

DILZE CODÁ DOS SANTOS CAVALCANTI MARQUES

ANÁLISE NÃO LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA  
DE CASCAS LAMINADAS ANISÓTROPAS

Tese apresentada à Universidade  
Federal do Rio Grande do Sul para  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia Civil

Porto Alegre  
1994

Tese submetida ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA CIVIL.

---

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch  
Orientador

---

Prof. Dr. Jorge Daniel Riera  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Aprovada pela BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Armando Miguel Awruch (Presidente)

D.Sc. COPPE/UFRJ

- Prof. Dr. Guillermo Juan Creus

D.Sc. COPPE/UFRJ

- Prof. Dr. Edgardo Tarocco

D.Sc. COPPE/URFJ

- Prof. Dr. Ariovaldo Felix Palmerio

Ph.D. Virginia University

Aos

meus pais

irmãos

tios e primos

e especialmente a

Peverino

Fernando

Gustavo

e

Clarissa

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Jarbas Milititsky pelo apoio concedido quando Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.

Ao Prof. Dr. Armando Miguel Awruch pelos importantes ensinamentos, eficiente orientação e estímulo recebidos durante a elaboração deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Estrutural da UFAL, e em especial aos professores Carlos Cardoso, Adeildo Ramos, Viviane Ramos e Flávio Barbosa pela amizade.

A todos professores, funcionários e colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS que de alguma forma contribuíram para a viabilização deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento e Pesquisas (CNPq) e à Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFAL pelos apoios financeiros prestados.

## RESUMO

Neste trabalho o comportamento estático e dinâmico (transiente) de cascas laminadas anisótropas, dotadas ou não de enrijecedores excêntricos, é investigado usando o método dos elementos finitos. São empregados elementos tridimensionais degenerados de cascas em conjunção com uma formulação Lagrangeana Total, resultando assim um modelo numérico que permite o tratamento de problemas com grandes deslocamentos e rotações, e pequenas deformações.

São considerados os casos de material elástico linear e elasto-plástico com ou sem endurecimento. O modelo elasto-plástico baseia-se nos preceitos da teoria da plasticidade associada e numa extensão do critério de Huber-Mises para materiais anisótipos.

Os procedimentos utilizados são feitos, particularmente, apropriados para a análise de cascas constituídas por lâminas de materiais compostos, podendo a estrutura apresentar geometria e esquemas de laminação arbitrários. No caso da análise estática, as equações não lineares de equilíbrio são resolvidas utilizando-se o método de Newton - Raphson ou o método de controle por deslocamentos generalizados. No caso da análise dinâmica, as referidas equações são discretizadas no tempo através do método de Newmark e o sistema de equações algébricas resultante é resolvido usando o método de Newton-Raphson.

## ABSTRACT

In this work the static and dynamic (transient) behavior of anisotropic laminated shells, with eccentric stiffeners or not, is investigated using the finite element method. The model employs three-dimensional degenerated elements of shells and is based on a Total Lagrangian formulation that allows the treatment of large displacements and rotations with small strains.

The material is considered linear elastic or elastoplastic with strain hardening or not. The elastoplastic analysis is based on the concepts of the associated plasticity theory and uses an extension of the Huber-Mises criterium for anisotropic materials. The procedures are particularly appropriate for the analysis of laminated shells of composite materials with arbitrary geometry and lamination schemes.

For the static analysis the nonlinear equilibrium equations are solved by Newton-Raphson method or, alternatively, by the called generalized displacement control method. In the case of dynamic analysis, those equations are discretized in the time by Newmark method and the resultant set of algebraic equations are solved by Newton - Raphson method.

## ÍNDICE

RESUMO .....	i
ABSTRACT .....	ii
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1- Generalidades .....	1
1.2- Revisão Bibliográfica .....	8
1.3- Hipóteses e Objetivos .....	16
1.4- Organização e Conteúdo do Trabalho .....	19
2. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPAS .....	21
2.1- Introdução .....	21
2.2- Lei de Hooke Generalizada .....	21
2.3- Casos de Simetrias Elásticas Apresentadas por Materiais .....	26
2.4- Relações Constitutivas em Termos de Constantes Técnicas .....	30
2.5- Relação Constitutiva de uma Lâmina segundo suas Direções Principais de Simetria .....	34
2.6- Relação Constitutiva de uma Lâmina segundo Eixos Locais .....	35
2.7- Relação Constitutiva Incremental Elasto-Plástica de uma Lâmina .....	38
2.7.1- Considerações Gerais sobre a Teoria da	

Plasticidade Associada .....	38
2.7.2- Critério de Escoamento .....	43
2.7.3- Endurecimento do Material .....	46
2.7.4- Parâmetros de Anisotropia .....	50
2.7.5- Dedução da Relação Constitutiva Elasto- Plástica da Lâmina Referida aos Eixos Locais .....	53
3. FORMULAÇÃO INCREMENTAL LAGRANGEANA TOTAL DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE UM ELEMENTO FINITO .....	58
3.1- Introdução .....	58
3.2- Equação Incremental Lagrangeana Total do Movimento de um Elemento Finito .....	61
3.2.1- Princípio dos Deslocamentos Virtuais .....	61
3.2.2- Equação Incremental do Movimento de um Contínuo .....	66
3.2.3- Equação Incremental do Movimento de um Elemento Finito .....	69
4. FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DO ELEMENTO FINITO .....	72
4.1- Introdução .....	72
4.2- Descrição do Elemento .....	72
4.2.1- Geometria .....	72
4.2.2- Campo de Deslocamentos .....	74
4.3- Relações Fundamentais .....	78
4.4- Enrijecedores Excêntricos .....	83



5. PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS .....	87
5.1- Introdução .....	87
5.2- Método de Newmark .....	88
5.3- Método de Newton-Raphson .....	89
5.4- Método do Controle por Deslocamentos Generalizados .....	93
5.5- Procedimentos Numéricos na Análise Elasto- Plástica .....	97
5.6- Critérios de Convergência .....	101
6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS I: ANÁLISE ELÁSTICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA .....	102
6.1- Introdução .....	102
6.2- Análise Estática: Vigas, Placas e Cascas .....	104
6.2.1- Viga em balanço sob carga concentrada ...	104
6.2.2- Casca cilíndrica abatida com carga no centro .....	105
6.2.3- Casca esférica engastada sob carga concentrada .....	107
6.2.4- Placa simplesmente apoiada laminada sob pressão uniforme .....	107
6.2.5- Placa laminada sob carga uniforme .....	108
6.2.6- Placa laminada engastada .....	114
6.2.7- Casca esférica laminada sob carga uniforme .....	114
6.2.8- Casca esférica constituída de nove	

camadas .....	117
6.3- Análise Estática: Placas e Cascas	
Enrijecidas .....	122
6.3.1- Análise de uma placa engastada dotada de enrijecedores excêntricos .....	122
6.3.2- Placa quadrada simplesmente apoiada enrijecida .....	123
6.3.3- Placa laminada dotada de enrijecedores ..	126
6.3.4- Casca esférica laminada enrijecida .....	126
6.4- Análise Dinâmica: Vigas, Placas e Cascas .....	130
6.4.1- Viga engastada sob carga uniforme .....	130
6.4.2- Placa simplesmente apoiada sob carga uniforme .....	130
6.4.3- Casca cilíndrica laminada sob pressão interna .....	131
6.4.4- Casca esférica laminada sob pressão externa .....	134
6.5- Análise Dinâmica: Placas e Cascas	
Enrijecidas .....	137
6.5.1- Análise não linear transiente da placa do exemplo 6.3.2 .....	137
6.5.2- Análise não linear transiente de uma casca esférica enrijecida .....	137
6.5.3- Análise não linear transiente da placa do exemplo 6.3.3 .....	138

7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS II: ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA	
NÃO LINEAR GEOMÉTRICA .....	142
7.1- Introdução .....	142
7.2- Análise Estática .....	
7.2.1- Análise elasto-plástica da casca do exemplo 6.2.3 .....	143
7.2.2- Placa quadrada engastada .....	143
7.2.3- Casca quadrática engastada .....	145
7.2.4- Placa laminada simplesmente apoiada .....	150
7.2.5- Casca cilíndrica laminada .....	153
7.2.6- Casca esférica laminada simplesmente apoiada .....	156
7.3- Análise Dinâmica .....	162
7.3.1- Placa quadrada simplesmente apoiada .....	162
7.3.2- Análise dinâmica da placa do exemplo 7.2.4 .....	162
7.3.3- Análise dinâmica da casca do exemplo 7.2.6 .....	165
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	167
REFERÊNCIAS .....	172

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 - GENERALIDADES

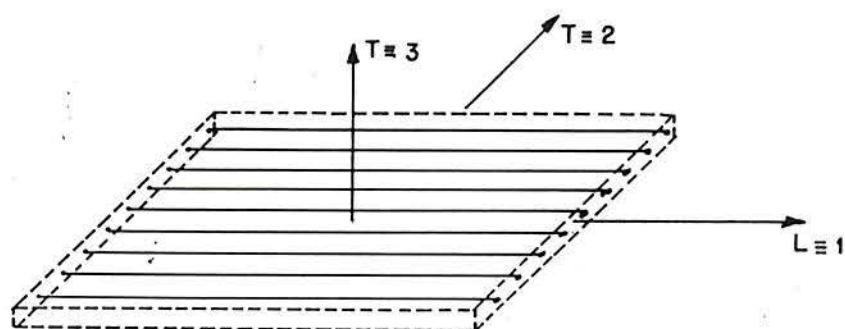
O desenvolvimento da mecânica não linear do contínuo e dos métodos numéricos aliados ao surgimento de novos e modernos computadores tem permitido a solução de problemas complexos da mecânica estrutural, para os quais uma solução analítica não podia ser obtida. A tendência que se tem constatado ao longo do tempo, é a de que problemas mais complexos, ou seja, equacionados sobre hipóteses e idealizações de modelos estruturais mais realísticas, possam a cada dia ser resolvidos a um custo computacional aproximadamente igual ao da solução destes mesmos problemas com base em hipóteses mais simples, como por exemplo as utilizadas numa análise linear de estruturas, em tempos passados.

