Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DUALIDADE PARA AÇÃO PARCIAL DE GRUPOS E DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Dissertação de Mestrado

Adriana Carrillo Rios

Porto Alegre, novembro de 2008

Dissertação submetida por Adriana Carrillo Rios como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (IM - UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Wagner Cortes (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Michael Dokuchaev (IME - USP)
Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira (IME - USP)

Data de Defesa: 27 de novembro de 2008

À todas as pessoas que fazem minha vida feliz e que me incentivam a realizar os meus sonhos.

DEDICATÓRIA

Agradecimentos

Quero agradecer principalmente a Deus por ter me dado a oportunidade de realizar um dos meus sonhos.

Agradeço ao Professor Antonio Paques por ter me ajudado e incentivado sempre que precisei e por ter orientado meu trabalho.

Agradeço à minha família amada por todo o amor, compreensão, apoio e ajuda que sempre me ofereceram nos momentos mais difícieis da minha vida e por terem me feito sentir sempre feliz e me deixado com muito orgulho deles.

Também agradeço muito a todos meus amigos queridos que sempre foram incondicionais e que me deram a maior força para poder terminar meu curso de mestrado.

Que Deus abençoe muito todos vocês.

Resumo

Nesta dissertação realizamos um estudo sobre dois resultados clássicos da literatura referentes à dualidade para ação de álgebras de Hopf: a dualidade de Cohen-Montgomery e a dualidade de Blattner-Montgomery.

No primeiro caso estendemos o resultado de Cohen-Montgomery ao contexto de ação parcial de grupos e no segundo caso estendemos o resultado de Blattner-Montgomery ao contexto de ação parcial de álgebras de Hopf.

Esta dissertação foi elaborada tendo como base o artigo de C. Lomp, "Duality for partial groups actions", arXiv: 0711.0849v1[math.RA], 2007.

Abstract

In this dissertation we are concerned with the following two classical results on duality: the Cohen-Montgomery duality and the Blattner-Montgomery duality; and we present their corresponding versions in the context of partial action of groups and partial actions of Hopf algebras, respectively.

The subject of this dissertation is based on the C. Lomp's paper: "Duality for partial group actions", arXiv: 0711.0849v1 [math.RA], 2007.

Introdução

O conceito de ação parcial de grupos foi definido pela primeira vez por Ruy Exel [17] no contexto de álgebras de operadores e tornou-se uma ferramenta poderosa para o estudo de C^*-álgebras geradas por isometrias parciais sobre um espaço de Hilbert.

Um primeiro tratamento puramente algébrico sobre o tema foi apresentado por M. Dokuchaev e R. Exel em [9]. Nesse artigo os autores introduzem pela primeira vez as noções formais de ação parcial de um grupo sobre uma $K-$álgebra (K sendo anel comutativo), de skew anel de grupo parcial e de envolvente global de uma ação parcial.

O trabalho de Dokuchaev e Exel despertou, em particular, o interesse de vários algebristas, levando-os a obter novos resultados, relativos à ação parcial de grupos, no contexto da teoria de anéis tais como [1], [2], [6], [7], [11], [12], [10], [13], [14], [15], [16], [18], [19] e [25].

A ação parcial de um grupo G sobre uma $K-$álgebra A induz naturalmente um determinado tipo de ação do anel do grupo KG sobre A, fato este que deve ter inspirado e levado S. Caenepeel e K. Janssen [5] a definir as noções de ação parcial de álgebras de Hopf e de produto smash parcial usando o conceito de estruturas entrelaçadas parciais. Anteriormente a esse trabalho S. Caenepeel e E. De Groof [4] já haviam dado os primeiros passos na direção de ação parcial de álgebras de Hopf, estendendo, em particular, resultados sobre teoria de Galois parcial, obtidos por Dokuchaev, Ferrero e Paques em [13], ao contexto de coanéis de Galois.

Sobre dualidade no contexto de produtos smash para ação de álgebras de Hopf há, particularmente, dois resultados clássicos devidos, respectivamente, a M. Cohen e S. Montgomery [8] e a R.J. Blattner e S. Montgomery [3].

Em [21], C. Lomp trata desses dois resultados no contexto de ação parcial de grupos e de álgebras de Hopf.

O conteúdo desta dissertação versa exatamente sobre o trabalho de Lomp.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo tratamos de resultados preliminares relativos à ação parcial de grupos e skew anel de grupo parcial (seção 1.1), à ação de álgebras de Hopf e produto smash (seção 1.2) e à ação parcial de álgebras de Hopf e produto smash parcial (seção 1.3).

O segundo capítulo é dedicado à versão da dualidade de Cohen-Montgomery para ação parcial de grupos e no terceiro tratamos da versão da dualidade de Blattner-Montgomery para ação parcial de álgebras de Hopf.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos apresentar as definições e teoremas mais importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Ação Parcial de Grupos e Skew Anel de Grupo Parcial

Em todo este texto K denotará um anel comutativo com unidade 1_K, A uma K-álgebra com unidade 1_A e G um grupo com elemento identidade e. Também, em todo este texto usaremos o símbolo $\otimes$, ao invés de $\otimes_K$, para denotar a operação “produto tensorial sobre K”.

A noção de ação parcial foi introduzida na literatura por R. Exel em [17]. Uma versão desta noção num contexto puramente algébrico foi dada por M. Dokuchaev e R. Exel em [9].

Definição 1.1.1 *Uma ação parcial de G sobre A é determinada por um par $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde para cada $g \in G$, D_g é um ideal de A gerado por um idempotente central 1_g e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ é um isomorfismo de K-álgebras, que satisfazem as seguintes condições*:

(i) $D_e = A$ *e* $\alpha_e = I_A$,

(ii) $\alpha_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right) = D_g \cap D_{gh}$, $\forall g, h \in G$,

(iii) $\alpha_g\left(\alpha_h\left(x\right)\right) = \alpha_{gh}\left(x\right)$, $\forall x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$, $\forall g, h \in G$.

Observação 1.1.2 (1) *Na definição de ação parcial dada em* [9] *os ideais D_g, considerados pelos autores, não são necessariamente gerados por idempotentes.*

(2) *Se $D_g = A$, $\forall g \in G$ então G age sobre A por K-automorfismos e dizemos*

que α é uma ação global de G sobre A.

O exemplo a seguir nos dá uma fórmula para construir exemplos de ação parcial de grupos a partir de uma ação global.

Exemplo 1.1.3 *Considere B uma K-álgebra, $Aut_K(B)$ o grupo dos K-automorfismos de B, G um grupo, $\beta : G \longrightarrow Aut_K(B)$, $g \longmapsto \beta(g) = \beta_g$, $\forall g \in G$, um homomorfismo de grupos e $A \subset B$ um ideal de B gerado por um idempotente central 1_A. Considere também para cada $g \in G$ o ideal de B, $D_g = A \cap \beta_g(A)$ e $\alpha_g = \beta_g \mid_{D_{g^{-1}}}$. Claramente D_g é ideal de A e $\forall g \in G$, $\alpha_g(D_{g^{-1}}) = \beta_g(D_{g^{-1}}) = \beta_g(A \cap \beta_{g^{-1}}(A)) = \beta_g(A) \cap A = D_g$, ou seja, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ é um isomorfismo de K-álgebras. Além disso, $D_g = A1_g$, com $1_g = 1_A\beta_g(1_A)$, $\forall g \in G$.*

Afirmamos: $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *é uma ação parcial de G sobre A.*

De fato,

(i) se e denota o elemento identidade de G então $\beta_e = \beta(e) = I_B$ e $D_e = A \cap \beta_e(A) = A \cap I_B(A) = A$.

(ii) $\forall g, h \in G$,

$$\begin{aligned} \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) &= \beta_g(A \cap \beta_{g^{-1}}(A) \cap \beta_h(A)) \\ &= \beta_g(A) \cap A \cap \beta_{gh}(A) \\ &= (A \cap \beta_g(A)) \cap (A \cap \beta_{gh}(A)) \\ &= D_g \cap D_{gh}. \end{aligned}$$

(iii) $\forall g, h \in G$, $\forall x \in D_{g^{-1}} \cap D_{(hg)^{-1}}$, temos $\alpha_g(x) \in D_g \cap D_{h^{-1}}$ e, portanto, $\alpha_h(\alpha_g(x)) = \beta_h(\alpha_g(x)) = \beta_h(\beta_g(x)) = \beta_{hg}(x) = \alpha_{hg}(x)$. $\square$

Observação 1.1.4 *De acordo com o Theorem 4.5 de* [9] *toda ação parcial de grupos, como definida em 1.1.1, pode ser obtida conforme descrito no Exemplo 1.1.3.*

A seguir apresentamos a noção de skew anel de grupo parcial conforme introduzida em [9].

Definição 1.1.5 *O skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ é definido como sendo a soma* *direta* $\bigoplus\limits_{g\in G} D_g\bar{g}$ *com multiplicação dada por:*

$$(a\bar{g})\left(b\bar{h}\right) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(a\right)b\right)\overline{gh} = a\alpha_g\left(b1_{g^{-1}}\right)\overline{gh},$$

para todo $a \in D_g$, $b \in D_h$ *e* $g, h \in G$.

Observação 1.1.6 *Se* α *é uma ação global de* G *sobre* A *então* $A *_\alpha G$ *é um skew anel de grupo e será denotado simplesmente* $A * G$.

Os lemas apresentados a seguir serão de grande utilidade para a demonstração dos resultados do capítulo 2.

Para qualquer $g \in G$ definimos a aplicação $K-$linear $\cdot$: $KG \bigotimes A \to A$, com $g \otimes a \longmapsto g \cdot a := \alpha_g\left(a1_{g^{-1}}\right), \forall a \in A$.

Lema 1.1.7 *A aplicação* K*-linear* $\cdot$ *conforme definida acima satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $g \cdot 1_A = 1_g$, $\forall g \in G$.

(ii) $g \cdot (1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh}$, $\forall g, h \in G$.

(iii) $e \cdot a = a$, $\forall a \in A$.

(iv) $g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b)$, $\forall a, b \in A$, $\forall g \in G$.

(v) $g \cdot (h \cdot a) = ((gh) \cdot a)1_g = (g \cdot 1_A)((gh) \cdot a)$, $\forall a \in A$, $\forall g, h \in G$.

(vi) $g \cdot (g^{-1} \cdot a) = a1_g = (g \cdot 1_A)a$, $\forall a \in A$, $\forall g \in G$.

(vii) $(g \cdot a)b = g \cdot (a(g^{-1} \cdot b))$, $\forall a, b \in A$, $\forall g \in G$.

Demonstração: (i) $g \cdot 1_A = \alpha_g(1_A 1_{g^{-1}}) = \alpha_g(1_{g^{-1}}) = 1_g$.

(ii) Desde que $1_{D_{g^{-1}} \cap D_h} = 1_{g^{-1}}1_h$ e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ é um isomorfismo de K-álgebras, então $g \cdot 1_{g^{-1}}1_h = g \cdot 1_{D_{g^{-1}} \cap D_h} = 1_{g\cdot(D_{g^{-1}} \cap D_h)} = 1_{D_g \cap D_{gh}} = 1_g 1_{gh}$.

(iii) $e \cdot a = \alpha_e(a1_{e^{-1}}) = I_A(a1_A) = a$.

(iv) $g \cdot (ab) = \alpha_g(ab1_{g^{-1}}) = \alpha_g(a1_{g^{-1}}b1_{g^{-1}}) = \alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(b1_{g^{-1}}) = (g \cdot a)(g \cdot b)$.

