

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**SOLUÇÃO DE UM  
PROBLEMA NÃO LINEAR  
DO TIPO  
REAÇÃO-DIFUSÃO NA  
MODELAGEM DE  
DISPERSÃO DE INSETOS**

por

Maria Elaine dos Santos Soares

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale  
Orientadora

Porto Alegre, agosto de 2002.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Soares, Maria Elaine dos Santos

SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA NÃO LINEAR DO TIPO REAÇÃO-DIFUSÃO NA MODELAGEM DE DISPERSÃO DE INSETOS / Maria Elaine dos Santos Soares.— Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2002.

181 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002.

Orientadora: Varriale, Maria Cristina

Dissertação: Matemática Aplicada  
Modelo, Dissertação

# SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA NÃO LINEAR DO TIPO REAÇÃO-DIFUSÃO NA MODELAGEM DE DISPERSÃO DE INSETOS

por

Maria Elaine dos Santos Soares

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Ecologia Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Varriale

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Alberto Diaz Rodrigues  
UFSM

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli  
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Àvila Zingano  
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em  
07 de agosto de 2002.

Prof. Dr. Vilmar Trevisan  
Coordenador

Para Daiane  
“Quando uma criatura humana  
desperta para um sonho e,  
sobre ele lança toda sua fé...  
Todo o universo conspira a seu favor”

# AGRADECIMENTOS

Agradeço

aos meus pais, pelo apoio que me foi dado em todas as etapas de minha vida;

à Professora Maria Cristina Varriale, pela sua orientação;

a todos que expressaram, através de um gesto ou de uma palavra, o incentivo para a realização deste trabalho;

aos colegas do Laboratório de Computação Científica, pelo apoio e troca de experiências;

ao Evandro, à Carolina e à Sânzara, pela hospitalidade;

àqueles que souberam ter paciência e conseguiram entender os momentos em que não pude estar presente e, sobretudo

agradeço a Deus, que acima de todas as coisas, nos dá a fé, a esperança e a vida em cada manhã que desperta.

## Conteúdo

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>IV</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>V</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>VI</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>VII</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 LEI DE CONSERVAÇÃO E SUA RELAÇÃO COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.1 Modelo Matemático</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.2 Lei de Conservação</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2.3 Descrevendo Dispersão - Versão Unidimensional</b> . . . . .	<b>15</b>
2.3.1 Equação da Convecção . . . . .	15
2.3.2 Equação da Difusão . . . . .	22
2.3.3 Equação de Convecção-Difusão . . . . .	30
2.3.4 Equações de Reação-Difusão . . . . .	31
2.3.5 Equação da Difusão com Fluxo por Taxia . . . . .	32
<b>3 A EQUAÇÃO DE FISHER</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>3.1 Aproximação de Kendall</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3.2 Adimensionalização do Problema</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>3.3 Soluções do Tipo Onda Viajante</b> . . . . .	<b>42</b>
3.3.1 Análise das soluções em uma vizinhança dos estados estacionários . . . . .	43
3.3.2 Análise global das soluções do sistema não linear . . . . .	49
<b>3.4 Solução Assintótica para a Equação de Fisher</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>3.5 Estabilidade das Soluções do Tipo Onda Viajante</b> . . . . .	<b>60</b>

<b>4</b>	<b>ALGUNS MODELOS DE DISPERSÃO DE INSETOS COM COEFICIENTE DE DIFUSÃO CONSTANTE . . . . .</b>	<b>64</b>
4.1	Com Termo de Fonte . . . . .	67
4.1.1	Com decaimento exponencial . . . . .	67
4.1.2	Com crescimento exponencial . . . . .	70
4.1.3	Com dois estados estacionários . . . . .	74
4.1.4	Com mais de dois estados estacionários . . . . .	79
4.2	Com termo de convecção . . . . .	96
4.3	Modelos de Gurney & Nisbet . . . . .	97
<b>5</b>	<b>ALGUNS MODELOS DE DISPERSÃO DE INSETOS COM COEFICIENTE DE DIFUSÃO PROPORCIONAL A UMA POTÊNCIA DA DENSIDADE POPULACIONAL . . . . .</b>	<b>106</b>
5.1	Sem Termo de Fonte . . . . .	108
5.1.1	Equação da difusão . . . . .	108
5.1.2	Equação de convecção-difusão . . . . .	111
5.2	Com Termo de Fonte do Tipo $F(u) = Ku^p(1 - u^q)$ - Equação da difusão . . . . .	118
<b>6</b>	<b>UMA EQUAÇÃO DO TIPO REAÇÃO-DIFUSÃO COM COEFICIENTE DE DIFUSÃO <math>D</math> DEPENDENTE DO TEMPO . . .</b>	<b>140</b>
6.1	Estimativa de Parâmetros a Partir de Dados Experimentais [Banks <i>et al</i> (1985)] . . . . .	145
6.2	Formulação do Problema . . . . .	149
6.3	Resolução Analítica da Equação da Difusão, num Espaço Unidimensional Limitado, sem Termo de Fonte . . . . .	155
6.4	Estudo das Soluções Numéricas para as Equações Diferenciais Parciais, com $D$ Constante e $D$ Variando no Tempo, $\alpha$ Constante e $\alpha$ Variando no Tempo. . . . .	158
6.4.1	Equações diferenciais parciais com termo de decaimento . . . . .	159
6.4.2	Equações diferenciais parciais onde o termo de decaimento é substituído pelo termo de reação do tipo logístico . . . . .	166

<b>6.5 Solução do Tipo Onda Viajante</b> . . . . .	<b>171</b>
<b>7 CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>175</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b> . . . . .	<b>178</b>



## Lista de Figuras

Figura 2.1	<i>Tube com secção transversal de área <math>A</math></i> . . . . .	12
Figura 2.2	<i>Duas representações da solução da equação (2.16), solução do tipo onda viajante: (a) no espaço <math>(x, t, u)</math>, como uma cordilheira (b) no plano <math>(x, u)</math>.</i> . . . . .	17
Figura 2.3	<i>Retas características de equação <math>x-ct = s</math>, sendo <math>s</math> uma constante arbitrária, correspondentes à solução do tipo onda viajante da equação diferencial parcial (2.16).</i> . . . . .	18
Figura 2.4	<i>Onda viajante do tipo trem de onda periódico</i> . . . . .	19
Figura 2.5	<i>Frente de onda <math>U(z) = (1 + \exp(bz))^{-1}</math>, para <math>b = 2</math>.</i> . . . . .	20
Figura 2.6	<i>Gráficos das distribuições gaussianas <math>g(m, n)</math> (curva contínua) e binomial <math>p(m, n)</math> (pontos), para <math>n=4</math>.</i> . . . . .	24
Figura 2.7	<i>Gráficos das distribuições gaussianas <math>g(m, n)</math> (curva contínua) e binomial <math>p(m, n)</math> (pontos), para <math>n=10</math>.</i> . . . . .	25
Figura 2.8	<i>Representação da solução da equação (2.42) no plano <math>(x, u)</math>, em diversos tempos <math>t</math> para <math>D = 0.3</math>.</i> . . . . .	26
Figura 2.9	<i>Representação da solução da equação (2.42) no espaço <math>(x, t, u)</math>, para <math>D = 0.3</math>.</i> . . . . .	26
Figura 3.1	<i>Gráfico de <math>f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)</math>.</i> . . . . .	36
Figura 3.2	<i>Evolução temporal de uma solução da equação diferencial (3.18). (a) em <math>t = 0</math>; (b) <math>t = t_1 &gt; 0</math>; (c) <math>t = t_2 &gt; t_1</math>. A seqüência apresenta o movimento do perfil inicial, no sentido de <math>x^*</math> crescente.</i> . . . . .	42
Figura 3.3	<i>Autovetores em <math>(U_{est}, V_{est}) = (0, 0)</math> e <math>(1, 0)</math>, no plano de fase <math>UV</math>, para <math>c &gt; 2</math>.</i> . . . . .	48
Figura 3.4	<i>Trajatórias linearmente independentes, do sistema (3.31) para <math>2 &gt; c = 1</math>; a origem é um ponto espiral.</i> . . . . .	49
Figura 3.5	<i>Plano de fase para a equação (3.26) com <math>c = 2.5 &gt; 2</math>. O ponto <math>(0, 0)</math> é nodo estável e <math>(1, 0)</math> é um ponto de sela.</i> . . . . .	50
Figura 3.6	<i>Plano de fase para a equação (3.26) com <math>c = 0.5 &lt; 2</math>. O ponto <math>(0, 0)</math> é espiral estável e <math>(1, 0)</math> é um ponto de sela. Nem o 2<sup>o</sup> nem o 3<sup>o</sup> quadrantes possuem significados biológicos, pois correspondem a <math>U &lt; 0</math>.</i> . . . . .	51
Figura 3.7	<i>Relação de dispersão, relação entre <math>c</math> e <math>a</math>, para <math>a &gt; 0</math>.</i> . . . . .	53

- Figura 3.8 *Desenvolvimento da solução do tipo onda viajante da equação de Fisher, evoluindo para duas frentes de ondas viajantes, sendo  $u(x, t) = \{1 + \exp[a(x - ct)]\}^{-1}$ , movimentando-se para a direita e  $u(x, t) = (1 + \exp[a(-x - ct)])^{-1}$ , movimentando-se para a esquerda, com velocidade de propagação da onda  $c = 2.25$  e  $a = 0.8$ ; (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 2$ , (c)  $t = 5$ . . . . . 55*
- Figura 3.9 *Duas frentes de onda definidas pela equação  $u(z) = \left(1 + \exp\left(\frac{z}{c}\right)\right)^{-1}$ : (a)  $c = 2.5$ , (b)  $c = 5$ . Vê-se que quanto maior o valor da velocidade  $c$ , menos íngreme é a frente de onda. . . . . 60*
- Figura 4.1 *Três tipos de distribuição com a mesma média e a mesma variância: (1) normal (Gaussiana) (curva contínua), (2) leptocúrtica (pontos), (3) platicúrtica (pontos). . . . . 66*
- Figura 4.2 *Solução (4.5), na qual  $t_1 < t_2 < t_3$ , sendo  $D = 0.3$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $N_0 = 20$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  e  $t_3 = 3$ ; a densidade  $u(x, t)$  diminui rapidamente, a medida que o tempo passa. . . . . 69*
- Figura 4.3 *Solução (4.13), na qual  $t_1 < t_2 < t_3$ , sendo  $D = 0.3$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $N_0 = 20$ ; (a)  $t_1 = 0.1$ ,  $t_2 = 0.2$ ,  $t_3 = 0.3$ , (b)  $t_1 = 0.2$ ,  $t_2 = 0.8$ ,  $t_3 = 1.5$ , (c)  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  e  $t_3 = 3$ . . . . . 71*
- Figura 4.4 *Frente de onda de isoconcentração  $u = u_f$  na dispersão da população malthusiana; solução (4.22) com  $N_0 = 20$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma_0 = 0.5$  e  $D = 0.3$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $t_4 = 4$  e  $t_5 = 5$ . . . . . 73*
- Figura 4.5 *Frente de onda movendo-se para regiões vazias, de ambos os lados. 74*
- Figura 4.6 *Gráfico de  $c$  x  $\lambda$ , onde  $c = D\lambda + \frac{F'(0)}{\lambda}$ , com  $F'(0) = 8$  e  $D = 1.12$ . 76*
- Figura 4.7 *Gráfico de  $c$  x  $\lambda'$ , onde  $c = -D\lambda' - \frac{F'(K)}{\lambda'}$ , com  $F'(0) = -15$  e  $D = 1$ . . . . . 77*
- Figura 4.8 *Frente de onda em dois tempos distintos,  $t_1 > t_2$ . . . . . 78*
- Figura 4.9 *Perto de  $u = 0$ ,  $u = \exp(-\lambda(x - ct))$ ; perto de  $u = K$ , tem-se  $u = K - \varepsilon(t)$ , onde  $\varepsilon = \exp(\lambda'(x - ct))$ . . . . . 79*
- Figura 4.10 *Termo de predação externa  $f(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$ . . . . . 80*
- Figura 4.11 *Domínios, no plano  $rq$  com  $r \geq 0$ ,  $q \geq 0$  no qual a equação (4.43) admite uma, duas ou três raízes reais. Pontos  $(q, r)$  sobre a curva correspondem a situações com 2 estados estacionários e o ponto  $Q$  refere-se à situação apresentada na figura 4.13. . . . . 82*

- Figura 4.12 *Determinação dos estados estacionários  $u_{est}^* = u_1$ , da equação diferencial (4.41) para  $r=0.5$  e  $q=6.8$ . . . . .* 82
- Figura 4.13 *Determinação dos estados estacionários  $u_{est}^* = u_1$  e  $u_{est}^* = u_2$  da equação diferencial (4.41) para  $r=0.5$  e  $q=7.3$ . . . . .* 83
- Figura 4.14 *Determinação dos estados estacionários  $u_{est}^* = u_1$ ,  $u_{est}^* = u_2$  e  $u_{est}^* = u_3$  da equação diferencial (4.41) para  $r=0.5$  e  $q=9$ . . . . .* 83
- Figura 4.15 *Os valores de  $u$ , tais que  $g(u) = 0$ , constituem os estados estacionários da equação diferencial  $\frac{du}{dz} = g(u)$ , dois dos quais são estáveis:  $u_1$  corresponde ao refúgio da população e  $u_3$  à explosão da população. Os parâmetros que correspondem a este gráfico são os mesmos da figura 4.14, isto é,  $r = 0.5$  e  $q = 9$ . . . . .* 84
- Figura 4.16 *(a) Plano de fase para o sistema (4.48); com  $r = 0.5$ ,  $q = 9$ ,  $c = 0.5 > 0$ ,  $c < 2[g'(0)]^{\frac{1}{2}} = 1.414$  e  $c < 2[g'(u_2)]^{\frac{1}{2}} = 1.38$ . . . . .* 89
- Figura 4.17 *(a) Plano de fase para o sistema (4.48) com velocidade  $c > 0$ ; com  $r=0.5$ ,  $q=9$ ,  $c=1.5$ ,  $c > 2[g'(0)]^{\frac{1}{2}}=1.414$  e  $c > 2[g'(u_2)]^{\frac{1}{2}}=0.71$ . (b) Possíveis soluções do tipo ondas viajantes restritas aos domínios indicados  $d_1$ :  $U(-\infty) = u_1$ ,  $U(+\infty)=0$ ;  $d_2$ :  $U(-\infty) = u_1$ ,  $U(+\infty) = u_2$ ;  $d_3$ :  $U(-\infty) = u_3$ ,  $U(+\infty) = u_2$ . (c) Autovetores no plano  $U \frac{dU}{dz}$  em  $(U_{est}, V_{est}) = (0, 0)$ ,  $(U_{est}, V_{est}) = (u_1, 0)$ ,  $(U_{est}, V_{est}) = (u_2, 0)$  e  $(U_{est}, V_{est}) = (u_3, 0)$ ;  $g'(0) = 0.5$ ,  $g'(u_1) = -0.212$ ,  $g'(u_2) = 0.126$ ,  $g'(u_3) = -0.191$ . . . . .* 90
- Figura 4.18 *Representação gráfica de  $\tan \theta \times c$ ; (a)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_1^{(1)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ , (b)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_1^{(2)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ , (c)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_3^{(1)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ , (d)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_3^{(2)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ . . . . .* 93
- Figura 4.19 *(a) Plano de fase incluindo uma onda conectando os estados estacionários  $u_3$  e  $u_1$ ; com  $0 < c = 0.17$ ,  $r = 0.5$  e  $q = 9$ . (b) Solução do tipo frente de onda que satisfaz  $U(-\infty) = u_3$  e  $U(+\infty) = u_1$ . . . . .* 93
- Figura 4.20 *Se  $A_1 > A_3$ , a velocidade  $c$  é negativa e a explosão onde  $U = u_3$  é reduzida. Se  $A_1 < A_3$ , a velocidade  $c$  é positiva e a explosão da população de lagartas se espalha para dentro da área de refúgio onde  $U = u_1$ . . . . .* 95
- Figura 4.21 *Gráfico da faixa favorável, de largura  $2X_G$ , na qual nascimentos superam mortes. . . . .* 101

- Figura 4.22 *Gráfico da solução (4.82) em  $t = 0.3$ , para um sistema com os seguintes parâmetros:  $D = 0.5$ ,  $g_0 = 5.3$ ,  $\delta_0 = 7.2$  e  $X_G = 0.3$ . . . . .* 101
- Figura 4.23 *Resolução gráfica da equação (4.88) para  $g(0) = 2$ ,  $\delta_0 = 3$ ,  $D=1.2$  e  $X_G = 0.6$ ,  $a_{max} = 2.04$  e  $\frac{\pi}{2}X_G=0.94$ . . . . .* 104
- Figura 4.24 *Gráfico do lado direito e lado esquerdo da equação (4.88) para dois valores diferentes de  $X_G$ , com  $g(0) = 2$ ,  $\delta_0 = 3$ ,  $D=1.2$ ; (a)  $X_G = 0.6$ , (b)  $X_G = 1.0$ . . . . .* 104
- Figura 5.1 *(a) Gráfico de  $D(u)$ , definida em (5.7), para  $m = 0.5$ ,  $m = 1$  e  $m = 2$ ; (b) gráfico de  $\frac{du^m}{du}$  em função de  $u$ , para  $m = 0.5$ ,  $m = 1$  e  $m = 2$ . . . . .* 108
- Figura 5.2 *(a) Gráfico da solução (5.11), como uma função de  $x$ , sendo  $m = \frac{1}{2}$ ,  $Q=12$ ,  $D_0=0.9$ ,  $u_0=5$ , em dois instantes de tempo distintos:  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 5$ ; (b) gráfico de  $D(u) = D_0 \left(\frac{u}{u_0}\right)^m$ , com  $m = \frac{1}{2}$ ,  $D_0=0.9$ ,  $u_0=5$ . . . . .* 110
- Figura 5.3 *(a) Gráfico da solução (5.11), como uma função de  $x$ , sendo  $m = 2$ ,  $Q=12$ ,  $D_0=0.9$ ,  $u_0=5$ , em dois instantes de tempo distintos:  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 5$ ; (b) gráfico de  $D(u) = D_0 \left(\frac{u}{u_0}\right)^m$ , com  $m = 2$ ,  $D_0=0.9$  e  $u_0=5$ . . . . .* 110
- Figura 5.4 *Velocidade de propagação da onda:  $Q = 12$ ,  $D_0 = 0.9$  e  $u_0 = 5$ ; (a) para  $m = \frac{1}{2}$ , (b) para  $m = 2$ . . . . .* 111
- Figura 5.5 *Gráfico em  $t = 10$ , da solução (5.11), para  $Q = 20$ ,  $u_0 = 5$ ,  $D_0 = 0.9$ : (a) para  $m = 2 \cdot 10^{-1}$ , (b) para  $m = 2 \cdot 10^{-6}$ , (c) gráfico da solução usual da equação diferencial (2.46) com coeficiente de difusão constante. . . . .* 112
- Figura 5.6 *Fluxos de organismos devido à advecção ( $\beta u$ ) e à difusão  $\left(-D \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ . . . . .* 113
- Figura 5.7 *Modelo de dispersão com o centro de atração na origem:  $S_0$  é a velocidade do movimento por atração. . . . .* 114
- Figura 5.8 *Distribuição espacial do estado estacionário de uma população  $u(x, t)$ , para um coeficiente de difusão proporcional a  $u^m$  e convecção dirigida para o centro;  $D = 0.5$  e  $S_0 = 2$ . . . . .* 116

Figura 5.9	<i>Soluções (5.47), do tipo onda viajante com os mesmos valores para <math>b</math> e <math>s</math>, mas distintos valores de <math>a</math>, mostram que elas constituem uma translação em <math>z</math>, uma em relação à outra. . . . .</i>	121
Figura 5.10	<i>Gráfico de <math>U(z)</math>, dado por (5.66), com <math>a = 1</math> e <math>q = 2</math>. . . . .</i>	123
Figura 5.11	<i>Gráfico da função <math>c(q)</math>, determinada em (5.65). . . . .</i>	124
Figura 5.12	<i>Representação gráfica do módulo da declividade, dada pela equação (5.69); o ponto de máximo determina <math>S_{\max} \simeq 0.24</math> em <math>q \simeq 8.07</math>. . . . .</i>	124
Figura 5.13	<i>Solução analítica do tipo onda viajante dada por (5.70) (linha contínua); solução assintótica dada por (3.81), até a ordem 1, para <math>c = 5 &gt; 2</math> (linha pontilhada). . . . .</i>	126
Figura 5.14	<i>Autovetores em <math>(U_{est}, V_{est}) = (1, 0)</math>, e <math>(U_{est}, V_{est}) = (0, -c)</math>, no plano de fase <math>UV</math>, para <math>c = 2</math>. . . . .</i>	135
Figura 5.15	<i>Plano de fase <math>UV</math> mostrando que não existe uma trajetória possível de <math>(1, 0)</math> até <math>U = 0</math>, para algum valor de <math>V</math> negativo finito quando <math>0 &lt; c = 0.5 &lt; c_{\min}</math>. . . . .</i>	136
Figura 5.16	<i>Plano de fase <math>UV</math> mostrando que existe uma trajetória possível de <math>(1, 0)</math> até <math>(0, -c_{\min})</math>, <math>c_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}</math>, de acordo com a equação (5.113). . . . .</i>	136
Figura 5.17	<i>Solução do tipo onda viajante de <math>U = (1, 0)</math> para <math>U = (0, 0)</math>; <math>c = 1 &gt; c_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}</math>. . . . .</i>	137
Figura 5.18	<i>Solução do tipo onda viajante de <math>U = 1</math> para <math>U = 0</math>, sendo <math>a = 0.08</math> e <math>b = 2</math>. A solução (5.121), em (a), correspondente à figura 5.16, tem uma derivada descontínua na borda frontal, em <math>z_c = \sqrt{2}</math>; a solução (5.122), em (b), corresponde à figura 5.17. . . . .</i>	139
Figura 6.1	<i>Gráfico de <math>D(t) = D_0 e^{-t}</math>, para <math>D_0 = 0.3</math>. . . . .</i>	142
Figura 6.2	<i>Representação da solução (6.8) no plano <math>(x, u)</math>, em diversos tempos <math>t</math> para <math>D_0 = 0.3</math>, <math>u_0 = 1</math> e <math>x_0 = 0</math>. . . . .</i>	142
Figura 6.3	<i>Gráfico de <math>D(t)</math> constante igual a <math>D_0</math>, para <math>D_0 = 0.15</math>. . . . .</i>	143
Figura 6.4	<i>Representação da solução da equação (2.42) no plano <math>(x, u)</math>, em diversos tempos <math>t</math> para <math>D = 0.15</math>. . . . .</i>	143
Figura 6.5	<i>Coeficiente de difusão dependente do tempo, determinado por Banks et al (1985). . . . .</i>	150
Figura 6.6	<i>Coeficiente de decaimento dependente do tempo, determinado por Banks et al (1985). . . . .</i>	150

- Figura 6.7 *Curva  $D(t) = 0.1495[1 - \tanh(15.65t - 28.34)]$  ajustada aos pontos apresentados na tabela 6.1 definindo o coeficiente de difusão dependente do tempo, no caso contínuo. . . . .* 152
- Figura 6.8 *Curva  $\alpha(t) = 0.1261[1 - \tanh(36.39 - 70.89)]$  ajustada aos pontos apresentados na tabela 6.1, definindo o termo de decaimento, dependente do tempo, no caso contínuo. . . . .* 153
- Figura 6.9 *Representação gráfica da solução analítica (6.37), considerando  $D = 0.03$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $u_0 = 20$ ; (a) nos diferentes tempos  $t_1 = 0.12$ ,  $t_2 = 0.5$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 2$  e  $t_5 = 3$ , (b) no tempo inicial  $t = 0$ . . . . .* 156
- Figura 6.10 *Representação gráfica da solução analítica (6.37), considerando  $D = 0.015$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $u_0 = 20$ ; (a) nos diferentes tempos  $t_1 = 0.12$ ,  $t_2 = 0.5$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 2$  e  $t_5 = 3$ , (b) no tempo inicial  $t = 0$ . . . . .* 156
- Figura 6.11 *Representação gráfica da solução analítica (6.42), para  $u(x, T)$ , considerando  $D = 1$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $u_0 = 20$ ; (a) nos diferentes tempos  $t_1 = 0.12$ ,  $t_2 = 0.5$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 2$  e  $t_5 = 3$ . (b) no tempo inicial  $t = 0$ . . . . .* 158
- Figura 6.12 *Representação gráfica da solução da equação da difusão, (6.50), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e sem termo de fonte, no plano  $(x, u)$ , nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas. . . . .* 160
- Figura 6.13 *Representação, no espaço  $(x, t, u)$ , da solução da equação da difusão, (6.50), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e sem termo de fonte; (a) de  $t = 0$  até o final do primeiro dia após a liberação dos insetos, (b) de  $t = 0$  até o final do segundo dia após a liberação dos insetos, (c) de  $t = 0$  até o final do terceiro dia após a liberação dos insetos. . . . .* 160
- Figura 6.14 *Representação gráfica da solução da equação da difusão-decaimento, (6.51), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e coeficiente do termo de decaimento ( $\alpha$ ) constante, no plano  $(x, u)$ , nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas. . . . .* 161
- Figura 6.15 *Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação da difusão-decaimento, (6.52), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e coeficiente do termo de decaimento ( $\alpha$ ) dependente do tempo, nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas. . . . .* 162
- Figura 6.16 *Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação da difusão, com coeficiente de difusão ( $D = D(t)$ ) e sem termo de fonte, nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas. . . . .* 163

Figura 6.17	<i>Representação gráfica, no plano <math>(x, u)</math>, da solução da equação da difusão, sem termo de fonte, nos tempos <math>t = 24</math>, <math>t = 48</math>, e <math>t = 72</math> horas; as linhas contínuas representam a equação da difusão com coeficiente constante (6.50); os pontos representam a equação da difusão (6.53), com coeficiente de difusão variando temporalmente, <math>D = D(t)</math>.</i>	164
Figura 6.18	<i>Representação gráfica, no plano <math>(x, u)</math>, da solução da equação da difusão-decaimento, (6.54), com coeficiente de difusão (<math>D = D(t)</math>) e coeficiente do termo de decaimento (<math>\alpha</math>) constante, nos tempos <math>t = 12</math>, <math>t = 24</math>, <math>t = 36</math>, <math>t = 48</math>, <math>t = 60</math> e <math>t = 72</math> horas.</i>	165
Figura 6.19	<i>Representação gráfica, no plano <math>(x, u)</math>, da solução da equação da difusão-decaimento, (6.55), com coeficiente de difusão <math>D = D(t)</math> e coeficiente do termo de decaimento <math>\alpha = \alpha(t)</math>, nos tempos <math>t = 12</math>, <math>t = 24</math>, <math>t = 36</math>, <math>t = 48</math>, <math>t = 60</math> e <math>t = 72</math> horas.</i>	166
Figura 6.20	<i>Comportamento dos besouros ao final do primeiro dia, nos modelos com termo de decaimento.</i>	167
Figura 6.21	<i>Comportamento dos besouros ao final do segundo dia, nos modelos com termo de decaimento.</i>	167
Figura 6.22	<i>Comportamento dos besouros ao final do terceiro dia, nos modelos com termo de decaimento.</i>	168
Figura 6.23	<i>Representação gráfica, no plano <math>(x, u)</math>, da solução da equação de Fisher (6.56), com <math>r = 0.4</math>, nos tempos <math>t = 12</math>, <math>t = 24</math>, <math>t = 36</math>, <math>t = 48</math>, <math>t = 60</math> e <math>t = 72</math> horas.</i>	168
Figura 6.24	<i>Representação da solução da equação da difusão (6.57), com <math>D = D(t)</math> e termo de crescimento logístico, nos diferentes tempos <math>t = 12</math>, <math>t = 24</math>, <math>t = 36</math>, <math>t = 48</math>, <math>t = 60</math> e <math>t = 72</math> horas, com <math>r = 0.4</math>.</i>	169
Figura 6.25	<i>Representação da solução da equação de Fisher (6.56) (1) e da equação da difusão, com coeficiente de difusão variando temporalmente (6.57), acrescido do termo de crescimento logístico (2), (a) no primeiro dia, (b) no segundo dia e (c) no terceiro dia após a liberação dos besouros.</i>	170
Figura 6.26	<i>Plano de fase do sistema não autônomo (6.61) com <math>r = 0.4</math> e <math>c = 0.5</math>.</i>	173
Figura 6.27	<i>Plano de fase do sistema não autônomo (6.61) com <math>r = 0.4</math> e <math>c = 2.0</math>.</i>	173

Figura 6.28 *Plano de fase do sistema não autônomo (6.61) com  $r = 0.4$  e  $c = 0.5$ , considerando as condições iniciais  $[U(0) = 1, V(0) = 2]$  que produz a trajetória  $A$  e  $[U(1) = 1, V(1) = 2]$  que produz a trajetória  $B$ .* . . . . . 174



## Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Comparação entre os valores obtidos a partir das distribuições binomial $p(m, n)$ e gaussiana $g(m, n)$ . . . . .	24
Tabela 3.1	<i>Resumo dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio <math>(U_{est}, V_{est}) = (0, 0)</math> e <math>(U_{est}, V_{est}) = (1, 0)</math>.</i> . . . . .	47
Tabela 4.1	<i>Resumo dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio <math>(U_{est}, V_{est}) = (0, 0)</math> e <math>(U_{est}, V_{est}) = (u_i, 0)</math>, para <math>i = 1, 2</math> e <math>3</math>.</i> . . . . .	88
Tabela 5.1	<i>Resumo dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio <math>(U_{est}, V_{est}) = (0, 0)</math>, <math>(U_{est}, V_{est}) = (1, 0)</math> e <math>(U_{est}, V_{est}) = (0, -c)</math></i> . . . . .	134
Tabela 6.1	Tabela de valores obtidos para o coeficiente de difusão $D(t)$ e para o coeficiente de decaimento $\alpha(t)$ , através de experimentos distintos. Dados coletados após o primeiro, segundo e terceiro dia da liberação dos insetos, num período de três dias [Banks <i>et al</i> (1985)].	149

## RESUMO

Neste trabalho tratamos da formulação e solução de um problema não linear do tipo reação-difusão, na modelagem de dispersão de insetos. Começamos estabelecendo uma lei de conservação e a partir desta, deduzimos algumas equações importantes para o desenvolvimento do nosso estudo, tais como a equação de convecção, de difusão e simultaneamente convecção e difusão. Se considerarmos uma escala de tempo que possibilite a adição ou retirada de indivíduos no meio, conforme seja considerada reprodução, migração ou morte, podemos acrescentar ao processo difusivo um termo de reação, obtendo então, a equação do tipo reação-difusão. Se o termo de reação for dependente da densidade populacional e do tipo logístico, obtém-se a equação de Fisher. Dessa equação abordamos alguns aspectos, tais como, determinação dos estados estacionários, análise da estabilidade dos mesmos, representação gráfica no plano de fase e por último investigamos a existência de solução do tipo onda viajante.

Abordamos, também, alguns exemplos apresentados na literatura, envolvendo equação da difusão com coeficiente constante e com coeficiente dependente da densidade populacional. Além disso, apresentamos os resultados obtidos com a modelagem em tempo discreto, a partir de um trabalho experimental com besouros marcados para o experimento e depois liberados [Banks *et al* (1985)], em que os autores admitiram uma variação temporal e a partir dos dados obtidos fizeram uma estimativa para o coeficiente de difusão  $D(t)$ , bem como para o coeficiente de decaimento  $\alpha(t)$  do termo de reação linear em  $u$ .

Construímos curvas que se ajustam a essas estimativas e apresentamos esses coeficientes em versão contínua  $D(t)$  e  $\alpha(t)$ , dependentes da variável tempo  $t$ . Através de uma abordagem numérica, os modelos foram comparados para diversos casos, usando diferentes combinações de  $D$  constante e  $D$  variando no tempo,  $\alpha$  constante e  $\alpha$  variando no tempo. Além disso, analisamos também o efeito da substituição do coeficiente de difusão  $D$  constante por  $D(t)$  na equação de Fisher.

## ABSTRACT

In this work we study the solution of a nonlinear reaction-diffusion problem applied to the modelling of insect dispersion. At first we establish a conservation law from which important equations to the development of our work, such as the advection equation, diffusion equation and both ones simultaneously, are derived. If we consider scales of time which enables the addition or the removal of individuals in the environment, according to the hypothesis considered, some of which are: reproduction, migration or death, we can add a reaction term to the diffusive process. We thus obtain the reaction-diffusion equation. If the reaction term depends on the population density and it is of logistic type, the Fisher equation is obtained. Some aspects of this equation are then considered, such as determination of the steady states as well as their stability analysis, graphical representation in the phase plane and at last we also investigate if travelling wave solutions exist.

We comment on some examples available in the literature which involve the diffusion equation with constant coefficient as well as population density dependent coefficient. Added to this, we show the results obtained with the modelling in discrete time, from an experimental work [Banks *et. al.* (1985)] with beetles where the authors have admitted variation in time and, according to the data obtained, estimated the diffusion coefficient  $D(t)$  and the decaying coefficient  $\alpha(t)$  of the linear reaction term in  $u$ .

We have also fitted some curves to this estimates and obtained continuous time versions of the coefficients  $D(t)$  and  $\alpha(t)$ , dependent on the time variable  $t$ . The modes have been compared numerically using different combinations of  $D$  constant,  $D$  varying in time,  $\alpha$  constant and  $\alpha$  varying in time. We have also analyzed the effect of the substitution of a constant diffusion coefficient  $D$  for  $D(t)$  in the Fisher equation.

# 1 INTRODUÇÃO

Existem vários níveis possíveis de descrição de um sistema do “mundo real”. Podemos distinguir, por exemplo, entre modelo analítico ou numérico, contínuo ou discreto, determinístico ou estocástico, macroscópico ou microscópico, qualitativo ou quantitativo, etc. A escolha entre eles dependerá dos nossos objetivos e das ferramentas disponíveis.

Em geral, entende-se por *modelo analítico* aquele que, pelo menos teoricamente, pode ser escrito com nada mais que “lápiz e papel”, com a esperança de se obter uma solução explícita “sob forma fechada”. A grande importância de modelos analíticos está em seu poder de, onde forem aplicáveis, poder informar tudo o que quisermos saber a respeito de um sistema. O preço que se paga por este poder é a limitação de sua aplicabilidade; grande parte dos sistemas do “mundo real” é demasiadamente complicada para ser descrita desta forma [Gershenfeld (2000)]. Entre os modelos analíticos estão aqueles que envolvem equações diferenciais (ordinárias ou parciais), equações a diferenças, princípios variacionais (que estabelecem a conexão entre equações diferenciais locais e as propriedades globais de um sistema) e processos estocásticos (na descrição exata da distribuição de variáveis aleatórias).

Quando as variáveis que identificam o estado de um sistema dependem de apenas uma variável independente (o tempo, por exemplo), a modelagem do sistema envolverá equações diferenciais ordinárias. No contexto de dinâmica populacional de insetos, poderíamos citar, por exemplo, o modelo adotado por Ludwig, Jones e Holling, em 1978, para descrever o crescimento de uma população de larvas de mariposa (“spruce budworm”) e explicar a possível eclosão desta população de insetos que, com eficiência feroz, destruía as folhas de plantações de pinheiros, no Canadá. Representando por  $N(t)$ , a população de lagartas em um instante  $t$ , cuja taxa de crescimento intrínseco é  $r$ , em um ambiente (densidade de folhagem disponível nas árvores) que lhe oferece uma capacidade de suporte  $K$ , e considerando que esta população esteja sujeita à predação (por passarinhos), responsável por

uma taxa de predação (decrécimo)  $p(N)$ , que depende da população existente, a equação que, segundo este modelo, governa a dinâmica da população é a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - p(N). \quad (1.1)$$

Este modelo admite, em uma certa região no espaço dos parâmetros, a existência de um equilíbrio de refúgio e outro de eclosão [Murray (1989)]. Do ponto de vista de controle de pragas, o modelo pode ser adotado na busca de estratégias alternativas para forçar a dinâmica da população de insetos a permanecer fora da região de eclosão da população de lagartas, isto é, permanecer na região de parâmetros na qual existe apenas um equilíbrio (de refúgio). Este modelo será tomado com mais detalhe no **capítulo 4**; mostraremos que uma das estratégias sugeridas por este modelo consiste em pulverizar as folhas (isto reduziria a capacidade de suporte do ambiente), outra em reduzir a sua taxa de reprodução, ou alternativamente, aumentar o número de predadores. Além do problema das lagartas exposto acima, existem vários outros problemas ecológicos muito importantes visando técnicas e estratégia de controle de insetos, tais como o controle de abelhas africanizadas no Oeste do EUA, e das pragas de gafanhotos na África.

Há, entretanto, dois aspectos que não estão sendo considerados no modelo que envolve a equação diferencial ordinária (1.1). O primeiro refere-se à escala de tempo na qual o modelo é válido: um modelo mais completo deveria incorporar a dinâmica das árvores e dos predadores também; o modelo acima vale apenas na curta escala de tempo de uma eclosão de lagartas, durante a qual as árvores são desfoliadas. Outro aspecto que não foi considerado foi a variação espacial da população de lagartas.

Existem, de fato, inúmeras situações ou processos que não são espacialmente uniformes, isto é, não variam apenas com o tempo, mas também com a posição. Quando a dinâmica for significativamente influenciada por não homogeneidades espaciais, dizemos que estamos tratando de *populações espacialmente estruturadas*. Neste caso, considerações espaciais são envolvidas independentemente

do tempo, o número de variáveis independentes aumentará e a modelagem envolverá equações diferenciais parciais. Incluem-se aí todos os modelos ecológicos espacialmente heterogêneos. Esta não é a única situação em que os modelos envolvem equações diferenciais parciais; estas também são envolvidas ao se tratar de populações fisiologicamente estruturadas (estrutura de idade e/ou estruturas de tamanho).

A abordagem do problema do controle de pragas, contemplando uma heterogeneidade espacial (dispersão dos insetos, por exemplo), fornece recursos mais realísticos para assegurar que seus domínios espaciais sejam de tamanho tal que não permitam populações no regime de eclosão, isto é para manter os níveis da praga dentro do domínio de refúgio. Modelos realísticos devem incluir o desenvolvimento geotemporal, não apenas para controle de pragas de insetos, mas estratégias de controle também são importantes para evitar o espalhamento espacial de epidemias de doenças infecciosas, das modas do abuso de drogas, da divulgação de boatos ou informações falsas, entre outros.

Denomina-se *dispersão* o processo de separação de indivíduos anteriormente agrupados, o que implica em aumento da área ocupada e indivíduos sendo levados de uma área para outra; freqüentemente a mesma denominação também é dada à forma sob a qual os indivíduos de uma população encontram-se espacialmente distribuídos. Usa-se a palavra dispersão para referir-se genericamente a qualquer deslocamento de indivíduos, por exemplo após a reprodução, para ampliar sua área de expansão; diz-se que os indivíduos se espalham ou, equivalentemente, dispersam-se.

Entre os diversos mecanismos de dispersão, enfocaremos a difusão e a convecção. Além disso, restringir-nos-emos a uma única dimensão espacial, a dimensão  $x$ ; isto significa que consideraremos que existe homogeneidade espacial na outra dimensão que constitui a área sob estudo.

As primeiras abordagens tomaram emprestado das ciências físicas e químicas o conceito de *densidade local* ou *concentração* e, supondo movimento individual aleatório, usaram equações diferenciais parciais para descrever de que forma esta quantidade varia com o tempo. Em áreas, tais como oceanografia biológica, onde o movimento tende a ser dominado por fatores físicos, estes modelos, denominados genericamente de **modelos de reação-difusão**, tiveram relativo sucesso, tanto em planejamentos estratégicos quanto em reproduzir dados experimentais. Entretanto, em outros contextos (especialmente terrestres), estes modelos têm freqüentemente falhado. Até o momento, não existe ainda uma teoria unificada e largamente aplicável na abordagem de populações espacialmente estruturadas [Gurney, Nisbet (1998)].

Se, em conseqüência do movimento irregular de cada partícula em um conjunto de partículas (células, bactérias, substâncias químicas, animais, insetos, etc.), onde cada uma se move de forma aleatória, as partículas se espalharem, e este movimento microscópico irregular resultar em algum movimento macroscópico regular do grupo, diz-se que está ocorrendo um processo de dispersão por *difusão*. Em outras palavras, difusão é o processo através do qual a matéria é transportada, de uma parte para outra em um sistema, como resultado de movimentos individuais aleatórios. Nenhum indivíduo possui direção preferida de movimento, mas observa-se que a transferência do grupo ocorre de regiões de mais alta para regiões de mais baixa concentração. Como o movimento individual é aleatório, não se sabe de que forma um indivíduo se movimentará em um certo intervalo de tempo; na média, a mesma fração definida do total de indivíduos atravessará uma secção transversal à direção do movimento, tanto em um sentido quanto em outro, em um certo intervalo de tempo; entretanto, como existe um número maior de indivíduos de um lado do que de outro da referida secção, haverá, como resultado do movimento individual aleatório, uma transferência líquida do lado que tem maior concentração para aquele em que a concentração é mais baixa. Representando por  $u(x, t)$  a concentração de

uma população na posição  $x$  em um instante  $t$ , tem-se a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1.2)$$

onde  $D$ , denominado coeficiente de difusão da população, descreve a mobilidade dos indivíduos, podendo ser constante, ou dependente da posição  $x$ , ou dependente da concentração  $u$  da população que se difunde, ou ainda do tempo  $t$ , ou de mais de uma destas variáveis. Em sistemas onde o coeficiente de difusão não é constante (isto é, depender da concentração, ou do espaço, ou do tempo), não existem, em geral, soluções matemáticas estritamente formais; podem ser obtidas soluções numéricas ou soluções analíticas aproximadas e respectivos gráficos [Crank (1975)]. O mecanismo de transferência de calor por condução, que governa a migração de átomos ou moléculas com movimentos aleatórios num sistema físico (sólido, líquido ou gás) em geral, devido à sua própria agitação térmica, na direção (e sentido contrário) de um gradiente de temperatura, é outro exemplo de difusão. Em química, denomina-se difusão ao processo de transporte de partículas causado por um gradiente de concentração de alguma substância. Gradientes de pressão, de potencial químico ou elétrico também são relacionados a mecanismos de dispersão por difusão.

Ocorre *convecção* quando a população estiver sendo transportada (carregada) sobre algum escoamento que se move com velocidade  $c$ ; a transferência de calor através de um fluido ocorre devido ao movimento do próprio fluido, isto é, a transmissão de calor é acompanhada por um transporte de massa efetuado pelas correntes que se formam no seio do fluido. Este mecanismo de movimento também é denominado advecção ou correnteza, e ocorre, portanto, quando o meio está em movimento. A dispersão advectiva é caracterizada por movimentos individuais altamente correlacionados, nas escalas de tempo e de espaço de interesse. No caso extremo de advecção pura, todos os indivíduos se movem com a mesma velocidade  $c$ , a velocidade de movimento do meio, e a equação diferencial parcial que governa o sistema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.3)$$



Este processo de transporte implica que, durante um intervalo de tempo  $t$ , cada indivíduo se move sobre uma distância  $ct$ ; se  $u_0(x)$  for a distribuição espacial da população em  $t = 0$ , então  $u(x, t) = u_0(x - ct)$ . Embora movimento puramente difusivo seja às vezes uma aproximação defensável para comportamento de dispersão real, é raramente encontrada advecção pura em um contexto biológico (exceto ao considerar sistemas fisiologicamente estruturados com faixas etárias, onde a idade e o tempo correm juntos).

Podem haver situações em que convecção (advecção) e difusão ocorrem simultaneamente, isto é, o mecanismo difusivo espalha (propaga, difunde) a população na direção  $x$  e existe um movimento do meio todo no qual o processo de difusão ocorre. Esta é a situação mais comum da dispersão: uma combinação *ad-vectiva/difusiva*, sendo que a componente difusiva é relacionada com a variabilidade do deslocamento em torno de seu valor médio, e a componente advectiva é relacionada com o desvio do deslocamento médio com relação a zero. A equação diferencial envolverá a soma destes dois efeitos, como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.4)$$

à qual podemos ainda acrescentar um termo  $f$ , para incluir a possibilidade de se ter adição ou remoção de indivíduos no meio, caso considerarmos escalas de tempo sobre as quais indivíduos são capazes de se reproduzir, por exemplo; este termo é denominado *termo de reação*, ou termo crescimento-interação, ou termo fonte, ou ainda termo de cinética. A densidade de população deverá então satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c \frac{\partial u}{\partial x} + f, \quad (1.5)$$

onde  $f$  em geral depende de  $u$ , mas também poderá depender de uma ou mais das variáveis independentes. Observamos que evidentemente o termo  $f$  pode ser acrescentado às equações diferenciais (1.2) ou (1.3) da mesma forma.

No **capítulo 2**, estabeleceremos uma lei de conservação, a partir da qual as equações diferenciais parciais (1.2) a (1.5) serão deduzidas.

Entre as técnicas mais utilizadas nos estudos que envolvem as equações diferenciais parciais que abordaremos, podemos citar: determinação das características, análise de ondas viajantes, determinação dos estados estacionários e análise de estabilidade dos mesmos. A vantagem do uso destas ferramentas reside no fato de que freqüentemente reduzem o problema investigado a outro cuja equação diferencial envolvida é ordinária. Efetuar o controle espacial de uma praga de insetos ou o controle espacial de uma epidemia é, essencialmente, evitar que a onda viajante relacionada com o espalhamento espacial de uma onda de praga se propague. Neste sentido, será de grande utilidade saber determinar condições no espaço de parâmetros para a existência de ondas viajantes (cuja forma é constante), e, quando estas existirem, a sua velocidade de propagação. Tal abordagem levará possivelmente a uma condição limiar necessária para a propagação desta onda, que poderá se refletir em valores críticos ou para a população ou para algum parâmetro, tal que se for excedido (ou o contrário) possa-se evitar que a onda se propague, e assim evitar uma praga de insetos ou uma epidemia de doença contagiosa. Tais resultados têm implicações imediatas para estratégias de controle. A vacinação, por exemplo, é uma forma de reduzir a população de suscetíveis, de modo a mantê-la abaixo da mínima necessária para que a onda de epidemia se propague; o isolamento é outra forma adotada para controlar uma epidemia, porque acarreta uma redução no fator de transmissão, mantendo-o abaixo do valor crítico mínimo necessário para que ocorra a propagação desta onda.

Dedicaremos o **capítulo 3** à aplicação detalhada das técnicas discriminadas acima à equação de Fisher:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + ru \left( 1 - \frac{u}{K} \right), \quad (1.6)$$

que nada mais é do que uma equação da difusão, isto é, do tipo (1.2), à qual foi acrescentado um termo de fonte  $f(u)$ , dependente da densidade populacional, do tipo logístico. Veremos que, embora no início efeitos de difusão sejam dominantes, o termo de longo prazo é muito diferente: quando a população nas proximidades da região inicialmente ocupada alcança a capacidade de suporte  $K$ , a distribuição forma

uma nítida *frente de invasão*, que se move para regiões vazias de ambos os lados, com velocidade constante. A dinâmica destas frentes de invasão (forma, largura, velocidade), tem sido extensivamente estudada no desenvolvimento da teoria de epidemias.

Após abordar, nos **capítulos 4 e 5**, diversos modelos apresentados na literatura, para investigar dispersão de insetos, bem como a análise que pode ser efetuada com cada um, apresentaremos no **capítulo 6** um trabalho experimental efetuado por Banks *et al* (1985), a partir do qual os autores fizeram uma estimativa para o coeficiente de difusão  $D(t)$ , bem como para o coeficiente  $\alpha(t)$  do termo de fonte (do tipo decaimento exponencial), ambos dependentes do tempo. A partir dos resultados em tempo discreto por eles apresentados, construiremos curvas que se ajustam a ambos os coeficientes e apresentaremos os resultados na versão contínua assim construída. Finalmente, as conclusões e os trabalhos futuros serão apresentados no **capítulo 7**.

## 2 LEI DE CONSERVAÇÃO E SUA RELAÇÃO COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

### 2.1 Modelo Matemático

Um modelo matemático é representado por uma equação ou um conjunto de equações cuja solução descreve o comportamento físico de um determinado fenômeno [Logan (1998)]. Modelagem matemática envolve observações físicas, seleção de variáveis essenciais, formulação de equações que envolvem as variações de quantidades (variáveis essenciais), análise matemática que consiste na resolução dessas equações e finalmente validade do modelo. Esse último serve para averiguar se de fato tal modelo descreve o problema real original (feedback); nesse momento, podem ocorrer modificações e refinamentos.

Um modelo matemático satisfatório está sujeito a duas aparentes contradições: deve ser suficientemente detalhado para representar a situação do mundo real com relativa precisão, mas deve também ser suficientemente simples para tornar prática a análise matemática. A construção de um modelo que cobre adequadamente realismo e viabilidade é o passo mais delicado no processo. Devem ser encontradas maneiras de simplificar matematicamente o modelo sem sacrificar características importantes. Assim, podemos concluir que um modelo matemático nem sempre representa um problema real de maneira exata, em toda sua complexibilidade, mas poderá levar a soluções bastante próximas daquelas observadas na realidade.

Na formulação de um modelo matemático, é necessário argumentar preventivamente sobre quais características dos indivíduos serão determinadas no processo de evolução. Algumas características são de origem discreta, pois são melhor descritas em tempo discreto, como por exemplo, o sexo dos indivíduos de uma população, enquanto que outras são melhor descritas em tempo contínuo, como

por exemplo, o conteúdo de alguma substância [Rodrigues (1998)]. Os modelos discretos são descritos por equações a diferenças e os modelos contínuos são descritos por equações diferenciais ordinárias ou parciais. Neste trabalho, restringir-nos-emos a modelos estudados em tempo contínuo.

Os sistemas físicos modelados em função de uma única variável independente são governados por *equações diferenciais ordinárias*. Por exemplo,

$$\frac{du}{dt} = f(t, u, r), \quad (2.1)$$

onde  $f$  é uma relação funcional de  $t$ ,  $u$  e  $r$ . Na equação (2.1), a variável dependente,  $u = u(t)$ , é a quantidade de uma grandeza que pode ser população de indivíduos de uma única espécie, concentração de uma substância química, densidade de automóveis em uma auto-estrada, quantidade de energia, entre outros. A única variável independente é o tempo  $t$ ;  $r$  é um parâmetro que caracteriza o sistema físico que está sendo modelado. Por exemplo, se considerarmos que a taxa de variação de uma população,  $u = u(t)$ , de um determinado sistema de indivíduos, é proporcional à população em cada instante  $t$ , temos o modelo de Malthus

$$\frac{du}{dt} = ru, \quad u(0) = u_0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

onde  $u_0$  representa a população inicial no instante  $t = 0$ . O parâmetro  $r$  representa a taxa de crescimento intrínseco da população, isto é, a taxa de variação per capita por unidade de tempo, se o ambiente permitir um crescimento sem restrições. A solução para esse problema de valor inicial é

$$u(t) = u_0 \exp(rt), \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Quando observamos a evolução de um sistema em um intervalo de tempo e em uma região do espaço, a equação do modelo é uma *equação diferencial parcial*. Assim, buscamos soluções do tipo  $u = u(x, t)$ , ou  $u = u(x, y, t)$ , ou  $u = u(x, y, z, t)$  (ou em outros sistemas de coordenadas), conforme seja o espaço unidimensional, bidimensional ou tridimensional; aqui  $u$  é a variável dependente e  $(x, t)$ ,

ou  $(x, y, t)$ , ou  $(x, y, z, t)$  são respectivamente as variáveis independentes. Modelos que se utilizam de equações diferenciais parciais podem ser independentes do tempo, mas dependentes de variáveis espaciais. Tais modelos são chamados de *estáticos* ou *estacionários*. Em nosso trabalho, referimo-nos a equações diferenciais parciais dependentes do tempo e do espaço unidimensional.

Entende-se por solução de uma equação diferencial parcial, em uma variável espacial  $x \in \Omega$  (intervalo em uma dimensão), num tempo  $t \in I$  ( $t \geq 0$ ), a função  $u = u(x, t)$ , definida no domínio espaço-tempo, tal que substituída na equação diferencial, torna-a verdadeira em todo seu domínio. É necessário, também, que derivadas parciais de  $u = u(x, t)$  sejam contínuas até a mais alta ordem da derivada requerida pela equação.

As equações diferenciais parciais são geralmente acompanhadas de uma condição inicial,  $u(x, 0) = u_0(x)$ , que especifica a densidade em um tempo  $t$  igual a zero e de condições de contorno que especificam a densidade na fronteira do domínio em todo tempo  $t$ . O problema de encontrar soluções que satisfaçam as condição inicial e de contorno é chamado *problema de valor no contorno* ou simplesmente *problema de contorno*.

