(0, t) = \alpha'(t)$  e  $\frac{\partial h}{\partial s}(0, t) = \mathbf{V}(t)$ , de onde  $\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s}(0, t) = \mathbf{V}'(t)$ .

Logo

$$\dot{L}_h(0) = - \int_a^b \frac{1}{|\alpha'|} \mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V}') dt = - \int_a^b \mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V}') dt.$$

Agora,  $\mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V}') = \frac{d}{dt}\mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V}) - \mathbf{g}(\alpha'', \mathbf{V})$  e, portanto, em cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ ,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V}') dt = \mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V})|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{g}(\alpha'', \mathbf{V}) dt.$$

Somando sobre  $i$ , obtemos finalmente

$$\dot{L}_h(0) = \int_a^b \mathbf{g}(\alpha'', \mathbf{V}) dt + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{g}(\Delta\alpha'(t_i), \mathbf{V}(t_i)) - \mathbf{g}(\alpha', \mathbf{V})|_a^b \quad \blacksquare$$

Iremos, agora, restringir-nos ao estudo de curvas conectando uma hipersuperfície tipo-espaco  $\mathcal{S}$  a um ponto  $q$ .

Seja  $\alpha : [0, b] \rightarrow \mathcal{M}$ , um segmento de curva tipo-tempo diferenciável por partes ligando uma hipersuperfície tipo-espaco  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  a um ponto  $q \in \mathcal{M}$  e  $h : [0, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$  uma variação diferenciável por partes de  $\alpha$ . Diremos que  $h$  é uma  $\mathcal{S}q$ -variação de  $\alpha$  se todos os segmentos longitudinais de  $h$ ,  $h_s : t \mapsto h(t, s)$ , conectam  $\mathcal{S}$  a  $q$ . Assim, a primeira curva transversal de  $h$ ,  $s \mapsto h(0, s)$ , será uma curva em  $\mathcal{S}$  e, portanto, os campos variação de  $\mathcal{S}q$ -variações são campos vetoriais  $\mathbf{V}$  diferenciáveis por partes sobre  $\alpha$  tais que  $\mathbf{V}(0) \in T_{\alpha(0)}\mathcal{S}$  e  $\mathbf{V}(b) = 0$ . Denotaremos o conjunto de tais campos por  $T_\alpha\Omega_{\mathcal{S}q}$ . É possível mostrar que este conjunto é o conjunto dos campos variação de  $\mathcal{S}q$ -variações, ou seja, que cada  $\mathbf{V} \in T_\alpha\Omega_{\mathcal{S}q}$  é o campo variação de alguma  $\mathcal{S}q$ -variação.

Um corolário muito útil da fórmula da primeira variação do comprimento de arco é o seguinte lema.

**Lema 2.1.3** *Seja  $\gamma$  um segmento de curva tipo-tempo diferenciável por partes de  $\mathcal{S}$  a  $q$  parametrizado pelo comprimento de arco. Então  $\dot{L}_h(0) = 0$  para toda  $\mathcal{S}q$ -variação  $h$  de  $\alpha$  se, e somente se,  $\gamma$  é um segmento de geodésica (não-quebrado)  $\mathcal{S}$ -normal.*

**Demonstração** Se  $\gamma$  é um segmento de geodésica  $\mathcal{S}$ -normal, é claro, pela proposição 2.1.2, que  $\dot{L}_h(0) = 0$ .

Reciprocamente, suponha que  $\dot{L}_h(0) = 0$  para  $\mathcal{S}q$ -variação de  $\gamma$ . Começemos mostrando que cada segmento  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é um segmento de geodésica. Fixemos  $\tilde{t} \in (t_i, t_{i+1})$ ,  $\mathbf{u} \in T_{\gamma(\tilde{t})}\mathcal{M}$  e  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma bump function com  $\text{supp}\varphi \subset [\tilde{t} - \delta, \tilde{t} + \delta] \subset [t_i, t_{i+1}]$ . Consideremos o campo vetorial  $\mathbf{U}$  ao longo de  $\gamma$ , obtido pelo transporte paralelo de  $\mathbf{u}$ , e tomemos  $\mathbf{V} = \varphi\mathbf{U}$ .

Podemos, agora, definir uma variação  $h : [0, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$  de  $\gamma$  dado por

$$h(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(s\mathbf{V}(t)).$$

Como  $\mathbf{V}(0) = 0$  e  $\mathbf{V}(b) = 0$ ,  $h$  é uma variação com extremos fixos e, em particular, uma  $\mathcal{S}q$ -variação. Seu campo variação é claramente  $\mathbf{V}$ . A proposição 2.1.2 nos fornece, então,

$$0 = \int_0^b \mathbf{g}(\gamma'', \mathbf{V}) dt = \int_{\tilde{t}-\delta}^{\tilde{t}+\delta} \mathbf{g}(\gamma'', \varphi\mathbf{U}) dt.$$

Como a escolha de  $\tilde{t}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\varphi$  é arbitrária, segue que  $\mathbf{g}(\gamma''(t), \mathbf{u}) = 0$ , para todo  $\mathbf{u} \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ , e, portanto, que  $\gamma''(t) = 0$ .

Para mostrarmos que as quebras são triviais, tomemos  $\mathbf{u} \in T_{\gamma(t_i)}\mathcal{M}$  e  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma bump function em  $t_i$  com  $\text{supp}\varphi \subset [t_{i-1}, t_{i+1}]$ . Construindo, como antes, uma variação com extremos fixos cujo campo variação é  $\varphi\mathbf{U}$ , obtemos, pela proposição 2.1.2,  $0 = \mathbf{g}(\Delta\gamma'(t_i), \mathbf{u})$  para todo  $\mathbf{u}$ . Logo,  $\Delta\gamma'(t_i) = 0$ .

Finalmente mostraremos que  $\gamma$  é  $\mathcal{S}$ -normal. Fixado  $\mathbf{u} \in T_{\gamma(0)}\mathcal{S}$  tomamos  $\mathbf{V} \in T_{\gamma}\Omega_{\mathcal{S}q}$  tal que  $\mathbf{V}(0) = \mathbf{u}$ . Então temos uma  $\mathcal{S}q$ -variação  $h$  de  $\gamma$  cujo campo variação é  $\mathbf{V}$  e a proposição 2.1.2 nos dá

$$0 = -\mathbf{g}(\gamma', \mathbf{V})|_0^b = \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{u}). \quad \blacksquare$$

O campo variação  $\mathbf{V} = \frac{\partial h}{\partial s}|_{(t,0)}$  fornece as velocidades das curvas transversais de  $h$ ,  $s \mapsto h(t, s)$ , quando estas cruzam  $\alpha$ . De modo similar, o campo vetorial  $\mathbf{A} = \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}|_{(t,0)}$  ao longo de  $\alpha$  fornece as suas acelerações. Este último campo vetorial é chamado *campo vetorial aceleração transversal* de  $h$ .

**Proposição 2.1.4** *Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{M}$  um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal parametrizado pelo comprimento de arco. Se  $h$  é uma  $\mathcal{S}q$ -variação de  $\gamma$ , então a segunda variação do comprimento de arco é dada por*

$$\ddot{L}(0) = -\int_0^b \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{V}'^\perp, \mathbf{V}'^\perp) + \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{V}\gamma'}\mathbf{V}, \gamma') \right\} dt + \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{V}(0), \mathbf{V}(0))),$$

onde  $\mathbf{V}$  é o campo variação de  $h$ ,  $\mathbf{V}'^\perp$  é a sua componente perpendicular a  $\gamma$  e  $\mathbf{II}$  é a segunda forma fundamental de  $\mathcal{S}$ .

Na fórmula da segunda variação do comprimento de arco, dada na proposição anterior, encontramos a segunda forma fundamental da hipersuperfície tipo-espaço  $\mathcal{S}$ . Vamos, antes de mais nada, relembrar o que isto significa.