(v)

$$\begin{aligned}
g\cdot(h\cdot a) &= \alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) = \alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}})1_h1_{g^{-1}})\\
&= \alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}})\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}})) = \alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}))\\
&= \alpha_{gh}(a1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}) = \alpha_{gh}(a1_{(gh)^{-1}})\alpha_{gh}(1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}})\\
&= \alpha_{gh}(a1_{(gh)^{-1}})1_{gh}1_g = \alpha_{gh}(a1_{(gh)^{-1}})1_g\\
&= (g\cdot 1_A)((gh)\cdot a).
\end{aligned}$$

(vi) $g\cdot(g^{-1}\cdot a) = (e\cdot a)1_g = (g\cdot 1_A)a.$

(vii) $(g\cdot a)b = \alpha_g(a1_{g^{-1}})b = \alpha_g(a1_{g^{-1}})1_g b = \alpha_g(a\alpha_{g^{-1}}(b1_g)) = g\cdot(a(g^{-1}\cdot b)).$ $\square$

Lema 1.1.8 $g\cdot a = 0 \Longleftrightarrow a\in A\,(1_A - 1_{g^{-1}})\,, \forall a\in A,\ \forall g\in G.$

Demonstração: Note que $a = a1_{g^{-1}} + a\,(1_A - 1_{g^{-1}})$. Logo, $g\cdot a = 0 \Leftrightarrow \alpha_g\,(a1_{g^{-1}}) = 0 \Leftrightarrow a1_{g^{-1}} = 0 \Leftrightarrow a = a\,(1_A - 1_{g^{-1}}) \in A\,(1_A - 1_{g^{-1}})\,.$ $\square$

Observação 1.1.9 Observemos que com a notação $g\cdot a$ conforme introduzida acima, a multiplicação em $A *_\alpha G$ pode ser reescrita da seguinte maneira:

$(a\bar{g})(b\bar{h}) = a(g\cdot b)\overline{gh},\ \forall a\in D_g,\ b\in D_h,\ g,h\in G.$

1.2 Álgebra de Hopf e Produto Smash

Definição 1.2.1 *Uma K-álgebra de Hopf é uma quádrupla (H,Δ,ϵ,S), onde*:

(i) *H é uma K-álgebra.*

(ii) *$\Delta : H \longrightarrow H\otimes H$ e $\epsilon : H\longrightarrow K$ são homomorfismos de K-álgebras que satisfazem as seguintes condições:*

$(\Delta\otimes I_H)\circ\Delta = (I_H\otimes\Delta)\circ\Delta$ *e*

$(\epsilon\otimes I_H)\circ\Delta = 1_K\otimes I_H$ *e* $(I_H\otimes\epsilon)\circ\Delta = I_H\otimes 1_K.$

(iii) *$S : H\longrightarrow H$ é um anti-homomorfismo de K-álgebras, chamado antípoda, que satisfaz a seguinte condição:*

$\mu \circ (S \otimes I_H) \circ \Delta = 1_H \epsilon = \mu \circ (I_H \otimes S) \circ \Delta,$

com $\mu : H \otimes H \longrightarrow H$ *a multiplicação de* H.

Observações 1.2.2 (1) *Usaremos no texto as notações* (H, Δ, ϵ, S) *ou simplesmente* H *para referir-se a uma* K*-álgebra de Hopf.*

(2) *As condições em (ii) e (iii) da definição de uma* K*-álgebra de Hopf podem ser descritas na forma:*

$$\Delta(hl) = \Delta(h)\Delta(l), \ \Delta(1_H) = 1_{H\otimes H} = 1_H \otimes 1_H,$$

$$\epsilon(hk) = \epsilon(h)\epsilon(l), \ \epsilon(1_H) = 1_K,$$

$$\sum_{i,j} (h_{i_1})_{j_1} \otimes (h_{i_1})_{j_2} \otimes h_{i_2} = \sum_{i,j} h_{i_1} \otimes (h_{i_2})_{j_1} \otimes (h_{i_2})_{j_2},$$

$$\sum_i \epsilon(h_{i_1})h_{i_2} = h = \sum_i h_{i_1} S(h_{i_2}),$$

$$\sum_i S(h_{i_1})h_{i_2} = \epsilon(h)1_H = \sum_i h_{i_1} S(h_{i_2}),$$

$\forall h, l \in H$, *com* $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$, $\Delta(h_{i_1}) = \sum_j (h_{i_1})_{j_1} \otimes (h_{i_1})_{j_2}$ *e* $\Delta(h_{i_2}) = \sum_j (h_{i_2})_{j_1} \otimes (h_{i_2})_{j_2}$.

Lema 1.2.3 *Assuma que* H *é uma* K*-álgebra de Hopf finitamente gerada como* K*-módulo. Então a antípoda* S *é bijetiva.*

Demonstração: É suficiente provar que S é sobrejetiva [24, Theorem VI.15] ou, equivalentemente, que $\overline{S} = S \otimes I_{\overline{K}} : H \otimes \overline{K} \longrightarrow H \otimes \overline{K}$, com $\overline{K} = K/M$, é sobrejetiva, para todo ideal maximal M de K [20, Lemma 1.3.5].

Agora, é fácil ver que $(\overline{H} = H \otimes \overline{K}, \overline{\Delta}, \overline{\epsilon}, \overline{S})$ é também uma $\overline{K}$-álgebra de Hopf com $\overline{\Delta} : \overline{H} \longrightarrow \overline{H} \otimes_{\overline{K}} \overline{H}$ dado por $\overline{\Delta}(h \otimes 1_{\overline{K}}) = \sum_i (h_{i_1} \otimes 1_{\overline{K}}) \otimes_{\overline{K}} (h_{i_2} \otimes 1_{\overline{K}})$, $\forall h \in H$ com $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$, $\epsilon = \overline{\epsilon} \otimes I_{\overline{K}}$ e $\overline{S} = S \otimes I_{\overline{K}}$.

Além disso $\overline{H}$ é uma $\overline{K}$-álgebra de dimensão finita, pois H é um K-módulo finitamente gerado.

Logo, $\overline{S}$ é bijetiva ([23, Theorem 2.1.3] ou [22, Theorem 4.2]) e a demonstração está completa. $\square$

Exemplos 1.2.4 Há inúmeros exemplos de álgebras de Hopf na literatura. Aqui, destacaremos apenas três, que são de particular interesse para o contexto desta dissertação.

(1) *Se (H, Δ, ϵ, S) é K-álgebra de Hopf livre de posto finito como K-módulo, então $(H^* = Hom_K(H, K), \Delta_*, \epsilon_*, S_*)$ também é uma K-álgebra de Hopf livre e de mesmo posto como K-módulo. A multiplicação em H^* é dada pelo "produto convolução"*

$$f * g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

$\forall f, g \in H^*$, com $\mu : H \otimes H \longrightarrow H$ a multiplicação de H. O elemento identidade para essa operação é $1_{H^*} = \epsilon$.

Δ_*, ϵ_* e S_* são dadas pelas aplicações duais de Δ, ϵ e S respectivamente, isto é,

$$\Delta_*(f) = \sum_i f_{i_1} \otimes f_{i_2} \Longleftrightarrow f(xy) = \sum_i f_{i_1}(x) f_{i_2}(y),\ \forall f \in H^*,\ x, y \in H.$$

$$\epsilon_*(f) = f(1_H),\ \forall f \in H^* \text{ e } S_*(f) = f \circ S,\ \forall f \in H^*.$$

Se $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset H$ e $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset H^*$ são as respectivas bases duais de H e H^*, isto é, $p_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$, então é fácil ver que existem constantes estruturais $c^i_{k,l}$, $m^i_{k,l} \in K$, $1 \leq i, k, l \leq n$ tais que:

(i) $x_k x_l = \sum_{i=1}^{n} m^i_{k,l} x_i$ *e* $\Delta(x_i) = \sum_{k,l=1}^{n} c^i_{k,l} x_k \otimes x_l$.

(ii) $p_k * p_l = \sum_{i=1}^{n} c^i_{k,l} p_i$ *e* $\Delta_*(p_i) = \sum_{k,l=1}^{n} m^i_{k,l} p_k \otimes p_l$.

(2) *Para qualquer grupo G, a álgebra do grupo KG é uma K-álgebra de Hopf com $\Delta(g) = g \otimes g$, $\epsilon(g) = 1_K$ e $S(g) = g^{-1}$, $\forall g \in G$.*

(3) *Se G for um grupo finito, então a K-álgebra $KG^* = Hom_K(KG, K)$ também é uma K-álgebra de Hopf. Este é um exemplo particular da situação geral considerada em (1). Se $\{p_g \mid g \in G\} \subset KG^*$ é a base (dual) de KG^*, então temos*

que:

(i) *a multiplicação* $*$ *é dada por*

$$p_g * p_h = \delta_{g,h} p_g = p_h * p_g, \forall g, h \in G,$$

ou seja, os elementos $p_g, g \in G$, *são idempotentes ortogonais dois a dois,*

(ii) *o elemento identidade é dado por* $1_{H^*} = \epsilon = \sum_{g \in G} p_g$,

(iii) $\Delta(p_g) = \sum_{hl=g} p_h \otimes p_l$, $\forall g \in G$,

(iv) $\epsilon_*(p_g) = p_g(1_{KG}) = p_g(e) = \delta_{e,g}$, $\forall g \in G$, *onde* e *denota o elemento identidade de* G.

(v) $S_*(p_g) = p_{g^{-1}}$, $\forall g \in G$.

Para a definição do produto smash, necessitamos antes definir a noção de H-módulo álgebra.

Definição 1.2.5 *Sejam* H *uma* K*-álgebra de Hopf e* A *uma* K*-álgebra. Dizemos que* A *é um* H*-módulo álgebra à esquerda se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) A *é um* H*-módulo à esquerda via* $h \otimes a \longmapsto h \cdot a, \forall a \in A, \forall h \in H$,

(ii) $h \cdot (ab) = \sum_i (h_{i_1} \cdot a)(h_{i_2} \cdot b)$, $\forall a, b \in A$ *e* $h \in H$ *com* $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$,

(iii) $h \cdot 1_A = \epsilon(h) 1_A$, $\forall h \in H$.

A noção de H-módulo álgebra à direita se define de maneira análoga.

Exemplos 1.2.6 (1) *Se* A *é uma* K*-álgebra e* G *é um grupo de* K*-automorfismos de* A *então* A *é um* KG*-módulo álgebra à esquerda via* $g \cdot a = g(a)$, $\forall a \in A$, $\forall g \in G$.

(2) *Se* A *é uma* K*-álgebra graduada por um grupo finito* G, *isto é, existem* K*-submódulos* A_g *de* A, $g \in G$, *tais que* $A = \oplus_{g \in G} A_g$ *e* $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, *então* A *é um* KG^**-módulo álgebra à esquerda via*

$$p_g \cdot A = A_g, \forall g \in G.$$

E reciprocamente, se A é um KG^*-módulo álgebra à esquerda então A é G-graduada.

(3) *Toda K-álgebra de Hopf H, que é K-módulo livre de posto finito, é um H^*-módulo álgebra à esquerda (resp. à direita), via $f \rightharpoonup h = \sum_i f(h_{i_2})h_{i_1}$ (resp. $h \leftharpoonup f = \sum_i h_{i_2} f(h_{i_1})$), $\forall f \in H^*$ e $h \in H$ com $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.*

(4) *Se H é uma K-álgebra de Hopf, que é K-módulo livre de posto finito, então H^* é um H-módulo álgebra à esquerda (resp. à direita) via $(h \rightharpoonup f) : g \longmapsto f(gh)$ (resp. $(f \leftharpoonup h) : g \longmapsto f(gS(h))$), $\forall f \in H^*$, $g, h \in H$.*

(5) *Sejam A uma K-álgebra e H uma K-álgebra de Hopf. Se H é K-módulo livre de posto finito então $A \otimes H$ é H^*-módulo álgebra à esquerda via*

$f \triangleright (a \otimes h) = a \otimes (f \rightharpoonup h)$, $\forall a \in A$, $h \in H$, $f \in H^*$.

Definição 1.2.7 *Sejam H uma K-álgebra de Hopf e A um H-módulo álgebra à esquerda. A K-álgebra produto smash $A\#H$ é definida da seguinte forma:*

(i) *$A\#H = A \otimes H$ como $K-$módulos,*

(ii) *a multiplicação em $A\#H$ é dada por:*

$$(a\#h)(b\#k) = \sum_i a(h_{i_1} \cdot b)\#h_{i_2}k$$

$\forall a, b \in A$, $h, k \in H$ *com* $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.