É verdade que são muitos os problemas estruturais existentes, para os quais uma análise linear faz-se plenamente justificada, por proporcionar uma resposta suficientemente precisa para os fins desejados ou pelo menos apenas conservativa (neste segundo caso, desde que isto não afete de forma significativa o custo da solução). Tratando-se de projetos de estruturas usuais, a opção por se realizar uma análise linear é ainda, por estas razões, quase sempre adotada.

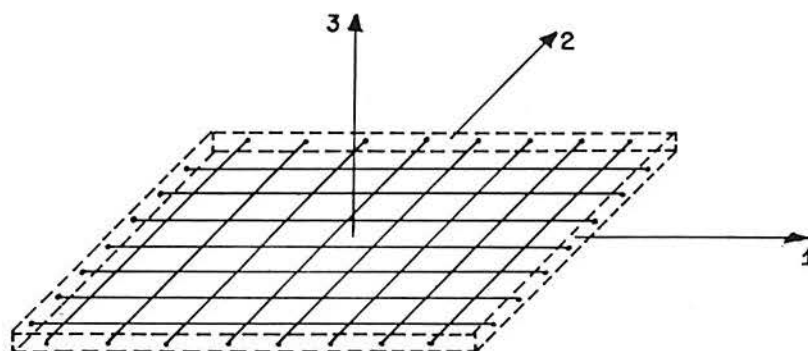
Por um outro lado, muitos outros problemas existem, para os quais a solução obtida com uma análise linear não apresenta as propriedades acima citadas. Tal fato faz jus ao intenso esforço por parte de pesquisadores na solução numérica de problemas não lineares da mecânica estrutural e particularmente no estudo do comportamento não linear de cascas, tendo em vista que a estas estruturas são destinadas inúmeras e importantes aplicações.

Mais recentemente e principalmente devido aos crescentes desenvolvimento tecnológico e uso dos materiais compostos laminados, este campo de pesquisas tem se estendido ao estudo do comportamento de cascas laminadas anisótropas.

Tipos especiais destes materiais, no que se refere à aplicação estrutural, são os denominados "fiber-reinforced laminated composite materials", os quais consistem em uma associação de lâminas confeccionadas com fibras longas e resistentes (ex: aço, carbono, boro, vidro, etc.), dispostas paralelamente segundo uma ou duas direções, envolvidas por um material referido como matriz (ex: alguns tipos de metais, de resinas ou cerâmicas) conforme representado nas Figuras 1.1 (a) e 1.1 (b). Estes materiais podem ser especificamente confeccionados para possuírem propriedades tais como: altas relações rigidez/peso e resistência/peso, alta resistência à fadiga, alto amortecimento, isolamento térmica, isolamento acústica, alta resistência à corrosão, etc., o que justifica a crescente aplicação dos mesmos nas indústrias automobilística,



(a) - Fibras em uma direção



(b) - Fibras em duas direções ortogonais

Figura 1.1 - Tipos usuais de lâminas reforçadas com fibras

aeronáutica e aeroespacial e torna promissora a expectativa de utilizações futuras.

A geometria típica de uma casca constituída por lâminas reforçadas com fibras é mostrada na Figura 1.2, a qual intuitivamente sugere que o esquema de distribuição de lâminas e as características mecânicas das mesmas podem, em tese, serem criteriosamente selecionados, de modo a obter as qualidades necessitadas para uma determinada aplicação. Indiscutivelmente, esta é a principal vantagem destas estruturas.

Cascas de materiais compostos laminados reforçados por fibras possuem um comportamento mais complexo que o apresentado por cascas convencionais (constituídas por um único material homogêneo e isótropo). As causas deste fato são: 1) as relações constitutivas de materiais anisótropos apresentam um acoplamento entre as componentes de tensão e de deformação de diferentes naturezas, não existente para um material isótropo, não sendo portanto estas relações invariantes com relação à uma mudança do sistema de eixos de referência; 2) materiais anisótropos podem apresentar coeficientes de Poisson maiores que 0,5 e até negativos, o que seria inadmissível de acordo com as leis da Termodinâmica para um material isótropo (NOOR; 1992); 3) a relação entre os módulos de elasticidade longitudinal e de cisalhamento transversal ( $E_L/G_{LT}$ ) de uma lâmina, sendo L (direção das fibras) e T (direções normais às fibras), como mostra a Figura 1.1 (a), pode ser em torno de 30, quando para materiais isótopos

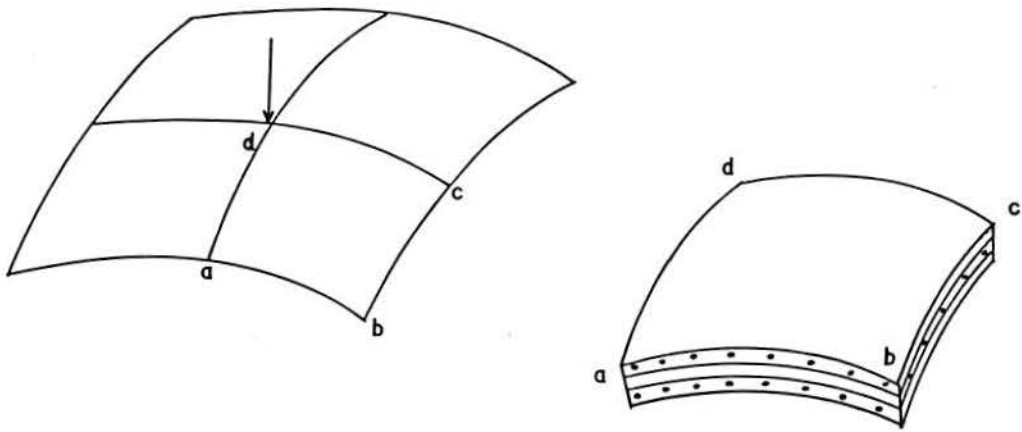


Figura 1.2 - Esquema de distribuição de lâminas em uma casca



usuais esta relação mantém-se em torno de 2,6 (GEIER; ROHWER 1989). Assim, para tais materiais, faz-se muito difícil obter proveito da intuição para se estimar resultados como se faz usualmente na análise de estruturas de materiais homogêneos e isotrópicos.

Estudos já realizados têm comprovado que uma simples mudança na disposição das lâminas de uma estrutura em casca ou nas orientações das fibras destas lâminas pode afetar enormemente a resposta da estrutura a um determinado tipo de solicitação (por exemplo: a carga de flambagem, a deflexão máxima, amplitudes e frequências de vibração, etc.). Tais constatações demonstram quanto importante se faz modelar o comportamento destas estruturas da forma mais realística possível.

Tendo em vista a grande variedade de materiais compostos laminados existentes atualmente e a que poderá existir ainda num futuro próximo, uma das maiores preocupações de pesquisadores e de projetistas consiste em modelar em forma adequada o comportamento mecânico destes materiais e em caracterizar a influência do mesmo na resposta de diferentes estruturas com eles confeccionadas. Testes experimentais têm comprovado que entre estes materiais, os mais diversos tipos de comportamentos são encontrados. Em alguns deles, por exemplo, foi constatado um comportamento elástico linear dentro de uma faixa de solicitação na qual usualmente os mesmos trabalham. Por um outro lado, comportamentos elasto-plástico, viscoelástico, viscoplástico, falhas do material por danos na matriz e/ou

nas fibras e por delaminação e ainda a grande influência no comportamento de alguns destes materiais proporcionadas por fatores ambientais, como por exemplo a temperatura e a umidade, têm sido verificados.

Explica-se assim a razão da existência de um grande número de trabalhos desenvolvidos para modelar os diversos comportamentos acima citados que podem ocorrer em determinados materiais compostos. Pode-se enquadrar estes trabalhos em dois grupos dependendo da técnica pelos mesmos utilizadas: há os que utilizam os conceitos de uma teoria já bem estabelecida para materiais isotrópicos estendida para materiais anisotrópicos (no caso a lâmina), constituindo assim uma técnica dita macromecânica e outros nos quais uma teoria micromecânica é desenvolvida, na qual a forma de distribuição, a proporção e as propriedades dos materiais constituintes de uma lâmina são consideradas.

Por razões funcionais ou de uso racional de material, frequentemente placas e cascas constituídas de materiais compostos laminados de espessura muito reduzida e dotadas de enrijecedores são utilizadas em projetos de estruturas. Assim, o estudo do comportamento destas estruturas constitui um importante apêndice da área de pesquisa sobre o comportamento de cascas laminadas. Em função da aplicação, cada vez em maior escala, destas estruturas como partes integrantes de automóveis, aviões, e de veículos espaciais, etc., efeitos de natureza não linear geométrica e dinâmicos são outros aspectos de importância fundamental a serem pesquisados e considerados em projetos.

## 1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O método dos elementos finitos, em suas diferentes formas clássicas (modelos em deslocamentos, mistos, híbridos e outros), tem tido aplicação destacada na solução dos problemas da mecânica estrutural, se comparado a outros métodos numéricos, entre outras razões, por sua grande capacidade em lidar com situações usuais de projeto, como por exemplo a análise de estruturas com geometrias, cargas ou condições de contorno arbitrárias e estruturas constituídas por diferentes materiais.

Desta forma, este método tem sido também especialmente eleito como instrumento de investigação do comportamento de estruturas em cascas, como pode-se concluir por mera constatação da extensa literatura sobre este assunto. O comportamento singularmente complexo de uma estrutura em casca deu origem ao desenvolvimento de um grande número de elementos finitos especificamente formulados para o estudo deste tipo de estrutura. Estes elementos podem em geral ser enquadrados num dos grupos típicos: (a) elementos planos aos quais se impõe por superposição um comportamento de membrana e de flexão; (b) elementos curvos formulados com base em uma teoria clássica de cascas; (c) elementos tridimensionais degenerados de cascas deduzidos a partir de elementos isoparamétricos tridimensionais.