Em primeiro lugar, já que o espaço tangente  $T_p\mathcal{S}$  é um subespaço não-degenerado de  $T_p\mathcal{M}$ , podemos decompor

$$T_p\mathcal{M} = T_p\mathcal{S} \oplus T_p\mathcal{S}^\perp.$$

Naturalmente, diremos que um vetor  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{S}^\perp$  é *normal* a  $\mathcal{S}$ , ou  $\mathcal{S}$ -normal e que um vetor  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{S}$  é tangente a  $\mathcal{S}$ , ou  $\mathcal{S}$ -tangente.

Um  $\mathcal{M}$ -campo vetorial  $\mathbf{X}$  em  $\mathcal{S}$  é um campo vetorial sobre a aplicação  $j$ . Se, para cada  $p \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{X}(p) \in T_p\mathcal{S}$  diremos apenas que  $\mathbf{X}$  é tangente a  $\mathcal{S}$ . Se, para cada  $p \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{X}(p) \in T_p\mathcal{S}^\perp$  diremos que  $\mathbf{X}$  é normal a  $\mathcal{S}$ . Claramente, obtemos uma decomposição do espaço dos  $\mathcal{M}$ -campos vetoriais,  $\mathfrak{X}(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ , na soma direta dos espaços dos campos de vetores tangentes e dos campos de vetores normais,

$$\mathfrak{X}(\mathcal{S}, \mathcal{M}) = \mathfrak{X}(\mathcal{S}) \oplus \mathfrak{X}(\mathcal{S})^\perp.$$

Além disso, é fácil ver que ficam bem definidas as aplicações de projeção  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ -lineares

$$\tan : \mathfrak{X}(\mathcal{S}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{S}) \quad \text{e} \quad \text{nor} : \mathfrak{X}(\mathcal{S}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{S})^\perp.$$

Uma vez que  $\mathcal{S}$  é tipo-espaço, o pull-back da métrica  $\mathbf{g}$  de  $\mathcal{M}$  pela aplicação de inclusão  $j : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$  é uma métrica riemanniana em  $\mathcal{S}$ . A segunda forma fundamental relaciona a conexão de Levi-Civita de  $\mathcal{S}$  com a restrição a  $\mathcal{S}$  da conexão de Levi-Civita de  $\mathcal{M}$ .

Seja  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $\mathcal{M}$  e  ${}^{\mathcal{S}}\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $\mathcal{S}$ . O lema 1.1.1 nos permite restringir  $\nabla$  a  $\mathcal{S}$  de modo que, dados  $\mathbf{U} \in \mathfrak{X}(\mathcal{S})$  e  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ ,

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{X} = \nabla_{\bar{\mathbf{V}}}\bar{\mathbf{X}},$$

onde  $\bar{\mathbf{V}}$  e  $\bar{\mathbf{X}}$  são extensões locais de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{X}$ , respectivamente.

**Lema 2.1.5** *Dados  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{S})$ , então*

$${}^{\mathcal{S}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} = \tan\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V}.$$

**Demonstração** Veja [3] pg.99 ■

A *segunda forma fundamental* de  $\mathcal{S}$  é então definida com a parte normal de  $\nabla$ , ou seja, a aplicação  $\mathbf{II} : \mathfrak{X}(\mathcal{S}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{S})^\perp$  dada por

$$\mathbf{II}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \text{nor}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} = \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - {}^{\mathcal{S}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V}.$$

**Demonstração da Proposição 2.1.4** Escrevendo  $|h'| = [-\mathbf{g}\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right)]^{1/2}$ , temos, pela demonstração da proposição 2.1.2, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2}|h'| &= -\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{|h'|} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{|h'|} \left\{ \mathbf{g} \left( \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right) + \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right) + \frac{1}{|h'|} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando o lema 1.2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2}|h'| &= -\frac{1}{|h'|} \left\{ \mathbf{g} \left( \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right) + \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{R} \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{\partial h}{\partial s} \right) + \frac{1}{|h'|} \mathbf{g} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Fazendo  $s = 0$  obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}|h'| \Big|_{s=0} = - \left[ \mathbf{g}(\mathbf{V}', \mathbf{V}') + \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{V}\gamma'}\mathbf{V}, \gamma') + \mathbf{g}(\gamma', \mathbf{A}') + \mathbf{g}(\gamma', \mathbf{V})^2 \right].$$

Para simplificar esta equação, notamos que, uma vez que  $\gamma$  é um segmento de geodésica, temos  $\mathbf{g}(\gamma', \mathbf{A}') = \frac{d}{dt} \mathbf{g}(\gamma', \mathbf{A})$ . Além disso, temos que  $\mathbf{g}(\mathbf{V}', \mathbf{V}') + \mathbf{g}(\gamma', \mathbf{V})^2 = \mathbf{g}(\mathbf{V}'^\perp, \mathbf{V}'^\perp)$  uma vez que a parte tangencial de  $\mathbf{V}'$  é  $-\mathbf{g}(\gamma', \mathbf{V}) \gamma'$  e, portanto

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}'^\perp - \mathbf{g}(\gamma', \mathbf{V}) \gamma'.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ddot{L}(0) &= \int_0^b \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} |h'| \Big|_{s=0} \right] dt \\ &= - \int_0^b \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{V}'^\perp, \mathbf{V}'^\perp) + \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{V}\gamma'} \mathbf{V}, \gamma') \right\} dt - \mathbf{g}(\gamma', \mathbf{A}) \Big|_0^b. \end{aligned}$$

Como  $h$  é uma  $\mathcal{S}q$ -variação,  $-\mathbf{g}(\gamma', \mathbf{A}) \Big|_0^b = \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{A}(0))$ , já que a última curva transversal é constante. Chamando a primeira curva transversal de  $\alpha$  temos, por definição,  $\mathbf{A}(0) = \frac{\nabla}{ds} \frac{d\alpha}{ds} \Big|_{s=0} = \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}(0)$  e, já que  $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)} \mathcal{S}^\perp$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{A}(0)) &= \mathbf{g}(\gamma'(0), \text{nor} \mathbf{A}(0)) = \mathbf{g}(\gamma'(0), \text{nor} \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}(0)) \\ &= \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\dot{\alpha}(0), \dot{\alpha}(0))) = \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{V}(0), \mathbf{V}(0))). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A fórmula da segunda variação do comprimento de arco claramente depende apenas de  $\gamma$  e de  $\mathbf{V}$  definindo, assim, uma forma quadrática em  $\mathbf{V}$ . Definimos a *forma índice* do segmento de geodésica tipo-tempo  $\gamma$   $\mathcal{S}$ -normal ligando  $\mathcal{S}$  a  $q$  como a única forma bilinear simétrica  $I_\gamma : T_\gamma \Omega_{\mathcal{S}q} \times T_\gamma \Omega_{\mathcal{S}q} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$I_\gamma(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \ddot{L}_h(0),$$

para  $\mathbf{V} \in T_\gamma \Omega_{\mathcal{S}q}$  e  $h$  é uma  $\mathcal{S}q$ -variação qualquer de  $\gamma$  com campo variação  $\mathbf{V}$ .

**Corolário 2.1.6** *Se  $\gamma$  é um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal ligando  $\mathcal{S}$  a  $q$  parametrizada pelo comprimento de arco, então*

$$I_\gamma(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = - \int_0^b \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{V}'^\perp, \mathbf{W}'^\perp) + \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{V}\gamma'} \mathbf{W}, \gamma') \right\} dt + \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{V}(0), \mathbf{W}(0))),$$

para  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in T_\gamma \Omega_{pq}$ .

## 2.2 Campos de Jacobi e pontos focais

Quando os segmentos de curva longitudinais  $h_s$  são segmentos de geodésica, para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ , chamamos  $h$  uma *variação geodésica*. Neste caso, o campo variação de  $h$  satisfaz a conhecida *equação de Jacobi*, como mostra o lema a seguir.