## 2.2 Lei de Conservação

Trataremos aqui de algumas equações diferenciais parciais que vêm de uma *lei de equilíbrio básica lei de conservação*. A *lei de conservação* é uma formulação matemática estabelecendo que *a taxa com a qual a quantidade de uma grandeza varia em um certo domínio é igual à taxa com a qual a quantidade dessa grandeza flui através do contorno do domínio mais a taxa com a qual a quantidade dessa grandeza é produzida ou destruída dentro do domínio*. Uma ilustração para isso, dentro da Biologia, é a lei que rege a variação da densidade populacional:

taxa de variação da população	=	taxa de entrada (imigração) menos taxa de saída (emigração), através do contorno	+	taxa de aparecimento/produção menos taxa de desaparecimento
---	---	--	---	---

Podemos citar, ainda, outros exemplos como condução de calor ao longo de uma barra, densidade de automóveis em uma auto-estrada, concentração de uma substância química, poluentes em um rio, entre outros. Representando por  $\vec{r}$  um vetor posição, a variável dependente  $u = u(\vec{r}, t)$  que representa uma densidade (de animais, de energia, de automóveis, de massa, etc.), é usualmente medida em unidade da grandeza por unidade de volume  $d$ -dimensional, onde  $d$  é a dimensão do espaço considerado.

Consideremos uma situação em que a variação do número de indivíduos de uma população ocorre somente em uma direção, que é definida como eixo dos  $x$ . Podemos visualizar o movimento dos indivíduos, por exemplo, em um tubo onde cada seção transversal é denotada por  $x$ , e cuja área consideraremos constante, igual a  $A$  (figura 2.1). Por convenção, o fluxo  $\phi(x, t)$  é positivo se os indivíduos estão atravessando o tubo na direção crescente de  $x$  e negativo, caso contrário.

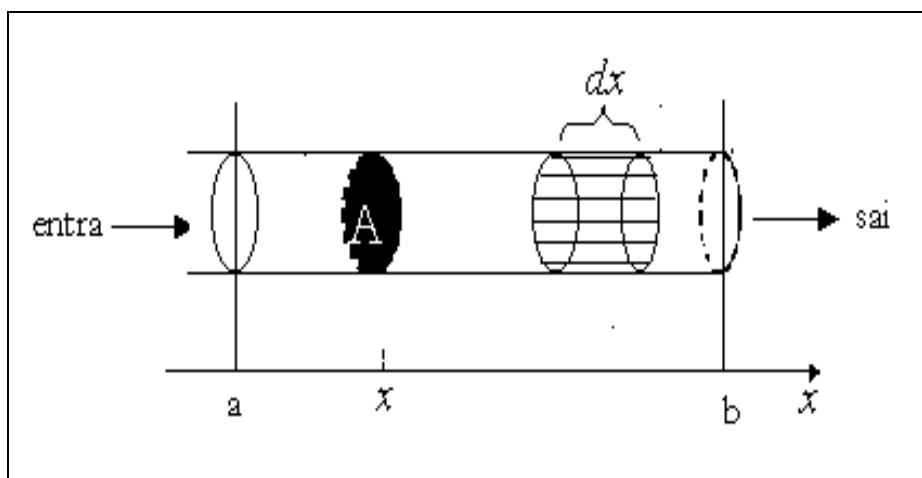


Figura 2.1: *Tubo com seção transversal de área  $A$*

Usando o símbolo [ ] para denotar as unidades das diversas quantidades envolvidas e representando por  $L$  a dimensão linear do sistema, isto é,  $[x] = [L]$ , definimos:

- $u(x, t)$ : densidade ou concentração de uma grandeza em uma posição  $x$ , em um instante de tempo  $t$ ; é a quantidade da grandeza por unidade de volume;  $[u(x, t)] = \frac{[grandeza]}{[L^3]}$ . Ex.:  $\frac{insetos}{m^3}$ ;
- $\phi(x, t)$ : fluxo de  $u(x, t)$ , isto é a quantidade que passa por unidade de área transversal, pela posição  $x$ , no instante  $t$ ; é a quantidade da grandeza por unidade de área, por unidade de tempo;  $[\phi(x, t)] = \frac{[grandeza]}{[L^2][t]}$ . Ex.:  $\frac{insetos}{m^2 s}$ ;
- $F(x, t)$ : termo fonte; é uma taxa de produção por unidade de tempo e volume, se  $F > 0$ , e é uma taxa de perda por unidade de tempo e volume (sumidouro) se  $F < 0$ ;  $[F(x, t)] = \frac{[grandeza]}{[L^3][t]}$ . Ex.:  $\frac{insetos}{m^3 s}$ .

A lei geral de conservação é uma relação entre  $u$ ,  $\phi$  e  $F$ , que pode ser escrita da seguinte forma [Logan (1998)]

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) A dx = A\phi(a, t) - A\phi(b, t) + \int_a^b F(x, t) A dx, \quad (2.4)$$

onde  $A$  é a área de uma secção transversal do tubo, em  $x$ , no instante  $t$ , sendo  $a \leq x \leq b$  e  $t \geq 0$  (figura 2.1).

Dividindo os dois lados da igualdade de (2.4) pela constante  $A$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b F(x, t) dx \quad (2.5)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dx + \int_a^b F(x, t) dx, \quad (2.6)$$

visto que pelo teorema fundamental do Cálculo Integral, vale:

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dx. \quad (2.7)$$



Supondo que as funções envolvidas tenham derivadas parciais contínuas, podemos escrever a equação (2.6) como

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dx + \int_a^b F(x, t) dx, \quad (2.8)$$

que é o mesmo que

$$\int_a^b \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - F \right) dx = 0, \quad (2.9)$$

donde concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + F, \quad (2.10)$$

para todo  $x$  e  $t$  no domínio do problema. Essa é a nossa equação diferencial básica (lei de conservação), que descreve localmente a relação entre variações em densidade e variações em fluxo.

Se a escala de tempo de interesse for suficientemente curta, tal que mortalidade e reprodução sejam insignificantes, então não é considerado termo de fonte, isto é,  $F = 0$  e a equação (2.10) reduz-se para

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2.11)$$

para todo  $x$  e  $t$  no domínio do problema.

Observamos que temos duas variáveis dependentes desconhecidas na equação (2.10):  $u(x, t)$  e  $\phi(x, t)$ .

Caso a função  $\phi$  seja expressa como função de  $u$ , isto é,  $\phi = \phi(u)$ , a equação (2.10) é escrita

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + F, \quad u = u(x, t), \quad (2.12)$$

que, dependendo da relação entre  $u$  e  $\phi$ , poderá levar a uma equação diferencial não linear, para  $u(x, t)$ . Tais relações entre  $u$  e  $\phi$  são chamadas *relações constitutivas* ou *equações de estado* e surgem de suposições físicas sobre o meio.

Similarmente, o termo fonte  $F$  pode ser dado como uma função de densidade,  $F = F(u)$ , e a equação (2.10) passa ser

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + F(u), \quad u = u(x, t). \quad (2.13)$$

A seguir, trataremos de algumas equações diferenciais parciais importantes, obtidas a partir da lei de conservação estabelecida na equação (2.10).

## 2.3 Descrevendo Dispersão - Versão Unidimensional

A natureza do processo de dispersão é encapsulada na relação entre o fluxo e a densidade populacional, de acordo com o que apresentaremos nesta secção.

### 2.3.1 Equação da Convecção

Consideremos a lei de conservação unidimensional, equação (2.10), sem o termo fonte, isto é, a escala de tempo de interesse é suficientemente curta, tal que mortalidade e reprodução sejam insignificantes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Se a população estiver sendo transportada sobre algum escoamento que se move com velocidade  $c$ , então o fluxo  $\phi(x, t)$  será proporcional à densidade  $u(x, t)$ , isto é,

$$\phi(x, t) = c u(x, t), \quad (2.15)$$

onde  $c$  é uma constante que traduz a velocidade com a qual os indivíduos se movem ao longo do eixo  $x$  ( $[c] = \frac{[L]}{[t]}$ , por exemplo,  $\frac{m}{s}$ ). Substituindo a equação (2.15) na equação (2.14) obtemos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.16)$$

que é a equação de convecção linear, com o termo fonte ausente. A equação (2.15) caracteriza fluxo por convecção e é interpretada como uma taxa de trânsito dos indivíduos por unidade de área e por unidade de tempo [Rodrigues (1998)]. Como esta equação diferencial não contém nem fonte nem sumidouro, é de se esperar que

a densidade  $u$  inicialmente distribuída,  $u(x, 0) = u_0(x)$ , persista no tempo, exceto que ela poderia ser continuamente transladada para a direita, com velocidade  $c$ . Este processo de transporte implica que, durante um intervalo de tempo  $t$ , cada indivíduo se mova sobre uma distância  $ct$ . Em outras palavras, é de se esperar que  $u(x, t) = u_0(x - ct)$ , isto é,  $u(x, t)$  pode ser escrita em termos de uma única variável  $z = x - ct$ , que é uma translação da posição  $x$  por uma quantidade  $ct$  para a direita.

De fato, a equação diferencial (2.16) admite soluções do tipo

$$u(x, t) = U(x - ct) = U(z), \quad z = x - ct, \quad (2.17)$$

visto que, neste caso,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dU}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -c \frac{dU}{dz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dU}{dz}$$

e substituindo em (2.16), verifica-se a identidade

$$-c \frac{dU}{dz} + c \frac{dU}{dz} \equiv 0.$$

A solução (2.17) para a equação da convecção é chamada *solução do tipo onda viajante* (também denominada *onda caminhante* ou *onda progressiva*), porque a distribuição da densidade inicial é propagada como uma onda que viaja sem mudar a forma. Aqui  $-\infty < z < +\infty$ , e, para ser fisicamente realística,  $U(z)$  deve ser limitada para todo  $z$ ; além disso, dependendo da grandeza em questão, como por exemplo populações,  $U$  deverá ser não negativo. O gráfico de  $U(x - ct)$  é exatamente o gráfico de  $U(x)$ , deslocado para a direita por  $ct$  unidades de comprimento. A velocidade de propagação é a constante  $c$  e a onda desloca-se  $ct$  unidades na direção positiva de  $x$ , à medida que  $t$  aumenta, como mostrado na figura (2.2 (b)), no plano  $(x, u)$  e na figura (2.2 (a)), no espaço  $(x, t, u)$ .

Concluimos, portanto, que  $u(x, t)$  é constante, para qualquer valor fixo de  $z = x - ct$ , isto é,  $u(x, t)$  assume o mesmo valor para todos os pontos  $(x, t)$

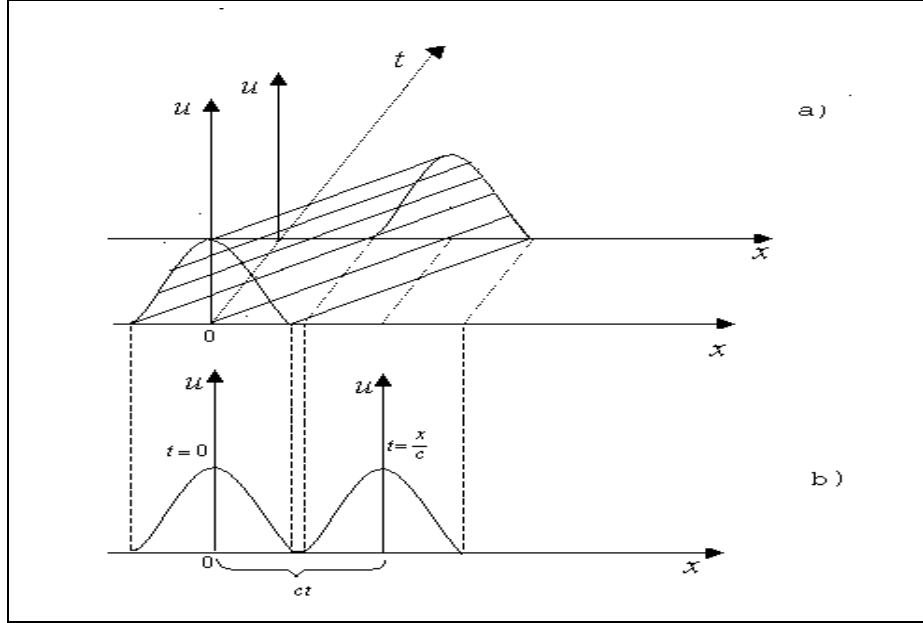


Figura 2.2: Duas representações da solução da equação (2.16), solução do tipo onda viajante: (a) no espaço  $(x, t, u)$ , como uma cordilheira (b) no plano  $(x, u)$ .

situados sobre a reta  $x - ct = s$ , onde  $s$  é um valor fixo de  $z$ . Além disso,  $u(x, t)$  assume um valor diferente, para cada escolha distinta de  $s$ .

De (2.17), se  $z = s$ , isto é se  $x - ct = s$ , onde  $s$  é uma constante arbitrária, obtemos uma família de retas no plano  $(x, t)$ , com declividade  $\frac{1}{c}$  (figura 2.3). Existe, portanto, uma família de retas, ao longo de cada uma das quais  $u$  é constante. Fisicamente, o movimento do sinal da densidade se dá ao longo dessa família de retas, que são chamadas *características*. Essas retas são as curvas de nível da superfície distribuição de densidade mostrada na figura (2.2 (a)). Por exemplo, se traçarmos as características  $x - ct = s_1$  e  $x - ct = s_2$ , onde  $s_1 < x - ct < s_2$ , dizemos que essas retas representam as partes traseira e dianteira, respectivamente, da onda que se propaga para a direita. Uma vez que as características são conhecidas, temos o valor da solução da equação para todo  $(x, t)$ , desde que seja conhecido o valor de  $u$ , para todo  $x$ , em  $t = 0$ , pois a solução  $u(x, t)$  mantém o mesmo valor ao longo de toda a característica que sai do eixo  $x$ , no instante inicial.

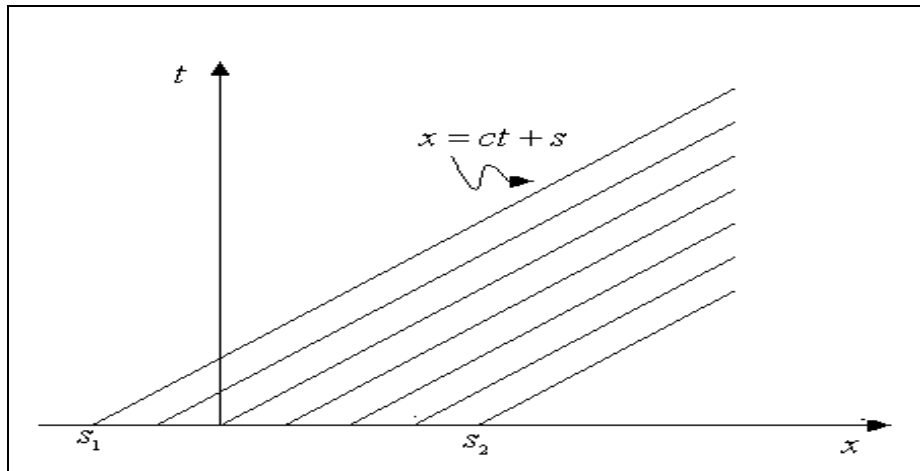


Figura 2.3: Retas características de equação  $x - ct = s$ , sendo  $s$  uma constante arbitrária, correspondentes à solução do tipo onda viajante da equação diferencial parcial (2.16).

Quando definimos a lei de conservação, convencionamos o sentido positivo como sendo da esquerda para a direita, segundo a figura (2.1), onde  $a < b$ . No entanto, pode-se mostrar facilmente que, se o fluxo ocorrer da direita para a esquerda, a equação diferencial admitirá como solução uma onda viajante para a esquerda.

Acrescentando uma condição inicial à equação diferencial (2.16), escrevemos o problema do valor inicial para a equação da convecção, como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

onde  $u_0(x)$  é uma densidade inicial dada. Sendo  $u(x, t) = U(x - ct)$  solução da equação (2.18), aplicando a condição inicial (2.19) nessa solução, com  $t = 0$ , temos

$$U(x) = u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.20)$$

de onde concluímos

$$U(x - ct) = u_0(x - ct). \quad (2.21)$$

Portanto, a solução do problema do valor inicial (2.18)-(2.19) é

$$u(x, t) = u_0(x - ct), \quad (2.22)$$

de onde observamos que a forma inicial se conserva, deslocando  $ct$  unidades de comprimento para a direita em  $x$ , como já havíamos constatado no parágrafo anterior. A forma da onda viajante apresentada na figura 2.2 é a de um pulso único, mas este não é o único tipo de onda viajante; alguns problemas possuem soluções de onda viajante do tipo trem de onda periódico (figura 2.4) e outros ainda, como o que apresentaremos ao analisarmos a equação de Fisher, no capítulo 3, apresentam onda viajante do tipo frente de onda; esta é uma solução do tipo onda viajante que tem limites constantes em  $\pm\infty$  [Logan (1998)]. Para exemplificar, podemos citar  $U(z) = (1 + \exp(bz))^{-1}$ , que satisfaz  $U(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\forall b \in \mathbb{Z}$ ; para  $b > 0$ , representa uma frente de onda que satisfaz  $U(-\infty) = 1$  e  $U(+\infty) = 0$ ; para  $b < 0$ , teríamos uma frente de onda que satisfaz  $U(-\infty) = 0$  e  $U(+\infty) = 1$ . Quanto maior o módulo de  $b$ , mais íngreme é a forma da onda. Na figura 2.5, apresentamos o gráfico correspondente a  $b = 2$ .

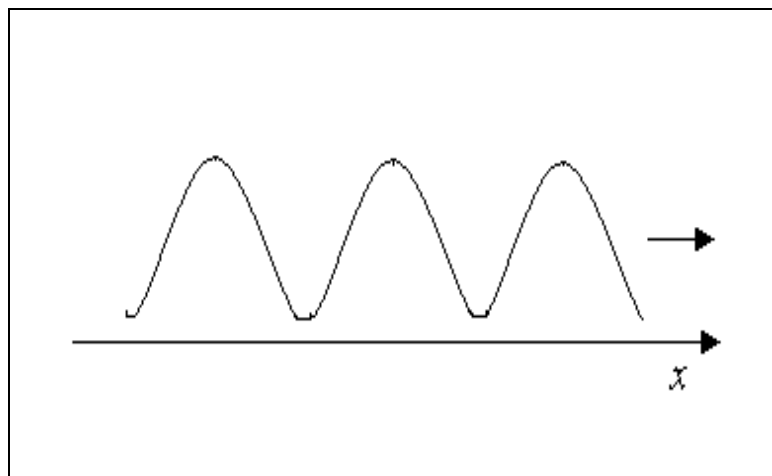


Figura 2.4: *Onda viajante do tipo trem de onda periódico*

Um exemplo para a equação de convecção é o de um enxame de insetos carregados pelo vento, portanto, movendo-se com uma onda que não muda a forma. Outras expressões comuns para esse tipo de movimento são *transporte* e *advecção*.

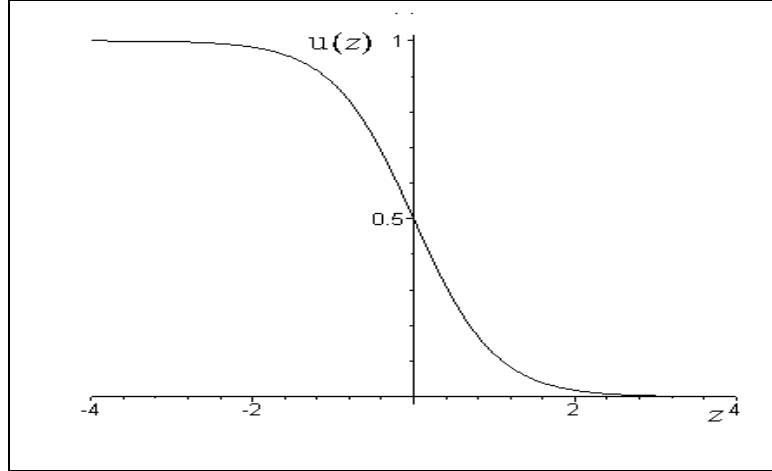


Figura 2.5: Frente de onda  $U(z) = (1 + \exp(bz))^{-1}$ , para  $b = 2$ .

Uma equação de convecção mais geral pode ser obtida substituindo a relação constitutiva (2.15) na equação diferencial (2.10), o que leva a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, t, u) \quad (2.23)$$

também denominada *equação de reação-convecção*.

Para resolver uma equação de reação-convecção do tipo acima, é conveniente definir novas variáveis independentes  $(z, \tau)$ , denominadas *coordenadas características*, onde  $z$  é uma coordenada que se move com o sinal, como segue:

$$\begin{cases} z = x - ct \\ \tau = t \end{cases}$$

Desta forma, a nova equação diferencial para  $U(z, \tau)$  é obtida substituindo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

na equação diferencial (2.23), para  $u(x, t)$ . Assim, a equação diferencial parcial transforma-se em uma equação diferencial ordinária para  $U(z)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = F(z, \tau, U), \quad (2.24)$$

pois a variável  $z$  age nesta equação diferencial como um parâmetro. Diz-se que o **operador convecção**

$$\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.25)$$

reduz-se a  $\frac{\partial}{\partial \tau}$ , em coordenadas características.

Na ausência de termo fonte, tem-se apenas

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = 0, \quad (2.26)$$

cujas soluções são

$$U(z, \tau) = g(z), \quad (2.27)$$

uma função arbitrária de  $z$ , e, portanto,

$$u(x, t) = g(x - ct). \quad (2.28)$$

Da equação diferencial (2.26), concluímos que, em um sistema de referência que se move com velocidade igual à de propagação da onda viajante, esta parece estacionária.

Como exemplo típico de aplicação da equação diferencial (2.23), podemos nos referir à situação em que  $u(x, t)$  representa a concentração de um poluente em um rio, suposta homogênea em todas as direções, exceto naquela do curso do rio, que se move com velocidade  $c$ , no sentido de  $x$  crescente. Desprezando efeitos difusivos decorrentes da turbulência do rio e de irregularidades em seu contorno, o rio é então modelado por um fluxo advectivo em uma dimensão. Para permitirmos, entretanto, que a concentração de poluente decaia na água do rio, devido à ação de bactérias que gradualmente o decompõem, o termo  $F(x, t, u)$  representaria um sumidouro, isto é, a taxa com a qual a densidade de poluente é degradada, que poderia, por exemplo, ter a forma:  $-ku(x, t)$ , onde  $k$  mede a eficiência da ação bacteriana. Conhecida a concentração inicial de poluente, isto é,  $u(x, 0) = u_0(x)$ , a solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= -ku \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.29)$$



tem a forma

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \exp(-kt), \quad (2.30)$$

que representa uma onda viajante amortecida, dando conta do decaimento da concentração de poluente, à medida que o tempo passa. Observamos, ainda, que neste caso a densidade que é conservada é  $v(x, t) = u(x, t) \exp\left(\frac{kx}{c}\right)$ , pois satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.31)$$

que não envolve explicitamente nem fonte nem sumidouro. A densidade  $v(x, 0)$ , inicialmente distribuída no rio, persiste no tempo, exceto que é propagada (transladada) no sentido de  $x$  crescente, junto com o movimento do rio, isto é: dado  $v(x, 0) = v_0(x)$ , tem-se que  $v(x, t) = v_0(x - ct)$  é uma solução do tipo onda viajante. A equação diferencial (2.29) é, por vezes, denominada equação de *convecção-decaimento*.

### 2.3.2 Equação da Difusão

Antes de definirmos a equação da difusão, vamos associar a derivação dessa equação a um simples movimento aleatório de organismos (células, bactérias, insetos, substâncias químicas, entre outros). Iremos, inicialmente, supor que os indivíduos se movimentam em um espaço unidimensional com passos constantes de comprimento  $\Delta x$ . Um indivíduo pode mover-se para a direita, para a esquerda ou permanecer na posição original. Queremos obter uma expressão para a probabilidade  $p(m, n)$ , de que a posição da partícula seja  $m\Delta x$  após  $n$  intervalos de tempo, isto é

$$m\Delta x = x, \quad n\Delta t = t. \quad (2.32)$$

Nesse tempo  $n\Delta t$ , tem-se um número total de  $n$  passos dos quais  $a$  passos são para a direita e  $b$  passos são para a esquerda, o que nos permite escrever

$$a + b = n, \quad (2.33)$$

$$a - b = m, \quad (2.34)$$

ou, equivalentemente,

$$a = \frac{n+m}{2}$$

$$b = \frac{n-m}{2}.$$

Como  $a$  e  $b$  podem se repetir, o número de possibilidades favoráveis para que um indivíduo chegue em  $m\Delta x$  vem da teoria combinatória, a saber,

$$\frac{n!}{a!b!} = \frac{n!}{a!(n-a)!}. \quad (2.35)$$

O número total de trajetórias possíveis nos  $n$  intervalos de tempo é dado por  $2^n$ . Visto que a probabilidade  $p(m, n)$  é determinada pelo quociente entre as possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades, podemos escrever:

$$p(m, n) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{a!(n-a)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{\left(\frac{(n+m)}{2}\right)! \left(\frac{(n-m)}{2}\right)!}. \quad (2.36)$$

A equação (2.36) é a *distribuição de Bernoulli*, também chamada *distribuição binomial*. Quando  $n$  se torna extremamente grande [Okubo (1980)], essa distribuição converge para a *distribuição Gaussiana*, também conhecida como *distribuição normal*, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(m, n) = g(m, n) = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m^2}{2n}\right). \quad (2.37)$$

A tabela 2.1 faz uma comparação entre os resultados obtidos através das equações (2.36) para a distribuição de Bernoulli  $p(m, n)$  e (2.37) para a distribuição gaussiana  $g(m, n)$ . Observa-se que a distribuição de Bernoulli se aproxima da distribuição Gaussiana para  $n > 6$ . Nas figuras (2.6) e (2.7) apresentamos, para comparação, os gráficos de ambas as distribuições em um mesmo sistema de coordenadas, para  $n=4$  e para  $n=10$ , respectivamente. Observa-se que quanto maior o valor de  $n$ , mais próximo é  $p(m, n)$  de  $g(m, n)$ , ao mesmo tempo que o gráfico desta distribuição se torna mais largo e mais achatado.

Da equação (2.32), podemos escrever

$$p(m, n) = p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right), \quad (2.38)$$

		$m$							
		0	$\pm 2$	$\pm 4$	$\pm 6$	$\pm 8$	$\pm 10$	$\pm 12$	$\pm 14$
n=2	$p(m, n)$	0.50	0.25	0					
	$g(m, n)$	0.562	0.21	0.01	0				
n=4	$p(m, n)$	0.375	0.25	0.063	0				
	$g(m, n)$	0.400	0.24	0.054	0.004	0			
n=6	$p(m, n)$	0.3125	0.234	0.094	0.016	0			
	$g(m, n)$	0.326	0.234	0.086	0.016	0.0016	0		
n=8	$p(m, n)$	0.273	0.219	0.109	0.03	0.004	0		
	$g(m, n)$	0.282	0.220	0.104	0.03	0.005	0.0005	0	
n=10	$p(m, n)$	0.246	0.205	0.117	0.044	0.0097	0.001	0	
	$g(m, n)$	0.252	0.206	0.114	0.042	0.010	0.002	0.0002	0

Tabela 2.1: Comparação entre os valores obtidos a partir das distribuições binomial  $p(m, n)$  e gaussiana  $g(m, n)$ .

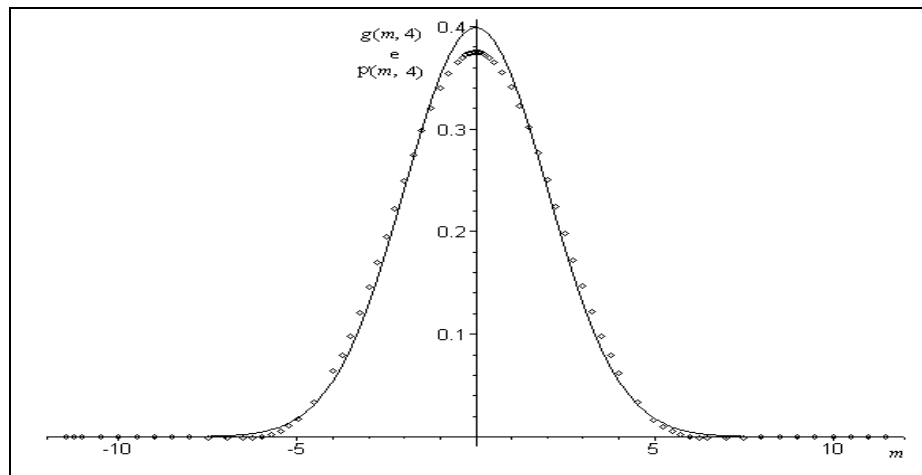


Figura 2.6: Gráficos das distribuições gaussiana  $g(m, n)$  (curva contínua) e binomial  $p(m, n)$  (pontos), para  $n=4$ .

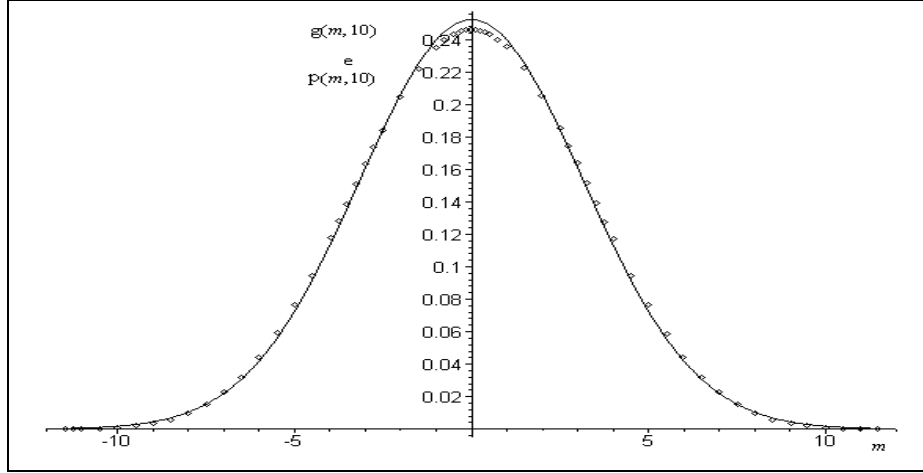


Figura 2.7: Gráficos das distribuições gaussiana  $g(m, n)$  (curva contínua) e binomial  $p(m, n)$  (pontos), para  $n=10$ .

que, aplicado à equação (2.37), torna-se, no limite em que  $\frac{t}{\Delta t} \rightarrow \infty$ ,

$$p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right) \simeq \left[\frac{2}{\pi \frac{t}{\Delta t}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2}{\frac{2t}{\Delta t}}\right]. \quad (2.39)$$

É mais apropriado escrever a variável dependente como  $u = \frac{p}{2\Delta x}$ , ou seja,  $u2\Delta x$  é a probabilidade de encontrar uma partícula no intervalo  $(x, x + \Delta x)$ , no tempo  $t$ . Assim, dividindo a equação (2.39) por  $2\Delta x$ , obtemos

$$\frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} \simeq \left[\frac{\Delta t}{2\pi t(\Delta x)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x^2 \Delta t}{2t(\Delta x)^2}\right]. \quad (2.40)$$

Considerando

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D \neq 0, \quad (2.41)$$

sendo  $D$ , o coeficiente de difusão ou difusividade, então

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} = \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]. \quad (2.42)$$

Observamos da definição (2.41) que  $[D] = \frac{[L^2]}{[t]}$ , isto é,  $D$  tem dimensão de  $\frac{\text{área}}{\text{tempo}}$ . Cabe enfatizar que as distribuições (2.37) e (2.42) são válidas apenas quando  $n \gg 1$  e  $m \gg 1$ , ou, em outras palavras, quando o tempo de observação  $t$  for muito maior

que o tempo de duração de cada passo aleatório, e quando a escala de observação  $x$  for muito maior que o comprimento  $\Delta x$  de cada passo aleatório. As figuras 2.8 e 2.9 representam a equação (2.42) no plano  $(x, u)$ , em diversos tempos  $t$ , sendo  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  e no espaço  $(u, x, t)$ , respectivamente; pode-se observar que, à medida que o tempo passa, as curvas tendem a se achatar cada vez mais, tornando-se mais largas.

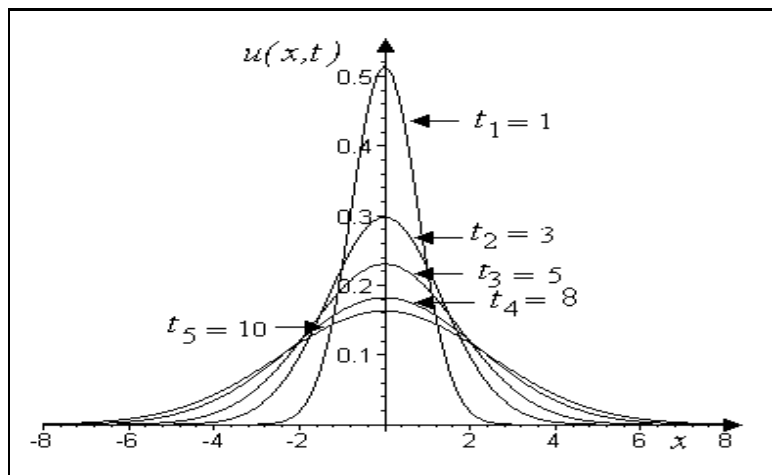


Figura 2.8: Representação da solução da equação (2.42) no plano  $(x, u)$ , em diversos tempos  $t$  para  $D = 0.3$ .

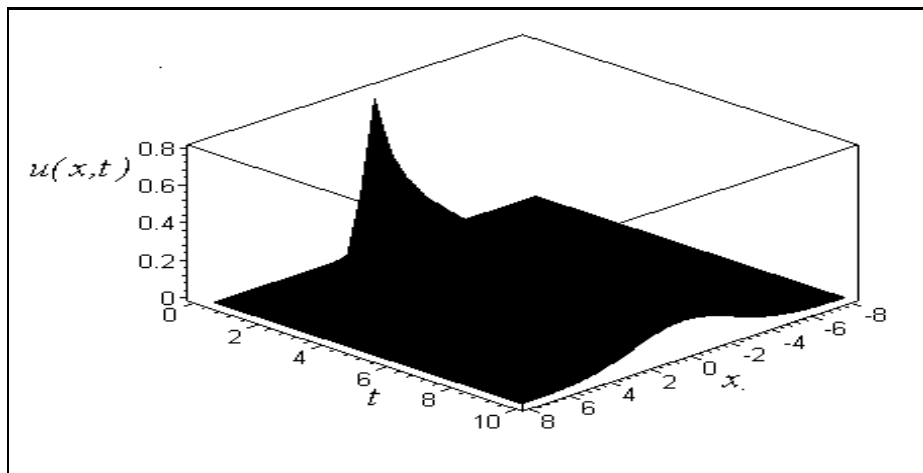


Figura 2.9: Representação da solução da equação (2.42) no espaço  $(x, t, u)$ , para  $D = 0.3$ .

A seguir, relataremos a clássica teoria da difusão fundamentada por A. Fick. Deixaremos aqui  $u$  denotar a concentração de insetos num tubo. Esperamos que um movimento aleatório e colisões de insetos causem uma dispersão de concentrações de insetos de tal forma que o movimento seja da mais alta para a mais baixa concentração. Para modelar esse tipo de movimento aleatório, faremos duas observações:

1. o movimento é no sentido da mais alta concentração para a mais baixa;
2. quanto mais íngreme o gradiente de concentração, maior será o fluxo, pois o fluxo depende da derivada da densidade em relação à variável  $x$ .

Assim, consideremos novamente a lei de conservação básica (2.11), sem termo de fonte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.43)$$

e façamos o fluxo  $\phi(x, t)$  proporcional ao gradiente da densidade  $u(x, t)$  e com sinal contrário a este, isto é,

$$\phi(x, t) = -D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.44)$$

onde  $D$  é um coeficiente de difusão e o sinal negativo indica que a difusão ocorre no sentido da mais alta para a mais baixa concentração.

A equação (2.44) é conhecida por *Lei de Fick* e pode ser substituída na equação (2.43), resultando

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -D \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.45)$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.46)$$

que é conhecida como *equação da difusão*. Considerando que, em  $t = 0$ ,  $Q$  insetos sejam liberados na posição  $x = x_0$ , a solução para a equação (2.46) que satisfaz a condição inicial  $u(x, 0) = Q\delta(x - x_0)$ , onde  $\delta(x - x_0)$  é a função delta de Dirac, é

$$u(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4Dt} \right]. \quad (2.47)$$

Se os insetos forem liberados na origem isto é,  $x_0 = 0$ , em  $t = 0$ , a equação (2.47) torna-se

$$u(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{x^2}{4Dt} \right], \quad (2.48)$$

que, fazendo  $Q = 1$ , coincide com o resultado obtido no movimento aleatório (2.42), a partir da dispersão difusiva de tempo discreto.

Na dispersão difusiva de tempo discreto vimos que chegaríamos a uma distribuição gaussiana, após alguns passos de tempo, independentemente dos detalhes da distribuição de dispersão. Como para alcançar qualquer tempo finito, uma distribuição contínua deve dar um número infinito de passos de tempo, não é surpreendente que a distribuição de densidade populacional tenha sempre a forma de uma distribuição normal (gaussiana).

Observamos que, quando  $t \rightarrow 0$ , a equação (2.47) fornece um pico infinitamente alto e estreito, centrado em  $x = x_0$ . Entretanto, ela contém exatamente  $Q$  indivíduos em todos os tempos. Esta solução representa o espalhamento (expansão) espacial de um grupo de indivíduos que inicialmente estavam todos situados no ponto que arbitrariamente designamos por  $x = x_0$ .

A equação diferencial parcial (2.46) é uma das fundamentais em aplicações matemáticas, usada para descrever fenômenos com difusão espacial. Uma ilustração para isso é a equação da condução do calor, para a qual existe uma relação constitutiva similar, baseada na lei de Fourier:

$$\phi = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.49)$$

onde

- $\theta(x, t)$  é a temperatura num sólido, na posição  $x$ , no tempo  $t$ ;  
 $[\theta(x, t)] = {}^\circ c$ , onde  ${}^\circ c$  denota graus Celsius
- $\kappa$  é a constante que representa a condutividade térmica do material;  
 $[\kappa] = \frac{\text{cal}}{s \cdot m \cdot {}^\circ c}$ .

Considerando a lei de conservação, sem o termo fonte, equação (2.43), juntamente com a lei de Fourier (2.49), e fazendo  $u(x, t) = \rho C \theta(x, t)$ , obtemos a equação

$$\rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (2.50)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho C} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (2.51)$$

sendo

- $C$ , o calor específico da substância;  $[C] = \frac{\text{cal}}{^\circ\text{C} \cdot \text{g}}$ ,
- $\rho$ , a densidade de massa por unidade de volume;  $[\rho] = \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ .

A equação (2.51) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (2.52)$$

sendo a constante  $K \equiv \frac{\kappa}{C\rho}$ . Quanto à dimensão de  $K$ , temos:

$$[K] = \frac{[\kappa]}{[C][\rho]} = \frac{\frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C}}}{\frac{\text{cal}}{^\circ\text{C} \cdot \text{g}} \frac{\text{g}}{\text{m}^3}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

isto é,

$$[K] = \left[ \frac{L^2}{t} \right] = [D].$$

Dessa forma, a equação (2.52) é a *equação de condução do calor*, isto é a equação da difusão, no contexto do fluxo de calor (condução), o qual resulta do movimento aleatório, das partículas que colidem, para um lado e para outro, ao longo do eixo  $x$ .

Vimos, anteriormente, que a equação da convecção admite solução do tipo onda viajante (2.17), isto é:

$$u(x, t) = U(x - ct) = U(z), \quad z = x - ct. \quad (2.53)$$



O mesmo, no entanto, não ocorre com a equação da difusão. Mostraremos, a seguir, que a equação da difusão (2.46) não admite soluções do tipo onda viajante. Para isto, substituiremos as derivadas parciais

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{dU}{dz} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{dU}{dz} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 U}{dz^2}\end{aligned}\tag{2.54}$$

na equação difusão (2.46); assim, a equação diferencial parcial torna-se a equação diferencial ordinária

$$D \frac{d^2 U}{dz^2} + c \frac{dU}{dz} = 0,\tag{2.55}$$

cuja solução é da forma

$$U(z) = A + B \exp\left(-\frac{c}{D}z\right),\tag{2.56}$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração. Para ser realística fisicamente, a solução  $U(z)$  tem que ser limitada para todo  $z$  e não negativa, uma vez que estamos tratando de populações ou concentrações químicas. Visto que  $u$  tem que ser limitada para todo  $z$ ,  $B$  deve ser zero, já que a exponencial torna-se ilimitada quando  $z \rightarrow -\infty$ . Assim sendo,  $U(z) = A$ , uma constante, que não é uma solução do tipo onda viajante. Em contrapartida, a equação do tipo reação-difusão, que será vista posteriormente, exhibe solução do tipo onda viajante, dependendo do termo de reação  $f(u)$ .

Modelos de difusão formam uma base para dispersão de insetos e animais. Nós veremos alguns modelos nos capítulos 4 e 5.

### 2.3.3 Equação de Convecção-Difusão

Considerando juntos os fluxos por convecção (2.15) e por difusão (2.44), isto é,

$$\phi(x, t) = cu - D \frac{\partial u}{\partial x},\tag{2.57}$$

e substituindo na lei de conservação (equação 2.43), obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( cu - D \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.58)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.59)$$

que é uma *equação de convecção-difusão*.

### 2.3.4 Equações de Reação-Difusão

Se considerássemos escalas de tempo sobre as quais indivíduos são capazes de se reproduzir, deveríamos ter mantido o termo fonte na equação (2.10) e considerando um fluxo difusivo, teríamos obtido a equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, x, t). \quad (2.60)$$

Foi visto no fim da secção 2.3.2, que a equação da difusão (2.46), sem o termo de reação, não admite solução do tipo onda viajante. No entanto, quando a cinética de reação e difusão são acopladas, dependendo da forma de  $F(u, x, t)$ , poderão existir ondas viajantes de concentração química permitindo que ocorra uma mudança bioquímica muito mais rápida do que o simples processo de difusão definido pela equação (2.46). Se  $F(u, x, t) = f(u)$ , esse acoplamento dá origem à *equação do tipo reação-difusão*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (2.61)$$

onde  $f(u)$  representa a cinética de reação [Murray (1989)]. O termo de reação  $f(u)$  pode ser, por exemplo, um termo de crescimento linear, imigração ou produção, denotado por  $\alpha u$  ou um termo de decaimento, emigração ou colheita (retirada de produção) denotado por  $-\alpha u$ , ou ainda termos não lineares, por exemplo do tipo logístico, dependendo do problema específico em estudo.

Além do movimento aleatório das moléculas que causam a agitação térmica e a condução (difusão) do calor, existem inúmeros sistemas que apresentam

movimentos para os quais um modelo de difusão é apropriado. Podemos citar, por exemplo, o efeito das ondas e do vento sobre pequenas “ilhas” constituídas por algas no oceano; embora a superfície do oceano seja bidimensional, podemos considerar que a densidade das algas varia apenas ao longo da coordenada  $x$ . O movimento das algas para um lado e para outro nestas “ilhas” pode ser considerado aleatório e, portanto, apropriado para um modelo de difusão. Por outro lado, neste movimento, algumas algas podem ser carregadas para fora do contorno da “ilha”, perdendo-se. Como a única compensação para estas perdas é o aumento da população através da reprodução interna, acrescenta-se ao modelo um termo de fonte. Se a taxa de crescimento da população for considerada proporcional à população presente, obtemos a equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru. \quad (2.62)$$

Por outro lado, se considerarmos um crescimento do tipo logístico, obtemos a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad (2.63)$$

também denominada equação de Fisher. Ambas as equações diferenciais (2.62) e (2.63) serão tratadas com mais detalhe no capítulo 3.

Ainda podemos fazer algumas observações quanto aos termos acrescentados ao termo de difusão. Se adicionarmos o termo de convecção  $c \frac{\partial u}{\partial x}$  à equação (2.61) e  $f(u) = -\alpha u$ , estaremos diante de uma *equação convecção-difusão-decaimento*, escrita na seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u. \quad (2.64)$$

### 2.3.5 Equação da Difusão com Fluxo por Taxia

O mecanismo usado pelos diferentes seres vivos como a principal estratégia para a prospecção local do ambiente é a procura aleatória. O movimento aleatório é de pequena escala e uma vez detectado um gradiente de alimentos na

vizinhança explorada, o organismo escolhe uma direção para empreender um movimento em uma escala maior do que a empregada no movimento aleatório. Este movimento em maior escala representa uma taxia [Rodrigues (1998)]. Assim sendo, é razoável supor que o fluxo de indivíduos não dependa apenas de uma difusão tipo Fick (equação (2.44)), mas também de uma componente na direção do gradiente da distribuição dos nutrientes.

Dessa forma, podemos escrever, para o fluxo que inclui taxia, a seguinte expressão:

$$\phi = D \frac{\partial u}{\partial x} + u \chi(a) \frac{\partial a}{\partial x}, \quad (2.65)$$

onde a contribuição de difusão (componente aleatória) está acompanhada do fluxo por taxia (orientação para maiores gradientes). Assim, a equação da difusão com o fluxo por taxia, sem termo de fonte, é da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \chi(a) \frac{\partial a}{\partial x} - D \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.66)$$

onde a velocidade dos indivíduos é dada por

$$v = \chi(a) \frac{\partial a}{\partial x}, \quad (2.67)$$

na direção crescente do gradiente da distribuição dos nutrientes e sua intensidade depende da qualidade  $\chi(a)$ . Se  $a$  for aproximadamente constante numa determinada região, então  $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$  e a equação (2.66) terá somente a componente difusiva; entretanto, se a qualidade varia no domínio de percepção do indivíduo, então teremos um fluxo, composto pela componente difusiva e também por taxia.

No capítulo seguinte, apresentaremos a *equação de Fisher* e investigaremos soluções do tipo onda viajante, para este tipo especial de equação reação-difusão, na qual  $f(u)$  é um termo de fonte não linear, que representa o processo de crescimento e morte, num contexto ecológico.

### 3 A EQUAÇÃO DE FISHER

No capítulo anterior, apresentamos algumas importantes equações diferenciais parciais, a partir de uma lei geral de conservação. Em especial, comentamos que, dependendo da forma do termo de reação/interação  $f(u)$  na equação (2.61), poderia existir solução do tipo onda viajante. Aqui estudaremos um tipo especial de equação de reação-difusão (2.61)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (3.1)$$

onde o termo de reação assume a forma

$$f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right).$$

Obtém-se assim a *equação de Fisher*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad (3.2)$$

onde, representando por  $L$  a dimensão linear do sistema, isto é,  $[x] = [L]$ , temos:

- $u(x, t)$  é a densidade de uma grandeza;  $[u] = \frac{[grandeza]}{[L^3]}$  (quantidade da grandeza por unidade de volume);
- $D$  é o coeficiente de difusão (constante positiva);  $[D] = \frac{[L^2]}{[t]}$ ;
- $r$  é a taxa de crescimento linear ou intrínseco (constante positiva),  $[r] = [t]^{-1}$ ;
- $K$  é a capacidade de suporte do ambiente (constante positiva);  $[K] = [u] = \frac{[grandeza]}{[L^3]}$ .

A equação diferencial (3.2) é a extensão natural do modelo logístico para crescimento populacional quando ocorre dispersão da população através da difusão linear, isto é, causada por movimentos individuais que, nas escalas de tempo e de espaço de interesse, são efetivamente aleatórios.

Se, em  $t = 0$ , tivermos  $u = u_0$  em  $x = 0$ , e  $u = 0$  para todo  $x \neq 0$ , e se considerarmos uma escala de tempo onde possa haver nascimento (crescimento populacional), nossa expectativa é de que, dependendo da diferença entre as escalas de dispersão e crescimento, possa-se observar o aumento desta população tendo por limite a capacidade de suporte local  $K$ , e depois sua dispersão para o resto do universo atrás de uma “frente de invasão” movendo-se com alguma velocidade constante  $c$ .

Mediante a mudança de variável,  $\frac{u}{K} = v$ , a equação (3.2) torna-se

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rv(1 - v), \quad (3.3)$$

onde a variável dependente  $v$  é adimensional e, além disso, o número de parâmetros fica reduzido de 3 para 2. Alguns autores, quando se referem à equação de Fisher, fazem-no a partir da equação (3.3), por exemplo, [Murray (1989)], [Beltrami (1997)].

A equação de Fisher (3.2) contém além de um termo de difusão, um termo de reação  $f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)$ , cujo gráfico apresentamos na figura 3.1, que representa uma taxa de crescimento não linear do tipo “logístico” [Debnath (1997)]. Se  $u$  representar uma densidade populacional, valores negativos de  $u$  não possuem significado realístico. Observamos que  $f(u)$  é máximo quando  $u$  é igual a  $\frac{K}{2}$ ; se  $u$  cresce, além de  $\frac{K}{2}$ ,  $f(u)$  decresce. Se  $u = K$ ,  $f(u)$  é nulo e se  $u > K$ ,  $f(u) < 0$ . Essa interpretação sugere que em  $t = 0$ , seja satisfeita a seguinte desigualdade:

$$0 \leq u(x, 0) \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Em contextos de dinâmica populacional, a equação de Fisher modela a interação entre crescimento populacional local e dispersão local.

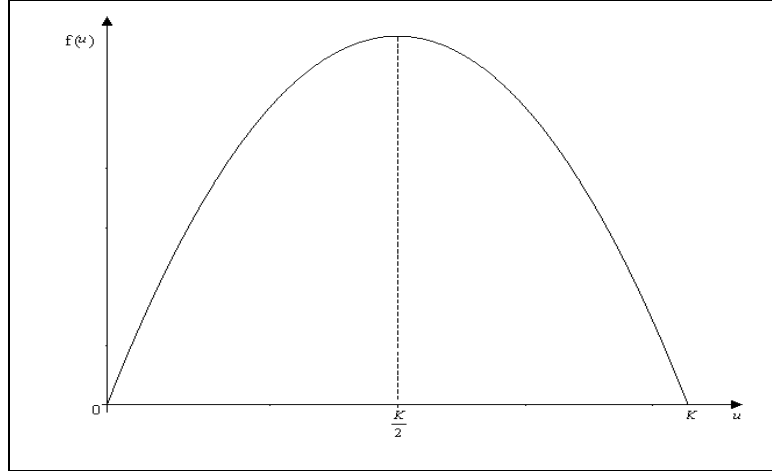


Figura 3.1: Gráfico de  $f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)$ .

### 3.1 Aproximação de Kendall

Denomina-se aproximação de Kendall, à aproximação linear da equação de Fisher [Banks (1994)].

Consideremos, portanto, a equação de Fisher

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (3.5)$$

onde

$$f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right). \quad (3.6)$$

Sua aproximação linear é válida para  $0 < \frac{u}{K} \ll 1$ . Fazendo  $\frac{u}{K} = y$ , podemos reescrever a equação (3.6) sob a forma:

$$f(y) = rKy(1 - y). \quad (3.7)$$

Considerando, agora,  $y \ll 1$ , expandimos  $f(y)$  em série de Taylor em torno de  $y = 0$  e, desprezando termos da ordem  $|y|^2$ , obtemos

$$f(y) \cong rKy,$$

donde uma aproximação linear para a equação (3.2), próximo da origem, é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \quad (3.8)$$

Nesta aproximação, sendo  $r > 0 (< 0)$ , o segundo termo do lado direito caracteriza um crescimento (decréscimo) exponencial. Supondo que inicialmente (em  $t = 0$ ) sejam liberados  $u_0$  insetos por unidade de área, no ponto  $x = 0$ , a condição inicial tem a forma

$$u(x, 0) = u_0 \delta(x) \quad (3.9)$$

A solução exata da equação (3.8), que satisfaz esta condição inicial, é análoga à da equação da difusão com termo de decaimento, desde que o termo de decaimento  $-\mu u$  seja substituído pelo termo de crescimento exponencial  $ru$ , isto é:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt} + rt\right). \quad (3.10)$$

Para investigar se a equação diferencial (3.2) admite solução do tipo onda viajante, citada em (2.17), isto é,

$$u(x, t) = U(x - ct) = U(z), \quad z = x - ct, \quad (3.11)$$

substituiremos em (3.8) as derivadas parciais de acordo com (2.54), donde a equação diferencial parcial (3.8) para  $u = u(x, t)$  é reescrita sob a forma de uma equação diferencial ordinária para  $U = U(z)$ :

$$D \frac{d^2 U}{dz^2} + c \frac{dU}{dz} + rU = 0; \quad (3.12)$$

esta equação admite soluções do tipo  $\exp(\alpha_i z)$ , onde  $\alpha_i (i = 1, 2)$  são as raízes da equação característica, dadas por:

$$\alpha_{1,2} = \frac{c}{2D} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4rD}{c^2}} \right). \quad (3.13)$$

Observando a expressão (3.13), vemos que:

- se substituirmos a taxa de crescimento  $r$  por uma taxa de decaimento  $-\alpha$ , o radicando da expressão é sempre positivo e maior do que 1, levando a dois valores reais distintos para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , sendo um positivo e outro negativo, e as soluções para a equação (3.12) são fisicamente admissíveis para toda constante positiva  $c$ ;



- se  $4rD > c^2$ , então o radicando é uma quantidade negativa, levando a raízes  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) complexas, com parte imaginária não nula. Neste caso,  $U$  oscila em torno da origem assumindo tanto valores negativos, quanto valores positivos, violando a condição de que  $U \geq 0$ . Com isso, temos soluções do tipo onda viajante fisicamente não realísticas, por que existe  $U(z) < 0$  para algum  $z$ .

