UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COMPACTIFICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM ESPAÇOS SIMÉTRICOS DE TIPO NÃO COMPACTO

FÉLIX NIETO CACAIS

PORTO ALEGRE, ABRIL DE 2017

Dissertação submetida por Félix Nieto Cacais [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos (PPGMat-UFRGS)

Profa. Dra. Patrícia Kruse Klaser (PPGMat-UFRGS)

Prof. Dr. Samuel Volkweis Leite (UFRGS)

Profa. Dra. Miriam Telichevesky (Orientadora, PPGMat-UFRGS)

Data de Defesa: 05/04/2017.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CNPq).

Agradecimentos

Primeiro quero agradecer ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS pela acolhida e a CNPq (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo incentivo financeiro, à professora Miriam Telichevesky por não apenas ter-me orientado, senão por ser a responsável da maior parte da minha formação como mestre, pois foi minha professora durante todo o mestrado.

También quiero dar gracias a Dios por su generosidad a lo largo de mi vida y por esta oportunidad. Igualmente agradezco a mi familia por el apoyo incondicional en todos los años que he dedicado a mi formación, en especial a mi madre Doris Maria Cacais Caleño y mi padre Ernesto Nieto porque han sido (serán) mi motivación día tras día.

Por supuesto quiero dar gracias a mi compañera, mi amiga, mi novia... Natalia Vanessa Ramirez Peña. Han pasado ya muchos años desde que a partir de un café pensamos en que era posible estudiar juntos fuera de nuestro país, ahora ese pensamiento "utópico" superó la realidad y nos muestra un futuro que no es menos fácil, pero que nuestras manos juntas muy unidas, continuarán construyendo.

Resumo

Neste trabalho estudaremos alguns resultados propostos por Benoit Kloeckner [Kl2] em sua tese de doutorado. Apresentamos principalmente a prova da não-existência de compactificações diferenciáveis de Hadamard em espaços simétricos de tipo não-compacto de posto $k \geq 2$.

Palavras-chave: Variedades de Hadamard; Bordo assintótico; Espaço simétrico; Posto; Compactificações diferenciáveis de Hadamard.

Abstract

In this dissertation we will study some results proposed by Benoit Kloeckner [Kl2] in his doctoral thesis. We mainly present the proof of non-existence of diferentiable Hadamard compactifications in symmetric spaces of noncompact type of rank ≥ 2.

Keywords: Hadamard manifolds; Asymptotic boundary; Symmetric space; Rank; Differentiable Hadamard compactification.

Sumário

Introdução

No final do século dezenove e começo do vinte são bem conhecidos os avanços na geometria Riemanniana, tais avanços têm permitido o desenvolvimento de campos de pesquisa como as variedades de curvatura negativa, as quais são um dos eixos fundamentais na geometria e sua constante evolução. Neste sentido vale a pena mencionar como exemplo o teorema de Hadamard:

Teorema 0.0.1 (Teorema de Hadamard)**.** *Seja M variedade Riemanniana completa simplesmente conexa com curvatura seccional $k \leqslant 0$. Então M é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.*

Nas variedades que satisfazem as hipóteses deste teorema (são ditas de Hadamard) é possível definir um bordo assintótico $M(\infty)$ para M, ademais também é possível dar à união $M \cup M(\infty)$ uma estrutura de espaço topológico compatível com a estrutura de M, tal espaço topológico é homeomorfo a uma bola unitária, ou seja, o bordo gera uma compactificação topológica de M. A variedade gerada pela união poderia ter uma estrutura de ordem de diferenciabilidade superior a zero, como na proposição:

Proposição 0.0.1. *Se M é uma variedade de Hadamard satisfazendo $-b^2 \leqslant k_M \leqslant -a^2 < 0$, então $M \cup M(\infty)$ admite uma estrutura de classe Hölder $C^{\frac{a}{b}}$.*

Mas mesmo neste caso a compactificação ainda pode não ter estrutura diferenciável, e descobrir tal aspecto parece não trivial.

Portanto, neste trabalho estudaremos alguns resultados propostos por Benoit Kloeckner [Kl2] em sua tese de doutorado. Benoit Kloeckner apresenta uma definição de compactificação diferenciável, mas como foi mencionado anteriormente provar isto parece ser não trivial, de fato o objetivo principal da dissertação é apresentar a prova do teorema:

Teorema 0.0.2. *Seja M um espaço simétrico de tipo não compacto de posto $k \geqslant 2$, então M não admite compactificação diferenciável de Hadamard.*

Este, por sua vez, precisamente garante não existência de compactificações diferenciáveis.

Assim, o primeiro capítulo do trabalho vai abarcar noções fundamentais da geometria Riemanniana, especialmente aquelas permitem uma compreensão do Teorema de Hadamard. No final do capítulo, vamos mostrar as definições de bordo assintótico e suas consequências, em seguida vamos fornecer uma prova do Teorema 1.3.3 que diz que o bordo $M(\infty)$ gera uma compactificação topológica.

Para o segundo capítulo faremos uma apresentação de grupos de Lie, álgebras de Lie e representações de grupos, tais conceitos são muito importantes no momento da prova do teorema central, particularmente o Teorema 2.3.1.

Tal como foi indicado no teorema central, a não existência está garantida para espaços simétricos de tipo não compacto de posto $k \geqslant 2$. Assim no Capítulo 3 definiremos espaços simétricos de tipo não compacto e posto, junto com uma ideia das provas das Proposições 3.2.2 e 3.2.5 vitais para a construção de building dos próximos capítulos. Para concluir o capítulo na última seção faremos uma breve apresentação da classificação dos espaços simétricos de tipo não compactos com posto um.

Finalmente nos capítulos quarto e quinto apresentaremos a prova do teorema central. Dita prova será ordenada da seguinte maneira: em princípio definiremos compactificação diferenciável, posteriormente provaremos que $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ não admite compactificações diferenciáveis (é importante ressaltar que a ideia desta prova é a mesma do teorema central) logo, no começo do último capítulo vai-se generalizar este resultado no Teorema 5.0.1, onde $\mathbb{H}^2$ é trocado por um espaço simétrico de tipo não compacto com posto um. Deixamos a ultima seção do último capítulo apenas para provar o Teorema Central 5.1.1.

Capítulo 1

Teorema de Hadamard e bordo assintótico

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados fundamentais da geometria Riemanniana, principalmente aqueles que permitem a compreensão do Teorema de Hadamard-Cartan. O leitor familiarizado com aspectos básicos da geometria Riemanniana pode começar a leitura na seção 1.3.

1.1 Geodésicas e aplicação exponencial

Para iniciar assumiremos que M é uma variedade diferenciável com uma métrica $\langle \, , \rangle$, e denotaremos por T_pM o espaço tangente a M em $p \in M$. Os resultados que seguem são bem conhecidos, e suas demonstrações podem ser encontradas em [Do1].

Definicão 1.1.1. *Um campo de vetores X em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$.*

Como os vetores são definidos agindo em funções diferenciáveis, então faz sentido pensar o campo agindo em funções

$$\begin{aligned} X : D(M) &\longrightarrow \ \mathfrak{F}(M) \\ f &\longmapsto \ X(f) \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{F}(M)$ é o conjunto das funções em M e $D(M)$ as funções diferenciáveis, também:

$$\begin{aligned} X(f) : M &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \ X(p)(f) \end{aligned}$$

em outras palavras, $(X(f))(p) = X(p)(f)$. Se $X(f) \in D(M)$ para todo $f \in D(M)$, então X é dito diferenciável. Notaremos o conjunto dos campos diferenciáveis por $\mathfrak{X}(M)$.

Observação: Na anterior definição estamos assumindo que o leitor esta familiarizado com os conceitos de diferenciabilidade em variedades diferenciáveis.

Proposição 1.1.1. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Existe um único $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que:*

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para todo $f \in D(M)$.

Definicão 1.1.2. *O campo de vetores Z dado pela proposição de acima é chamado o colchete de X por Y, denotado por $[X, Y]$.*

Observação: se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Na seguinte definição vamos a apresentar o que é conhecido como a generalização da primeira forma fundamental da Geometria Diferencial em variedades diferenciáveis.

Definicão 1.1.3. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um produto interno:*

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

que varia diferenciavelmente com o ponto, ou seja, se U é uma vizinhança de p e $x : U \to M$ é parametrização, as funções:

$$\begin{aligned} g_{ij} : U &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \quad \langle \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \rangle_{x(q)}, \end{aligned}$$

são diferenciáveis em U.

Usando o fato que as mudanças de coordenadas são difeomorfismos é possível provar que a definição de diferenciabilidade independe do sistema de coordenadas.

Definicão 1.1.4. *Uma variedade diferenciável dotada de uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana.*

Definicão 1.1.5. *Sejan M, N variedades Riemannianas e $\varphi : M \to N$ um difeomorfismo global. φ é dito isometria se,*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle (d\varphi)_p(u), (d\varphi)_p(v) \rangle_{\varphi(p)}, \ \forall p \in M, \forall u, v \in T_pM.$$

Neste caso, M e N são ditas isométricas e, no contexto da geometria Riemanniana, são a mesma variedade.

Do mesmo modo se φ é um difeomorfismo local em $p \in M$, é dito isometria local em p, se exite uma vizinhança V de p tal que $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ é isometria global. Se para todo $p \in M$ temos que φ é uma isometria local, então M é dita localmente isométrica a N.

Agora vamos a apresentar uma definição que permite obter uma "derivada" de campos ao longo de uma curva c, obtendo outo campo ao longo de c.

Definicão 1.1.6. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão afim em M é uma aplicação:*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \qquad \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \quad \nabla(X, Y) = \nabla_X Y, \end{aligned}$$

satisfazendo:

i . $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii . $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii . $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* f, g *são funções diferenciáveis em* M.

Um fato importante é que $(\nabla_X Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e de como Y se comporta ao longo de uma curva que passa por p e que tenha a $X(p)$ como tangente em p.

Proposição 1.1.2. *Seja* M *uma variedade diferencial com uma conexão afim* ∇. *Existe uma única aplicação* $\frac{D}{dt}$ *(chamada derivada covariante) que associa a cada campo* V *ao longo da curva* $c: I \to M$ *um único campo* $\frac{DV}{dt}$ *satisfazendo:*

i . $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

ii . *Se* $f: I \to \mathbb{R}$ *é diferenciável,*

$$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}.$$

iii . *Se* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $Y(c(t)) = V(t)$ *(*Y *é extensão de* V*), então*

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}Y.$$

Definicão 1.1.7. *Seja* M *uma variedade diferenciável:*

i . *Se* V *é um campo ao longo de uma curva* $c: I \to M$ *tal que* $\frac{DV}{dt} \equiv 0$, *então* V *é dito paralelo ao longo de* c.

ii . Se M é variedade Riemanniana, uma conexão afim em M é compatível com a métrica se para todo par V, W de campos paralelos ao longo de c vale:

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = 0$$

.

iii . Uma conexão afim em M é dita simétrica se:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 1.1.1 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim simétrica compatível com a métrica.*

A conexão do anterior teorema é chamada a conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana.

Para a próxima definição ∇ será a conexão de Levi-Civita e $\frac{D\gamma'}{dt}$ é a derivada covariante do campo γ' ao longo da curva γ.