**Lema 2.2.1** *Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{M}$  um segmento de geodésica e  $\mathbf{J} : [0, b] \rightarrow T\mathcal{M}$  o campo variação de alguma variação geodésica  $h$  de  $\gamma$ . Então  $\mathbf{J}$  satisfaz*

$$\mathbf{J}'' + \mathbf{R}_{\mathbf{J}\gamma'}\gamma' = 0.$$

**Demonstração** Como  $h$  é uma variação geodésica, temos, para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ ,  $\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{\partial t} \left[ \frac{\nabla}{\partial t} \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right] &= \frac{\nabla}{\partial t} \left[ \frac{\nabla}{\partial s} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{\nabla}{\partial s} \left[ \frac{\nabla}{\partial t} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) \right] + \mathbf{R} \left( \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= -\mathbf{R} \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned}$$

Em particular, para  $s = 0$ ,

$$\mathbf{J}'' = \frac{\nabla}{dt} \left[ \frac{\nabla}{dt} \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right] = -\mathbf{R}_{\mathbf{J}\gamma'}\gamma'. \quad \blacksquare$$

**Proposição 2.2.2** *Um campo de Jacobi  $\mathbf{J}$  sobre um segmento de geodésica  $\gamma$  tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal parametrizada pelo comprimento de arco partindo de  $\mathcal{S}$  é o campo variação de uma variação  $h$  de  $\gamma$  por segmentos de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normais se, e somente se,*

- $\mathbf{J}(0) \in T_{\gamma(0)}\mathcal{S}$ ;
- $\mathbf{g}(\mathbf{J}'(0), \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{II}(\mathbf{J}(0), \mathbf{u}), \gamma'(0)) = 0$ , para todo  $\mathbf{u} \in T_{\gamma(0)}\mathcal{S}$ .

**Demonstração** Veja [3] pg.282  $\blacksquare$

Um campo de Jacobi satisfazendo tais condições é chamado  $\mathcal{S}$ -campo de Jacobi sobre  $\gamma$ .

Dada  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{S}$  um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal partindo de  $\mathcal{S}$ , dizemos que  $\gamma(b)$  é um *ponto focal* de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$  se existe um  $\mathcal{S}$ -campo de Jacobi não nulo sobre  $\gamma$  com  $\mathbf{J}(b) = 0$ .

**Teorema 2.2.3** *Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{M}$  um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal. Então*

1. *se não existem pontos focais de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$ , a forma índice  $I_\gamma$  é negativo definida;*
2. *se  $q = \gamma(b)$  é o único ponto focal de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$ ,  $I_\gamma$  é negativo semi-definida mas não definida;*
3. *se existe um ponto focal  $\gamma(r)$ ,  $0 < r < b$ , ao longo de  $\gamma$ ,  $I_\gamma$  não é semi-definida.*

**Demonstração** [3] pg. 286  $\blacksquare$

**Corolário 2.2.4** *Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{M}$  um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal. Então*

1. *se não existem pontos focais de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$ ,  $\gamma$  maximiza localmente o comprimento de arco e qualquer segmento  $\sigma$  arbitrariamente próximo de  $\gamma$  tem comprimento de arco  $L_\sigma < L_\gamma$ ;*
2. *se  $q = \gamma(b)$  é o único ponto focal de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$ ,  $\gamma$  maximiza localmente o comprimento de arco mas existe  $\sigma$  arbitrariamente próximo de  $\gamma$  com comprimento de arco  $L_\sigma = L_\gamma$ ;*
3. *se existe um ponto focal  $\gamma(r)$ ,  $0 < r < b$ , ao longo de  $\gamma$ , existe  $\sigma$  arbitrariamente próxima de  $\gamma$  com comprimento de arco  $L_\sigma > L_\gamma$ .*

### 2.3 Existência de pontos focais

Resta, agora, entendermos quais as condições para a existência dos pontos focais de uma dada hipersuperfície tipo-espaco ao longo de segmentos de geodésica tipo-tempo. Como, por definição, um ponto focal de  $\mathcal{S}$  é um zero de um  $\mathcal{S}$ -campo de Jacobi, devemos ter em mente dois fatores ao procurarmos a existência de um ponto focal:

1. a forma de  $\mathcal{S}$ , que, via proposição 2.2.2, determina as condições iniciais dos  $\mathcal{S}$ -campos de Jacobi;
2. a curvatura de  $\mathcal{M}$ , que determina a própria equação de Jacobi.

Daremos, agora, um exemplo de resultado com estas características que será fundamental para a demonstração do teorema de Hawking.

Para determinarmos como a forma de  $\mathcal{S}$  influencia a existência de pontos focais, consideremos um  $\mathcal{S}$ -campo de Jacobi  $\mathbf{J}$  sobre um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal  $\gamma$  e tomemos  $\mathbf{u} = \mathbf{J}(0)$ . Podemos pensar em  $\mathbf{J}$  como o vetor posição de um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal infinitesimalmente próximo de  $\gamma$  e em  $|\mathbf{J}| = |\mathbf{g}(\mathbf{J}, \mathbf{J})|^{1/2}$  como a distância entre estes segmentos. Por um cálculo simples, temos  $\frac{d}{dt}|\mathbf{J}|_{t=0} = -\mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{u}, \mathbf{u}))$ . Isto mostra que, se  $\kappa_{\mathbf{u}}(\gamma'(0)) = \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{u}, \mathbf{u}))$  for positivo, a geodésica infinitesimalmente próxima de  $\gamma$ , determinada por  $\mathbf{J}$ , estará inicialmente convergindo a  $\gamma$ , sugerindo a existência de um ponto focal. Interpretamos,  $\kappa_{\mathbf{u}}(\gamma'(0))$  como a taxa inicial de convergência das geodésicas infinitesimalmente próximas a  $\gamma$  na direção  $\mathbf{u}$ . O teorema a seguir afirma que, impondo uma condição sobre a curvatura de  $\mathcal{M}$ , a existência de um ponto focal de  $\mathcal{S}$  é assegurada se apenas a média

$$\kappa(\gamma'(0)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \rangle,$$



chamada *convergência* de  $\mathcal{S}^2$ , das taxas iniciais de convergência for positiva. A condição a ser imposta sobre a curvatura é a *condição forte de energia*,  $\mathbf{Ric}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$  para todo vetor tangente tipo-tempo  $\mathbf{u}$ .

**Proposição 2.3.1** *Seja  $\mathcal{S}$  uma hipersuperfície tipo-espaço e seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{M}$  um segmento de geodésica tipo-tempo  $\mathcal{S}$ -normal em  $p = \gamma(0)$ . Suponha que*

1.  $\kappa_0 = \kappa(\gamma'(0)) > 0$ ;
2.  $\mathbf{Ric}(\gamma', \gamma') \geq 0$ .

Então existe um ponto focal  $\gamma(r)$  de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$  com  $0 < r \leq \frac{1}{\kappa_0}$ , uma vez que  $\gamma$  esteja definido neste intervalo.

**Demonstração** Vamos supor que  $\gamma$  está parametrizado pelo comprimento de arco. Seja  $\{\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p\mathcal{S}$  e  $\mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$  os correspondentes campos vetoriais ortonormais ao longo de  $\gamma$  obtidos via transporte paralelo ao longo de  $\gamma$ . Tomando  $f : [0, \frac{1}{\kappa_0}] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = 1 - \kappa_0 t$ , temos que, para cada  $i = 2, \dots, n$ ,  $f\mathbf{E}_i \in T_\gamma\Omega_{\mathcal{S}^q}$ , onde  $q = \gamma(\frac{1}{\kappa_0})$  e

$$(f\mathbf{E}_i)(0) = \mathbf{e}_i \text{ e } \frac{\nabla}{dt}(f\mathbf{E}_i) = f'\mathbf{E}_i + f\frac{\nabla\mathbf{E}_i}{st} = -\kappa_0\mathbf{E}_i.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} I_\gamma(f\mathbf{E}_i, f\mathbf{E}_i) &= - \int_0^{1/\kappa_0} \left\{ \mathbf{g} \left( \frac{\nabla}{dt}(f\mathbf{E}_i), \frac{\nabla}{dt}(f\mathbf{E}_i) \right) + \mathbf{g} \left( \mathbf{R}_{f\mathbf{E}_i\gamma'} f\mathbf{E}_i, \gamma' \right) \right\} dt \\ &\quad + \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}((f\mathbf{E}_i)(0), (f\mathbf{E}_i)(0))) \\ &= - \int_0^{1/\kappa_0} \left\{ \mathbf{g}(-\kappa_0\mathbf{E}_i, -\kappa_0\mathbf{E}_i) + f^2 \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{E}_i\gamma'} \mathbf{E}_i, \gamma') \right\} dt \\ &\quad + \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)) \\ &= - \int_0^{1/\kappa_0} \left\{ \kappa_0^2 + f^2 \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{E}_i\gamma'} \mathbf{E}_i, \gamma') \right\} dt + \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)) \\ &= -\kappa_0 - \int_0^{1/\kappa_0} f^2 \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{E}_i\gamma'} \mathbf{E}_i, \gamma') dt + \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)). \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Mais precisamente, a convergência de  $\mathcal{S}$  é a aplicação do fibrado normal de  $\mathcal{S}$  em  $\mathbb{R}$ ,  $\kappa : N\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\kappa(\mathbf{u}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \langle \mathbf{u}, \mathbf{II}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \rangle,$$

onde  $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  é uma base de  $T_{\gamma(0)}\mathcal{S}$ .