Assim, observamos que, para termos solução realística, a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$1 - \frac{4rD}{c^2} \geq 0 \quad (3.14)$$

e conseqüentemente

$$c^2 \geq 4rD, \quad (3.15)$$

ou ainda,

$$c \geq 2\sqrt{rD}, \quad (3.16)$$

visto que  $c \geq 0$ .

Concluimos, portanto, através da aproximação de Kendall, que a equação de Fisher admite solução do tipo onda viajante, cuja velocidade de propagação é igual ou superior a  $2\sqrt{rD}$ . O valor preciso da velocidade de onda viajante  $c$ , depende das condições iniciais do problema.

## 3.2 Adimensionalização do Problema

Retomando a equação de Fisher (3.2), difusão com crescimento logístico, é conveniente introduzir quantidades adimensionais [Murray (1989)]. A adimensionalização fundamenta-se no fato de que o comportamento dinâmico de um sistema não pode depender da escala de medida adotada. Em decorrência, o número de parâmetros é, em geral, reduzido, permanecendo apenas aqueles que são relevantes. Representando por  $[\alpha]$  a dimensionalidade de  $\alpha$  e sabendo que

- $[u] = [K]$ ,

- $[r] = [t]^{-1}$ ,
- $[D] = \frac{[L^2]}{[t]}$ ,

onde  $[L]$  é a dimensão linear do problema, isto é,  $[x] = [L]$ , podemos definir quantidades adimensionais, através de:

- $u^* = K^{-1}u$ ,
- $x^* = \sqrt{\frac{r}{D}}x$ ,
- $t^* = rt$ .

Conseqüentemente, as velocidades  $c$  serão relacionadas com as adimensionais  $c^*$ , através de

$$c = \left( \frac{\left( \frac{x}{x^*} \right)}{\left( \frac{t}{t^*} \right)} \right) c^* = \frac{\sqrt{\frac{D}{r}}}{\frac{1}{r}} c^* = c^* \sqrt{rD}. \quad (3.17)$$

Chamamos atenção com relação ao símbolo  $*$ , que estamos usando para denotar quantidades adimensionais. Obteremos, a seguir, uma nova equação diferencial parcial, para a qual  $u^*$  será a nova variável dependente e  $x^*$  e  $t^*$  as novas variáveis independentes.

Visto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t^*} r = \frac{\partial u}{\partial u^*} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} r = Kr \frac{\partial u^*}{\partial t^*}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x^*} \sqrt{\frac{r}{D}} = \frac{\partial u}{\partial u^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \sqrt{\frac{r}{D}} = K \sqrt{\frac{r}{D}} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= K \frac{r}{D} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}, \end{aligned}$$

obtemos a nova equação diferencial para  $u^*(x^*, t^*)$ , sob a forma

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + u^*(1 - u^*), \quad \forall x^* \in \mathbb{R}, \quad t^* > 0. \quad (3.18)$$

Além disso, de (3.4), obtemos:  $0 \leq u^* \leq 1$ ,  $\forall x^* \in \mathbb{R}$ . Trata-se de um problema não linear, que não tem solução sob forma fechada; então procuraremos inferir a respeito das propriedades da solução real, a partir de aproximações analíticas.

Na situação espacialmente homogênea, isto é,  $\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \equiv 0$ , a equação diferencial (3.18) recai na seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{du^*}{dt^*} = g(u^*), \quad t^* > 0, \quad (3.19)$$

onde definimos

$$g(u^*) = u^*(1 - u^*), \quad (3.20)$$

cujos estados estacionários são tais que  $u^*(1 - u^*) \equiv 0$ , isto é  $u_{est}^* = 0$  e  $u_{est}^* = 1$ .

Visto que

$$\left. \frac{dg(u^*)}{du^*} \right|_{u^*=u_{est}^*} = 1 - 2u_{est}^* \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{dg(u^*)}{du^*} \right|_{u^*=u_{est}^*=0} = 1 > 0, \\ \left. \frac{dg(u^*)}{du^*} \right|_{u^*=u_{est}^*=1} = -1 < 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

tem-se, pela condição de estabilidade, que  $u_{est}^* = 0$  e  $u_{est}^* = 1$  que corresponde ao valor da capacidade de suporte para a população  $u$ , são soluções linearmente instável e linearmente estável, respectivamente. Isto sugere que se procure soluções do tipo frente de onda viajante  $u^* = u^*(x^*, t^*)$  para a equação (3.18) para as quais  $0 \leq u^* \leq 1$ .

Observamos que a equação (3.18) é invariante sobre a transformação  $x^*$  por  $-x^*$ . Então é suficiente considerar propagação de ondas, apenas para a direita. Procuraremos uma solução tal que, em um instante particular  $t^*$ ,  $u^*$  varie suavemente e rapidamente de 1 para 0 quando nos movemos da região invadida para a região não invadida. Com o passar do tempo, nossa expectativa é de que a forma da frente de invasão permaneça constante, enquanto sua posição se move para a direita, com velocidade adimensional  $c^*$ .

Impõe-se as condições iniciais, do tipo função degrau, em  $t^* = 0$  e  $x^* \in \mathbb{R}$ :

$$u^*(x^*, 0) = \begin{cases} 1; & x^* < 0 \\ 0; & x^* > 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

e as seguintes condições de contorno em  $x^* \rightarrow -\infty$  e  $x^* \rightarrow +\infty$ , tais que em uma extremidade,  $u^*$  está em um estado estacionário enquanto que na outra extremidade  $u^*$  está no outro estado estacionário, isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{x^* \rightarrow -\infty} u^*(x^*, t^*) &\equiv u^*(-\infty, t^*) = 1 \\ \lim_{x^* \rightarrow +\infty} u^*(x^*, t^*) &\equiv u^*(+\infty, t^*) = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para  $t^* > 0$ .

Fisicamente,

$$\lim_{x^* \rightarrow -\infty} u^*(x^*, t^*) = 1,$$

implica que a população tende ao seu valor máximo (a capacidade de suporte) quando  $x^* \rightarrow -\infty$  e

$$\lim_{x^* \rightarrow +\infty} u^*(x^*, t^*) = 0,$$

representa que a população tende a zero quando  $x^* \rightarrow +\infty$ .

Na figura 3.2, reproduzimos a argumentação intuitiva apresentada por Beltrami (1997), para embasar a idéia da existência de solução do tipo onda viajante para a equação diferencial (3.18), no caso em que a distribuição inicial  $u^*(x^*, 0)$  da densidade  $u^*$ , é do tipo função degrau (3.22). Na seqüência apresentada, observa-se em (b), o efeito da difusão que reduz  $u^*$  da região onde a população é mais densa e aumenta  $u^*$  na região onde era mais escassa, enquanto que em (c), o efeito do crescimento intrínseco  $f(u)$  que é maior nas proximidades de  $u^* = \frac{1}{2}$  e menor nas extremidades  $u^* = 0$  e  $u^* = 1$ . Repetindo as ações da difusão e do crescimento, desta forma, observa-se o perfil inicial movendo-se para a direita.



Figura 3.2: *Evolução temporal de uma solução da equação diferencial (3.18). (a) em  $t = 0$ ; (b)  $t = t_1 > 0$ ; (c)  $t = t_2 > t_1$ . A seqüência apresenta o movimento do perfil inicial, no sentido de  $x^*$  crescente.*

### 3.3 Soluções do Tipo Onda Viajante

Mostraremos, a seguir, que a equação de Fisher (3.18)

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} = u^*(1 - u^*), \quad x^* \in \mathbb{R}, \quad t^* > 0, \quad (3.24)$$

admite solução do tipo onda viajante, isto é, da forma

$$u^*(x^*, t^*) = U(z^*), \quad z^* = x^* - ct^*, \quad (3.25)$$

para uma velocidade de onda,  $c > 0$ , constante e a forma de onda  $U(z^*)$  satisfaz as condições de contorno:

$$\lim_{z^* \rightarrow -\infty} U(z^*) = 1, \quad \lim_{z^* \rightarrow +\infty} U(z^*) = 0, \quad t^* \geq 0.$$

Substituindo-se na equação diferencial (3.24) as derivadas parciais indicadas em (2.54), as quais por sua vez decorrem de (3.25), obtém-se para  $U(z^*)$  a equação diferencial ordinária, não linear

$$\frac{d^2 U}{dz^{*2}} + c \frac{dU}{dz^*} + U(1 - U) = 0, \quad (3.26)$$

ou, equivalentemente, o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dU}{dz^*} = V \quad (3.27)$$

$$\frac{dV}{dz^*} = -cV + U(U - 1), \quad (3.28)$$

que ainda pode ser escrito, para  $V \neq 0$ , como

$$\frac{dV}{dU} = \frac{U(U - 1) - cV}{V} \quad (3.29)$$

### 3.3.1 Análise das soluções em uma vizinhança dos estados estacionários

Por se tratar de um problema não linear, que não tem solução sob forma fechada, vamos analisar as soluções perto dos estados estacionários. Os pontos singulares  $(U_{est}, V_{est})$ , ou soluções estacionárias do sistema, são obtidas resolvendo o sistema algébrico:

$$\begin{aligned} V &= 0 \\ -cV + U(U - 1) &= 0, \end{aligned}$$

que fornece:

$$\begin{aligned} (U_{est}, V_{est})_1 &= (0, 0), \\ (U_{est}, V_{est})_2 &= (1, 0). \end{aligned}$$

A análise da estabilidade de cada um destes pontos é efetuada a partir da linearização do sistema (3.27-3.28) em torno de  $(U_{est}, V_{est})$ , como segue:

$$\frac{d}{dz^*}(U(z) - U_{est}) = V - V_{est} \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dz^*}(V(z) - V_{est}) = (-1 + 2U_{est})(U - U_{est}) - c(V - V_{est}),$$

que matricialmente se escreve:

$$\begin{bmatrix} \frac{dU}{dz^*} \\ \frac{dV}{dz^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2U_{est} & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(z^*) - U_{est} \\ V(z^*) - V_{est} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

A seguir, analisaremos a matriz jacobiana

$$\mathbf{A}(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2U_{\text{est}} & -c \end{bmatrix}$$

para cada um dos pontos estacionários, separadamente.

a) **Perto de  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})_1 = (0, 0)$**

A matriz jacobiana associada ao ponto crítico  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})_1 = (0, 0)$  é:

$$\mathbf{A}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{bmatrix}$$

cujos autovalores  $\lambda_i (i = 1, 2)$  são as raízes do determinante característico:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & -(c + \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

donde obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2}(c - \sqrt{c^2 - 4}) \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(c + \sqrt{c^2 - 4}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Concluimos, portanto, que, se  $c^2 - 4 > 0$ , os autovalores são reais e distintos e ambos negativos e o ponto  $(0, 0)$  é um nodo estável. Se  $c^2 - 4 = 0$ , isto é,  $c = 2$ , existe um único autovalor  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2}$  que é real e negativo e a origem é um nodo degenerado estável. Assim sendo, o ponto  $(0, 0)$  é um nodo estável para  $c \geq c_{\text{min}} = 2$ . Se  $c^2 < 4$ , então os autovalores são complexos com a parte imaginária não nula e com parte real negativa e, portanto,  $(0, 0)$  é espiral estável (apêndice D), isto é,  $U$  oscila em torno da origem, aproximando-se dela, assumindo ora valores positivos, ora valores negativos. Assim sendo, concluimos que existem ondas viajantes para  $0 < c < 2$ , entretanto, não são fisicamente realísticas, pois correspondem a  $U(z^*) < 0$ , para algum  $z^*$ , o que não faz sentido visto que  $U(z^*)$  denota populações.

O autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

correspondente a  $\lambda_1 = -\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4}$  é obtido resolvendo o sistema

$$(\mathbf{A}(0,0) - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{\epsilon}^{(1)} = 0, \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 2. Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -1 & -c - \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.35)$$

temos

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

De maneira análoga, determinamos o autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

correspondente a  $\lambda_2 = -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4}$ , como segue:

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Com os autovalores em (3.32) e os autovetores (3.36) e (3.38), concluímos que a solução para o sistema não linear (3.27)-(3.28) é dada, perto de (0,0), aproximadamente por

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \rightarrow A_1 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 z^*) + A_2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_2 z^*), \quad (3.39)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes arbitrárias que podem ser determinadas a partir das condições iniciais e de contorno do problema dado.



b) **Perto de  $(U_{est}, V_{est})_2 = (1, 0)$**

A matriz jacobiana associada ao ponto crítico  $(U_{est}, V_{est})_2 = (1, 0)$  é

$$\mathbf{A}(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{bmatrix}$$

cujos autovalores  $\lambda_i (i = 1, 2)$ , são as raízes do determinante característico:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & -(c + \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

de onde obtemos:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 + 4}).$$

Os autovalores são reais e de sinais opostos e, portanto,  $(1, 0)$  é um ponto de sela.

O autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

correspondente ao autovalor positivo, isto é,  $\lambda_1 = -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4}$ , é dado por

$$(\mathbf{A}(1, 0) - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{\epsilon}^{(1)} = 0, \quad (3.41)$$

donde obtemos:

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

O autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

correspondente ao autovalor negativo,  $\lambda_2 = -\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4}$ , é o autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e a solução para o sistema não linear (3.27)-(3.28) é dada, perto de  $(1,0)$ , aproximadamente por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &\rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 z^*) + \\ &+ B_2 \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_2 z^*). \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são constantes arbitrárias, que dependem das condições iniciais e de contorno do problema dado.

As soluções que se aproximam do ponto crítico  $(1,0)$  são apenas aquelas que principiam sobre a variedade estável deste ponto de sela, isto é, a reta determinada por  $\vec{e}^{(2)}$ , dado em (3.44). Todas as demais afastam-se. A exponencial positiva é a parcela dominante na solução (5.108), para  $z^*$  grande. Isto significa que todas as soluções próximas ao ponto  $(1,0)$  são assintóticas à reta determinada pelo autovetor  $\vec{e}^{(1)}$ , dado em (3.42) correspondente ao autovalor  $\lambda_1$  (variedade instável).

Na tabela 3.1, apresentamos uma síntese dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$ .

$(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$	Autovalores da matriz jacobiana	Autovetores correspondentes	Tipo de equilíbrio
(0,0)	$\lambda_1 = -\frac{1}{2} [c + \sqrt{c^2 - 4}]$	$\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$	se $c \geq 2$ , nodo assintoticamente estável
	$\lambda_2 = -\frac{1}{2} [c - \sqrt{c^2 - 4}]$	$\vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$	se $0 < c < 2$ , espiral assintoticamente estável
(1,0)	$\lambda_1 = -\frac{1}{2} [c - \sqrt{c^2 + 4}] > 0$	$\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\forall c > 0$ , ponto de sela (instável)
	$\lambda_2 = -\frac{1}{2} [c + \sqrt{c^2 + 4}] < 0$	$\vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$	

Tabela 3.1: *Resumo dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$  e  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (1, 0)$ .*

A figura 3.3 mostra os autovetores  $\vec{e}^{(1)}$  e  $\vec{e}^{(2)}$  no nodo estável  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$  e no ponto de sela  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (1, 0)$ , para  $c > 2$ . Para  $c < 2$ , os autovetores em  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (1, 0)$  são os mesmos apresentados na figura 3.3, mas o ponto  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$  passa a ser um equilíbrio do tipo espiral estável, para  $c = 1$ .

Os autovalores são

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}i) \quad (3.46)$$

e os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , são, respectivamente,

$$\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{pmatrix} \quad \vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, apresentamos na figura 3.4 um conjunto de duas soluções  $\vec{u}(t)$  e  $\vec{v}(t)$ , linearmente independentes, do sistema (3.31), sendo  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$  e  $c = 1$ .

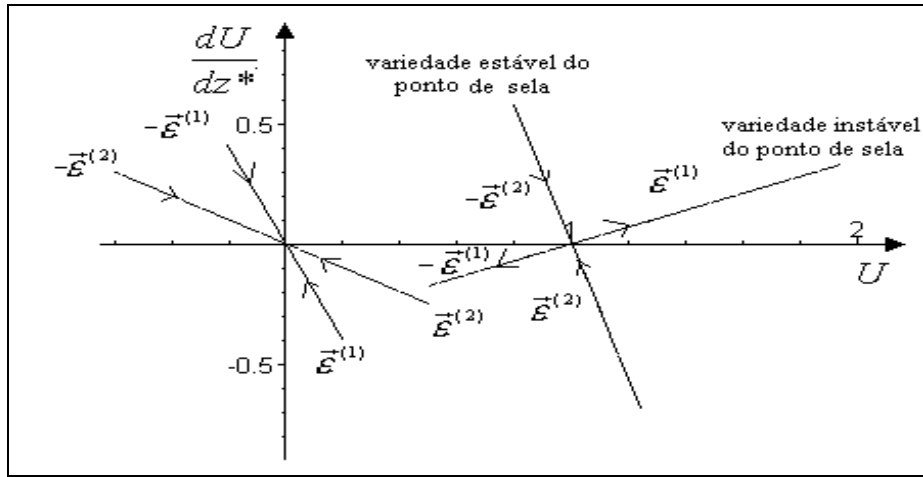


Figura 3.3: Autovetores em  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$  e  $(1, 0)$ , no plano de fase  $UV$ , para  $c > 2$ .

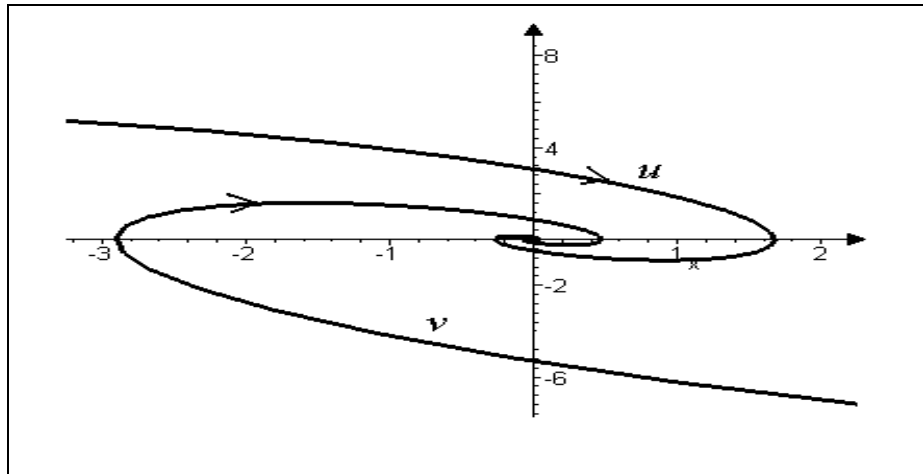


Figura 3.4: Trajetórias linearmente independentes, do sistema (3.31) para  $2 > c = 1$ ; a origem é um ponto espiral.

Em termos da equação de Fisher dimensional (3.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left( 1 - \frac{u}{K} \right), \quad (3.47)$$

obtem-se, através de (3.17) com  $c^* = 2$ , para a velocidade mínima de propagação da onda, o valor dimensional

$$c_{min} = 2(rD)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.48)$$

que coincide com a condição (3.16), obtida no contexto da aproximação de Kendall, que é a aproximação linear da equação de Fisher.

### 3.3.2 Análise global das soluções do sistema não linear

Para completar o estudo de ondas viajantes para a equação de Fisher adimensional, é preciso investigar o que ocorre com as soluções do sistema não linear (3.27)-(3.28), em regiões nem bem próximas de  $(0,0)$ , nem bem próximas de  $(1,0)$ , onde a aproximação linear não é válida.

Nas figuras 3.5 e 3.6, apresentamos o campo de direções e algumas trajetórias no plano de fase  $UV$ , para  $c > 2$  e  $0 < c < 2$ , respectivamente. Esses diagramas de fase foram traçados no *Maple*, através do comando DEplot, que por sua vez usa o método numérico Runge Kutta de 4ª ordem para resolver o sistema de equações diferenciais (3.27)-(3.28); além do sistema de equações diferenciais, atribuímos valores para  $U(0)$  e  $V(0)$ , de modo a determinar a trajetória correspondente. Na figura 3.5, vê-se que existe uma trajetória de  $(1,0)$  para  $(0,0)$ , que permanece inteiramente no 4º quadrante ( $U \geq 0$  e  $U' \leq 0$ ), com  $0 \leq U \leq 1$ ; esta é a trajetória que representa a frente de onda viajante  $U(z^*)$ , que satisfaz

$$\lim_{z^* \rightarrow -\infty} U(z^*) = 1 \quad e \quad \lim_{z^* \rightarrow +\infty} U(z^*) = 0, \quad (3.49)$$

como aquela apresentada na figura 2.5, e que existe para todas as velocidades  $c \geq c_{min} = 2$ . Por outro lado, da figura 3.6, vê-se que, se  $0 < c < 2$ ,  $U(z^*)$  espirala em torno da origem e a trajetória de  $(1,0)$  até  $(0,0)$  ocorre, também, mas passando por valores negativos de  $U$ , o que viola a condição (para ter significado biológico) de  $U(z^*) > 0$ .

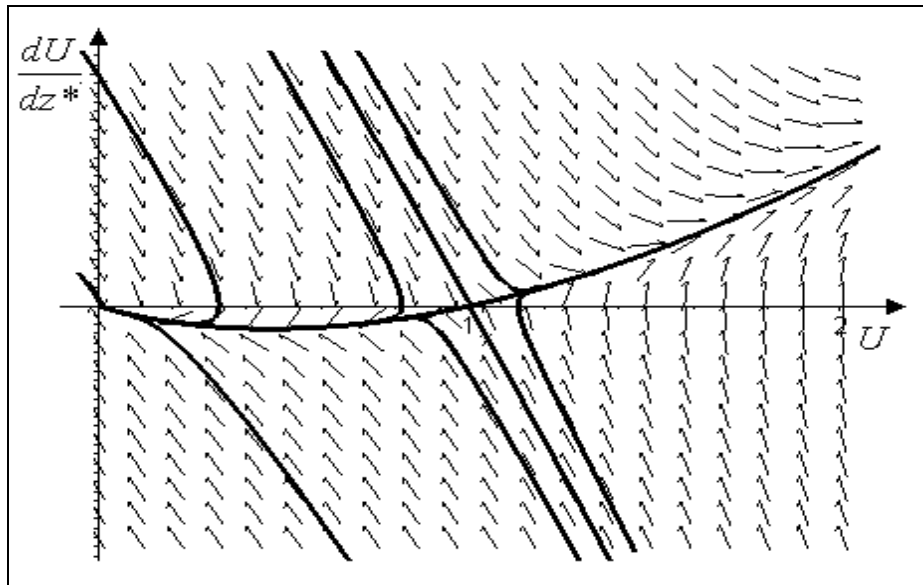


Figura 3.5: Plano de fase para a equação (3.26) com  $c = 2.5 > 2$ . O ponto  $(0,0)$  é nodo estável e  $(1,0)$  é um ponto de sela.

Uma pergunta a ser feita é que tipo de condições iniciais  $u^*(x^*, 0)$  para a equação de Fisher (3.24) evoluirá para a solução do tipo onda viajante e, se tal solução existe, qual é a sua velocidade de onda  $c$ . Este problema e suas generalizações têm sido estudados analiticamente [Murray (1989)]. Kolmogoroff *et al* (1937) provaram que se  $u^*(x^*, 0)$  for tal que

$$u^*(x^*, 0) = u_0(x^*) \geq 0, \quad (3.50)$$

onde, sendo  $x_1^* < x_2^*$ ,

$$u_0(x^*) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^* \leq x_1^* \\ 0, & \text{se } x^* \geq x_2^* \end{cases} \quad (3.51)$$

e  $u_0^*(x^*)$  é contínua em  $x_1^* < x^* < x_2^*$  e se  $u^*(x^*, 0)$  tiver suporte compacto<sup>1</sup>, então a solução  $u^*(x^*, t^*)$  de (3.24) evolui para uma solução do tipo frente de onda viajante  $U(z^*)$ , com  $z^* = x^* - 2t^*$ , cuja velocidade é igual à velocidade mínima  $c_{\min} = 2$ . Para outras condições iniciais, a solução depende criticamente do comportamento de  $u^*(x^*, 0)$ , quando  $x^* \rightarrow \pm\infty$ .

<sup>1</sup>Diz se que  $f(x^*)$  tem suporte compacto se o conjunto dos valores de  $x^*$ , tais que  $f(x^*) \neq 0$ , for limitado e fechado.

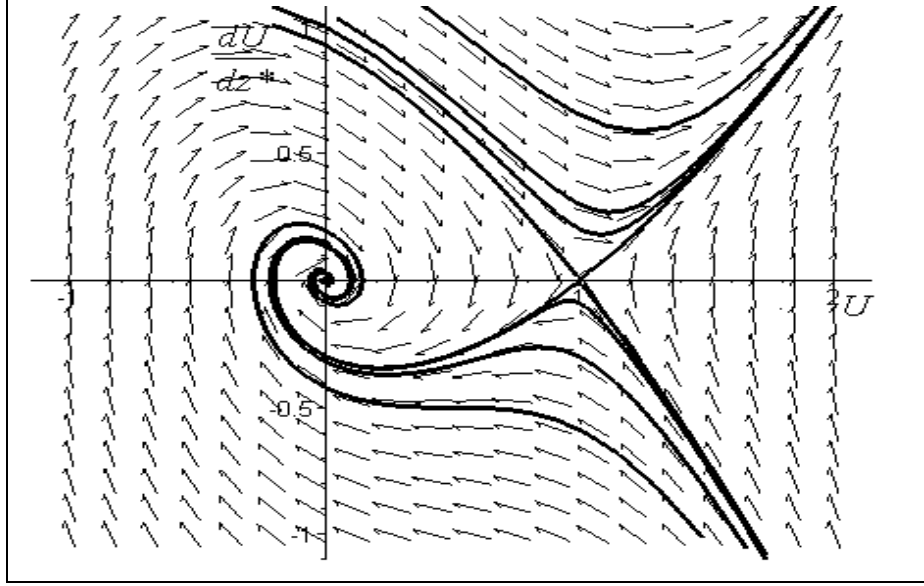


Figura 3.6: Plano de fase para a equação (3.26) com  $c = 0.5 < 2$ . O ponto  $(0,0)$  é espiral estável e  $(1,0)$  é um ponto de sela. Nem o 2<sup>o</sup> nem o 3<sup>o</sup> quadrantes possuem significados biológicos, pois correspondem a  $U < 0$ .

O fato de que a velocidade de propagação das soluções tipo frente de onda viajante depende sensivelmente das condições iniciais quando  $x^* \rightarrow \pm\infty$ , pode ser visto facilmente na análise simples, sugerida por Mollison (1977) [Murray (1989)], e que repetimos a seguir. Consideremos a equação (3.24)

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + u^* - u^{*2}. \quad (3.52)$$

Para a borda (a extremidade que avança) da onda que se propaga, tem-se  $0 < u \ll 1$  e, portanto, podemos considerar a aproximação linear para a equação (3.52), linearizando-a em torno de  $u^* = 0$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + u^*, \\ u^*(x^*, 0) &= u_0^* \delta(x^*) \end{aligned} \quad (3.53)$$

cuja solução exata é a mesma de (3.10), quando  $r = 1$  e  $D = 1$ ,

$$u(x^*, t^*) = \frac{u_0^*}{2\sqrt{\pi t^*}} \exp\left(-\frac{x^{*2}}{4t^*} + t^*\right). \quad (3.54)$$

Considerando condições iniciais tais que

$$u(x^*, 0) \sim Ae^{-ax^*}, \quad \text{quando } x^* \rightarrow \infty, \quad (3.55)$$

vamos procurar soluções do tipo onda viajante para (3.53), na forma

$$u(x^*, t^*) = A \exp(-a(x^* - ct^*)), \quad (3.56)$$

isto é,

$$U(z^*) = A \exp(-az^*), \quad z^* = x^* - ct^* \quad (3.57)$$

onde  $a > 0$  e  $A > 0$  são constantes arbitrárias.

Derivando (3.56), obtemos

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = Aac \cdot \exp(-ax^* + act^*), \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{2*}} = Aa^2 \cdot \exp(-ax^* + act^*)$$

que substituindo em (3.53) origina uma relação entre  $c$  e  $a$ , denominada *relação de dispersão*

$$c = \frac{1}{a} + a. \quad (3.59)$$

Da equação (3.59), e considerando  $a > 0$ , temos que  $\frac{dc}{da} = 0$  para  $a = 1$ , o que corresponde a um valor mínimo de  $c$ , isto é,  $c \geq c_{\min}$  onde  $c_{\min} = c(1) = 2$ . O gráfico desta relação de dispersão para  $c$  como função de  $a$ , é apresentado na figura 3.7. Para todos os outros valores de  $a(> 0)$ , a velocidade de onda  $c$  é maior do que 2.

Supondo que, para a equação diferencial não linear (3.52), a forma da extremidade da solução tipo frente de onda que avança tenha a mesma forma que (3.56), válida para  $|u| \ll 1$ , e visto que, para  $b > 1$  e  $x > 0$ , tem-se  $e^{-bx} < e^{-x} < e^{-\frac{1}{b}x}$ , concluímos que, para  $x \rightarrow \infty$ ,  $u(x^*, 0)$  satisfaz o que segue:

- se  $0 < a \leq 1$ , vale  $e^{-ax} > e^{-x}$ ; portanto, a velocidade de propagação da condição inicial do tipo  $Ae^{-ax}$  quando  $x \rightarrow \infty$  dependerá do valor de  $a$ , que caracteriza a extremidade da onda que avança e a velocidade da onda  $c$  é dada por (3.59), cujo valor mínimo é 2, em  $a = 1$ ;



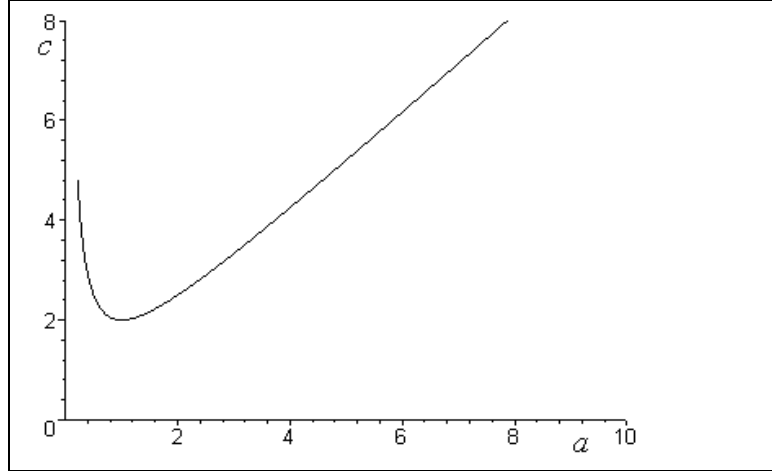


Figura 3.7: *Relação de dispersão, relação entre  $c$  e  $a$ , para  $a > 0$ .*

- se  $a \geq 1$ , então  $e^{-ax} < e^{-x}$  e a frente de onda terá velocidade  $c = 2$ .

O primeiro resultado foi provado por McKean (1975), o segundo por Larson (1978) e ambos foram verificados numericamente por Manoranjan e Nitchell (1983) [Murray (1989)].

Como vimos anteriormente, a equação de Fisher é invariante sob mudança de sinal de  $x$ ; existe, portanto, uma solução do tipo onda viajante, tal que  $u^*(x^*, t^*) = U(x^* + ct^*)$ ,  $c > 0$ , onde, agora,  $U(-\infty) = 0$  e  $U(+\infty) = 1$ . Então, se partirmos da equação diferencial não linear (3.52) para  $-\infty < x < +\infty$  e uma condição inicial tal que  $u^*(x^*, 0)$  seja zero fora de um domínio finito, a solução  $u^*(x^*, t^*)$  evoluirá em duas frentes de onda viajantes, uma se movimentando para a esquerda e outra para a direita, ambas com velocidade  $c \geq 2$  (figura 3.8). Observamos, ainda, que se  $u^*(x^*, 0) < 1$ , o termo  $u^*(1 - u^*)$  leva a solução a crescer até 1, e  $\forall x^* \in \mathbb{R}$ ,  $u^*(x^*, t^*) \rightarrow 1$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

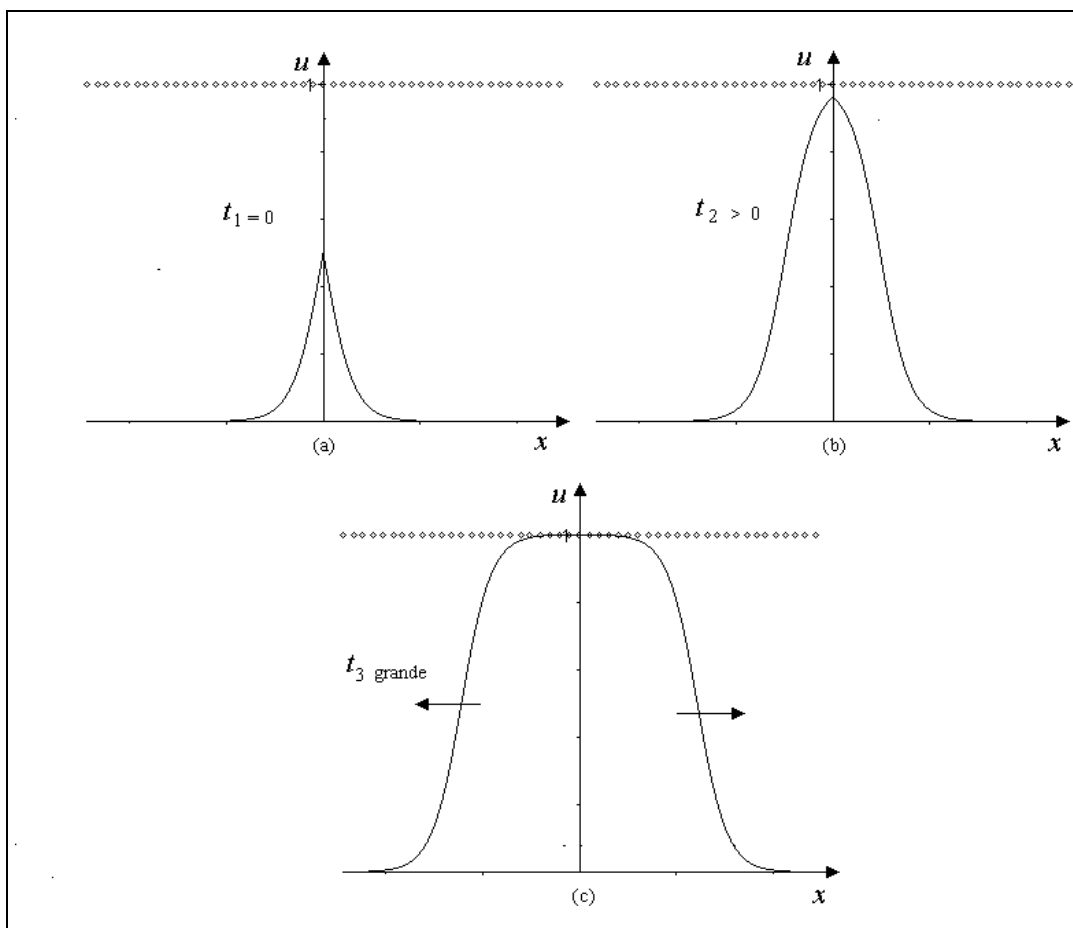


Figura 3.8: *Desenvolvimento da solução do tipo onda viajante da equação de Fisher, evoluindo para duas frentes de ondas viajantes, sendo  $u(x, t) = \{1 + \exp[a(x - ct)]\}^{-1}$ , movimentando-se para a direita e  $u(x, t) = (1 + \exp[a(-x - ct)])^{-1}$ , movimentando-se para a esquerda, com velocidade de propagação da onda  $c = 2.25$  e  $a = 0.8$ ; (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 2$ , (c)  $t = 5$ .*

### 3.4 Solução Assintótica para a Equação de Fisher

Nesta seção, omitiremos os asteriscos, para simplificar a notação, entretanto, não podemos esquecer que aqui,  $z = z^*$ , pois estamos tratando da equação de Fisher adimensionalizada.

Conforme mostramos na seção anterior, soluções do tipo onda viajante  $U(z)$ , onde  $z = x - ct$ , para a equação de Fisher adimensionalizada (3.18) satisfazem (3.26), a saber:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + c \frac{dU}{dz} + U(1 - U) = 0, \quad (3.60)$$

e existem soluções monotônicas, isto é, decrescentes no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , com  $U(-\infty) = 1$  e  $U(+\infty) = 0$ , para todas as velocidades de onda  $c \geq 2$ . Definindo  $V \equiv \frac{dU}{dz}$ , escrevemos o sistema (3.27)-(3.28) de duas equações diferenciais de 1<sup>a</sup> ordem, equivalente à equação diferencial de 2<sup>a</sup> ordem (3.26), donde concluímos que as trajetórias no plano de fase são soluções de (3.29), que reescrevemos abaixo:

$$\frac{dV}{dU} = \frac{U(U - 1) - cV}{V}. \quad (3.61)$$

Este sistema apresenta dois estados estacionários  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , ambos com  $V = 0$ ; identificamos aquele com  $U = 1$  como ponto de sela enquanto que aquele com  $U = 0$  será nodo estável se  $c \geq 2$ , ou espiral estável se  $0 < c < 2$ .

Vimos também que a velocidade de propagação das soluções tipo frente de onda viajante depende sensivelmente das condições iniciais  $u(x, 0)$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Supondo que a equação de Fisher adimensionalizada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u) \quad (3.62)$$

admita uma solução do tipo frente de onda, cuja extremidade que avança tenha a forma:

$$u(x, t) = Ae^{-a(x-ct)}, \quad c > 0 \quad (3.63)$$

tal que o comportamento assintótico da condição inicial satisfaça

$$u(x, 0) \sim Ae^{-ax}, \quad \text{quando } x \rightarrow \infty, \quad (3.64)$$

concluimos que, se  $0 < a \leq 1$ , vale a relação de dispersão

$$c = \frac{1}{a} + a, \quad (3.65)$$

donde  $c_{min} = 2$  em  $a = 1$ , enquanto que se  $a > 1$ , tem-se  $c = 2$ .

Embora, em geral, não seja possível determinar solução analítica da equação diferencial (3.60), para  $c$  qualquer, mostraremos a seguir como se pode usar a técnica de perturbação singular padrão, para escrever soluções assintóticas, em potências de um parâmetro  $\epsilon$  pequeno.

Como  $c^2 \geq 4$ , podemos definir um parâmetro  $\epsilon$  pequeno nas equações, através de  $0 < \epsilon \equiv \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4}$ , que sugere que se procure soluções assintóticas para  $0 < \epsilon \ll 1$ , o que significa grandes velocidades  $c = \epsilon^{-\frac{1}{2}}$  [Murray (1989)].

Visto que as soluções ondulatórias são invariantes sob qualquer mudança de variável do tipo  $z \rightarrow z + C$ , onde  $C$  é uma constante, podemos considerar  $z = 0$  no ponto onde  $U = \frac{1}{2}$ , isto é, tal que  $U(0) = \frac{1}{2}$ . Sendo  $\epsilon$  um parâmetro pequeno, podemos tentar, através de teoria de perturbação, obter uma solução sob a forma de potências de  $\epsilon$ , que seja válida nas vizinhanças da frente de onda, que aqui está em  $z = 0$ . Faremos isso com a transformação

$$U(z) = g(\xi), \quad \text{onde} \quad \xi = \frac{z}{c} = \epsilon^{\frac{1}{2}} z. \quad (3.66)$$

Visto que

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= \frac{dg}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{dg}{d\xi} \cdot \epsilon^{\frac{1}{2}} \\ \frac{d^2U}{dz^2} &= \frac{d^2g}{d\xi^2} \cdot \epsilon, \end{aligned} \quad (3.67)$$

reescrevemos a equação diferencial (3.60) sob a forma:

$$\epsilon \frac{d^2g}{d\xi^2} + \frac{dg}{d\xi} + g(1 - g) = 0, \quad 0 < \epsilon \leq \frac{1}{c_{min}^2} = \frac{1}{4}, \quad (3.68)$$

onde  $g(\xi)$  deve satisfazer as condições de contorno e a condição inicial

$$g(-\infty) = 1, \quad g(+\infty) = 0, \quad g(0) = \frac{1}{2}, \quad (3.69)$$

obtidas a partir de

$$U(-\infty) = 1, \quad U(+\infty) = 0, \quad U(0) = \frac{1}{2}, \quad (3.70)$$

respectivamente.

Vamos procurar soluções de (3.68) como uma série de perturbação regular, em  $\epsilon$ , isto é,

$$g(\xi; \epsilon) = g_0(\xi) + \epsilon g_1(\xi) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i g_i(\xi). \quad (3.71)$$

Substituindo (3.71) em (3.69), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{de } g(-\infty) = 1 &\Rightarrow g_0(-\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i g_i(-\infty) = 1 \\ \text{de } g(+\infty) = 0 &\Rightarrow g_0(+\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i g_i(+\infty) = 0 \\ \text{de } g(0) = \frac{1}{2} &\Rightarrow g_0(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i g_i(0) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e, portanto, as condições em  $g_i(\xi)$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$  são escritas como segue:

$$g_0(-\infty) = 1, \quad g_0(+\infty) = 0, \quad g_0(0) = \frac{1}{2}, \quad (3.72)$$

$$g_i(\pm\infty) = 0, \quad g_i(0) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \quad (3.73)$$

Substituindo (3.71) em (3.68), obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon \left( \frac{d^2 g_0}{d\xi^2} + \epsilon \frac{d^2 g_1}{d\xi^2} + \dots \right) + \left( \frac{d g_0}{d\xi} + \epsilon \frac{d g_1}{d\xi} + \dots \right) + \\ + (g_0(\xi) + \epsilon g_1(\xi) + \dots) [1 - (g_0(\xi) + \epsilon g_1(\xi) + \dots)] = 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Reordenando segundo as potências de  $\epsilon$ , temos:

$$\frac{d g_0}{d\xi} + g_0(\xi) - g_0^2(\xi) + \epsilon \left( \frac{d^2 g_0}{d\xi^2} + \frac{d g_1}{d\xi} + g_1(\xi) - 2g_0(\xi)g_1(\xi) \right) + O(\epsilon^2) = 0, \quad (3.75)$$

donde podemos escrever, até  $O(\epsilon)$ :

$$\frac{d g_0}{d\xi} + g_0(\xi) - g_0^2(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{d g_0}{d\xi} = -g_0(1 - g_0); \quad (3.76)$$

$$\frac{d^2 g_0}{d\xi^2} + \frac{d g_1}{d\xi} + g_1(\xi) - 2g_0(\xi)g_1(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{d g_1}{d\xi} + (1 - 2g_0(\xi))g_1 = -\frac{d^2 g_0}{d\xi^2}. \quad (3.77)$$

A equação diferencial (3.76), tem como solução geral

$$g_0(\xi) = \frac{1}{1 + C e^\xi}, \quad \text{se } g_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad g_0 \neq 1, \quad (3.78)$$

e soluções singulares  $g_0 = 0$  e  $g_0 = 1$ .

A solução particular, que satisfaz a condição  $g_0(0) = \frac{1}{2}$ , é aquela que corresponde a  $C = 1$ :

$$g_0 = (\exp(\xi) + 1)^{-1}, \quad (3.79)$$

que também satisfaz  $g_0(-\infty) = 1$  e  $g_0(+\infty) = 0$ , em (3.72). Substituindo a expressão (3.79) para  $g_0(\xi)$  na equação (3.77), e impondo a condição  $g_1(0) = 0$ , dada em (3.73), obtemos a solução para  $g_1(\xi)$  como segue:

$$g_1(\xi) = \frac{e^\xi}{(1 + e^\xi)^2} \ln \left[ \frac{4e^\xi}{(1 + e^\xi)^2} \right]. \quad (3.80)$$

Finalmente, substituindo em (3.71),  $g_0(\xi)$  e  $g_1(\xi)$  obtidos em (3.79) e (3.80), respectivamente, escrevemos:

$$g(\xi; \epsilon) = (1 + e^\xi)^{-1} + \epsilon e^\xi (1 + e^\xi)^{-2} \ln \left[ \frac{4e^\xi}{(1 + e^\xi)^2} \right] + O(\epsilon^2);$$

que, retornando às variáveis originais, fornece:

$$U(z; c) = (1 + \exp(\frac{z}{c}))^{-1} + c^{-2} \exp(\frac{z}{c}) (1 + \exp(\frac{z}{c}))^{-2} \ln \left[ 4 \exp(\frac{z}{c}) (1 + \exp(\frac{z}{c}))^{-2} \right] + \quad (3.81) \\ + O(c^{-4}), \quad c \geq c_{\min} = 2.$$

Usaremos a solução assintótica (3.81) para investigar a relação entre a declividade da solução tipo frente de onda e sua velocidade de propagação. Visto que o gradiente  $\frac{dU}{dz}$  da frente de onda que avança no sentido de  $z$  crescente, é sempre negativo, podemos escolher como medida da declividade, denotado por  $S$ , o módulo do valor do gradiente de  $U(z)$  no ponto onde  $U''(z) = 0$ , isto é, no ponto de inflexão, da solução tipo frente de onda, pois no ponto de inflexão tem-se em módulo, a máxima inclinação. O valor de  $z$  tal que  $U''(z) = 0$  é  $z = 0$ . Portanto,

$$S = |U'(0)| = \frac{1}{4c} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.82)$$

que, evidentemente, vale apenas para  $c \geq 2$ . O resultado implica que quanto mais rápido for o movimento da onda, isto é, quanto maior o valor de  $c$ , menos íngreme

será a frente de onda (figura 3.9). Apesar da largura da onda ser de  $-\infty$  a  $+\infty$ , uma medida prática da largura,  $L$ , pode ser obtida pelo inverso da declividade, isto é

$$L = \frac{1}{S} = 4c. \quad (3.83)$$

O resultado nesta secção pode ser generalizado para um modelo populacional de

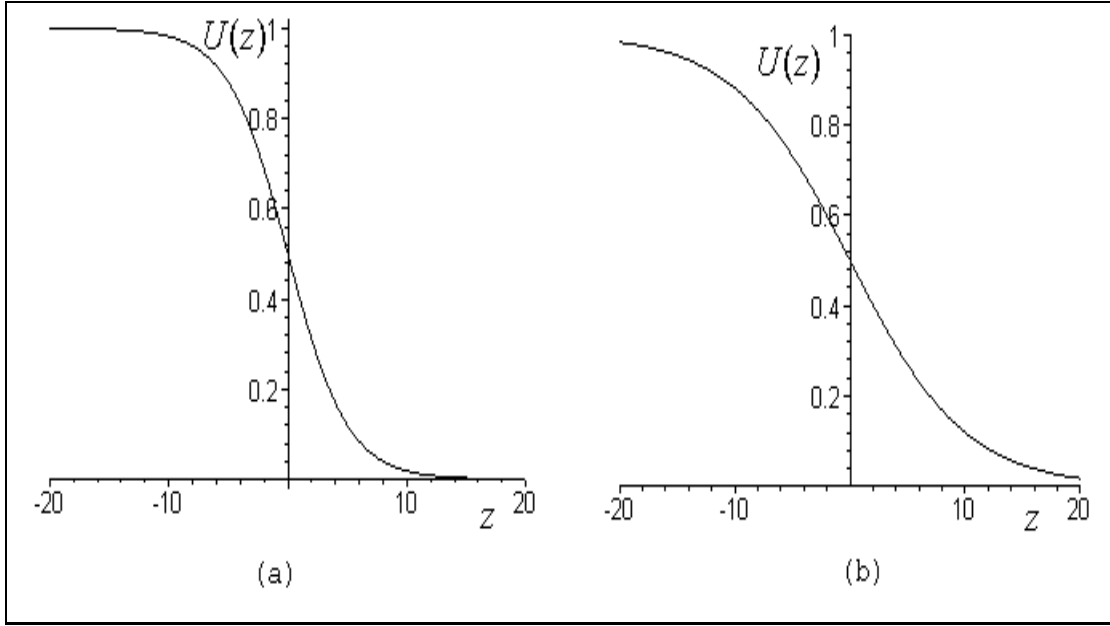


Figura 3.9: Duas frentes de onda definidas pela equação  $u(z) = \left(1 + \exp\left(\frac{z}{c}\right)\right)^{-1}$ : (a)  $c = 2.5$ , (b)  $c = 5$ . Vê-se que quanto maior o valor da velocidade  $c$ , menos íngreme é a frente de onda.

uma única espécie onde o crescimento logístico é substituído por um apropriado  $f(u)$  [Murray (1989)], tal que (3.18) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.84)$$

onde  $f(u)$  tem apenas dois zeros, denotados por  $u_1$  e  $u_2 > u_1$ . Se  $f'(u_1) > 0$  e  $f'(u_2) < 0$ , então por uma análise similar àquela apresentada nesta secção, soluções de frente de onda evoluem com  $u$ , indo monotonicamente de  $u_1$  para  $u_2$  (do ponto instável para o estável) com velocidades de onda

$$c \geq c_{\min} = 2[f'(u_1)]^2. \quad (3.85)$$

### 3.5 Estabilidade das Soluções do Tipo Onda Viajante

A estabilidade das soluções dos modelos biológicos é um aspecto importante e muitas vezes auxilia no teste de confiabilidade dos mecanismos do modelo. As soluções do tipo onda viajante da equação de Fisher apresentam um interessante caso de estudo de estabilidade.

De acordo com o que apresentamos nas seções anteriores, a velocidade de propagação das soluções do tipo frente de onda depende, sensivelmente do comportamento explícito das condições iniciais  $u(x, 0)$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Isto implica que soluções do tipo frente de onda são instáveis a perturbações, num campo mais distante. Por outro lado, se  $u(x, 0)$  satisfaz as condições vistas em (3.51), e tiver suporte compacto, foi mostrado que a onda final não depende da forma detalhada de  $u(x, 0)$ . Lembrando que qualquer modelo prático lida, evidentemente, com um domínio finito, é importante considerar a estabilidade das soluções ondulatórias a perturbações que são nulas fora de um domínio finito, que inclui a frente de onda. Mostraremos, a seguir, que as soluções são estáveis para tais perturbações finitas, se forem perturbações no sistema em movimento com a onda.

Consideremos  $u^*(x^*, t^*) = u(z, t)$ , onde  $z = x - ct$ , isto é  $z$  e  $t$  são tomados como variáveis independentes no lugar de  $x^*$  e  $t^*$ . Visto que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot (-c) + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.88)$$

substituindo as derivadas na equação (3.18), obtemos a equação diferencial parcial para  $u(z, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c \frac{\partial u}{\partial z} + u(1 - u). \quad (3.89)$$

Representando por  $u_c(z)$ , a solução estacionária da equação diferencial acima, isto é, tal que  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , observamos que  $u_c(z) = U(z)$  é a solução da equação diferencial (3.26). Agora, vamos considerar uma pequena perturbação  $w \cdot v(z, t)$  sobre  $u_c(z)$  na



forma

$$u(z, t) = u_c(z) + w \cdot v(z, t), \quad (3.90)$$

onde  $0 < w \ll 1$ , é um parâmetro muito pequeno. Substituindo (3.90) em (3.89), obtemos

$$\begin{aligned} w \frac{\partial v}{\partial t} = (u_c(z) + wv(z, t))(1 - u_c(z) - wv(z, t)) + c \cdot \frac{\partial u_c(z)}{\partial z} + cw \frac{\partial v}{\partial z} + \\ + \frac{\partial^2 u_c(z)}{\partial z^2} + w \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

donde desprezando os termos da  $0(w^2)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} w \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_c(z)}{\partial z^2} + c \frac{\partial u_c}{\partial z} + u_c(z) (1 - u_c(z)) + w [(1 - 2u_c(z)) v(z, t) + \\ + c \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Lembrando que  $u_c(z) = U(z)$  é solução da equação diferencial (3.26), obtemos uma equação diferencial linear para  $v(z, t)$ , sob a forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (1 - 2u_c(z))v + c \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (3.93)$$

Evidentemente, a solução  $u_c(z)$  será estável às perturbações  $wv(z, t)$  se as soluções  $v(z, t)$  da equação diferencial (3.93), satisfizerem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(z, t) = 0. \quad (3.94)$$

Mas esta não é a única possibilidade para que  $u_c(z)$  seja estável a pequenas perturbações. Outra possibilidade é de que  $v(z, t)$  represente uma pequena translação da onda ao longo do eixo  $x$ , tal que no limite  $t \rightarrow \infty$ ,

$$u_c(z + \delta z) = u_c(z) + \delta z \cdot v(z, t), \quad (3.95)$$

o que implica em

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(z, t) = \frac{du_c(z)}{dz}, \quad (3.96)$$

pois

$$\frac{du_c}{dz} \simeq \frac{u_c(z + \delta z) - u_c(z)}{\delta z} \quad (3.97)$$

Se procurarmos soluções do tipo

$$v(z, t) = g(z) \exp(-\lambda t), \quad (3.98)$$

para a equação (3.93), obtemos:

$$g''(z) + cg'(z) + [\lambda + 1 - 2u_c(z)]g(z) = 0, \quad (3.99)$$

na qual o parâmetro  $\lambda$  é considerado um autovalor. Se  $\lambda = 0$ , recaímos na equação diferencial:

$$g''(z) + cg'(z) + (1 - 2u_c z)g(z) = 0 \quad (3.100)$$

que tem como solução

$$g(z) = \frac{du_c(z)}{dz}, \quad (3.101)$$

como pode se verificado substituindo (3.101) na equação (3.100), donde obtemos:

$$\frac{\partial^3 u_c}{\partial z^3} + c \frac{d^2 u_c}{dz^2} + \frac{d}{dz} [u_c(1 - u_c)] = 0, \quad (3.102)$$

uma identidade, visto que  $u_c(z)$  é solução de (3.26). Como vimos anteriormente, (3.101) implica que a solução tipo onda viajante é invariante sob translação ao longo do eixo  $z$ .