Definicão 1.1.8. *Seja M uma variedade Riemanniana e $\gamma : I \to M$ uma curva. γ é dita geodésica se $\gamma'(t)$ é um campo paralelo ao longo de γ, ou seja,*

$$\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0, \forall t \in I.$$

Proposição 1.1.3. *Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existem $\epsilon > 0$ e uma única geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

Se $v \in T_pM$, vamos denotar por γ_v a única geodésica de M que passa por $p \in M$ com velocidade v.

Seja $U = \{v \in T_pM : \gamma_v \ esta \ definida \ num \ intervalo \ contendo \ [0, 1]\}$.

Definicão 1.1.9. *A aplicação* $exp_p : U \to M$ *definida por* $exp_p(v) := \gamma_v(1)$ *(*γ_v *é a única geodésica de* M *que passa por* $p \in M$ *com velocidade* v *no tempo zero), é denominada aplicação exponencial.*

É possível mostrar que exp_p é diferenciável, $exp_p(0) = p$, e também que para cada $v \in T_pM$, a geodésica γ_v é dada por $\gamma_v(t) = exp_p(tv)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.1.4. *Dado* $p \in M$, *exite* $\epsilon > 0$ *tal que,* $exp_p : B(0, \epsilon) \subseteq T_pM \to M$ *é um difeomorfismo de* $B(0, \epsilon)$ *sobre um aberto de* M.

1.2 Curvatura

Nesta seção tem como objetivo dar o conceito de curvatura seccional, um dos mais importantes na geometria Riemanniana.

Definicão 1.2.1. *O tensor de curvatura numa variedade Riemanniana é uma correspondência que associa a cada par de campos* X, Y *uma aplicação* $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dada por;*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

Observação: $(R(X, Y)Z)(p)$ depende apenas de $X(p), Y(p), Z(p)$. Assim dado $p \in M$ e $x, y, z \in T_pM$ calcular $R(x, y)z = (R(X, Y)Z)(p)$ para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, com $X(p) = x$, $Y(p) = y$, $Z(p) = z$.

Proposição 1.2.1. *Sejam* $p \in M$ *e* $\sigma \subseteq T_pM$ *um subespaço de dimensão dois. Então,*

$$k(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

independe da escolha de $\{x, y\}$ *base de* σ.

Esta proposição permite obter uma boa definição de curvatura seccional, que pretende generalizar a curvatura de Gauss da Geometria Diferencial. Precisamente quando temos variedades ou subvariedades de dimensão dois a curvatura seccional e de Gauss coincidem.

Definicão 1.2.2. *Sejam M variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\sigma \subseteq T_pM$ subespaço bidimensional. A curvatura seccional de M segundo σ é $k_p(\sigma) := k(x, y)$ onde $\{x, y\}$ é base de $\sigma \subseteq T_pM$.*

Observação: é comum, em geometria, encontrar resultados que envolvem hipóteses na curvatura seccional k, muitos destes são resultados topológicos.

Definicão 1.2.3. *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. Um campo J é dito campo de Jacobi se J satisfaz,*

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \ \forall\, t \in [o, a]$$

A equação de acima é conhecida como a equação de Jacobi, é linear de segundo ordem e suas soluções estão determinadas pelas condições iniciais $J(0) = 0$, $\frac{DJ}{dt}(0)$. Assim existem $2n$ soluções linearmente independentes ao longo de γ.

Observação: para facilitar a notação denotaremos a $\frac{DJ}{dt}(t)$ e $\frac{D^2J}{dt^2}(t)$ por $J'(t)$ e $J''(t)$ respectivamente.

Proposição 1.2.2. *Sejam $\gamma : [0, a] \to M$ geodésica normalizada e J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$, então $J(t) = d(exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0))$.*

Dada $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. $\gamma(t_0)$ com $t_0 \in [0, a]$, é dito ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ se existe um campo de Jacobi J não nulo ao longo de γ, tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$.

Uma das maiores importâncias da existência dos pontos conjugados ao longo de uma geodésica γ, é que eles implicam a existência de pontos críticos na aplicação exponencial. Igualmente a não existência implica que aplicação exponencial define un difeomorfismo local. Isto é porque os campos de Jacobi que se anulam tem uma forma explicita.

De acordo com a expansão de Taylor dos campos de Jacobi da Proposição 2.7 e o Corolário 2.9 do capítulo V de [Do1] pode-se concluir o seguinte corolário.

Corolario 1.2.1. *Se $k \leqslant 0$, nenhuma geodésica tem pontos conjugados.*

Como consequência, se $k \leqslant 0$ então exp_p é um difeomorfismo local.

1.3 Teorema de Hadamard-Cartan e bordo assintótico

Nesta seção vamos a apresentar o Teorema de Hadamard, para isso começaremos com a definição de variedade Riemanniana completa.

Definicão 1.3.1. *Uma variedade Riemanniana M é dita completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, exp_p, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.3.1 (Teorema de Hadamard)**.** *Seja M variedade Riemanniana completa simplesmente conexa com curvatura seccional $k \leqslant 0$. Então M é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.*

Como M não tem pontos conjugados pelo Corolário 1.2.1 e $p \in M$, então exp_p é um difeomorfismo local. Assim, a prova do teorema de Hadamard, consiste em realidade provar que exp_p define um difeomorfismo global, mais detalhes no capítulo Vll de [Do1].

Definicão 1.3.2. *Uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa, com curvatura seccional $k \leqslant 0$ é dita variedade de Hadamard.*

Definicão 1.3.3. *Seja M uma variedade de Hadamard, um raio geodésico é uma geodésica definida da forma $\gamma : [0, +\infty] \to M$, com $|\gamma'(t)| = 1$. Dois raios geodésicos γ_1, γ_2 são ditos assintóticos ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) se existe um $C \geqslant 0$ tal que, $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t) \leqslant C, \ \forall t \in [0, \infty)$.*

Exemplo 1. *$\mathbb{R}^n$ é uma variedade Riemanniana de Hadamard, duas semirretas em $\mathbb{R}^n$ são ditas assintóticas se são paralelas e com o mesmo sentido.*

Observação: A relação ser assintótico $\sim$ é uma relação de equivalência, este fato decorre da desigualdade triangular.

Definicão 1.3.4. *O bordo assintótico de M é o conjunto,*

$$M(\infty) = \{raios\ geodésicos\}/\sim$$

Proposição 1.3.1. *Dado $\alpha : [0, \infty] \to M$ raio geodésica e $p \in M$. Então existe um único $\gamma : [0, \infty] \to M$ raio geodésico com $\gamma(0) = p$ e $\gamma \sim \alpha$.*

Antes da prova vamos a apresentar o seguinte lema. Mais detalhes do lema em [Eb] seção 1.6.

Lema 1.3.2. *Se α e β são dois raios geodésicos em M, então a função $t \to d(\alpha(t), \beta(t))$ é convexa.*

Demonstração. Da proposição 1.3.1 considere $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $t_n \to \infty$, e para cada n definimos γ_n como o segmento de geodésico normalizado ligando p a $\alpha(t_n)$. Por compacidade da esfera unitária em T_pM, $\{\gamma_n'(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequencia convergente a v com $\|v\| = 1$. Agora, definimos $\gamma : (0, \infty] \to M$ por $\gamma(t) = exp_p(tv)$. Para provar que $\gamma \sim \alpha$ considere $C \geqslant 0$ tal que $d(p, \alpha(0)) \leqslant C$ e a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\gamma_n(s_n) = \alpha(t_n)$. Segue que:

$$
\begin{aligned}
d(\alpha(0), \alpha(t_n)) &\leqslant d(\alpha(0), p) + d(p, \gamma_n(s_n)) && (1.1)\\
d(\alpha(0), \alpha(t_n)) &- d(p, \gamma_n(s_n)) \leqslant d(\alpha(0), p) && (1.2)\\
t_n - s_n &\leqslant d(\alpha(0), p). && (1.3)
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
d(p, \gamma(s_n)) &\leqslant d(\alpha(0), p) + d(\alpha(0), \gamma_n(s_n)) && (1.4)\\
d(p, \gamma_n(s_n)) &- d(\alpha(0), \alpha(t_n)) \leqslant d(\alpha(0), p) && (1.5)\\
s_n - t_n &\leqslant d(\alpha(0), p). && (1.6)
\end{aligned}
$$

Das equações (1.3), (1.6), obtemos que:

$$|t_n - s_n| \leqslant d(\alpha(0), p) \leqslant C.$$

Fixe $s \geqslant 0$ e tome n o suficientemente grande tal que $s \leqslant s_n$ $\forall n \geqslant n_0$. Pelo lema 1.3.2, a função $t \to d(\gamma_n(t), \alpha(t))$ é convexa, deste modo obtemos:

$$d(\gamma_n(s), \alpha(s)) \leqslant \max\{d(\gamma_n(0), \alpha(0)), d(\gamma_n(s_n), \alpha(s_n))\}.$$

Como $\gamma_n(0) = p$, obtemos $d(\gamma_n(0), \alpha(0)) \leqslant C$, ademais;

$$d(\gamma_n(s_n), \alpha(s_n)) = d(\alpha(t_n), \alpha(s_n)) = |t_n - s_n| \leqslant C.$$

Assim, $d(\gamma_n(s), \alpha(s)) \leqslant C$, finalmente usando a continuidade da aplicação exponencial temos $d(\gamma(t), \alpha(t)) \leqslant C$, i.e. $\gamma \sim \alpha$.

Para provar a unicidade supõe que existe a geodésica $\beta \sim \alpha$ com $\beta(0) = p$ e $\|\beta'(0)\| = \|\gamma'(0)\|$ mas, $\theta = \sphericalangle(\beta'(0), \gamma'(0)) > 0$. Utilizando a lei de cossenos (Teorema de Preissman) obtemos $d^2(\beta(t), \gamma(t)) \geqslant 2t^2(1 - cos\theta)$, que tende a ∞ quando, $t \to \infty$, uma contradição pois $\beta \sim \gamma$. $\square$

Umas das consequências da proposição, é que existe uma correspondência biunívoca entre a esfera unitária S_p em T_pM e $M(\infty)$, a saber, dado $v \in S_p \mapsto [\gamma_v] \in M(\infty)$, onde, $\gamma_v(t) = exp_p(tv)$.

As proposições e definições anteriores, estão direcionadas a definir uma compactificação topológica em variedades de Hadamard. Para este propósito é preciso definir uma topologia sobre o bordo assintótico, que neste caso será a topologia dos cones. Um cone com vértice em $p \in M$, abertura $\theta \in (0, \pi)$ e eixo $v \in T_pM$ é da forma $C_p(v, \theta) = \{exp_p(tw) | \sphericalangle(w, v) < \theta,\ com\ t > 0\}$, além disso, um cone truncado define-se como, $T_p(v, \theta, R) := C_p(v, \theta) \backslash \overline{B(p, R)}$, onde, $\overline{B(p, R)}$ é a bola com centrada em p de raio $R > 0$. Finalmente as bolas abertas de M e os cones truncados são uma base topológica para o conjunto $\overline{M} := M \cup M(\infty)$. $M(\infty)$ tem a topologia de subespaço topológico, ver o Capítulo 1 de [Eb].