Somando em  $i$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n I_\gamma(f\mathbf{E}_i, f\mathbf{E}_i) &= -(n-1)\kappa_0 - \int_0^{1/\kappa_0} f^2 \sum_{i=2}^n \mathbf{g}(\mathbf{R}_{\mathbf{E}_i\gamma'}\mathbf{E}_i, \gamma') dt \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \mathbf{g}(\gamma'(0), \mathbf{II}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)) \\
&\geq -(n-1)\kappa_0 + \int_0^{1/\kappa_0} f^2 \mathbf{Ric}(\gamma', \gamma') dt + (n-1)\kappa_0 \\
&= \int_0^{1/\kappa_0} f^2 \mathbf{Ric}(\gamma', \gamma') dt.
\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{Ric}(\gamma', \gamma') \geq 0$ , segue que existe  $i$  tal que  $I_\gamma(f\mathbf{E}_i, f\mathbf{E}_i) \geq 0$  e, portanto,  $I_\gamma$  não é negativo definida. Pelo teorema 2.2.3 existe um ponto focal  $\gamma(r)$  de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$  com  $0 < r \leq \frac{1}{\kappa_0}$ . ■

## Capítulo 3

# Causalidade e Singularidades

### 3.1 Causalidade em variedades lorentzianas

Em cada ponto  $p$  de uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  podemos dividir os vetores tipo-tempo em duas classes distintas, de acordo com a componente conexa do cone de tempo em que estes se encontram. De fato, temos uma relação de equivalência entre os vetores tipo-tempo em  $p$  dada por

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \iff \mathbf{g}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < 0.$$

As classes de equivalência determinadas por esta relação são exatamente os cones de tempo em  $p$ . Podemos, portanto, rotular os elementos de uma destas classes como *vetores futuro-orientados* em  $p$  e os da outra classe como *vetores passado-orientados* em  $p$ . Se pudermos fazer tal classificação de maneira global e diferenciável em  $\mathcal{M}$ , diremos que a variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  é *tempo-orientável*. Mais precisamente,  $\mathcal{M}$  será tempo-orientável se existir um campo de vetores tipo-tempo (e portanto não nulo em ponto algum de  $\mathcal{M}$ )  $\mathbf{X}$ . Diremos que  $\mathbf{X}$  define uma *orientação temporal* em  $\mathcal{M}$ , rotulando cada vetor tipo-tempo  $\mathbf{v}$  como *futuro-orientado* quando  $\mathbf{g}_p(\mathbf{X}(p), \mathbf{v}) < 0$ , ou *passado-orientado*, quando  $\mathbf{g}_p(\mathbf{X}(p), \mathbf{v}) > 0$ . Em geral, todas as definições e resultados envolvendo vetores futuro-orientados terão versões duais para vetores passado-orientados. Como tais versões “passado” são obtidas das versões “futuro” apenas por uma reversão na orientação temporal, iremos considerá-las evidentes. De agora em diante, vamos considerar apenas variedades lorentzianas tempo-orientáveis e tempo-orientadas. De fato, esta não é uma restrição muito significativa, já que, como no caso riemanniano, toda variedade lorentziana não tempo-orientável admite um recobrimento duplo orientável.

Diremos que uma curva causal  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  é *futuro-orientada* se seus vetores tangentes são, todos, futuro-orientados. Neste caso, diremos que um ponto  $q \in \mathcal{M}$  é um *ponto final futuro* de  $\alpha$  se

$$\lim_{t \rightarrow b} \alpha(t) = q,$$

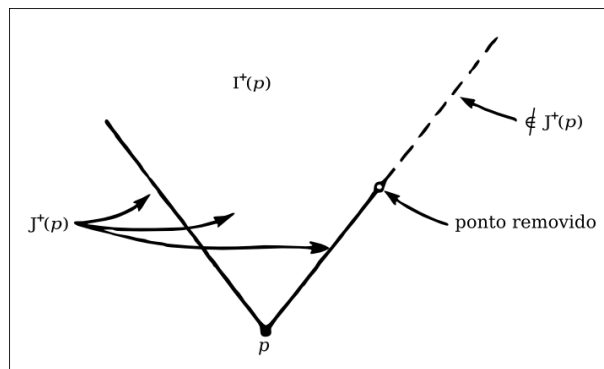
onde estamos tomando  $I = (a, b)$ , podendo ser  $b = +\infty$ .  $\alpha$  será dita *futuro-inextensível* se não possuir pontos finais futuros. Diremos, então, que  $\alpha$  é *inextensível* se for tanto futuro-inextensível e passado-inextensível.

Uma geodésica tipo-tempo futuro-inextensível  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ , parametrizada por algum parâmetro afim, é dita *futuro-completa* se  $b = +\infty$  e *futuro-incompleta* se  $b < +\infty$ . Uma vez que todo par de parâmetros afim  $t, s$  de uma geodésica tipo-tempo satisfaz a relação  $s = At + B$ , para  $A, B \in \mathbb{R}$  com  $A > 0$ , segue que a futuro-completude, ou incompletude, de  $\gamma$  não depende do parâmetro afim escolhido e podemos, portanto, considerar apenas parametrizações por comprimento de arco. Assim, uma geodésica tipo-tempo futuro-inextensível  $\gamma$  será futuro-incompleta se, e somente se,  $L[\gamma|_{[0,b)}] < +\infty$ . Diremos que  $\gamma$  é *(in)completa* se for tanto futuro-(in)completa e passado-(in)completa.

Consideramos a incompletude geodésica tipo-tempo, ou seja, a existência de alguma geodésica tipo-tempo incompleta, como a primeira evidência da existência de singularidades. Diremos que uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  é *singular* se  $\mathcal{M}$  é *tipo-tempo geodesicamente incompleta*, ou seja, se existe alguma geodésica tipo-tempo inextensível incompleta.

Agora passamos à ferramenta básica que utilizaremos neste trabalho para o estudo da incompletude geodésica tipo-tempo (existência de singularidades): a *causalidade*. Esta é a nova estrutura que surge nas variedades lorentzianas tempo-orientadas em função da assinatura da métrica.

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade lorentziana tempo-orientada e  $\mathcal{A}, \mathcal{U}$  subconjuntos de  $\mathcal{M}$ . Definimos o *futuro cronológico* de  $\mathcal{A}$  relativo a  $\mathcal{U}$  como o conjunto  $I^+(\mathcal{A}, \mathcal{U})$  formado por todos os pontos  $q \in \mathcal{U}$  tais que existe uma curva tipo-tempo futuro-orientada diferenciável por partes contida em  $\mathcal{U}$  ligando  $p$  a  $q$ . De maneira análoga definimos o *futuro causal* de  $\mathcal{A}$  relativo a  $\mathcal{U}$  como o conjunto  $J^+(\mathcal{A}, \mathcal{U})$  formado por todos os pontos  $q \in \mathcal{U}$  tais que existe uma curva causal futuro-orientada diferenciável por partes contida em  $\mathcal{U}$  ligando  $p$  a  $q$ .