Usando o fato de que  $v(z, t)$ , que satisfaz (3.98), é diferente de zero apenas num domínio finito, concluímos que existe algum  $L$  tal que as condições de contorno  $g(\pm L) = 0$  são satisfeitas. Se introduzirmos em (3.99) uma nova transformação:

$$g(z) = h(z) \exp\left(-\frac{cz}{2}\right), \quad (3.103)$$

obtém-se a seguinte equação diferencial para  $h(z)$ :

$$h'' + \left\{ \lambda - \left[ 2u_c(z) - 1 + \frac{c^2}{4} \right] \right\} h = 0, \quad h(\pm L) = 0, \quad (3.104)$$

onde

$$2u_c(z) + \frac{c^2}{4} - 1 \geq 2u_c(z) > 0, \quad (3.105)$$

já que  $c \geq 2$  e  $u_c(z) > 0$  no domínio finito  $-L \leq z \leq L$ .

Concluimos, portanto, que todos os autovalores  $\lambda$  de (3.104) são reais e positivos e conseqüentemente, as perturbações  $v(z, t)$  em (3.98) decaem exponencialmente para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ . Com isso, conclui-se que as soluções do tipo onda viajante  $u_c(z)$ , para a equação de Fisher, são estáveis para perturbações de domínio finito do tipo  $v(z, t)$  dado em (3.90). Entretanto, a análise da perturbação não é completamente geral, uma vez que se referem apenas as perturbações no sistema em movimento.

A equação de Fisher tem servido de base para uma variedade de modelos para dispersão espacial. No capítulo seguinte, apresentaremos alguns exemplos de modelos aplicados à dispersão de insetos, com coeficiente de difusão constante.

## 4 ALGUNS MODELOS DE DISPERSÃO DE INSETOS COM COEFICIENTE DE DIFUSÃO CONSTANTE

O controle do número de indivíduos e a formação de uma distribuição espacial padrão são assuntos fundamentais em ecologia populacional [Namba (1980)]. Em especial, a relação entre dispersão animal e estabilidade ou persistência de um sistema ecológico tem atraído o interesse, tanto de pesquisadores teóricos quanto experimentais, nos últimos cinquenta anos. A dispersão animal é classificada em dispersão aleatória (independente da densidade) e dispersão dependente da densidade, e esta última é de fundamental importância, do ponto de vista de dinâmica populacional. A relação entre dispersão animal e densidade de população tem sido investigada extensivamente em insetos, pois estes se mostravam convenientes para estudos de dispersão, devido à sua abundância e sua alta mobilidade. Além disso, informação quantitativa relativa à dispersão de insetos tem exercido um papel essencial no controle de pragas [Okubo (1980)].

Um experimento de dispersão de insetos do tipo marca-recaptura consiste em liberar um grande número de insetos, que são distinguíveis dos outros da mesma espécie, a partir de uma certa posição ( $x = 0$ ), em um certo instante de tempo ( $t = 0$ ), e observar a distribuição espacial destes insetos em vários tempos subsequentes.

Estudos realizados por volta de 1950 levaram os pesquisadores a concluir que, a cada espécie, pode ser associada uma pressão da população que leva à sua dispersão. A partir de dados experimentais, foram estabelecidas fórmulas empíricas, para descrever a variação temporal da variância da distribuição medida, para dispersão de insetos a partir de uma fonte pontual.

A partir da década de 1970, experimentos podiam ser realizados com a ajuda de pequenos radiotraçadores que permitiam marcar os insetos que eram

liberados, distinguindo-os uns dos outros. Desde os primeiros experimentos, observou-se que a dispersão é muito rápida no início, logo após os insetos serem liberados, sendo que este movimento vai se tornando gradualmente mais lento até que, após um tempo suficientemente longo, os insetos tendem a permanecer no interior de uma região limitada. Este padrão é um dos aspectos característicos da biodifusão. Gráficos de variações temporais de variância retirados dos trabalhos experimentais pioneiros em dispersão de insetos são apresentados em Okubo(1980).

Dos diversos experimentos de campo realizados, pode-se apontar os seguintes aspectos:

1. A distribuição espacial dos insetos individuais é, em geral, leptocúrtica (curtose  $> 3$ )<sup>1</sup>, isto é, perto do seu centro e em direção às suas caudas, suas amplitudes são maiores que as da distribuição normal (gaussiana) com a mesma média e a mesma variância (figura 4.1); este fato é observado principalmente nos estágios iniciais da dispersão.
2. A variância da distribuição dos deslocamentos de insetos cresce mais rapidamente no início da dispersão, ralentando sua taxa de crescimento com o passar do tempo, até que por fim se aproxima de um valor fixo. A curva da variação temporal da variância depende do número total de indivíduos liberados, mesmo que as condições ambientais seja idênticas. O valor assintótico da variância é controlado por fatores ambientais.
3. Fatores ambientais tais como grau de luminosidade, temperatura, grau de umidade e velocidade do vento afetam a dispersão; em geral, alta temperatura, baixa umidade e ventos fracos estimulam a dispersão.

Visto que a superposição de duas distribuições normais, com mesmo valor médio mas valores distintos de variância, produz um padrão leptocúrtico,

---

<sup>1</sup>Define-se curtose de uma distribuição, como a razão entre seu momento central de 4<sup>ª</sup> ordem e o quadrado de sua variância. Para uma distribuição  $f = f_0 \exp(-c|x|^k)$ , obtém-se para a curtose o valor  $\frac{\Gamma(\frac{1}{k}) \Gamma(\frac{5}{k})}{[\Gamma(\frac{3}{k})]^2}$ , que para  $k = 2$  (distribuição normal) fornece o valor 3.

uma interpretação possível é de que as distribuições leptocúrticas observadas experimentalmente seriam resultantes de populações heterogêneas de insetos, alguns com dispersão rápida e outros com dispersão lenta.

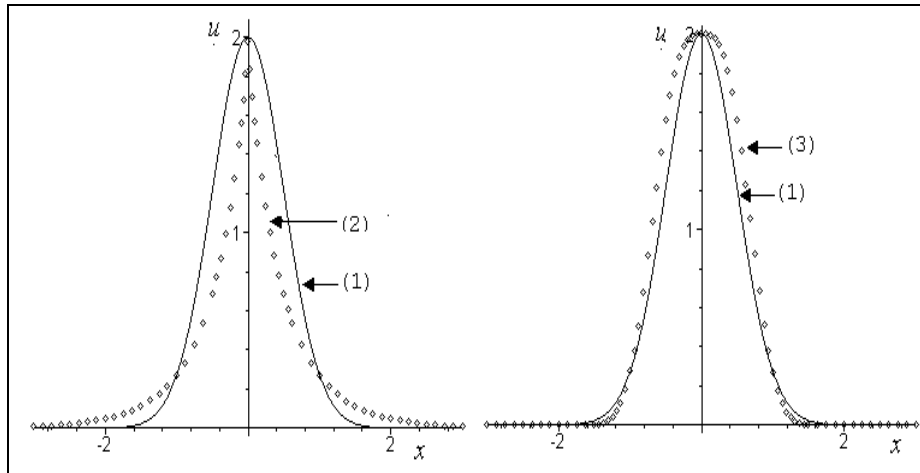


Figura 4.1: Três tipos de distribuição com a mesma média e a mesma variância: (1) normal (Gaussiana) (curva contínua), (2) leptocúrtica (pontos), (3) platicúrtica (pontos).

Experimentos mais recentes (da década de 70) mostraram que liberar insetos selvagens, coletados no mesmo dia ou no dia anterior à liberação, apresenta características distintas daquelas que correspondem à liberação de insetos mutantes criados em laboratório, investigada previamente. Com tais insetos selvagens, as distribuições espaciais eram próximas de gaussianas, mesmo um dia após a liberação, e não mais leptocúrticas. Além disso, verificou-se com insetos selvagens uma taxa de dispersão bem maior que aquela com insetos criados em laboratório. Quanto à variação temporal da variância da distribuição espacial após liberar insetos selvagens, observou-se que, dois dias após a liberação, o valor da variância era menor que o dobro daquela de um dia após a liberação. A interpretação que pode ser dada a tais diferenças é de que, no que se refere à dispersão, a população dos insetos selvagens era aproximadamente homogênea, diferentemente do que teria ocorrido com a população criada em laboratório. Quanto à taxa de dispersão ser muito maior no caso dos insetos selvagens, é possível interpretar que este fato tenha sido estimulado por um efeito excitante em decorrência da aglomeração dos insetos. Se a rápida dispersão

inicial for devida a uma pressão da população associada com a aglomeração, então a distribuição espacial deveria ser não leptocúrtica, mas platicúrtica, isto é, mais achatada que a distribuição gaussiana. Por outro lado, a rápida dispersão inicial poderia ser devida também ao próprio procedimento de liberação.

No que segue, apresentaremos alguns dos modelos matemáticos utilizados para descrever dispersão de insetos. Neste capítulo trataremos da dispersão aleatória, no capítulo 5 da dispersão dependente da densidade populacional e a difusão dependente do tempo será abordada no capítulo 6.

## 4.1 Com Termo de Fonte

Um interessante problema é a distribuição espacial de insetos, resultante de uma combinação de dispersão e interação intra-específica. Essa combinação determina a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (4.1)$$

onde o termo  $f$ , responsável pela interação intra-específica, inclui a possibilidade de se ter adição de indivíduos, por considerarmos escalas de tempo, nas quais é possível reprodução; ou retirada de indivíduos, quando consideramos a morte ou emigração desses indivíduos. Numa escala de tempo menor, onde seja desnecessário incluir um termo de reprodução ou morte, o termo de fonte  $f$  é nulo.

### 4.1.1 Com decaimento exponencial

Citaremos, a seguir, um exemplo em que se modela ovos e larvas de insetos, supondo decaimento exponencial para a população de larvas e crescimento exponencial para o número de ovos. Consideremos uma população de insetos que se dispersa a partir de um ponto, de acordo com a lei de Fick, isto é, aleatoriamente, e se reproduz a uma taxa constante. A taxa de mortalidade *per capita* dos pais é também suposta constante. Em uma dimensão a população de pais obedece a

seguinte equação da difusão com termo de fonte do tipo decaimento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu u, \quad (4.2)$$

onde  $u$  é a densidade da população de pais,  $D$  é a difusividade e  $\mu$  é a taxa de mortalidade. Supondo uma distribuição de ovos, cuja taxa de variação é proporcional à população de pais, a equação para a densidade  $E(x, t)$  de população de ovos é

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \lambda u \quad (4.3)$$

onde  $\lambda$  é a taxa de ovos depositados *per capita*.

Supondo que inicialmente sejam liberados  $N_0$  insetos, no ponto  $x = 0$ , então a condição inicial para (4.2), em  $t = 0$ , tem a forma

$$u(x, 0) = N_0 \delta(x), \quad (4.4)$$

e a solução da equação diferencial (4.2) é dada por

$$u(x, t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt} - \mu t\right), \quad (4.5)$$

cujos gráficos são apresentados na figura (4.2), em 3 instantes de tempo distintos. Esta solução é análoga à solução (3.10), diferindo apenas o coeficiente do termo de fonte, que, aqui é  $-\mu u$  e em (3.8) é  $+ru$ .

Substituindo a solução (4.5) em (4.3), obtemos

$$dE = \frac{\lambda N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt} - \mu t\right) dt. \quad (4.6)$$

Considerando a condição inicial  $E(x, t) = 0$ , no tempo  $t = 0$ , e integrando de 0 a  $t$  os dois lados da igualdade, obtemos

$$E(x, t) = \int_0^t \frac{\lambda N_0}{2\sqrt{\pi D\tau}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D\tau} - \mu\tau\right) d\tau. \quad (4.7)$$

Através da mudança de variável

$$\tau = \eta^2, \quad (4.8)$$

podemos escrever:

$$E(x, t) = \int_0^{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda N_0}{2\sqrt{\pi D\eta^2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D\eta^2} - \mu\eta^2\right) 2\eta d\eta, \quad (4.9)$$



ou

$$E(x, t) = \frac{\lambda N_0}{\sqrt{\pi D}} \cdot \int_0^{t^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D\eta^2} - \mu\eta^2\right) d\eta. \quad (4.10)$$

O valor da integral de (4.10) envolve uma função erro, e determinando o limite dessa solução, quando  $t \rightarrow +\infty$ , nos leva a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(x, t) = \frac{\lambda N_0}{2\sqrt{\pi D}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{D}} \cdot |x|\right) \quad (4.11)$$

que é a forma assintótica de (4.10) e é uma distribuição leptocúrtica (curtose=6). Este exemplo mostra que uma distribuição do composto (pais e ovos) pode diferir da distribuição dos pais e freqüentemente exibe um padrão leptocúrtico, mesmo se a distribuição dos pais for gaussiana [Okubo (1980)].

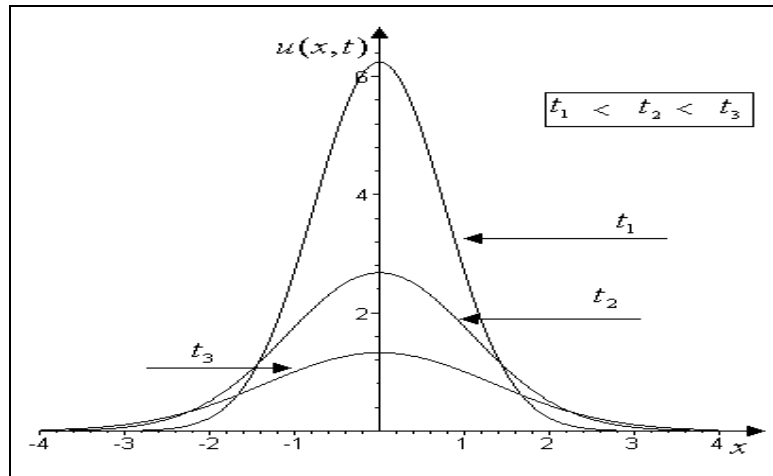


Figura 4.2: Solução (4.5), na qual  $t_1 < t_2 < t_3$ , sendo  $D=0.3$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $N_0 = 20$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  e  $t_3 = 3$ ; a densidade  $u(x, t)$  diminui rapidamente, a medida que o tempo passa.

Por volta de 1960, as equações (4.2) e (4.3) foram usadas para modelar uma distribuição de larvas de insetos que se moviam aleatoriamente. Distribuições espaciais de ovos e larvas constituem um assunto de importância prática para especialistas em modelagem matemática. Outros problemas de dispersão importantes são a propagação de doenças de plantas ou animais transmitidas por insetos e a polinização por abelhas.

### 4.1.2 Com crescimento exponencial

Quando uma espécie invade e se dispersa em um habitat onde competidores ou inimigos naturais estão ausentes, pode-se considerar um modelo de população com crescimento exponencial (população Malthusiana) e difusão, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u, \quad \alpha > 0, \\ u(x, 0) &= N_0 \delta(x)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Esta equação é a mesma já escrita como equação (3.8); por outro lado, pode ser comparada à equação (4.2), em que o termo de decaimento  $-\mu u$  é substituído pelo termo de crescimento exponencial  $\alpha u$ . A solução de (4.12) é dada por:

$$u(x, t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt} + \alpha t\right),\tag{4.13}$$

onde  $N_0$  denota o número total de indivíduos, num espaço unidimensional, no tempo  $t = 0$ , concentrados inicialmente na origem e espalhando-se em um espaço sem contorno. Na figura 4.23(a), observamos que para valores pequenos de  $t$ , próximos de zero, a solução (4.13) fornece um pico alto e estreito centrado na origem e à medida que o tempo aumenta, há um espalhamento da população. Nesse caso, o termo dominante é o termo de difusão. Entretanto, aumentando mais ainda os valores de  $t$ , esse comportamento modifica-se, isto é a população  $u(x, t)$  continua a se espalhar, mas também começa a aumentar cada vez mais. Esse comportamento passa a ser determinado pelo termo de difusão e pelo termo de crescimento exponencial e está representado nas figuras 4.23(b) e 4.23(c), nas quais a modificação de comportamento pode observar-se entre  $t = 0.8$  e  $t = 1.5$ . Portanto, valores do tempo  $t$  menores, levam a um espalhamento determinado pelo termo de difusão; valores maiores levam a um espalhamento acompanhado de crescimento, refletindo a diferença de escala entre dispersão e crescimento.

A partir da solução (4.13), podemos calcular a velocidade com a qual se propaga uma frente de onda de isoconcentração  $u = u_f$ . Para isso, substituímos

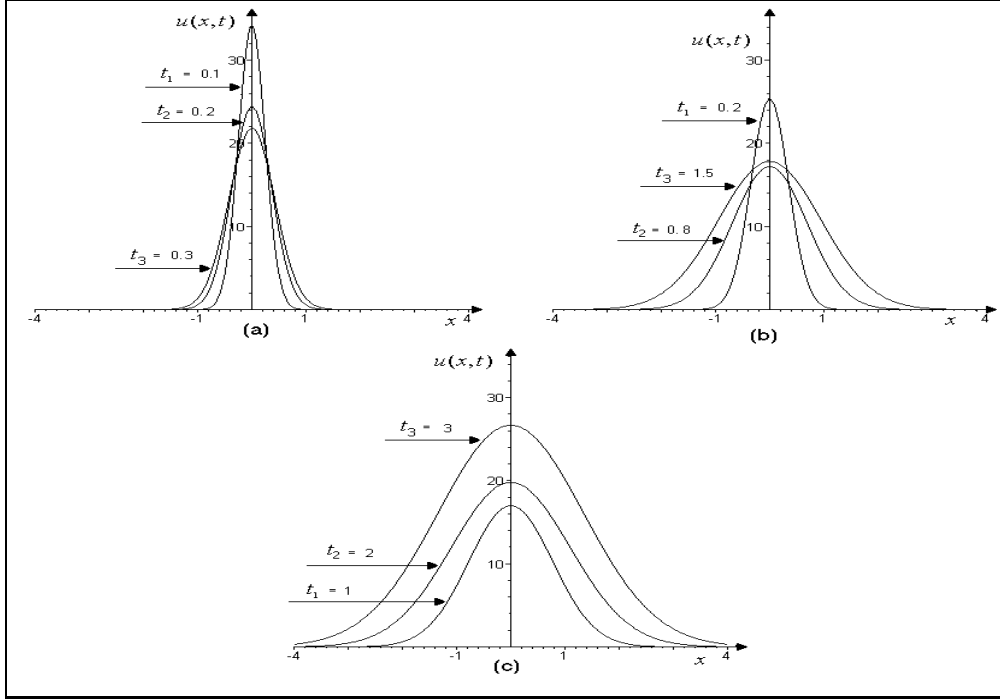


Figura 4.3: Solução (4.13), na qual  $t_1 < t_2 < t_3$ , sendo  $D=0.3$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $N_0 = 20$ ;  
 (a)  $t_1 = 0.1$ ,  $t_2 = 0.2$ ,  $t_3 = 0.3$ , (b)  $t_1 = 0.2$ ,  $t_2 = 0.8$ ,  $t_3 = 1.5$ , (c)  
 $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  e  $t_3 = 3$ .

$u$  por  $u_f$  em (4.13):

$$u_f = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2 + 4\alpha Dt^2}{4Dt}\right). \quad (4.14)$$

Isolando  $\frac{x}{t}$ , obtemos:

$$\frac{x}{t} = \pm \sqrt{\frac{4D}{t} \ln\left(\frac{N_0}{2u_f \sqrt{\pi D}}\right) - \frac{2D}{t} \ln t + 4\alpha D}. \quad (4.15)$$

Tomando o  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  da expressão resultante (4.15), obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{t} = \pm \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4D}{t} \ln\left(\frac{N_0}{2u_f \sqrt{\pi D}}\right) - \frac{2D}{t} \ln t + 4\alpha D}, \quad (4.16)$$

isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{t} = \pm 2\sqrt{\alpha D}, \quad (4.17)$$

que é a velocidade procurada. Os sinais  $+$  e  $-$  significam velocidade para a direita e para a esquerda, respectivamente. É interessante observar que esta velocidade

assintótica coincide com a velocidade mínima de propagação obtida na seção 3.1 a partir do modelo de Fisher (crescimento logístico), ratificando o fato de que a capacidade de suporte dos recursos para a população logística não contribui para a velocidade da onda.

Esse cálculo que determinou a velocidade com que se propaga uma frente de onda de isoconcentração não pode ser aplicado à difusão com decrescimento exponencial, pois nesse caso  $\alpha$  seria negativo e desenvolvendo de maneira análoga à difusão com crescimento exponencial, teríamos a expressão resultante da forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{t} = \pm 2\sqrt{-\alpha D}, \quad (4.18)$$

o que não seria fisicamente realístico.

A solução geral de (4.12), para uma distribuição inicial arbitrária  $u(x, 0) = u_0(x)$  pode ser obtida por uma superposição da solução fundamental (4.13), isto é, uma combinação linear de soluções, que pode ser dada [Okubo (1980)] por

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(\zeta)}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\alpha t - \frac{(x - \zeta)^2}{4Dt}\right) d\zeta \quad (4.19)$$

Se, por exemplo,  $u_0(x)$  é gaussiana, com a forma

$$u_0(x) = \frac{N_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_0} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (4.20)$$

onde  $\sigma_0^2$  é a variância, substituindo (4.20) em (4.19), obtemos

$$u(x, t) = \frac{2N_0\sqrt{\pi Dt}}{\sigma_0\sqrt{\pi Dt}} \exp(\alpha t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(x - \zeta)^2}{4Dt}\right) d\zeta, \quad (4.21)$$

que nos leva a

$$u(x, t) = \frac{N_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma} \cdot \exp\left(\alpha t - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.22)$$

na qual  $\sigma^2 = \sigma_0^2 + 2Dt$ . Na figura 4.4, representamos graficamente a frente de onda de isoconcentração na dispersão da população malthusiana, dada por (4.22).

A partir da solução (4.22) podemos, também, calcular a velocidade assintótica de propagação para uma frente de onda de isoconcentração  $u = u_f$ ,

fazendo o mesmo procedimento usado a partir de (4.13). Para isso, substituindo  $u(x, t)$  por  $u_f$ , em (4.22), escrevemos:

$$u_f = \frac{N_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma} \cdot \exp\left(\alpha t - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.23)$$

donde isolando  $\frac{x}{t}$  e lembrando que  $\sigma^2 = \sigma_0^2 + 2Dt$ , obtemos:

$$\frac{x}{t} = \pm \sqrt{\frac{2(\sigma_0^2 + 2Dt)}{t^2} \ln\left(\frac{N_0}{u_f \sqrt{\sigma_0^2 + 2Dt} \sqrt{\pi}}\right) + \frac{2\alpha t(\sigma_0^2 + 2Dt)}{t^2}}, \quad (4.24)$$

cujo limite quando  $t \rightarrow \infty$  fornece:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{t} = \pm 2\alpha D, \quad (4.25)$$

que é a mesma velocidade encontrada em (4.17).

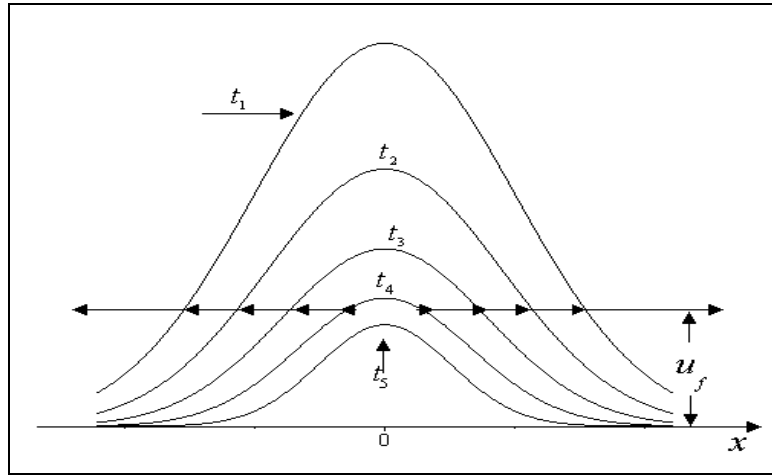


Figura 4.4: Frente de onda de isoconcentração  $u = u_f$  na dispersão da população malthusiana; solução (4.22) com  $N_0 = 20$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma_0 = 0.5$  e  $D = 0.3$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $t_4 = 4$  e  $t_5 = 5$ .

Entretanto, isso só acontece para aquelas distribuições iniciais, cujas amplitudes caem a zero rapidamente, quando  $|x|$  tende ao infinito. Okubo (1980) cita Kendall (1948) que mostrou que uma distribuição inicial gaussiana de densidade populacional na forma  $\exp(-ax^2)$  alcança a mesma velocidade de propagação, enquanto que para uma distribuição do tipo  $\exp(-b|x|)$ ,  $b > 0$  a velocidade de propagação é maior que  $2(\alpha D)^{\frac{1}{2}}$ .

### 4.1.3 Com dois estados estacionários

O modelo de população com crescimento logístico resulta na equação de Fisher, estudada na seção 3.3, que após adimensionalizada, resulta na equação

$$(3.24) \quad \frac{\partial u^*}{\partial t^*} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} = u^*(1 - u^*), \quad x^* \in \mathbb{R}, \quad t^* > 0, \quad (4.26)$$

com dois estados estacionários:  $u_{\text{est}}^* = 0$  e  $u_{\text{est}}^* = 1$ .

Vimos que, embora no início efeitos de difusão sejam dominantes, o termo de longo prazo é muito diferente: quando a população  $u$ , nas proximidades inicialmente habitadas, alcança a capacidade de suporte  $K$ , a distribuição forma uma frente de onda bem definida, que se move para regiões vazias de ambos os lados, com velocidade constante (figura 4.5). Tais frentes de “invasão” resultam da

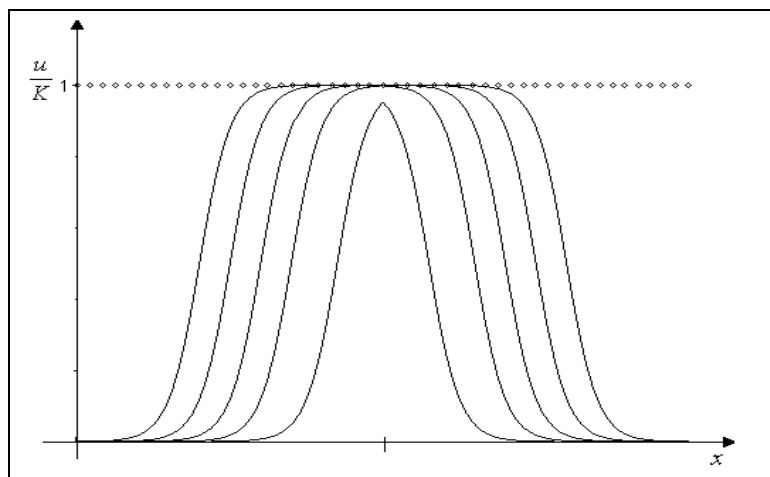


Figura 4.5: Frente de onda movendo-se para regiões vazias, de ambos os lados.

combinação do movimento aleatório (difusão) da população e crescimento logístico. A dinâmica destas frentes de invasão (largura, velocidade) tem sido extensivamente estudada em diversos contextos, entre os quais a teoria das epidemias.

Gurney e Nisbet (1998) analisam a situação mais geral:

$$(4.27) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

onde  $F(u)$  é uma função que tem uma raiz em  $u = 0$  e outra em  $u = K$ , isto é,  $F(u) = 0$  para  $u = 0$  e  $u = K$ , e que satisfaz as seguintes propriedades:

- $F(u)$  é uma função estritamente positiva para  $0 < u < K$ ;
- $F'(u) > 0$  próximo a  $u = 0$  ( $u = 0$  é atrator);
- $F'(u) < 0$  próximo a  $u = K$  ( $u = K$  é repulsor).

Se, em  $t = 0$ , tivermos  $u(x, 0) = \mu_0 \delta(x)$ , isto é,

$$u = u_0 \text{ em } x = 0 \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } x \neq 0, \quad (4.28)$$

espera-se que esta população vá aumentar rapidamente, até chegar à capacidade de suporte local  $K$ , e depois irá se dispersar para o resto do universo atrás de uma “frente de invasão” movendo-se com velocidade constante  $c$ .

Como se trata de um problema não linear, que não tem solução sob forma fechada, procura-se inferir a respeito das propriedades da solução, a partir de aproximações analíticas. A seguir, serão analisadas as soluções perto dos estados estacionários.

### (1) Perto de $u = 0$

Neste caso, tem-se:

$$F(u) \simeq F'(0) \cdot u,$$

e portanto, a equação diferencial (4.27) é aproximada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F'(0) \cdot u. \quad (4.29)$$

Procura-se uma solução tal que, em um instante particular  $t$ ,  $u$  varie suavemente e rapidamente de  $K$  para 0, quando nos movemos da região invadida para a região não invadida. Com o passar do tempo, espera-se que a forma da frente de invasão permaneça constante, enquanto sua posição se move constantemente para a direita com velocidade  $c$ . A solução procurada deve, portanto, ter a forma:

$$u(x, t) = U(x - ct). \quad (4.30)$$

Perto de  $u = 0$ , é razoável esperar que a solução decaia exponencialmente, isto é:

$$u(x, t) = u_0 e^{-\lambda(x-ct)}, \quad (4.31)$$

que substituído na equação diferencial linearizada (4.29), fornece a seguinte relação entre a velocidade  $c$  e a taxa de decaimento exponencial  $\lambda$ ,

$$c \simeq D\lambda + \frac{F'(0)}{\lambda} \quad (4.32)$$

cujo gráfico  $c$  x  $\lambda$  é apresentado na figura 4.6, onde só interessa a parte que corresponde a  $\lambda > 0$ .

Como  $F'(0) > 0$ , tem-se que  $c$  é muito grande para valores de  $\lambda$  muito pequenos ou muito grandes; além disso, verifica-se que existe um valor mínimo de  $c$ , quando

$$\lambda = \sqrt{\frac{F'(0)}{D}}, \quad (4.33)$$

que corresponde a

$$c_{min} = 2\sqrt{F'(0)D}. \quad (4.34)$$

Esta é a velocidade mínima com a qual a frente avança para o território vazio.

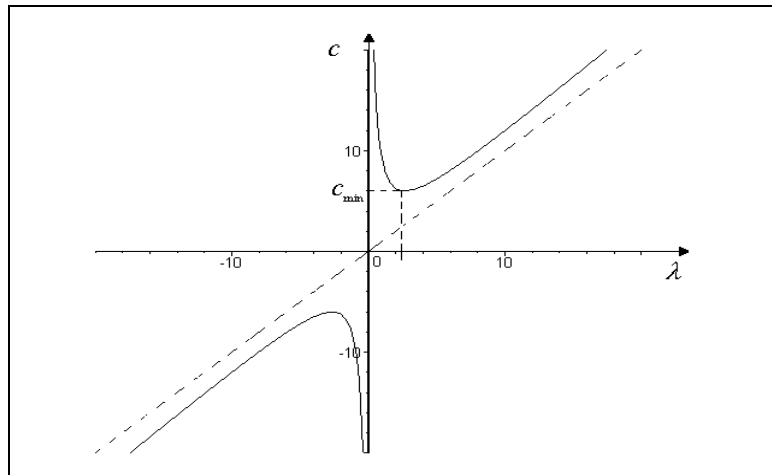


Figura 4.6: Gráfico de  $c$  x  $\lambda$ , onde  $c = D\lambda + \frac{F'(0)}{\lambda}$ , com  $F'(0) = 8$  e  $D = 1.12$ .



## (2) Perto de $u = K$

Consideremos agora a parte da frente de onda, próxima a  $K$ . Linearizando em torno de  $K$ , definimos

$$u(t) = K - \varepsilon(t) \quad (4.35)$$

que substituído na equação diferencial (4.27) e desprezando termos de  $O(\varepsilon^2)$ , fornece a aproximação

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \simeq D \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + F'(K) \cdot \varepsilon, \quad (4.36)$$

válida para  $\varepsilon$  pequeno.

Perto de  $u = K$ , espera-se que em um instante particular  $t$ ,  $\varepsilon$  aumente quando  $x$  aumenta, isto é:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 e^{\lambda'(x-ct)}, \quad (4.37)$$

que, substituído na equação diferencial linearizada (4.36), fornece a seguinte relação entre a velocidade  $c$  e a taxa de crescimento exponencial  $\lambda'$ :

$$c \simeq -D\lambda' - \frac{F'(K)}{\lambda'},$$

cujo gráfico  $c$  x  $\lambda'$  apresentamos na figura 4.7, onde só interessa a parte que corresponde a  $\lambda' > 0$ .

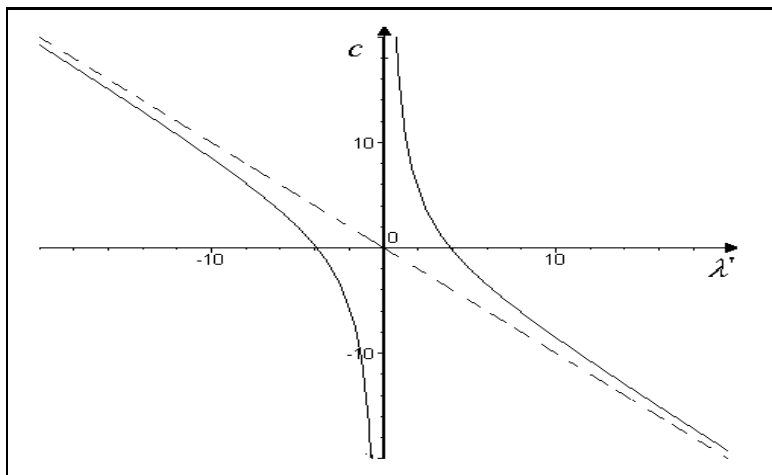


Figura 4.7: Gráfico de  $c$  x  $\lambda'$ , onde  $c = -D\lambda' - \frac{F'(K)}{\lambda'}$ , com  $F'(0) = -15$  e  $D = 1$ .

Como  $F'(K) < 0$ , isto implica que frentes com  $\lambda'$  muito grande movem-se para trás ( $c < 0$ ), enquanto que frentes com pequenos  $\lambda'$  movem-se para a frente, com velocidades que se tornam infinitamente grandes quando  $\lambda' \rightarrow 0$ .

Considerando, agora, um sistema que é inicializado com um grupo de indivíduos todos em uma localização única, tal que a taxa de divergência exponencial  $\lambda$  na frente da “frente de invasão” e a taxa de convergência exponencial  $\lambda'$  atrás dela sejam ambas grandes. Então a extremidade de arrasto (trailing edge),  $u < K$ , da frente de onda inicialmente se move para trás, enquanto a extremidade que guia (leading edge)  $u > 0$  se move para frente.

Como as duas extremidades são conectadas, isto deve implicar que ambas  $\lambda$  e  $\lambda'$  decrescem, reduzindo desta forma a taxa de separação. Depois de um tempo, este processo reduz a taxa de crescimento exponencial da extremidade de arrasto suficientemente, para ela começar a se mover para a frente. Este processo culmina quando o movimento das duas extremidades estiver em exata concordância e então a frente de onda se move para a frente, sem mais variar a sua forma (figura 4.8). Também parece razoável assumir que começando com uma frente onda abrupta

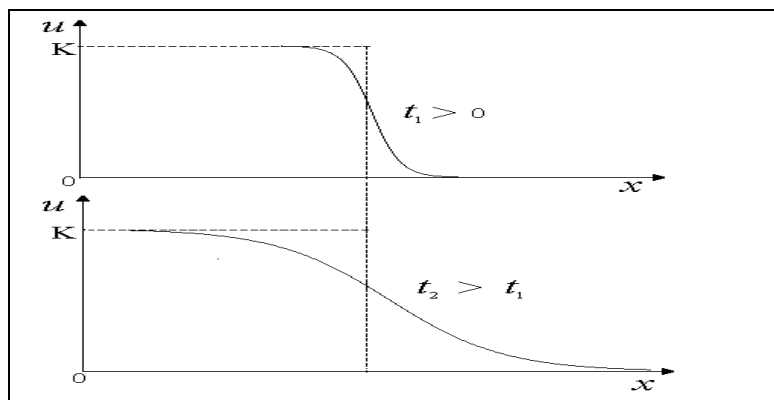


Figura 4.8: Frente de onda em dois tempos distintos,  $t_1 > t_2$ .

ta, levará a uma forma assintótica com a conexão mais íngreme possível entre as duas extremidades, isto é, com velocidade mínima possível compatível. Por outro lado, se começarmos com uma condição inicial que se aproxima de zero exponencialmente, quando  $x \rightarrow \infty$ , pode levar a uma frente de onda com uma curvatura mais

baixa na sua extremidade de arrasto e, portanto, com velocidade mais alta (figura 4.9).

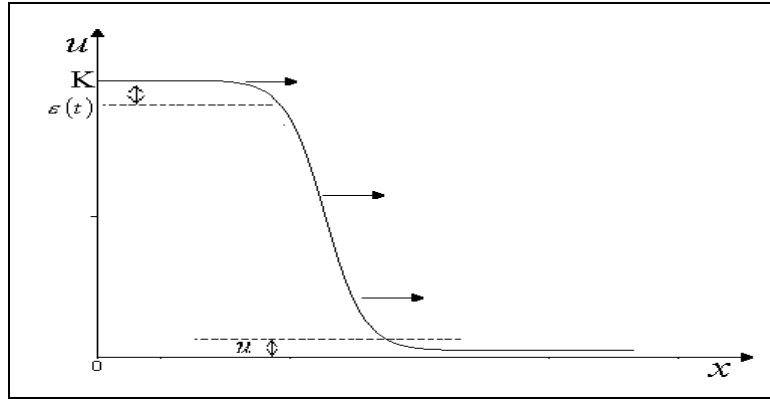


Figura 4.9: *Perto de  $u = 0$ ,  $u = \exp(-\lambda(x - ct))$ ; perto de  $u = K$ , tem-se  $u = K - \varepsilon(t)$ , onde  $\varepsilon = \exp(\lambda'(x - ct))$ .*

#### 4.1.4 Com mais de dois estados estacionários

Existem situações, entretanto, em que a função crescimento-interação da dinâmica populacional (termo de fonte)  $f(u)$  na equação (4.1) possui três ou mais estados estacionários; neste caso, o sistema apresentará fenômenos ondulatórios bastante diferentes daqueles apresentados previamente [Murray (1989)].

Antes de abordar a questão de como a dispersão espacial afeta populações onde o termo de fonte apresenta mais de dois estados estacionários, estudaremos a situação espacialmente homogênea correspondente.

Consideremos, por exemplo, a função adimensional

$$g(u) = ru \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}. \quad (4.38)$$

Esta função foi adotada por Ludwig *et al* (1978) em um modelo aplicado à dinâmica populacional de lagartas, as quais podem destruir a folhagem de árvores de bálsamo, sendo que estas lagartas sofrem uma predação externa (pássaros). Neste modelo, a

população de lagartas varia de acordo com a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \quad (4.39)$$

onde definimos

$$f(N) = r_B N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}. \quad (4.40)$$

O primeiro termo de  $f(N)$  é o termo de fonte dependente da densidade populacional, do tipo logístico, cujos parâmetros foram estudados na equação de Fisher, no capítulo 3. O segundo termo de  $f(N)$  representa um termo de predação externa, onde  $A$  e  $B$  são constantes positivas, cujo gráfico é apresentado na figura 4.10 e que apresenta um valor de saturação  $B$ .

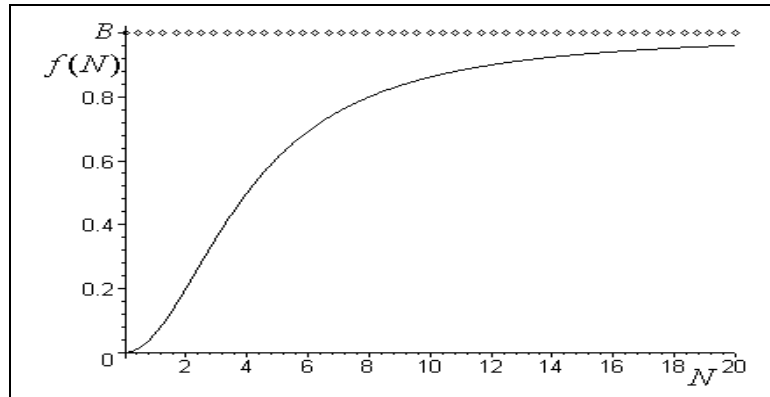


Figura 4.10: *Termo de predação externa*  $f(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$ .

Sendo as dimensões:

- $[N] = [K] = [A]$ ,
- $[r_B] = [t]^{-1}$ ,
- $[B] = [N][t]^{-1}$ ,

podemos introduzir quantidades adimensionais:

- $u = \frac{N}{A}$ ,

- $r = \frac{Ar_B}{B}$ ,
- $q = \frac{K}{A}$ ,
- $\tau = \frac{Bt}{A}$ ,

donde resulta a equação diferencial adimensional

$$\frac{du}{d\tau} = g(u), \quad (4.41)$$

onde  $g(u)$  é a função adimensional definida por

$$g(u) \equiv ru \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}; \quad (4.42)$$

$r$  e  $q$  são parâmetros adimensionais positivos. Os estados estacionários da equação diferencial (4.41) são soluções de  $g(u) = 0$ . Vemos que uma solução é  $u = 0$  e as demais soluções satisfazem

$$r \left(1 - \frac{u}{q}\right) = \frac{u^2}{1 + u^2}. \quad (4.43)$$

Dependendo do valor dos parâmetros  $r$  e  $q$ , podemos ter  $u_{\text{est}} = 0$  e mais 1, 2 ou 3 estados estacionários, conforme a posição relativa da reta  $h_1(u) = r \left(1 - \frac{u}{q}\right)$  e da curva  $h_2(u) = \frac{u^2}{1 + u^2}$ . Existe um domínio no plano  $rq$ , no qual a equação (4.43) admite três raízes reais. Este domínio é definido pelas equações paramétricas:

$$r(a) = \frac{2a^3}{(a^2 + 1)^2}; \quad q(a) = \frac{2a^3}{a^2 - 1}. \quad (4.44)$$

Na figura 4.11, estão representados os domínios no plano  $rq$ , com  $r \geq 0$  e  $q \geq 0$ , onde a equação (4.43) admite uma, duas ou três raízes reais; o ponto de cúspide  $P$  tem coordenadas  $r_p = \frac{3\sqrt{3}}{8}$  e  $q_p = 3\sqrt{3}$ . Por exemplo, se  $r = 0.5$  e  $q = 6.8$ , temos além de  $u_{\text{est}}^* = 0$  mais um estado estacionário (figura 4.12); se  $r = 0.5$  e  $q = 7.3$ , temos mais dois estados estacionários (figura 4.13) e se  $r = 0.5$  e  $q = 9$  temos mais três estados estacionários:  $u_{\text{est}}^* = u_1$ ,  $u_{\text{est}}^* = u_2$  e  $u_{\text{est}}^* = u_3$  (figura 4.14).

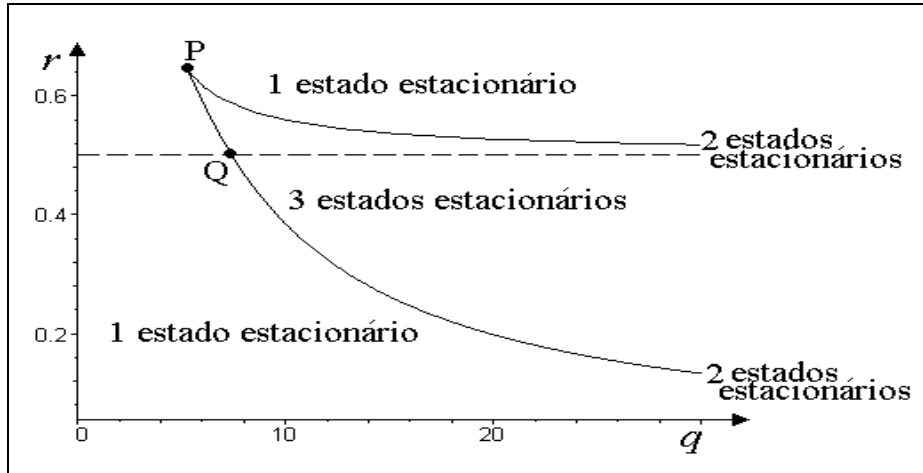


Figura 4.11: Domínios, no plano  $rq$  com  $r \geq 0$ ,  $q \geq 0$  no qual a equação (4.43) admite uma, duas ou três raízes reais. Pontos  $(q, r)$  sobre a curva correspondem a situações com 2 estados estacionários e o ponto  $Q$  refere-se à situação apresentada na figura 4.13.

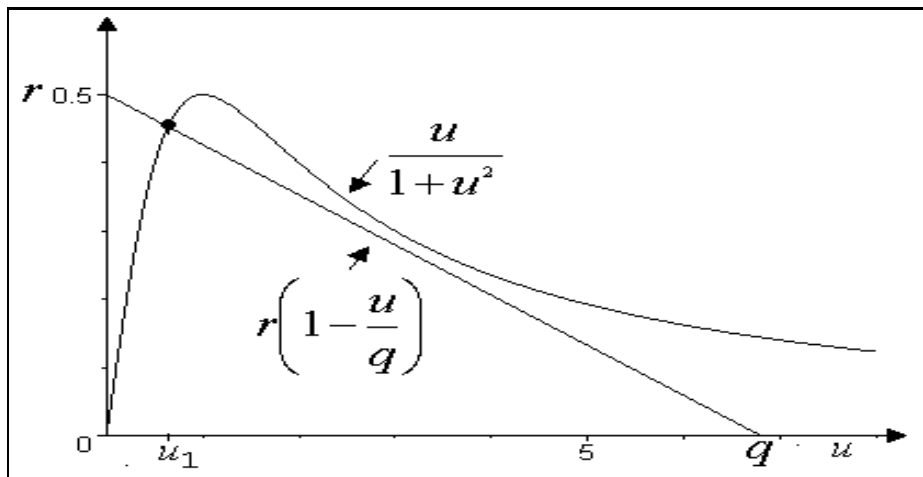


Figura 4.12: Determinação dos estados estacionários  $u_{est}^* = u_1$ , da equação diferencial (4.41) para  $r=0.5$  e  $q=6.8$ .

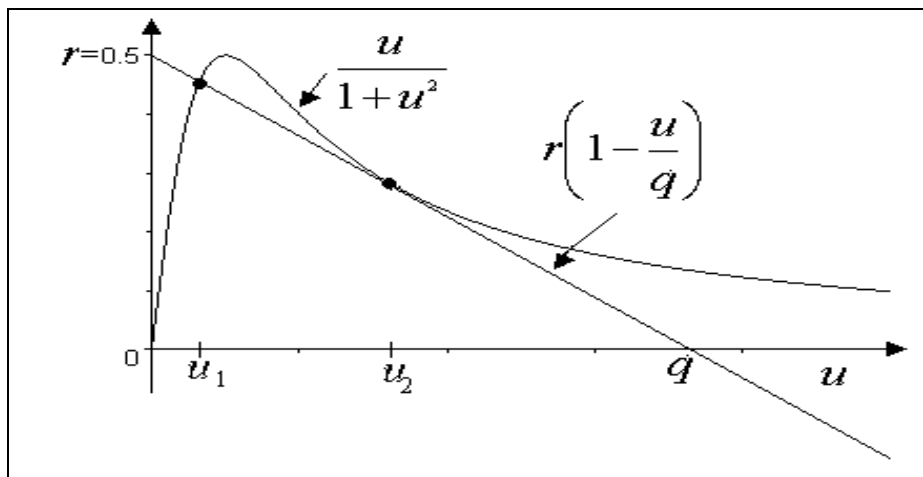


Figura 4.13: Determinação dos estados estacionários  $u_{est}^* = u_1$  e  $u_{est}^* = u_2$  da equação diferencial (4.41) para  $r=0.5$  e  $q=7.3$ .

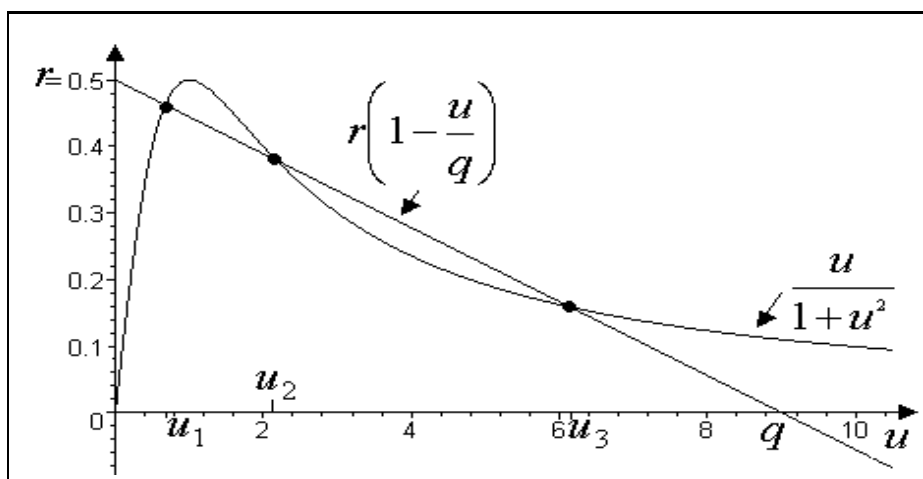


Figura 4.14: Determinação dos estados estacionários  $u_{est}^* = u_1$ ,  $u_{est}^* = u_2$  e  $u_{est}^* = u_3$  da equação diferencial (4.41) para  $r=0.5$  e  $q=9$ .

Vamos analisar a última situação com 4 estados estacionários. Na ausência de difusão, vemos que os estados estacionários  $u_1$  e  $u_3$  são estáveis, já que  $\frac{\partial g}{\partial u} < 0$  (figura 4.15) e  $u = 0$  e  $u_2$  são instáveis, pois  $\frac{\partial g}{\partial u} > 0$ . O menor estado estacionário  $u_1$  é o equilíbrio de refúgio enquanto que  $u_3$  é o equilíbrio de explosão da população de lagartas (figura 4.15) [Murray (1989)]. Se desejamos controlar uma praga, queremos manter a população em um estado de refúgio, não permitindo que ela alcance uma situação de explosão da população.

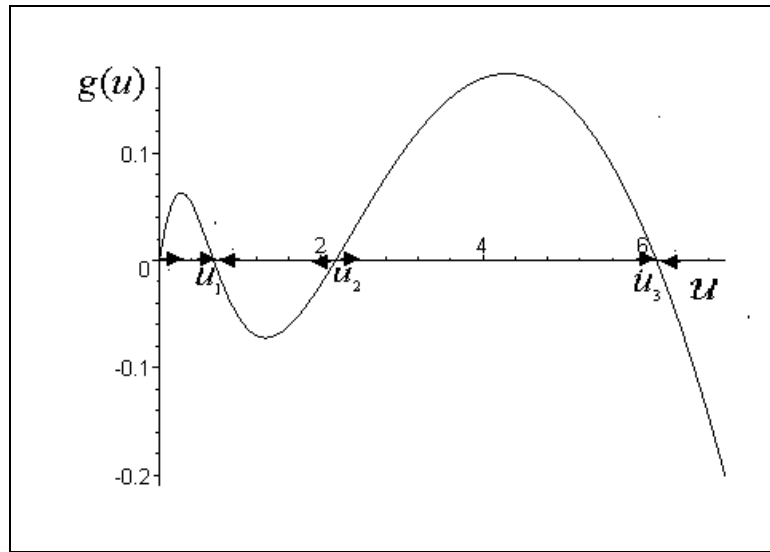


Figura 4.15: Os valores de  $u$ , tais que  $g(u) = 0$ , constituem os estados estacionários da equação diferencial  $\frac{du}{dz} = g(u)$ , dois dos quais são estáveis:  $u_1$  corresponde ao refúgio da população e  $u_3$  à explosão da população. Os parâmetros que correspondem a este gráfico são os mesmos da figura 4.14, isto é,  $r = 0.5$  e  $q = 9$ .