Teorema 1.3.3. *Sejam $p \in M$ e $\overline{B(p, 1)}$ a bola fechada unitária em T_pM, cujo bordo $\partial\overline{B(p, 1)} = S_p$. Seja $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ um homeomorfismo. Então a função*

$$\varphi : \overline{B(p, 1)} \to \overline{M}\ ; \varphi(v) = exp_p(f(\|v\|)v),$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Primeiro, note que $\overline{M}$ é Hausdorff, pois pela Proposição 1.3.1, quaisquer dois pontos de $M(\infty)$ podem ser separados por cones com o mesmo vértice e $\overline{B(p,1)}$ é um subconjunto compacto de T_pM. Além disso, φ define uma correspondência biunívoca, já que o fecho no infinito do homeomorfismo f, significa que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$. Então, temos uma bijeção de um compacto num espaço Hausdorff, assim só é necessário provar que φ é continua em $v \in S_p$ para concluir que é um homeomorfismo. Se $\|v\| < 1$, temos que φ fica definida pela aplicação exponencial, como M é de Hadamard, φ é um difeomorfismo. Dada $T(v,\theta,R)$ uma vizinhança de $\varphi(v),\ v \in S_p$,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(T(v,\theta,R)) &= \{x \in \overline{B(p,1)} |\, exp_p(f(\|x\|x)) \in T(v,\theta,R)\} && (1.7)\\
&= \{\sphericalangle(x,v) < \theta\ e\ (f(\|x\|)x) > R\} && (1.8)\\
&= \{\sphericalangle(x,v) < \theta\} \cap \{(f(\|x\|)x) > R\} && (1.9)
\end{aligned}$$

logo temos que $\varphi^{-1}(T(v,\theta,R))$ é a interseção de dois abertos, e portanto φ é continua. □

A consequência para ressaltar é que $\overline{B(p,1)}$ e $\overline{M}$ são homeomorfos, assim, $\overline{M}$ é compacto. Esta compactificação topológica será chamada de Hadamard.

A partir de agora se $[\gamma] \in M(\infty)$, denotaremos $[\gamma]$ por $\gamma(\infty)$, da mesma maneira se $\gamma : \mathbb{R} \to M$ é geodésica denotaremos por γ^+, γ^- a $\gamma|_{[0,+\infty]}$ e $\gamma|_{[-\infty,0]}$ respectivamente. Igualmente $[\gamma^+] = \gamma(+\infty)$ e $[\gamma^-] = \gamma(-\infty)$.

Capítulo 2

Grupos e álgebras de Lie

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados dos grupos e álgebras de Lie que são uma ferramenta fundamental na evolução dos próximos capítulos. No final do capítulo temos uma breve introdução às representações de grupos que serão muito importantes na prova do teorema central 5.1.1.

2.1 Grupos de Lie

Definicão 2.1.1 (Grupo de Lie). *Um grupo de Lie é um grupo G munido de uma estrutura diferenciável compatível com a operação de grupo, ou seja,*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow \quad G \\ (x, y) &\longmapsto \quad xy^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável. Deste modo fixado x as traslações a direita R_x e esquerda L_x,

$$\begin{aligned} R_x &\longrightarrow \quad G \\ y &\longmapsto \quad yx \\ L_x &\longrightarrow \quad G \\ y &\longmapsto \quad xy \end{aligned}$$

são difeomorfismos.

A partir de agora, G denota sempre um grupo de Lie, um exemplo importante de grupo de Lie é o grupo das isometrias $G = iso(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana.

Dizemos que uma métrica Riemanniana em G é invariante à esquerda se;

$$\langle u, v\rangle_y = \langle (dL_x)_y(u), (dL_x)_y(v)\rangle_{L_x(y)}$$

para todo $x, y \in G$, $u, v \in T_yG$, isto é, se L_x é uma isometria. Analogamente define-se métrica Riemanniana invariante à direita. Uma métrica Riemanniana invariante à esquerda e direita, é dita bi-invariante.

Agora, tomando um produto interno $\langle\, ,\rangle_e$ em T_eG, onde e é a identidade de G, é possível definir a seguinte métrica invariante à esquerda em G:

$$\langle u, v\rangle_x := \langle (dL_{x^{-1}})_x(u), (dL_{x^{-1}})_x(v)\rangle_e,\ \ x \in G,\ \ \forall u, v \in T_xG.$$

do mesmo modo é possível definir uma métrica invariante a direita.

Quando G for compacto é bem sabido (ver, por exemplo [Da], capítulo 4) que G admite uma métrica bi-invariante. Reciprocamente, se G admite uma métrica bi-invariante então, $G = K \times F$, onde K é um grupo compacto e F é abeliano.

2.2 Álgebras de Lie

Definicão 2.2.1. *Um campo de vetores X em G é dito invariante à esquerda se é preservado pelas traslações a esquerda, ou seja,*

$$(dL_x)_y(X(y)) = X(L_x(y)).$$

Em particular, se X é invariante à esquerda e $x \in G$ tem-se; $X(x) = X(L_x(e)) = (dL_x)_e(X(e))$, ou seja, o valor de X em qualquer ponto de G está determinado por seu valor na identidade e. Assim, dado $v \in T_eG$, existe um único $X(x) = (dL_x)_e(v)$ campo invariante à esquerda em G tal que $X(e) = v$.

Proposição 2.2.1. *Se X, Y são campos invariantes à esquerda, então $[X, Y]$ é um campo invariante à esquerda.*

Agora faz sentido a seguinte definição.

Definicão 2.2.2. *Dados $u, v \in T_eG$, definimos o colchete de Lie como $[u, v] := [X, Y](e)$, onde X e Y são os campos invariantes a esquerda tais que, $X(e) = u$ e $Y(e) = v$. Com esta operação T_eG é chamada a álgebra de Lie de G, denotada por $\mathfrak{g}$.*

Observação: A identidade de Jacobi para campos de vetores dá a $\mathfrak{g}$ a estrutura de álgebra de Lie.

No que segue os elementos de $\mathfrak{g}$ serão pensados como campos invariantes à esquerda ou elementos de T_eG.

Lembremos um resultado de EDO em $\mathbb{R}^n$ que por ser local ainda continua valendo para variedades.

Proposição 2.2.2. *Se M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$, então para todo $p \in M$, existe uma vizinhança U de p, $\epsilon > 0$ e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ ($\varphi(t, q) = \varphi_t(q)$) aplicação diferenciável tal que, $\frac{d}{dt}\varphi_t(q)|_{t=0} = X(q)$, $\forall q \in U$ φ_t é o fluxo de X.*

Observação: Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e φ_t é seu fluxo, vale: $X(\varphi_t(p)) = (d\varphi_t)_p(X(p))$.

Definicão 2.2.3 (Campos de Killing)**.** *Um campo diferenciável X em M variedade Riemanniana é dito campo de Killing se seu fluxo é por isometrias, isto é, dado* *qualquer* $p \in M$, $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ *é uma isometria para todo* $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, *onde a existência de* $\epsilon > 0$ *e* U *(vizinhança de* p*) é garantida pela proposição anterior.*

Proposição 2.2.3. *Se* X *é um campo de Killing em* M *variedade Riemanniana completa, então seu fluxo esta definido para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $p \in M$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ o intervalo maximal onde $\varphi_t(p)$ esta definido para todo $t \in I$. Por absurdo, suponha que $\sup I < \infty$. Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergindo para $\sup I$. Agora provaremos que $\{\varphi_{t_n}(p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois dados $t_n < t_m$, usando que φ_t é uma isometria e pela observação anterior obtemos:

$$\begin{aligned} d(\varphi_{t_n}(p), \varphi_{t_m}(p)) \leqslant \int_{t_n}^{t_m} \|\frac{d}{dt}\varphi_t(p)\|dt &= \int_{t_n}^{t_m} \|(d\varphi_t)_p(X(p))\|dt && (2.1)\\ &= \int_{t_n}^{t_m} \|(X(p))\|dt && (2.2)\\ &= \|(X(p))\|(t_m - t_n) \to 0 && (2.3) \end{aligned}$$

para m, n indo para infinito. Assim, $\varphi_{t_n}(p) \to p^* \in M$, pela continuidade de φ_t temos $\varphi_{\sup I}(p) = p^*$, de este modo numa vizinhança de p^* o fluxo φ_t é uma isometria e portanto φ_t pode-se estender além de $\sup I$, contradição. Análogo para o $\inf I$, logo $I = \mathbb{R}$. □

Definicão 2.2.4 (Exponencial de Lie)**.** *Se* $X \in \mathfrak{g}$, *a aplicação* $exp : \mathfrak{g} \to G$ *dada por* $exp(X) = \varphi_1(e)$, *onde* φ_t *é o fluxo de* X, *é chamada exponencial de Lie.*

Para verificar que φ_1 esta definido, é suficiente mostrar que temos uma métrica em G tal que X é de Killing. Como X é invariante à esquerda; $X(g) = (dL_g)_e(u)$,

$X(e) = u$. Agora,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(g)|_{t=0} = (dL_g)_e(X(e)) = (dL_g)_e(\frac{d}{dt}\varphi_t(e)|_{t=0}) = \frac{d}{dt}L_g(\varphi_t(e))|_{t=0} \quad (2.4)$$
$$= \frac{d}{dt}g\varphi_t(e)|_{t=0} \quad (2.5)$$
$$= \frac{d}{dt}R_{\varphi_t(e)}(g)|_{t=0} \quad (2.6)$$

Dotando a G com a métrica invariante à direita dada pela traslação $R_{\varphi_t(e)}$, obtemos $R_{\varphi_t(e)}$ é uma isometria para cada t, e portanto φ_t é uma isometria, o que mostra que X é de Killing.

Observação: Note que fixado $X \in \mathfrak{g}$, o fluxo $\varphi_t(e)$ é um homomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ sobre G, assim $\varphi_{\mathbb{R}}(e)$ será dito subgrupo a 1-parâmetro de G. Então também pode se definir aplicação exponencial a partir da ação de um único subgrupo a 1-parâmetro $\{exp(tX),\ t \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo $\frac{d}{dt}exp(tX)|_{t=0} = X$. Em ocasiões escreveremos $exp(tX) = e^{tX}$.

Definicão 2.2.5. *Seja $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ é dita:*

i . Subálgebra se $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$.

ii . Subálgebra abeliana se $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$.

iii . Lie triple system se $[[X, Y], Z] \in \mathfrak{a}$, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{a}$.

Observação: Toda subálgebra abeliana é um Lie triple system.

Para a seguinte definição denotaremos por $GL(\mathfrak{g})$=\{Grupo linear das transformações lineares de $\mathfrak{g}$\} e $gl(\mathfrak{g})$ seu álgebra de Lie com o colchete $[A, B] := AB - BA$.

Definicão 2.2.6 (Adjuntas)**.** *Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ seu correspondente álgebra de Lie. Para cada $g \in G$, define as aplicações*

$$\begin{aligned} \psi_g : G &\longrightarrow G, \\ h &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Ad(g) = (d\psi_g)_e \end{aligned}$$

Finalmente definimos $ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ por $ad := d(Ad)_e$.

Na seguinte seção apresentaremos alguns resultados de representações de grupos, fundamentais para nosso objetivo.