Quando  $\mathcal{A} = \{p\}$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{M}$  escrevemos simplesmente  $I^+(\{p\}, \mathcal{M}) = I^+(p)$  e  $J^+(\{p\}, \mathcal{M}) = J^+(p)$ . Escrevemos, também,  $p \ll q$  e  $p < q$  significando, respectivamente,  $q \in I^+(p)$  e  $q \in J^+(p) - \{p\}$ , e  $p \leq q$ , significando  $p < q$  ou  $p = q$ . Estas relações

são chamadas *relações causais* de  $\mathcal{M}$ . Segue facilmente que estas relações são transitivas e satisfazem as seguintes propriedades

- se  $p \ll q$ , então  $p < q$ ;
- se  $p \ll q$  e  $q < r$ , então  $p \ll r$ ;
- se  $p < q$  e  $q \ll r$ ,  $p \ll r$ .

**Exemplo** A estrutura causal do espaço-tempo de Minkowski

Sejam  $x, y \in \mathbb{R}_1^n$ . Temos que

- $x \ll y$  se e somente se  $y - x$  é um vetor tipo-tempo futuro orientado;
- $x < y$  se e somente se  $y - x$  é um vetor causal futuro-orientado.

Notamos, com isto, que no espaço-tempo de Minkowski  $I^+(x)$  é a componente futura do cone de tempo em  $x$  e  $J^+(x)$  é a união de  $I^+(x)$  com o cone de luz futuro em  $x$ .

Nosso interesse em vizinhanças convexas deve-se à simplicidade de sua estrutura causal. Para um aberto convexo  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}$ , as propriedades da aplicação exponencial tornam a estrutura causal de  $\mathcal{C}$  igual à do espaço-tempo de Minkowski como mostra o seguinte lema.

**Lema 3.1.1** *Seja  $\mathcal{C}$  um aberto convexo de  $\mathcal{M}$ . Então, para  $p, q \in \mathcal{C}$ ,*

1.  $q \in I^+(p, \mathcal{C})$  se e somente se existe geodésica tipo-tempo futuro-orientada ligando  $p$  a  $q$ ;
2.  $I^+(p, \mathcal{C})$  é aberto em  $\mathcal{C}$ ;
3.  $J^+(p, \mathcal{C})$  é o fecho em  $\mathcal{C}$  de  $I^+(p, \mathcal{C})$ ;
4.  $q \in J^+(p, \mathcal{C})$  se e somente se existe geodésica tipo-luz futuro-orientada ligando  $p$  a  $q$ ;
5. a relação  $\leq$  é fechada em  $\mathcal{C}$ , ou seja, dadas sequências  $\{p_i\}$  e  $\{q_i\}$  em  $\mathcal{C}$  convergentes a  $p$  e  $q$ , respectivamente, com  $q_i \in J^+(p_i, \mathcal{C}) \forall i$ , então  $q \in J^+(p, \mathcal{C})$ .

**Demonstração** As afirmações seguem diretamente das estrutura causal de  $\mathbb{R}_1^n$  e das propriedades da aplicação exponencial. ■

Em geral, podemos contar apenas com a abertura do futuro cronológico.

**Lema 3.1.2** *A relação  $\ll$  é aberta, ou seja, se  $p \ll q$  em  $\mathcal{M}$ , então existem vizinhanças  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, tal que  $p' \ll q'$  para todo  $p' \in \mathcal{U}$ ,  $q' \in \mathcal{V}$ . Em particular, é aberto o futuro cronológico  $I^+(A)$  de qualquer subconjunto  $A$ .*

**Demonstração** Seja  $\alpha$  a curva tipo-tempo futuro-orientada diferenciável por partes ligando  $p = \alpha(0)$  a  $q = \alpha(1)$ . Tomemos  $\mathcal{C}_p$  vizinhança convexa de  $p$  e  $\mathcal{C}_q$  vizinhança convexa de  $q$ . Tomemos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, de modo que  $p_\epsilon = \alpha(\epsilon) \in \mathcal{C}_p$  e  $q_\epsilon = \alpha(1 - \epsilon) \in \mathcal{C}_q$ . Como  $I^-(p_\epsilon, \mathcal{C}_p)$  e  $I^+(q_\epsilon, \mathcal{C}_q)$  são abertos, obtemos vizinhanças  $\mathcal{U} \subset I^-(p_\epsilon, \mathcal{C}_p)$  de  $p$  e  $\mathcal{V} \subset I^+(q_\epsilon, \mathcal{C}_q)$  de  $q$ . Claramente tais vizinhanças satisfazem as propriedades requeridas. ■

## 3.2 Condições de causalidade

Dados  $p, q \in \mathcal{M}$ , a *separação temporal*  $\tau(p, q)$  entre  $p$  e  $q$  é definida por

$$\tau(p, q) = \begin{cases} \sup_{\alpha} L[\alpha], & \text{se } q \in J^+(p) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as curvas causais futuro-orientadas diferenciável por partes ligando  $p$  a  $q$ . Se deixamos  $p$  e  $q$  variar em  $\mathcal{M}$  obtemos uma função  $\tau : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  chamada *função separação temporal*<sup>1</sup>.

**Lema 3.2.1** 1.  $\tau(p, q) > 0$  se, e somente se,  $p \ll q$ ;

2. Se  $p \leq r \leq q$ , então  $\tau(p, r) + \tau(r, q) \leq \tau(p, q)$ .

**Demonstração** (1) Claramente, se  $p \ll q$ , então  $\tau(p, q) > 0$  pois existe alguma curva tipo-tempo futuro-orientada diferenciável por partes ligando  $p$  a  $q$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\tau(p, q) > 0$ . Então, existe uma curva causal  $\alpha$  futuro-orientada diferenciável por partes ligando  $p$  a  $q$  com  $L[\alpha] > 0$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $\alpha$  é uma geodésica causal quebrada. Com efeito, tomamos uma cobertura  $\{\mathcal{C}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , de  $\alpha$  por um número finito de vizinhanças convexas e uma partição  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  tal que cada segmento  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  está contido em um elemento  $\mathcal{C}_i$  da cobertura. Substituímos, então tais segmentos pelos segmentos de geodésica entre  $\alpha(t_{i-1})$  e  $\alpha(t_i)$ .

Como  $L[\alpha] > 0$ , algum dos segmentos de geodésica  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é tipo-tempo. Suponha que o segmento adjacente  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  seja tipo-luz. Mostraremos que podemos alterar este segmento de modo a obter um segmento tipo-tempo sem que isto modifique a característica causal do segmento  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ .

Uma vez que  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é tipo-tempo, temos que  $\alpha(t_i) \in I^+(\alpha(t_{i-1}), \mathcal{C}_i)$ . Pelo lema 3.1.1 temos uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\alpha(t_i)$  contida em  $I^+(\alpha(t_{i-1}), \mathcal{C}_i)$ . Como  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é tipo-luz,  $\alpha(t_i) \in J^-(\alpha(t_{i+1}), \mathcal{C}_{i+1})$ . Uma vez que

$$J^-(\alpha(t_{i+1}), \mathcal{C}_{i+1}) = \overline{I^-(\alpha(t_{i+1}), \mathcal{C}_{i+1})},$$

<sup>1</sup>Notamos que, em geral,  $\tau$  pode assumir o valor  $+\infty$ . Por exemplo, temos  $\tau(p, p) = +\infty$  caso  $p \in I^+(p)$ .

temos uma sequência de pontos  $r_k \in I^-(\alpha(t_{i+1}), \mathcal{C}_{i+1})$  convergindo a  $\alpha(t_i)$ . Então, para  $k$  suficientemente grande, temos  $r_k \in \mathcal{U}$  e, assim, obtemos segmentos de geodésica tipo-tempo futuro-orientado ligando  $\alpha(t_{i-1})$  a  $r_k$  em  $\mathcal{C}_i$  e  $r_k$  a  $\alpha(t_{i+1})$  em  $\mathcal{C}_{i+1}$ .

Desta forma, podemos, a partir de um segmento de geodésica tipo-tempo, transformar a característica causal de todos os segmentos adjacentes de modo a obtermos uma geodésica quebrada tipo-tempo ligando  $p$  a  $q$ .