Para um H-módulo álgebra à direita A define-se um correspondente produto smash $H\#A$ de forma similar.

Exemplos 1.2.8 (1) *Se A é um H-módulo álgebra à esquerda via a ação trivial $h \cdot a = \epsilon(h)a$, $\forall a \in A$, $h \in H$, então $A\#H \simeq A \otimes H$ como K-álgebras. De fato, basta observar que*

$$\begin{aligned} (a\#h)(b\#k) &= \sum_i a(h_{i_1} \cdot b)\#h_{i_2}k = \sum_i a\epsilon(h_{i_1})b\#h_{i_2}k \\ &= ab\# \sum_i \epsilon(h_{i_1})h_{i_2}k = ab\#hk, \ \forall a, b \in A, \forall h, k \in K \end{aligned}$$

(2) *Se A é um KG-módulo álgebra então é fácil ver que G age sobre A por K-automorfismos de A, ou seja, existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \longrightarrow Aut_K(A)$, $g \longmapsto \beta_g$, tal que $\beta_g(a) = g \cdot a$, $\forall g \in G$, $\forall a \in A$.*

E neste caso $A\#KG$ é naturalmente isomorfo ao skew anel de grupo $A * G$.

(3) *Se G é um grupo finito e A é um KG^*-módulo álgebra então a multiplicação em $A\#KG^*$ pode ser descrita, fazendo uso da base dual $\{p_g \mid g \in G\}$ de KG^*, na seguinte forma:*

$$(a\#p_g)(b\#p_h) = \sum_{kl=g} a(p_k \cdot b)\#p_l * p_h = \sum_{kl=g} a(p_k \cdot b)\#\delta_{l,h}p_h = a(p_{gh^{-1}} \cdot b)\#p_h.$$

(4) *Sejam H uma K-álgebra de Hopf e A um H-módulo álgebra à esquerda. Se H é um $K-$módulo livre de posto finito então $A\#H$ é um H^*-módulo álgebra à esquerda via $f \triangleright (a\#h) = a\#(f \rightharpoonup h)$, $\forall a \in A$, $h \in H$, $f \in H^*$, e podemos então considerar o produto smash $A\#H\#H^*$.*

Lema 1.2.9 *Seja H uma K-álgebra de Hopf e assuma que H é K-módulo livre de posto finito. Então a aplicação $\lambda : H\#H^* \longrightarrow End_K(H)$ (resp. $\rho : H^*\#H \longrightarrow End_K(H)$) dada por $\lambda(h\#f)(k) = (f \rightharpoonup k)h$ (resp. $\rho(f\#h)(k) = h(k \leftharpoonup f)$), $\forall h, k \in H$, $f \in H^*$, é um homomorfismo (resp. anti-homomorfismo) de K-álgebras.*

Demonstração: Consideremos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset H$ e $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset H^*$ bases (duais) de H e H^* respectivamente.

(i) Sejam $\Delta(x_{j'}) = \sum_{r,q=1}^{n} c_{q,r}^{j'} x_q \otimes x_r$ e $\Delta(x_k) = \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s \otimes x_t$. Então,

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\left(x_j\#p_i\right)\left(x_{j'}\#p_{i'}\right)\right)(x_k) &= \lambda\left(\sum_{k,l=1}^{n} x_j m_{k,l}^{i}\left(p_k \rightharpoonup x_{j'}\right)\#p_l * p_{i'}\right)(x_k) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} m_{k,l}^{i}\lambda\left(x_j\left(p_k \rightharpoonup x_{j'}\right)\#p_l * p_{i'}\right)(x_k) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} m_{k,l}^{i} x_j\left(p_k \rightharpoonup x_{j'}\right)\left(p_l * p_{i'} \rightharpoonup x_k\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k,l=1}^{n} m_{k,l}^{i} x_j \sum_{r,q=1}^{n} c_{q,r}^{j'} x_q p_k (x_r) \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s p_l * p_{i'} (x_t) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} m_{k,l}^{i} x_j \sum_{r,q=1}^{n} x_q p_k (x_r) \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s \sum_{p=1}^{n} c_{l,i'}^{p} p_p (x_t) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} m_{k,l}^{i} x_j \sum_{q=1}^{n} c_{q,k}^{j'} x_q \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s c_{l,i'}^{t} \\
&= \sum_{k,l,q,s,t=1}^{n} m_{k,l}^{i} c_{q,k}^{j'} c_{s,t}^{k} c_{l,i'}^{t} x_j x_q x_s.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\lambda (x_j \# p_i) \lambda (x_{j'} \# p_{i'}) (x_k) &= \lambda (x_j \# p_i) (\lambda (x_{j'} \# p_{i'}) (x_k)) \\
&= \lambda (x_j \# p_i) (x_{j'} (p_{i'} \rightharpoonup x_k)) \\
&= \lambda (x_j \# p_i) \left(x_{j'} \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s p_{i'} (x_t) \right) \\
&= \lambda (x_j \# p_i) \left(x_{j'} \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s p_{i'} (x_t) \right) \\
&= \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} p_{i'} (x_t) \lambda (x_j \# p_i) (x_{j'} x_s) \\
&= \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} p_{i'} (x_t) x_j (p_i \rightharpoonup x_{j'} x_s) \\
&= \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} p_{i'} (x_t) x_j \sum_{k,l=1}^{n} m_{k,l}^{i} (p_k \rightharpoonup x_{j'}) (p_l \rightharpoonup x_s) \\
&= \sum m_{k,l}^{i} c_{s,t}^{k} c_{q,r}^{j'} c_{u,v}^{s} p_{i'} (x_t) p_k (x_r) p_l (x_v) x_j x_q x_u \\
&= \sum_{s,k,l,q,u=1}^{n} m_{k,l}^{i} c_{s,i'}^{k} c_{q,k}^{j'} c_{u,l}^{s} x_j x_q x_u.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda ((x_j \# p_i)(x_{j'} \# p_{i'})) = \lambda (x_j \# p_i) \lambda (x_{j'} \# p_{i'})$.

Além disso, $\lambda (1_{H \# H^*}) = 1_{End_K(H)} = I_H$. De fato, $\forall 1 \leq k \leq n$ temos:

$$
\begin{aligned}
\lambda (1_{H \# H^*}) (x_k) &= \lambda (1_H \# 1_{H^*}) (x_k) = 1_H (1_{H^*} \rightharpoonup x_k) = 1_{H^*} \rightharpoonup x_k \\
&= \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s 1_{H^*} (x_t) = \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{k} x_s \epsilon_H (x_t) = x_k = I_H (x_k).
\end{aligned}
$$

(ii) Note que $\Delta(p_i) = \sum_{t,l=1}^{n} m_{t,l}^i p_t \otimes p_l$. Então,

$$\begin{aligned}
\rho\left(p_i \# x_{i'}\right) \rho\left(p_j \# x_{j'}\right)(x_k) &= \rho\left(p_i \# x_{i'}\right)\left(\rho\left(p_j \# x_{j'}\right)(x_k)\right) \\
&= \rho\left(p_i \# x_{i'}\right)\left(\left(x_k \leftharpoondown p_j\right) x_{j'}\right) \\
&= \left(\left(\left(x_k \leftharpoondown p_j\right) x_{j'}\right) \leftharpoondown p_i\right) x_{i'} \\
&= \sum_{t,l=1}^{n} m_{t,l}^i \left(\left(x_k \leftharpoondown p_j\right) \leftharpoondown p_t\right)\left(x_{j'} \leftharpoondown p_l\right) x_{i'} \\
&= \sum_{t,l=1}^{n} m_{t,l}^i \left(x_k \leftharpoondown p_j \star p_t\right)\left(x_{j'} \leftharpoondown p_l\right) x_{i'}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\rho\left(\left(p_j \# x_{j'}\right)\left(p_i \# x_{i'}\right)\right)(x_k) &= \rho\left(\sum_{t,l=1}^{n} m_{t,l}^i p_j \star p_t \# \left(x_{j'} \leftharpoondown p_l\right) x_{i'}\right)(x_k) \\
&= \sum_{t,l=1}^{n} m_{t,l}^i \rho\left(p_j \star p_t \# \left(x_{j'} \leftharpoondown p_l\right) x_{i'}\right)(x_k) \\
&= \sum_{t,l=1}^{n} m_{t,l}^i \left(x_k \leftharpoondown p_j \star p_t\right)\left(x_{j'} \leftharpoondown p_l\right) x_{i'}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\rho\left(p_i \# x_{i'}\right) \rho\left(p_j \# x_{j'}\right) = \rho\left(\left(p_j \# x_{j'}\right)\left(p_i \# x_{i'}\right)\right)$.

Finalmente mostremos que ρ preserva unidade. De fato, $\forall 1 \leq k \leq n$ temos:

$$\begin{aligned}
\rho\left(1_{H^* \# H}\right)(x_k) &= \rho\left(1_{H^*} \# 1_H\right)(x_k) = \left(x_k \leftharpoondown 1_{H^*}\right) 1_H \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,q}^k x_q 1_{H^*}(x_p) 1_H = \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,q}^k x_q 1_{H^*}(x_p) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,q}^k x_q \epsilon_H(x_p) = x_k = I_H(x_k).
\end{aligned}$$

A demonstração está completa. $\square$

Este trabalho foi motivado básicamente pelos seguintes dois resultados clássicos sobre dualidade para ação de álgebras de Hopf.

Teorema 1.2.10 (Cohen - Montgomery duality, [8]). *Sejam K um anel comutativo, A uma K-álgebra e G um grupo finito de ordem n, agindo sobre A por*

K-*automorfismos de* A. *Então* $(A*G)\#KG^*$ *é isomorfo à* $K-$*álgebra de matrizes* $M_n(A)$.

Teorema 1.2.11 (Blattner - Montgomery duality, [3]). *Sejam* K *um corpo,* H *uma* K-*álgebra de Hopf de dimensão finita* n *e* A *um* H-*módulo à esquerda. Então* $A\#H\#H^*$, $A\#H^*\#H$ *e* $M_n(A)$ *são* K-*álgebras isomorfas.*

1.3 Ação Parcial de Álgebras de Hopf e Produto Smash parcial

A noção de ação parcial de álgebras de Hopf foi introduzida pela primeira vez na literatura por S. Caenepeel e K. Janssen [5] e foi inspirada pela ação parcial de grupos. Efetivamente o modelo de inspiração desses autores se encontra no seguinte exemplo:

Exemplo 1.3.1 *Sejam* K *um anel comutativo,* A *uma* K-*álgebra,* G *um grupo e* $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial de* G *sobre* A, *conforme definida na seção 1.1. Neste caso, cada* D_g *é uma* $K-$*álgebra com elemento identidade* 1_g, $D_g = A1_g$ *e* $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ *é um isomorfismo de* K-*álgebras. Esta ação parcial* α *de* G *sobre* A *induz naturalmente a seguinte aplicação* K-*linear* $\cdot : KG\otimes A \longrightarrow A$, $g\otimes a \longmapsto g\cdot a := \alpha_g(a1_{g^{-1}})$, $\forall a \in A$, $\forall g \in G$. *Decorre do Lema 1.1.7 que esta aplicação* K-*linear satisfaz, em particular,*

(i) $g\cdot(ab) = (g\cdot a)(g\cdot b)$,

(ii) $1_{KG}\cdot a = a$,

(iii) $g\cdot(h\cdot a) = (g\cdot 1_A)(gh\cdot a)$, $\forall a, b \in A$, $g, h \in G$.

Definição 1.3.2 *Sejam* K *anel comutativo,* A *uma* K-*álgebra e* H *uma* K-*álgebra de Hopf. Uma ação parcial de* H *sobre* A *é uma aplicação* K-*linear* $\cdot : H\otimes A \longrightarrow A$, $h\otimes a \longmapsto h\cdot a$, *que satisfaz as seguintes propriedades*:

(i) $h\cdot(ab) = \sum_i (h_{i_1}\cdot a)(h_{i_2}\cdot b)$,

(ii) $1_H \cdot a = a$,

(iii) $h \cdot (l \cdot a) = \sum_i (h_{i_1} \cdot 1_A)((h_{i_2} l) \cdot a)$,

$\forall a, b \in A$, $\forall h, l \in H$, com $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.