Os elementos planos são fáceis de formular, porém parecem não ter desempenho satisfatório em certas

aplicações, principalmente por não modelar adequadamente o acoplamento existente entre os comportamentos de membrana e de flexão. Outras desvantagens destes elementos são o difícil tratamento de uniões (nós) nas quais convergem somente elementos coplanares e o aparecimento de momentos fletores, ao longo das uniões interelementares, não compatíveis com o comportamento da estrutura com a geometria real.

Os problemas típicos apresentados pelos elementos planos podem ser contornados ou atenuados com o uso de artifícios que acrescentam à análise um esforço computacional adicional. Permanece, porém, a necessidade de avaliar a eficiência que pode ser obtida com o uso de tais artifícios em termos comparativos ao desempenho de outros elementos disponíveis, tendo em vista uma determinada aplicação (GALLAGHER; 1969).

A partir dos resultados obtidos com os elementos planos, tornou-se patente a necessidade do desenvolvimento de elementos curvos, que permitissem uma melhor representação geométrica da estrutura e que representassem adequadamente o acoplamento existente entre os comportamentos de membrana e de flexão. Um grande número destes elementos foram surgindo na literatura, tendo como base diferentes teorias de cascas, e apresentando diferentes graus de sofisticação.

A formulação destes elementos curvos é em geral mais complexa que a de outros tipos de elementos, uma vez que para se obter bons resultados, faz-se necessário

adotar como base uma teoria de cascas consistente, representar adequadamente a geometria da estrutura e impor campos de deslocamentos capazes de representar os movimentos de corpo rígido e os estados de deformação constante do elemento, assim como de proporcionar adequada compatibilidade interelementar (GALLAGHER; 1976). A grande maioria de elementos curvos disponíveis na literatura é formulada para o tratamento de problemas específicos, como por exemplo cascas com simetria de revolução ou cascas abatidas. Também, grande parte deles possuem como base uma teoria de cascas fundamentada sobre a validade das hipóteses de Kirchhoff-Love, e portanto destinam-se à análise de cascas delgadas. Excelentes fontes de referências de modelos de elementos finitos planos e curvos são os trabalhos de GALLAGHER (1969), GALLAGHER (1976) e YANG et al. (1990).

Tomando como ponto de partida a formulação dos elementos isoparamétricos tridimensionais, AHMAD et al. (1970) deduziram os elementos tridimensionais degenerados de cascas impondo aos primeiros as hipóteses de deformação normal transversal nula e de que as normais à superfície média permanecem retas, embora não necessariamente normais, após a deformação. Desta maneira obtém-se elementos com nós dispostos sobre a superfície média e possuindo cinco graus de liberdade por nó (três translações e duas rotações). A experiência mostrou que estes elementos forneciam ótimos resultados na análise de cascas de grandes ou moderadas espessuras, porém o desempenho dos mesmos se deteriorava à

medida que a espessura era reduzida. Tal fenômeno, referido na literatura por "locking" tem por origem um excesso de rigidez proveniente do campo de deslocamentos adotados, principalmente nos elementos de baixa ordem com campos de deslocamentos lineares e quadráticos (ZIENKIEWICZ et al.; 1971) e (COOK et al.; 1988). Como reportado na literatura campos de deslocamentos de baixa ordem podem também proporcionar a inabilidade do elemento em representar a solicitação por flexão pura, fazendo com que num problema onde sejam predominantes os esforços de flexão obtenha-se uma resposta com predominantes esforços de membrana. Estes casos citados do mesmo fenômeno são referidos na literatura, respectivamente, por "shear locking" e "membrane locking" (PARISCH; 1980).

Qualidades contidas na formulação destes elementos, tais como, simplicidade, boa representação da geometria, incorporação de efeitos das deformações de cisalhamento transversais e outras, tem dado origem a um intenso esforço por parte de pesquisadores em eliminar as suas fragilidades; para este fim tem sido usado com relativo êxito, as técnicas de integração reduzida uniforme e seletiva (ZIENKIEWICZ et al., 1971) e (PAWSEY; CLOUGH, 1971), formulações mistas (LEE et al., 1985) e (RHIU; LEE, 1987) e outros procedimentos (IRONS, 1985), (JANG; PINSKY, 1987) e (YEOM et al., 1988). A técnica de integração reduzida pode resultar numa deficiência em "rank" da matriz de rigidez do elemento. Isto implica em o elemento poder apresentar modos cinemáticos (também referidos como

mecanismos ou modos de energia nula), ou seja, modos de deformação diferentes dos movimentos de corpo rígido aos quais correspondem energia de deformação nula. O uso da citada técnica pode assim proporcionar a singularidade ou o mal condicionamento da matriz de rigidez global da estrutura, cuja consequência pode ser a obtenção de soluções completamente erradas. Este problema e alguns procedimentos desenvolvidos para a sua solução foi discutido por BRIASSOULIS (1987). Estudos visando obter uma melhor compreensão, do ponto de vista teórico, sobre a técnica de integração reduzida e visando estabelecer relações de equivalência entre esta técnica e modelos mistos foram realizados, respectivamente, por KAMALOUKOS (1988) e MALKUS; HUGHES (1977). Contudo, o emprego da mesma no caso não linear geométrico e principalmente não linear físico, embora usado por muitos pesquisadores, é ainda objeto de investigação.

O fato de que o conceito de elementos tridimensionais degenerados lida com hipóteses cinemáticas adotadas por teorias de cascas, sem no entanto recorrer às complexidades e controvérsias nelas contidas, atraiu a comunidade engajada no estudo do comportamento de cascas pelo método dos elementos finitos. A simples e boa representação da geometria da estrutura os colocaram em posição destacada, em termos de preferência, para a realização de estudos envolvendo a consideração de efeitos não lineares geométricos. O uso deste tipo de elemento em estudos de natureza não linear geométrica e não linear

geométrica e física foi discutido, respectivamente, por RAMM; STEGMÜLLER (1982) e BATHE; DVORKIN (1983). Entre importantes contribuições dadas ao estudo do comportamento não linear de cascas de material homogêneo e isotrópico utilizando os referidos elementos são aqui destacados os trabalhos de RAMM (1977), PARISCH (1978), BATHE; BOLOURCHI (1980), PARISCH (1981), HUGHES et al. (1981), KANOK-NUKULCHAI (1981), CHANG; SAWAMIPHAKDI (1982), SURANA (1983), OLIVER; ONATE (1984). Estes trabalhos fazem uso de uma formulação Lagrangeana Total ou Lagrangeana Atualizada, as quais permitem o estudo do comportamento de estruturas considerando finitos os deslocamentos, as rotações e as deformações. A hipótese cinemática de inextensibilidade segundo a direção da normal à superfície média adotada para a definição do campo de deslocamentos e deformações do elemento, porém, restringe os citados trabalhos ao estudo de problemas com pequenas deformações. Vale porém ressaltar que dentro do escopo de problemas com grandes deslocamentos, moderadas ou grandes rotações e pequenas deformações pode ser enquadrada a maioria das aplicações práticas de estruturas em cascas. Dentro deste contexto, parecem ser igualmente adequadas as duas formulações citadas, conforme sugere RAMM; STEGMÜLLER (1982). Com exceção dos trabalhos de BATHE; BOLOURCHI (1980) e CHANG; SAWAMIPHAKDI (1982), todos os outros adotaram estratégias destinadas a permitir a ocorrência de rotações finitas dentro de um passo incremental da análise. Em alguns dos trabalhos mencionados, os efeitos de um comportamento



elasto-plástico do material também são investigados.

Cascas laminadas, da mesma forma que cascas convencionais, tem sido modeladas por diferentes tipos de elementos finitos (RAO, 1978), (REDDY, 1982), SOMASHEKAR et al. (1987) e WILT et al. (1990). A literatura sobre o assunto tem mostrado a importância da incorporação dos efeitos das deformações de cisalhamento transversais (REDDY, 1989), as quais eram totalmente desprezadas nos primeiros modelos desenvolvidos, como por exemplo o de RAO (1978), com base na Teoria Clássica da Laminação (JONES, 1975). Era natural portanto que a formulação dos elementos tridimensionais degenerados fosse estendida à análise de cascas laminadas, tal como fez PANDA; NATARAJAN (1981). Neste trabalho apenas a análise estática e elástica linear foi considerada. Muitos outros aspectos de uma análise estrutural têm, desde então, sido abordados fazendo uso deste tipo de elementos. A análise não linear geométrica, por exemplo, tem sido abordada em diversos trabalhos: CHANG; SAWAMI PHAKDI (1981) investigaram o comportamento de cascas laminadas na presença de grandes deslocamentos fazendo uso de uma formulação Lagrangeana Atualizada restringindo-se ao estágio pré-crítico. CHAO; REDDY (1984) consideraram a análise não linear estática (em regime pré e pós-crítico) e dinâmica (transiente) de cascas laminadas usando os mesmos elementos e uma formulação Lagrangeana Total. Diferentes aspectos do comportamento de cascas de material homogêneo e isotrópico ou laminadas anisótropas enrijecidas têm sido investigados com o uso do método dos

elementos finitos. Em sua maioria, dada a complexidade do problema, estes estudos apresentam-se restritos à análise de cascas com geometrias específicas e ao caso linear (VENKATESH; RAO, 1983), (VENKATESH; RAO, 1985), (BHIMARADDI et. al., 1989) e (PALANI et al., 1991). O primeiro trabalho a investigar a resposta não linear geométrica (estática e dinâmica) de cascas laminadas anisótropas enrijecidas parece ter sido o de LIAO; REDDY (1987). Os autores usaram modelo idêntico ao de CHAO; REDDY (1984) e utilizaram elementos tridimensionais degenerados de vigas para modelar os enrijecedores. Ainda no citado trabalho, elementos isoparamétricos tridimensionais e elementos de transição sólido-casca foram também empregados para modelar junções entre sólidos e cascas ou para modelar juntas entre cascas de diferentes curvaturas.