(2) Se  $r \in J^+(p) \setminus \{p\}$  e  $q \in J^+(r) \setminus \{r\}$ , podemos encontrar, dado  $\delta > 0$ , curvas causais futuro-orientadas diferenciáveis por partes  $\alpha$ , ligando  $p$  a  $r$ , e  $\beta$ , ligando  $r$  a  $q$ , tais que  $L[\alpha] \geq \tau(p, r) - \frac{\delta}{2}$  e  $L[\beta] \geq \tau(r, q) - \frac{\delta}{2}$ . Construimos, então, uma curva causal futuro-orientada diferenciável por partes  $\sigma$  concatenando  $\alpha$  e  $\beta$  e obtemos

$$\tau(p, q) \geq L[\sigma] \geq \tau(p, r) + \tau(r, q) - \delta.$$

Caso, digamos,  $p = r$ , teremos  $\tau(p, r) = 0$  e  $\tau(p, q) = \tau(r, q)$  e o resultado segue trivialmente. ■

**Corolário 3.2.2** *Dada  $\alpha$  curva causal diferenciável por partes que não é geodésica tipo-luz, podemos encontrar uma curva tipo-tempo diferenciável por partes arbitrariamente próxima de  $\alpha$ .*

**Lema 3.2.3** *A função separação temporal  $\tau$  é semi-contínua inferiormente.*

**Demonstração** Começaremos notando que se  $\tau(p, q) = 0$  não há o que mostrar pois  $\tau(p', q') \geq 0$  em  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ . Suponhamos, então, que  $q \in I^+(p)$  e, além disso, que  $0 < \tau(p, q) < +\infty$ .

Dado  $\delta > 0$ , devemos encontrar vizinhanças  $\mathcal{U}$  de  $p$  e  $\mathcal{V}$  de  $q$  tais que se  $p' \in \mathcal{U}$  e  $q' \in \mathcal{V}$ , então  $\tau(p', q') \geq \tau(p, q) - \delta$ .

Seja  $\alpha$  uma curva tipo-tempo diferenciável por partes ligando  $p = \alpha(0)$  a  $q = \alpha(1)$  com  $L[\alpha] > \tau(p, q) - \frac{\delta}{3}$ . Seja,  $\mathcal{C}_p$  e  $\mathcal{C}_q$  vizinhanças convexas de  $p$  e  $q$ , respectivamente, e sejam  $p_\epsilon = \alpha(\epsilon)$  e  $q_\epsilon = \alpha(1 - \epsilon)$ , onde  $\epsilon > 0$  é pequeno o suficiente para que  $p_\epsilon \in \mathcal{C}_p$  e  $q_\epsilon \in \mathcal{C}_q$ . Lembrando que (em vizinhanças convexas comprimento de geodésicas depende continuamente das extremidades), podemos encontrar vizinhanças  $\mathcal{U}$  de  $p$  e  $\mathcal{V}$  de  $q$  tais que, para todo  $p' \in \mathcal{U}$ ,  $L[\exp_{p'}(p_\epsilon)] > L[\exp_p(p_\epsilon)] - \frac{\delta}{3}$  e, para todo  $q' \in \mathcal{V}$ ,  $L[\exp_{q'}(q_\epsilon)] > L[\exp_q(q_\epsilon)] - \frac{\delta}{3}$ . Deste modo, podemos construir, entre quaisquer  $p' \in \mathcal{U}$  e  $q' \in \mathcal{V}$ , uma curva causal diferenciável por partes  $\beta$  com comprimento  $L[\beta] > L[\alpha] - \frac{2\delta}{3} > \tau(p, q) - \delta$ .

Supondo, agora, que  $\tau(p, q) = +\infty$  podemos mostrar, com o mesmo argumento, que para qualquer  $N > 0$  existem vizinhanças como acima tais que  $\tau(p', q') > N$ , completando a demonstração. ■

É natural nos perguntarmos quando, dado um par de pontos causalmente relacionados  $p < q$ , podemos garantir a existência de uma geodésica cujo comprimento, de fato,

assume o valor  $\tau(p, q)$ . Este problema será resolvido encontrando restrições adequadas sobre as relações causais de  $\mathcal{M}$ . Veremos que tais restrições são, de fato, fisicamente desejáveis uma vez que excluem a possibilidade de paradoxos causais.

Começemos com as condições mais simples e fisicamente razoáveis. Diremos que  $\mathcal{M}$  que satisfaz a *condição de cronologia* se não existem curvas tipo-tempo fechadas em  $\mathcal{M}$ , e que satisfaz a *condição de causalidade* se não existem curvas causais fechadas em  $\mathcal{M}$ .

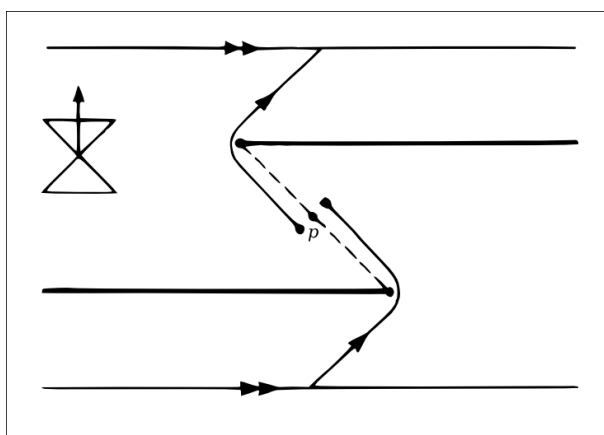
**Lema 3.2.4** *Se  $\mathcal{M}$  é compacta, então contém uma curva tipo-tempo fechada.*

**Demonstração** Tomemos a cobertura de  $\mathcal{M}$  formada pelos conjuntos  $I^+(p)$ , onde  $p \in \mathcal{M}$ . Como  $\mathcal{M}$  é compacta, tal cobertura admite uma subcobertura finita  $\{I^+(p_1), \dots, I^+(p_N)\}$ . Se  $p_1 \subset I^+(p_i)$ , com  $i \neq 1$ , temos que  $I^+(p_1) \subset I^+(p_i)$  e podemos excluir  $I^+(p_1)$  da cobertura. Logo podemos supor que  $p_1 \subset I^+(p_1)$  e, portanto, existe uma curva tipo-tempo fechada por  $p_1$ . ■

Diremos que a *condição forte de causalidade* é válida em um ponto  $p \in \mathcal{M}$  se dada qualquer vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  existe uma vizinhança  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  de  $p$  tal que toda curva causal com ponto inicial e terminal em  $\mathcal{V}$  está totalmente contida em  $\mathcal{U}$ . Isto impede a existência de curvas causais quase fechadas em  $p$ , ou seja, qualquer curva causal com ponto inicial arbitrariamente próximo de  $p$  que deixa uma vizinhança fixada de  $p$  nunca mais poderá se aproximar arbitrariamente de  $p$ . Diremos, então, que  $\mathcal{M}$  é *fortemente causal* se a condição forte de causalidade é satisfeita em todo ponto de  $\mathcal{M}$ .

**Exemplo** Causalidade não implica causalidade forte

Uma variedade lorentziana causal mas não fortemente causal é obtida tomando o espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$ , identificando as retas  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = -2\}$  e  $\{(t, x) \in$



$\mathbb{R}^2; t = 2\}$  e removendo as semi-retas  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = 1, x \geq -1\}$  e  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = -1, x \leq 1\}$ .



A próxima proposição fornecerá motivação para a definição da condição de causalidade mais importante que iremos tratar neste trabalho, a *hiperbolicidade global*.

**Proposição 3.2.5** *Para  $p < q$  em uma variedade lorentziana fortemente causal  $\mathcal{M}$ , se o conjunto  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto, então existe uma geodésica causal futuro-orientado de  $p$  a  $q$  com comprimento  $\tau(p, q)$ .*

**Demonstração** Tomamos uma cobertura finita de  $J^+(p) \cap J^-(q)$  por abertos convexos relativamente compactos  $\{\mathcal{C}_i\}$ . Como  $\mathcal{M}$  é fortemente causal, podemos tomar uma subcobertura finita de  $\{\mathcal{C}_i\}$  por abertos convexos  $\{\mathcal{D}_j\}$  tais que

1.  $\overline{\mathcal{D}_j} \subseteq \mathcal{C}_{i_j}$  é compacto e
2. toda curva causal com ponto inicial e terminal em  $\mathcal{D}_j$  está totalmente contida em  $\mathcal{C}_{i_j}$ .