2.3 Representações de grupos

Nesta seção G vai ser um grupo de Lie e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Em casos mais gerais as representações podem-se definir sobre espaços de dimensão infinita e sobre qualquer corpo de característica zero.

Definicão 2.3.1 (Representação linear)**.** *ρ é uma representação linear de G em V se é um homomorfismo de G sobre $GL(V)$. i.e.*

$$\rho : G \longrightarrow GL(V),\ g \longmapsto \rho(g)$$

satisfaz

$$\rho(hg) = \rho(h)\rho(g),\ \forall g, h \in G.$$

Se V é um espaço vetorial de dimensão n, dizemos que ρ tem grau ou é de dimensão n.

Exemplo 2. *O exemplo mais imediato é considerar o grupo de matrizes $GL(n,\mathbb{R})$ e definir a representação sobre o espaço $\mathbb{R}^n$ onde associamos a cada matriz $A \in GL(n,\mathbb{R})$ a mesma matriz A, tal representação é de dimensão n. Outra representação imediata é a representação trivial: dado um grupo G e V um espaço vetorial de dimensão finita, a todo $g \in G$ associamos-lhe a transformação identidade.*

Exemplo 3. *Seja $p \in M$, a derivada é uma representação (pela regra da cadeia) de $Iso_p(M) = \{\varphi \in Iso(M); \varphi(p) = p\}$ sobre T_pM.*

Um subespaço $V_0 \subset V$ é invariante por ρ, se e somente se, $\rho(g)v_0 \in V_0$ para todo $g \in G$ e $v_0 \in V_0$. Nesse caso, $\rho_0 := \rho|_{V_0}$ é uma representação de G em V_0, chamada sub-representação própria de ρ.

Definicão 2.3.2. *Seja ρ uma representação linear de G em V. ρ é dita irredutível, se e somente se, não existe subespaço vetorial próprio V_0 de V, tal que ρ é invariante.*

Podemos dizer também que ρ é irredutível, se e somente se, ρ não tem sub-representações próprias não triviais.

Definicão 2.3.3. *Sejam ρ, ρ' duas representações de G nos espaços vetoriais V e V' respectivamente. Uma aplicação linear $F : V \to V'$, é dita um operador de entrelaçamento entre ρ e ρ', se e somente se, para cada $g \in G$, temos:*

$$F\rho(g) = \rho'(g)F,$$

i.e. se o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "F"] & V' \end{tikzcd}$$

ρ e ρ' são chamadas equivalentes, se e somente, F é um isomorfismo, assim, escreveremos $\rho \sim \rho'$.

Outra propriedade importante é que dadas duas representações ρ, ρ' de um grupo G nos espaços vetoriais V, V', então pode-se definir a soma direta $\rho \oplus \rho'$ por

$$(\rho \oplus \rho')(g)(v \oplus v') := \rho(g)v \oplus \rho'(g)v', \textit{ para todo } v \oplus v' \in V \oplus V'.$$

Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^n, V' = \mathbb{R}^m$ e $\rho(g) = A(g) \in GL(n, \mathbb{R}),\ \rho'(g) = A'(g) \in GL(m, \mathbb{R})$, duas matrizes, a soma direta é dada pela matriz diagonal por blocos,

$$(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & A'(g) \end{pmatrix} \in GL(n + m, \mathbb{R}).$$

Definicão 2.3.4. *Uma representação ρ é dita completamente redutível se é soma direta de representações irredutíveis, i.e. $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus ... \oplus \rho_k$, onde os ρ_i são sub-representações irredutíveis. Assim, dizemos que ρ decompõe-se em sub-representações irredutíveis.*

Teorema 2.3.1. *Toda representação ρ de um grupo de Lie compacto G é completamente redutível, além disso dita decomposição em sub-representações em irredutíveis é única(a menos de isomorfismos).*

Este resultado é bem forte e para ter uma ideia da prova sugiro dar uma lida à seção Vll.9.3 de [Ba].

Capítulo 3

Espaços simétricos e decomposição de Cartan

Neste capítulo apresentaremos definições básicas de espaço simétrico e uma breve construção da decomposição de Cartan. Estes dois conceitos são fundamentais para o objetivo principal de estudo neste trabalho.

3.1 Espaços simétricos

Definicão 3.1.1. *Uma variedade Riemanniana S é dita um espaço simétrico se $\forall x \in S$ existe $s_x \in Iso(S) = \{grupo\ das\ isometrias\ de\ S\ em\ S\}$, com as seguintes propriedades:*

i . $s_x(x) = x$.

ii . $(ds_x)_x : T_xS \to T_xS$ *é dada por* $(ds_x)_x = -id_{T_xS}$.

s_x *é dita simetria.*

Exemplo 4. *Tomando $S = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclideana. Para cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ temos a reflexão $s_x(x+v) = (x-v)$, que é uma simetria. Assim, $\mathbb{R}^n$ é um espaço* *simétrico.*

Exemplo 5. *Se $S = \mathbb{S}^n$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ com a métrica canônica. Cada simetria em $x \in \mathbb{S}^n$ é a reflexão em $\mathbb{R}^n$ em torno da reta $\{tx | t \in \mathbb{R}\}$, i.e. $s_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle x$ para $y \in \mathbb{S}^n$.*

Exemplo 6. *Considere o espaço hiperbólico real $\mathbb{H}^n$, para isso tomamos $\mathbb{R}^{n+1}$ com o produto escalar de Lorentz*

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}, \quad x, y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Agora definindo $\mathbb{H}^n$ como sendo:

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | (x, x) = -1 \text{ e } x_{n+1} > 0\},$$

note que em $\mathbb{R}^3$ temos que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 | (x, x) = -1\}$ é um paraboloide com duas componentes conexas, neste caso $\mathbb{H}^2$ é a componente positiva deste paraboloide. Finalmente, $\mathbb{H}^n$ é uma variedade Riemanniana com a métrica dada pelo produto escalar de Lorentz restrito a $\mathbb{H}^n$ e as simetrias s_x são definidas como na esfera, ou seja, para cada $x \in \mathbb{H}^n$ define-se $s_x(y) = -y + 2(x, y)x$, $y \in \mathbb{H}^n$.

Lema 3.1.1. *Se $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ é geodésica no espaço simétrico S então,*

$$s_{\gamma(0)}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$$

Proposição 3.1.1. *Todo espaço simétrico é geodésicamente completo.*

Demonstração. Seja $\gamma : [0, t_0] \to S$ geodésica em S, provaremos que γ esta definida para todo tempo. De fato escolha $y_1 = \gamma(t_1)$, onde $t_1 \in (\frac{t_0}{2}, t_0)$, note que $s_{y_1}(\gamma|_{[0,t_1]})$ prolonga γ após de t_0, e portanto γ esta definida para todo tempo. $\square$

A seguinte definição dá uma boa vantagem, que é que todos os pontos da variedade podem se relacionar por uma isometria.

Definicão 3.1.2. *Uma variedade Riemanniana M é dita homogênea se $\forall x, y \in M$ existe $\varphi \in Iso(M)$ tal que $\varphi(x) = y$.*

Proposição 3.1.2. *Todo espaço simétrico é homogêneo.*

Demonstração. Sejam $x, y \in S$, como S é completo, então existe $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to S$ tal que, $\gamma(-\epsilon) = x$ e $\gamma(\epsilon) = y$. Tomando $m = \gamma(0)$ e s_m a correspondente simetria. Fazendo

$$s_m(x) = s_m(\gamma(-\epsilon)) = \gamma(\epsilon) = y,$$

assim, $s_m(x) = y$ e portanto S é homogêneo. $\square$

Reciprocamente seja S homogêneo, se existe $p \in S$ e s_p simetria em p, então S é espaço simétrico, já que dado outro ponto $q \in S$ e $\varphi \in Iso(S)$ com $\varphi(p) = q$, obtemos que $s_q := \varphi s_p \varphi^{-1}$ é simetria em q, ou seja, para que uma variedade homogênea seja um espaço simétrico, basta haver simetria em um ponto.

3.2 Decomposição de Cartan

Para esta seção vamos estudar a relação entre o grupo de Lie $G = Iso(S)$ e o espaço simétrico S, mais precisamente a relação de S com à álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Nesta álgebra de Lie é possível fazer uma decomposição en dois subespaços, onde um deles permite uma identificação com S via exponencial de Lie.

Para iniciar, fixamos $p \in S$ e tomamos a correspondente simetria. Defina a aplicação:

$$\begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow \quad G \\ g &\longmapsto \quad s_p g s_p^{-1}. \end{aligned}$$

Note que pela definição de simetria obtemos que $s_p^2 = s_p s_p = e \in G$, e deste modo a aplicação definida acima é uma involução, ou seja, $\sigma^2 = id_G$. Mais ainda, para atingir a álgebra de Lie é preciso definir $\sigma_* =: (d\sigma)_e$,

$$\sigma_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

g Pela involução σ novamente temos que $\sigma_*^2 = id_{\mathfrak{g}}$, assim σ_* é uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ e possui exatamente dois autovalores $\{1, -1\}$, portanto dois subespaços definidos pelos autovalores $\{1, -1\}$. Denotaremos por $\mathfrak{p}$ a (-1)-subespaço e por $\mathfrak{l}$ a (1)-subespaço.

Finalmente, dado $X \in \mathfrak{g}$ podemos escrever $X = \frac{1}{2}(X + \sigma_*(X)) + \frac{1}{2}(X - \sigma_*(X))$ onde, $\frac{1}{2}(X + \sigma_*(X))$, $\frac{1}{2}(X + \sigma_*(X))$ pertencem a $\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{p}$ respetivamente, assim obtemos a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$, chamada decomposição de Cartan no ponto p, e σ_* é dita involução de Cartan.

Proposição 3.2.1. *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie do grupo G e $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ a decomposição de Cartan. Então*

i . σ_* é um homomorfismo de álgebras de Lie, i.e. além da linearidade temos, $\sigma_*[X, Y] = [\sigma_* X, \sigma_* Y]$.

ii . $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subseteq \mathfrak{l}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{l}$ e $[\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$.

Demonstração. Ver seção 2.3 de [Eb]. □

Definicão 3.2.1 (Flat e posto)**.** *Seja S um espaço simétrico.*

i . As subvariedades totalmente geodésicas com curvatura $R \equiv 0$ são ditas flats de S.

ii Um flat é maximal se não esta propriamente contido em outro flat.

iii O posto de S é a dimensão de um flat maximal.

Lembremos que uma subvariedade $A \hookrightarrow S$ é totalmente geodésica se toda geodésica em A é geodésica em S. Agora alguns exemplos de flats e posto de um espaço simétrico.