Em virtude da complexidade envolvida na análise elasto-plástica de materiais anisótropos, poucos trabalhos considerando efeitos elasto-plásticos tem sido desenvolvidos. OWEN; FIGUEIRAS (1983) investigaram o comportamento elasto-plástico de cascas laminadas adotando um critério de escoamento que consiste de uma extensão do critério de Huber-Mises, feita por HILL (1950), para materiais anisótropos. Neste a superfície de escoamento é definida em função de parâmetros de anisotropia os quais são atualizados durante a análise incremental. Usando este mesmo modelo acrescido de efeitos não lineares geométricos (com o qual permite-se tratar problemas com grandes deslocamentos, moderadas rotações e pequenas deformações)

FIGUEIRAS; OWEN (1984) investigaram o comportamento destas estruturas. LI; OWEN (1989) utilizaram um modelo de elemento finito em deslocamentos refinado (no qual graus de liberdade adicionais são considerados ao longo das superfícies entre camadas) e o mesmo critério de escoamento acima mencionado para também obter a resposta elasto-plástica (sob a hipótese de pequenos deslocamentos) de cascas laminadas.

A análise dinâmica (transiente) elasto-plástica, considerando pequenos deslocamentos, de cascas laminadas foi abordada por OWEN; LI (1990). No que se refere a este tipo de estruturas parece ainda não estar devidamente reportadas na literatura as análises estática e dinâmica elasto-plásticas sob as hipóteses de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações. Uma visão mais ampla do estado da arte do estudo sobre o comportamento de cascas laminadas anisótropas pelo método dos elementos finitos pode ser obtida através dos trabalhos de REDDY (1981), REDDY; CHANDRASHEKHARA, (1987), KAPANIA (1989) e NOOR (1992).

### 1.3 - HIPÓTESES e OBJETIVOS

O presente trabalho trata da análise estática (em regime pré e pós-crítico) e dinâmica (transiente) de cascas laminadas anisótropas considerando efeitos não lineares de natureza física e geométrica usando uma formulação em deslocamentos do método dos

elementos finitos. Considera-se nesta análise que:

- No que diz respeito à estrutura, sejam desprezíveis as componentes de tensão e de deformação normais transversais; as retas normais à superfície média da casca permaneçam retas porém não necessariamente normais àquela superfície após a deformação; sejam grandes os deslocamentos e as rotações porém pequenas as deformações; por fim sejam arbitrários a geometria da estrutura e os esquemas de laminação.
- No que diz respeito ao material, como caso mais geral tenha-se o de uma casca constituída por uma associação de lâminas reforçadas por fibras "fiber-reinforced laminated composite shell" e o comportamento do material seja admitido elástico linear ou elasto-plástico (com ou sem endurecimento).
- O carregamento da estrutura seja independente da sua resposta.

O modelo numérico utiliza uma formulação Lagrangeana Total concomitantemente com elementos finitos tridimensionais degenerados de cascas, neste sentido sendo portanto uma extensão do modelo apresentado em BATHE (1982) para o caso de cascas laminadas anisótropas. No que diz respeito à obtenção da resposta pós-flambagem de cascas, investiga-se o desempenho de um novo método numérico, Método do Controle por Deslocamentos Generalizados (YANG; SHIEH, 1990), como alternativa a vários outros métodos desenvolvidos para obter a resposta de estruturas em estágio pós-crítico entre os quais pode-se destacar o

método de controle por deslocamentos (ARGYRIS, 1965) e (ZIENKIEWICZ, 1971), o método de controle por trabalho (POWELL; SIMONS, 1981) e (YANG; McGUIRE, 1985) e o método do comprimento de arco constante (WEMPNER, 1971), (RIKS, 1972), (RIKS, 1979), (CRISFIELD, 1981) e (CRISFIELD, 1983). A resposta dinâmica é obtida mediante o emprego dos métodos de Newmark e da técnica incremental/iterativa do método de Newton-Raphson. Adota-se como modelo elasto-plástico o mesmo utilizado por FIGUEIRAS; OWEN (1984).

Como objetivos do presente trabalho tem-se os de obter as repostas estática e dinâmica (transiente) das citadas estruturas com base em todas as considerações feitas acima. No que diz respeito à análise estática, em regime elástico ou elasto-plástico, pretende-se dar ênfase ao estudo do comportamento destas estruturas em estágio de solicitação tal que sejam grandes os deslocamentos sofridos e sobretudo pós carga limite (quando esta existir). No caso da análise dinâmica tem-se como objetivo principal caracterizar a influência do comportamento elasto-plástico do material na resposta da estrutura obtida sob a hipótese de serem grandes os deslocamentos. Casos de estruturas constituídas por um material homogêneo e isótropo que apresentem algum tipo de anisotropia no estágio plástico serão estudados. Ainda com relação ao comportamento elasto-plástico, serão comparadas as respostas obtidas com a adoção de diferentes curvas tensão efetiva x deformação plástica efetiva e a influência da orientação das direções principais das lâminas e da disposição destas ao longo da

espessura da estrutura será investigada. A validade em se obter a resposta não linear estática e dinâmica de uma casca laminada enrijecida usando elementos tridimensionais degenerados retangulares de seis nós para modelar os enrijecedores também faz parte das investigações propostas no presente trabalho. Na solução de exemplos numéricos o desempenho de diferentes regras de integração (total, reduzida uniforme e reduzida seletiva) serão testados.

#### 1.4 - ORGANIZAÇÃO E CONTEÚDO DO TRABALHO

O conteúdo do trabalho é distribuído em oito capítulos. Os aspectos relacionados com o modelo proposto estão organizados como abaixo descrito: No capítulo 2 é feita uma breve revisão sobre relações constitutivas para materiais elástico-lineares anisótropos e em seguida são apresentadas as relações constitutivas de lâminas de materiais ortótropos elásticas e elasto-plásticas sob as hipóteses adotadas no trabalho proposto. No capítulo 3, a partir do princípio dos deslocamentos virtuais e fazendo uso de uma descrição Lagrangeana Total, a equação incremental do movimento de um elemento finito é deduzida. No capítulo 4 são apresentadas as relações referentes à formulação do modelo não linear do elemento finito empregado. No capítulo 5 são descritos os procedimentos numéricos utilizados na solução dos diferentes tipos de análise. Para testar a eficiência do modelo proposto foram resolvidos vários exemplos numéricos e os resultados

obtidos foram relatados em dois diferentes capítulos. No capítulo 6 constam todos os exemplos para os quais admitiu-se o comportamento do material como elástico-linear e no capítulo 7 relatam-se os resultados de exemplos para os quais admitiu-se o comportamento do material como elasto-plástico. No capítulo 8 são apresentadas as considerações finais do trabalho englobando algumas conclusões obtidas e sugestões para futuras investigações.

## 2. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPAS

### 2.1 - INTRODUÇÃO

Apresenta-se de início, neste capítulo, uma breve revisão de relações constitutivas elásticas lineares para alguns materiais anisótropos, os quais apresentam ou não tipos de simetria usuais em sua constituição interna.

O objetivo principal do mesmo, no entanto, é a obtenção das relações constitutivas para lâminas de materiais ortótropos elásticos lineares e elasto-plásticos perfeitos ou com endurecimento empregadas no modelo computacional para a análise não linear de cascas laminadas anisótropas proposto neste trabalho.

### 2.2 - LEI DE HOOKE GENERALIZADA

O estudo da distribuição de tensões e deformações de um corpo requer que, como premissa, algumas características do mesmo sejam estabelecidas, e que em função destas características, relações entre tensões e deformações sejam obtidas.

Aqui, por exemplo, o corpo é admitido como um sólido contínuo e elástico, e considera-se adicionalmente existir proporcionalidade entre tensões e correspondentes deformações, ou seja, admite-se que o corpo



seja elástico linear. A partir das considerações feitas pode-se estabelecer a relação entre tensões e deformações em um ponto do corpo.

Considere-se, então, o paralelepípedo de dimensões infinitesimais  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$  retirado de um corpo elástico linear, referido ao sistema de eixos cartesianos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , mostrado na Figura 2.1. Sobre as faces deste paralelepípedo, paralelas aos planos  $x_1x_2$ ,  $x_1x_3$  e  $x_2x_3$ , admite-se que atuam as componentes de tensão  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ , e  $\sigma_{23}$ . As respectivas componentes de deformação no ponto ( $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{13}$  e  $\epsilon_{23}$ ), podem ser obtidas a partir da lei de Hooke Generalizada, aqui expressa em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

(2.1)

e que em forma compacta será escrita como segue

$$\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\} \quad (2.2)$$

Os coeficientes  $d_{ij}$  são constantes elásticas do material no ponto referidas ao sistema de coordenadas

adotado. Usando forma equivalente daquela lei, pode-se obter as componentes de tensão no ponto através da relação

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

(2.3)

ou simplesmente

$$\langle \sigma \rangle = [C] \langle \epsilon \rangle \quad (2.4)$$

sendo agora as constantes  $c_{ij}$  chamadas de coeficientes de rigidez do material.

Da possibilidade de considerar que as deformações do corpo ocorrem isotermicamente, ou seja, sem haver variação de temperatura em qualquer ponto do mesmo, pode-se admitir a existência da função potencial elástico (LOVE, 1944), designada por  $\bar{V}$  (energia de deformação por unidade de volume), a partir da qual pode-se obter as componentes de tensão acima referidas por

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

Diferenciando as expressões (2.5) com relação a  $\epsilon_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) são obtidas as igualdades

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.6)$$

e destas relações conclui-se então que

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (2.7)$$

Por um outro lado através das equações (2.2) e (2.4) obtém-se a relação

$$[D] = [C]^{-1} \quad (2.8)$$

ficando portanto claro desta última que também

$$d_{ij} = d_{ji} \quad (2.9)$$

Os coeficientes  $d_{ij}$  e  $c_{ij}$  são sempre constantes, no caso considerado, quando fixados o ponto do corpo e o sistema de eixos de referência. Eles podem no entanto variar de ponto para ponto ou em um mesmo ponto para diferentes sistemas de eixos de referência. Se estas propriedades do material são as mesmas em qualquer ponto, este é dito homogêneo e, no caso em que elas variam ponto a ponto, o material é dito heterogêneo. Por um outro lado se as citadas propriedades são independentes das direções dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , o material é dito isótropo, sendo anisótropo no caso contrário.