Dada curva causal futuro-orientada diferenciável por partes  $\alpha$  ligando  $p$  a  $q$ , podemos considerar que  $\alpha$  é uma geodésica quebrada causal ligando  $p$  a  $q$  tal que cada segmento  $\alpha|_{I_k} \subset \mathcal{D}_{j_k}$ . Notamos que isto apenas aumenta o comprimento de  $\alpha$ .

Vamos mostrar que podemos diminuir o número de quebras de  $\alpha$ , aumentando possivelmente seu comprimento, de modo que cada vizinhança da cobertura  $\{\mathcal{D}_j\}$  contenha no máximo duas quebras de  $\alpha$ . Além disso, mostraremos que  $\alpha$  entrará em qualquer  $\mathcal{D}_j$  no máximo uma vez. Com isto, mostrarmos que toda sequência de geodésicas quebradas causais futuro-orientadas ligando  $p$  a  $q$  cujos comprimentos convergem, de maneira crescente, para  $\tau(p, q)$  converge a uma geodésica quebrada causal futuro-orientada ligando  $p$  a  $q$   $\lambda$  que realiza o comprimento  $\tau(p, q)$ . Finalmente, o corolário 3.2.2 e um resultado muito semelhante ao lema 2.1.3 nos garantem que  $\lambda$  é, de fato, uma geodésica não quebrada ligando  $p$  a  $q$ .

Em primeiro lugar, notamos que podemos tomar  $\alpha$  de modo que os  $\mathcal{D}_j$  não contém segmentos consecutivos  $\alpha|_{I_k}, \alpha|_{I_{k+1}}$ . De outro modo, como  $\alpha(t_{k-1}), \alpha(t_{k+1}) \in \mathcal{D}_j$ , onde escrevemos  $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ , podemos substituir  $\alpha|_{[t_{k-1}, t_{k+1}]}$  pela geodésica ligando  $\alpha(t_{k-1})$  a  $\alpha(t_{k+1})$ . Certamente, isto apenas aumenta o comprimento de  $\alpha$ .

Suponhamos agora que  $\alpha|_{I_k} \subset \mathcal{D}_{j_k}$ . Podemos fazer com que nenhuma quebra, além de  $\alpha(t_{k-1})$  e  $\alpha(t_k)$ , pertença a  $\mathcal{D}_{j_k}$ . Caso uma quebra  $\alpha(t_{k+l}) \in \mathcal{D}_{j_k}$ , teríamos que o segmento  $\alpha|_{[t_{k-1}, t_{k+l}]}$  está totalmente contido em  $\mathcal{C}_{i_{j_k}}$  e poderíamos substituir os  $l+1$  segmentos pelo segmento de geodésica causal ligando  $\alpha(t_{k-1})$  a  $\alpha(t_{k+l})$  diminuindo, assim, o número de quebra e aumentando o comprimento.

Finalmente, suponhamos que  $\alpha$ , após deixar  $\mathcal{D}_{j_k}$ , volta para  $\mathcal{D}_{j_k}$ . Claramente  $\alpha$  só poderá voltar depois de  $t_{k+1}$ , digamos em  $\tilde{t} > t_{k+1}$ . Podemos, então, substituir o segmento  $\alpha|_{[t_{k-1}, \tilde{t}]}$  pelo segmento de geodésica ligando  $\alpha(t_{k-1})$  a  $\alpha(\tilde{t})$ . Novamente aumentando o comprimento da curva.

Tomemos, agora, uma sequência de curvas causais futuro-orientadas diferenciáveis por partes  $\{\alpha_i\}$  ligando  $p$  a  $q$  cujos comprimentos converjam, de maneira crescente, para  $\tau(p, q)$ . Modificamos cada  $\alpha_i$  de acordo com a construção acima, podemos considerar que cada  $\alpha_i$  fica descrita por uma sequência finita de segmentos de geodésica ligando pontos  $p_i^k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , em  $\mathcal{D}_{j_k}$ . Como os  $\overline{\mathcal{D}}_{j_k}$  são compactos podemos supor que as sequências  $\{p_i^k\}$  convergem para  $p^k \in \overline{\mathcal{D}}_{j_k}$ . Conectando tais pontos por segmentos de geodésica, obtemos uma geodésica quebrada causal  $\lambda$  com  $L[\lambda] = \tau(p, q)$ . ■

### 3.3 Hiperbolicidade global e geodésicas maximais

Motivados pela proposição acima, diremos que uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  é *globalmente hiperbólica* se  $\mathcal{M}$  é fortemente causal e, para cada  $p < q$  em  $\mathcal{M}$ , o conjunto  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto. Desta forma, entre cada par de pontos causalmente relacionados existe uma geodésica causal cujo comprimento é máximo. A condição de hiperbolicidade global é equivalente à existência de uma folheação topológica de  $\mathcal{M}$  por um tipo-especial de hipersuperfícies topológicas chamadas *hipersuperfícies de Cauchy*. Entre uma destas hipersuperfícies e qualquer ponto em seu futuro causal também existe uma geodésica causal com comprimento máximo. Este último resultado, no caso de hipersuperfícies diferenciáveis, é uma das peças chave para a demonstração do teorema de Hawking.

Para explicitar estas relações precisamos de algumas definições. Dizemos que um subconjunto  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{M}$  é *acausal* se nenhuma curva causal intersecta  $\mathcal{A}$  mais de uma vez, ou seja, se  $\mathcal{A} \cap J^+(\mathcal{A}) = \emptyset$ . Mostra-se que conjuntos acausais fechados são, de fato, hipersuperfícies topológicas. Por outro lado, definimos o *desenvolvimento futuro de Cauchy* de  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ,  $D^+(\mathcal{S})$ , como o conjunto formado por todos os pontos  $q \in \mathcal{M}$  tais que toda curva passado-inextensível causal por  $q$  intersecta  $\mathcal{A}^2$ . O *desenvolvimento (total) de Cauchy* de  $\mathcal{A}$  é, então, definido por  $D(\mathcal{S}) = D^+(\mathcal{S}) \cup D^-(\mathcal{S})$ .

Uma *hipersuperfície de Cauchy* em  $\mathcal{M}$  é um subconjunto acausal fechado  $\mathcal{S}$  tal que  $D(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$ . Nosso interesse nas hipersuperfícies de Cauchy deve-se à proposição seguinte.

**Proposição 3.3.1** *Uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$  é globalmente hiperbólica se, e somente se, possui uma hipersuperfície de Cauchy  $\mathcal{S}$ . Neste caso, topologicamente,  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ .*

**Demonstração** Veja [4] ■

Agora passamos ao problema de encontrar geodésicas maximais entre uma hipersuperfície de Cauchy e qualquer ponto em seu futuro causal. Este resultado base-a-se na continuidade da função separação temporal em variedades globalmente hiperbólicas

<sup>2</sup>Se não exigirmos que as curvas sejam passado-inextensíveis,  $D^+(\mathcal{S})$  sempre coincidirá com  $\mathcal{S}$  já que, dado  $q \notin \mathcal{S}$ , podemos sempre encontrar uma curva passado-orientada partindo de  $q$  que não intersecta  $\mathcal{S}$ .

e na compacidade do conjunto  $J^-(q) \cap \mathcal{S}$ , onde  $q \in D^+(\mathcal{S})$ . Iremos considerar apenas hipersuperfícies de Cauchy diferenciáveis e tipo-espaço.

**Lema 3.3.2** *Se  $\mathcal{M}$  é globalmente hiperbólica, a função separação temporal  $\tau$  de  $\mathcal{M}$  é contínua.*

**Demonstração** Já vimos que a função separação temporal  $\tau$  é semi-contínua inferiormente em  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ . Suponhamos, por absurdo, que  $\tau$  não seja semi-contínua superiormente em  $(p, q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ . Então, existem  $\delta > 0$  e sequências convergentes  $\{p_i\}$  e  $\{q_i\}$  convergindo a  $p$  e a  $q$ , respectivamente, tais que  $\tau(p_i, q_i) \geq \tau(p, q) + \delta$  para todo  $i$ .