Observação 1.3.3 *Notemos que (ii) e (iii) generalizam a noção de H-módulo. De fato, se a ação $\cdot$ de H sobre A fosse global, isto é, se a propriedade $h \cdot 1_A = \epsilon(h) 1_A$, $\forall h \in H$, também fosse satisfeita então de (iii) teríamos*

$$\begin{aligned} h \cdot (l \cdot a) = \sum_i (h_{i_1} \cdot 1_A)((h_{i_2} l) \cdot a) &= \sum_i \epsilon(h_{i_1}) 1_A ((h_{i_2} l) \cdot a) \\ &= ((\sum_i \epsilon(h_{i_1}) h_{i_2}) l) \cdot a \\ &= (hl) \cdot a, \end{aligned}$$

$\forall a \in A$, $\forall h, l \in H$, com $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.

Conforme vimos no Exemplo 1.3.1, se α é uma ação parcial (não global) de um grupo G sobre uma K-álgebra A, então

$$\cdot : KG \otimes A \longrightarrow A, g \otimes a \longmapsto g \cdot a = \alpha_g(a 1_{g^{-1}})$$

é uma ação parcial da K-álgebra de Hopf KG sobre A, a qual também não é global pois $g \cdot 1_A = 1_g \neq 1_A = \epsilon(g) 1_A$, $\forall g \in G$, $g \neq e$.

Aparentemente, este parece ser o único exemplo, até agora conhecido, de ação de álgebra de Hopf parcial (não global).

Dados A e H como na Definição 1.3.2, dizemos também que H age parcialmente sobre A e que A é um H-módulo álgebra parcial (à esquerda).

Definição 1.3.4 (Produto Smash Parcial). *Sejam H uma K-álgebra de Hopf e A um H-módulo álgebra parcial via*

$$\cdot : H \otimes A \longrightarrow A, h \otimes a \longmapsto h \cdot a, \forall a \in A, h \in H$$

Consideremos sobre o A-módulo à esquerda $A \otimes H$ a multiplicação (associativa)

$$(a \otimes h)(b \otimes l) = \sum_i a(h_{i_1} \cdot b) \otimes h_{i_2} l,$$

$\forall a, b \in A,\ h, l \in H,\ com\ \Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.

O produto smash parcial de H sobre A é definido como sendo a K-subálgebra de $A \otimes H$ dada por $\underline{A\#H} = (A \otimes H)(1_A \otimes 1_H)$, isto é, a K-subálgebra gerada pelos elementos da forma

$$\sum_i a(h_{i_1} \cdot 1_A) \otimes h_{i_2},$$

$\forall a \in H,\ h \in H,\ com\ \Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.

Exemplo 1.3.5 *Sejam A uma K-álgebra, G um grupo e $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de G sobre A. Então, a aplicação*

$$\theta : A *_\alpha G \longrightarrow \underline{A\#KG}$$

tal que $\sum_g a_g\bar{g} \longmapsto \sum_g a_g \otimes g = \sum_g a_g(g \cdot 1_A) \otimes g$, é um isomorfismo de K-álgebras. De fato, desde que $(a\bar{g})(b\bar{h}) = a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\overline{gh}$ temos $\theta((a\bar{g})(b\bar{h})) = a\alpha_g(b1_{g^{-1}}) \otimes gh = a(g\cdot b)\otimes gh = (a\otimes g)(b\otimes h)$, $\forall a \in D_g$, $b \in D_h$ e $g, h \in G$. Ou seja, θ é homomorfismo de K-álgebras.

Claramente θ é sobrejetor e, como $A\otimes KG$ é um A-módulo à esquerda livre com base $\{1_A \otimes g \mid g \in G\}$ então $\sum_g a_g \otimes g = 0$ se e somente se $a_g = 0$, $\forall g \in G$, ou seja, θ é injetor. $\square$

Concluímos esta seção mostrando que se a K-álgebra de Hopf H, vista como K-módulo, é livre de posto finito, então o produto smash parcial $\underline{A\#H}$ é um H^*-módulo álgebra à esquerda e que, portanto, o produto smash $(\underline{A\#H})\#H^*$ também pode ser considerado.

Recordemos que se H é assumida ser de posto finito como K-módulo livre, então H é H^*-módulo álgebra à esquerda via $f \rightharpoonup h = \sum_i f(h_{i_2})h_{i_1}$, $\forall f \in H^*$, $\forall h \in H$ com $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.

Proposiçaõ 1.3.6 *Assuma que H é uma K-álgebra de Hopf, livre de posto finito como K-módulo, agindo parcialmente sobre uma K-álgebra A. Então a K-álgebra*

$A\otimes H$ (conforme definida em 1.3.4) é um H^*-módulo álgebra, via

$$f \triangleright a\otimes h \longmapsto a\otimes (f \rightharpoonup h), \forall a\in A, \forall h\in H, \forall f\in H^*$$

e $\underline{A\#H}$ é um H^*-submódulo álgebra.

Demonstração: Dados $a,b\in A$, $f,g\in H^*$ e $h,l\in H$ com $\Delta(h)=\sum_i h_{i_1}\otimes h_{i_2}$, $\Delta(h_{i_1})=\sum_j (h_{i_1})_{j_1}\otimes (h_{i_1})_{j_2}$, $\Delta(l)=\sum_k l_{k_1}\otimes l_{k_2}$ e $\Delta_*(f)=\sum_t f_{t_1}\otimes f_{t_2}$, temos

$$\begin{aligned}
f\triangleright (g\triangleright a\otimes h) &= a\otimes (f\rightharpoonup (g\rightharpoonup h))\\
&= a\otimes f\rightharpoonup (\sum_i g(h_{i_2})h_{i_1})\\
&= a\otimes \sum_{i,j} g(h_{i_2}) f((h_{i_1})_{j_2})(h_{i_1})_{j_1}\\
&= a\otimes \sum_{i,j} g((h_{i_2})_{j_2}) f((h_{i_2})_{j_1})h_{i_1}\\
&= a\otimes \sum_i (f*g)(h_{i_2})h_{i_1}\\
&= a\otimes ((f*g)\rightharpoonup h)\\
&= (f*g)\triangleright a\otimes h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\triangleright (a\otimes h)(b\otimes l) &= f\triangleright \sum_i a(h_{i_1}\cdot b)\otimes h_{i_2}l\\
&= \sum_i a(h_{i_1}\cdot b)\otimes (f\rightharpoonup (h_{i_2}l))\\
&= \sum_{i,j,k} a(h_{i_1}\cdot b)\otimes f((h_{i_2})_{j_2}l_{k_2})(h_{i_2})_{j_1}l_{k_1}\\
&= \sum_{i,j,k,t} a(h_{i_1}\cdot b)\otimes f_{t_1}((h_{i_2})_{j_2})f_{t_2}(l_{k_2})(h_{i_2})_{j_1}l_{k_1}\\
&= \sum_{i,j,k,t} a(h_{i_1}\cdot b)\otimes (f_{t_1}((h_{i_2})_{j_2})(h_{i_2})_{j_1})(f_{t_2}(l_{k_2})l_{k_1})\\
&= \sum_{i,j,t} af_{t_1}((h_{i_2})_{j_2})h_{i_1}\cdot b\otimes (h_{i_2})_{j_1}(f_{t_2}\rightharpoonup l)\\
&= \sum_{i,j,t} af_{t_1}(h_{i_2})(h_{i_1})_{j_1}\cdot b\otimes (h_{i_1})_{j_2}(f_{t_2}\rightharpoonup l)\\
&= \sum_{i,t} (a\otimes f_{t_1}(h_{i_2})h_{i_1})(b\otimes (f_{t_2}\rightharpoonup l))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_t (a \otimes (f_{t_1} \rightharpoonup h))(b \otimes (f_{t_2} \rightharpoonup l)) \\
&= \sum_t (f_{t_1} \triangleright (a \otimes h))(f_{t_2} \triangleright (b \otimes l)).
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
1_{H^*} \triangleright a \otimes h &= \epsilon \triangleright a \otimes h = a \otimes (\epsilon \rightharpoonup h) \\
&= \sum_i a \otimes \epsilon(h_{i_2}) h_{i_1} = a \otimes h,
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
f \triangleright 1_{A \otimes H} &= f \triangleright 1_A \otimes 1_H = 1_A \otimes (f \rightharpoonup 1_H) \\
&= 1_A \otimes f(1_H) 1_H = f(1_H) 1_A \otimes 1_H \\
&= \epsilon_*(f) 1_{A \otimes H}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $A \otimes H$ é um H^*-módulo álgebra à esquerda. Resta provar que $\underline{A\#H}$ é um H^*-submódulo, ou seja, que $H^* \triangleright \underline{A\#H} \subset \underline{A\#H}$.

Mas isto é imediato, desde que

$$
\begin{aligned}
f \triangleright (a \otimes h)(1_A \otimes 1_H) &= \sum_t f_{t_1} \triangleright (a \otimes h)(f_{t_2} \triangleright (1_A \otimes 1_H)) \\
&= \sum_t (a \otimes (f_{t_1} \rightharpoonup h))(1_A \otimes (f_{t_2} \rightharpoonup 1_H)) \\
&= \sum_t (a \otimes (f_{t_1} \rightharpoonup h))(1_A \otimes f_{t_2}(1_H) 1_H) \\
&= \sum_t (a \otimes (f_{t_1} \rightharpoonup h))(1_A \otimes \epsilon_*(f_{t_2}) 1_H) \\
&= \sum_t (a \otimes (\epsilon_*(f_{t_2}) f_{t_1} \rightharpoonup h))(1_A \otimes 1_H) \\
&= (a \otimes (f \rightharpoonup h))(1_A \otimes 1_H) \in \underline{A\#H},
\end{aligned}
$$

$\forall f \in H^*$, $\forall a \in A$, $\forall h \in H$. $\square$

Capítulo 2

Dualidade para Ação Parcial de Grupos

Sejam K um anel comutativo, A uma K-álgebra, G um grupo finito e α uma ação parcial de G sobre A.

Nosso objetivo neste capítulo é estabelecer a versão parcial da dualidade de Cohen-Montgomery para o produto smash $(A*_\alpha G)\#KG^*$. Começaremos por provar a seguinte proposição.

Proposição 2.1 *$D = A *_\alpha G$ é um KG^*-módulo álgebra via a ação*

$$KG^* \bigotimes D \longrightarrow D, \text{ dada por } p_h \otimes a\bar{g} \longmapsto p_h \triangleright a\bar{g} = \delta_{g,h} a\bar{g},$$

para todo $g, h \in G, a \in D_g$.

Demonstração: Note que para todo $g, h, l \in G$ e para todo $a \in D_g$ e $b \in D_h$ temos:

(i) $p_l \triangleright (p_h \triangleright a\bar{g}) = \delta_{g,h} p_l \triangleright (a\bar{g}) = \delta_{g,h}\delta_{g,l} a\bar{g}$. Logo se $g = l$ então $p_l \triangleright (p_h \triangleright a\bar{g}) = \delta_{g,h} a\bar{g} = (p_l \star p_h) \triangleright a\bar{g}$. E se $g \neq l$ então $p_l \triangleright (p_h \triangleright a\bar{g}) = 0 = (p_l \star p_h) \triangleright a\bar{g}$. Portanto, $p_l \triangleright (p_h \triangleright a\bar{g}) = (p_l \star p_h) \triangleright a\bar{g}$.

(ii) $1_{KG^*} \triangleright a\bar{g} = \sum\limits_h p_h \triangleright a\bar{g} = \sum\limits_h \delta_{g,h} a\bar{g} = a\bar{g}$.