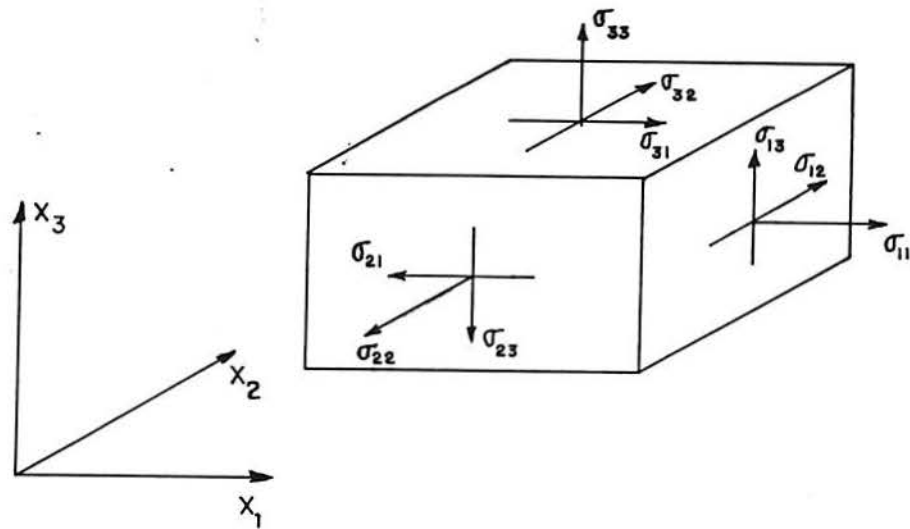


Figura 2.1 - Representação das tensões atuantes em um ponto de um corpo

As propriedades de isotropia e anisotropia estão intimamente relacionadas com a ocorrência ou não de simetrias na estrutura interna de cada ponto do material. Se tais simetrias ocorrem outras relações com os coeficientes  $c_{ij}$  e com os coeficientes  $d_{ij}$  são obtidas.

No caso mais geral em que nenhuma simetria elástica ocorre são necessárias vinte e uma constantes, como expresso pelas equações (2.1) e (2.3), para definir a relação entre deformações e tensões em um ponto do corpo.

### 2.3 - CASOS DE SIMETRIAS ELÁSTICAS APRESENTADOS POR MATERIAIS

Quando um material elástico apresenta algum tipo de simetria na sua estrutura interna, como já citado anteriormente, outras relações com as constantes  $c_{ij}$  ou  $d_{ij}$  vem a ocorrer. Aqui será feita referência a alguns tipos de simetria de grande importância prática:

#### a) Material com um plano de simetria

Considere-se por exemplo que a estrutura física do material seja simétrica com relação ao plano  $x_1x_2$ . Nesta situação as propriedades mecânicas do material em direções simetricamente dispostas em relação a aquele plano devem ser idênticas, ou seja, as constantes  $c_{ij}$  são as mesmas para qualquer um dos sistemas de eixos  $x_1x_2x_3$  e  $x'_1x'_2x'_3$ , tal que,

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = -x'_3 \quad (2.10)$$

A partir de relações de transformações entre tensões referidas a diferentes sistemas de eixos podem ser obtidas as igualdades (SOKOLNIKOFF, 1946)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma'_{11}, & \sigma_{22} &= \sigma'_{22}, & \sigma_{33} &= \sigma'_{33}, \\ \sigma_{12} &= \sigma'_{12}, & \sigma_{13} &= -\sigma'_{13}, & \sigma_{23} &= -\sigma'_{23} \end{aligned} \quad (2.11)$$

as quais são também verdadeiras, e de forma semelhante obtidas, em termos de componentes de deformação

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon'_{11}, & \epsilon_{22} &= \epsilon'_{22}, & \epsilon_{32} &= \epsilon'_{32}, \\ \epsilon_{12} &= \epsilon'_{12}, & \epsilon_{13} &= -\epsilon'_{13}, & \epsilon_{23} &= -\epsilon'_{23} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Comparando-se as expressões das componentes de tensões dos dois sistemas como obtidas a partir da equação (2.3), levando-se em consideração as relações (2.11) e (2.12), e a igualdade das constantes  $c_{ij}$  para os dois sistemas de eixos referidos, obtém-se a matriz [C] para este material na forma

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

As propriedades elásticas de um material com um plano de simetria ficam então caracterizadas por treze coeficientes de rigidez independentes. A direção  $x_3$  é dita direção principal do material.

b) Material com tres planos de simetria

Aqui considera-se o material dito ortótropo, ou seja, um material constituído de tal forma que por cada um de seus pontos pode-se passar três planos de simetria perpendiculares entre si,  $x_1x_2$ ,  $x_1x_3$  e  $x_2x_3$ , sendo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  ditas direções principais de simetria do material. Usando os procedimentos citados no caso do material com um plano de simetria, mostrados com maior detalhes em SOKOLNIKOFF (1946), obtém-se a matriz [C] deste material

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

As propriedades elásticas de um material ortótropo ficam caracterizadas por nove coeficientes de rigidez independentes.

Faz-se importante destacar um tipo particular de material ortótropo, para o qual, as propriedades mecânicas não variam para diferentes direções situadas sobre um dos tres planos de simetria elástica, o qual é assim dito um plano de isotropia. Tal material é

referido na literatura como transversalmente isótopo, e se o plano  $x_2x_3$  for o plano de isotropia a matriz [C] resulta

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

sendo ainda  $c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2$ . São necessários apenas cinco coeficientes de rigidez para a caracterização mecânica deste material.

### c) Material isótopo

Diz-se que um material é isótopo quando todos os planos que passam pelos seus pontos são planos de simetria. Neste caso, somente dois coeficientes de rigidez independentes existem, e a matriz [C], resulta

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

sendo  $c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2$ .



## 2.4 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EM TERMOS DE CONSTANTES TÉCNICAS

A caracterização dos coeficientes  $d_{ij}$  e  $c_{ij}$  deve ser feita a partir de medições realizadas em testes experimentais. Na prática apresenta-se mais simples a obtenção das constantes elásticas  $d_{ij}$  do material. A matriz [C] resultará então da equação (2.8).

Para o caso mais geral de anisotropia, a matriz [D] pode ser escrita usando um sistema de constantes técnicas, proposto por Rabinovich (LEKHNITSKII, 1963), na forma

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{\eta_{12,1}}{E_1} & \frac{\eta_{31,1}}{E_1} & \frac{\eta_{23,1}}{E_1} \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} & \frac{\eta_{31,2}}{E_2} & \frac{\eta_{23,2}}{E_2} \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} & \frac{\eta_{31,3}}{E_3} & \frac{\eta_{23,3}}{E_3} \\ \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} & \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} & \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} & \frac{1}{G_{12}} & \frac{\mu_{31,12}}{G_{12}} & \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{1,31}}{G_{13}} & \frac{\eta_{2,31}}{G_{13}} & \frac{\eta_{3,31}}{G_{13}} & \frac{\mu_{12,31}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{23,31}}{G_{13}} \\ \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} & \frac{\mu_{31,23}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Nesta equação  $E_1, E_2, E_3$  são os módulos de elasticidade longitudinais segundo as direções  $x_1, x_2, x_3$ ;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  são os módulos de cisalhamento transversal referentes aos planos paralelos a  $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$ ;  $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$  são coeficientes de Poisson ( $\nu_{ij}$ ,

razão  $-\epsilon_{jj}/\epsilon_{ii}$  para  $\sigma_{ii} \neq 0$  e demais componentes de tensão nulas).

Ainda naquela equação aparecem constantes chamadas de coeficientes de Chentsov, e que são  $\mu_{12,31}$ ,  $\mu_{12,23}$ , ...,  $\mu_{23,31}$ , tal que, por exemplo, o primeiro destes coeficientes é igual a razão entre as tensões  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{12}$  ( $\sigma_{13}/\sigma_{12}$ ), as quais atuando isoladamente sobre o paralelepípedo causam a mesma deformação de cisalhamento  $\epsilon_{12}$ .

Finalmente tem-se ainda na equação (2.17), constantes chamadas de coeficientes de influência mútua de primeiro tipo  $\eta_{12,1}$ ,  $\eta_{12,2}$ , ...,  $\eta_{23,3}$  e coeficientes de influência mútua de segundo tipo  $\eta_{1,12}$ ,  $\eta_{1,31}$ , ...,  $\eta_{3,23}$ . O coeficiente do primeiro tipo  $\eta_{12,1}$  representa a relação entre as tensões  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{12}$  ( $\sigma_{11}/\sigma_{12}$ ) as quais atuando isoladamente causam a mesma deformação  $\epsilon_{11}$  e similarmente o coeficiente do segundo tipo  $\eta_{1,12}$  é dado pela relação entre as tensões  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{11}$  ( $\sigma_{12}/\sigma_{11}$ ), as quais causam a mesma deformação  $\epsilon_{12}$ .

De maneira análoga definem-se os demais coeficientes de Chentsov ou de influência mútua. A partir da simetria daquela matriz são obtidas as seguintes relações entre as constantes técnicas de um material

$$\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j ; \quad \eta_{ij,l}/E_l = \eta_{l,ij}/G_{ij} ;$$

$$\mu_{ij,kl}/G_{kl} = \mu_{kl,ij}/G_{ij}$$

Para um material ortótropo a matriz [D] referida a eixos orientados segundo suas direcções principais apresenta-se na forma

$$[D]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix}$$

(2.18)

de modo que, como se vê da equação (2.18), para estas direcções são nulos os coeficientes de Chentsov e de influência mútua do material, concluindo-se assim que tensões normais atuantes segundo as direcções principais de simetria não causam deformações de cisalhamento, e tensões de cisalhamento atuantes nos planos principais não causam deformações normais.