Exemplo 7. *Para começar se S é um espaço simétrico os flats tem dimensão maior igual a um (uma geodésica tem curvatura R nula) e menor igual que $dimS$, nesse sentido o posto k de S é um inteiro $1 \leqslant k \leqslant dimS$. O exemplo mais imediato é $S = \mathbb{R}^n$, onde S mesmo é o flat maximal e portanto o posto de S é n.*

Exemplo 8. *Agora mostraremos que o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é de posto um. De fato como a curvatura seccional do hiperbólico $k_{\mathbb{H}^n} = -1$, então se A é uma subvariedade totalmente geodésica de $dimA \geqslant 2$ e dado um subespaço de dimensão dois $\sigma \subseteq T_pA$ ($p \in A$) que ao mesmo tempo é um subespaço de $T_p\mathbb{H}^n$, temos que $k_{\mathbb{H}^n}(\sigma) = -1 < 0$, isto implica que dada uma base $\{x, y\}$ de σ o produto $\langle R(x, y)x, y\rangle < 0$, assim $R(x, y)x$ é não nulo e portanto A não é um flat em consequência o posto de $\mathbb{H}^n$ é um.*

Exemplo 9. *Seja o espaço simétrico $S = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Se γ é uma geodésica em $\mathbb{H}^2$, é fácil verificar que $\gamma \times \mathbb{R}$ é um flat, de fato um flat maximal e portanto o posto de S é dois, ver a seguinte figura 3.1.*

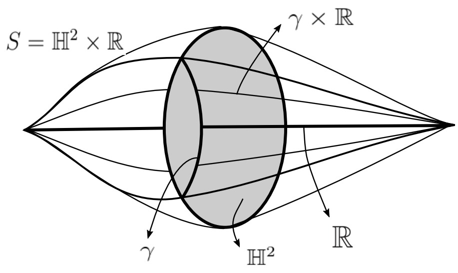

Figura 3.1:

Da proposição 3.2.4 abaixo poderemos concluir que os flats maximais têm a mesma dimensão e neste sentido o posto fica bem definido. No que segue nos referiremos aos flats maximais como max flats. Para finalizar o capítulo apresentaremos resultados sobre espaços simétricos de tipo não compacto que vai nos ajudar na construção da estrutura de Building do próximo capítulo.

Definicão 3.2.2. *Um espaço simétrico S é dito:*

i . *De tipo euclideano se tem curvatura seccional identicamente nula.*

ii . *De tipo compacto se tem curvatura seccional maior o igual a zero mas não identicamente nula.*

iii . *De tipo não-compacto se tem curvatura seccional menor o igual a zero mas não identicamente nula.*

Observação: Os espaços simétricos também classificam se de acordo com seu posto. Em próximas seções referenciaremos estas classificações. No que segue do texto assumimos S como espaço simétrico de tipo não-compacto.

Proposição 3.2.2. *As geodésicas partindo de um $p \in S$ são curvas da forma $\sigma : t \to exp(tX)(p)$, onde $X \in \mathfrak{p}$ e $exp : \mathfrak{g} \to G$ é a exponencial de Lie do grupo $G = Iso(S)$.*

Demonstração. Para começar define a projeção $\pi_p : G \to S$ dada por $\pi_p(g) = gp$, afirmaremos sem demostração que $\pi_* := (d\pi_p)_e : \mathfrak{g} \to T_pS$ é uma aplicação sobrejetora (ver [Es] seção 4) com kernel $\mathfrak{l}$. Neste sentido $\pi|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to T_pS$ é um isomorfismo linear. Agora dada uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to S$ com $\gamma(0) = p$, pela identificação de acima devemos ter $\gamma'(0) = (d\pi_p)_e(X)$, para algum $X \in \mathfrak{p}$ unicamente definido. Para todo $t \in \mathbb{R}$ denotamos o ponto médio entre p e $\gamma(t)$ por p_t, ademais definimos $T_t := s_{p_t}s_p$. Note que T_t é um subgrupo a 1-parâmetro de G e que $T_t(p) = \gamma(t)$. Além disso:

$$\frac{d}{dt}T_t(p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\pi_p(T_t)|_{t=0} = (d\pi_p)_e(\frac{d}{dt}T_t)|_{t=0}.$$

Por outro lado $\frac{d}{dt}T_t(p)|_{t=0} = (d\pi_p)_e(X)$, em consequência $\frac{d}{dt}T_t|_{t=0} = X$. Assim, $exp(tX) = T_t$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto $exp(tX)(p) = \gamma(t)$. □

Corolario 3.2.1. *Se F é uma subvariedade totalmente geodésica de S, então existe um subespaço $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$ tal que $exp(\mathfrak{a})(p) = F$, onde $p \in S$.*

A proposição anterior é muito importante porque ela permite estabelecer uma relação entre os pontos da variedade e a álgebra de Lie do grupo de isometrias. Tal relação permite obter resultados como a Proposição 3.2.5.

Proposição 3.2.3. *Sejam $p \in S$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ um subespaço e $N = exp(\mathfrak{a})(p)$. Então N é uma subvariedade completa de S e N é totalmente geodésica se e somente se, $\mathfrak{a}$ é um Lie triple system.*

Uma prova desta proposição pode se ler em [He] nas páginas 189-191.

No próximo resultado $G_0 = Iso_0(S)$ denota a componente conexa de G que contem a identidade e $K = \{g \in G | g(p) = p\}$ é o subgrupo de isotropia em $p \in S$. Do mesmo modo K_0 é a componente conexa de K que contem a identidade. Finalmente definiremos a aplicação $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dada por $B(X, Y) = tra(ad(X)ad(Y))$ chamada a forma de Killing.

Proposição 3.2.4. *Se A_1 e A_2 são flat maximais em S e p_1, p_2 são pontos de A_1 e A_2 correspondentemente, então existe $g \in G_0$ tal que $g(p_1) = p_2$ e $g(A_1) = A_2$.*

Demonstração. (Ideia) Dada a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ é suficiente mostrar que para qualquer par de subálgebras maximais abelianas $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ em $\mathfrak{p}$, existe $k \in K$ tal que $Ad(k)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. Escolhe X_i de modo que $ad(X_i)$ é diagonalizável com autovalores distintos, e considere a função continua $f : K \to \mathbb{R}$ dada por $f(k) = B(Ad(k)X_1, X_2)$. Poderíamos mostrar que se k é um mínimo de f, então $Ad(k)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. Mais detalhes em Lema 6.3 em Capitulo V de [He]. □

Proposição 3.2.5. *Dado S espaço simétrico de posto $k \geqslant 1$, obtemos:*

i . *Se $p \in S$ com $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ a correspondente decomposição de Cartan, então cada max flat A de S que contem a p é da forma $A = exp(\mathfrak{a})(p)$, onde $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ é uma subálgebra maximal abeliana.*

ii . *Se $\gamma : \mathbb{R} \to S$ é geodésica de S, então existe pelo menos um max flat A que contem γ.*

Demonstração. (i) Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ a decomposição de Cartan e F um max flat. Pelo Corolário 3.2.1 existe um subespaço $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$ tal que $exp(\mathfrak{a})(p) = F$, onde $p \in S$. Como $R \equiv 0$ então dados $x, y \in \mathfrak{a}$ temos que $[[x, y], z] = 0$ para todo $z \in \mathfrak{p}$. Assim $[x, y] = 0$ e portanto $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra abeliana. Note que $\mathfrak{a}$ deve ser maximal, caso contrário existe outra subálgebra abeliana $\mathfrak{a}'$ a contendo, nesse caso pela Proposição 3.2.3 $exp(\mathfrak{a}')(p)$ é uma subvariedade totalmente geodésica com curvatura zero contendo a F, uma contradição. Isto conclui (i). Para provar (ii) usamos, pela Proposição 3.2.2, que γ tem forma $e^{Xt}(p)$ onde $X \in \mathfrak{p}$. Seja $\mathfrak{a}$ a maior subálgebra abeliana contendo a X, então $F = exp(\mathfrak{a})(p)$ é um max flat que contem a p e $e^{Xt}(p)$. Portanto γ está contido num max flat. $\square$

3.3 Classificação de espaços simétricos de posto um

Nesta seção apresentaremos um teorema que classifica os espaços simétricos de tipo não compacto de posto um. No próximo capítulo este teorema será bastante importante na prova dos resultados finais.

Teorema 3.3.1. *Seja S um espaço simétrico de tipo não compacto de posto um. Se S tem dimensão par, então as simetrias estão contidas em $G_0 = Iso(M)_0$ (componente conexa que contem a identidade). Se S tem dimensão impar, então S é o espaço hiperbólico real $\mathbb{H}^{2m+1}$, onde $dim(S) = 2m + 1$.*

Na prova do Teorema 3.3.1, usa o resultado (ver [He] capítulo IX) que os espaços simétricos de tipo não compacto de posto um são: o espaço hiperbólico real, o espaço hiperbólico complexo, o espaço hiperbólico quatérnio e plano hiperbólico octônio. As respectivas componentes conexas da identidade de seus grupos de isometrias são: $SO_0(1, n)$, $SU_0(1, n)$, $Sp_0(1, n)$ e $F_{4(-20)}$, que são grupos simples. Ademais, na prova usa-se comparações dos postos das álgebras de Lie dos grupos anteriores (ver as tabelas [Kn] apêndice C).

Capítulo 4

Compactificações diferenciáveis em espaços simétricos de tipo não-compacto

Para começar a seção assumiremos M como um espaço simétrico de curvatura não-positiva e denotamos $\overline{M} = M \cup M(\infty)$ e $G = Iso(M)$.

Definicão 4.0.1 (Compactificação diferenciável de Hadamard)**.** *Uma compactificação diferenciável de Hadamard é uma estrutura diferenciável $\mathcal{D}$ (de classe C^1) sobre $\overline{M}$ compatível com a estrutura diferenciável de M e tal que a ação de G sobre $\overline{M}$ é também C^1.*

Exemplo 10. *Lembremos que o hiperbólico $\mathbb{H}^n$ do Exemplo 6 é a parte positiva de um parabolóide, Figura 4.1.*

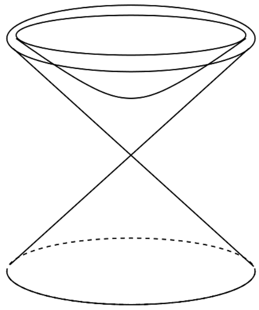

Figura 4.1:

Fazendo a projeção radial do parabolóide na origem obtemos que o hiperbólico pode ser mergulhado no disco de altura um e raio um Figura 4.2.

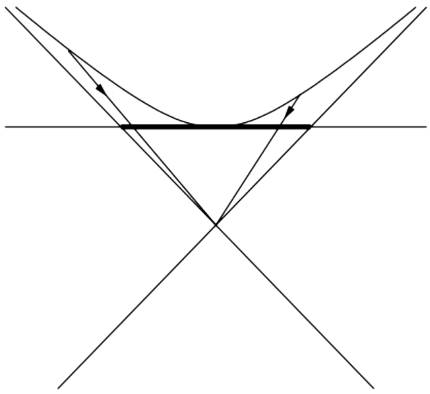

Figura 4.2:

Assim temos um novo modelo para o hiperbólico chamado a bola de Klein, onde o bordo da bola é o bordo assintótico de $\mathbb{H}^n$. Neste modelo é possível obter que $\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ onde o grupo $SO_0(1,n)$ de isometrias de $\mathbb{H}^n$ age analiticamente.