Queremos considerar aqui de que forma uma infestação ou explosão se propaga quando incluímos a dispersão espacial da população de lagartas e, como podemos usar os resultados das análises para elaborar uma estratégia de controle para prevenir uma explosão proveniente dessa dispersão. Para abordar essas questões, consideraremos a dispersão da população de lagartas por difusão linear e investigaremos as possibilidades de onda viajante. O problema prático é evidente-



mente bidimensional, mas consideraremos aqui o seguinte modelo unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.45)$$

para uma situação em que  $g(u)$ , definida em (4.42), tenha quatro raízes:  $(0, u_1, u_2, u_3)$  e

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x - ct \quad (4.46)$$

é uma solução do tipo onda viajante cuja existência iremos investigar. Tomando as derivadas vistas em (2.54) e substituindo na equação (4.45), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária para  $U(z)$ :

$$U'' + cU' + rU \left(1 - \frac{U}{q}\right) - \frac{U^2}{1+U^2} = 0, \quad (4.47)$$

onde as linhas denotam as derivadas em relação a  $z$ , como vimos anteriormente. O plano de fase do sistema é o plano  $UV$ , onde  $V = U'$ , e, usando (4.42), as curvas de fase são obtidas a partir do seguinte sistema de equações diferenciais de 1<sup>a</sup> ordem:

$$\begin{cases} U' & = & V \\ V' + cV + g(U) & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' & = & V \\ V' & = & -cV - g(U) \end{cases} \quad (4.48)$$

donde podemos escrever:

$$\frac{dV}{dU} = \frac{-cV - g(U)}{V}. \quad (4.49)$$

Os pontos singulares  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$  são aqueles que correspondem a  $U' = 0$  e  $V' = 0$ , portanto:  $V_{\text{est}} = 0$  e  $g(U_{\text{est}}) = 0$ , isto é:

$$U_{\text{est}(1)} = 0, \quad U_{\text{est}(2)} = u_1, \quad U_{\text{est}(3)} = u_2 \quad \text{e} \quad U_{\text{est}(4)} = u_3;$$

então, os pontos singulares são:

$$(0, 0), \quad (u_1, 0), \quad (u_2, 0), \quad (u_3, 0).$$

Para determinar o tipo de singularidade, faremos uma linearização do sistema (4.48), em torno de  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$ .

Considerando o sistema (4.48) sob a forma

$$\begin{cases} \frac{dU}{dz} & = & f(U, V), \\ \frac{dV}{dz} & = & g(U, V), \end{cases} \quad (4.50)$$

e expandindo as funções  $f(U, V)$  e  $g(U, V)$  em torno de  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$ , escrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{d(U - U_{\text{est}})}{dz} &= f(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_{\text{est}} \\ V=V_{\text{est}}}} (U - U_{\text{est}}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial V} \right]_{\substack{U=U_{\text{est}} \\ V=V_{\text{est}}}} (V - V_{\text{est}}) + \\ &\quad + O((U - U_{\text{est}})^2, (V - V_{\text{est}})^2) \\ \frac{d(V - V_{\text{est}})}{dz} &= g(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) + \left[ \frac{\partial g}{\partial U} \right]_{\substack{U=U_{\text{est}} \\ V=V_{\text{est}}}} (U - U_{\text{est}}) + \left[ \frac{\partial g}{\partial V} \right]_{\substack{U=U_{\text{est}} \\ V=V_{\text{est}}}} (V - V_{\text{est}}) + \\ &\quad + O((U - U_{\text{est}})^2, (V - V_{\text{est}})^2). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Para pontos  $(U, V)$  próximos a  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$ , desprezamos os termos de ordem 2 na vizinhança de  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$ , donde obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d(U - U_{\text{est}})}{dz} &= V - V_{\text{est}} \\ \frac{d(V - V_{\text{est}})}{dz} &= -g'(U_{\text{est}})(U - U_{\text{est}}) - c(V - V_{\text{est}}). \end{aligned}$$

A matriz associada ao sistema linearizado é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(U_{\text{est}}) & -c \end{bmatrix}$$

Os autovalores  $\lambda$  da matriz são as raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -g'(U_{\text{est}}) & -(c + \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

isto é:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4g'(U_{\text{est}})}). \tag{4.52}$$

Analisando para cada um dos pontos de equilíbrio, temos

- $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$ :  $g'(0) > 0$ , então  
se  $c > 0$  e  $c^2 < 4g'(0)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão complexos com a parte imaginária não nula e parte real negativa; portanto a origem é espiral estável;  
se  $c > 0$  e  $c^2 > 4g'(0)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão reais, distintos e negativos; portanto a origem é nodo estável;

se  $c < 0$  e  $c^2 < 4g'(0)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão complexos com a parte imaginária não nula e parte real positiva; portanto a origem é espiral instável;

Se  $c < 0$  e  $c^2 > 4g'(0)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão reais, distintos e positivos; portanto a origem é nodo instável;

- $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (u_2, 0)$ :  $g'(u_2) > 0$ , então
  - se  $c > 0$  e  $c^2 < 4g'(u_2)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão complexos com a parte imaginária não nula e parte real negativa; portanto  $(u_2, 0)$  é espiral estável,
  - se  $c > 0$  e  $c^2 > 4g'(u_2)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão reais, distintos e negativos; portanto  $(u_2, 0)$  é nodo estável,
  - se  $c < 0$  e  $c^2 < 4g'(u_2)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão complexos com a parte imaginária não nula e parte real positiva; portanto  $(u_2, 0)$  é espiral instável;
  - se  $c < 0$  e  $c^2 > 4g'(u_2)$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão reais, distintos e positivos; portanto  $(u_2, 0)$  é nodo instável;
- $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (u_i, 0)$ ,  $i = 1, 3$ :  $g'(u_i) < 0$  então
  - se  $c > 0$  ou  $c < 0$ , os autovalores  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  serão reais, distintos e de sinais contrários; portanto  $(u_i, 0)$  é ponto de sela.

Na tabela 4.1, apresentamos um resumo dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$  e  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (u_i, 0)$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Existem várias trajetórias possíveis no plano de fase dependendo de  $g'(u_i)$  para  $i = 1, 2$  e  $3$  e de  $g'(0)$ . As trajetórias foram traçadas com o auxílio do *Maple*, através do comando DEplot, que por sua vez usa o método numérico Runge Kutta de 4<sup>a</sup> ordem para resolver o sistema de equações diferenciais. Um dos dados de entrada é o sistema de equações (4.48) e valores para  $U(0)$  e  $V(0)$  para poder determinar as trajetórias. Na figura 4.16, traçamos o plano de fase  $UU'$ , referente

$(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$	Sinal de $g'(U_{\text{est}})$	Valor de $c$	Autovalores da matriz jacobiana	Tipo de equilíbrio
$(0,0)$	$g'(0) > 0$	$c > 0$ e $c^2 < 4g'(0)$	complexos com a parte imaginária não nula e a parte real negativa	espiral estável
		$c > 0$ e $c^2 > 4g'(0)$	reais, distintos e negativos	nodo estável
		$c < 0$ e $c^2 < 4g'(0)$	complexos com a parte imaginária não nula e a parte real positiva	espiral instável
		$c < 0$ e $c^2 > 4g'(0)$	reais, distintos e positivos	nodo instável
$(u_1, 0)$	$g'(u_1) < 0$	$c > 0$ ou $c < 0$	reais, distintos e de sinais contrários	ponto de sela
$(u_2, 0)$	$g'(u_2) > 0$	$c > 0$ e $c^2 < 4g'(u_2)$	complexos com a parte imaginária não nula e a parte real negativa	espiral estável
		$c > 0$ e $c^2 > 4g'(u_2)$	reais, distintos e negativos	nodo estável
		$c < 0$ e $c^2 < 4g'(u_2)$	complexos com a parte imaginária não nula e a parte real positiva	espiral instável
		$c < 0$ e $c^2 > 4g'(u_2)$	reais, distintos e positivos	nodo instável
$(u_3, 0)$	$g'(u_3) < 0$	$c > 0$ ou $c < 0$	reais, distintos e de sinais contrários	ponto de sela

Tabela 4.1: *Resumo dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$  e  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (u_i, 0)$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ .*

ao sistema (4.48), para  $c > 0$ ,  $c^2 < 4\min[g'(0), g'(u_2)]$  situação para a qual  $(0,0)$  e  $(u_2, 0)$  apresentam equilíbrio do tipo espiral estável, enquanto que  $(u_1, 0)$  e  $(u_3, 0)$  são pontos de sela, onde incluímos trajetórias que constituem conexões entre tais equilíbrios.

A existência das diversas possibilidades para ondas viajantes para vários intervalos de  $c$  pode se tornar bastante complicado. Esse tipo de equação particular foi rigorosamente estudado por Fife e McLeod (1977) [Murray (1989)]. O enfoque que usaremos a seguir é intuitivo e não prova a existência das ondas viajantes, mas dá fortes indícios de que elas existem.

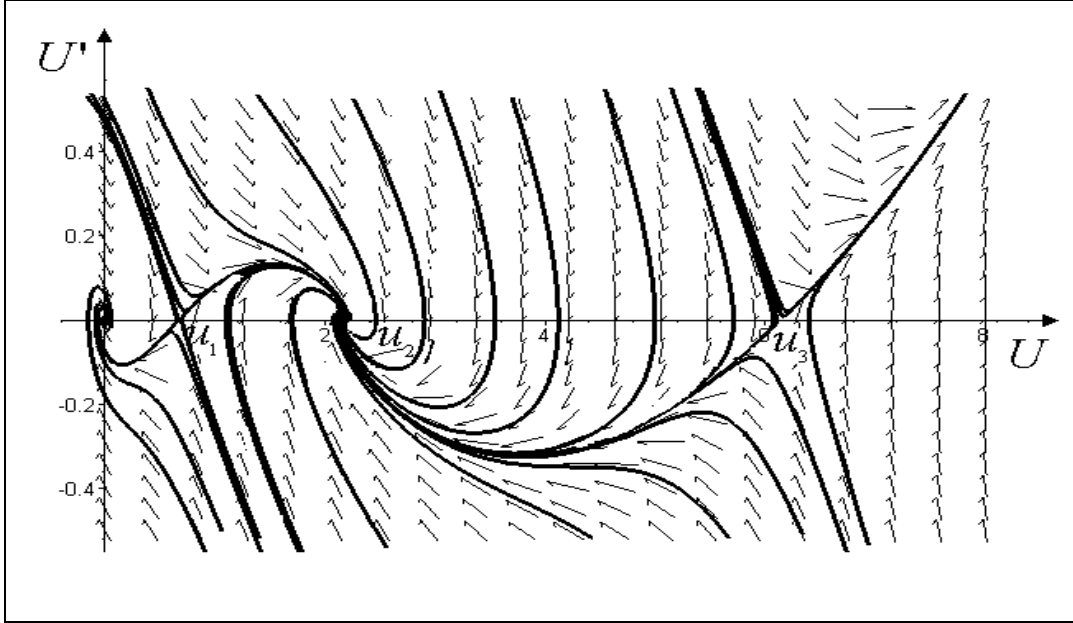


Figura 4.16: (a) Plano de fase para o sistema (4.48); com  $r = 0.5$ ,  $q = 9$ ,  $c = 0.5 > 0$ ,  $c < 2[g'(0)]^{\frac{1}{2}} = 1.414$  e  $c < 2[g'(u_2)]^{\frac{1}{2}} = 1.38$ .

Um possível plano de fase para  $c^2 > 4 \max[g'(0), g'(u_2)]$  tal que  $(0,0)$  e  $(u_2,0)$  sejam nodos estáveis, enquanto que  $(u_1,0)$  e  $(u_3,0)$  são pontos de sela ilustrados na figura 4.17(a) mostrando conexões possíveis entre pontos singulares. Se dividirmos o plano de fase nos domínios mostrados na figura 4.17(a), por exemplo,  $d_1$ , que inclui o nodo estável na origem e o ponto de sela em  $(u_1,0)$  e compararmos com a figura 3.5, observamos que os planos de fase são similares. Assim é razoável supor que uma solução tipo onda viajante semelhante à que vimos em 3.5 pode existir, tal que  $U(-\infty) = u_1$  e  $U(+\infty) = 0$ , e que ela exista para todas as velocidades de propagação  $c \geq 2[g'(0)]^{\frac{1}{2}}$ . Esta situação está mostrada na figura 4.17(b). Da mesma forma, outras soluções tipo onda viajante poderão existir nos outros domínios  $d_2$  e  $d_3$ . Observamos que na região apresentada na figura 4.17(a), o campo de direções correspondente é quase vertical; isto reflete o fato de que a componente vertical  $\frac{dU'}{dz}$  do elemento do campo de direções em cada ponto é muito maior que a componente horizontal  $\frac{dU}{dz}$ . Na figura 4.17(c), representamos graficamente os autovetores nos pontos  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0,0)$  e  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (u_i,0)$ , sendo  $i = 1, 2, 3$ , para  $c > 0$  e  $c^2 > 4g'(u_2)$ .

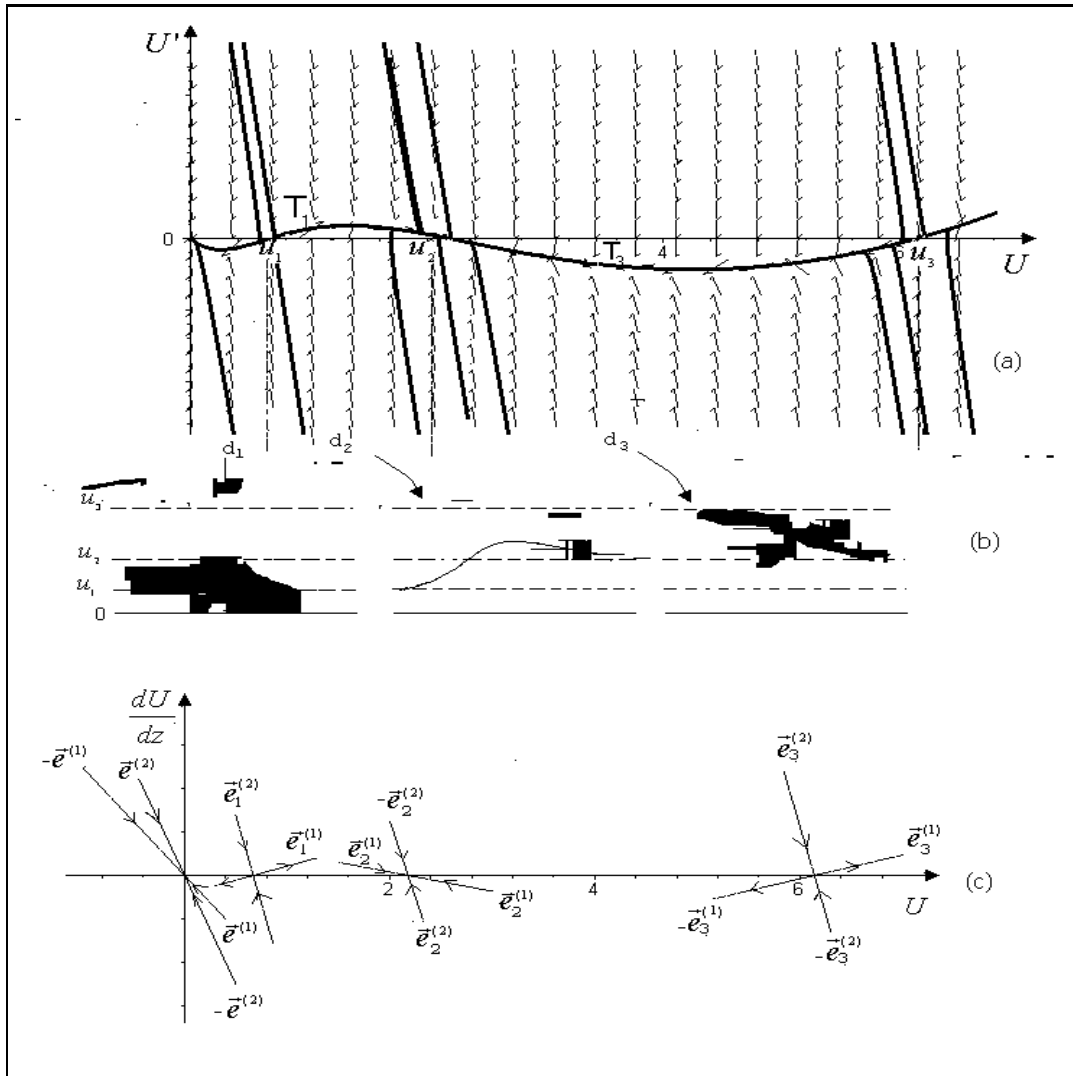


Figura 4.17: (a) Plano de fase para o sistema (4.48) com velocidade  $c > 0$ ; com  $r=0.5$ ,  $q=9$ ,  $c=1.5$ ,  $c > 2[g'(0)]^{\frac{1}{2}}=1.414$  e  $c > 2[g'(u_2)]^{\frac{1}{2}}=0.71$ . (b) Possíveis soluções do tipo ondas viajantes restritas aos domínios indicados  $d_1$ :  $U(-\infty) = u_1$ ,  $U(+\infty)=0$ ;  $d_2$ :  $U(-\infty) = u_1$ ,  $U(+\infty) = u_2$ ;  $d_3$ :  $U(-\infty) = u_3$ ,  $U(+\infty) = u_2$ . (c) Autovetores no plano  $U \frac{dU}{dz}$  em  $(U_{est}, V_{est}) = (0, 0)$ ,  $(U_{est}, V_{est}) = (u_1, 0)$ ,  $(U_{est}, V_{est}) = (u_2, 0)$  e  $(U_{est}, V_{est}) = (u_3, 0)$ ;  $g'(0) = 0.5$ ,  $g'(u_1)=-0.212$ ,  $g'(u_2)=0.126$ ,  $g'(u_3)= -0.191$ .

Quando  $c$  varia, aparecem outras possíveis conexões entre pontos singulares. Em particular, vamos focalizar os pontos  $(u_1, 0)$  e  $(u_3, 0)$ , ambos pontos de sela. Os autovalores obtidos em (4.52) são dados por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( -c + \sqrt{c^2 - 4g'(u_i)} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( -c - \sqrt{c^2 - 4g'(u_i)} \right)\end{aligned}\tag{4.53}$$

onde  $g'(u_i) < 0$ , tanto para  $i = 1$  quanto para  $i = 3$  (ver tabela 4.1). Os autovetores correspondentes a  $\lambda_{i1}$  e  $\lambda_{i2}$ ,  $\vec{e}_i^{(1)}$  e  $\vec{e}_i^{(2)}$ , respectivamente, são obtidos de maneira análoga a (3.34). Se  $i = 1$ , o autovetor correspondente a  $\lambda_1$  é

$$\vec{e}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \left( -c + \sqrt{c^2 - 4g'(u_1)} \right) \end{pmatrix}\tag{4.54}$$

e o correspondente a  $\lambda_2$  é

$$\vec{e}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \left( -c - \sqrt{c^2 - 4g'(u_1)} \right) \end{pmatrix}.\tag{4.55}$$

Se  $i = 3$ , o autovetor correspondente a  $\lambda_1$  é

$$\vec{e}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \left( -c + \sqrt{c^2 - 4g'(u_3)} \right) \end{pmatrix}\tag{4.56}$$

e o correspondente a  $\lambda_2$  é

$$\vec{e}_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \left( -c - \sqrt{c^2 - 4g'(u_3)} \right) \end{pmatrix}.\tag{4.57}$$

Os autovetores variam quando  $c$  varia. Algebricamente, podemos mostrar que se  $c$  aumenta, os autovetores tendem a mover-se, na direção do eixo  $U$ . Isso pode ser verificado investigando como varia o ângulo  $\theta$ , que o vetor forma com o sentido positivo do eixo  $U$ , em função de  $c$ . Apresentamos abaixo a expressão de  $\tan\theta$ , para cada um dos autovetores envolvidos:

$$\vec{e}_1^{(1)} : \tan \theta = \frac{1}{2} [-c + \sqrt{c^2 - 4g'(u_1)}],\tag{4.58}$$

$$\vec{e}_1^{(2)} : \tan \theta = \frac{1}{2}[-c - \sqrt{c^2 - 4g'(u_1)}], \quad (4.59)$$

$$\vec{e}_3^{(1)} : \tan \theta = \frac{1}{2}[-c + \sqrt{c^2 - 4g'(u_3)}], \quad (4.60)$$

$$\vec{e}_3^{(2)} : \tan \theta = \frac{1}{2}[-c - \sqrt{c^2 - 4g'(u_3)}]. \quad (4.61)$$

Representaremos, na figura 4.18 os gráficos  $\tan \theta$  x  $c$  correspondentes, donde observamos duas situações: os valores da tangente do ângulo  $\theta$  que corresponde a  $\vec{e}_1^{(1)}$  e a  $\vec{e}_3^{(1)}$  e cuja variação está apresentada em (a) e (c) respectivamente, da figura 4.18 são positivos e ambos diminuem à medida que a velocidade aumenta, mostrando que esses dois vetores efetuam uma rotação no sentido horário, no primeiro quadrante, aproximando-se do semi-eixo  $U > 0$ . Na figura 4.18 (b) e (d) vemos que os valores da tangente que correspondem a  $\vec{e}_1^{(2)}$  e  $\vec{e}_3^{(2)}$  são negativos e aumentam em módulo, à medida que a velocidade aumenta, o que também mostra uma rotação no sentido horário, no quarto quadrante, aproximando-se mais da orientação vertical para baixo.

Quando  $c$  varia, as trajetórias do plano de fase também variam, em particular, as trajetórias  $T_1$  e  $T_3$  marcadas no plano de fase da figura 4.17(a). Por argumentos de continuidade, se  $g'(u_1)$  e  $g'(u_3)$  estiverem em um intervalo apropriado, é possível que quando  $c$  varia, exista um único valor de  $c = c^*$ , tal que a trajetória  $T_1$  se junte à trajetória  $T_3$ ; desta forma, temos uma trajetória de fase conectando os dois pontos singulares  $(u_1, 0)$  e  $(u_3, 0)$ . Isto está ilustrado na figura 4.19 (a), com a correspondente onda viajante (figura 4.19 (b)), que se move com velocidade única  $c^*$  que depende do termo de interação não linear  $g(U)$ , definida em (4.42). A solução  $U(z)$ , neste caso, satisfaz

$$U(-\infty) = u_3 \quad \text{e} \quad U(+\infty) = u_1. \quad (4.62)$$



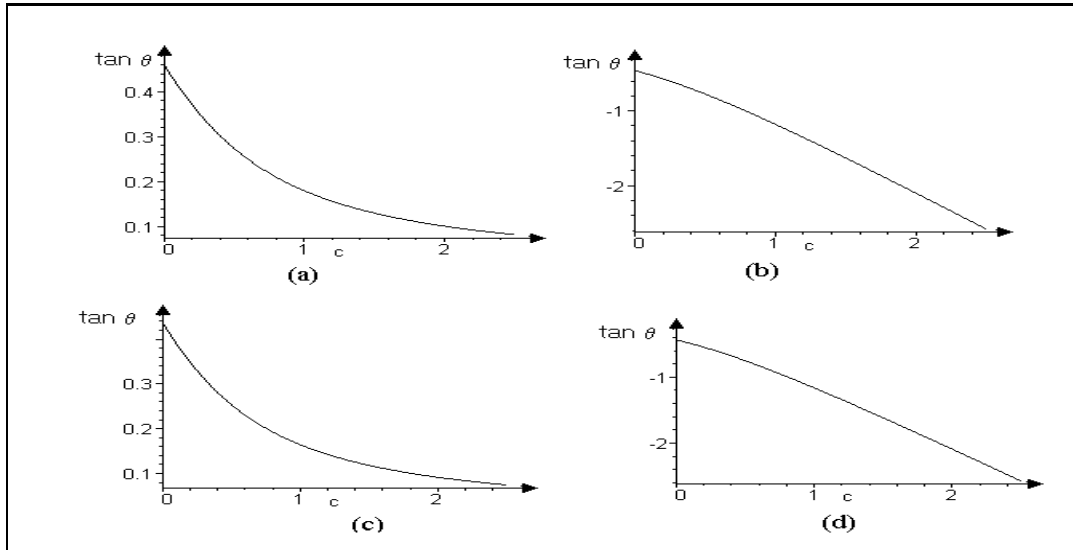


Figura 4.18: *Representação gráfica de  $\tan \theta$  x  $c$ ; (a)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_1^{(1)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ , (b)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_1^{(2)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ , (c)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_3^{(1)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ , (d)  $\theta$  é o ângulo formado pelo vetor  $\vec{e}_3^{(2)}$  e o sentido positivo do eixo  $U$ .*

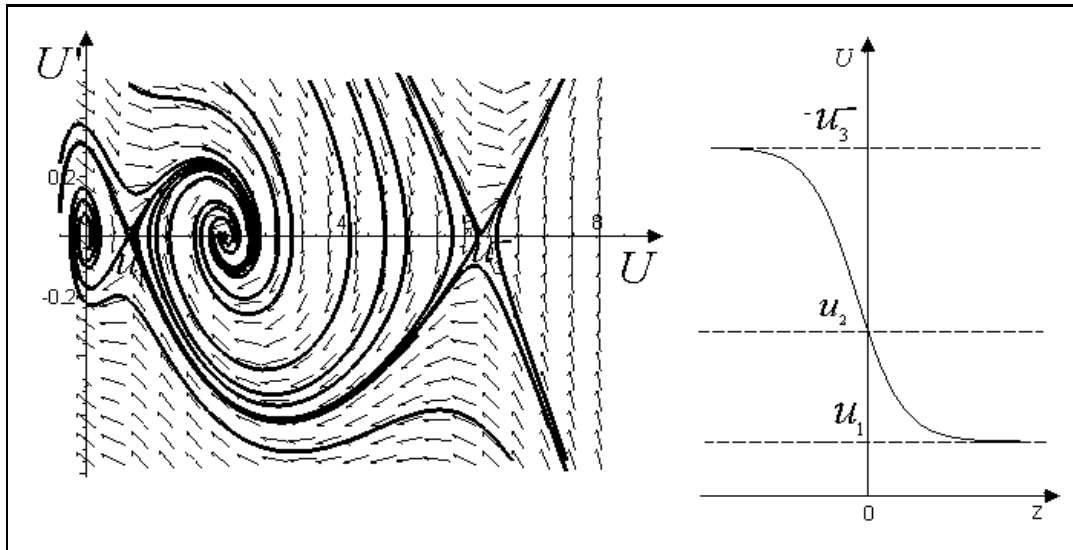


Figura 4.19: (a) *Plano de fase incluindo uma onda conectando os estados estacionários  $u_3$  e  $u_1$ ; com  $0 < c = 0.17$ ,  $r = 0.5$  e  $q = 9$ . (b) Solução do tipo frente de onda que satisfaz  $U(-\infty) = u_3$  e  $U(+\infty) = u_1$ .*

Suponhamos que a população de lagartas esteja num estado de refúgio estável, isto é  $U = u_1$ , para todo  $x$ , e ocorra um aumento local de população para  $u_3$ , em algum domínio finito, ou seja, ocorre uma explosão local da praga. Para investigar a possibilidade de espalhamento da explosão da população, nos perguntamos se existe uma solução do tipo frente de onda viajante, que conecte uma região onde  $U = u_1$  com uma onde  $U = u_3$  e, neste caso, qual é a velocidade e o sentido de propagação. O sinal de  $c$  informará se a explosão se espalha ou não: se  $c > 0$ , a onda move-se para dentro da região, onde  $U = u_1$  e a explosão se espalha; se  $c < 0$ , a explosão não se espalha e, ao contrário, é reduzida. Para determinar o sinal de  $c$ , multiplicamos a equação (4.47) em  $U$

$$U'' + cU' + g(U) = 0 \quad (4.63)$$

por  $U'$  e integramos em  $z$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ ; obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [U'U''']dz + c \int_{-\infty}^{+\infty} [U']^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(U)U' dz = 0. \quad (4.64)$$

De (4.62) temos que  $U(-\infty) = u_3$  e  $U(+\infty) = u_1$ . A primeira parcela de (4.64) é nula, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [U'U''']dz = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} U' dU' = \frac{[U']^2}{2} \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} = \frac{1}{2} [[U'(+\infty)]^2 - [U'(-\infty)]^2]. \quad (4.65)$$

Como  $U'(\pm\infty)=0$ , (4.65) se anula. Da mesma forma, para o terceiro termo de (4.64), temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(U)U' dz = \int_{u_3}^{u_1} g(U)dU. \quad (4.66)$$

Assim sendo, podemos escrever:

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} [U']^2 dz + \int_{u_3}^{u_1} g(U)dU = 0, \quad (4.67)$$

donde

$$c = \frac{\int_{u_1}^{u_3} g(U)dU}{\int_{-\infty}^{+\infty} [U']^2 dz}. \quad (4.68)$$

O sinal de  $c$  é, portanto, igual ao sinal de

$$\int_{u_1}^{u_3} g(U)dU = \int_{u_1}^{u_2} g(U)dU + \int_{u_2}^{u_3} g(U)dU = I_1 + I_3 = A_3 - A_1, \quad (4.69)$$

visto que  $I_1 = -A_1 < 0$  e  $I_3 = A_3 > 0$ , sendo  $A_1$  e  $A_3$  as áreas mostradas na figura 4.20. Assim, o sinal de  $c$  é determinado pela comparação entre as áreas  $A_1$  e  $A_3$ . Se  $A_3 > A_1$ ,  $\int_{u_1}^{u_3} g(U)dU > 0$  e, portanto, a onda tem velocidade  $c > 0$ , isto é, a explosão da população de lagartas se dispersa para dentro da área de refúgio. Neste caso, diz-se que  $u_3$  é dominante, isto é, quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $U \rightarrow u_3$ , em todo lugar. Por outro lado, se  $A_3 < A_1$ , a velocidade de propagação de onda é  $c < 0$  e  $u_1$  é dominante, isto é,  $U \rightarrow u_1$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ , o que significa que a explosão é eliminada.

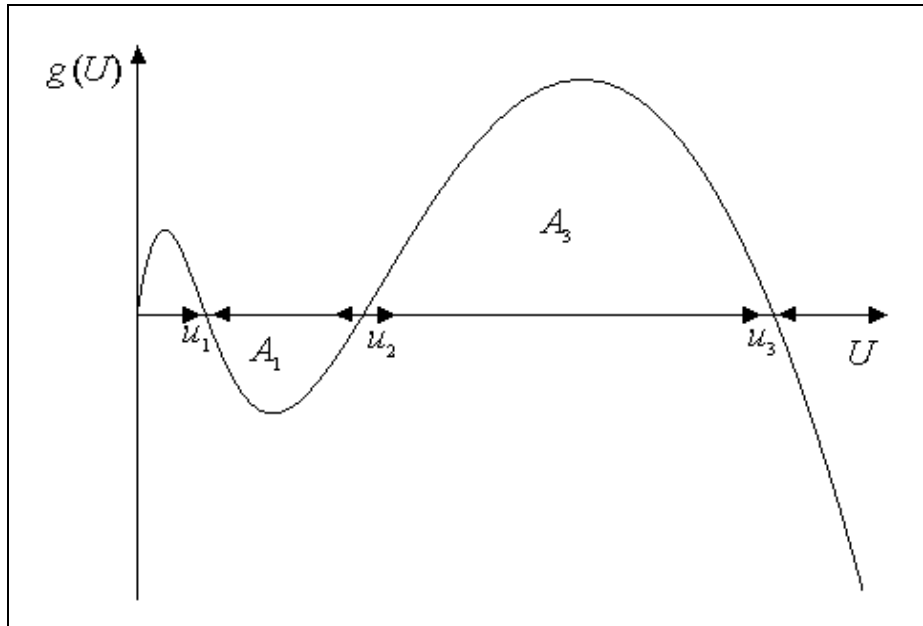


Figura 4.20: Se  $A_1 > A_3$ , a velocidade  $c$  é negativa e a explosão onde  $U = u_3$  é reduzida. Se  $A_1 < A_3$ , a velocidade  $c$  é positiva e a explosão da população de lagartas se espalha para dentro da área de refúgio onde  $U = u_1$ .

Do ponto de vista do controle de infestação, se ocorrer uma explosão da população de insetos e for espalhada, é importante saber como alterar as condições locais, de modo que a infestação ou a onda de surto seja contida ou revertida. De

acordo com a análise apresentada acima, podemos, por exemplo, alterar localmente a dinâmica de crescimento da população de lagartas, de modo que as novas áreas  $A_1$  e  $A_3$  na figura 4.20 satisfaçam a condição  $A_1 > A_3$ . Pode-se alcançar isso aproximando os zeros  $u_2$  e  $u_3$  de  $g(U)$ , isto é, reduzindo o parâmetro adimensional  $q$  (ver figura 4.14). Lembrando que quando introduzimos quantidades adimensionais, antes da equação (4.41), definimos  $q = \frac{K}{A}$ , concluímos que podemos alcançar uma situação tal que  $A_1 > A_3$ , por exemplo, pulverizando uma faixa, com o objetivo de diminuir a capacidade de suporte da folhagem das árvores. Desta forma, seria criada uma interrupção na infestação, onde  $u_1$  seria dominante, de modo que a velocidade  $c$  não seria mais positiva.

## 4.2 Com termo de convecção

Muitos estudos empregando equações da difusão têm sido extensivamente usados em problemas ecológicos e têm sido importantes nas análises de dispersão de insetos adultos. Entretanto, esse enfoque também pode ser usado para a dispersão de larvas, cujo processo tem conseqüências importantes para dinâmicas e comunidades populacionais, bem como na estrutura genética de populações [Bassanezi *et al.*(1997)]. Portanto, os mesmos resultados teóricos relacionados à difusão de adultos podem ser aplicados em estudos de dispersão de insetos larvais, tais como varejeiras, onde dois grupos estão interagindo, os que estão em movimento e os que estão indo para o seu esconderijo. No artigo de Bassanezi *et al* (1997), o enfoque difusivo é empregado para modelar a forma dispersiva larval com termo de fonte, baseado em dados experimentais de três espécies de varejeira. Os autores aproveitaram-se da flexibilidade dos modelos de difusão para incorporar características comportamentais da dispersão no estágio larval. O modelo inclui difusão, termo de velocidade e uma função  $h(x, t)$  que descreve o processo do movimento larval indo para seu casulo para se tornar filhote. O modelo unidimensional de difusão com convecção desenvolvido por Bassanezi *et al* (1997) é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - h(x, t), \quad (4.70)$$

onde  $u(x, t)$  é a população de larvas em  $x$ , no tempo  $t$ ,  $D$  é o coeficiente de difusão representando o movimento aleatório das larvas e  $\alpha$  é o coeficiente de proporcionalidade que descreve a velocidade que é tomada de acordo com as características de cada espécie.

O enfoque do modelo de difusão passiva, tomado nesse trabalho, inclui características relevantes em que se relata a dispersão no estágio de vida larval e assume que as distâncias de dispersão são limitadas, o que comumente é tomado como uma limitação nos modelos de difusão, quando aplicados em dispersão de insetos adultos. Os autores acreditam que o modelo prova a utilidade para explorar a dinâmica de dispersão de organismos tais como varejeiras e outros dípteros, onde as fases do ciclo dispersivo no estágio larval tem dois estágios, isto é, um de movimento ativo e outro de esconderijo em sua capa para tornar-se filhote.

### 4.3 Modelos de Gurney & Nisbet

Muitos modelos têm sido propostos no sentido de que a dispersão animal contribua para a estabilidade do sistema ecológico. Entretanto, pouca atenção tem sido empregada com relação ao contorno e ao tamanho da região [Namba (1980)].

Com relação a esses problemas Namba (1980) estudou os modelos de Gurney-Nisbet, já que esses modelos são muito simples e é útil o estudo das relações entre dispersão animal, contorno e tamanho da região onde se tem a dispersão, para que se mantenha a estabilidade do sistema ecológico.

Consideremos a nossa lei de conservação básica definida no capítulo 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + F. \quad (4.71)$$

Os modelos de Gurney-Nisbet estão baseados na equação (4.71), na qual o termo de fonte tem a forma  $F = G(x)u$ , o que quer dizer que a população é crescente, com uma taxa de de crescimento *per capita*  $G(x)$  que independe da densidade populacional.

Então a densidade populacional  $u(x, t)$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(x)u - \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, t) \quad (4.72)$$

onde

- $u(x, t)$  é a densidade da população  $u$  em uma posição  $x$  no tempo  $t$ ;
- $G(x)$  é a taxa de crescimento *per capita* da população local, independente da densidade da população;
- $\phi(x, t)$  é o fluxo da população local.

Gurney e Nisbet (1975) propuseram três modelos para o fluxo de população, de acordo com o movimento dos indivíduos, dependendo ou não da densidade  $u$ :

1. O modelo que descreve o movimento aleatório dos indivíduos, para o qual

$$\phi = -D \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.73)$$

onde  $D$  é uma constante positiva. Assim, a equação (4.72) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x)u. \quad (4.74)$$

Esse modelo é obtido da suposição que o movimento de indivíduos é aleatório.

2. O modelo que descreve o movimento aleatório parcial dos indivíduos. Nesse caso

$$\phi = -D \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \mu u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.75)$$

onde  $D$  e  $\mu$  são constantes positivas. A equação (4.72) com o termo (4.75) passa a ser

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + G(x)u. \quad (4.76)$$

3. O modelo com movimento exclusivamente dirigido é dado por

$$\phi = -Du \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.77)$$

A equação (4.72) com o termo  $\phi$  de (4.77) passa a ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + G(x)u. \quad (4.78)$$

O primeiro modelo é obtido da suposição que o movimento de indivíduos é aleatório e os dois últimos podem ser considerados como um tipo de modelo de difusão com coeficientes dependentes da densidade populacional. Eles são chamados *modelos de dispersão dependentes da densidade*.

Gurney-Nisbet (1975) fizeram uma hipótese na taxa de crescimento,  $G(x)$ , de que o ambiente é um universo largamente hostil ( $G(x) < 0$ ) que contém uma única região de habitat viável ( $G(x) > 0$ ). Eles consideraram as equações numa região infinita com as seguintes condições de contorno:

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{quando } x \rightarrow \pm\infty \quad (4.79)$$

e mostraram que uma população que vai à extinção ou cresce explosivamente quando a dispersão é aleatória; pode passar a estabelecer uma distribuição estacionária, se a dispersão for dependente da densidade populacional.

O autor também mostrou que uma população que exhibe dispersão dependente da densidade, pode estabelecer uma distribuição estacionária, mesmo que o habitat esteja limitado a uma pequena região onde a população difunde-se aleatoriamente, crescendo de forma explosiva ( $G(x) > 0$ ). Os resultados de Namba podem ser relevantes para o desenho de parques e reservas nacionais, uma vez que se sabe que o número de espécies que podem ser naturalmente mantidas em equilíbrio depende do tamanho do parque e uma pequena área tende a suportar apenas espécies pequenas. O número de espécies mantidas naturalmente numa região pode depender da estrutura da comunidade. Entretanto, seria necessário que um mecanismo regulador de população de alguma espécie única operasse, para salvar as espécies

em declínio. Assim sendo, o efeito de introduzir uma dispersão dependente da densidade, dentro de um sistema, é o de aumentar a taxa de difusão em densidades populacionais altas. Se a escala de crescimento for tal que uma população experimentalmente simplesmente dispersão aleatória, tenderia a aumentar a sua concentração, enquanto que a dispersão dependente da densidade teria o efeito de estabilizar a população, pelo aumento da taxa de difusão.

Gurney e Nisbet (1998), referindo-se a ambientes não homogêneos, consideram a situação de uma população governada pela equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad (4.80)$$

onde

$$F(u) = \begin{cases} g_0 u, & \text{se } |x| \leq X_G \\ -\delta_0 u, & \text{se } |x| > X_G, \end{cases} \quad (4.81)$$

sendo  $g_0$  e  $\delta_0$  constantes reais positivas.

Na figura 4.21, visualizamos a faixa (patch) favorável, de largura  $2X_G$ , na qual nascimentos superam mortes, e a população cresce exponencialmente, de acordo com  $F(u) = g_0 u$ . Fora desta faixa, mortes superam nascimentos, e a população decresce exponencialmente, de acordo com  $F(u) = -\delta_0 u$ .

Investigações numéricas deste sistema parecem indicar que sua estabilização não é possível. Então, não vai se procurar um estado estacionário, mas sim uma solução na qual a distribuição da população tenha uma forma constante e, com o passar do tempo, cresça exponencialmente.

Colocando  $x = 0$  no centro da faixa favorável, o problema torna-se simétrico em torno de  $x = 0$ , o que nos permite concentrar-nos apenas em  $x$  positivo. Então, procuraremos uma solução do tipo

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 \exp(\lambda t) \cos ax, & \text{se } x \leq X_G \\ u_2 \exp(\lambda t) \exp(-bx), & \text{se } x > X_G \end{cases} \quad (4.82)$$

cujos gráficos, para um certo  $t$  fixo, apresentamos na figura 4.22.



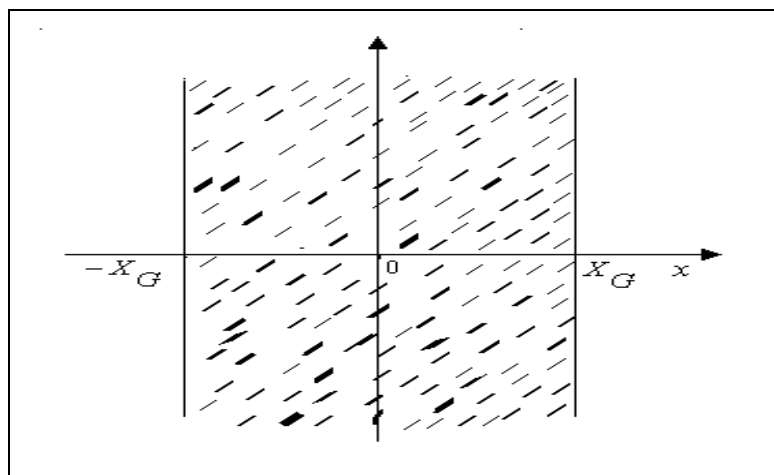


Figura 4.21: Gráfico da faixa favorável, de largura  $2X_G$ , na qual nascimentos superam mortes.

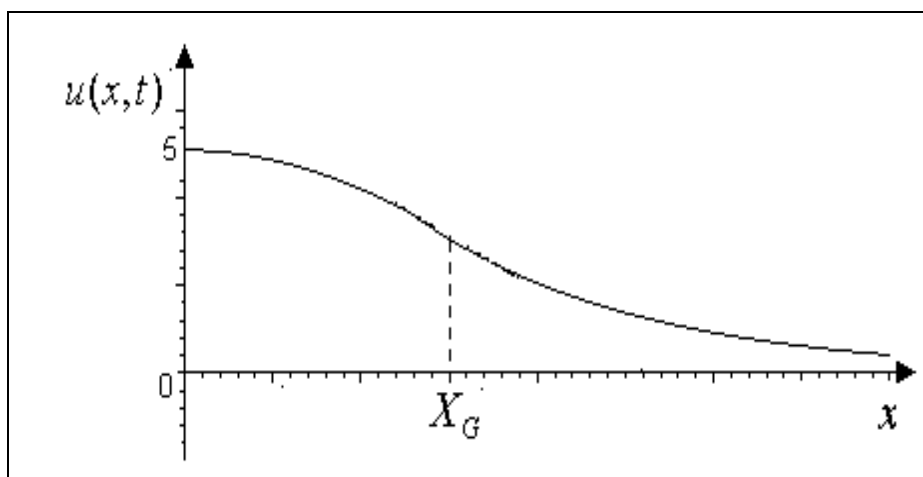


Figura 4.22: Gráfico da solução (4.82) em  $t = 0.3$ , para um sistema com os seguintes parâmetros:  $D = 0.5$ ,  $g_0 = 5.3$ ,  $\delta_0 = 7.2$  e  $X_G = 0.3$ .

Substituindo a solução proposta (4.82) na equação diferencial (4.80), obtemos:

$$a^2 = \frac{g_0 - \lambda}{D} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{\delta_0 + \lambda}{D}. \quad (4.83)$$

Como  $a^2 \geq 0$ , concluímos imediatamente que

$$\lambda \leq g_0. \quad (4.84)$$

Para obter uma solução com significado biológico, é preciso que a função  $u$  seja monotônica decrescente; portanto devemos ter

$$b > 0 \quad \text{e} \quad 0 < a < \frac{\pi}{2} X_G. \quad (4.85)$$

Além disso, para não violar as leis de conservação sobre o contorno entre as duas partes da solução, ela deve ser contínua e com inclinação contínua sobre o contorno; impondo estas condições à solução proposta (4.82), obtemos:

$$\begin{cases} u_1 \cos(aX_G) = u_2 \exp(-bX_G) \\ u_1 a \sin(aX_G) = u_2 b \exp(-bX_G), \end{cases} \quad (4.86)$$

donde podemos escrever:

$$\tan(aX_G) = \frac{b}{a}, \quad (4.87)$$

ou ainda, usando (4.83):

$$\tan(aX_G) = \sqrt{\frac{g_0 + \delta_0}{Da^2} - 1}. \quad (4.88)$$

A equação (4.88) é uma equação transcendental, a partir da qual, em princípio, podemos obter  $a$  em função dos parâmetros  $X_G$ ,  $g_0$ ,  $\delta_0$ ,  $D$  do sistema. Uma vez obtido  $a$ , podemos, por meio de (4.83), calcular  $\lambda$  e  $b$  em função dos parâmetros do sistema. Da equação (4.88), observamos ainda que a condição necessária para existir a solução procurada é:

$$a^2 \leq a_{\max}^2 = \frac{g_0 + \delta_0}{D}. \quad (4.89)$$

Substituindo a condição (4.89) em (4.83), obtemos que

$$\lambda \geq -\delta_0 \quad (4.90)$$

que, juntamente com (4.85), fornece:

$$-\delta_0 \leq \lambda \leq g_0. \quad (4.91)$$

Além disso,

$$X_G = 0 \text{ implica } a = a_{\max}, \text{ isto é, } \lambda = -\delta_0; \quad (4.92)$$

enquanto que

$$X_G \rightarrow \infty \text{ implica } a \rightarrow 0, \text{ isto é, } \lambda \rightarrow g_0. \quad (4.93)$$

Referindo-nos à equação (4.88), observa-se que

- quando  $a$  cresce de 0 até  $\frac{\pi}{2}X_G$ , o lado esquerdo desta equação cresce monotonicamente de 0 a  $\infty$ ;
- quando  $a$  cresce de 0 até  $a_{\max}$ , o lado direito desta equação decresce monotonicamente de  $\infty$  a 0.

Então a equação transcendental (4.88) tem exatamente uma solução entre 0 e  $\min\left(a_{\max}, \frac{\pi}{2}X_G\right)$ ; e existe, portanto, exatamente um valor válido de  $\lambda$ .

Por outro lado, referindo-nos ainda à equação (4.88), e variando  $X_G$ , vemos que quando  $X_G$  aumenta, o valor de  $\tan(aX_G)$  também aumenta, mas o lado direito da equação (4.88) não varia. Então, aumentando  $X_G$ , deve decrescer o valor de  $a$  para o qual os dois lados da equação (4.88) são iguais entre si. Portanto, o valor válido de  $\lambda$  é uma função monotônica crescente da meia-largura da faixa,  $X_G$ .

Já sabemos que  $\lambda = -\delta_0$  quando  $X_G = 0$  e  $\lambda \rightarrow g_0$  quando  $X_G \rightarrow \infty$ ; então, virtualmente todas as combinações de parâmetros devem resultar ou em  $\lambda > 0$  (crescimento exponencial) ou em  $\lambda < 0$  (decaimento exponencial).

Se variarmos  $X_G$  de 0 a  $\infty$ , mantendo todo o resto constante, então todas as faixas cuja meia-largura é maior que um valor crítico  $X_G^*$  têm crescimento

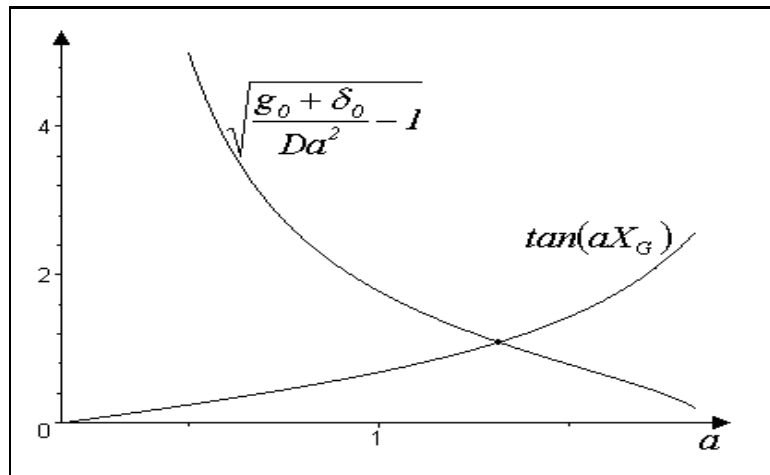


Figura 4.23: Resolução gráfica da equação (4.88) para  $g(0) = 2$ ,  $\delta_0 = 3$ ,  $D=1.2$  e  $X_G = 0.6$ ,  $a_{max} = 2.04$  e  $\frac{\pi}{2}X_G=0.94$ .

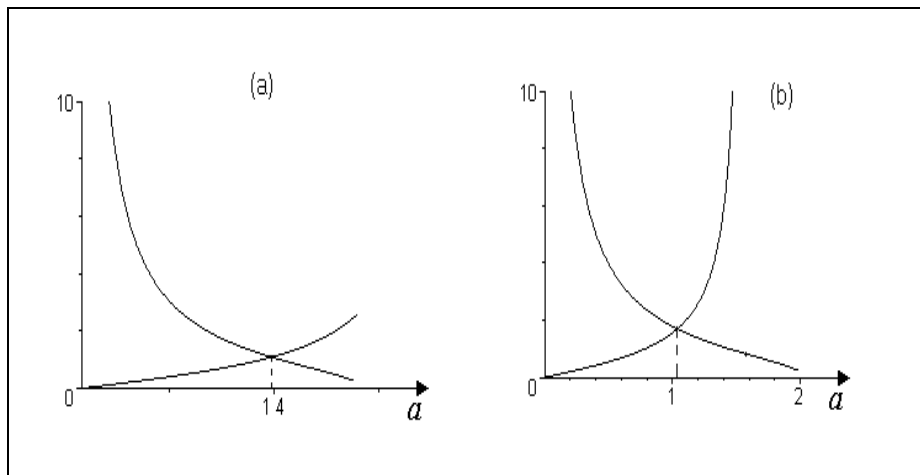


Figura 4.24: Gráfico do lado direito e lado esquerdo da equação (4.88) para dois valores diferentes de  $X_G$ , com  $g(0) = 2$ ,  $\delta_0 = 3$ ,  $D=1.2$ ; (a)  $X_G = 0.6$ , (b)  $X_G = 1.0$ .

exponencial, enquanto que todas as mais estreitas, com  $X_G < X_G^*$ , têm decaimento exponencial.

O valor da meia-largura crítica é obtido a partir da condição de que  $X_G = X_G^*$  corresponde a  $\lambda = 0$ , que substituído em (4.83), fornece  $a^2 = \frac{g_0}{D}$  e portanto, de (4.88):

$$X_G^* = \sqrt{\frac{D}{g_0}} \arctan \sqrt{\frac{\delta_0}{g_0}}, \quad (4.94)$$

que, no caso em que  $\delta_0 \gg g_0$ , leva a

$$X_G^* \simeq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D}{g_0}}. \quad (4.95)$$

Dedicamos o capítulo 5 a exemplos de modelos de dispersão, cujo coeficiente de difusão é dependente da densidade da população.

## 5 ALGUNS MODELOS DE DISPERSÃO DE INSETOS COM COEFICIENTE DE DIFUSÃO PROPORCIONAL A UMA POTÊNCIA DA DENSIDADE POPULACIONAL

Vamos nos referir, agora, a modelos de dispersão de insetos com coeficiente de difusão dependente da densidade populacional. A relação entre dispersão animal e densidade de população tem sido investigada extensivamente em insetos, pois estes se mostravam convenientes para estudos de dispersão, devido à sua abundância e sua alta mobilidade. Além disso, informação quantitativa relativa à dispersão de insetos tem exercido um papel essencial no controle de pragas [Okubo (1980)].

Vamos nos referir, novamente, à equação da difusão unidimensional com o termo de fonte (2.60), ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, x, t). \quad (5.1)$$

Essa equação foi escrita a partir da lei de conservação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = F(u, x, t) \quad (5.2)$$

para um fluxo da forma

$$\phi = -D \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.3)$$

Quando  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , significa que  $u(x, t)$  não depende de  $x$ , isto é, as partículas estão uniformemente distribuídas, com igual densidade de partículas à direita e à esquerda, de qualquer secção transversal, e neste caso o fluxo  $\phi$  por difusão será nulo. Se  $u(x, t)$  for uma função crescente com  $x$ , então o fluxo deverá ser negativo (haverá maior concentração à direita em  $x$  e, portanto, mais partículas deverão passar da direita para a esquerda do que da esquerda para a direita). O estudo do fluxo difusivo foi introduzido por Fick (1855) na dispersão de moléculas de um soluto em um meio

fluido e por Newton-Fourier para a difusão do calor [Rodrigues (1998)]. Assim, o fluxo difusivo é dado por

$$\phi = -D \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.4)$$

e a equação (5.2) passa a ser

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(u, x, t). \quad (5.5)$$

Uma extensão do modelo clássico de difusão, que é de particular relevância para a dispersão de insetos, é aquela na qual o coeficiente de difusão na expressão para o fluxo  $\phi$ , equação (5.3), depende da densidade da população  $u$ , isto é,

$$\phi = -D(u) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.6)$$

Uma forma típica para  $D(u)$  considera que haja um aumento na difusão devido à pressão da própria população, sob a forma:

$$D(u) = D_0 \cdot \left( \frac{u}{u_0} \right)^m, \quad (5.7)$$

onde  $m$ ,  $D_0$  e  $u_0$  são constantes positivas,  $D_0$  é o valor da difusividade para uma densidade de referência  $u = u_0$ , isto é,  $D(u_0) = D_0$  (figura 5.1(a)). Observamos que, diferentemente do modelo com coeficiente de difusão constante, não nulo para qualquer valor de  $u$ , a forma (5.7) leva a  $D(u)$  nulo, isto é, fluxo nulo de população, quando  $u = 0$ . Na figura 5.1(b), observamos que, se  $m < 1$ ,  $\frac{du^m}{du}$  diminui quando  $u$  cresce, com  $m > 1$ ,  $\frac{du^m}{du}$  cresce com  $u$  e se  $m = 1$ ,  $\frac{du^m}{du}$  é constante igual a 1 para todo  $u$ .