Os coeficientes não nulos da matriz  $[C]_{1,2,3}$  (a qual é a matriz inversa da matriz  $[D]_{1,2,3}$ ) de um material ortótropo referida a eixos orientados segundo suas direcções principais são dados por

$$c_{11} = (1 - \nu_{23} \nu_{32}) / E_{23}$$

$$c_{22} = (1 - \nu_{13} \nu_{31}) / E_{13}$$

$$c_{33} = (1 - \nu_{12} \nu_{21}) / E_{12}$$

$$c_{12} = c_{21} = (\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}) / E_{23} = (\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}) / E_{13}$$

$$c_{13} = c_{31} = (\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}) / E_{23} = (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) / E_{12} \quad (2.19)$$

$$c_{23} = c_{32} = (\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}) / E_{13} = (\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}) / E_{12}$$

$$c_{44} = G_{12} ; \quad c_{55} = G_{13} ; \quad c_{66} = G_{23}$$

sendo nestas equações,

$$E_{ij} = E_i \cdot E_j \cdot \Delta \quad e$$

$$\Delta = (1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}) / (E_1 E_2 E_3)$$

Para um material isótropo as constantes técnicas independem do sistema de eixos de referência

$$E_i \quad (i=1,2,3) = E \text{ (módulo de elasticidade longitudinal)}$$

$$\nu_{ij} = \nu_{ji} \quad (i,j=1,2,3) = \nu \text{ (coeficiente de Poisson)}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G \text{ (módulo de cisalhamento transversal)}$$

sendo ainda  $G = E/2(1+\nu)$ , de modo que as matrizes [C] e [D] deste material resultam, conhecidamente, muito simples.

## 2.5 - RELAÇÃO CONSTITUTIVA DE UMA LÂMINA SEGUNDO SUAS DIREÇÕES PRINCIPAIS DE SIMETRIA

Interessa aqui, em particular, estabelecer a relação constitutiva de uma lâmina de material ortótropo sob a hipótese, usualmente adotada em teorias lineares e não lineares de cascas, de serem nulas as componentes de tensão e de deformação normais transversais.

Assim, considera-se neste trabalho a análise de cascas constituídas por lâminas de materiais ortótropos, admitindo serem desprezíveis as tensões e deformações normais  $\sigma_{33}$  e  $\epsilon_{33}$ , respectivamente, sendo a direção 3 normal à superfície média de tais estruturas. Sendo 1 e 2 as direções principais de simetria da lâmina (vide Fig. 1.1) a relação  $\epsilon \times \sigma$  resulta

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

(2.20)

Da matriz [D] acima apresentada, obtém-se a partir da relação (2.8) a matriz [C]<sub>1,2,3</sub>, a qual é dada por

$$\begin{bmatrix} E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{12}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{12}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix}$$

(2.21)

## 2.6 - RELAÇÃO CONSTITUTIVA DE UMA LÂMINA SEGUNDO EIXOS LOCAIS

Uma situação usual na análise de estruturas constituídas de lâminas ortótropas é ter-se conhecida a matriz constitutiva referida aos eixos principais de simetria elástica do material, dada pela equação (2.21) e

ser requerida a matriz constitutiva  $[C]$ , referente a um particular sistema de eixos  $x'_1$ ,  $x'_2$  e  $x'_3$  (definidos neste trabalho como na Figura 2.2), tal que as direções dos eixos 3 e  $x'_3$  coincidam, e as direções principais 1 e 2 formam, respectivamente, com as direções  $x'_1$  e  $x'_2$  um ângulo  $\theta$ . Para este sistema vale a relação tensão x deformação

$$\langle \sigma' \rangle = [C'] \langle \varepsilon' \rangle \quad (2.22)$$

sendo

$$\langle \sigma' \rangle = ( \sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{12}, \sigma'_{13}, \sigma'_{23} )^T \quad (2.23)$$

$$\langle \varepsilon' \rangle = ( \varepsilon'_{11}, \varepsilon'_{22}, \varepsilon'_{12}, \varepsilon'_{13}, \varepsilon'_{23} )^T \quad (2.24)$$

Através das relações de transformação entre os vetores de componentes de tensão e de deformação referidos aos dois sistemas é obtida a relação entre as citadas matrizes (FIGUEIRAS; OWEN, 1983)

$$[C'] = [T_\sigma]^T [C]_{1,2,3} [T_\sigma] \quad (2.25)$$

sendo  $[T_\sigma]$  dada por

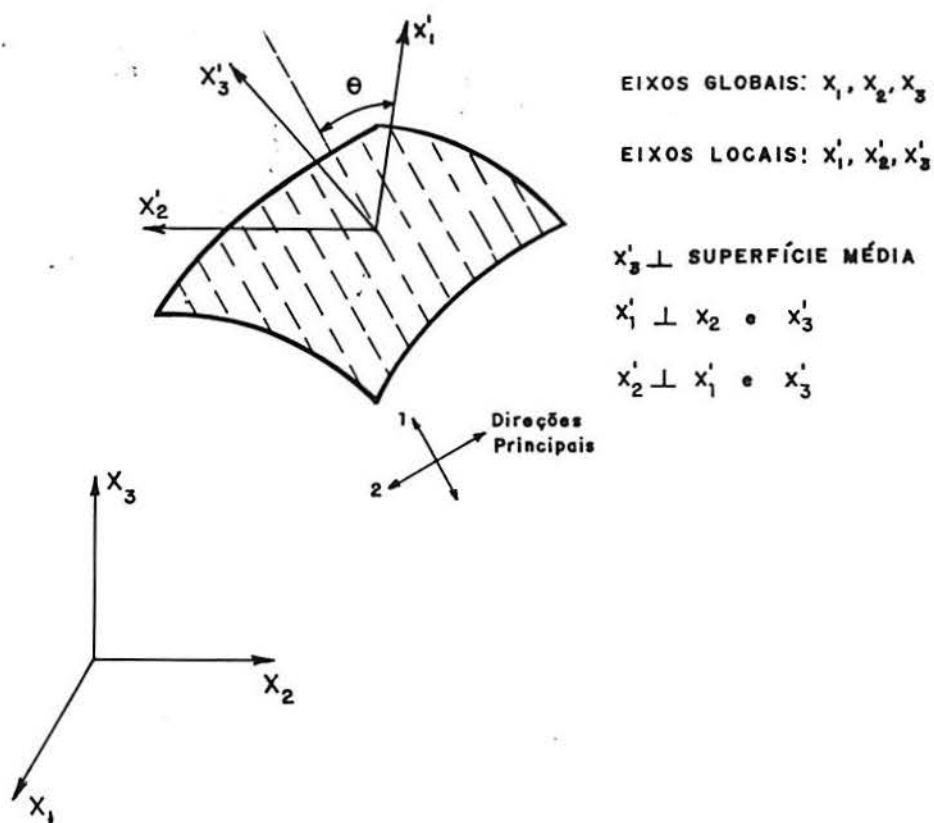


Figura 2.2 - Orientação das direções principais e dos eixos locais em um ponto da lâmina com relação aos eixos globais da estrutura



$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(2.26)

## 2.7 - RELAÇÃO CONSTITUTIVA INCREMENTAL ELASTO-PLÁSTICA DE UMA LÂMINA

### 2.7.1 - Considerações Gerais sobre a Teoria da Plasticidade Associada

Nesta seção os preceitos básicos da Teoria da Plasticidade Associada serão utilizados com a finalidade de estabelecer a relação constitutiva incremental, para uma lâmina constituída de material ortótropo exibindo comportamento elasto-plástico com ou sem endurecimento.

Este comportamento pode ser fisicamente caracterizado por um estágio inicial elástico linear, e um posterior (escoamento) no qual ocorrem deformações que não dependem explicitamente do tempo e que permanecem após o descarregamento.

Os preceitos acima citados são resumidos a seguir:

1. Admite-se a existência de uma função chamada função de escoamento ou critério de escoamento, a

qual estabelece as condições em que ocorre escoamento em um ponto do material. Aqui esta função será particularmente expressa na forma

$$f(\sigma, \kappa) = F(\sigma) - Y(\kappa) = 0 \quad (2.27)$$

sendo  $F$  uma função escalar das componentes de tensão atuantes no ponto e  $Y$  função de uma variável (ou conjunto de variáveis) dependente da história das deformações.

A equação (2.27) pode ser geometricamente interpretada como uma hipersuperfície, chamada superfície de escoamento, definida no espaço das tensões, cuja forma é dependente da trajetória das cargas aplicadas.

No caso em que a função  $Y$  é constante, esta superfície não varia e diz-se que o material é elasto-plástico perfeito; no caso contrário, diz-se que o material apresenta comportamento elasto-plástico com endurecimento.

2. A função Potencial Plástico, proposta por von Mises, é identificada com a própria função de escoamento (CHEN; HAN, 1988). Assim o vetor de incrementos de deformações plásticas resulta definido na forma

$$\{d\varepsilon_p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.28)$$

Nesta equação, chamada lei de escoamento plástico associada ou também lei da normalidade,  $d\lambda$  é uma

grandeza escalar cuja expressão matemática será definida posteriormente, e

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} \right\rangle^T \quad (2.29)$$

Outras considerações de importância sobre a teoria da plasticidade relacionadas com os preceitos acima referidos serão aqui lembradas.

Em primeiro lugar será feita menção ao fato de que a prova da lei da normalidade pode ser obtida com base nas hipóteses da irreversibilidade das deformações plásticas ocorridas durante um ciclo de carga/descarga e da validade do segundo postulado de Drucker-Prager (CHEN; HAN, 1988). De tais hipóteses tem-se também como conclusões o fato de que a superfície de escoamento deve ser convexa e a garantia da unicidade da solução de um problema de valores de contorno elasto-plástico.