Exemplo 11. *$\mathbb{R}^n$ também admite uma compactificação de Hadamard diferenciável descrita seguinte maneira. Se $(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ identificamos a $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano $\{x_0 = 1\}$. A projeção de $\{x_0 = 1\}$ sobre a semiesfera unitária "positiva" como na Figura 4.3 é um difeomorfismo.*

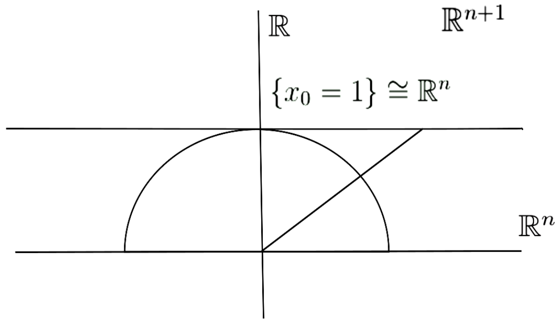

Figura 4.3:

Este mapeio permite obter uma ação do grupo de isometrias de $\mathbb{R}^n$ sobre a parte superior da esfera que se estende analiticamente até seu bordo.

Definicão 4.0.2 (Apartamento)**.** *Seja A um max flat de M, $\overline{A}$ seu fecho em $\overline{M}$ e $A(\infty) = \overline{A} \cap M(\infty)$ sua fronteira. $A(\infty)$ é dito apartamento de $M(\infty)$.*

Observação: Note que pela Proposição 3.2.5, item ii, cada elemento de $M(\infty)$ esta contido em pelo menos um apartamento.

Definicão 4.0.3. *Dado $x \in M(\infty)$ denotaremos por $a(x)$ o conjunto de todos os apartamentos que contem a x. Agora:*

i . x é dito regular se está contido exatamente em um apartamento. Caso contrario é dito singular.

ii . Se x é singular, dizemos que tem índice 1 se $a(x)$ é minimal com respeito a inclusão entre os conjuntos $a(y)$, onde y é singular.

iii . A componente conexa de x no conjunto de pontos y tal que $a(x) = a(y)$ é um facet.

iv . Se x é regular, seu facet será dito Weyl chamber ou simplesmente chamber.

v . Se x é singular de índice 1, seu facet é dito panel.

vi . Dois facet's são adjacentes se seus fechos têm interseção não vazia.

Exemplo 12 (Bordo assintótico de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$)**.** *Para começar os raios geodésicos singulares é o conjunto dos produtos $\{x\} \times \mathbb{R}$, com $x \in \mathbb{H}^2$, onde todos eles são assintóticos, ou seja, são um único ponto no bordo assintótico, deste modo temos só dois pontos singulares no bordo, os demais pontos são regulares. O bordo assintótico é uma 2-esfera formada os dois únicos pontos singulares e uma família de curvas com interseção não vazia juntando-os, como na figura 4.4.*

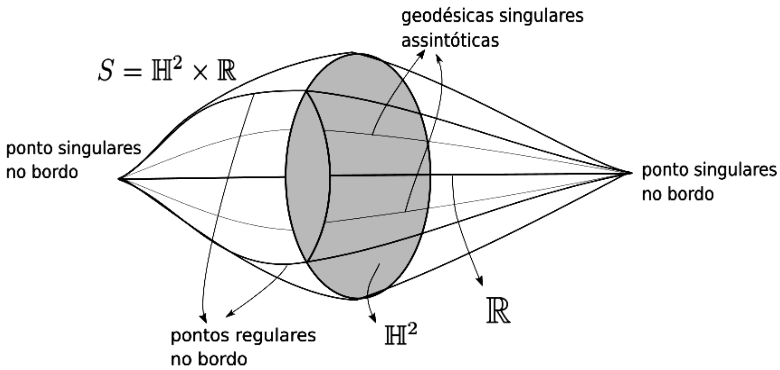

Figura 4.4:

Exemplo 13 (Estrutura de building de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$)**.** *Como no exemplo 9 os max flat em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são da forma $\gamma \times \mathbb{R}$ onde γ é uma geodésica de $\mathbb{H}^2$. Para a estrutura de building de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ os dois pontos singulares são os panels e cada curva da família é um chamber, assim um apartamento é a união de dois chambers com os dois panels, como na Figura 4.5*

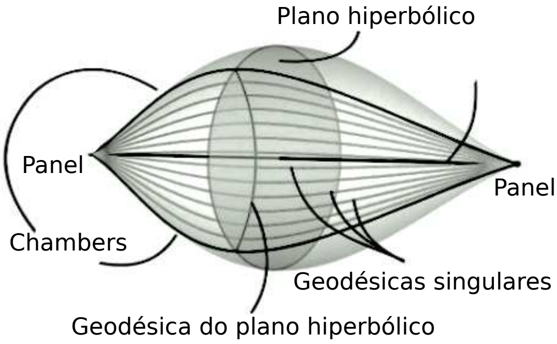

Figura 4.5: Figura da fonte [Kl1]

Proposição 4.0.1. *Seja M espaço simétrico de curvatura não positiva, então*

i . Para quaisquer dois facets, existe um apartamento que os contém.

ii . Dado um panel P, existem pelo menos três chambers adjacentes a P.

Demonstração. A prova de (i) é consequência da Proposição 2.21.14 de [Eb], que diz: Dado um espaço simétrico S de tipo não-compacto com posto $k \geq 2$ e $x, y \in S(\infty)$, existe um apartamento $F(\infty) \subseteq S(\infty)$ tal que $x, y \in F(\infty)$. Para provar (ii), suponhamos que P é o panel do ponto singular x, então existem pelo menos dois apartamentos A_1, A_2 que os contem tal que $A_1 \cap A_2 = P$, agora note que tirando o panel da união dos apartamentos ficam quatro chambers onde justamente a interseção de seus fechos é P. □

Definicão 4.0.4 (Projeção visual)**.** *Seja $x \in M$, onde M é espaço simétrico de curvatura não positiva. Denotaremos por $S_pM \subseteq T_pM$ a esfera unitária e γ_v é a geodésica partindo de p com velocidade v. A aplicação:*

$$\begin{aligned} \Pi_p : S_pM &\longrightarrow M(\infty) \\ v &\longmapsto \gamma_v(\infty) \end{aligned}$$

é chamada a projeção visual do ponto p.

Uma das consequências do Teorema 1.3.3 é que para todo p a projeção visual é um homeomorfismo. Seria natural que a projeção visual em p fosse um difeomorfismo para uma compactificação de Hadamard, mas isso não acontece em espaços simétricos de tipo não-compacto com posto $k \geqslant 2$.

Proposição 4.0.2. *Se M é um espaço simétrico de tipo não-compacto com posto $k \geqslant 2$, então não existe estrutura diferenciável em $M(\infty)$ tal que todos os apartamentos são subvariedades diferenciáveis.*

Demonstração. Vamos a provar por contradição. Primeiro note que em M existe pelo menos um raio geodésico singular (*i.e.* esta contido em mais de um max flat), caso contrario todos os raios geodésicos seriam regulares (*i.e.* cada um esta contido em um só max flat), assim todos os pontos de $M(\infty)$ seriam regulares e como consequência da Proposição 4.0.1 item i todos os pontos de $M(\infty)$ estão contidos num único apartamento A, ou seja, $M(\infty)$ é um apartamento, portanto M deve ter curvatura identicamente a zero, uma contradição pois M é de tipo não-compacto.

Agora, seja γ um raio geodésico em M singular de índice 1, considerando o panel P que contém $\gamma(\infty)$, a Proposição 4.0.1, item ii implica a existência de pelo menos três chambers C_1, C_2, C_3 adjacentes ao panel P. Pela mesma Proposição, item i, temos que para cada par de $C_i, C_j (i \neq j)$ existe um apartamento $A_{ij}(\infty)$ tal que $C_i \subseteq A_{ij}(\infty)$ e $C_j \subseteq A_{ij}(\infty)$. Por hipótese $A_{ij}(\infty)$ é uma subvariedade diferenciável de $M(\infty)$, assim C_i e C_j têm semiespaços tangentes E_i, E_j opostos em $\gamma(\infty)$ como na Figura 4.6.

Portanto obtemos três subespaços distintos dois a dois E_1, E_2, E_3 de $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ tal que $E_1 = -E_2, E_1 = -E_3, E_2 = -E_3$, contradição pois neste caso temos a igualdade de conjuntos $E_1 = -E_1$. $\square$

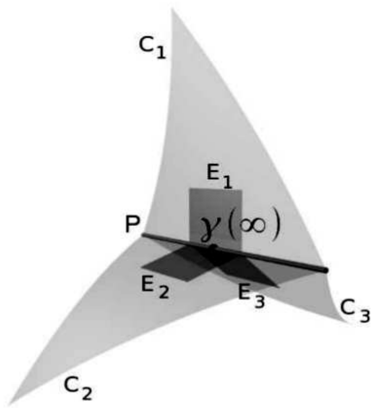

Figura 4.6: Imagem obtida da fonte [Kl1]

Corolario 4.0.1. *Não existe estrutura diferenciável em* $M(\infty)$ *tal que* Π_x *é um difeomorfismo para todo* $x \in M$.

Demonstração. Vamos a supor que existe tal estrutura diferenciável. Seja $A(\infty)$ um apartamento, onde A é um max flat de M. Dado $x \in A$, naturalmente a esfera S_xA está mergulhada em S_xM, como Π_x é um difeomorfismo, então $A(\infty) = \Pi_x(S_xA)$ é uma subvariedade de $M(\infty)$ contradizendo a Proposição 4.0.2. □

Teorema 4.0.2. *O espaço* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *não admite compactificação diferenciável de Hadamard.*

Demonstração. Suponha que $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ admite uma compactificação diferenciável de Hadamard. Seja $\gamma = \{x\} \times \mathbb{R}^+$ um raio geodésico com velocidade 1 e $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{id, -id\}$ (o projetivo do grupo de matrizes reais 2×2 com determinante 1) o grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2$ que preservam a orientação. Uma particularidade deste grupo é que seus únicos subgrupos normais são os triviais (ou seja, é simples), o que implica que qualquer representação linear de $PSL_2(\mathbb{R})$ dever ser injetiva ou trivial; este fato é fácil de provar já que se a representação não fosse injetiva nem trivial, então o kernel da representação seria um subgrupo normal (não trivial) de

$PSL_2(\mathbb{R})$, uma contradição.

Identificaremos $PSL_2(\mathbb{R}) \equiv PSL_2(\mathbb{R}) \times id_{\mathbb{R}} \leqslant Iso(M)$, assim dada $g \in PSL_2(\mathbb{R}) \times id_{\mathbb{R}}$ calcularemos $(g \times id_{\mathbb{R}})(x, y) = (g(x), y)$, $(x, y) \in M$. Nesse sentido $(g \times id_{\mathbb{R}})(\gamma(t)) = (g(x), t)$ para todo $\in \mathbb{R}^+$. Se g preserva a orientação obtemos que $(g \times id_{\mathbb{R}})(\gamma)$ é assintótico a γ, ou seja, $(g \times id_{\mathbb{R}})(\gamma(\infty)) = \gamma(\infty)$. Agora tomaremos como representação linear de $PSL_2(\mathbb{R}) \times id_{\mathbb{R}}$ em $T_{\gamma(\infty)}\overline{M}$, a derivada no ponto $\gamma(\infty)$(que fica bem definida dada a hipotese que $M(\infty)$ possui estrutura diferenciável), denotada por ρ, ou seja, $\rho(g \times id_{\mathbb{R}}) = (d(g \times id_{\mathbb{R}}))_{\gamma(\infty)}$. Dado β um raio geodésico quaisquer, então $(g \times id_{\mathbb{R}})(\beta)$ também o é. Deste modo $(g \times id_{\mathbb{R}})(\beta)$ leva $M(\infty)$ em $M(\infty)$ para todo $g \times id_{\mathbb{R}} \in PSL_2(\mathbb{R}) \times id_{\mathbb{R}}$ e obtemos que $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ é um subespaço ρ-invariante de $T_{\gamma(\infty)}\overline{M}$.