Outra observação interessante vem do fato de que, após substituir (5.7) em (5.5), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D_0 \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{D_0}{u_0^m} u^{m-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = F(u, x, t), \quad (5.8)$$

onde o terceiro termo poderia ser interpretado como uma “convecção” com velocidade  $m \frac{D_0}{u_0^m} u^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x}$ .

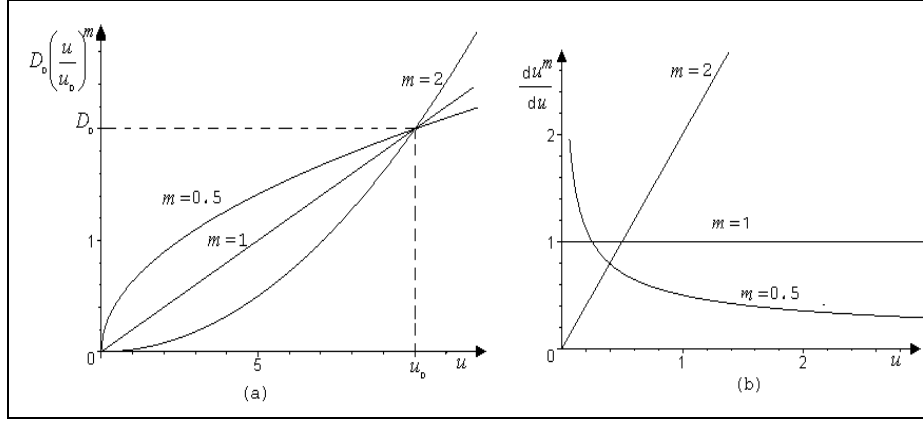


Figura 5.1: (a) Gráfico de  $D(u)$ , definida em (5.7), para  $m = 0.5$ ,  $m = 1$  e  $m = 2$ ;  
 (b) gráfico de  $\frac{du^m}{du}$  em função de  $u$ , para  $m = 0.5$ ,  $m = 1$  e  $m = 2$ .

## 5.1 Sem Termo de Fonte

O termo de fonte  $F$  na equação da difusão (5.1) representa a taxa de produção por unidade de tempo e volume menos a taxa de perda por unidade de tempo e volume. No contexto ecológico, o termo de fonte,  $F(u, x, t)$ , é geralmente, uma função não linear que representa o processo de crescimento, decrescimento e interação intra-específica da população  $u$ , que pode envolver taxa de nascimento, morte e migração.

Nesta subsecção 5.1, abordaremos modelos onde tais termos não são considerados; assim sendo, a equação diferencial (5.2) reduz-se para

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (5.9)$$

### 5.1.1 Equação da difusão

Supondo que inicialmente (em  $t = 0$ ) sejam liberados  $Q$  insetos por unidade de área, no ponto  $x = 0$ , o problema de valor inicial tem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ u(x, 0) &= Q \delta(x). \end{aligned} \quad (5.10)$$



$$\begin{cases} u(x, t) = u_0[\lambda(t)]^{-1} \left[ 1 - \left\{ \frac{x}{r_0\lambda(t)} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{m}}, & |x| \leq r_0\lambda(t) \\ u(x, t) = 0, & |x| > r_0\lambda(t), \end{cases} \quad (5.11)$$

sendo

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2+m}}, \\ r_0 &= \frac{Q\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{3}{2}\right)}{\left\{ \pi^{\frac{1}{2}} u_0 \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right\}}, \\ t_0 &= \frac{r_0^2 m}{2D_0(m+2)}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $\Gamma$  é a função gama.

Um resultado importante é o fato de que a população se dispersa apenas sobre um intervalo finito, simétrico em torno do ponto a partir do qual os insetos foram liberados, até uma distância  $r_0\lambda(t)$  deste ponto. O gráfico da solução (5.11), para  $m = \frac{1}{2}$ , como função de  $x$  para diferentes tempos  $t$  é ilustrada na figura (5.2). Observemos que a derivada de  $u$  é descontínua em  $x = x_f$ . Na figura 5.3, temos o gráfico da solução (5.11), para  $m = 2$ .

Essas soluções representam um tipo de onda com a frente em  $x = x_f = r_0\lambda(t)$  e que se propaga com velocidade

$$\frac{dx_f}{dt} = r_0 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{r_0}{t_0} \frac{1}{2+m} \left( \frac{t_0}{t} \right)^{\frac{1+m}{2+m}}. \quad (5.13)$$

Observamos que esta velocidade diminui com o tempo, para todo  $m$ . Na figura 5.4 apresentamos o gráfico de  $\frac{dx_f}{dt}$  x  $t$ .

O padrão espacial representado na figura 5.5 é do tipo platicúrtico, isto é, mais achatado que a distribuição gaussiana. Pode ser mostrado que, no limite  $m \rightarrow 0$ , a solução  $u(x, t)$  apresentada em (5.11) se aproxima da solução

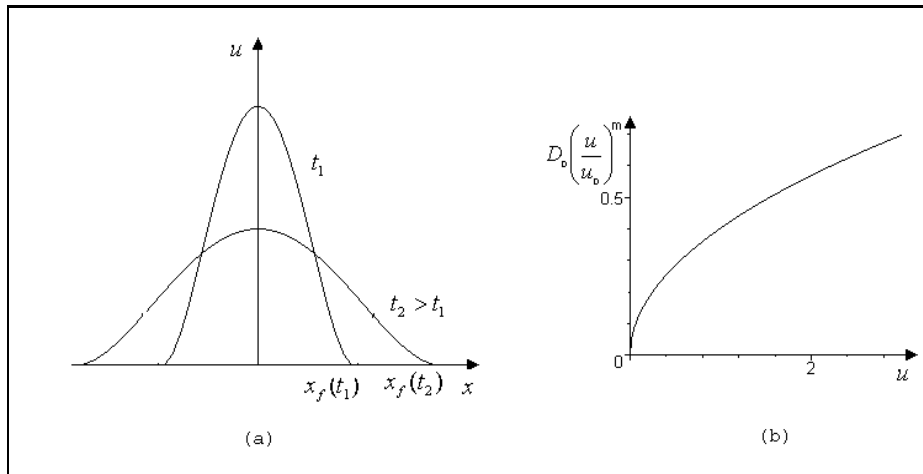


Figura 5.2: (a) Gráfico da solução (5.11), como uma função de  $x$ , sendo  $m = \frac{1}{2}$ ,  $Q=12$ ,  $D_0=0.9$ ,  $u_0=5$ , em dois instantes de tempo distintos:  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 5$ ; (b) gráfico de  $D(u) = D_0 \left( \frac{u}{u_0} \right)^m$ , com  $m = \frac{1}{2}$ ,  $D_0=0.9$ ,  $u_0=5$ .

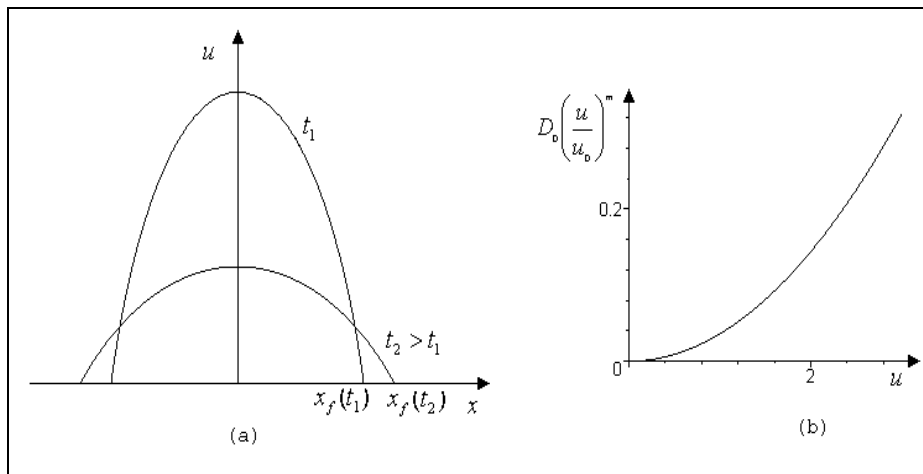


Figura 5.3: (a) Gráfico da solução (5.11), como uma função de  $x$ , sendo  $m = 2$ ,  $Q=12$ ,  $D_0=0.9$ ,  $u_0=5$ , em dois instantes de tempo distintos:  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 5$ ; (b) gráfico de  $D(u) = D_0 \left( \frac{u}{u_0} \right)^m$ , com  $m = 2$ ,  $D_0=0.9$  e  $u_0=5$ .

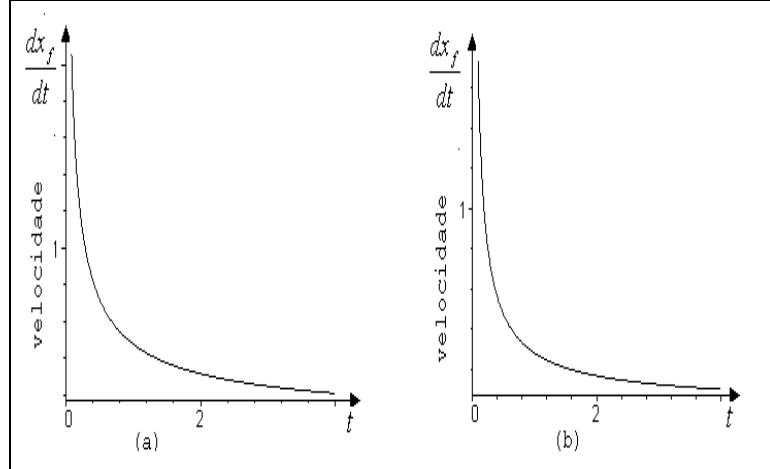


Figura 5.4: *Velocidade de propagação da onda*:  $Q = 12$ ,  $D_0 = 0.9$  e  $u_0 = 5$ ; (a) para  $m = \frac{1}{2}$ , (b) para  $m = 2$ .

usual da equação da difusão (2.46) para o coeficiente de difusão constante, isto é  $u(t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$ ,  $t > 0$ .

Este modelo reproduziu satisfatoriamente os padrões de dispersão de gafanhotos observados por Aikman e Hewitt, em 1972, e Shigesada (1980) propôs um modelo, no qual a dependência da difusão  $D(u)$  é proporcional a  $u$ . [Murray (1989)].

### 5.1.2 Equação de convecção-difusão

Insetos em baixas densidades populacionais freqüentemente tendem a se agregar, e tal tendência para concentração de insetos em torno de um ponto pode ser interpretada como o resultado de um movimento atraído para este ponto. Os modelos matemáticos para distribuição espacial de animais, como o padrão de densidade dentro de um enxame de insetos, não pode ser baseado no simples movimento aleatório; é preciso incluir na expressão para o fluxo de animais, um mecanismo que se opõe à ação de difusão. Assim o fluxo de organismos que passa por um plano perpendicular ao eixo dos  $x$  será constituído por dois componentes: um aleatório e outro não aleatório.

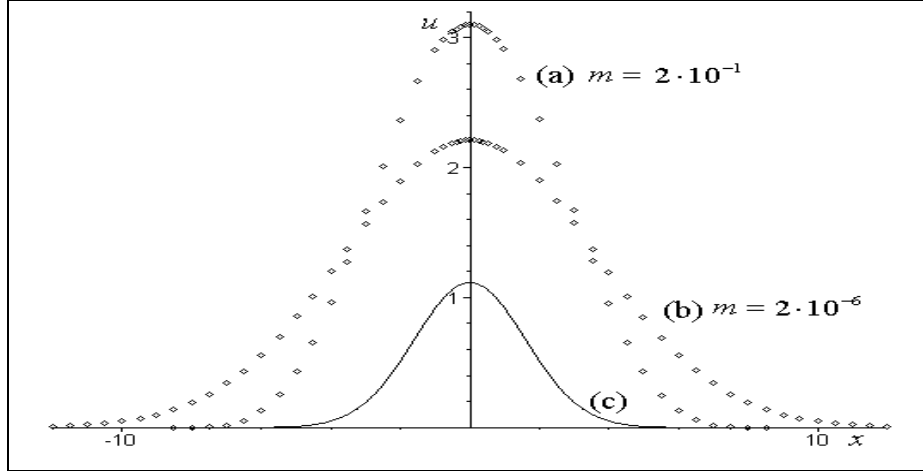


Figura 5.5: Gráfico em  $t = 10$ , da solução (5.11), para  $Q = 20$ ,  $u_0 = 5$ ,  $D_0 = 0.9$ : (a) para  $m = 2 \cdot 10^{-1}$ , (b) para  $m = 2 \cdot 10^{-6}$ , (c) gráfico da solução usual da equação diferencial (2.46) com coeficiente de difusão constante.

Se considerarmos um processo de difusão para o componente aleatório e um processo de convecção para o componente não aleatório, então o fluxo  $\phi$  pode ser formulado com  $-D \frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\beta u$ , respectivamente (figura 5.6), onde  $D$  denota a difusividade e  $\beta$  denota a velocidade de transporte média dos organismos individuais que passam através do plano. Assim o fluxo total é dado por:

$$\phi = \beta u - D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.14)$$

que substituído na equação (5.2), fornece

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial x} + F(u, x, t). \quad (5.15)$$

Um modelo unidimensional que reflete isso tem o fluxo

$$\phi = Su - D(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.16)$$

onde  $S$  é uma velocidade de transporte e  $D(u)$  é um coeficiente de difusão dependente da densidade populacional. Substituindo (5.16) em (5.9), obtém-se a equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Su) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (5.17)$$

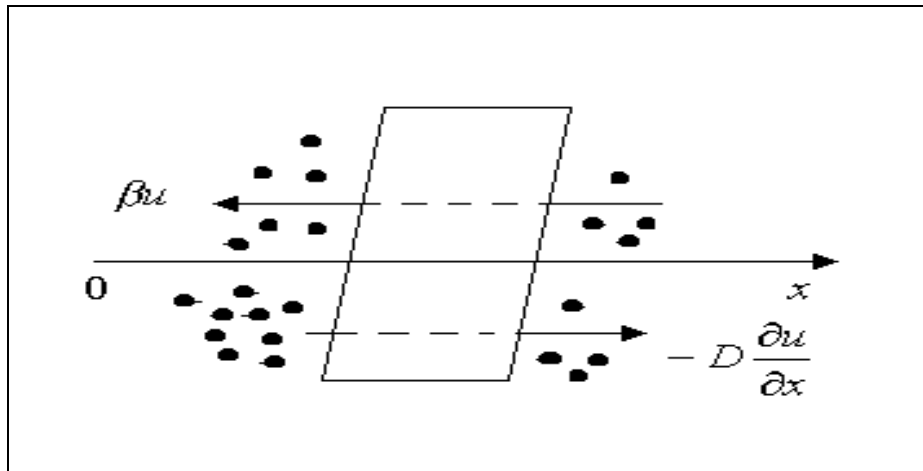


Figura 5.6: Fluxos de organismos devido à advecção ( $\beta u$ ) e à difusão  $\left(-D \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ .

O termo de convecção  $-\frac{\partial}{\partial x}(Su)$  representa o movimento dos insetos para uma determinada região e  $S$  é a velocidade do movimento.

Se o centro de atração estiver na origem ( $x = 0$ ) e a velocidade de atração for constante, Shigesada e outros (1979)[Murray (1989)] sugeriram

$$S = -S_0 \operatorname{sgn}(x), \quad (5.18)$$

sendo  $\operatorname{sgn}(x)$  a função sinal de  $x$ , definida como segue:

$$\operatorname{sgn}(x) \equiv \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

Observe na figura (5.7) o sentido da velocidade do movimento por atração, conforme o sinal seja positivo ou negativo. Assim, acrescentando à equação (5.11) o termo de convecção, sendo  $S$  definido em (5.18), temos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = S_0 \frac{\partial}{\partial x}[\operatorname{sgn}(x)u] + D_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (5.20)$$

A equação diferencial não linear (5.20) não é fácil de resolver, e em geral é difícil obter uma solução analítica; entretanto nós podemos ter alguma idéia do comportamento da solução para partes do domínio. Em particular, podemos analisar a dispersão inicial (pequenos valores de  $t > 0$ ) e a dispersão final (grandes valores de  $t$ ).

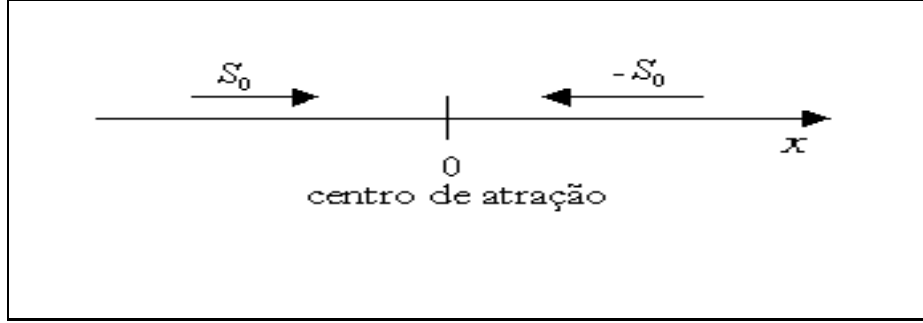


Figura 5.7: *Modelo de dispersão com o centro de atração na origem:  $S_0$  é a velocidade do movimento por atração.*

Seja  $Q$  o número inicial de insetos liberados em  $x = 0$ . Para a dispersão inicial, espera-se que gradientes de concentração  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , próximos do ponto  $x = 0$ , a partir do qual os insetos são liberados, sejam grandes e, então, nessa região, o termo de convecção é pequeno comparado com o termo de difusão. Também a alta difusividade, devido à elevada densidade de indivíduos, faz com que o termo de convecção, no período inicial de dispersão possa ser ignorado e a solução da equação (5.20) seja aproximadamente determinada por (5.11).

Por outro lado, para o período final de dispersão, ambas a convecção e a difusão exercem papéis importantes: a difusão tende a espalhar a população a partir do centro, enquanto a convecção tem o papel de atrair a população para o centro. Espera-se que a população alcance um estado estacionário espacialmente homogêneo, no qual efeitos de convecção e difusão se contrabalançam. O estado estacionário  $u(x)$  é estabelecido, tal que  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , ou seja,

$$S_0 \frac{d}{dx} [\text{sgn}(x)u] + D_0 \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \frac{du}{dx} \right] = 0. \quad (5.21)$$

Integrando a equação (5.21), em relação à variável  $x$ , e usando a condição  $u = 0$  quando  $|x| = \infty$ , obtemos

$$S_0 [\text{sgn}(x)u] + D_0 \left[ \left( \frac{u}{u_0} \right)^m \frac{du}{dx} \right] = 0 \quad (5.22)$$

- Se  $x \geq 0$

$$S_0 dx + \frac{D_0}{u_0^m} u^{m-1} du = 0 \quad (5.23)$$

Integrando (5.23) novamente em  $x$ , obtemos:

$$S_0 x + \frac{D_0}{u_0^m} \frac{u^m}{m} = C_1 \quad (5.24)$$

ou ainda

$$u = \left[ C_2 - \frac{m S_0 x}{D_0} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (5.25)$$

- Se  $x \leq 0$ :

$$-S_0 dx + \frac{D_0}{u_0^m} u^{m-1} du = 0 \quad (5.26)$$

Integrando (5.26) novamente em  $x$ , obtemos:

$$-S_0 x + \frac{D_0}{u_0^m} \frac{u^m}{m} = C_3 \quad (5.27)$$

ou ainda

$$u = \left[ C_4 + \frac{m S_0 x}{D_0} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (5.28)$$

Concluimos, portanto, que

$$u = u_0 \left[ C_2 - \frac{m S_0 |x|}{D_0} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (5.29)$$

para  $x \geq 0$  e tal que  $C_2 - \frac{m S_0 |x|}{D_0} \geq 0$ , e

$$u = u_0 \left[ C_4 - \frac{m S_0 |x|}{D_0} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (5.30)$$

para  $x \leq 0$  e tal que  $C_4 - \frac{m S_0 |x|}{D_0} \geq 0$ .

Procurando uma solução simétrica em torno de  $x = 0$ , impomos

$$C_2 = C_4 = K, \quad (5.31)$$

isto é:

$$u = u_0 \left( K - m \frac{S_0 |x|}{D_0} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (5.32)$$

Tomando  $u_0$  como sendo a densidade populacional em  $x = 0$ , determinamos

$$K = 1 \quad (5.33)$$

e, portanto,

$$u = u_0 \left( 1 - m \frac{S_0 |x|}{D_0} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad |x| \leq \frac{D_0}{m S_0}. \quad (5.34)$$

Assim sendo, a solução geral obtida é

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 \left( 1 - m \frac{S_0 |x|}{D_0} \right)^{\frac{1}{m}}, & |x| \leq \frac{D_0}{m S_0} \\ 0, & |x| > \frac{D_0}{m S_0} \end{cases} \quad (5.35)$$

donde se conclui que a população se dispersa apenas sobre uma região finita e simétrica com relação ao ponto de liberação dos insetos. A figura (5.8) mostra o gráfico da distribuição espacial de  $\frac{u(x)}{u_0}$  para o estado estacionário da população de insetos (5.20), com  $m = \frac{1}{2}, 1, 2, 5$  os quais tendem a se agregar em baixa densidade de acordo com a equação (5.21). Quando o efeito de convecção é considerado

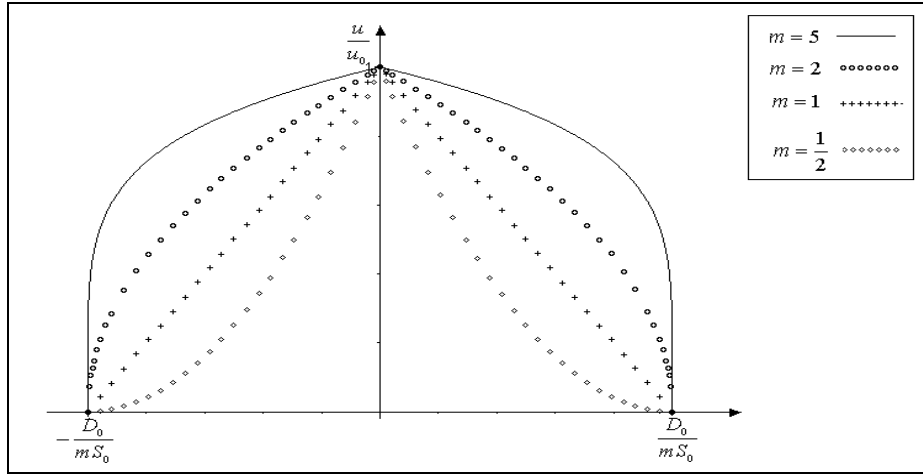


Figura 5.8: *Distribuição espacial do estado estacionário de uma população  $u(x, t)$ , para um coeficiente de difusão proporcional a  $u^m$  e convecção dirigida para o centro;  $D = 0.5$  e  $S_0 = 2$ .*

juntamente com o de dispersão, a distribuição espacial não é necessariamente plati-cúrtica; para  $m = \frac{1}{2}$ , por exemplo, a distribuição é do tipo leptocúrtica, e se adapta



muito bem a dados experimentais obtidos por Okubo e Chiang, em 1974, com um tipo de enxame de mosquitos [Okubo (1980)].

Dobzhansky e Powell (1974) repetiram os experimentos de liberação de moscas *Drosophila*, criadas em laboratório, realizado por volta de 1944. Em 1974, em vez de moscas mutantes criadas em laboratório, como foi usado previamente, eles soltaram moscas selvagens coletadas no mesmo dia do experimento ou no dia anterior. Concluíram que a distribuição espacial das moscas selvagens não era leptocúrtica, mas quase gaussiana, até mesmo um dia após a liberação. Observaram, também, que a taxa de dispersão foi razoavelmente maior do que no experimento anterior e que a variância após dois dias depois da liberação foi geralmente menor do que o dobro daquela correspondente a um dia após a liberação.

Okubo (1980) admitiu que modelos matemáticos desenvolvidos até então para dispersão de insetos eram muito simples e sugeriu a necessidade de se introduzir o efeito da densidade populacional à equação de convecção-difusão. Além disso, Okubo considerou que um modelo simples de movimento aleatório pode ser empregado, atingindo seu objetivo, se o ambiente de dispersão for homogêneo e se não houver interferência entre os indivíduos. Já, para populações heterogêneas, torna-se necessária a difusão em subpopulações, cada uma sendo trabalhada como uniforme e cada dispersão analisada separadamente.

Embora enxames de insetos tenham sido um dos casos mais extensivamente estudados de agrupamento de animais, poucos trabalhos estão voltados para o movimento dos indivíduos no interior dos enxames. Usando fotografias consecutivas, pesquisadores estudaram as relações entre a orientação e a direção de vôo de gafanhotos individuais com relação à direção do vento. Foi observado que a orientação de insetos individuais é bastante irregular, apesar do fato do enxame, como um todo, ser guiado pelo vento. O interior do enxame consiste de um número de sub-enxames, cada um movendo-se numa direção aleatória. Por outro lado, insetos nas partes frontal, periférica e traseira apresentam uma orientação coerente para o interior do enxame. Este comportamento das bordas fornece um mecanismo para os

indivíduos permanecerem juntos no enxame, fazendo com que eles possam migrar para longas distâncias, por muitas horas, sem romper essa coesão.

## 5.2 Com Termo de Fonte do Tipo $F(u) = Ku^p(1 - u^q)$ - Equação da difusão

Nos modelos anteriores, tivemos modelos de dispersão dependentes da densidade com termos de difusão e de convecção, onde não foram incluídos termos de interação intra-específica da população (crescimento). Entretanto, se nós desejarmos considerar maiores escalas de tempo, devemos considerar tais termos, que representaremos, genericamente, por  $F(u, x, t)$ , os quais incorporados à difusão com coeficiente dependente da densidade, fornecem a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(u, x, t). \quad (5.36)$$

Nesta seção, seguiremos Murray (1989), que estuda situações para as quais o coeficiente de difusão é proporcional a uma potência da densidade populacional, a partir da forma

$$D(u) = D_0 u^m, \quad (5.37)$$

sendo  $D_0$  e  $m$  constantes positivas. Comparada com (5.7), podemos dizer que  $u_0^m$  é absorvido em  $D_0$ . Como termo de fonte, temos funções  $F(u)$  do tipo

$$F(u) = K u^p (1 - u^q) \quad (5.38)$$

onde  $p$  e  $q$  são constantes positivas. Tais funções possuem dois zeros, um em  $u = 0$  e outro em  $u = 1$ .

Substituindo as funções indicadas nas equações (5.37) e (5.38) na equação diferencial (5.36), obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_0 u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + K u^p (1 - u^q). \quad (5.39)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_0 u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_0 m u^{m-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + K u^p (1 - u^q). \quad (5.40)$$

Sabendo que

- $[K] = [t]^{-1}$
- $[D_0] = \frac{[x^2]}{[t]}$ ,

podemos definir quantidades adimensionais, aqui denotadas por  $*$ ,

- $u^* = u$
- $t^* = Kt$
- $x^* = \sqrt{\frac{K}{D_0}}x$ ,

onde  $u^*$  é a nova variável dependente e  $t^*$  e  $x^*$  são as novas variáveis independentes.

Visto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \cdot K \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \cdot \sqrt{\frac{K}{D_0}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \frac{K}{D_0}, \end{aligned} \tag{5.41}$$

a nova forma da equação (5.39), adimensionalizada, omitindo os asteriscos para facilitar a notação, é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^p(1 - u^q) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tag{5.42}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^p(1 - u^q) + mu^{m-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.43}$$

A equação (5.43) pode ter várias formas, dependendo dos valores de  $p$ ,  $q$  e  $m$ . Tal flexibilidade pode determinar formas mais complicadas para as quais apenas soluções numéricas são possíveis. Soluções analíticas são úteis na medida em

que esclarecem a forma através da qual as soluções dependem analiticamente dos parâmetros. A partir de soluções analíticas que valem para modelos mais simples podemos inferir a respeito do comportamento qualitativo das soluções de equações mais complicadas, porém mais realísticas. Existem, entretanto, “ciladas” escondidas, uma das quais é importante e será chamada atenção a seguir, ao tentar resgatar, com  $m = 0$ ,  $p = 1$  e  $q = 1$ , a solução assintótica (3.81) obtida para a equação de Fisher.

### 1) Caso $m = 0$ e $p = 1$

Para relacionar com os resultados obtidos no capítulo 3 para a equação de Fisher, começaremos por considerar na equação (5.43), ainda com  $q$  qualquer, o caso  $m = 0$  e  $p = 1$ . Posteriormente, consideraremos o caso particular  $q = 1$ . A equação (5.43) torna-se, então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u^q) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad q > 0 \quad (5.44)$$

Visto que  $u = 0$  e  $u = 1$  são os estados estacionários uniformes, procuraremos soluções do tipo onda viajante na forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(z), & z &= x - ct, \\ U(-\infty) &= 1, & U(+\infty) &= 0, \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde  $c > 0$  é a velocidade da onda que devemos determinar. Substituindo as derivadas de (5.45), obtidas em (2.54), tem-se a equação diferencial ordinária, para  $U(z)$ :

$$U'' + cU' + U(1 - U^q) = 0, \quad (5.46)$$

A forma do primeiro termo na solução frente de onda assintótica, para a equação de Fisher (3.81), sugere que procuremos, de maneira otimista, soluções da equação (5.46), do tipo

$$U(z) = \frac{1}{(1 + a \exp(bz))^s}, \quad (5.47)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $s$  são constantes positivas, a serem determinadas. Essa forma satisfaz as condições de contorno de (5.45), pois

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = 0. \quad (5.48)$$

Por causa da invariância translacional da equação (5.46), podemos dizer que  $a$  é arbitrário, e pode ser incorporado dentro da exponencial como uma translação  $b^{-1} \ln a$  em  $z$ , pois

$$ae^{bz} = e^{\ln a} \cdot e^{bz} = e^{b[z + \frac{1}{b} \ln a]}.$$

Esta translação pode ser observada na figura 5.9. Ainda,  $b$  e  $s$  podem ser encontrados para que a solução (5.47) satisfaça a equação (5.46, para qualquer que seja o valor de  $a$ . Se quisermos  $U(0) = \frac{1}{2}$ , teremos

$$a = 2^{\frac{1}{s}} - 1. \quad (5.49)$$

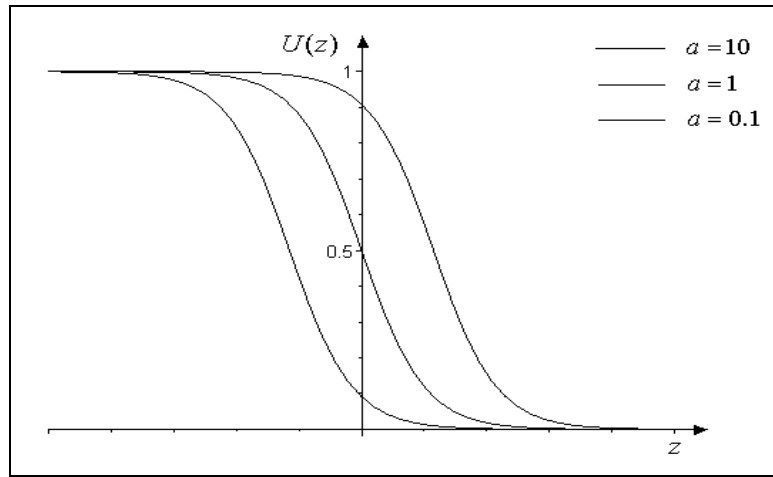


Figura 5.9: Soluções (5.47), do tipo onda viajante com os mesmos valores para  $b$  e  $s$ , mas distintos valores de  $a$ , mostram que elas constituem uma translação em  $z$ , uma em relação à outra.

No que segue, calcularemos  $b(q)$  e  $s(q)$ , tais que  $U(z)$  dado em (5.47) seja solução da equação diferencial (5.46). Para isso, substituímos

$$U(z) = (1 + a \exp(bz))^{-s} \quad (5.50)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} U'(z) &= -s(1 + a \exp(bz))^{-s-1} \cdot ab \exp(bz), \\ U''(z) &= (s^2 + s)(1 + a \exp(bz))^{-s-2} \cdot a^2 b^2 \exp(2bz) - \\ &\quad -s(1 + a \exp(bz))^{-s-1} ab^2 \exp(bz), \end{aligned} \quad (5.51)$$

na equação diferencial (5.46), donde obtemos

$$(1 + ae^{bz})^{-s-2} \{ [s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1] a^2 e^{2bz} + [2 - sb(b+c)] ae^{bz} + 1 - (1 + ae^{bz})^{2-sq} \} = 0 \quad (5.52)$$

Ao impor esta condição, é preciso considerar as seguintes três possibilidades, para o expoente  $2 - sq$ , do último termo dentro das chaves acima:

- Se  $2 - sq = 0$ , isto é,

$$s = \frac{2}{q} \quad (5.53)$$

os dois últimos termos se anulam, restando-nos apenas igualar a zero a soma dos coeficientes de  $e^{2bz}$ , bem como a soma dos coeficientes de  $e^{bz}$ , o que fornece respectivamente:

$$s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1 = 0 \quad (5.54)$$

$$2 - sb(b+c) = 0. \quad (5.55)$$

De (5.55) escrevemos  $sb(b+c) = 2$ , que substituído em (5.54) leva a

$$s(s+1)b^2 = 1, \quad (5.56)$$

donde, juntamente com (5.53), concluímos que

$$b = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{q} \left( \frac{2}{q} + 1 \right)}} \quad (5.57)$$

e, conseqüentemente, de (5.55), a velocidade da onda

$$c = \frac{q+4}{\sqrt{2(q+2)}}. \quad (5.58)$$

- Se  $2 - sq = 1$ , os dois últimos termos reduzem-se a

$$1 - (1 + ae^{bz}) = -ae^{bz}; \quad (5.59)$$

portanto, igualando a zero a soma dos coeficientes de  $e^{2bz}$ , bem como a soma dos coeficientes de  $e^{bz}$ , obtemos:

$$s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1 = 0 \quad (5.60)$$

$$2 - sb(b+c) - 1 = 0. \quad (5.61)$$

De (5.61), escrevemos  $sb(b+c) = 1$ , que substituído em (5.60) leva a

$$s(s+1)b^2 = 0 \quad (5.62)$$

que é impossível pois  $s \neq 0$  e  $s \neq -1$  e  $b \neq 0$ .

- Se  $2 - sq = 2$ , obtemos  $sq = 0$ , que é impossível pois  $s \neq 0$  e  $q \neq 0$

Reunindo os resultados obtidos em (5.53), (5.57) e (5.58), temos os seguintes valores, em termos de  $q$ :

$$s = \frac{2}{q}, \quad (5.63)$$

$$b = q[2(q+2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.64)$$

$$c = (q+4)[2(q+2)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.65)$$

De (5.63) e (5.64), substituídos em (5.50), obtemos a solução:

$$U(z) = \left(1 + a \exp\left(q[2(q+2)]^{-\frac{1}{2}}z\right)\right)^{\left(-\frac{2}{q}\right)}. \quad (5.66)$$

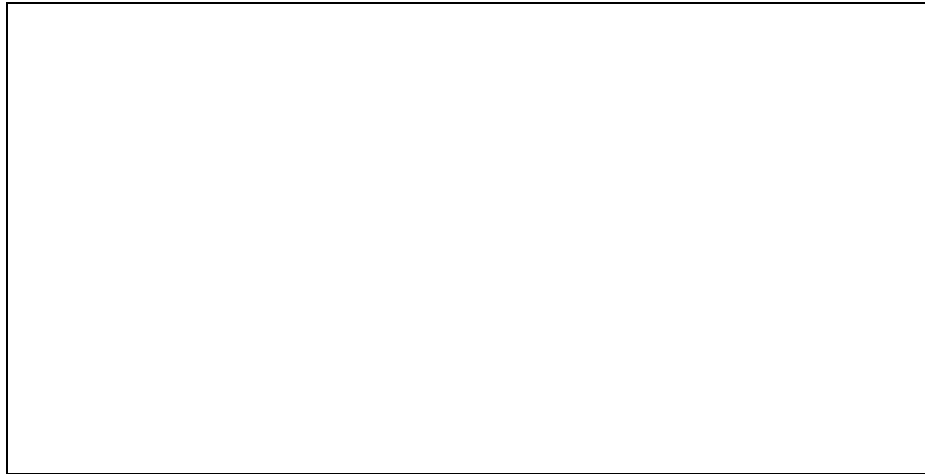


Figura 5.10: Gráfico de  $U(z)$ , dado por (5.66), com  $a = 1$  e  $q = 2$ .

No caso particular de  $q = 2$ , obtém-se de (5.63) e (5.64) os valores  $s = 1$ ,  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e de (5.49), impondo  $U(0) = \frac{1}{2}$ , temos que  $a = 1$ ; na figura 5.10,

traçamos a solução  $U(z)$  correspondente. A velocidade  $c(q)$  neste caso é obtida a partir de (5.65), o que fornece  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . Como  $q > 0$ , observamos que a velocidade da onda  $c$  dada por (5.65), que para  $q = 0$  fornece o valor  $c = 2$ , é uma função crescente de  $q$ . Apresentamos seu gráfico na figura 5.11.

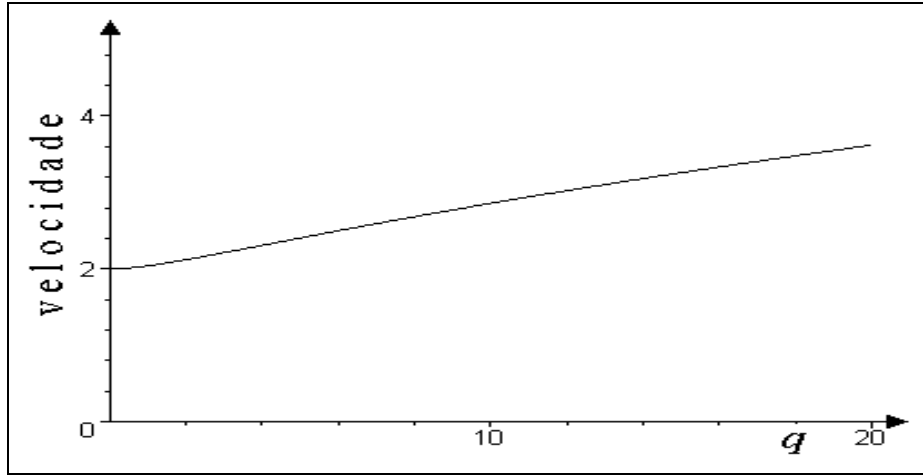


Figura 5.11: Gráfico da função  $c(q)$ , determinada em (5.65).

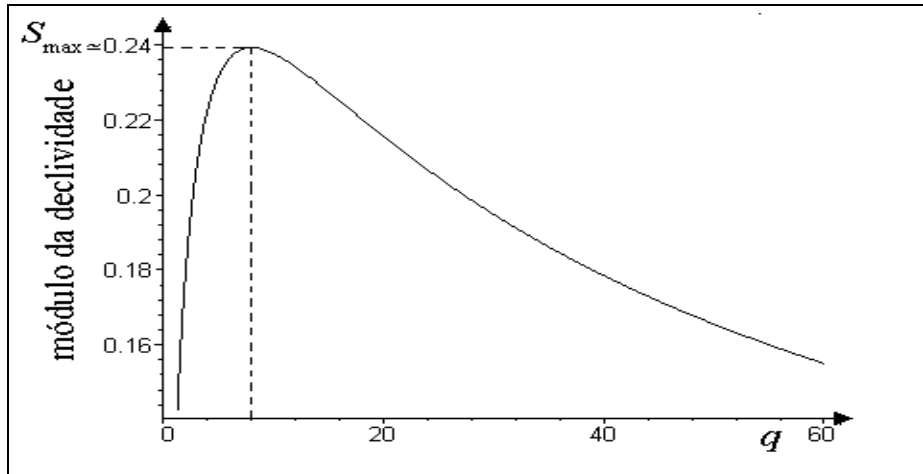


Figura 5.12: Representação gráfica do módulo da declividade, dada pela equação (5.69); o ponto de máximo determina  $S_{\max} \simeq 0.24$  em  $q \simeq 8.07$ .

Uma medida da declividade  $S$  da frente de onda  $U(z)$ , de acordo com o que estabelecemos na seção 3.4 é obtida pelo módulo do valor do gradiente de  $U(z)$  no ponto de inflexão  $z_i$ ; este, por sua vez, é calculado a partir de  $U''(z) = 0$ , de



(5.51), donde obtemos:

$$z_i = -b^{-1} \ln(as). \quad (5.67)$$

Portanto,

$$S = |U'(z_i)| = \frac{b}{\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}}. \quad (5.68)$$

Podemos obter  $S$  em função de  $q$ , substituindo  $b$  e  $s$  em (5.68), de acordo com (5.64) e (5.63), respectivamente, como segue:

$$S = \frac{\frac{q}{2}}{\left(1 + \frac{q}{2}\right)^{\frac{3}{2} + \frac{2}{q}}}, \quad (5.69)$$

cujo gráfico é apresentado na figura 5.12. Observamos que a curva apresenta um ponto de declividade em módulo máxima que pode ser calculado a partir da condição  $\frac{dS}{dq} = 0$ ; o valor aproximado obtido numericamente nos leva a  $S_{\max} \simeq 0.24$  que corresponde a  $q \simeq 8.07$ . O exemplo apresentado na figura 5.10 corresponde a  $q = 2$ , e portanto  $S = \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

Para o caso particular onde, além de  $m = 0$  e  $p = 1$ , temos  $q = 1$ , a equação (5.44) recai na equação de Fisher (3.18). Substituindo  $q = 1$  nas equações (5.63), (5.64) e (5.65) obtemos  $s = 2$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$  e  $c = \frac{5}{\sqrt{6}}$ , respectivamente. O valor da constante arbitrária  $a$ , tal que a condição  $U(0) = \frac{1}{2}$  seja satisfeita, é obtido a partir de (5.49), com  $s = 2$ , donde concluímos que  $a = \sqrt{2} - 1$ . Assim, temos a seguinte solução analítica exata do tipo onda viajante:

$$U(z) = \frac{1}{\left[1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{z}{\sqrt{6}}}\right]^2} \quad (5.70)$$

Sua declividade, obtida de (5.69), é  $S = \frac{\sqrt{2}}{8} \simeq 0.17$ . Na figura 5.13, esta solução com velocidade  $c = \frac{5}{\sqrt{6}} \simeq 2.04$ , é comparada com a solução assintótica (3.81), que obtivemos no capítulo 3, até a ordem 1 em  $\epsilon \equiv \frac{1}{c^2}$ , ou seja

$$u(z, c) = (1 + e^{\frac{z}{c}})^{-1}, \quad c \geq 2. \quad (5.71)$$

A declividade  $S$  de (5.71), dada por (3.82), é  $S = \frac{1}{4c}$ , que para  $c \geq 2$  fornece  $S \leq 0.125$ , possibilitando soluções muito menos íngremes do que aquela que obtivemos em (5.70). Esse exemplo ressalta um dos sérios problemas que podem ocorrer com

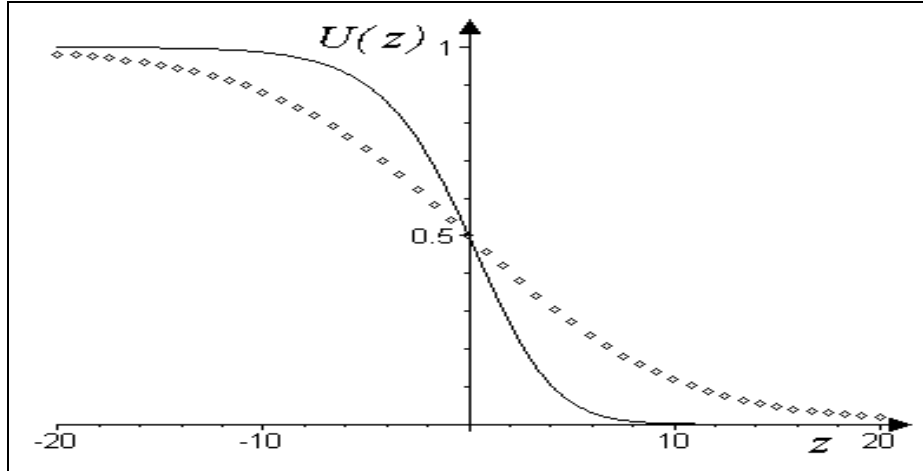


Figura 5.13: Solução analítica do tipo onda viajante dada por (5.70) (linha contínua); solução assintótica dada por (3.81), até a ordem 1, para  $c = 5 > 2$  (linha pontilhada).

tais soluções exatas, quando nos referimos anteriormente a “ciladas” escondidas. Frequentemente, elas não determinam todas as soluções possíveis e podem, de fato, não fornecer nem sequer a mais relevante, como é o caso aqui. Para analisar a solução da equação diferencial (5.46) adequadamente deve ser feita uma cuidadosa análise no plano de fase.

## 2) Caso $m = 0$ e $p = q + 1$ , $q > 0$

Nesse caso, a equação (5.43) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^{q+1}(1 - u^q) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.72)$$

Usando a forma de onda viajante de (3.25),

$$u(x, t) = U(z), \quad \text{onde} \quad z = x - ct \quad (5.73)$$

obtem-se

$$U'' + cU' + U^{q+1}(1 - U^q) = 0 \quad (5.74)$$

onde as linhas denotam as derivadas em relação a  $z$ . Substituindo as igualdades (5.50) e (5.51), obtemos

$$(1 + ae^{bz})^{-s-2} \{ [sb - c]a^2bse^{2bz} - [b + c]abse^{bz} + (1 + ae^z)^{2-sq} + \quad (5.75)$$

$$- (1 + ae^{bz})^{2-2sq} \} = 0 \quad (5.76)$$

ou ainda,

$$(1 + ae^{bz})^{-s-2} \{ a^2e^{2bz} [b^2s^2 - csb] + ae^{bz} (-sb^2 - cbs) + \quad (5.77)$$

$$+ (1 + ae^{bz})^{-sq+2} - (1 + ae^{bz})^{-2sq+2} \} = 0.$$

Consideremos 2 possibilidades para o expoente  $-2sq + 2$  do último termo nas chaves acima:

- $-2sq + 2 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{q}$ , os dois últimos termos reduzem-se a  $(1 + ae^{bz}) - 1 = ae^{bz}$ ; portanto, igualando a zero a soma dos coeficientes de  $\exp(bz)$ , bem como a soma dos coeficientes de  $\exp(2bz)$ , obtemos respectivamente:

$$-sb^2 - csb + 1 = 0 \quad (5.78)$$

$$+s^2b^2 - csb = 0 \quad (5.79)$$

De (5.79):  $csb = s^2b^2$ , que substituído em (5.78) fornece:

$$-sb^2 - s^2b^2 = -1, \quad (5.80)$$

isto é

$$b^2 = \frac{1}{s^2 + s} \quad (5.81)$$

Como  $s = \frac{1}{q}$ , temos:

$$b^2 = \frac{q^2}{1 + q} \quad (5.82)$$

donde

$$b = \frac{q}{\sqrt{1 + q}} \quad (5.83)$$

e de (5.79), a velocidade da onda é

$$c = bs = \frac{q}{\sqrt{1 + q}} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{1 + q}} \quad (5.84)$$

- $-2sq + 2 = 2 \Rightarrow sq = 0$  o que não é possível porque  $s$  e  $q$  são constantes positivas não nulas.

### (3) Caso $\mathbf{m = p = q = 1}$

Sendo  $m = p = q = 1$ , a equação (5.42)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^p(1 - u^q) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5.85)$$

torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5.86)$$

cuja solução é a mais útil e interessante, porque este é o modelo de difusão dependente da densidade com crescimento logístico de população  $u(1 - u)$ . Fisicamente, esse modelo implica que a população quando está excessiva dispersa mais rapidamente para regiões de menor densidade, devido ao coeficiente de difusão  $D = u$ . A solução descrita, a seguir, foi deduzida por Aronson (1980) e Newman (1980) [Murray (1989)].

Vamos procurar uma solução do tipo onda viajante para (5.86) da forma

$$u(x, t) = U(z) \quad \text{onde} \quad z = x - ct. \quad (5.87)$$

Substituindo na equação diferencial as derivadas parciais decorrentes de (5.87), indicadas em (2.54), obtém-se para  $U(z)$  a equação diferencial ordinária:

$$(UU')' + cU' + U(1 - U) = 0, \quad (5.88)$$

ou ainda

$$UU'' = -(U')^2 - cU' - U(1 - U). \quad (5.89)$$

Considerando  $U' = V$ , temos o seguinte sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} U' &= V \\ UV' &= -V^2 - cV - U(1 - U). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Existe uma singularidade em  $U = 0$ , na segunda equação do sistema (5.90). Esta singularidade será removida definindo uma nova variável  $\zeta$ , tal que

$$U \frac{d}{dz} = \frac{d}{d\zeta}. \quad (5.91)$$

Isso remove a singularidade de (5.90) e o novo sistema é da forma

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\zeta} &= UV \\ \frac{dV}{d\zeta} &= -cV - V^2 - U(1 - U). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Como o sistema (5.92) é não linear e não tem solução sob forma fechada, vamos analisar as soluções perto dos estados estacionários. Os pontos singulares são obtidos resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} UV &= 0 \\ -cV - V^2 - U(1 - U) &= 0. \end{aligned} \quad (5.93)$$

e os pontos encontrados são

$$\begin{aligned} (U_{est}, V_{est})_1 &= (0, 0), \\ (U_{est}, V_{est})_2 &= (1, 0), \\ (U_{est}, V_{est})_3 &= (0, -c). \end{aligned}$$

Vamos analisar a estabilidade de cada um destes pontos, a partir da linearização do sistema (5.92) em torno de  $(U_{est}, V_{est})$ , como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta}(U(\zeta) - U_{est}) &= V_{est}(U - U_{est}) + U_{est}(V - V_{est}) \\ \frac{d}{d\zeta}(V(\zeta) - V_{est}) &= (-1 + 2U_{est})(U - U_{est}) + (-c - 2V_{est})(V - V_{est}), \end{aligned} \quad (5.94)$$

que matricialmente se escreve:

$$\begin{bmatrix} \frac{dU}{d\zeta} \\ \frac{dV}{d\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{est} & U_{est} \\ -1 + 2U_{est} & -c - 2V_{est} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(\zeta) - U_{est} \\ V(\zeta) - V_{est} \end{bmatrix}. \quad (5.95)$$

Analisaremos a matriz jacobiana

$$\mathbf{A}(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = \begin{bmatrix} V_{\text{est}} & U_{\text{est}} \\ -1 + 2U_{\text{est}} & -c - 2V_{\text{est}} \end{bmatrix},$$

para cada um dos pontos estacionários, separadamente.

a) **Perto de  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})_1 = (0, 0)$**

A matriz jacobiana associada ao ponto crítico  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})_1 = (0, 0)$  é:

$$\mathbf{A}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -c \end{bmatrix}.$$

Trata-se de uma matriz singular, cujos autovalores  $\lambda_i (i = 1, 2)$  são as raízes do determinante característico:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 \\ -1 & -(c + \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

donde obtemos

$$\lambda_1 = 0 \tag{5.96}$$

$$\lambda_2 = -c. \tag{5.97}$$

A presença de um autovalor nulo está associado com o fato de que, neste caso, o sistema linearizado:

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\zeta} = 0 \\ \frac{dV}{d\zeta} = -U - cV \end{cases} \tag{5.98}$$

possui um número infinito de pontos críticos, não isolados, ao longo da reta  $V = -\frac{U}{c}$  e, neste caso, a linearização não é conclusiva. Resolvendo numericamente o sistema, observamos que o ponto  $(0, 0)$  é um nodo não linear estável.

b) **Perto de  $(U_{est}, V_{est})_2 = (1, 0)$**

A matriz jacobiana associada ao ponto crítico  $(U_{est}, V_{est})_2 = (1, 0)$  é

$$\mathbf{A}(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{bmatrix}$$

cujos autovalores  $\lambda_i (i = 1, 2)$ , são as raízes do determinante característico determinada em (3.3.1):

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 + 4}).$$

Os autovalores são reais e de sinais opostos e, portanto,  $(1, 0)$  é um ponto de sela. O autovetor correspondente ao autovalor positivo, isto é,  $\lambda_1 = -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4}$ , é

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.99)$$

O autovetor correspondente ao autovalor negativo,  $\lambda_2 = -\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4}$ , é o autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.100)$$

Estes autovetores são os mesmos obtidos em (3.42) e em (3.44), onde tínhamos a mesma matriz jacobiana  $\mathbf{A}(1, 0)$ . Assim sendo, a solução para o sistema não linear (5.92) é dada, perto de  $(1, 0)$ , aproximadamente por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &\rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 z^*) + \\ &+ B_2 \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_2 z^*). \end{aligned} \quad (5.101)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são constantes arbitrárias, que dependem das condições iniciais e de contorno do problema dado.

c) **Perto de**  $(\mathbf{U}_{est}, \mathbf{V}_{est})_3 = (0, -c)$

A matriz jacobiana associada ao ponto crítico  $(U_{est}, V_{est})_3 = (0, -c)$  é

$$\mathbf{A}(0, -c) = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ -1 & c \end{bmatrix}$$

cujos autovalores  $\lambda_i (i = 1, 2)$ , são as raízes do determinante característico:

$$\begin{vmatrix} -c - \lambda & 0 \\ -1 & c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

de onde obtemos:

$$\lambda_1 = c$$

$$\lambda_2 = -c.$$

Os autovalores são reais e de sinais opostos e, portanto,  $(0, -c)$  é um ponto de sela.

O autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

correspondente a  $\lambda_1 = c$  é obtido resolvendo o sistema

$$(\mathbf{A}(0, -c) - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}) \cdot \vec{\epsilon}^{(1)} = 0, \quad (5.103)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 2. Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} -c - \lambda_1 & 0 \\ -1 & c - \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.104)$$

temos

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.105)$$

De maneira análoga, determinamos o autovetor

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5.106)$$



correspondente a  $\lambda_2 = -c$ :

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.107)$$

A solução para o sistema não linear (5.92) é dada, perto de  $(0, -c)$ , aproximadamente por

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 z) + \quad (5.108) \\ + C_2 \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(\lambda_2 z).$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias, que dependem das condições iniciais e de contorno do problema dado.

Na tabela 5.1, apresentamos uma síntese dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$ .

A figura 5.14 mostra os autovetores  $\vec{\epsilon}^{(1)}$  e  $\vec{\epsilon}^{(2)}$  em  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (1, 0)$  e em  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, -c)$  para  $c = 2$ . Em  $(0, 0)$ , não foram traçados autovetores visto que em torno deste ponto, a linearização não foi conclusiva.

No que segue, apresentamos as diversas possibilidades de trajetórias no plano de fase, dependendo do valor de  $c$ . As trajetórias foram obtidas através do comando DEplot do *Maple*, que por sua vez usa o método numérico Runge Kutta de 4ª ordem para resolver o sistema de equações diferenciais (5.92), que é um dos dados de entrada; também foram dadas condições iniciais na forma  $[U(0) = a, V(0) = b]$ , onde  $a$  e  $b$  foram escolhidos de modo a obter uma descrição nas diversas regiões onde  $U \geq 0$ .

Estamos interessados em trajetórias do ponto  $(1, 0)$  até  $(0, 0)$  ou de  $(1, 0)$  até  $(0, -c)$  para que se tenha uma solução tipo frente de onda na qual  $U(-\infty) = 1$  e  $U(+\infty) = 0$ ; a diferença é que  $(0, 0)$  corresponde a  $U = 0$  enquanto que  $(0, -c)$  corresponde a  $U < 0$ .

$(U_{\text{est}}, V_{\text{est}})$	Autovalores da matriz jacobiana	Autovetores correspondentes	Tipo de equilíbrio
$(0, 0)$	$\lambda_1 = 0$	linearização apresenta matriz singular (pontos críticos não isolados)	linearização não é conclusiva, através da figura traçada numericamente, observamos que se trata de nodo não linear estável
	$\lambda_2 = -c$		
$(1, 0)$	$\lambda_1 = -\frac{1}{2} [c - \sqrt{c^2 + 4}] > 0$	$\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\forall c > 0,$  ponto de sela (instável)
	$\lambda_2 = -\frac{1}{2} [c + \sqrt{c^2 + 4}] < 0$	$\vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
$(0, -c)$	$\lambda_1 = c$	$\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\forall c > 0$  ponto de sela (instável)
	$\lambda_2 = -c$	$\vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$	

Tabela 5.1: *Resumo dos resultados da análise de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, 0)$ ,  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (1, 0)$  e  $(U_{\text{est}}, V_{\text{est}}) = (0, -c)$*

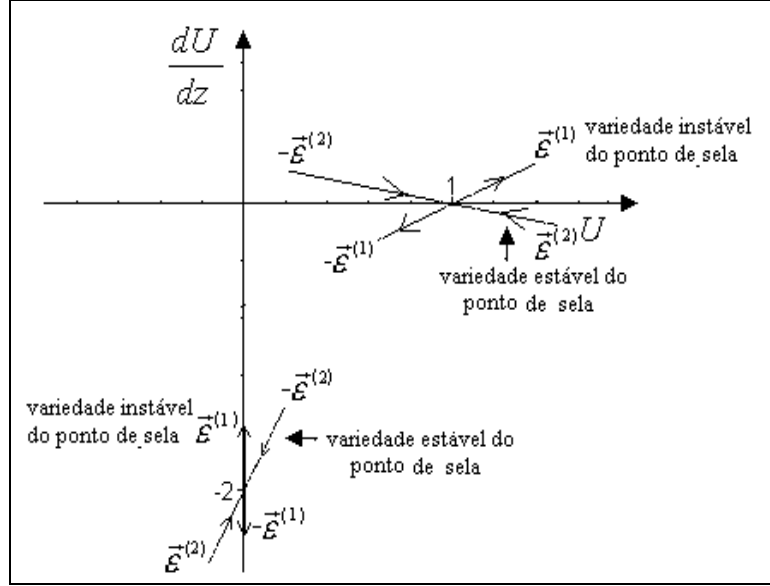


Figura 5.14: Autovetores em  $(U_{est}, V_{est}) = (1, 0)$ , e  $(U_{est}, V_{est}) = (0, -c)$ , no plano de fase  $UV$ , para  $c = 2$ .

Podemos ter a possibilidade de uma onda com a tangente descontínua em um ponto específico  $z_c$ , como aquela que temos na figura(5.3), tal que  $U \equiv 0$  para todo  $z \geq z_c$ . Isto corresponde a uma trajetória no plano de fase que vem de  $(1,0)$  até um ponto sobre o eixo  $U = 0$  para algum valor negativo de  $V$  (não nulo). Se  $0 < c < c_{\min}$  não existe uma trajetória possível de  $(1,0)$  para  $U = 0$ , exceto uma trajetória não realística para  $V$  infinito (figura 5.15).

Quando  $c$  aumenta existe um valor de bifurcação  $c_{\min}$  para o qual existe uma única trajetória de  $(1,0)$  até  $(0, -c_{\min})$  (figura 5.16). Isto significa que na frente de onda  $z_c$ , onde  $U = 0$ , existe uma descontinuidade na derivada, a qual vem de  $V = U' = -c_{\min}$  para  $U' = 0$  e  $U = 0$  para todo  $z > z_c$  (figura 5.18).

Quando  $c$  aumenta além de  $c_{\min}$ , existe sempre uma trajetória de  $(1,0)$  a  $(0,0)$ , mas agora a solução tipo onda viajante tem  $U \rightarrow 0$  e  $U' \rightarrow 0$ , quando  $z \rightarrow \infty$  (figuras 5.17 e 5.18(b)).

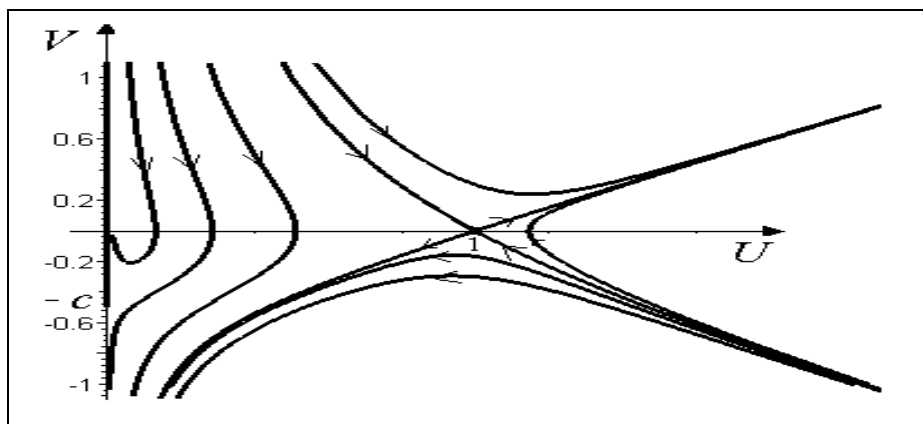


Figura 5.15: Plano de fase  $UV$  mostrando que não existe uma trajetória possível de  $(1,0)$  até  $U = 0$ , para algum valor de  $V$  negativo finito quando  $0 < c = 0.5 < c_{\min}$ .

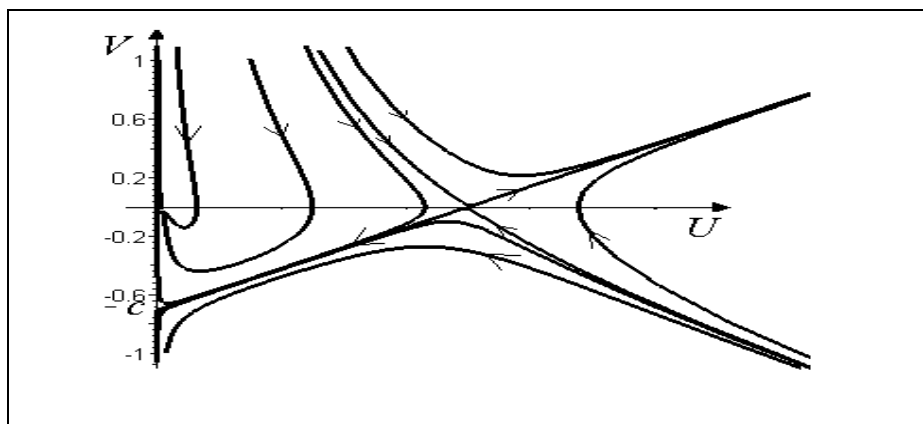


Figura 5.16: Plano de fase  $UV$  mostrando que existe uma trajetória possível de  $(1,0)$  até  $(0, -c_{\min})$ ,  $c_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , de acordo com a equação (5.113).

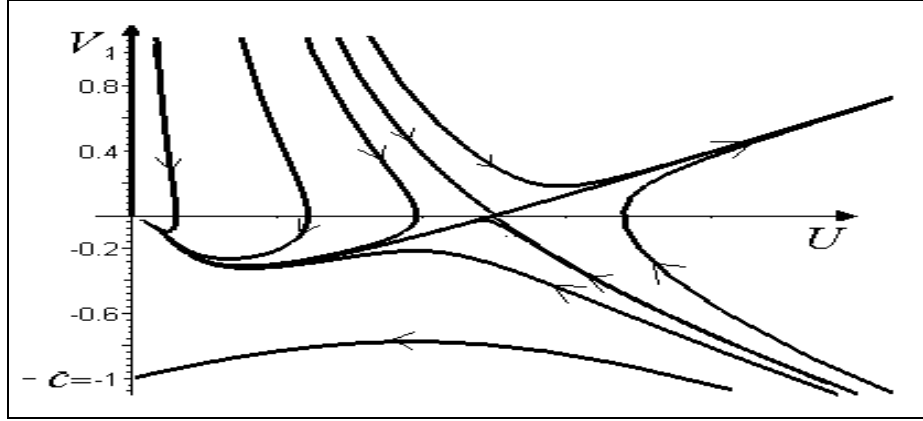


Figura 5.17: Solução do tipo onda viajante de  $U = (1, 0)$  para  $U = (0, 0)$ ;  
 $c = 1 > c_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Para estimar a solução exata, a trajetória que conecta  $(1, 0)$  a  $(0, -c)$  na figura 5.16 é de fato uma reta de equação

$$V = -c_{\min}(1 - U) \quad (5.109)$$

com o valor de  $c_{\min}$  apropriado. Para  $U(z)$ , tal trajetória deve satisfazer as condições  $U(-\infty) = 1$  e  $U = 0$  para  $z \geq z_c$ .

Em outras palavras, esta é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dV}{dU} = \frac{-cV - V^2 - U(1 - U)}{UV}, \quad (V \neq 0 \text{ e } U \neq 0) \quad (5.110)$$

obtida a partir de (5.92), tal que (5.109) seja satisfeita.

Substituindo (5.109) em (5.110), sendo  $c = c_{\min}$ , obtemos, para  $U \neq 0$  e  $U \neq 1$ ,

$$c_{\min} = \frac{c_{\min}^2(1 - U) - c_{\min}^2(1 - U)^2 - U(1 - U)}{-Uc_{\min}(1 - U)}, \quad (5.111)$$

donde concluímos que

$$c_{\min}^2 = \frac{1}{2}, \quad (5.112)$$

ou ainda,

$$c_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.113)$$

que substituindo em (5.109), fornece

$$V = -\frac{(1-U)}{\sqrt{2}}. \quad (5.114)$$

Como  $U' = V$ , então

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{1-U}{\sqrt{2}}, \quad (5.115)$$

e

$$\frac{dU}{1-U} = -\frac{1}{\sqrt{2}}dz \quad (5.116)$$

Resolvendo a equação diferencial, temos

$$-\ln(1-U) + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \ln K \quad (5.117)$$

Sendo  $U(z_c) = 0$ , então

$$\frac{1}{\sqrt{2}}z_c = \ln K \quad (5.118)$$

que substituído em (5.117) resulta

$$-\ln(1-U) + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \frac{z_c}{\sqrt{2}}, \quad (5.119)$$

ou ainda,

$$U(z) = 1 - \exp\left[\frac{z - z_c}{\sqrt{2}}\right], \quad \text{para } z < z_c \quad (5.120)$$

que satisfaz  $U(-\infty) = 1$  e  $U(z_c) = 0$ . A solução geral é da forma

$$U(z) = \begin{cases} 1 - \exp\left[\frac{z - z_c}{\sqrt{2}}\right], & z < z_c \\ 0, & z \geq z_c, \end{cases} \quad (5.121)$$

onde  $z_c$  é o ponto frontal da onda.

Na solução (5.121), cujo gráfico é apresentado na figura 5.18(a), a frente de onda vai a zero, abruptamente em  $z = z_c$ , e para valores maiores que  $z_c$ ,  $U(z)$  é nulo. A trajetória correspondente no plano de fase foi apresentada na figura 5.16. Na figura 5.18(b), temos uma frente de onda viajante, cujo gráfico foi feito usando a solução do tipo onda viajante,

$$U(z) = (1 + ae^{bz})^{-1} \quad (5.122)$$

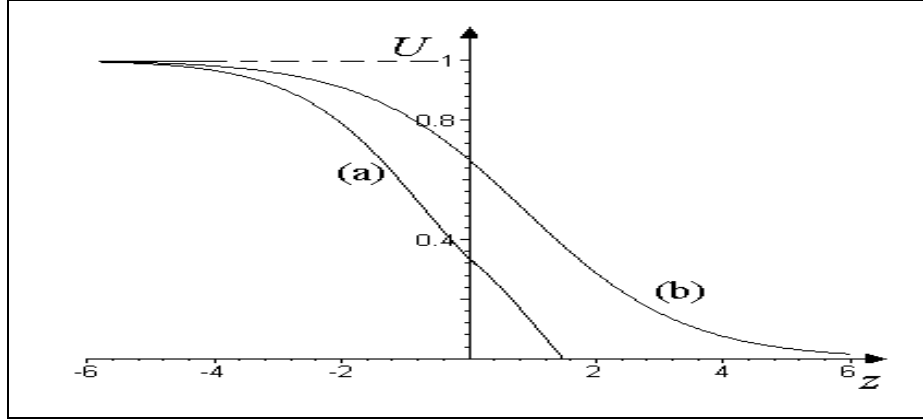


Figura 5.18: Solução do tipo onda viajante de  $U = 1$  para  $U = 0$ , sendo  $a = 0.08$  e  $b = 2$ . A solução (5.121), em (a), correspondente à figura 5.16, tem uma derivada descontínua na borda frontal, em  $z_c = \sqrt{2}$ ; a solução (5.122), em (b), corresponde à figura 5.17.

correspondente à trajetória no plano de fase apresentado na figura 5.17.

Esta análise, mostrando a existência de ondas viajantes, pode ser estendida a casos mais gerais em que o coeficiente de difusão é  $u^m$ , para  $m \neq 0$  e  $m \neq 1$ , ou até para  $D(u)$  mais geral, desde que satisfaça certos critérios [Murray (1989)].

A seguir, trataremos de modelos com coeficiente de difusão dependente do tempo. Primeiramente, citaremos o modelo de Banks e Kareiva, que introduziram um modelo com coeficiente de difusão variando espacialmente e temporalmente, e a partir daí, desenvolveremos nosso estudo com modelos que possuem coeficientes que variam temporalmente.

## 6 UMA EQUAÇÃO DO TIPO REAÇÃO-DIFUSÃO COM COEFICIENTE DE DIFUSÃO $D$ DEPENDENTE DO TEMPO

Exemplificamos no capítulo 4, modelos de difusão com coeficiente constante e no capítulo 5, com coeficiente de difusão dependente da densidade populacional. Agora, vamos nos referir a modelos com coeficiente de difusão variando no tempo, isto é,  $D$  é uma função de  $t$ . Nesse caso, a equação da difusão para  $u = u(x, t)$ , em uma dimensão, torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.1)$$

Se o coeficiente de difusão for dependente do tempo  $t$ , isto é,  $D$  é função da variável  $t$ , mas independente de outras variáveis, podemos definir uma nova variável independente  $T$  através de:

$$dT = D(t)dt, \quad (6.2)$$

isto é,

$$T = \int_0^t D(t')dt', \quad (6.3)$$

fornecendo uma relação entre  $T$  e  $t$  que depende da forma de  $D(t)$ . Visto que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T} \cdot D(t), \quad (6.4)$$

obtemos, a partir da equação diferencial (6.1),

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.5)$$

que é uma equação diferencial igual à equação da difusão (2.46) com coeficiente de difusão  $D = 1$ , para  $u(x, T)$ .

Se a condição inicial para  $u(x, T = 0)$  for  $u(x, 0) = u_0 \delta(x - x_0)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , onde  $u_0$  denota o número total de indivíduos no tempo  $T = 0$ , concentrados



inicialmente em  $x = x_0$  e espalhando-se em um espaço unidimensional ilimitado, então podemos escrever:

$$u(x, T) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi T}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4T} \right]. \quad (6.6)$$

Assim, as soluções para  $D$  constante podem ser usadas para  $u(x, T)$  como função de  $x$  e  $T$  e depois, passa-se de  $T$  para  $t$  através da equação (6.3), que depende da forma de  $D(t)$ . Se a integral em (6.3) não puder ser calculada formalmente, a relação entre  $T$  e  $t$  deverá ser obtida graficamente ou por integração numérica [Crank (1975)].

Por exemplo, se  $D(t) = D_0 e^{-t}$ , onde  $D_0$  é o valor inicial de  $D$  em  $t = 0$ , isto é,  $D_0 = D(0)$ , obtemos de (6.3):

$$T = \int_0^t D_0 e^{-t'} dt' = D_0(1 - e^{-t}). \quad (6.7)$$

e a solução do problema do valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_0 e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) &= u_0 \delta(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

é dada por

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi D_0(1 - e^{-t})}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4D_0(1 - e^{-t})} \right]. \quad (6.8)$$

Representamos graficamente, na figura 6.1, o comportamento do coeficiente de difusão  $D(t) = D_0 e^{-t}$ , com  $D_0 = 0.3$ , e observamos que ele cai a zero rapidamente. Na figura 6.2 representamos a solução (6.8), no plano  $(x, u)$  para  $D = 0.3$  em diversos tempos  $t_1 = 1 < t_2 = 3 < t_3 = 5 < t_4 = 8 < t_5 = 10$ , os mesmos valores de tempo figura 2.8. Observamos que para  $D = D(t)$  a população  $u$  dispersa-se à medida que o tempo passa, porém interrompe esse procedimento, aproximadamente, em  $t = 5$ . Para tempos maiores que este valor, o comportamento da solução é igual ao comportamento observado em  $t = 5$ . Isto está de acordo com a figura 6.1 que, em  $t = 5$ , apresenta  $D(t)$  aproximadamente zero.

As figuras 2.8 e 6.2 representam graficamente a solução da equação da difusão sem termo de fonte, num espaço unidimensional ilimitado; a primeira para

um coeficiente de difusão constante,  $D = 0.3$  e a segunda para um coeficiente de difusão dependente do tempo, dado em (6.10). Sabemos que as soluções dependem da forma de  $D(t)$ . Assim sendo, se compararmos os dois casos, concluímos que, para o coeficiente de difusão constante, o espalhamento prossegue, à medida que o tempo passa, ao contrário do que ocorre para o coeficiente de difusão dependente do tempo, em que  $D(t)$  cai exponencialmente com o tempo, levando à dispersão quase nula, após certo tempo.

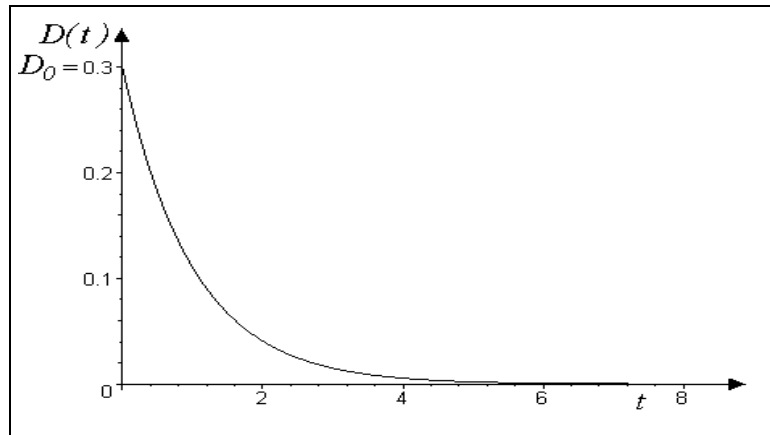


Figura 6.1: Gráfico de  $D(t) = D_0 e^{-t}$ , para  $D_0 = 0.3$ .

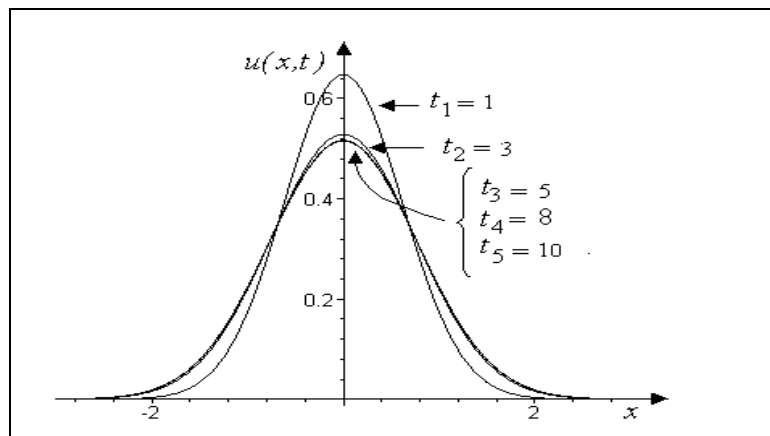


Figura 6.2: Representação da solução (6.8) no plano  $(x, u)$ , em diversos tempos  $t$  para  $D_0 = 0.3$ ,  $u_0 = 1$  e  $x_0 = 0$ .

Agora, compararemos o modelo de difusão com o mesmo  $D(t)$  usado anteriormente e um modelo de difusão com coeficiente constante igual à metade do anterior, isto é,  $D = 0.15$ . Analisando as figuras 6.2 e 6.4, observamos que para o tempo  $t = 1$ , a dispersão é maior para o coeficiente de difusão dependente do tempo  $D(t)$ , entretanto, à medida que o tempo passa, o modelo com coeficiente constante produz um maior espalhamento da população. Isto se justifica pela forma do coeficiente de difusão, isto é, enquanto um coeficiente decai exponencialmente, à medida que o tempo passa, o outro se mantém constante, conforme as figuras 6.1 e 6.3.

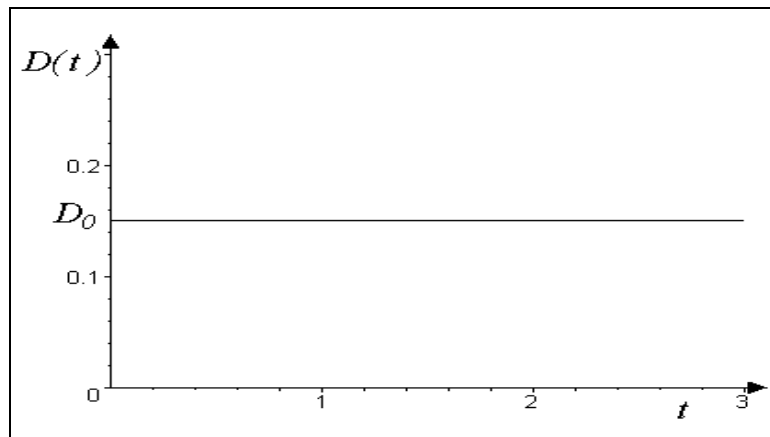


Figura 6.3: Gráfico de  $D(t)$  constante igual a  $D_0$ , para  $D_0 = 0.15$ .

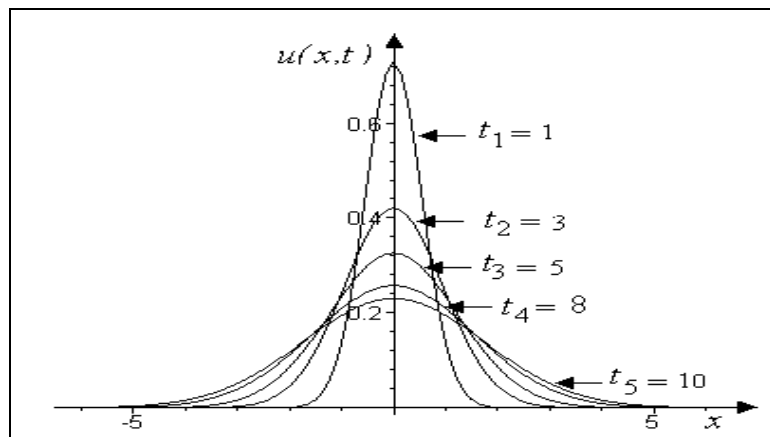


Figura 6.4: Representação da solução da equação (2.42) no plano  $(x, u)$ , em diversos tempos  $t$  para  $D = 0.15$ .

Crank (1975) apresenta um problema que envolve a equação da difusão com coeficiente de difusão de partículas  $D(t) = D_0 e^{-t}$  e com um termo de fonte que decai exponencialmente com o tempo:  $\alpha e^{\alpha t}$ , isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), \quad (6.9)$$

onde

$$D(t) = D(0) e^{-t}, \quad (6.10)$$

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}. \quad (6.11)$$

Se, além da definição da variável  $T$  através de (6.7), definimos uma nova variável dependente através de

$$q = 1 - e^{-\alpha t} - u, \quad (6.12)$$

a equação diferencial (6.9) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (6.13)$$

para  $q(x, T)$ .

Supondo que  $u_0$  partículas sejam liberadas no tempo  $t = 0$ , em  $x = x_0$ , a condição inicial é dada por

$$u(x, 0) = u_0 \delta(x - x_0), \quad (6.14)$$

Usando (6.12), a condição inicial para  $q(x, T)$  é:

$$q(x, 0) = -u_0 \delta(x - x_0), \quad (6.15)$$

e portanto a solução de (6.13) é

$$q(x, T) = -\frac{u_0}{\sqrt{4\pi T}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4T} \right]. \quad (6.16)$$

Por outro lado, de (6.7), temos  $T = D_0(1 - e^{-t}) = D_0 - D(t)$ , que nos permite voltar à variável inicial  $t$ , como segue:

$$q(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{4\pi(D(0) - D(t))}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4(D_0 - D(t))} \right], \quad (6.17)$$

e que, substituído em (6.12), fornece:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi D_0(1 - e^{-t})}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4D_0(1 - e^{-t})} \right] + 1 - \exp(-\alpha t) \quad (6.18)$$

As equações diferenciais que estudaremos neste capítulo têm todas a forma da equação (3.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (6.19)$$

onde  $f(u)$  é tem um termo de decaimento  $-\alpha u$ , ou um termo de crescimento logístico, isto é,  $ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)$ .

Consideraremos, também, as possibilidades de que os coeficientes de difusão e do termo de decaimento variem temporalmente, isto é,  $D = D(t)$  e  $\alpha = \alpha(t)$ . As funções que usaremos para esses coeficientes serão obtidas através do ajuste de curvas, a partir dos pontos oriundos dos experimentos feitos por Banks e Kareiva (1983), conforme relataremos a seguir.

## 6.1 Estimativa de Parâmetros a Partir de Dados Experimentais [Banks *et al* (1985)]

Numerosos sistemas biológicos têm sido modelados por equações de transporte e estes modelos têm tido um importante papel na Biologia Matemática. As equações de transporte têm sido usadas com dados experimentais, em biologia, tanto em estudos de evolução quanto de populações. Uma conexão entre modelo e dados experimentais pode ser facilitada por esquemas de identificação de parâmetros, isto é, algoritmos que geram os parâmetros num modelo de modo a estabelecer o melhor ajuste entre as previsões do modelo e os dados observados.

Existe uma ampla literatura em estimativa e identificação de parâmetros em problemas governados por equações diferenciais parciais. Por vários anos, desenvolveram-se algoritmos para a identificação de parâmetros em equações de transporte. Trabalhos recentes, voltados para modelagem de dispersão de insetos,

têm usado dados experimentais de liberação de insetos marcados e posteriormente recapturados (mark-recapture data).

Para justificar o uso de um modelo unidimensional, Banks e Kareiva (1983) observaram o movimento de besouros, em faixas de terra cultivadas de 1 m x 80 m. Não existindo outras plantas das quais os besouros poderiam se alimentar, além destes arranjos lineares, seu movimento local era confinado a pequenos saltos num sentido e noutro, em cada arranjo linear. Os insetos marcados eram liberados no ponto médio de cada arranjo linear, no início do experimento, e durante três dias, eram coletados os dados a respeito da dispersão destes insetos ao longo de cada arranjo linear. Usando um modelo que contemplava variação espacial no coeficiente de dispersão, Banks e Kareiva constataram que modelos de transporte com movimento orientado (variação espacial no movimento convectivo) se ajustavam consideravelmente melhor do que aqueles com difusão passiva. Permitindo variação espacial nos coeficientes da equação de transporte, descrevendo mecanismos de difusão, de convecção e além de fonte ou sumidouro, a equação tem a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(V(x)u) - \alpha(x)u + f(x, \beta), \quad (6.20)$$

$$t \in (0, T], \quad x \in (0, 1).$$

Para o movimento de insetos, foi constatado ajuste satisfatório apenas para períodos curtos (de um ou dois dias), e os sucessos deste modelo foram contrabalançados por falhas na descrição do movimento dos insetos, no curso de três dias.

Posteriormente, Banks *et al* (1985) levantaram a hipótese de que tais modelos haviam falhado, em algumas casos, por causa da ausência de variação temporal nos parâmetros que representaram taxas de movimento e migração de insetos.

Motivados pela variação temporal aparente nos experimentos sobre mobilidade de insetos, e reconhecendo que variação temporal é uma característica geral do processo biológico, Banks *et al* (1985) consideraram modelos de dispersão de insetos, a partir da equação de transporte, com parâmetros que variam temporalmente,

bem como espacialmente, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (V(x, t)u) - \alpha(x, t)u + f(x, t, \beta), \quad (6.21)$$

$$t \in (0, T], \quad x \in (0, 1),$$

onde  $u$  é a densidade populacional de besouros marcados e liberados,  $x$  é o espaço reescalado, no qual o intervalo de  $[0,1]$  corresponde ao intervalo real de 100 m,  $D(x, t)$  é o coeficiente de difusão,  $V(x, t)$  é o coeficiente de convecção,  $\alpha(x, t)$  representa uma taxa de decaimento, devido à morte e migração e a função perturbação  $f(x, t, \beta)$  que envolve um parâmetro  $\beta$  e representa qualquer agente externo, como por exemplo o vento.

Neste problema, consideram-se condições de contorno homogêneas:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (6.22)$$

e condição inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \quad \text{para todo } x \neq 0.5 \\ u(0.5, 0) = n, \quad \text{onde } n \text{ é o número de besouros marcados que foram liberados no} \\ \quad \text{ponto médio de cada arranjo linear no início do experimento.} \end{array} \right.$$

As condições de contorno  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  foram justificadas pelo fato de que menos de 1% dos besouros marcados atingiram as extremidades dos arranjos cultivados ( $x = 0.1$  e  $x = 0.9$ ) e porque não havia alimento para sustentar os besouros fora dos arranjos lineares.

Os dados experimentais eram observações de  $u$  (densidade de insetos) em estações distribuídas regularmente entre  $x=0.2$  e  $x=0.8$ .

De fato, Banks *et al* (1985) desenvolveram algoritmos de estimação numérica para determinar os coeficientes dependentes do tempo envolvidos no modelo unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha(t)u, \quad (6.23)$$

de modo a otimizar o ajuste com os dados experimentais, sendo  $u(x, t)$  a densidade da população de insetos, mais precisamente, besouros, por unidade de comprimento, marcados para o experimento e depois liberados;  $D(t)$  o coeficiente de difusão, dependente do tempo e  $\alpha(t)$  o coeficiente de decaimento.

Os autores justificam o uso da equação diferencial mais simples (6.23), ao invés de (6.21), por não ter sido observada nenhuma componente convectiva significativa (isto é,  $V(x, t) \simeq 0$ ), nem qualquer dependência espacial perceptível nos coeficientes (isto é,  $D(x, t) \simeq D(t)$  e  $\alpha(x, t) \simeq \alpha(t)$ ); por outro lado, observou-se uma acentuada dependência temporal nestes coeficientes. Além disso, a função que representa o agente externo  $f(x, t, \beta)$  é nula. Como os experimentos foram realizados em jardins cuidadosamente cultivados, sob condições controladas, não é surpreendente que se tenha uma homogeneidade espacial.

As análises subseqüentes dos dados experimentais e a equação (6.23) estão apresentados em termos de dias após a liberação dos insetos. Na verdade, os dados foram coletados em termos de horas, sendo que a atividade diária de besouros era durante um período de 8h (9a.m. - 5p.m.). Fora deste período diário, os besouros eram inativos; nem se alimentavam nem se moviam. Para explorar a hipótese da dinâmica com variação temporal, os autores examinaram a adequabilidade da equação (6.23) para descrever os dados experimentais, usando combinações diferentes de  $D$  constante,  $D$  variando com o tempo,  $\alpha$  constante e  $\alpha$  variando com o tempo.

Uma das tarefas realizadas por Banks *et al* (1985), neste trabalho, foi a de desenvolver algoritmos para a estimativa de parâmetros que variam com o espaço e também com o tempo, de modo a estabelecer um problema computacionalmente tratável. Tomando por modelo a equação diferencial parcial (6.23), com condições iniciais e condições de contorno conhecidas, a determinação dos coeficientes possivelmente variando com o tempo  $D(t)$  e  $\alpha(t)$  foi efetuada de modo a fornecer o melhor ajuste entre a dinâmica do modelo e os dados experimentais. Estes dados foram obtidos através de três experimentos distintos, diferindo um do outro quanto ao es-



$t$	$D(t)$	$\alpha(t)$
0	0.0296	0.2559
1	0.0302	0.2486
2	0.00008	0.0056
3	0.0000	0.00014

Tabela 6.1: Tabela de valores obtidos para o coeficiente de difusão  $D(t)$  e para o coeficiente de decaimento  $\alpha(t)$ , através de experimentos distintos. Dados coletados após o primeiro, segundo e terceiro dia da liberação dos insetos, num período de três dias [Banks *et al* (1985)].

paçamento entre as faixas cultivadas. Para os três, o melhor ajuste entre previsões e dados observados foi aquele correspondente a tanto  $D$  quanto  $\alpha$  variando com o tempo. Entretanto, um ajuste quase tão bom quanto este foi aquele para  $D$  constante, e apenas  $\alpha$  variando com o tempo. Por outro lado, sem variação temporal nem  $D$  nem  $\alpha$ , apenas os dados para um dia apresentaram bom ajuste [Banks *et al* (1985)]. Reproduzimos na tabela 6.1, os valores obtidos para o coeficiente de difusão  $D(t)$  e para o coeficiente de decaimento da população  $\alpha(t)$ , após o primeiro, segundo e terceiro dia subsequente à liberação dos insetos. As representações gráficas desses valores estão apresentadas nas figuras 6.5 e 6.6, respectivamente. Os pontos denotam os dados do experimento e a linha tracejada serve apenas para ligar esses pontos, não fazendo parte dos dados do experimento.

Os autores interpretaram a figura 6.6 como representando o seguinte fenômeno biológico: logo depois da liberação dos besouros, isto é, existe um pico na emigração de besouros ( $\alpha$  alto) devido à perturbação que ocorre nos besouros que foram marcados e manipulados; após um dia de atividade natural, no campo de observação, esse efeito de perturbação desaparece e cai para seu nível “natural”.

## 6.2 Formulação do Problema

Valendo-nos dos parâmetros determinados no trabalho de Banks *et al* (1985), simulamos nosso experimento, considerando a liberação de 20 insetos, em uma única posição, ou seja, no ponto médio de um canteiro de 100 m, no qual

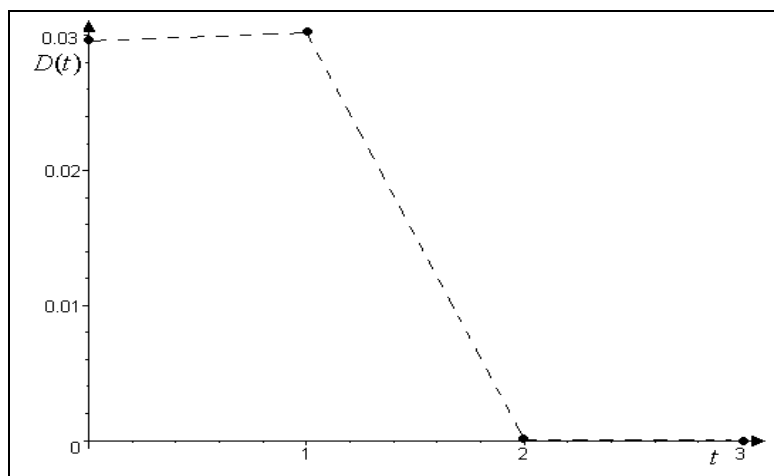


Figura 6.5: *Coeficiente de difusão dependente do tempo, determinado por Banks et al (1985).*

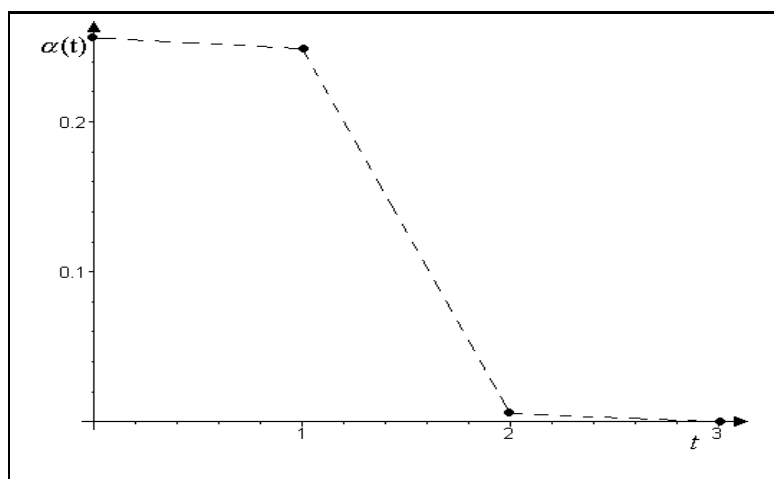


Figura 6.6: *Coeficiente de decaimento dependente do tempo, determinado por Banks et al (1985).*

a plantação desse canteiro tem a forma de um tapete uniforme. Formulamos um modelo contínuo, considerando uma única direção, a do eixo dos  $x$ , e ajustamos curvas aos valores obtidos na tabela 6.1, de tal forma que pudéssemos ter funções,  $D(t)$  e  $\alpha(t)$ , com a variável independente  $t$ , que constituíssem o melhor ajuste de acordo com os critérios adotados no método dos mínimos quadrados. Para isto, fizemos o ajuste de curvas usando o método dos mínimos quadrados e chegamos às funções que melhor se ajustam aos pontos obtidos na tabela citada, em tempo contínuo. Assim sendo, o coeficiente de difusão e o coeficiente de decaimento, quando dependentes do tempo, estão representados pelas seguintes funções:

- Coeficiente de difusão:

$$D(t) = a_1[1 - \tanh(a_2 t - a_3)], \quad (6.24)$$

sendo

$$a_1 = 0.1495, \quad a_2 = 15.65, \quad a_3 = 28.34. \quad (6.25)$$

A função  $D(t)$ , cuja representação gráfica está na figura (6.7), denota o coeficiente de difusão e sua dimensão é a mesma de  $D$ , isto é,

$$[D(t)] = \frac{[L^2]}{[t]}. \quad (6.26)$$

Assim,

$$[a_1] = \frac{[L^2]}{[t]},$$

$$[a_2] = [t^{-1}]$$

$a_3$  é adimensional.

- Coeficiente de decaimento:

$$\alpha(t) = b_1[1 - \tanh(b_2 t - b_3)], \quad (6.27)$$

sendo

$$b_1 = 0.1261, \quad b_2 = 36.39, \quad b_3 = 70.89. \quad (6.28)$$

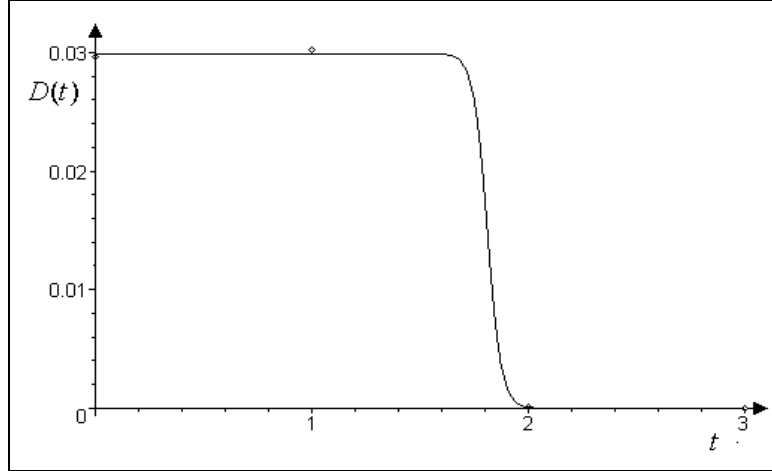


Figura 6.7: Curva  $D(t) = 0.1495[1 - \tanh(15.65t - 28.34)]$  ajustada aos pontos apresentados na tabela 6.1 definindo o coeficiente de difusão dependente do tempo, no caso contínuo.

O gráfico de  $\alpha(t)$  está representado na figura 6.8. O coeficiente de decaimento  $\alpha(t)$  é dado por

$$\alpha(t) = 0.1261[1 - \tanh(36.39t - 70.89)]. \quad (6.29)$$

A função  $\alpha(t)$  denota o coeficiente de decaimento e tem a mesma dimensão de  $\alpha$ , isto é,  $[\alpha(t)] = [t^{-1}]$ . Assim

$$[b_1] = \frac{[\text{grandeza}]}{[t]}$$

$$[b_2] = [t^{-1}]$$

$b_3$  é adimensional.

Os valores obtidos para  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  foram confirmados usando o software Origin.

Assim sendo, analisamos o modelo unidimensional (6.23)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha(t)u, \quad (6.30)$$

onde

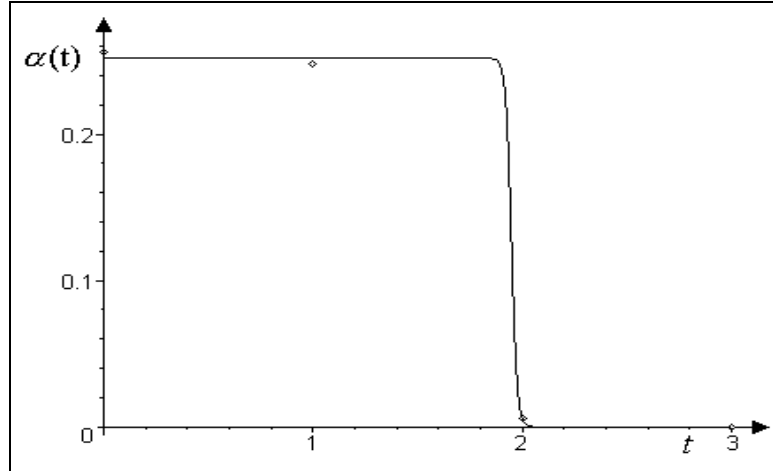


Figura 6.8: Curva  $\alpha(t) = 0.1261[1 - \tanh(36.39 - 70.89t)]$  ajustada aos pontos apresentados na tabela 6.1, definindo o termo de decaimento, dependente do tempo, no caso contínuo.

- $u(x, t)$  é a densidade da população de insetos, mais precisamente, besouros, por unidade de comprimento, marcados para o experimento e depois liberados;
- $D(t)$  é o coeficiente de difusão, dependente do tempo;
- $\alpha(t)$  é o coeficiente do termo de decaimento.

Após um estudo comparativo (seção 6.3) do efeito de  $D(t)$  dado pela equação (6.24), em um problema com a equação da difusão, sem termo de fonte, estudamos, na subsecção 6.4.1, os seguintes casos:

- $D$  constante e  $\alpha=0$  (caso I)
- $D$  constante e  $\alpha$  constante (caso II),
- $D$  constante e  $\alpha = \alpha(t)$  (caso III),
- $D = D(t)$  e  $\alpha = 0$  (caso IV),
- $D = D(t)$  e  $\alpha$  constante (caso V),

- $D = D(t)$  e  $\alpha = \alpha(t)$  (caso VI).

Posteriormente, na subsecção 6.4.2, substituiremos o termo que define morte e emigração,  $-\alpha(t)u$ , por um termo de reação do tipo logístico,  $ru \left(1 - \frac{u}{K}\right)$ , donde obtemos a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad (6.31)$$

onde

- $r$  é uma constante positiva que define a taxa de crescimento linear e
- $K$  é o parâmetro positivo que indica a capacidade de suporte do ambiente.

Visto que o coeficiente de difusão  $D$  varia em função do tempo  $t$ , de acordo com (6.24), a equação (6.31) pode ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1(1 - \tanh(a_2 t - a_3)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad (6.32)$$

$$x \in [0, 1], \quad t \in [0, T],$$

sendo  $a_1, a_2$  e  $a_3$  os valores definidos em (6.25). O modelo (6.32) é analisado considerando

- $D$  constante (caso VII)
- $D = D(t)$  (caso VIII).

Através da mudança de variável  $\frac{u}{K} = v$  (como aquela feita na equação de Fisher, equação (3.3)), a equação (6.32) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rv(1 - v), \quad (6.33)$$

onde a variável dependente  $v$  é adimensional (cada termo tem agora dimensão de  $[t]^{-1}$ ) e, além disso, o número de parâmetros fica reduzido de 3 para 2.

### 6.3 Resolução Analítica da Equação da Difusão, num Espaço Unidimensional Limitado, sem Termo de Fonte

Analisaremos, agora, a equação da difusão, num domínio unidimensional limitado, isto é, o problema de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.34)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (6.35)$$

$$u(x, 0) = u_0 \delta(x - x_0), \quad 0 < x < L, \quad (6.36)$$

cuja solução é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 u_0}{L} \sin\left(\frac{n \pi x_0}{L}\right) e^{-Dt\left(\frac{n \pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right). \quad (6.37)$$

Consideramos no nosso trabalho  $L = 1$ ,  $u_0 = 20$  e  $x_0 = 0.5$ .

Analisaremos o comportamento da população  $u = u(x, t)$ , para dois valores constantes de coeficiente de difusão:  $D = 0.03$  e  $D = 0.015$ . O primeiro valor baseia-se no fato de que o valor máximo atingido pela curva ajustada aos pontos apresentados na tabela 6.1, que define o coeficiente de difusão, é  $D_1 \cong 0.03$ . O valor de  $D_2 = 0.015$  é a metade deste. Os valores de  $t$  entre 0 e 3 estão de acordo com o intervalo de tempo em que representamos graficamente o coeficiente de difusão (figura 6.7). Observamos nas figuras 6.9(a) e 6.10(a), que a população se dispersa para as extremidades e esse espalhamento aumenta com o passar do tempo. Entretanto, se o coeficiente de difusão é menor, o processo de dispersão é mais lento. As figuras 6.9(b) e 6.10(b) mostram o comportamento da densidade no tempo inicial  $t = 0$ .

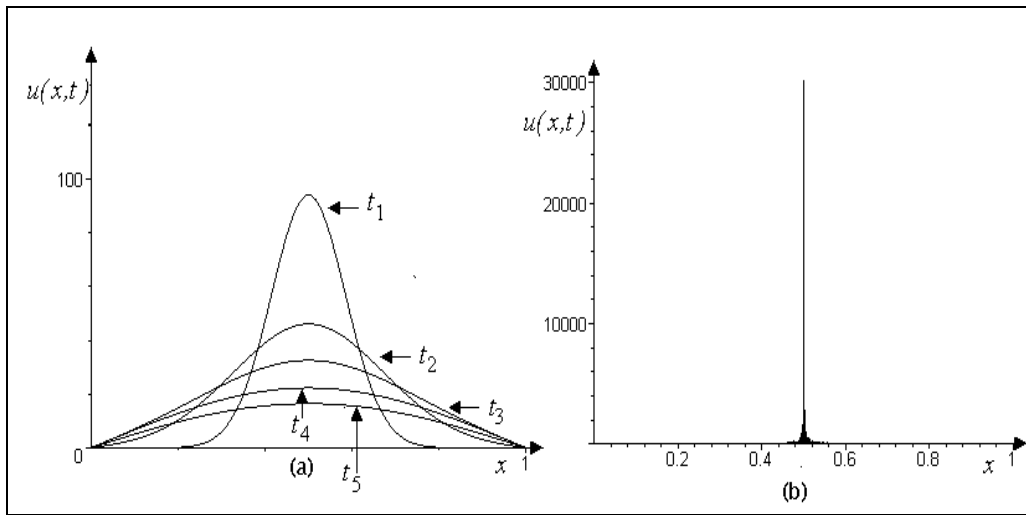


Figura 6.9: Representação gráfica da solução analítica (6.37), considerando  $D = 0.03$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $u_0 = 20$ ; (a) nos diferentes tempos  $t_1 = 0.12$ ,  $t_2 = 0.5$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 2$  e  $t_5 = 3$ , (b) no tempo inicial  $t = 0$ .

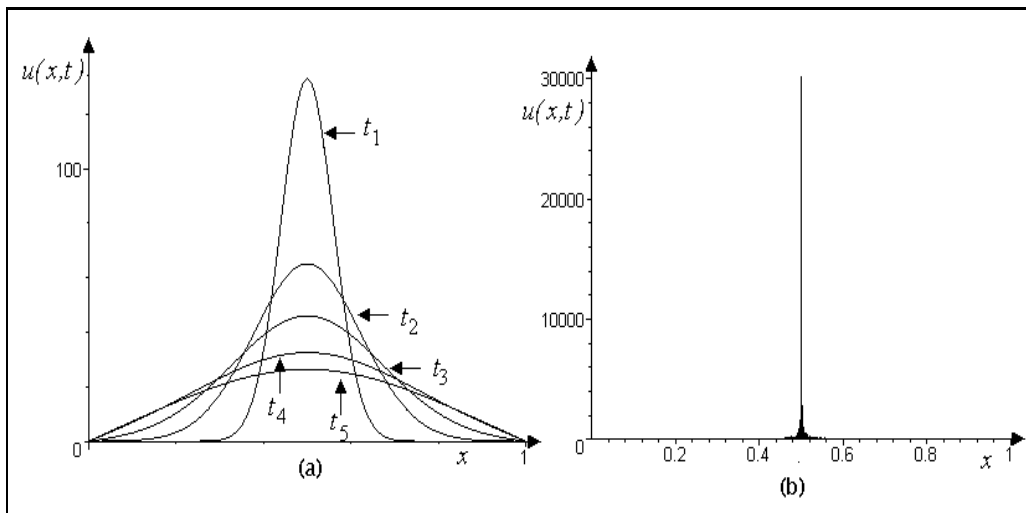


Figura 6.10: Representação gráfica da solução analítica (6.37), considerando  $D = 0.015$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $u_0 = 20$ ; (a) nos diferentes tempos  $t_1 = 0.12$ ,  $t_2 = 0.5$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 2$  e  $t_5 = 3$ , (b) no tempo inicial  $t = 0$ .