(iii) $p_l \triangleright ((a\bar{g})(b\bar{h})) = p_l \triangleright a(g\cdot b)\overline{gh} = a(g \cdot b)\delta_{l,gh}\overline{gh} = \delta_{l,gh}(a\bar{g})(b\bar{h})$ e $\sum\limits_{tt'=l}(p_t \triangleright a\bar{g})(p_{t'} \triangleright b\bar{h}) = \sum\limits_{tt'=l}(\delta_{g,t} a\bar{g})(\delta_{h,t'} b\bar{h})$. Desde que $\forall t, t' \in G$ tal que $tt' = l$, $\delta_{g,t} \neq 0$ e $\delta_{h,t'} \neq 0 \Longleftrightarrow t = g$ e $t' = h \Longleftrightarrow l = tt' = gh \Longleftrightarrow \delta_{l,gh} \neq 0$, temos então $p_l \triangleright ((a\bar{g})(b\bar{h})) = \sum\limits_{tt'=l}(p_t \triangleright a\bar{g})(p_{t'} \triangleright b\bar{h})$.

(iv) $p_h \triangleright 1_D = p_h \triangleright (1_A\bar{e}) = \delta_{e,h} 1_A\bar{e} = \epsilon_*(p_h)1_D$. $\square$

Podemos então obter o produto smash $D\#KG^*$, o qual é uma K-álgebra com multiplicação dada por (ver Exemplo 1.2.8 (3)):

$$\begin{aligned}(a\bar{g}\#p_h)\left(b\bar{k}\#p_l\right) &= (a\bar{g})(p_{hl^{-1}} \triangleright b\bar{k})\#p_l \\ &= (a\bar{g})(\delta_{hl^{-1}}b\bar{k})\#p_l \\ &= a\,(g\cdot b)\,\overline{gk}\#\delta_{h,kl}p_l,\end{aligned}$$

$\forall a, b \in A,\ g, h, k, l \in G$.

Denotemos $B = D\#KG^*$. O elemento identidade de B é: $1_B = 1_D\#1_{KG^*} = 1_A\bar{e}\#\sum_{h\in G} p_h = \sum_{h\in G} 1_A\bar{e}\#p_h$.

Seja n a ordem de G e denotemos por $\left(a_{g,h}\right)_{g,h\in G}$ os elementos de $M_n(A)$, isto é as matrizes $n\times n$ com coeficientes em A. Em particular as matrizes $(\delta_{g,h})_{g,h\in G}$ serão denotadas por $E_{g,h}$.

O lema seguinte será utilizado para demonstrar a próxima proposição.

Lema 2.2 *Quaisquer que sejam $g, h, l \in G$, $a, b \in A$ tem-se:*

$$l^{-1}\cdot\left((gh)^{-1}\cdot(a\,(g\cdot b))\right) = \left((hl)^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a\right)\right)\left(l^{-1}\cdot\left(h^{-1}\cdot b\right)\right).$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}l^{-1}\cdot\left((gh)^{-1}\cdot(a\,(g\cdot b))\right) &= l^{-1}\cdot\left[\left((gh)^{-1}\cdot a\right)\left((gh)^{-1}\cdot(g\cdot b)\right)\right] \\ &= l^{-1}\cdot\left[\left((gh)\cdot a\right)\left(\left(h^{-1}g^{-1}\right)\cdot(g\cdot b)\right)\right] \\ &= l^{-1}\cdot\left[\left((gh)^{-1}\cdot a\right)\left(\left(h^{-1}g^{-1}g\right)\cdot b\right)1_{(gh)^{-1}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= l^{-1}\cdot\left[\left((gh)^{-1}\cdot a\right)\left(h^{-1}\cdot b\right)1_{(gh)^{-1}}\right] \\ &= l^{-1}\cdot\left[\left((gh)^{-1}\cdot a\right)\left(h^{-1}\cdot b\right)\right] \\ &= \left[l^{-1}\cdot\left((gh)^{-1}\cdot a\right)\right]\left[l^{-1}\cdot\left(h^{-1}\cdot b\right)\right] \\ &= \left((ghl)^{-1}\cdot a\right)1_{l^{-1}}\left((hl)^{-1}\cdot b\right)1_{l^{-1}} \\ &= \left((ghl)^{-1}\cdot a\right)\left((hl)^{-1}\cdot b\right)1_{l^{-1}} \\ &= \left((ghl)^{-1}\cdot a\right)1_{(hl)^{-1}}\left((hl)^{-1}\cdot b\right)1_{l^{-1}} \\ &= \left[(hl)^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a\right)\right]\left[l^{-1}\cdot\left(h^{-1}\cdot b\right)\right],\end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 2.3 *A aplicação:* $\phi : B \longrightarrow M_n(A)$ *dada por*

$$\sum_{g,h\in G} a_{g,h}\bar{g}\#p_h \longmapsto \sum_{g,h\in G} h^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a_{g,h}\right)E_{gh,h}$$

é um homomorfismo não unitário de K*-álgebras.*

Demonstração: É suficiente mostrar que ϕ é multiplicativa. De fato, para todo $g,h,l,k\in G$, $a\in D_g$, $b\in D_k$ temos:

$$\begin{aligned}
\phi\left((a\bar{g}\#p_h)\left(b\bar{k}\#p_l\right)\right) &= \phi\left(a\,(g\cdot b)\,\overline{gk}\#\delta_{h,kl}p_l\right)\\
&= l^{-1}\cdot\left((gk)^{-1}\cdot(a\,(g\cdot b))\right)E_{gkl,l}\delta_{h,kl}\\
&= \left((kl)^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a\right)\right)\left(l^{-1}\cdot\left(k^{-1}\cdot b\right)\right)E_{gh,h}E_{kl,l}\delta_{h,kl}\\
&= \left(h^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a\right)\right)\left(l^{-1}\cdot\left(k^{-1}\cdot b\right)\right)E_{gh,h}E_{kl,l}\\
&= \left[\left(h^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a\right)\right)E_{gh,h}\right]\left[\left(l^{-1}\cdot\left(k^{-1}\cdot b\right)\right)E_{kl,l}\right]\\
&= \phi\left(a\bar{g}\#p_h\right)\phi\left(b\bar{k}\#p_l\right),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Proposição 2.4 $Ker(\phi) = \bigoplus_{g,h\in G} A\left(1_A - 1_{gh}\right)1_g\bar{g}\#p_h.$

Demonstração: Seja $\gamma = \sum_{g,h\in G} a_{g,h}\bar{g}\#p_h \in Ker(\phi)$. Se $\phi\left(\sum_{g,h\in G} a_{g,h}\bar{g}\#p_h\right) = 0$ segue que $\sum_{g,h\in G} h^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a_{g,h}\right)E_{gh,h} = 0$, ou seja, $h^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a_{g,h}\right) = 0$, $\forall g,h\in G$.

Logo, pelo Lema 1.1.8. temos:

$$g^{-1}\cdot a_{g,h} \in A\left(1_A - 1_h\right)\cap D_{g^{-1}} = A\left(1_A - 1_h\right)1_{g^{-1}}$$

e conseqüentemente

$$a_{g,h} = g\cdot\left(g^{-1}\cdot a_{g,h}\right) \in A(g\cdot((1_A - 1_h)\,1_{g^{-1}})).$$

Além disso, desde que

$$g\cdot\left(\left(1_A - 1_h\right)1_{g^{-1}}\right) = g\cdot\left(1_{g^{-1}} - 1_h 1_{g^{-1}}\right) = 1_g - 1_g 1_{gh}$$

temos

$$a_{g,h} \in A\left(1_g - 1_g 1_{gh}\right) = A\left(1_A - 1_{gh}\right) 1_g.$$

Portanto, $\gamma \in \bigoplus\limits_{g,h \in G} A\left(1_A - 1_{gh}\right) 1_g \bar{g} \# p_h$.

Recíprocamente, desde que $A\left(1_A - 1_{gh}\right) 1_g = A(g \cdot ((1_A - 1_h)\, 1_{g^{-1}})) =$ $A\left(g \cdot (1_A - 1_h)\right) 1_g = A(g \cdot (1_A - 1_h))$, então $\forall a \in A$, $\forall g, h \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
\phi\left(ag \cdot (1_A - 1_h)\, \bar{g} \# p_h\right) &= h^{-1} \cdot \left(g^{-1} \cdot (ag \cdot (1_A - 1_h))\right) E_{gh,h} \\
&= h^{-1} \cdot \left(\left(g^{-1} \cdot a\right) (1_A - 1_h)\, 1_{g^{-1}}\right) E_{gh,h} \\
&= [h^{-1} \cdot \left(g^{-1} \cdot a\right)][h^{-1} \cdot ((1_A - 1_h)\, 1_{g^{-1}})] E_{gh,h} \\
&= h^{-1} \cdot \left(g^{-1} \cdot a\right) 0 = 0,
\end{aligned}$$

conforme Lema 1.1.8. Portanto, $\bigoplus\limits_{g,h \in G} A\left(1_A - 1_{gh}\right) 1_g \bar{g} \# p_h = Ker\left(\phi\right).$ $\square$

Corolário 2.5 *ϕ restrita a $A \star_\alpha G$ é injetora, ou seja, $A \star_\alpha G \simeq \phi(A \star_\alpha G) \subseteq M_n(A)$.*

Demonstração: Comecemos por observar que $\forall a \in D_g$, $g \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
a\bar{g} 1_B &= a\bar{g} 1_D \# 1_{KG^*} \\
&= a\bar{g} \left(\sum_{h \in G} 1_A \bar{e} \# p_h\right) \\
&= \sum_{h \in G} a\left(g \cdot 1_A\right) \bar{g}e \# p_h \\
&= \sum_{h \in G} a 1_g \bar{g} \# p_h \\
&= \sum_{h \in G} a\bar{g} \# p_h,
\end{aligned}$$

ou seja, $A \star_\alpha G$ imerge em $B = A \star_\alpha G \# KG^*$ via:

$$a\bar{g} \longmapsto a\bar{g} 1_B = \sum_{h \in G} a\bar{g} \# p_h, \forall g \in G,\ \forall a \in D_g.$$

Agora, se $x \in (A *_\alpha G) \cap Ker\left(\phi\right)$ temos $x = \sum\limits_{h \in G} \left(\sum\limits_{g \in G} a_g \bar{g}\right) \# p_h$ e $\phi\left(x\right) = 0$ ou, equivalentemente, $a_g \in A\left(1_A - 1_{gh}\right) 1_g$, $\forall g, h \in G$. Em particular, se $h = e$ temos que $a_g \in A\left(1_A - 1_g\right) 1_g = 0$, $\forall g \in G$. $\square$

A seguir vamos descrever $\phi(B)$ como subálgebra de $M_n(A)$.

Seja $\gamma = \sum_{g,h\in G} a_{g,h}\bar{g}\#p_h$ um elemento qualquer de $(A\star_\alpha G)\#KG^* = B$. Então,

$$\begin{aligned}
\phi(\gamma) &= \sum_{g,h\in G} h^{-1}\cdot\left(g^{-1}\cdot a_{g,h}\right)E_{gh,h}\\
&= \sum_{g,h\in G} \left((gh)^{-1}\cdot a_{g,h}\right)1_{h^{-1}}E_{gh,h}\\
&= \sum_{g,h\in G} \left((gh)^{-1}\cdot a_{g,h}\right)1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}E_{gh,h}\\
&= \sum_{r,s\in G} \left(r^{-1}\cdot a_{rs^{-1},s}\right)1_{r^{-1}}1_{s^{-1}}E_{r,s}\\
&= \left(b_{r,s}1_{r^{-1}}1_{s^{-1}}\right)_{r,s\in G}
\end{aligned}$$

com $b_{r,s} = r^{-1}\cdot a_{rs^{-1},s}$, $\forall r,s\in G$.

Proposição 2.6 *$\phi(B) = \left\{\left(b_{g,h}1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}\right)_{g,h\in G} \mid \left(b_{g,h}\right)_{g,h\in G}\in M_n(A)\right\}$. Em particular, $\phi(B) = EM_n(A)E$, com $E = \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}E_{g,g}$ um idempotente central de $M_n(A)$.*

Demonstração: Notemos que dado $\left(b_{g,h}\right)_{g,h\in G}\in M_n(A)$ temos:

$$\begin{aligned}
E(b_{g,h})_{g,h\in G}E &= (\sum_{l\in G} 1_{l^{-1}}E_{l,l})(\sum_{g,h} b_{g,h}E_{g,h})(\sum_{k\in G} 1_{k^{-1}}E_{k,k})\\
&= \sum_{g,h,k,l\in G} b_{g,h}1_{l^{-1}}1_{k^{-1}}E_{l,l}E_{g,h}E_{k,k}\\
&= \sum_{g,h\in G} b_{g,h}1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}E_{g,h}\\
&= \left(b_{g,h}1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}\right)_{g,h\in G}.
\end{aligned}$$

Logo, do que já vimos anteriormente ao enunciado desta proposição, temos $\phi(B)\subset EM_n(A)E$.