Nas Figuras 2.3 e 2.4, respectivamente, são geometricamente representadas a convexidade da superfície de escoamento e a lei da normalidade.

Faz-se também necessário lembrar que a partir da equação (2.27) são estabelecidas condições para que um ponto do corpo encontre-se em regime elástico (quando  $F < Y$ ) ou plástico (se  $F = Y$ ).

No estado plástico o incremento  $dF$ , causado pelos incrementos das componentes de tensão ocorridos quando o corpo é gradualmente solicitado, define diferentes estados em que pode se encontrar um ponto do corpo como

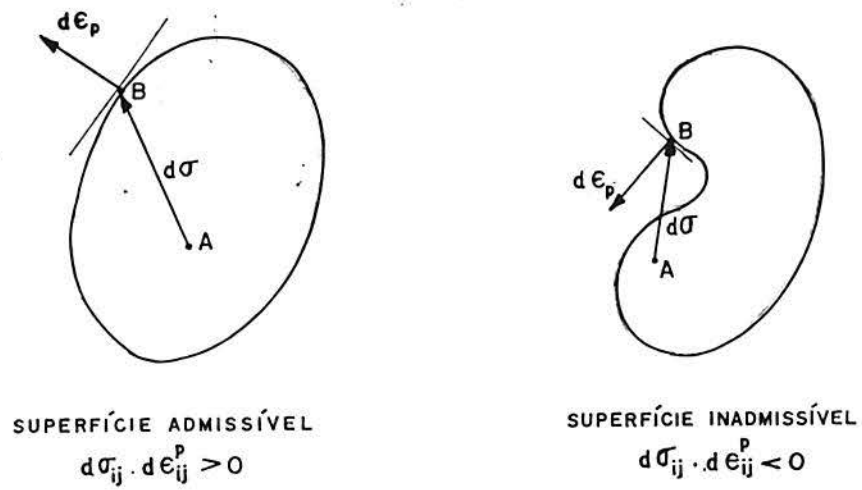


Figura 2.3 - Convexidade da superfície de escoamento

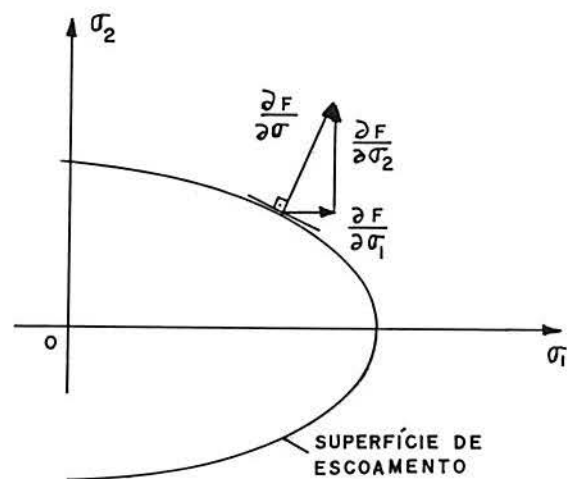


Figura 2.4 - Lei da normalidade

segue:

$dF < 0$  - O ponto encontra-se em descarga, a qual verifica-se sob regime elástico e, assim, em retorno ao interior da superfície de escoamento.

$dF = 0$  - Diz-se neste caso que o ponto está sob carregamento neutro. Se o material é elasto-plástico perfeito ocorrerão deformações plásticas e o ponto permanecerá sob a superfície de escoamento. Por outro lado, se o material possui endurecimento, nenhuma deformação plástica ocorrerá no ponto.

$dF > 0$  - O ponto está sujeito a carregamento em regime plástico (comportamento plástico de um material que possui endurecimento). A superfície de escoamento modifica-se ao passo que deformações plásticas ocorrem no ponto.

Finalmente, um ponto plastificado, desde que não esteja em estado de descarregamento, situa-se sempre sobre a superfície de plastificação, afirmação esta que é expressa pela chamada lei da consistência

$$df = 0 \quad (2.30)$$

Dentro do escopo da análise aqui proposta, o comportamento elasto-plástico do material será modelado com base nos preceitos acima citados. Em síntese, deve-se para isto serem estabelecidas: a) A relação constitutiva elástica (válida antes do ponto sofrer escoamento); b) A condição que estabelece ter ou não ocorrido escoamento no

ponto; c) A lei que descreve o endurecimento apresentado pelo material; d) A relação constitutiva incremental válida após o ponto sofrer escoamento. Entre estes requerimentos fundamentais, resta apenas fixar os três últimos, pois como já anteriormente mencionado, antes de ocorrer escoamento em qualquer ponto do material, as tensões e deformações no mesmo, ou seus respectivos incrementos, relacionam-se através da lei de Hooke generalizada. Os demais requerimentos serão a seguir especificados ou deduzidos, conforme o caso.

### 2.7.2 - Critério de Escoamento

Neste trabalho será admitido como critério de escoamento uma extensão do critério de Huber-Mises (HILL, 1950) para materiais anisótropos (ortótropos, mais especificamente).

Identificando este critério com a forma da equação (2.27) tem-se

$$F(\sigma) = \bar{\sigma} = [\alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{13}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3\alpha_{44}\sigma_{12}^2 + 3\alpha_{55}\sigma_{13}^2 + 3\alpha_{66}\sigma_{23}^2]^{1/2} \quad (2.31)$$

na qual os índices 1, 2 e 3 especificam as direções principais do material, os coeficientes  $\alpha_s$  representam parâmetros de anisotropia e  $\bar{\sigma}$  é chamada de tensão efetiva (CHEN; HAN, 1988). Assumindo  $\sigma_3 = 0$ , como já estabelecido

anteriormente, resulta

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{a}_1 \sigma_{11}^2 + 2\bar{a}_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + \bar{a}_2 \sigma_{22}^2 + \bar{a}_9 \sigma_{12}^2 + \bar{a}_4 \sigma_{19}^2 + \bar{a}_5 \sigma_{29}^2 \quad (2.32)$$

na qual novos parâmetros de anisotropia  $\bar{a}_g$  são referidos.

Por um outro lado a função  $Y(\kappa)$  será identificada com a tensão de escoamento do material (ortótropo, no caso considerado), de uma direção pré-estabelecida. Admite-se, ainda, que  $Y$  seja função das deformações plásticas acumuladas, podendo portanto ser expressa como função de uma grandeza referida como deformação plástica efetiva  $\bar{\epsilon}^P$  (CHEN; HAN, 1988), a qual é definida sobre bases consistentes. Esta função define como se processa o endurecimento do material e, portanto, será tratada na seção subsequente.

Em geral os eixos principais da lâmina não coincidem com os eixos de referência locais  $x'_1$ ,  $x'_2$  e  $x'_3$ , como já mostrado na figura 2.2, em relação aos quais necessita-se estabelecer a relação constitutiva do material. Faz-se conveniente então reescrever a equação (2.32) em termos das componentes de tensão segundo as direções locais. Em forma matricial a equação (2.32) resulta

$$\bar{\sigma}^2 = \langle \sigma \rangle^T [\bar{A}] \langle \sigma \rangle \quad (2.33)$$

na qual  $\langle \sigma \rangle$  e  $[\bar{A}]$  estão referidos às direções 1, 2 e 3 e

esta última tem a forma

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{55} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Em função das componentes de tensão atuantes segundo as direções locais  $x'_1$ ,  $x'_2$  e  $x'_3$ , a equação (2.33) pode ser obtida mediante o uso da relação de transformação entre os vetores  $\langle \sigma \rangle$  e  $\langle \sigma' \rangle$ , e resulta

$$\bar{\sigma}^2 = \langle \sigma' \rangle^T [A'] \langle \sigma' \rangle \quad (2.35)$$

na qual,

$$[A'] = [T_{\epsilon}] [\bar{A}] [T_{\epsilon}]^T = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 & 0 \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} & 0 & 0 \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} & a'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{45} & a'_{55} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

sendo

$$[T_{\epsilon}] = [T_{\sigma}]^{-1} \quad (2.37)$$

Os próximos itens tratam sobre o modelo de endurecimento adotado neste trabalho e sobre a obtenção dos parâmetros de anisotropia  $\bar{a}_s$  do material. A partir destes,



os parâmetros  $a_g$  são obtidos usando a equação (2.36).

### 2.7.3 - Endurecimento do Material

O endurecimento do material, que se caracteriza pela variação do nível de tensão para o qual ocorrem deformações plásticas durante um processo de carregamento, apresenta-se como uma das dificuldades da modelagem matemática da teoria da plasticidade.

A descrição matemática deste fenômeno, referido na literatura como "work hardening" ou "strain hardening", e em se tratando de material isótropo, tem basicamente sido feita segundo um dos modelos: 1) endurecimento isótropo; 2) endurecimento cinemático. Modelos mistos, ou seja, que apresentam as características dos modelos dos itens 1 e 2 também têm sido estabelecidos, porém por apresentarem maior complexidade são empregados com uma menor frequência. As figuras 2.5 (a), 2.5 (b) e 2.5 (c), respectivamente, ilustram as formas como são idealizadas as superfícies de escoamento para um material elasto-plástico perfeito, elasto-plástico com endurecimento isótropo e elasto-plástico com endurecimento cinemático.

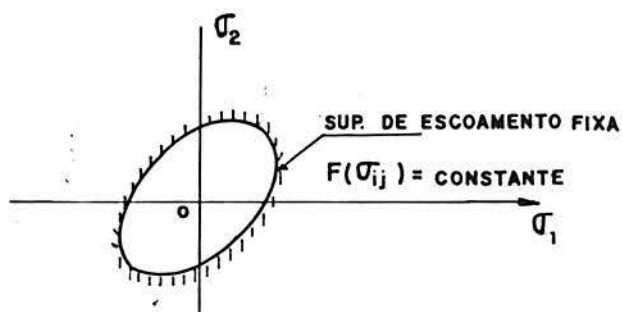
No modelo elasto-plástico perfeito, Figura 2.5 (a), a superfície de escoamento é fixa no espaço das tensões, tomado naquela figura como sendo bidimensional para facilidade de visualização.