Substituindo  $D$  por  $D(t)$ , no problema de contorno (6.34), temos a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.38)$$

Usando (6.2-6.4)), obtemos (6.5), para  $u(x, T)$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.39)$$

$$u(0, T) = 0, \quad u(L, T) = 0, \quad T > 0, \quad (6.40)$$

$$u(x, 0) = u_0 \delta(x - x_0), \quad 0 < x < L, \quad (6.41)$$

cuja solução é dada por (6.37), substituindo  $t$  por  $T$  e  $D$  por 1, isto é:

$$u(x, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 u_0}{L} \sin\left(\frac{n \pi x_0}{L}\right) e^{-T\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)} \sin \frac{n \pi x}{L}. \quad (6.42)$$

Como  $x_0 = 0.5$ , e  $L = 1$ , então  $\sin \frac{n \pi x_0}{L} = \sin \frac{n \pi}{2}$ , que é nulo para  $n$  par; Assim, a solução (6.42) torna-se

$$u(x, T) = \sum_{n=0}^{\infty} 2u_0 \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] e^{-T(2n+1)^2 \pi^2} \sin(2n+1)\pi x, \quad (6.43)$$

Como  $\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n$ , então podemos escrever a solução (6.43) na forma

$$u(x, T) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n u_0 e^{-T(2n+1)^2 \pi^2} \sin(2n+1)\pi x. \quad (6.44)$$

A solução  $u(x, t)$  é obtida após substituir  $T$  em função de  $t$ . Para isso, substituiremos em (6.3) o coeficiente de difusão  $D(t)$  obtido em (6.24):

$$D(t) = a_1[1 - \tanh(a_2 t - a_3)], \quad (6.45)$$

sendo  $a_1 = 0.1495$ ,  $a_2 = 15.65$  e  $a_3 = 28.34$ , dados em (6.25). Desta forma, obtemos

$$T = \int_0^t D(t') dt' = \int_0^t a_1[1 - \tanh(a_2 t' - a_3)] dt', \quad (6.46)$$

isto é,

$$T = -\frac{1}{2} a_1 \left[ -2 a_2 t - \ln\left(-\frac{e^{-a_2 t + a_3}}{e^{a_2 t - a_3} + e^{-a_2 t + a_3}}\right) - \ln\left(\frac{e^{a_2 t - a_3}}{e^{a_2 t - a_3} + e^{-a_2 t + a_3}}\right) + \ln\left(-\frac{e^{a_3}}{e^{-a_3} + e^{a_3}}\right) + \ln\left(\frac{e^{-a_3}}{e^{-a_3} + e^{a_3}}\right) \right] a_2^{-1}. \quad (6.47)$$

Substituindo  $T(t)$  na solução (6.44), de acordo com (6.47), obtém-se a solução para  $u(x, t)$ , apresentada na figura 6.11, nos diferentes tempos  $t$  e observamos que a dispersão ocorre à medida que o tempo passa até, aproximadamente,  $t = 2$ . A partir daí, o espalhamento da população cessa, uma vez que o coeficiente de difusão cai abruptamente a zero, conforme observamos na figura 6.7, que representa graficamente o coeficiente de difusão  $D(t)$ .

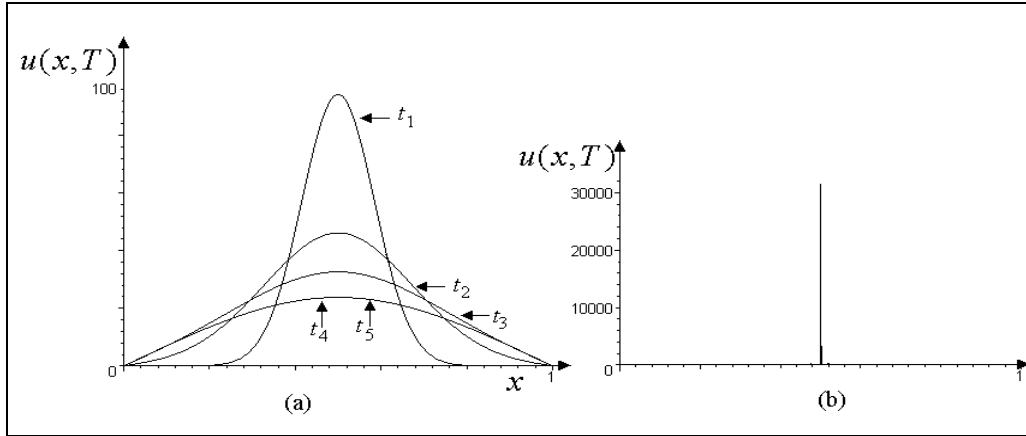


Figura 6.11: *Representação gráfica da solução analítica (6.42), para  $u(x, T)$ , considerando  $D = 1$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $u_0 = 20$ ; (a) nos diferentes tempos  $t_1 = 0.12$ ,  $t_2 = 0.5$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 2$  e  $t_5 = 3$ . (b) no tempo inicial  $t = 0$ .*

#### 6.4 Estudo das Soluções Numéricas para as Equações Diferenciais Parciais, com $D$ Constante e $D$ Variando no Tempo, $\alpha$ Constante e $\alpha$ Variando no Tempo.

Vamos analisar os modelos através de suas soluções numéricas que são computadas no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ , sendo que esse intervalo está reescalado, representando o intervalo real de 100 m, com a seguinte condição inicial:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \quad \text{se } x \neq 0.5 \\ u(x, 0) &= 20 \quad \text{se } x = 0.5 \end{aligned} \tag{6.48}$$

e as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (6.49)$$

Vamos considerar o mesmo período de tempo  $t$  para a análise do experimento, isto é, período de 3 dias, expressos em termos de horas. A solução numérica das equações diferenciais parciais, tratadas neste capítulo, baseou-se no método de diferenças finitas.

#### 6.4.1 Equações diferenciais parciais com termo de decaimento

##### Caso I:

Estudaremos a equação (6.23), usando um valor constante para o coeficiente de difusão  $D=0.03101$  e  $\alpha=0$ . Nesse modelo, nenhuma força externa atua no processo de dispersão. A equação (6.23) tem a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.03101 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.50)$$

Na figura 6.12, observamos que a dispersão dos insetos ocorre lentamente, entretanto, para valores de tempo pequenos observam-se picos, mostrando que eles ainda tendem a se manter agrupados. À medida que o tempo passa, a população tende a se espalhar para os extremos. A figura 6.13 mostra a solução no espaço  $(x, t, u)$ , no final do primeiro, segundo e terceiro dias após a liberação dos insetos.

##### Caso II:

Vamos analisar a equação (6.23), usando um valor constante para o coeficiente de difusão  $D=0.03101$  e um valor constante para  $\alpha(t)=0.20$ , ambos sugeridos no artigo supracitado. A equação (6.23) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.03101 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.20u. \quad (6.51)$$

Após a liberação dos insetos no ponto médio de um canteiro, observa-se que há pouca dispersão. Em torno de 10% dos besouros liberados não se encontram mais no ponto médio, após o primeiro dia, existindo uma tendência natural dos mesmos a agruparem-se em torno desse ponto. Alguns autores consideram esse efeito

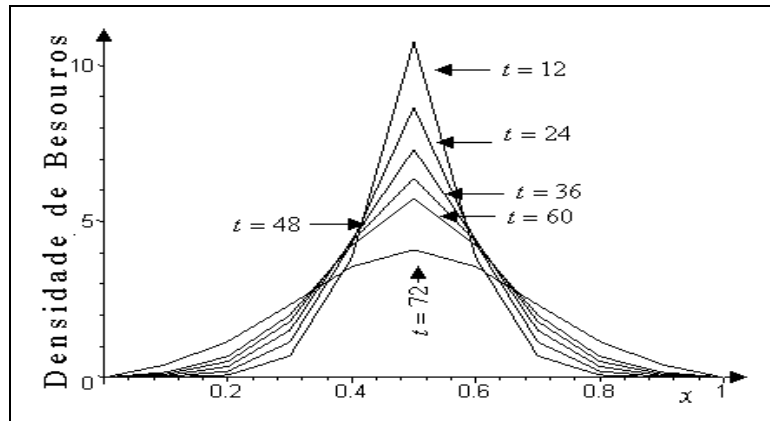


Figura 6.12: Representação gráfica da solução da equação da difusão, (6.50), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e sem termo de fonte, no plano  $(x, u)$ , nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.

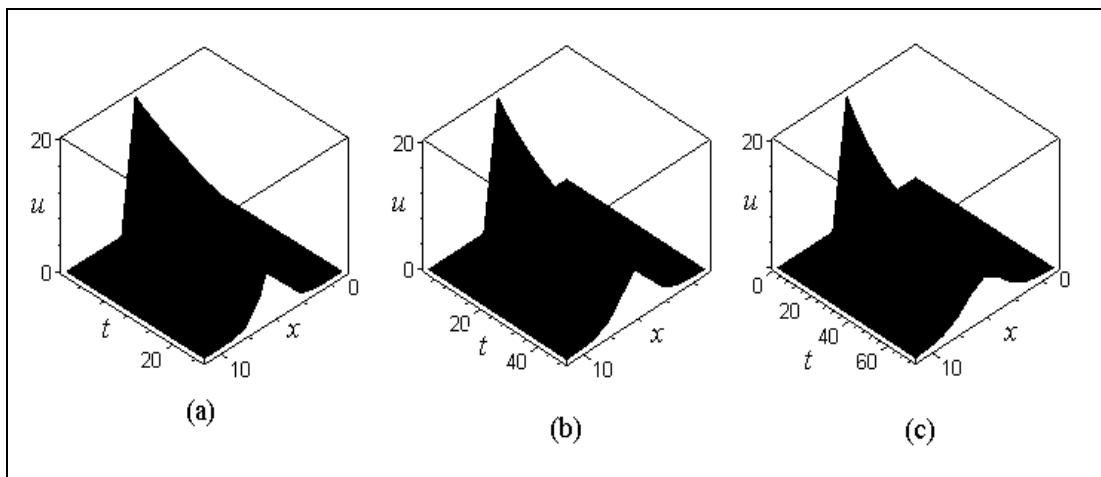


Figura 6.13: Representação, no espaço  $(x, t, u)$ , da solução da equação da difusão, (6.50), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e sem termo de fonte; (a) de  $t = 0$  até o final do primeiro dia após a liberação dos insetos, (b) de  $t = 0$  até o final do segundo dia após a liberação dos insetos, (c) de  $t = 0$  até o final do terceiro dia após a liberação dos insetos.

de “tempo de pesquisa inicial”. A longo prazo esse efeito tende a desaparecer [Rodrigues (1998)]. A partir daqui, deixaremos de apresentar os gráficos tridimensionais; passaremos a representar o comportamento das soluções, apenas no plano  $(x, u)$ , em diferentes tempos.

A figura 6.14 mostra, no plano  $(x, u)$ , a atividade de dispersão dos besouros em seis tempos diferentes: o pico ocorrido no menor tempo  $t=12$ , isto é, 12 horas após a liberação dos besouros e após os tempos subseqüentes  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas; A distribuição nos tempos intermediários entre  $t = 12$  e  $t = 72$  horas não foram assinalados porque ele estão todos muito próximos. A dispersão é pouco significativa, pois os besouros afastam-se pouco do ponto de liberação.

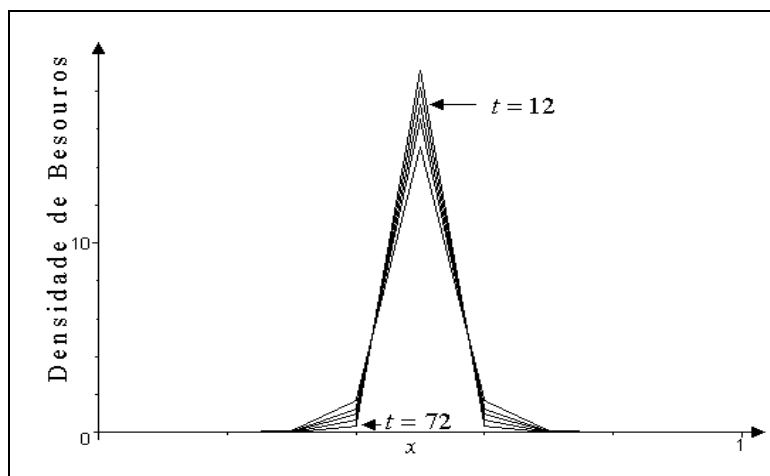


Figura 6.14: *Representação gráfica da solução da equação da difusão-decaimento, (6.51), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e coeficiente do termo de decaimento ( $\alpha$ ) constante, no plano  $(x, u)$ , nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.*

### Caso III:

O coeficiente de difusão é constante e o coeficiente de decaimento varia com o tempo, de acordo com (6.27). A equação (6.23) é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.03101 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.1261(1 - \tanh(36.39t - 70.89))u. \quad (6.52)$$

Nesse caso, após o primeiro dia de liberação, apenas 60% da população não está em torno do ponto médio do canteiro. Passados três dias de experimento, observamos os insetos aproximarem-se dos extremos do canteiro. Isso mostra que a presença de um parâmetro variando temporalmente, faz com que haja um efeito maior no processo de dispersão. A figura 6.15 mostra o comportamento na dispersão dos besouros, após os tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.

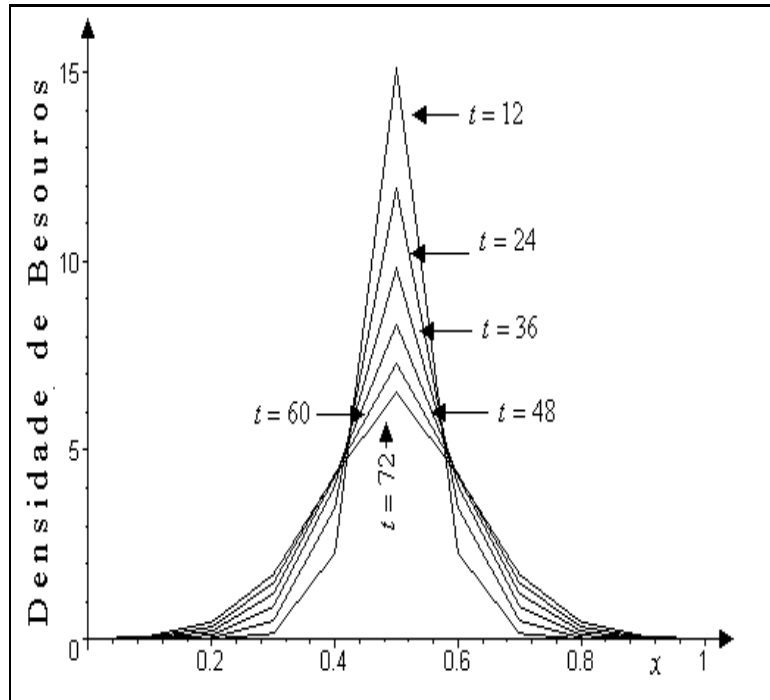


Figura 6.15: Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação da difusão-decaimento, (6.52), com coeficiente de difusão ( $D$ ) constante e coeficiente do termo de decaimento ( $\alpha$ ) dependente do tempo, nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.

**Caso IV:** Agora, analisaremos a equação da difusão-decaimento com coeficiente de difusão dependente do tempo e sem nenhuma força externa. Assim, a equação (6.23) torna-se, de acordo com (6.24)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1495(1 - \tanh(15.65t - 28.34)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.53)$$

A figura 6.16 mostra no plano  $(x, u)$  o comportamento dos insetos após os tempos  $t = 12, t = 24, t = 36, t = 48, t = 60$  e  $t = 72$  horas. A figura 6.17 mostra o comportamento da densidade  $u(x, t)$  após  $t = 24$  horas,  $t = 48$  horas e  $t = 72$  horas. A linha contínua representa a solução da equação da difusão com coeficiente constante, (6.50), sem termo de fonte. Os pontos representam a solução da equação da difusão, 6.53, com coeficiente dependente do tempo  $D(t)$  e sem termo de fonte. Observamos que as duas curvas são semelhantes, pois o coeficiente de difusão  $D = 0.03101$  coincide com o valor máximo da função que define  $D(t)$ .

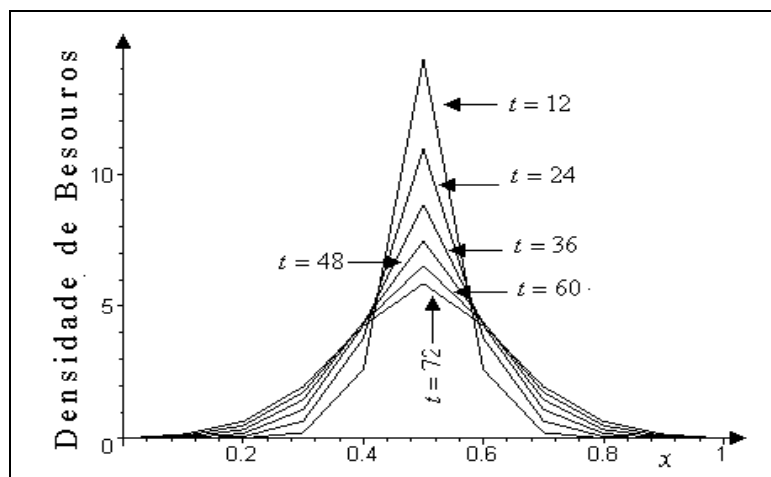


Figura 6.16: *Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação da difusão, com coeficiente de difusão ( $D = D(t)$ ) e sem termo de fonte, nos tempos  $t = 12, t = 24, t = 36, t = 48, t = 60$  e  $t = 72$  horas.*

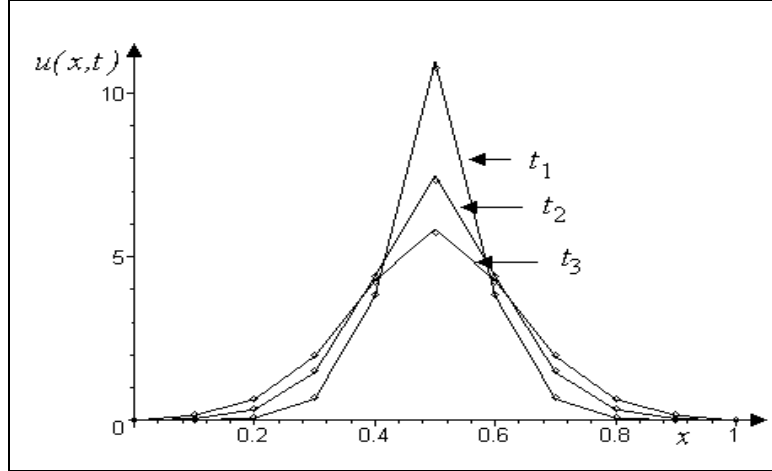


Figura 6.17: Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação da difusão, sem termo de fonte, nos tempos  $t = 24$ ,  $t = 48$ , e  $t = 72$  horas; as linhas contínuas representam a equação da difusão com coeficiente constante (6.50); os pontos representam a equação da difusão (6.53), com coeficiente de difusão variando temporalmente,  $D = D(t)$ .

#### Caso V:

Agora, analisaremos a equação da difusão-decaimento com coeficiente de difusão dependente do tempo e o coeficiente de decaimento constante. Assim, a equação (6.23) torna-se, de acordo com (6.24)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1495(1 - \tanh(15.65t - 28.34)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.20u. \quad (6.54)$$

A figura 6.18 mostra no plano  $(x, u)$  o comportamento dos insetos após os tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas. Observamos que as figuras onde o coeficiente de decaimento ou coeficiente de difusão são dependentes do tempo (figura 6.15 e figura 6.18) têm comportamentos semelhantes, embora a dispersão seja maior quando o coeficiente de difusão varia temporalmente.

#### Caso VI:

Vamos considerar, novamente a equação (6.23), sendo o coeficiente de difusão e o coeficiente de decaimento dependentes do tempo, de acordo com as equações (6.24) e (6.27), respectivamente. Dessa forma equação diferencial torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1495(1 - \tanh(15.65t - 28.34)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.1261(1 - \tanh(36.39t - 70.89)). \quad (6.55)$$



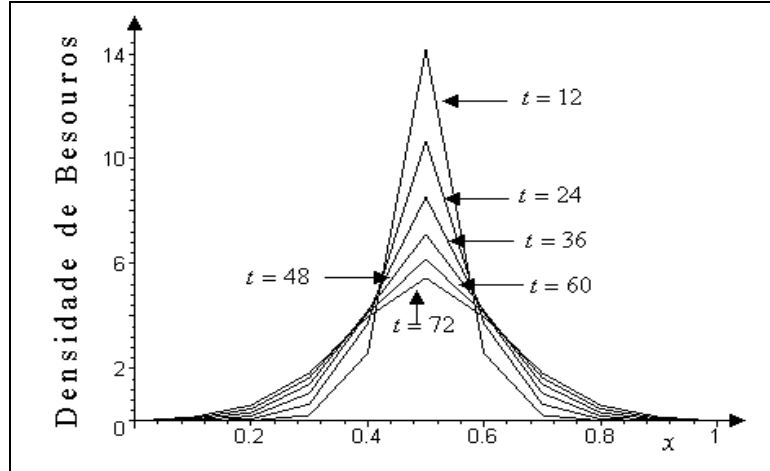


Figura 6.18: Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação da difusão-decaimento, (6.54), com coeficiente de difusão ( $D = D(t)$ ) e coeficiente do termo de decaimento ( $\alpha$ ) constante, nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.

O modelo com o coeficiente de difusão e o coeficiente de decaimento variando temporalmente permite um maior espalhamento chegando às extremidades do canteiro. Embora ainda exista o pico na dispersão, após o primeiro dia da liberação dos insetos, este pico tende a diminuir após o terceiro dia. A figura 6.19 mostra, no plano  $(x, u)$ , o comportamento em diferentes tempos  $t$ ;  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.

Para comparar os modelos com os termos de decaimento,  $\alpha(t) \neq 0$  apresentamos as figuras 6.20, 6.21 e 6.22 cada uma correspondendo o final do primeiro, segundo e terceiro dia, respectivamente. Observando as figuras, conclui-se que também no modelo contínuo, se um dos parâmetros varia temporalmente, a dispersão é maior do que em modelos com coeficientes constantes, conforme a conclusão de Banks *et al.* Observamos que, quando não há variação temporal em nenhum dos parâmetros, existe um pico, após a liberação dos insetos, mostrando que a dispersão é lenta, e os insetos tendem a permanecer em torno do ponto de liberação. Por outro lado, se os coeficientes variam temporalmente, o modelo representa uma quantidade menor de insetos agrupados em torno do ponto de liberação. Os gráficos que representam os modelos com coeficiente de difusão e decaimento variando temporalmente (caso

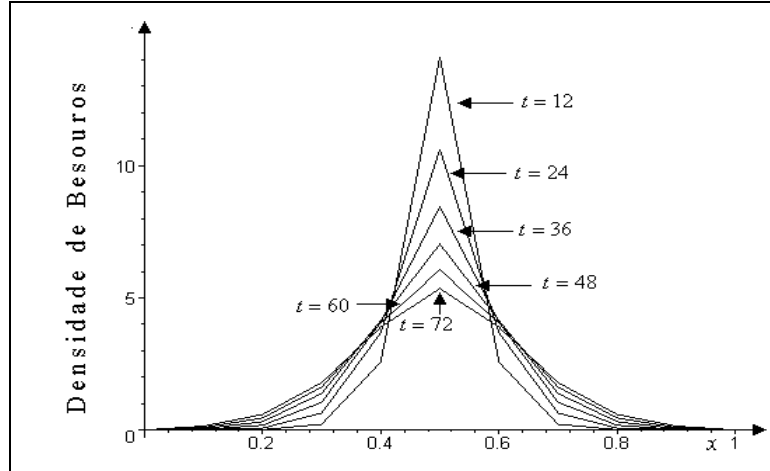


Figura 6.19: Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação da difusão-decaimento, (6.55), com coeficiente de difusão  $D = D(t)$  e coeficiente do termo de decaimento  $\alpha = \alpha(t)$ , nos tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.

III, caso V e caso VI), têm quase o mesmo comportamento. A dispersão não ocorre abruptamente, sendo as curvas de dispersão achatadas e largas, o que prova que a população passa a ocupar também os extremos do canteiro onde foram liberados.

#### 6.4.2 Equações diferenciais parciais onde o termo de decaimento é substituído pelo termo de reação do tipo logístico

##### Caso VII:

Vamos analisar agora, a situação em que o termo de reação do tipo logístico substitui o termo de decaimento. Vamos tomar a equação de Fisher (3.3) citada em (6.33)) e escrevê-la com coeficiente de difusão constante, isto é

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.03101 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rv(1 - v). \quad (6.56)$$

A figura 6.23 mostra o comportamento do modelo definido pela equação de Fisher no plano  $(x, u)$ . A figura mostra a dispersão após os tempos  $t = 12$ ,  $t = 24$ ,  $t = 36$ ,  $t = 48$ ,  $t = 60$  e  $t = 72$  horas.

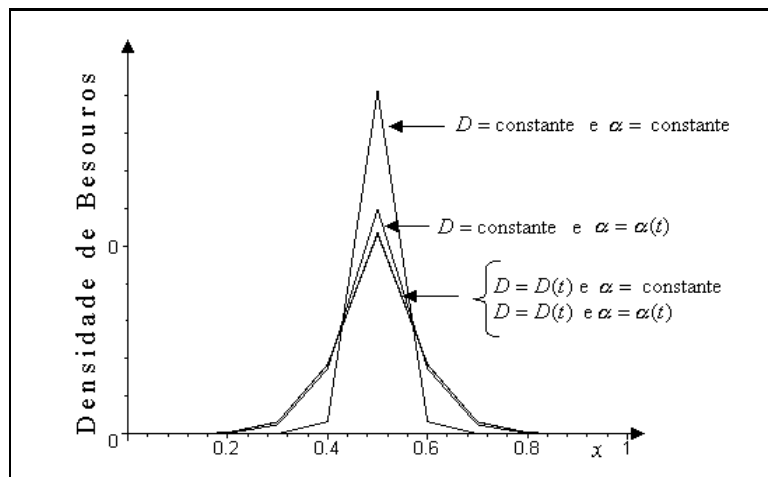


Figura 6.20: *Comportamento dos besouros ao final do primeiro dia, nos modelos com termo de decaimento.*

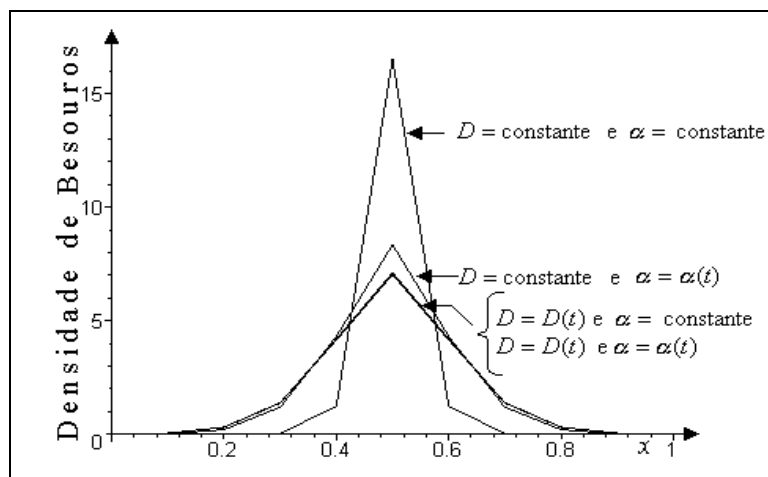


Figura 6.21: *Comportamento dos besouros ao final do segundo dia, nos modelos com termo de decaimento.*

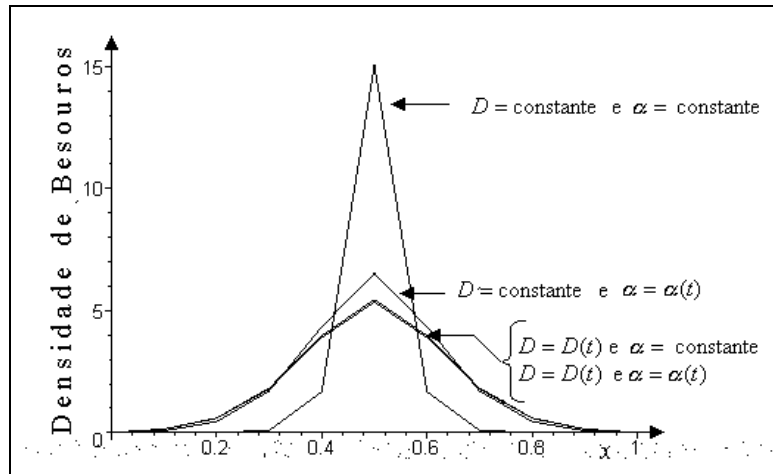


Figura 6.22: *Comportamento dos besouros ao final do terceiro dia, nos modelos com termo de decaimento.*

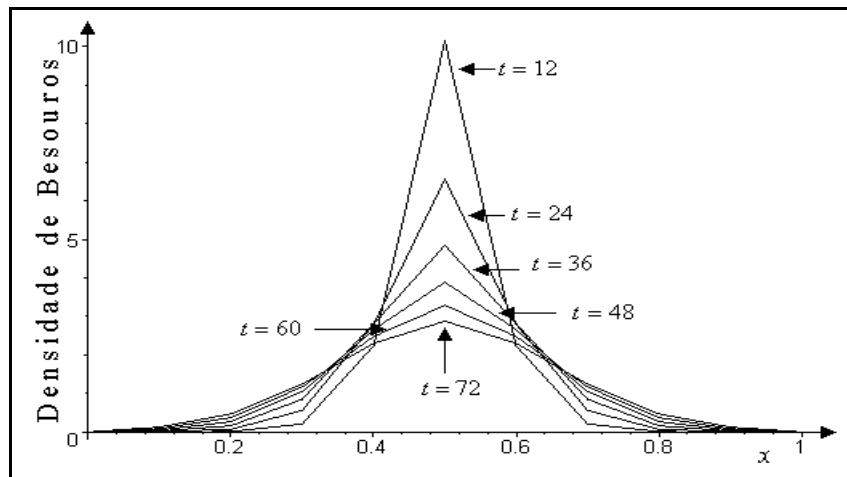


Figura 6.23: *Representação gráfica, no plano  $(x, u)$ , da solução da equação de Fisher (6.56), com  $r = 0.4$ , nos tempos  $t = 12, t = 24, t = 36, t = 48, t = 60$  e  $t = 72$  horas.*

**Caso VIII:** O último modelo a ser analisado é o com coeficiente de difusão com dependência temporal e um termo de crescimento logístico, isto é

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.1495(1 - \tanh(15.65t - 28.34))\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rv(1 - v). \quad (6.57)$$

A figura 6.24 mostra no plano  $x, u$  o comportamento dos besouros em tempos pequenos:  $t = 12, t = 24, t = 36, t = 48, t = 60$  e  $t = 72$  horas.

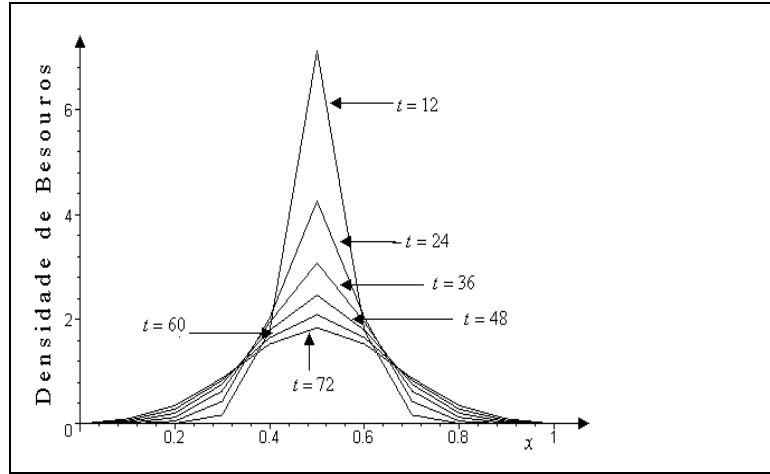


Figura 6.24: Representação da solução da equação da difusão (6.57), com  $D = D(t)$  e termo de crescimento logístico, nos diferentes tempos  $t = 12, t = 24, t = 36, t = 48, t = 60$  e  $t = 72$  horas, com  $r = 0.4$ .

As curvas que representam os modelos com termo de difusão acrescido do termo logístico têm formas semelhantes, tanto na modelagem com coeficiente de difusão constante (figura 6.25), quanto na modelagem com coeficiente de difusão variando temporalmente. Isso significa que o termo que define o modelo é o termo de crescimento logístico. Entretanto, pode-se observar na figura 6.25 que, quando o coeficiente de dispersão varia temporalmente, o efeito de dispersão é maior e o espalhamento atinge as extremidades do canteiro. Com a presença do termo logístico, no primeiro dia observado após a liberação dos insetos(6.25(a)), o número de insetos que ocupa o ponto de liberação não é muito maior do que a densidade nos outros pontos do canteiro.

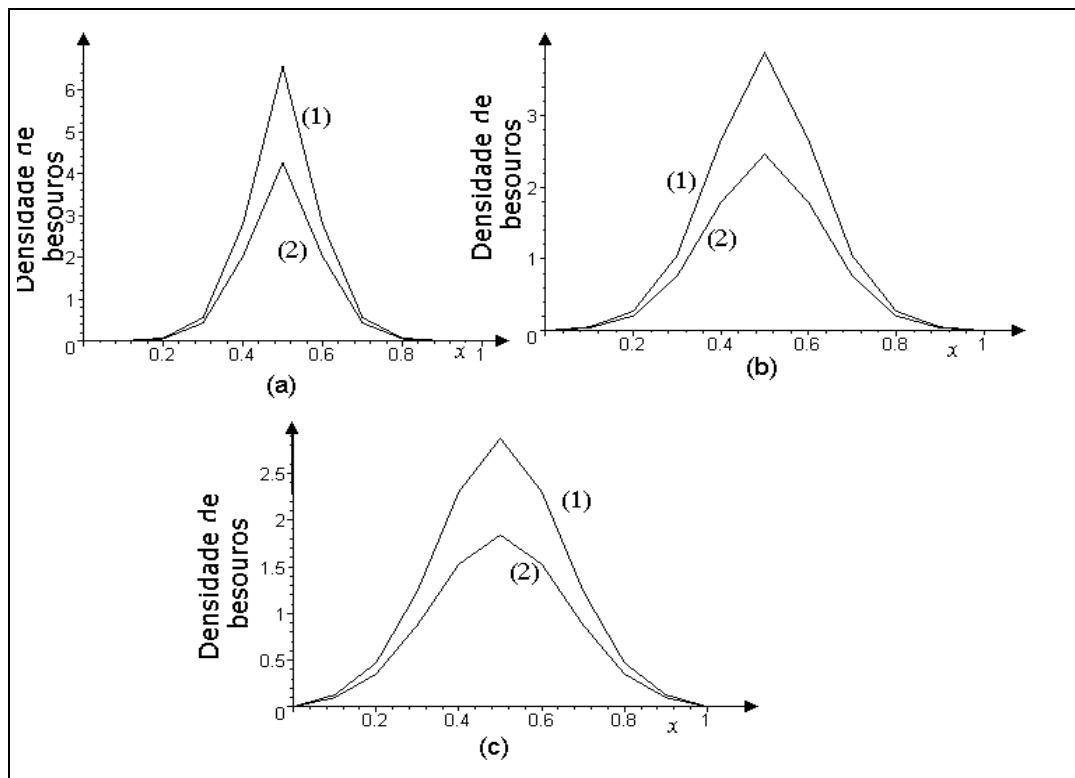


Figura 6.25: Representação da solução da equação de Fisher (6.56) (1) e da equação da difusão, com coeficiente de difusão variando temporalmente (6.57), acrescido do termo de crescimento logístico (2), (a) no primeiro dia, (b) no segundo dia e (c) no terceiro dia após a liberação dos besouros.

## 6.5 Solução do Tipo Onda Viajante

Vimos, no capítulo 2 que a equação da difusão sem o termo de reação não admite solução do tipo onda viajante. Entretanto, se um termo de reação é acoplado à equação da difusão, podemos investigar a existência dessa solução. Se o termo de reação é do tipo logístico, então  $F(u)$  é do tipo

$$F(u) = Ku^p(1 - u^q) \quad (6.58)$$

sendo  $K = p = q = 1$ , conforme vimos no capítulo 5. Então, isso nos sugere que procuremos solução do tipo onda viajante para as equações apresentadas no caso V e caso VI. Quando o coeficiente de difusão é constante, temos a equação de Fisher, referida no capítulo 3, bem como a possibilidade de admitir solução do tipo onda viajante. Quando o coeficiente de difusão varia temporalmente, temos que investigar se a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(1 - u) \quad (6.59)$$

admite solução do tipo onda viajante, da forma

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x - ct. \quad (6.60)$$

Usaremos as derivadas feitas em (2.54) e substituiremos em (6.59), obtendo a equação diferencial ordinária

$$D(t)\frac{d^2U}{dz^2} + c\frac{dU}{dz} + rU(1 - U) = 0,$$

na qual  $c$  é a velocidade de onda viajante.

Considerando  $\frac{dU}{dz} = V$ , temos

$$D(t)\frac{dV}{dz} + cV + rU(1 - U) = 0,$$

que origina o sistema de equações de primeira ordem não autônomo.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= V \\ \frac{dV}{dz} &= \frac{-cV - rU + rU^2}{D(t)}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

que tem a forma:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dz} = f(U, V) \\ \frac{dV}{dz} = g(U, V, t). \end{cases} \quad (6.62)$$

As equações diferenciais parciais citadas neste capítulo, as quais um dos coeficientes varia temporalmente, são consideradas equações diferenciais parciais não autônomas. No caso de um sistema autônomo, como vimos nos outros capítulos, as trajetórias no plano de fase são relativamente simples, pois todos os indivíduos que passam por um certo ponto seguem a mesma curva no plano de fase, isto é só há uma trajetória passando por um ponto. Por outro lado, num sistema não autônomo existem um número infinito de trajetórias distintas que passam por um mesmo ponto, dependendo do tempo, e o conjunto de trajetórias é bastante confuso.

Na figura 6.28 traçamos soluções representando o sistema não autônomo (6.61), no plano de fase  $UV$ , usando alguns valores de velocidades. Nosso objetivo é o de comparar um modelo autônomo com um não autônomo, com o mesmo termo  $F(u)$ . As curvas foram feitas no *Maple*, usando o comando `DEplot` e os dados de entrada, o sistema (6.61) e as condições iniciais, em  $t = 0$  e em  $t = 1$  e fazendo o traçado para  $t$  de -10 até 30.

Ondas viajantes caracterizam-se por ser ondas que viajam sem mudar a forma, o que não acontece nos sistemas não autônomos. No capítulo 3, para valores de  $c$  próximos de zero,  $U$  espirala em torno da origem. Nas figuras 6.26 e 6.27 observa-se a espiral em torno da origem, entretanto outras trajetórias estão próximas de zero, não permitindo um retrato de fase bastante claro.

Na figura 6.28 observamos que, para  $t = 0$  e  $t = 1$ , temos trajetórias distintas. A trajetória  $A$  foi obtida com a condição inicial  $[U(0) = 1, V(0) = 2]$  e a trajetória  $B$  com a condição inicial  $[U(1) = 1, V(1) = 2]$ .



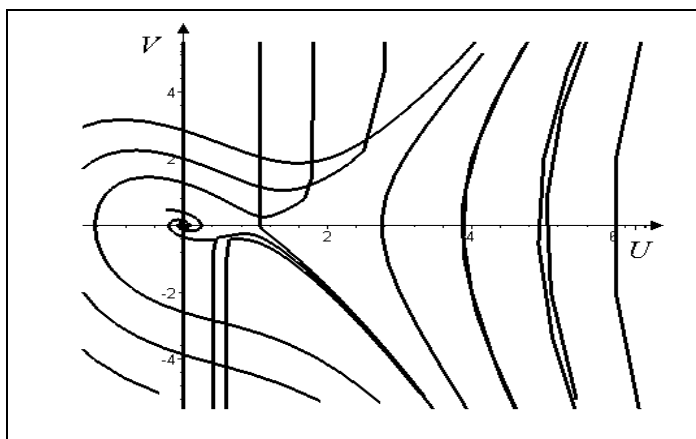


Figura 6.26: Plano de fase do sistema não autônomo (6.61) com  $r = 0.4$  e  $c = 0.5$ .

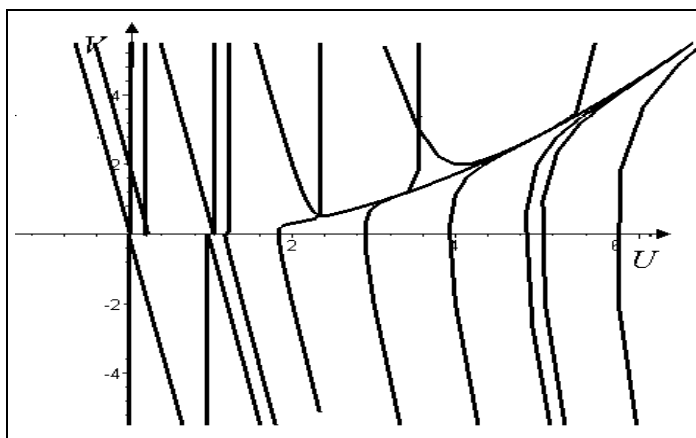


Figura 6.27: Plano de fase do sistema não autônomo (6.61) com  $r = 0.4$  e  $c = 2.0$ .

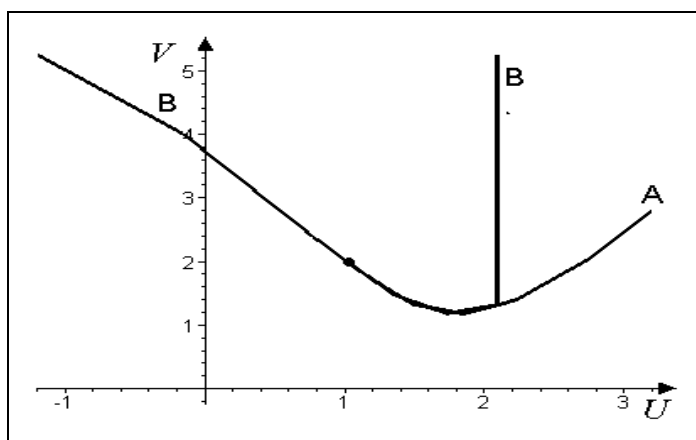


Figura 6.28: Plano de fase do sistema não autônomo (6.61) com  $r = 0.4$  e  $c = 0.5$ , considerando as condições iniciais  $[U(0) = 1, V(0) = 2]$  que produz a trajetória A e  $[U(1) = 1, V(1) = 2]$  que produz a trajetória B.

## 7 CONCLUSÃO

Modelos de difusão fornecem uma boa fundamentação para o estudo de insetos em movimento. Como primeiro passo começamos um modelo mais simples que considera coeficiente de difusão constante, pois os modelos podem incluir coeficiente de difusão que variam no tempo ou qualquer outra variável, como densidade populacional, idade dos indivíduos, ou posição, em uma escala de tempo onde não ocorre entrada ou saída de indivíduos.

O nosso trabalho tratou da solução de um problema não linear, aplicado à dispersão de insetos. Começamos estabelecendo uma lei de conservação a partir da qual deduzimos algumas equações diferenciais importantes no estudo de dispersão e que são aplicáveis ao nosso estudo, como a equação da difusão, da convecção e simultaneamente convecção e difusão. Consideramos uma escala de tempo, na qual fosse possível uma adição ou retirada de indivíduos no meio, conforme exista a possibilidade de reprodução, migração ou morte desses indivíduos. Para isso, acrescentamos um termo de reação  $F(u)$  ao processo difusivo e a equação obtida foi do tipo reação-difusão. Se este termo de reação for dependente da densidade populacional e do tipo logístico, a equação obtida recebe o nome de equação de Fisher que, adimensionalizada, é da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u). \quad (7.1)$$

Determinamos seus estados estacionários, analisamos a estabilidade dos mesmos e concluímos que a equação de Fisher admite solução do tipo onda viajante, cuja velocidade de propagação da onda é  $c_{\min} = 2$ . Em termos dimensionais essa velocidade é dada por

$$c_{\min} = 2\sqrt{rD}, \quad (7.2)$$

onde  $r$  é a taxa de crescimento linear (intrínseca) da população  $u$ . Por exemplo, se considerarmos valores biológicos próprios para o coeficiente de difusão  $D$  de  $10^{-9}$  –  $10^{-11}\text{cm}^2 \cdot \text{seg}^{-1}$  e  $r$  é da ordem  $O(1\text{seg}^{-1})$ , então a velocidade de propagação de

(7.2) é  $O(2 \cdot 10^{-4.5} - 10^{-5.5} \text{ cm} \cdot \text{seg}^{-1})$  [Murray (1989)]. Com isto, o tempo que se leva para cobrir uma distância da ordem de 1 mm é  $O(5 \cdot 10^{2.5} - 10^{3.5})$  segundos, que é muito menor do que o tempo difusional puro da  $O(10^7 - 10^9)$ seg. Isto se deve à combinação de reação com difusão, que aumenta bastante a eficiência de transmissão de informação via ondas viajantes de variações de concentração.

Estudamos a equação do tipo reação-difusão para um  $F(u)$ , com estados estacionários  $u = 0$  e  $u = 1$ , do tipo

$$F(u) = ku^p(1 - u^q), \quad (7.3)$$

onde  $k$ ,  $p$  e  $q$  são constantes positivas e o coeficiente de difusão é proporcional a uma potência da densidade populacional dado por

$$D(u) = D_0u^m, \quad (7.4)$$

onde  $D_0$  e  $m$  são constantes positivas. Essa equação é da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_0u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + ku^p(1 - u^q), \quad (7.5)$$

que adimensionalizada torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right] + u^p(1 - u^q). \quad (7.6)$$

Essa equação pode ter várias formas, dependendo dos valores de  $p$ ,  $q$  e  $m$ . Estudamos casos específicos  $m = 0$  e  $p = 1$ ,  $m = 0$  e  $p = q + 1$  e concluímos que quando  $m = 0$  o valor da velocidade de propagação depende do valor de  $q$ . Entretanto, quando  $m = p = q = 1$ , a equação (7.6) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + u^p(1 - u^q), \quad (7.7)$$

um exemplo interessante de difusão dependente da densidade populacional acrescido de crescimento logístico. Verificamos que a população dispersa mais rapidamente para regiões de menor densidade, quando a região ocupada está muito cheia.

O modelo discreto adotado Banks *et al* (1985) no seu trabalho experimental com dispersão de besouros, em um espaço finito, num período de três dias,

serviu de base para compararmos com um modelo contínuo, da forma,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u, \quad (7.8)$$

sendo  $D$  constante e  $D = D(t)$ ,  $\alpha$  constante e  $\alpha = \alpha(t)$ , ou seja os coeficientes de difusão e de decaimento foram substituídos por coeficientes dependentes da variável  $t$ . Construímos curvas que se ajustam aos resultados obtidos por Banks *et al*(1985) com sua modelagem em tempo discreto, a partir do seu experimento. Podemos observar que os modelos com coeficientes de difusão e/ou decaimento com dependência temporal, produzem maior espalhamento da população, quando comparados aos modelos com coeficientes constantes. Se a dependência for em ambos os coeficientes, a dispersão é maior do que nos casos onde um dos coeficientes varia temporalmente. Vimos, também, que o modelo de difusão acrescido do termo logístico, diferindo da equação de Fisher apenas pela dependência temporal no coeficiente de difusão, não apresenta onda viajante. Isso serviria para a modelagem da difusão de uma praga de insetos controlada.

A convecção não linear nas equações do tipo reação difusão pode ter um efeito surpreendente nas soluções [Murray (1989)]. Isso é esperado, uma vez que temos outro processo de transporte, a convecção, a qual não possui dependência linear em  $u$ . Esse processo pode ou não melhorar o transporte difusional. Se o processo de difusão é desprezível, quando comparado aos efeitos de convecção, as soluções podem exibir soluções do tipo choque.

Por exemplo, considerando a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ku \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u), \quad (7.9)$$

onde  $k$  é uma constante positiva ou negativa e  $f(u) = u(1 - u)$  é do tipo logístico. Se  $k = 0$ , a equação (7.9) reduz-se a equação de Fisher. Assim sendo, o modelo de difusão acrescido do termo de convecção é uma sugestão para um possível trabalho futuro.

## Bibliografia

- [Anton (1999)] ANTON, H., *Calculus, a New Horizon*. John Wiley & Sons, 1999.
- [Aoki et al (1995)] Aoki, K., Shida, M., Shigesada, N., *Travelling Wave Solutions for the Spread of Farmers into a Region Occupied by Hunter-Gatherers*. Theoretical Population Biology, **50**, 1-17, (1996).
- [ARINO, SMITH (1999)] ARINO, O., SMITH, W.V., *A Nonlinear Model for Migrating Species*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **229**, 61-87, (1999).
- [Banks (1994)] BANKS, R.B., *Growth and Diffusion Phenomena - Mathematical Frameworks and Applications*. Springer-Verlag, USA, 1994.
- [Banks et al (1985)] BANKS, H.T., KAREIVA, P.K., LAMM, P. K., *Modeling Insect Dispersal and Estimating Parameters when Mark-release Techniques May Cause Initial Disturbances*. J. Math. Biology, **22**, 259-277, (1985).
- [Bartle (1964)] BARTLE, R.G., *Elements of Real Analysis*. Copyright, 1964.
- [Bassanezi, Ferreira Jr. (1988)] BASSANEZI, R.C., FERREIRA JR., W.C., *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra, São Paulo, 1988.
- [Bassanezi et al.(1997)] BASSANEZI, R.C., LEITE, M.B.F., GODOY, W.A.C., VON ZUBEN, C.J., VON ZUBEN, F. J., REIS, S.F., *Diffusion Model Applied to Postfeeding Larval Dispersal in Blowflies (Diptera: Calliphoridae)*. Memórias do Instituto Oswaldo Cruz, **92(2)**, 281-286, (1997).
- [Beltrami (1997)] BELTRAMI, E., *Mathematics for Dynamic Modeling*. Academic Press, 1997.

- [Boyce, Di Prima (1997)] BOYCE, W.E., DI PRIMA, R.C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, USA, 1997.
- [Christie *et al* (1995)] CHRISTIE, I., WILDER, J.W., COLBERT, J.J., *Modeling of One-dimensional Spatial Effects on the Spread of Gypsy Moths*. *Ecological Modelling*, **78**, 219-234, (1995).
- [Crank (1975)] CRANK, J., *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press, Oxford, 1975.
- [Cruywagen *et al* (1996)] CRUYWAGEN, G.C., KAREIVA, P., LEWIS, M.A., MURRAY, J.D., *Competition in a Spatially Heterogeneous Environment: Modelling the Risk of Spread of a Genetically Engineered Population*. *Theoretical Population Biology*, **49**, 1-38, (1996).
- [Debnath (1997)] DEBNATH, L., *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [Fong & De Kee (1999)] FONG, C.F.C.M., DE KEE, D., *Perturbation Methods, Instability, Catastrophe and Chaos*. World Scientific, Singapore, 1999.
- [Gershenfeld (2000)] GERSHENFELD, N., *The Nature of Mathematical Modeling*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Gomes (1999)] GOMES, S.C.P., *Métodos Numéricos: Teoria e Programação*. Editora da Fundação Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 1999.
- [Gurney, Nisbet (1998)] GURNEY, W.S., NISBET, R. M., *Ecological Dynamics*. Oxford University Press, New York, 1998.
- [Haridas, Rajarshi (2001)] HARIDAS, C.V., RAJARSHI, M.B. *A Stochastic Model for Evolution of Sociality in Insects*. *Theoretical Population Biology*, **59**, 107-117, (2001).

- [Kareiva (1983)] KAREIVA, P.M. *Local Movement in Herbivorous Insects: Applying a Passive Diffusion Model to Mark-recapture Field Experiments*. *Oecologia*, **57**, 322-327, (1983).
- [Kreyszig (1968)] KREYSZIG, E., *Advanced Engineering Mathematics*. Jonh Wiley and Sons, New York, 1968.
- [Logan (1998)] LOGAN, J.D., *Applied Partial Differential Equation*. Springer, New York, 1998.
- [Murray (1989)] MURRAY, J.D., *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Namba (1980)] NAMBA, T., *Density-dependent Dispersal and Spatial Distribution of a Population*. *J.Theor.Biol*, **86**, 351-363, (1980).
- [Okubo (1980)] OKUBO, A., *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Pattle (1959)] PATTLE, R.E., *Diffusion From an Instantaneous Point Source With a Concentration-Dependent Coefficient*. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **12**, 407-409, (1959).
- [Qiu, Sloan (1998)] QIU, Y., SLOAN, D.M., *Numerical Solution of Fisher's Equation Using a Moving Mesh Method*. *Journal Of Computational Physics*, **146**, 726-746 (1998).
- [Rodrigues (1998)] RODRIGUES, L.A.D., *A dispersão de Herbívoros em Grandes Plantações: Modelos Matemáticos e Simulações*. Minicurso do V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, Santa Maria, (1998).
- [Spiegel (1971)] SPIEGEL, M.R., *Transformadas de Laplace*. McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1971.



- [Stone, Hart (1999)] STONE, L., HART, D., *Effects of Immigration on the Dynamics of a Simple Population Models*. Theoretical Population Biology, **55**, 227-234, (1999).
- [Tijonov, Samarsky (1980)] TIJONOV, A. N., SAMARSKY, A. A., *Equaciones De La Fisica Matematica* . Traducción al español. Editorial Mir, 1980.
- [Zinner *et al* (1993)] ZINNER, B., HARRIS, G., HUDSON, W. *Traveling Wavefronts for the Discrete Fisher's Equation*. Journal of Differential Equations, **105**, 46-62 (1993).