Reciprocamente, observemos inicialmente que pela definição de ação parcial de grupo temos que $\forall g,h\in G$, $D_g\cap D_{gh} = \alpha_g\left(D_{g^{-1}}\cap D_h\right)$. Então $D_{g^{-1}}\cap D_{h^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}\left(D_g\cap D_{gh^{-1}}\right)$. Logo, dado $b\in A$ existe $a\in A$ tal que:

$$b1_{g^{-1}}1_{h^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}\left(a1_{gh^{-1}}1_g\right) = g^{-1}\cdot\left(a1_{gh^{-1}}\right)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\phi\left(a1_g1_{gh^{-1}}\left(\overline{gh^{-1}}\right)\#p_h\right) &= h^{-1}\cdot\left(\left(hg^{-1}\right)\cdot\left(a1_g1_{gh^{-1}}\right)\right)E_{g,h}\\
&= g^{-1}\cdot\left(a1_g1_{gh^{-1}}\right)1_{h^{-1}}E_{g,h}\\
&= g^{-1}\cdot\left(a1_{gh^{-1}}\right)1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}E_{g,h}\\
&= g^{-1}\cdot\left(a1_{gh^{-1}}\right)1_{h^{-1}}E_{g,h}\\
&= b1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}1_{h^{-1}}E_{g,h}\\
&= b1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}E_{g,h}.
\end{aligned}$$

Disto segue que $\forall\left(b_{g,h}\right)_{g,h\in G}\in M_n\left(A\right)$ existem $a_{g,h}\in A$, $g,h\in G$ tais que:

$$\phi\left(\sum_{g,h\in G}a_{g,h}1_g1_{gh^{-1}}\left(\overline{gh^{-1}}\right)\#p_h\right)=\sum_{g,h\in G}b_{g,h}1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}E_{g,h}=\left(b_{g,h}\right)_{g,h\in G},$$

ou seja, $\phi\left(B\right)=EM_n\left(A\right)E$. □

Observação 2.7 *Note que E é a imagem do elemento identidade de B, pois,*

$$\begin{aligned}
\phi\left(1_B\right) &= \phi\left(\sum_{h\in G}1_A\bar{e}\#p_h\right)=\sum_{h\in G}h^{-1}\cdot\left(e^{-1}\cdot 1_A\right)E_{eh,h}\\
&= \sum_{h\in G}h^{-1}\cdot\left(e\cdot 1_A\right)E_{h,h}=\sum_{h\in G}\left(h^{-1}\cdot 1_A\right)1_{h^{-1}}E_{h,h}\\
&= \sum_{h\in G}1_{h^{-1}}1_{h^{-1}}E_{h,h}=\sum_{h\in G}1_{h^{-1}}E_{h,h}=E.
\end{aligned}$$

As últimas proposições implicam nosso resultado principal nesta seção.

Teorema 2.8 *$\left(A*_\alpha G\right)\#KG^*\simeq Ker\left(\phi\right)\times EM_n\left(A\right)E$.*

Demonstração: Observemos que

$$B=(\oplus_{g,h\in G}A(1_A-1_{gh})1_g\bar{g}\#p_h)\oplus(\oplus_{g,h\in G}A1_{gh}1_g\bar{g}\#p_h)=Ker(\phi)\oplus I,$$

com $I=\oplus_{g,h\in G}A1_{gh}1_g\bar{g}\#p_h$.

Além disso I é um ideal de B pois, $\forall b\bar{k}\#p_l\in B$ e $\forall a1_{gh}1_g\bar{g}\#p_h\in I$ temos,

$\left(a1_{gh}1_g\bar{g}\#p_h\right)\left(b\bar{k}\#p_l\right)=a1_{gh}1_g\left(g\cdot b\right)\overline{gk}\#\delta_{h,kl}p_l=a1_{gh}1_g\left(g\cdot b\right)\overline{gk}\delta_{h,kl}\#p_l$

$$= a1_{gh}(g \cdot b)(gk \cdot \delta_{h,kl})\overline{gk}\#p_l = \begin{cases} 0 \in I, & \text{se } h \neq kl \\ a(g \cdot b)1_{gkl}1_{gk}\overline{gk}\#p_l \in I, & \text{se } h = kl \end{cases}$$

Analogamente,

$$\left(b\bar{k}\#p_l\right)\left(a1_{gh}1_g\bar{g}\#p_h\right) = b\left(k \cdot a1_{gh}1_g\right) = \overline{kg}\#\delta_{l,gh}p_h$$
$$= b\left(k \cdot \left(a\left(1_{k^{-1}}1_{gh}\right)\left(1_{k^{-1}}1_g\right)\right)\right)\overline{kg}\#\delta_{l,gh}p_h = b\left(k \cdot a\right)1_k 1_{kgh}1_{kg}\overline{kg}\#\delta_{l,gh}p_h$$
$$= b\left(k \cdot a\right)1_{kgh}1_{kg}\overline{kg}\delta_{l,gh}\#p_h = \begin{cases} 0 \in I, & \text{se } l \neq gh \\ b(k \cdot a)\delta_{l,gh}1_{kgh}1_{kg}\overline{kg}\#p_h \in I, & \text{se } l = gh \end{cases}$$

Finalmente, desde que $EM_n(A)E = \phi(B) = \phi(Ker\phi \bigoplus I) = \phi(I)$, temos

$$B \simeq Ker\phi \times I \simeq Ker\phi \times EM_n(A)E,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Finalizamos este capítulo mostrando que a K-álgebra $EM_n(A)E$ é em particular uma extensão separável de $\phi(A *_\alpha G) \simeq A *_\alpha G$.

Dado uma extensão de anéis $R \subseteq S$ dizemos que S é separável sobre R se existe $x = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i \in S \otimes_R S$ tal que $xs = sx$, $\forall s \in S$ e $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i = 1_S$.

É fácil ver que se $\varphi : S \longrightarrow S'$ é um homomorfismo de anéis sobrejetor e S é separável sobre R então $S' = \varphi(S)$ é separável sobre $R' = \varphi(R)$. De fato, basta observar que se $x = \sum_i x_i \otimes y_i \in S \otimes_R S$ satisfaz as condições de separabilidade $\sum_i x_i y_i = 1_S$ e $xs = sx$, $\forall s \in S$ então $x' = \sum_i \varphi(x_i) \otimes \varphi(y_i) \in S' \otimes_{R'} S'$ satisfaz condições idênticas.

Corolário 2.9 *$EM_n(A)E$ é separável sobre $\phi(A *_\alpha G) \simeq A *_\alpha G$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que B é separável sobre $A *_\alpha G$. Claramente, a multiplicação de B induz uma estrutura de D-bimódulo sobre $B = D\#(KG)^*$ e uma estrutura de B-bimódulo sobre $B \otimes_D B$.

Mostremos então que $f = \sum_{g \in G} (\bar{e}\#p_g) \otimes (\bar{e}\#p_g) \in B \otimes_D B$ satisfaz as condições necessárias para que B seja separável sobre D. De fato,

$$\sum_{g\in G}(\bar{e}\#p_g)(\bar{e}\#p_g) = \bar{e}\#\sum_{g\in G}p_g = \bar{e}\#1_{KG^*} = 1_B,$$

e desde que $\forall a \in A, h \in G$ temos

$$a\bar{h}\#p_h = (a\bar{h})\cdot(\bar{e}\#p_h),$$

$$f(a\bar{h}) = \sum_{g\in G}\bar{e}\#p_g \otimes a\bar{h}\#p_{h^{-1}g} = \sum_{g\in G}a\bar{h}\#p_{h^{-1}g}\otimes \bar{e}\#p_{h^{-1}g} = (a\bar{h})f.$$

e

$$f(\bar{e}\#p_h) = (\bar{e}\#p_h)f,$$

segue que $f\cdot b = b\cdot f$, $\forall b \in B$. $\square$

Capítulo 3

Dualidade para ação parcial de álgebras de Hopf

O nosso objetivo neste capítulo é provar o Teorema 3.1, enunciado a seguir, o qual caracteriza uma versão, no contexto de ação parcial de álgebras de Hopf, do clássico teorema de dualidade devido a R. Blattner e S. Montgomery [3].

Para o enunciado do Teorema 3.1 necessitamos de alguma preparação.

Seja (H, Δ, ϵ, S) uma K-álgebra de Hopf, livre de posto finito como K-módulo e A uma K-álgebra. Assumiremos que H age parcialmente sobre A.

Recordemos (ver seções 1.2 e 1.3) que:

(i) $A \otimes H$ tem uma estrutura de K-álgebra com multiplicação dada por:

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = \sum_i a(h_{i_1} \cdot b) \otimes h_{i_2} g,$$

$\forall a, b \in A,\ h, g \in H$ com $\Delta(h) = \sum_i h_{i_1} \otimes h_{i_2}$.

(ii) O produto smash parcial $\underline{A\#H} := (A \otimes H)(1_A \otimes 1_H)$ é a $K-$álgebra gerada pelos elementos de $A \otimes H$ da forma:

$(a \otimes h)(1_A \otimes 1_H) = \sum_i a(h_{i_1} \cdot 1_A) \otimes h_{i_2},\ \forall a \in A,\ h \in H.$

(iii) $(H^*, \Delta_*, \epsilon_*, S_*)$ é uma K-álgebra de Hopf e a antípoda S_* é bijetiva.

(iv) H é um H^*-módulo álgebra à esquerda (resp. à direita) via a ação:

$$f \rightharpoonup h = \sum_i f(h_{i_2}) h_{i_1} \quad (\text{resp.} h \leftharpoonup f = \sum_i f(h_{i_1}) h_{i_2}),$$

$\forall f \in H^*,\ h \in H$ com $\Delta(h) = \sum_i h_{i1} \otimes h_{i2}$.

(v) $A \otimes H$ e $\underline{A\#H}$ são H^*-módulos álgebra à esquerda via as respectivas ações:

$$f \rhd (a \otimes h) = a \otimes (f \rightharpoonup h) \quad \text{e}$$

$$f \rhd ((a \otimes h)1_A) = f \rhd (\sum_i a(h_{i_1} \cdot 1_A) \otimes h_{i_2}) = \sum_i a(h_{i_1} \cdot 1_A) \otimes (f \rightharpoonup h_{i_2}),$$

$\forall a \in A, h \in H$ e $f \in H^*$.