Como  $\tau(p_i, q_i) > 0$ , existe uma curva causal futuro-orientada diferenciável por partes  $\alpha_i$  ligando  $p_i$  a  $q_i$  tal que  $L[\alpha_i] > \tau(p_i, q_i) - 1/i$ . Tomando  $p^- \ll p$  e  $q^+ \gg q$ , podemos considerar que os pontos  $p_i$  e  $q_i$  pertencem aos conjuntos  $I^+(p^-)$  e  $I^-(q^+)$ , respectivamente, e, portanto, que as curvas  $\alpha_i$  pertencem ao conjunto compacto  $J^+(p^-) \cap J^-(q^+)$ . A demonstração da proposição 3.2.5 mostra que podemos encontrar uma geodésica quebrada causal  $\lambda$ , ligando  $p$  a  $q$ , satisfazendo  $L[\lambda] \geq \tau(p, q) + \delta$ , em contradição com a definição de  $\tau$ . ■

**Teorema 3.3.3** *Seja  $\mathcal{S}$  uma hipersuperfície de Cauchy tipo-espaço em  $\mathcal{M}$ . Dado  $q \in D^+(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$ , existe uma geodésica  $\gamma$  tipo-tempo futuro-orientado  $\mathcal{S}$ -normal de  $\mathcal{S}$  a  $q$  cujo comprimento é  $\tau(\mathcal{S}, q)$ .*

**Demonstração** Mostraremos que  $J^-(q) \cap \mathcal{S}$  é compacto. Então, como a função separação temporal  $\tau$  é contínua e, em particular é contínua a função  $p \mapsto \tau(p, q)$ , temos que  $\tau(\cdot, q)$  atinge um máximo  $\tau(p, q)$  em algum  $p \in J^-(q) \cap \mathcal{S}$ . Já que o conjunto dos pontos de  $\mathcal{S}$  que podem atingir  $q$  por uma curva causal é exatamente  $J^-(q) \cap \mathcal{S}$ , temos que  $\tau(p, q) = \tau(\mathcal{S}, q)$ . Além disso, como  $\mathcal{M}$  é globalmente hiperbólica,  $J^-(p) \cap J^+(q)$  é compacto e, pela proposição 3.2.5, existe uma geodésica causal futuro-orientado de  $p$  a  $q$  com comprimento  $\tau(p, q) = \tau(\mathcal{S}, q)$ . Uma vez que  $q \notin \mathcal{S}$ , temos  $\tau(p, q) = \tau(\mathcal{S}, q) > 0$  e, portanto,  $p \ll q$  de modo que  $\gamma$  é tipo-tempo. O corolário 2.1.3 nos garante, finalmente, que  $\gamma$  é  $\mathcal{S}$ -normal.

Para mostrarmos que  $J^-(q) \cap \mathcal{S}$  é compacto, tomemos uma sequência  $\{p_i\}$  em  $J^-(q) \cap \mathcal{S}$ . Precisamos mostrar que esta sequência possui uma subsequência convergente. Pela proposição 3.2.5, obtemos uma sequência de geodésicas inextensíveis causais passado-orientadas, ligando  $q$  a  $p_i$ . Uma vez que as geodésicas são soluções de uma EDO de segunda ordem, cada  $\gamma_i$  fica determinada por um vetor  $\mathbf{u}_i$  causal passado-orientado em  $q$  e, pela homogeneidade das geodésicas, podemos considerar que estes vetores pertencem ao conjunto

$$\Lambda_{i=1}^-(q) = \{u^i \mathbf{e}_i \in T_q \mathcal{M}; (u^2)^2 + \dots + (u^n)^2 \leq 1 \text{ e } u^1 < 0\},$$

onde escolhemos uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de  $T_q \mathcal{M}$  com  $\mathbf{e}_1$  tipo-tempo futuro-orientado. Por compacidade, a sequência  $\{\mathbf{u}_i\}$  possui uma subsequência convergente a

um vetor causal passado-orientado  $\mathbf{u} \in \Lambda^-(q)_{t=1}$ . Consideremos  $\gamma_{\mathbf{u}}$ , a geodésica maximal causal passado-orientada tal que  $\gamma'_{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}$ . Já que esta é uma curva inextensível por  $q$ , ela deve intersectar  $\mathcal{S}$  em um ponto  $p \in J^-(q) \cap \mathcal{S}$  e, pela continuidade do fluxo geodésico, a sequência  $\{p_i\}$  converge para  $p$ . ■

### 3.4 O Teorema de Hawking

Para uma hipersuperfície tipo-espaço  $\mathcal{S}$  em uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$ , a aplicação convergência de  $\mathcal{S}$ ,  $\kappa : N\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , reduz-se a uma função real em  $\mathcal{S}$  ao restringirmos  $\kappa$  aos vetores normais unitários futuro-orientados de  $\mathcal{S}$ . Esta função, também denotada por  $\kappa$ , é chamada *futuro-convergência* de  $\mathcal{S}$ .

**Teorema 3.4.1** *Seja  $\mathcal{M}$  é um variedade lorentziana globalmente hiperbólica satisfazendo a condição forte de energia,  $\mathbf{Ric}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$  para todo vetor tipo-tempo  $\mathbf{u}$ . Se  $\mathcal{M}$  possui uma hipersuperfície de Cauchy tipo-espaço  $\mathcal{S}$  com futuro-convergência  $\kappa \geq \kappa_0 > 0$ , então  $\mathcal{M}$  é singular.*

**Demonstração** Mostraremos que nenhuma curva tipo-tempo futuro-orientada partindo de  $\mathcal{S}$  pode ser estendida a comprimentos maiores que  $1/\kappa_0$ . Em particular, qualquer geodésica tipo-tempo terá comprimento menor ou igual a  $1/\kappa_0$ , implicando a futuro-incompletude geodésica tipo-tempo.

Suponha, por absurdo, que exista uma curva tipo-tempo futuro-orientada  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$  partindo de  $\mathcal{S}$  definida no intervalo  $[0, 1/\kappa_0 + \epsilon]$ , para algum  $\epsilon > 0$ . Então,  $q = \alpha(1/\kappa_0 + \epsilon) \in D^+(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$  e, pelo teorema 3.3.3, existe uma geodésica  $\gamma$  tipo-tempo futuro-orientado  $\mathcal{S}$ -normal de  $\mathcal{S}$  a  $q$  realizando o comprimento  $L[\gamma] = \tau(\mathcal{S}, q) \geq 1/\kappa_0 + \epsilon$ . Isto implica, pela proposição 2.3.1, na existência de um ponto focal  $\gamma(r)$ , com  $0 < r \leq 1/\kappa_0$ , de  $\mathcal{S}$  ao longo de  $\gamma$ . Assim,  $\gamma$  não pode maximizar o comprimento de arco. Contradição. ■

A demonstração do teorema de Hawking base-a-se no fato de que as condições impostas sobre a geometria de  $\mathcal{S}$  e sobre a curvatura de  $\mathcal{M}$  implicam que geodésicas  $\mathcal{S}$ -normais suficientemente grande possuem pontos focais de  $\mathcal{S}$ . Além disso, a condição de hiperbolicidade global implica que  $\mathcal{M}$  contém geodésicas  $\mathcal{S}$ -normais com comprimento maximal. Como, após pontos focais, as geodésicas deixam de ser maximais, o comprimento das geodésicas deve ser finito implicando a incompletude geodésica.

Quando revertemos a orientação-temporal, este resultado realmente generaliza a singularidade dos espaços-tempo de Robertson-Walker obtidas na proposição 1.3.1 já que a convergência  $\kappa$  de uma hipersuperfície  $t_0 \times \mathcal{S}$  de um espaço-tempo de Robertson-Walker é dada por  $\kappa = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} = -H_0$ . Como nosso universo é, pelo menos aproximadamente, Robertson-Walker, as hipóteses do teorema 3.4.1 são razoáveis, e este resultado sugere que nosso universo é catastróficamente singular no passado.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
- [2] W. L. Freedman et al. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 553:47–72, 2001.
- [3] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983.
- [4] Robert Geroch. Domain of dependence. *J. Mathematical Phys.*, 11:437–449, 1970.