Seja s_x a simetria de $\mathbb{H}^2$ em torno de x. Note que s_x preserva a orientação de $\mathbb{H}^2$, pois $(ds_x)_x$ tem autovalores $\{-1, -1\}$. Assim, $s_x \times id_{\mathbb{R}} \in PSL_2(\mathbb{R}) \times id_{\mathbb{R}}$, e $(d(s_x \times id_{\mathbb{R}}))_{\gamma(t)}$ tem autovalores $\{-1, -1, 1\}$. Como, por hipótese, o grupo das isometrias age C^1 em $\overline{M}$, então pela continuidade da derivada obtemos que $(d(s_x \times id_{\mathbb{R}}))_{\gamma(\infty)}$ tem os mesmos autovalores. Neste sentido $\rho(s_x \times id_{\mathbb{R}}) = -id_{T_{\gamma(\infty)}M(\infty)} \times id_V$, onde V é o complemento de $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ tal que $T_{\gamma(\infty)}\overline{M} = T_{\gamma(\infty)}M(\infty) \oplus V$. Então ρ restrito a $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ é $-id_{T_{\gamma(\infty)}M(\infty)}$, tomando outro ponto $y \in \mathbb{H}^2$, temos $\rho(s_y \times id_{\mathbb{R}}) = -id_{T_{\gamma(\infty)}M(\infty)}$ e portanto ρ é uma representação não trivial nem injetiva de $PSL_2(\mathbb{R}) \times id_{\mathbb{R}}$ uma contradição. $\square$

Capítulo 5

Não existência de compactificação diferenciável para espaços simétricos de tipo não-compacto

Neste capitulo apresentaremos a prova dos dois teoremas finais desse trabalho. O desenvolvimento da prova do primeiro teorema é fundamental para a prova do segundo teorema que é o resultado central deste trabalho.

Começamos com a definição de compactificação diferenciável fraca de Hadamard, que é definida como no caso diferenciável, mas neste caso o grupo G sera substituído por G_0.

Definicão 5.0.1 (Compactificação diferenciável fraca de Hadamard)**.** *Uma compactificação diferenciável fraca de Hadamard é uma estrutura diferenciável $\mathcal{D}$ (de classe C^1) sobre $\overline{M}$ compatível com a estrutura diferenciável de M e tal que a ação de G_0 sobre $\overline{M}$ é também C^1.*

Teorema 5.0.1. *Se $M = F \times \mathbb{R}^{k-1}$ onde F é um espaço simétrico de tipo não-compacto com posto 1 e $k \geqslant 2$, então M não admite uma compactificação diferenciável fraca de Hadamard. Em particular, M não admite uma compactificação* *diferenciável de Hadamard.*

Demonstração. Supõe que $\overline{M}$ admite tal estrutura diferenciável. Notaremos por G^F ao grupo das isometrias em F e G_0^F a componente conexa que contém a identidade, no que segue identificaremos a G_0^F com $G_0^F \times id_{\mathbb{R}^{k-1}}$. Os max flat em M são da forma $A = \gamma \times \mathbb{R}^{k-1}$, para $\gamma : \mathbb{R} \to F$ geodésica em F.

Os raios geodésicos da forma $\gamma_1 = \{x\} \times d$, $\gamma_2 = \{y\} \times d$ (onde $x, y \in F$ e d geodésica em $\mathbb{R}^{k-1}$) são assintóticos, ou seja, $z = \gamma_1(+\infty) = \gamma_2(+\infty)$. Ademais z esta contido em todos os apartamentos de $M(\infty)$, pois dado um apartamento $B(\infty)$, o max flat B é da forma $B = \beta \times \mathbb{R}^{k-1}$. Pela completude de F para cada $\beta(t)$ existe $\sigma_t : \mathbb{R} \to F$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que, $\sigma_t(t_0) = \beta(t)$, $\sigma_t(0) = x$, assim $x \times d$ é assintótico a $\beta(t) \times d$ e portanto $z \in B(\infty) \cap (\sigma_t \times \mathbb{R}^{k-1})(\infty)$, particularmente $z \in B(\infty)$. Este fato é importante no andamento da prova.

Para conseguir uma contradição tomaremos o teorema 3.3.1 para dividir a prova em duas partes: $dim\, F$ par e $dim\, F$ ímpar. No caso par o teorema garante que as simetrias estão contidas em G_0^F e deste modo o prova se desenvolve como no teorema 4.0.2. Para o caso ímpar a variedade é o hiperbólico $F = \mathbb{H}^{2m+1}$, nesse caso a rotação r de ângulo π é um elemento de G_0^F e ela gera uma contradição na dimensão da representação.

Primeiro, vamos supor que $dim\, F$ é par e faremos novamente a representação ρ de G_0^F sobre $T_zM(\infty)$ dada pela derivada (já que $T_zM(\infty)$ é um subespaço ρ-invariante). Particularmente calcularemos a representação da simetria s_x ($s_x \in G_0^F$ pelo teorema 3.3.1) obtendo pela continuidade da derivada que $\rho(s_x)$ restrito a $T_zM(\infty)$ tem autovalores 1 com multiplicidade $k-2$ e -1 com multiplicidade $dim\, F$. Neste sentido precisaremos de uma decomposição adicional de ρ, para isso o seguinte lema.

Lema 5.0.2. *O panel P de $z = \gamma_1(\infty)$ é uma subvariedade diferenciável de $M(\infty)$, de dimensão $k-2$.*

Demonstração. Como z está contido em todos os apartamentos de $M(\infty)$, então o panel P são os representantes dos raios geodésicos da forma $\{y\} \times d$, além disso dado $g \in G_0^F$ temos que $\{g(y)\} \times d$ é assintótico a $\{y\} \times d$, assim g fixa os pontos do panel. Tomamos $s_x \in G_0^F$ e observamos que definindo a função $s_x - id := (f \circ s_x - f \circ id)$ onde $f : M(\infty) \to \mathbb{R}$ com $(df)_p$ não nula, obtemos $s_x(p) - p = (f \circ s_x - f)(p) = 0$, $\forall p \in P$. Note que $(d(s_x - id))_p$ é não nula e portanto P é a imagem inversa do valor regular $\{0\}$, assim P é uma subvariedade de $M(\infty)$. Finalmente como cada geodésica d em $\mathbb{R}^{k-1}$ é da forma $\{tv, t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{S}^{k-2}\}$ ($\mathbb{S}^{k-2}$ esfera unitária), então obtemos uma correspondência biunívoca entre P e $\mathbb{S}^{k-2}$, assim $dim\ P = k-2$. □

Continuando com a prova, faremos a decomposição $T_zM(\infty) = T_zP \oplus V$ (V é o complementar de T_zP), além disso usamos o fato que s_x age trivialmente em P para afirmar que a representação ρ se decompõe como segue;

$$\rho(s_x) = \rho_0(s_x) + \rho_1(s_x),$$

onde ρ_0 é a representação restrita ao subespaço T_zP. Esta é uma representação trivial porque os elementos de G_0^F agem trivialmente em P, então $\rho_1(s_x)$ tem autovalores -1 de multiplicidade $dim\ F$, assim $\rho_1(s_x) = -id_V$, tomando outra simetria obtemos $\rho_1(s_y) = -id_V$, portanto ρ_1 é uma representação de G_0^F não trivial nem injetiva uma contradição pois no desenvolvimento do teorema 3.3.1, temos que o grupo G_0^F é simples.

Para o caso $dim\,F$ ímpar pelo teorema 3.3.1, $F = \mathbb{H}^{2m+1}$, tomaremos a rotação $r \in G_0^F$ de angulo π em $\mathbb{H}^{2m+1}$. Fazendo o mesmo procedimento que no caso par mas usando r, é possível provar que o panel P é uma subvariedade de $M(\infty)$. Seja ρ novamente a representação de G_0^F em $T_zM(\infty)$ dada pela derivada, lembremos que estamos identificando r com $r \times id_{\mathbb{R}^{k-1}}$, então $\rho(r)$ tem autovalores 1 de multiplicidade k e -1 de multiplicidade $2m$, na restrição ao bordo a multiplicidade de 1 é $k-1$, agora como G_0^F age trivialmente no panel P e pela decomposição $T_zM(\infty) = T_zP \oplus V$ (V é o complementar de T_zP) obtemos a decomposição de ρ

$$\rho(r) = \rho_0(r) + \rho_1(r),$$

onde ρ_0 é a representação trivial sobre T_zP, $\rho_1(r)$ tem autovalores -1 de multiplicidade $2m$ e 1 de multiplicidade um, ou seja, ρ_1 é uma representação não-trivial de $G_0^F = SO_0(2m+1)$ ($SO_0(2m+1)$ a componente conexa que contem a identidade do grupo das isometrias de F), uma contradição pois $SO_0(2m+1)$ não admite representação não-trivial de dimensão menor que $2m+2$. $\square$

5.1 Teorema central

Teorema 5.1.1. *Seja M um espaço simétrico de tipo não compacto de posto $k \geqslant 2$, então M não admite compactificação diferenciável de Hadamard.*

Demonstração. Novamente suponhamos que $\overline{M}$ admite tal estrutura diferenciável e notaremos por G ao grupo das isometrias em M e G_0 a componente conexa que contém a identidade, igualmente notaremos por α a ação de G sobre $\overline{M}$ e a correspondente ação de $\mathfrak{g}$.

Dada uma geodésica γ singular de índice 1 pela seção 2.11 de [Eb] definindo:

$$F_\gamma = \{\text{união de todas as geodésicas paralelas a } \gamma\},$$

temos que F_γ é uma subvariedade de M.

Uma geodésica β é paralela a γ se $\gamma^+ \sim \beta^+$ e $\gamma^- \sim \beta^-$. Ademais F_γ é isométrica a $F \times \mathbb{R}^{k-1}$ onde F é espaço simétrico de posto 1.