Recordemos também os seguintes homomorfismo e anti-homomorfismo de K-álgebras, respectivamente (ver Lema 1.2.9):

(i) $\lambda : H\#H^* \longrightarrow End_K(H)$ dado por:

$$\lambda(h\#f) : k \longmapsto h(f \rightharpoonup k), \forall h, k \in H, f \in H^*.$$

(ii) $\rho : H^*\#H \longrightarrow End_K(H)$ dado por:

$$\rho(f\#h) : k \longmapsto (k \leftharpoonup f)h, \forall h, k \in H, f \in H^*.$$

Finalmente, consideremos os seguintes homomorfismos de K-módulos:

(i) $\Psi : H\#H^* \longrightarrow A \otimes End_K(H)$ dada por:

$$\Psi(h\#f) = 1_A \otimes \lambda(h\#f), \forall h \in H, f \in H^*.$$

(ii) $\phi : A \longrightarrow A \otimes End_K(H)$ dada por:

$$\phi(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot a) \otimes \rho(S_*^{-1}(p_i)\#1_H), \forall a \in A.$$

(iii) $\Phi : A \otimes H\#H^* \longrightarrow A \otimes End_K(H)$ dada por:

$$\Phi(a \otimes h\#f) = \phi(a)\Psi(h\#f), \forall a \in A, h \in H, f \in H^*.$$

Agora estamos em condições de enunciar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1 *A aplicação Φ é um homomorfismo não unitário de K-álgebras e $\Phi(\underline{A\#H}\#H^*) \subset \boldsymbol{e}(A \otimes End_K(H))\boldsymbol{e}$, onde $\boldsymbol{e}$ é o idempotente de $A \otimes End_K(H)$ dado por $\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot 1_A) \otimes \rho(S_*^{-1}(p_i) \otimes 1_H)$.*

Para a demonstração deste teorema necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 3.2 *A aplicação ϕ é um homomorfismo não unitário de K-álgebras.*

Demonstração: É suficiente mostrar que ϕ é multiplicativa. E $\forall a, b \in A$ temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot (ab)) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_i)\#1_H\right) = \\
= \;& \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k,l=1}^{n} c_{k,l}^{i} (x_k \cdot a)(x_l \cdot b)\right) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_i)\#1_H\right) \\
= \;& \sum_{k,l=1}^{n} (x_k \cdot a)(x_l \cdot b) \otimes \rho\left(S_*^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{k,l}^{i} p_i\right)\#1_H\right) \\
= \;& \sum_{k,l=1}^{n} (x_k \cdot a) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_k * p_l)\#1_H\right) \\
= \;& \sum_{k,l=1}^{n} (x_k \cdot a)(x_l \cdot b) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_l) S_*^{-1}(p_k)\#1_H\right) \\
= \;& \sum_{k,l=1}^{n} (x_k \cdot a)(x_l \cdot b) \otimes \rho\left(\left(S_*^{-1}(p_l)\#1_H\right)\left(S_*^{-1}(p_k)\#1_H\right)\right) \\
= \;& \sum_{k,l=1}^{n} (x_k \cdot a)(x_l \cdot b) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_k)\#1_H\right)\rho\left(S_*^{-1}(p_l)\#1_H\right) \\
= \;& \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k \cdot a) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_k)\#1_H\right)\right)\left(\sum_{l=1}^{n} (x_l \cdot b) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_l)\#1_H\right)\right) \\
= \;& \phi(a)\,\phi(b).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3

(i) $\lambda(h\#f)\rho(g\#1_H) = \sum_s \rho(g_{s_2}\#1_H)\lambda((h \leftharpoonup S(g_{s_1}))\#f)$, $\forall h \in H$, *e*, $f, g \in H^*$.

(ii) $\phi(1_A)\Psi(h\#f)\phi(a) = \sum_i \phi(h_{i_1} \cdot a)\Psi(h_{i_2}\#f)$, $\forall a \in A$, $h \in H$, $f \in H^*$.

Demonstração:

(i) Primeiro mostramos que

$\rho(f\#1_H)\,\lambda(k\#1_{H^*}) = \sum_t \lambda((k \leftharpoonup f_{t_1})\#1_{H^*})\,\rho(f_{t_2}\#1_H)$, $\forall k \in H$.

De fato, $\forall m \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
\left(\rho\left(f\#1_H\right)\lambda\left(k\#1_{H^*}\right)\right)(m) &= \rho\left(f\#1_H\right)\left(\lambda\left(k\#1_{H^*}\right)(m)\right)\\
&= \rho\left(f\#1_H\right)\left(k\left(1_{H^*}\rightharpoonup m\right)\right)\\
&= \rho\left(f\#1_H\right)(km) = \left((km)\leftharpoonup f\right)1_H\\
&= (km)\leftharpoonup f = \sum_i (km)_{i_2} f\left((km)_{i_1}\right)\\
&= \sum_{j,l} k_{j_2}m_{l_2}f\left(k_{j_1}m_{l_1}\right)\\
&= \sum_{j,l,t} k_{j_2}m_{l_2}f_{t_1}\left(k_{j_1}\right)f_{t_2}\left(m_{l_1}\right)\\
&= \sum_{j,l,t} k_{j_2}f_{t_1}\left(k_{j_1}\right)m_{l_2}f_{t_2}\left(m_{l_1}\right)\\
&= \sum_t \left(k\leftharpoonup f_{t_1}\right)\left(m\leftharpoonup f_{t_2}\right)\\
&= \sum_t \lambda\left(\left(k\leftharpoonup f_{t_1}\right)\#1_{H^*}\right)\rho\left(f_{t_2}\#1_H\right)(m).
\end{aligned}$$

Agora, aplicando este resultado obtido acima temos que:

$$\begin{aligned}
&\sum_s \rho\left(g_{s_2}\#1_H\right)\lambda\left(h\leftharpoonup Sg_{s_1}\#1_{H^*}\right) =\\
=\ &\sum_{s,q} \lambda\left(\left(\left(h\leftharpoonup Sg_{s_1}\right)\leftharpoonup \left(g_{s_2}\right)_{q_1}\right)\#1_{H^*}\right)\rho\left(\left(g_{s_2}\right)_{q_2}\#1_H\right).
\end{aligned}$$

Vale $\sum_{s,q} \lambda\left(\left(\left(h\leftharpoonup Sg_{s_1}\right)\leftharpoonup \left(g_{s_2}\right)_{q_1}\right)\#1_{H^*}\right)\rho\left(\left(g_{s_2}\right)_{q_2}\#1_H\right) = \lambda\left(h\#1_{H^*}\right)\rho\left(g\#1_H\right).$ De fato,

$$\begin{aligned}
\lambda\left(h\#1_{H^*}\right)\rho\left(g\#1_H\right)(k) &= \lambda\left(h\#1_{H^*}\right)\left(\rho\left(g\#1_H\right)(k)\right)\\
&= \lambda\left(h\#1_{H^*}\right)\left(\left(k\leftharpoonup g\right)1_H\right)\\
&= \lambda\left(h\#1_{H^*}\right)\left(k\leftharpoonup g\right)\\
&= \lambda\left(h\#1_{H^*}\right)\left(\sum_j k_{j_2}g\left(k_{j_1}\right)\right)\\
&= \sum_j g\left(k_{j_1}\right)\lambda\left(h\#1_{H^*}\right)\left(k_{j_2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_j g(k_{j_1})\, h(1_{H^*} \rightharpoonup k_{j_2}) \\
&= \sum_{j,r} g(k_{j_1})\, h\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s,q} \lambda\left(\left((h \leftharpoonup Sg_{s_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right) \# 1_{H^*}\right) \rho\left((g_{s_2})_{q_2} \# 1_H\right)(k) = \\
&= \sum_{s,q} \lambda\left(\left((h \leftharpoonup Sg_{s_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right) \# 1_{H^*}\right) \left(\rho\left((g_{s_2})_{q_2} \# 1_H\right)(k)\right) \\
&= \sum_{s,q} \lambda\left(\left((h \leftharpoonup Sg_{s_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right) \# 1_{H^*}\right) \left(k \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_2}\right) \\
&= \sum_{s,q,j} \lambda\left(\left((h \leftharpoonup Sg_{s_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right) \# 1_{H^*}\right) \left(k_{j_2} (g_{s_2})_{q_2}(k_{j_1})\right) \\
&= \sum_{s,q,j} (g_{s_2})_{q_2}(k_{j_1})\, \lambda\left(\left((h \leftharpoonup Sg_{s_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right) \# 1_{H^*}\right)(k_{j_2}) \\
&= \sum_{s,q,j} (g_{s_2})_{q_2}(k_{j_1}) \left((h \leftharpoonup Sg_{s_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right)(1_{H^*} \rightharpoonup k_{j_2}) \\
&= \sum_{s,q,j,r} (g_{s_2})_{q_2}(k_{j_1}) \left((h \leftharpoonup Sg_{s_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right)\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,q,r,s} (g_{s_2})_{q_2}(k_{j_1}) \left(h_{i_2} Sg_{s_1}(h_{i_1}) \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right)\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,q,r,s} (g_{s_2})_{q_2}(k_{j_1})\, Sg_{s_1}(h_{i_1}) \left(h_{i_2} \leftharpoonup (g_{s_2})_{q_1}\right)\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,p,q,r,s} (g_{s_2})_{q_2}(k_{j_1})\, Sg_{s_1}(h_{i_1}) \left(h_{i_2}\right)_{p_2} (g_{s_2})_{q_1}\left(\left(h_{i_2}\right)_{p_1}\right)\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,p,q,r,s} (g_{s_2})_{q_1}\left(k_{j_1}\left(h_{i_2}\right)_{p_1}\right) Sg_{s_1}(h_{i_1}) \left(h_{i_2}\right)_{p_2}\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,p,q,r,s} (g_{s_2})_{q_1}\left(k_{j_1}\left(h_{i_2}\right)_{p_1}\right) g_{s_1}\left(S(h_{i_1})\right) \left(h_{i_2}\right)_{p_2}\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,p,r} g\left(k_{j_1}\left(h_{i_2}\right)_{p_1} S(h_{i_1})\right) \left(h_{i_2}\right)_{p_2}\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,p,r} g(k_{j_1})\, g\left(\left(h_{i_2}\right)_{p_1} S(h_{i_1})\right) \left(h_{i_2}\right)_{p_2}\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right) \\
&= \sum_{i,j,p,r} g(k_{j_1})\, g\left(\left(h_{i_1}\right)_{p_2} S\left(h_{i_1}\right)_{p_1}\right) h_{i_2}\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,r} g\left(k_{j_1}\right) g\left(\epsilon\left(h_{i_1}\right) 1_H\right) h_{i_2}\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right)\\
&= \sum_{i,j,r} g\left(k_{j_1}\right) g\left(1_H\right) \epsilon\left(h_{i_1}\right) h_{i_2}\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right)\\
&= \sum_{i,j,r} g\left(k_{j_1}\right) h\left(k_{j_2}\right)_{r_1} 1_{H^*}\left(\left(k_{j_2}\right)_{r_2}\right).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\lambda\left(1_H \# f\right) \rho\left(1_{H^*} \# k\right)=\sum_t \rho\left(1_{H^*} \#\left(f_{t_2} \rightharpoonup k\right)\right) \lambda\left(1_H \# f_{t_1}\right).$$

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(1_H \# f\right) \rho\left(1_{H^*} \# k\right)(m)= \\
&= \lambda\left(1_H \# f\right)\left(\rho\left(1_{H^*} \# k\right)(m)\right)\\
&= \lambda\left(1_H \# f\right)\left(m \leftharpoonup 1_{H^*}\right) k\\
&= \lambda\left(1_H \# f\right)\left(\sum_i m_{i_2} 1_{H^*}\left(m_{i_1}\right) k\right)\\
&= \sum_i \lambda\left(1_H \# f\right)\left(m_{i_2} k\right) 1_{H^*}\left(m_{i_1}\right)\\
&= \sum_i 1_H\left(f \rightharpoonup m_{i_2} k\right) 1_{H^*}\left(m_{i_1}\right)\\
&= \sum_i\left(f \rightharpoonup m_{i_2} k\right) 1_{H^*}\left(m_{i_1}\right) \sum_{i,j}\left(m_{i_2} k\right)_{j_1} f\left(\left(m_{i_2} k\right)_{j_2}\right) 1_{H^*}\left(m_{i_1}\right)\\
&= \sum_{i,j,t}\left(m_{i_2}\right)_{j_1} k_{j_1} f_{t_1}\left(\left(m_{i_2}\right)_{j_2}\right) f_{t_2}\left(k_{j_2}\right) 1_{H^*}\left(m_{i_1}\right).
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
&\sum_t \rho\left(1_{H^*} \#\left(f_{t_2} \rightharpoonup k\right)\right) \lambda\left(1_H \# f_{t_1}\right)(m)= \\
&= \sum_t \rho\left(1_{H^*} \#\left(f_{t_2} \rightharpoonup k\right)\right) 1_H\left(f_{t_1} \rightharpoonup m\right)\\
&= \sum_t \rho\left(1_{H^*} \#\left(f_{t_2} \rightharpoonup k\right)\right)\left(f_{t_1} \rightharpoonup m\right)\\
&= \sum_t \rho\left(1_{H^*} \#\left(f_{t_2} \rightharpoonup k\right)\right) \sum_{i,t} m_{i_1} f_{t_1}\left(m_{i_2}\right)\\
&= \sum_{i,t} \rho\left(1_{H^*} \#\left(f_{t_2} \rightharpoonup k\right)\right)\left(m_{i_1}\right) f_{t_1}\left(m_{i_2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,t} (m_{i_1} \leftharpoonup 1_{H^*}) (f_{t_2} \rightharpoonup k) f_{t_1} (m_{i_2})$$
$$= \sum_{i,j,t} (m_{i_1})_{j_2} 1_{H^*} \left((m_{i_1})_{j_1}\right) k_{j_1} f_{t_2} (k_{j_2}) f_{t_1} (m_{i_2}).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lambda (h\#f) \rho (g\#1_H) &= \lambda (h\#1_{H^*}) \lambda (1_H\#f) \rho (g\#1_H) \\
&= \lambda (h\#1_{H^*}) \rho (g\#1_H) \lambda (1_H\#f) \\
&= \sum_{q,s} \rho ((g_{s_2})_{q_1}\#1_H) \lambda (h \leftharpoonup Sg_{s_1}\#1_{H^*}) \lambda (1_H\#f) \\
&= \sum_{q,s} \rho ((g_{s_2})_{q_1}\#1_H) \lambda (h \leftharpoonup Sg_{s_1}\#f).
\end{aligned}$$