Escreveremos $\gamma(t) = (p, (t, 0, 0, ..., 0))$, $\ p \in F$, $\ (t, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{k-1}$ e definimos para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$F^t = F \times \{(t, 0, 0, ..., 0)\},$$

note que F^t são subvariedades de M, pois os F^t são copias de F, de fato $F = F^0$. Como no Teorema 5.0.1 notaremos por G^F ao grupo das isometrias em F e G_0^F a componente conexa que contém a identidade. Naturalmente temos que $G_0^F \leqslant G_0$. Agora vamos construir a seguinte decomposição em T_pM,

$$\begin{aligned} T_pM &= T_pF_\gamma \oplus (T_pF_\gamma)^\perp && (5.1)\\ &= T_pF \oplus T_p\mathbb{R}^{k-1} \oplus (T_pF_\gamma)^\perp. && (5.2)\end{aligned}$$

Lembremos que se $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{l}$ é a decomposição de Cartan em p, então temos a identificação $\mathfrak{p} \equiv T_pM$, neste sentido obtemos a decomposição,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F \oplus \mathfrak{p}_{eucl} \oplus \mathfrak{p}_0,$$

onde estamos identificando os subespaços $\mathfrak{p}_F \equiv T_pF$, $\mathfrak{p}_{eucl} \equiv T_p\mathbb{R}^{k-1}$, $\mathfrak{p}_0 \equiv (T_pF_\gamma)^\perp$. Além se $\mathfrak{p}^t + \mathfrak{l}^t$ é a decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ em $\gamma(t)$ e usando o fato $F^t \times \mathbb{R}^{k-1} \equiv F \times \mathbb{R}^{k-1}$, então obtemos a decomposição:

$$\mathfrak{p}^t = \mathfrak{p}_F^t \oplus \mathfrak{p}_{eucl}^t \oplus \mathfrak{p}_0^t.$$

Para encontrar uma contradição decomporemos $T_{\gamma(\infty)}\overline{M}$ em subespaços que tenham correspondência com $T_{\gamma(t)}F^t$, $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$ e $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$, particularmente nos focaremos no correspondente a $T_{\gamma(t)}F^t$ para que a representação dada pela derivada permita-nos obter as mesmas contradições da Proposição 5.0.1. Para isto usamos os seguintes lemas.

Lema 5.1.2. *Os subespaços tangentes $T_{\gamma(t)}F^t$, $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$ e $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$ admitem limites quando $t \to \infty$, denotados respectivamente por V_F, V_{eucl} e $V_\perp$. Além disso, $T_{\gamma(\infty)}\overline{M} = V_F \oplus V_{eucl} \oplus V_\perp$.*

Demonstração. Seja $K_0^F = \{g \in G_0^F | g(p) = p\}$, o grupo de isotropia em p (isto implica que os elementos de K_0^F fixam γ). Tomamos a representação linear dada pela derivada ρ^t de K_0^F em $T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Os subespaços $T_{\gamma(t)}F^t$, $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{k-1}$ e $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$ são invariantes por ρ^t, e pela continuidade da derivada quando $t \to \infty$ temos ρ^∞ divide $T_{\gamma(\infty)}\overline{M}$ em três subespaços que notaremos como no enunciado *i.e.* $T_{\gamma(\infty)}\overline{M} = V_F \oplus V_{eucl} \oplus V_\perp$. □

Lema 5.1.3. *Seja $\mathcal{O}$ a orbita de $\gamma(\infty)$ sob a ação de G_0. Então $V_\perp = T_{\gamma(\infty)}\mathcal{O}$, e para todo t, a restrição de $\alpha_{\gamma(\infty)}$ a $\mathfrak{p}_0^t$ é injetiva sobre $V_\perp$.*

Demonstração. É um fato conhecido que, sendo $\mathcal{O}$ a órbita de ação de grupo G_0 é uma subvariedade. Além disso, se $g(\gamma(\infty)) \in \mathcal{O}$ então $f(g(\gamma(\infty))) = (f \circ g)(\gamma(\infty)) \in \mathcal{O}$, $\forall f \in G_0$, assim $\mathcal{O}$ é invariante sob a ação de G_0, em consequência $T_{\gamma(\infty)}\mathcal{O}$ é um subespaço invariante de ρ. Agora definamos;

$$\begin{array}{rcc} \alpha_{\gamma(\infty)} : \mathfrak{p}_0^t & \longrightarrow & T_{\gamma(\infty)}\mathcal{O} \\ H & \longmapsto & exp^{-1}_{\gamma(\infty)}((expH)(\gamma(\infty))), \end{array}$$

onde $expH \in G_0$ e $exp_{\gamma(\infty)} \equiv exp_{\gamma(\infty)}|_{T_{\gamma(\infty)}\mathcal{O}}$. Para mostrar a injetividade lembremos que $\mathfrak{p}_0^t$ se identifica com o espaço $(T_{\gamma(t)}F_\gamma)^\perp$, assim $(expH)(\gamma)$ não é paralelo a γ. Tomamos $\alpha_{\gamma(\infty)}(H) = 0$ e suponhamos que $H \neq 0$, neste sentido $exp^{-1}_{\gamma(\infty)}((expH)(\gamma(\infty))) = 0$, assim obtemos

$$(expH)(\gamma(\infty)) = \gamma(\infty) \to (expH)(\gamma) \sim \gamma$$

portanto, $(expH)(\gamma(-\infty)) \neq \gamma(-\infty)$, ou seja, $\alpha_{\gamma(-\infty)}(H) \neq 0$. Por outro lado usando os fatos $Ad(s_{\gamma(t)}) = -id \in GL(\mathfrak{g})$ e $exp(Ad(s_{\gamma(t)})H) = s_{\gamma(t)}expHs^{-1}_{\gamma(t)}$, além disso, calculando

$$(s_{\gamma(t)}expHs^{-1}_{\gamma(t)})(\gamma(-\infty)) = (s_{\gamma(t)}expH)(\gamma(\infty)) = (s_{\gamma(t)})(\gamma(\infty)) = \gamma(-\infty)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} exp(-H)(\gamma(-\infty)) &= (exp(Ad(s_{\gamma(t)})H))(\gamma(-\infty)) & (5.3)\\ &= (s_{\gamma(t)}expHs^{-1}_{\gamma(t)})(\gamma(-\infty)) & (5.4)\\ &= \gamma(-\infty), & (5.5)\end{aligned}$$

assim, $exp(-H)(\gamma(-\infty)) = \gamma(-\infty)$. Agora aplicando $expH$ e usando o fato $expHexp(-H) = id \in G_0$ temos que $exp(H)(\gamma(-\infty)) = \gamma(-\infty)$. Logo $\alpha_{\gamma(-\infty)}(H) = 0$ uma contradição, portanto $H = 0$ e $\alpha_{\gamma(\infty)}$ é injectiva. Note que $dim\mathfrak{p}_0^t = n - dimF_\gamma = (n-1) - (dimF_\gamma - 1) = dim\mathcal{O}$, assim obtemos a sobrejetividade para todo t e portanto $V_\perp = T_{\gamma(\infty)}\mathcal{O}$.

□

Lema 5.1.4. *O panel P de $\gamma(\infty)$ é uma subvariedade de $M(\infty)$ e seu espaço tangente em $\gamma(\infty)$ é $V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$, e este espaço é invariante por ρ.*

Demonstração. Nós temos que $\gamma(t) = (p, (t, 0, ..., 0))$ isto é, $\gamma = \{p\} \times d$, com d geodésica em $\mathbb{R}^{k-1}$ e os max flat que contem a γ são da forma $\beta \times \mathbb{R}^{k-1}$ onde β geodésica em F. Pela Proposição 5.0.1 temos que P é uma subvariedade de $dim = k - 2$. Ademais qualquer geodésica em F não é assintótica às geodésicas $\{p\} \times d$, $p \in F$, d geodésica em $\mathbb{R}^{k-1}$, assim $T_{\gamma(\infty)}P \subseteq V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$. Por outro lado, $dim(V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)) = k - 2$ e portanto a igualdade segue.

Para finalizar lembremos pela Proposição 5.0.1 que G^F age trivialmente em P, então a representação ρ do grupo G_0^F em $T_{\gamma(t)}P$ é trivial e portanto invariante. □

Lema 5.1.5. *O subespaço V_F é invariante por ρ.*

Demonstração. Pelos lemas anteriores $V_\perp$ e $V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ são invariantes mediante ρ. Usando a classificação de espaços simétricos de tipo não-compacto com posto 1 obtemos que G_0^F é compacto. Agora por 2.3.1 a representação da derivada ρ de G_0^F em $T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ é completamente redutível e a decomposição em subespaços irredutíveis é única, isto é;

$$T_{\gamma(\infty)}M(\infty) = \bigoplus_{j=1}^{k} W_j \ \ e \ \ \rho = \bigoplus_{j=1}^{k} \rho_j,$$

onde as sub-representações ρ_j de G_0^F em W_j são irredutíveis. Pela unicidade temos que $V_\perp$ e $V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$ são somas de alguns subespaços $W_j's$ e também que exite outro subespaço invariante V' formado pela soma dos restantes, então $T_{\gamma(\infty)}M(\infty) = V' \oplus V_\perp \oplus V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)$, lembremos que $T_{\gamma(\infty)}\overline{M} = V_F \oplus V_{eucl} \oplus V_\perp$, assim $V_F \subseteq V'$, mas $dim(T_{\gamma(\infty)}M(\infty)) = n - 1$, $dim(V_{eucl} \cap T_{\gamma(\infty)}M(\infty)) = k - 2$ e $dim(V_\perp) = n - dim(F_\gamma)$, logo;

$$dim(V') = dim(F_\gamma) - (k - 1) = dim(V^F),$$

portanto $V' = V^F$ e ρ é uma representação de G_0^F em V^F invariante. □

Para finalizar a prova temos, pelo Lema 5.1.5 que representação ρ de G_0^F em V_F é invariante. Deste modo podemos considerar novamente os casos de $dimF$ par e ímpar. Para o caso par as simetrias estão contidas em G_0^F, fazendo o mesmo processo da primeira parte do teorema 5.0.1 obtemos que dadas duas simetrias $s_x, s_y \in G_0^F$ é possível obter uma sub-representação satisfazendo $\rho_1(s_x) = \rho_1(s_y) = -id$, o qual é uma contradição pois G_0^F é simples.

Para o caso impar tomamos novamente uma rotação r de ângulo π, que é um elemento de G_0^F e imitando o processo feito na segunda parte da prova do teorema 5.0.1 obtemos uma contradição com respeito à dimensão da representação. Portanto podemos concluir que M não admite uma compactificação diferenciável fraca de Hadamard. Em particular, M não admite uma compactificação diferenciável de Hadamard. $\square$

Bibliografia

[Ba] Barry, S.: “Representations of finite and compact groups”, American Mathematical Society (1996).

[Da] Damato, C.: “Grupos de Lie Compactos”, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas, 2011.

[Do1] Do Carmo, M.: “Geometria Riemmanina”, 5ed. IMPA (2011).

[Do2] Do Carmo, M.: “Geometria Diferencial de curvas e superfícies”, 5ed. SBM (2012).

[Eb] Eberlein, P.: “Geometry of nonpositively curved manifolds”, Chicago Lectures in Mathematics (1996).

[Es] Eschenburg, J-H.: “Lecture Notes on symmetric Spaces”, disponível em http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.484.5422&rep=rep1 &type=pdf

[He] Helgason, S.: “Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces”, Academic Press (1978).

[Kn] Knapp, A.: “Representation theory of semisimple groups, volume 36 of Princeton Mathematical Series”, Princeton University Press (1986).

[Kl1] Kloeckner, B.: "Symmetric space of higher rank do not admit differentiable compactifications", arXiv:0912.0814v1(2009).

[Kl2] Kloeckner, B.: "Géométrie des bords: compactifications différentiables et remplissages holomorphes", Tese de doutorado, Unité de mathématiques pures et appliquées, École normale supérieure de Lion, 2006.

[Na] Narváez, L.: "Una introducción a la teoría de representaciones", disponível em http://euclides.us.es/da/actividades/represen.pdf