(ii) Vamos mostrar que a igualdade vale para os elementos básicos, isto é, se $\Delta (x_k) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j}^{k} x_i \otimes x_j$ então $\phi (1) \Psi (x_k\#f) \phi (a) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j}^{k} \phi (x_i \cdot a) \Psi (x_j\#f)$. Sejam $\Delta (x_l) = \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{l} x_s \otimes x_t$, $x_t x_i = \sum_{r=1}^{n} m_{t,i}^{r} x_r$, $\Delta (p_r) = \sum_{t,i=1}^{n} m_{t,i}^{r} p_t \otimes p_i$, temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j}^{k} \phi (x_i \cdot a) \Psi (x_j\#f) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j}^{k} \left[\sum_{l=1}^{n} (x_l \cdot (x_i \cdot a)) \otimes \rho \left(S_*^{-1} (p_l) \#1_H\right)\right] [1_A \otimes \lambda (x_j\#f)] \\
&= \sum_{i,j,l=1}^{n} c_{i,j}^{k} (x_l \cdot (x_i \cdot a)) \otimes \rho \left(S_*^{-1} (p_l) \#1_H\right) \lambda (x_j\#f) \\
&= \sum_{i,j,l=1}^{n} (x_l \cdot (x_i \cdot a)) \otimes \rho \left(S_*^{-1} (p_l) \#1_H\right) \lambda \left(c_{i,j}^{k} x_j p_i (x_i) \#f\right) \\
&= \sum_{i,l=1}^{n} (x_l \cdot (x_i \cdot a)) \otimes \rho \left(S_*^{-1} (p_l) \#1_H\right) \lambda ((x_k \leftharpoonup p_i) \#f) \\
&= \sum_{i,l=1}^{n} \sum_{s,t=1}^{n} c_{s,t}^{l} (x_s \cdot 1_H) (x_t x_i \cdot a) \otimes \rho \left(S_*^{-1} (p_l) \#1_H\right) \lambda ((x_k \leftharpoonup p_i) \#f) \\
&= \sum_{i,l,s,t=1}^{n} (x_s \cdot 1_H) (x_t x_i \cdot a) \otimes \rho \left(S_*^{-1} \left(c_{s,t}^{l} p_l\right) \#1_H\right) \lambda ((x_k \leftharpoonup p_i) \#f)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,s,t=1}^{n} (x_s \cdot 1_H)(x_t x_i \cdot a) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_s * p_t)\#1_H\right)\lambda\left((x_k \leftharpoonup p_i)\#f\right) \\
&= \sum_{i,r,s,t=1}^{n} (x_s \cdot 1_H)(x_r \cdot a) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_s * p_t)\#1_H\right)\lambda\left((x_k \leftharpoonup p_i)\#f\right) \\
&= \sum_{i,r,s,t=1}^{n} m_{t,i}^{r}(x_s \cdot 1_H)(x_r \cdot a) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_s)\#1_H\right) \\
&\quad \rho\left(S_*^{-1}(p_t)\#1_H\right)\lambda\left((x_k \leftharpoonup p_i)\#f\right) \\
&= \sum_{i,r,s,t=1}^{n} \left[(x_s \cdot 1_H) \otimes \rho\left(S_*^{-1}(p_s)\#1_H\right)\right] \\
&\quad \left[(x_r \cdot a) \otimes m_{t,i}^{r}\rho\left(S_*^{-1}(p_t)\#1_H\right)\lambda\left((x_k \leftharpoonup p_i)\#f\right)\right] \\
&= \phi(1)\sum_{i,r,t=1}^{n} (x_r \cdot a) \otimes \rho\left(S_*^{-1}\left(m_{t,i}^{r}p_t\right)\#1_H\right)\lambda\left((x_k \leftharpoonup p_i)\#f\right) \\
&= \phi(1)\sum_{i,r,t=1}^{n} (x_r \cdot a) \otimes \rho\left(S_*^{-1}\left(m_{i,t}^{r}p_i\right)\#1_H\right)\lambda\left(x_k \leftharpoonup \left(S_*\left(S_*^{-1}(p_t)\right)\right)\#f\right) \\
&= \phi(1)\sum_{r=1}^{n} (x_r \cdot a) \otimes \lambda(x_k\#f)\,\rho\left(S_*^{-1}(p_r)\#1_H\right) \\
&= \phi(1)\,\Psi(x_k\#f)\,\phi(a).
\end{aligned}
$$

□

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1. Para qualquer $a, b \in A$, $h, k \in H$ e $f, g \in H^*$ temos:

Para qualquer $a, b \in A$, $h, k \in H$ e $f, g \in H^*$ temos:

$$
\begin{aligned}
\Phi(a \otimes h\#f)\,\Phi(b \otimes k\#g) &= \phi(a)\,\psi(h\#f)\,\phi(b)\,\psi(k\#g) \\
&= \phi(a)\,\phi(1)\,\psi(h\#f)\,\phi(b)\,\psi(k\#g) \\
&= \sum_i \phi(a)\,\phi(h_{i_1} \cdot b)\,\psi(h_{i_2}\#f)\,\psi(k\#g) \\
&= \sum_i \phi(a(h_{i_1} \cdot b))\,\psi((h_{i_2}\#f)(k\#g)) \\
&= \sum_{i,t} \phi(a(h_{i_1} \cdot b))\,\psi(h_{i_2}(f_{t_1} \rightharpoonup k)\#f_{t_2} * g)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi\left(\sum_{i,t} a\left(h_{i_1}\cdot b\right)\otimes h_{i_2}\left(f_{t_1}\rightharpoonup k\right)\#f_{t_2}*g\right)\\
&= \Phi((a\otimes h)(b\otimes (f_{t_1}\rightharpoonup k))\#f_{t_2}*g)\\
&= \Phi((a\otimes h)(f_{t_1}\triangleright (b\otimes k))\#f_{t_2}*g)\\
&= \Phi\left(\left(a\otimes h\#f\right)\left(b\otimes k\#g\right)\right).
\end{aligned}$$

Logo, Φ é um homomorfismo de K-álgebras. Além disso temos que

$$\begin{aligned}
\Phi\left(1_{\underline{A\#H}\#H^*}\right) &= \Phi\left(1_A\#1_H\#1_{H^*}\right)\\
&= \phi\left(1_A\right)\psi\left(1_H\#1_{H^*}\right)\\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot 1_A\right)\otimes\rho\left(S_*^{-1}\left(p_i\right)\#1_H\right)\right]\left[1_A\otimes\lambda\left(1_H\#1_{H^*}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i\cdot 1_A\right)1_A\otimes\rho\left(S_*^{-1}\left(p_i\right)\#1_H\right)\lambda\left(1_H\#1_{H^*}\right)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot 1_A\right)\otimes\rho\left(S_*^{-1}\left(p_i\right)\#1_H\right)\lambda\left(1_{H\#H^*}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot 1_A\right)\otimes\rho\left(S_*^{-1}\left(p_i\right)\#1_H\right)1_{End_K(H)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot 1_A\right)\otimes\rho\left(S_*^{-1}\left(p_i\right)\#1_H\right)=\mathbf{e}.
\end{aligned}$$

e, por conseguinte, $\mathbf{e}$ é um idempotente. Finalmente, $\forall\gamma\in\underline{A\#H}\#H^*$ temos $\Phi\left(\gamma\right)=\Phi\left(1_{\underline{A\#H}\#H^*}\gamma 1_{\underline{A\#H}\#H^*}\right)=\mathbf{e}\Phi\left(\gamma\right)\mathbf{e}\in\left(A\otimes End_K\left(H\right)\right)\mathbf{e}$. $\square$

Referências

[1] D. Bagio, W. Cortes, M. Ferrero and A. Paques, *Actions of inverse semigroups on algebras*, Comm. Algebra 35 (2007), 3865-3874.

[2] D. Bagio, J. Lazzarin and A. Paques, *Crossed products by twisted partial actions: separability, semisimplicity and Frobenius properties*, preprint.

[3] R.J. Blattner and S. Montgomery, *A duality theorem for Hopf module algebras*, J. Algebra 95 (1985), 153-172.

[4] S. Caenepeel and E. De Groot, *Galois corings applied to partial Galois theory*, Proc. ICMA-2004, Kuwait Univ. (2005), 117-134.

[5] S. Caenepeel and K. Janssen, *Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Galois theory*, Comm. Algebra 36 (2008), 2923-2946.

[6] W. Cortes and M. Ferrero, *Partial skew polynomial rings: prime and maximals ideals*, Comm. Algebra 35 (2007), 1183-1199.

[7] W. Cortes, M. Ferrero and H. Marubayashi, *Partial skew polynomial rings and Goldie rings*, preprint.

[8] M. Cohen and S. Montgomery, *Group-graded rings, smash products, and group actions*, Trans. AMS 282 (1984), no. 1, 237-258.

[9] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. AMS 357 (2005), 1931-1952.

[10] M. Dokuchaev, R. Exel, and P. Piccione, *Partial representations and partial group algebra*, J. Algebra 226 (2000), 251-268.

[11] M. Dokuchaev, R. Exel and J.J. Simón, *Crossed products by twisted partial actions and graded algebras*, preprint.

[12] ———, *Globalization of twisted partial actions*, preprint.

[13] M. Dokuchaev, M. Ferrero and A. Paques, *Partial actions and Galois theory*, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 77-87.

[14] M. Dokuchaev and C. Polcino Milies, *Isomorphisms of partial group rings*, Glasg. Math. J. 46 (2004), 161-168.

[15] M. Dokuchaev, A. del Rio and J.J. Simón, *Globalizations of partial actions on non unital rings*, Proc. AMS 135 (2007), 343-352.

[16] M. Dokuchaev and N. Zhukavets, *On finite degree partial representations of groups*, J. Algebra 274 (2004), 309-334.

[17] R. Exel, *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences*, J. Funct. Anal. 122 (1994), 361-401.

[18] M. Ferrero, *Partial actions of groups on semiprime rings, in Groups, Rings and Group Rings*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 248, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2006), 155-162.

[19] M. Ferrero and J. Lazzarin, *Partial actions and partial skew group rings*, J. Algebra (to appear).

[20] M. A. Knus and M. Ojanguren, *Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya*, DLNM 389, Springer Verlag, 1974.

[21] C. Lomp, *Duality for partial group actions*, arXiv: 07110849v1[math.RA], 2007.

[22] R. G. Larson and E. Sweedler, *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*, J. Amer. Math. Soc. 91 (1969), 75-93.

[23] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS 82, 1992.

[24] B. R. MacDonald, *Linear Algebra over Comutative Rings*, Pure and Applied Mathematics 87, Marcel Dekker, 1984.

[25] A. Sant'Ana and A. Paques, *When is a smash product by a twisted partial action Azumaya?*, preprint.