O modelo de endurecimento isótropo, Figura 2.5 (b), caracteriza-se por uma expansão uniforme da

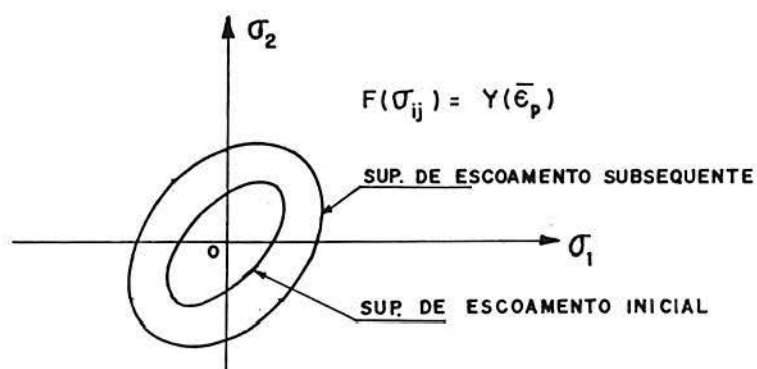
superfície de escoamento segundo lei pré-estabelecida. O critério de escoamento definido pela equação (2.27) expressa este modelo de endurecimento.

Finalmente, no modelo representado pela figura 2.5 (c) a superfície de escoamento não muda de forma, porém translaça como corpo rígido mantendo inalterados sua forma, tamanho e sua orientação dentro do espaço das tensões.

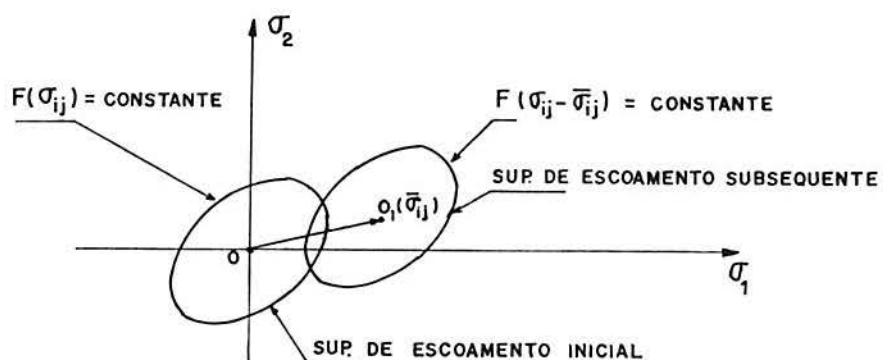
No caso de materiais anisótipos faz-se ainda particularmente mais difícil o estabelecimento de leis matemáticas que descrevam de forma satisfatória o comportamento dos mesmos em estágio pós-linear. HILL (1950) foi um dos primeiros a formular matematicamente o comportamento elasto-plástico de materiais anisótipos usando como critério de escoamento uma generalização do critério de Huber-Mises para materiais anisótipos. HU (1956) e JENSEN (1966) estenderam o critério de Hill de forma a considerar o endurecimento do material. Também, vários outros modelos numéricos destinados à descrição matemática do comportamento elastoplástico de materiais anisótipos foram desenvolvidos (REDDY; CHANDRASHEKHARA, 1987). Alguns destes trabalhos tratam, especificamente, do comportamento de materiais laminados reforçados com fibras, usando ou não conceitos de micromecânica. Por razões de simplicidade, em se tratando da análise de placas e cascas, modelos que têm como base o critério de Hill ou extensões deste critério, entre os quais, além de alguns já citados



(a) - Modelo elasto-plástico perfeito



(b) - Modelo elasto-plástico com endurecimento isótropo



(b) - Modelo elasto-plástico com endurecimento cinemático

Figura 2.5 - Idealizações da superfície de escoamento para diferentes modelos

no capítulo 1, pode-se ainda destacar os trabalhos de WHANG (1969) e de SCHELLEKENS; BORST (1989), têm sido os mais utilizados.

Neste trabalho, descreve-se o comportamento do material utilizando o mesmo procedimento adotado por FIGUEIRAS; OWEN (1984), o qual consiste de uma extensão do critério de Hill para materiais com endurecimento e que particularmente no caso isótropo recai no critério de von Mises acrescido de um modelo de endurecimento isótropo.

Mais especificamente será admitido que um ponto do material escoe quando a tensão efetiva no mesmo atinja o valor da tensão de escoamento numa direção adequadamente escolhida. Em função desta hipótese e a partir de resultados de testes experimentais são obtidos os parâmetros de anisotropia do material.

Para cada lâmina, a citada direção a ser previamente escolhida será uma de suas direções principais de simetria, diga-se a direção 1 por exemplo (vide Figura 2.2). Admite-se assim, para cada ponto plastificado, a identidade entre as funções

$$\bar{\sigma} = Y(\bar{\epsilon}^P) \equiv \bar{\sigma}_1(\epsilon_{11}^P) \quad (2.38)$$

sendo  $\bar{\sigma}_1$  a tensão de escoamento da lâmina segundo a direção 1. No modelo computacional, por razões de simplificação, uma lei linear para tais funções foi admitida, conforme mostrado na figura 2.6.

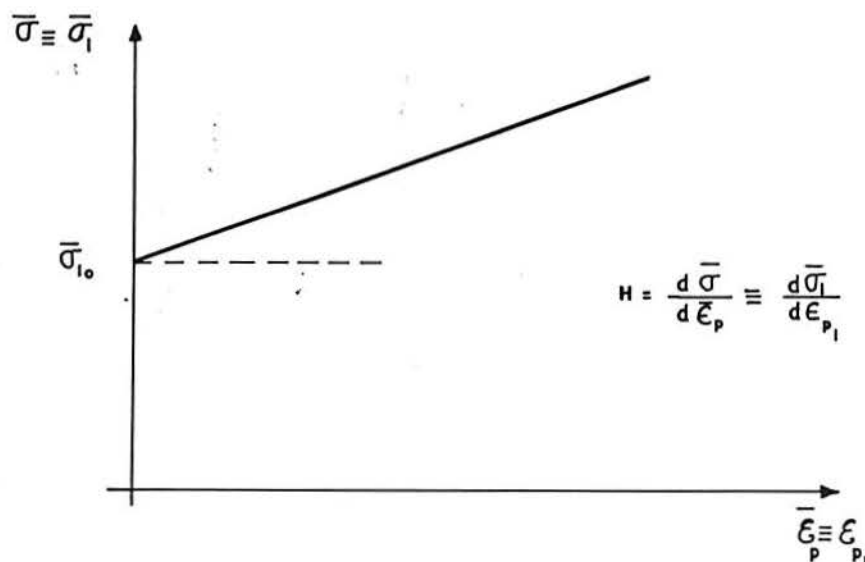


Figura 2.6 - Lei de endurecimento adotada para o material

#### 2.7.4 - Parâmetros de Anisotropia

Os parâmetros de anisotropia que figuram nas equações (2.32) e (2.34) podem ser determinados através de seis diferentes testes experimentais, os quais são : três testes de tração simples em corpos de prova retirados da lâmina solicitados segundo as direções principais 1 e 2 e segundo uma outra direção qualquer contida no plano 12, tal como por exemplo inclinada de  $45^\circ$  em relação a estes eixos e 3 testes de cisalhamento simples nos planos 12, 13 e 23.

Ressalta-se aqui que a lei de escoamento adotada pressupõe que o material apresente tensões de escoamento iguais à tração e à compressão. Com os valores das tensões de escoamento de tais testes e com a expressão da lei de escoamento adotada, os diferentes parâmetros são

obtidos conforme abaixo descrito.

Considere-se por exemplo a obtenção dos parâmetros de anisotropia iniciais, antes que o material tenha sofrido qualquer endurecimento.

Estabelecendo-se a priori que um ponto da lâmina escoce quando a tensão efetiva no mesmo atinge o valor da tensão de escoamento inicial  $\bar{\sigma}_{10}$ , correspondente à direção 1, e usando na expressão (2.32) os resultados do teste de tração naquela direção, obtém-se

$$\bar{a}_{10} = (\bar{\sigma}_{10} / \bar{\sigma}_{10})^2 = 1 \quad (2.39)$$

e de forma semelhante são também determinados os parâmetros

$$\begin{aligned} \bar{a}_{20} &= (\bar{\sigma}_{10} / \bar{\sigma}_{20})^2 \\ \bar{a}_9 &= (\bar{\sigma}_{10} / \bar{\tau}_{120})^2 \\ \bar{a}_{40} &= (\bar{\sigma}_{10} / \bar{\tau}_{130})^2 \\ \bar{a}_{50} &= (\bar{\sigma}_{10} / \bar{\tau}_{230})^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

O parâmetro  $\bar{a}_{120}$  é obtido a partir dos resultados do teste do espécime solicitado segundo uma direção inclinada  $\theta = 45^\circ$  com relação às direções 1 e 2 conforme mostrado na Figura 2.7. Chamando de  $\bar{\sigma}_{450}$  a tensão de escoamento correspondente a tal direção, tem-se

$$\sigma_{11} = \bar{\sigma}_{450} \cos^2 45^\circ$$

$$\sigma_{22} = \bar{\sigma}_{450} \sin^2 45^\circ$$

$$\sigma_{12} = \bar{\sigma}_{450} \sin 45 \cos 45^\circ$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

Substituindo estas componentes de tensão na equação (2.32), resulta

$$\bar{a}_{120} = 2 (\bar{\sigma}_{10} / \bar{\sigma}_{450})^2 - \frac{1}{2} (1.0 + \bar{a}_{20} + \bar{a}_{90}) \quad (2.41)$$

Para um material com endurecimento estes parâmetros variam ao longo da análise incremental como função que são de suas tensões de escoamento atualizadas.

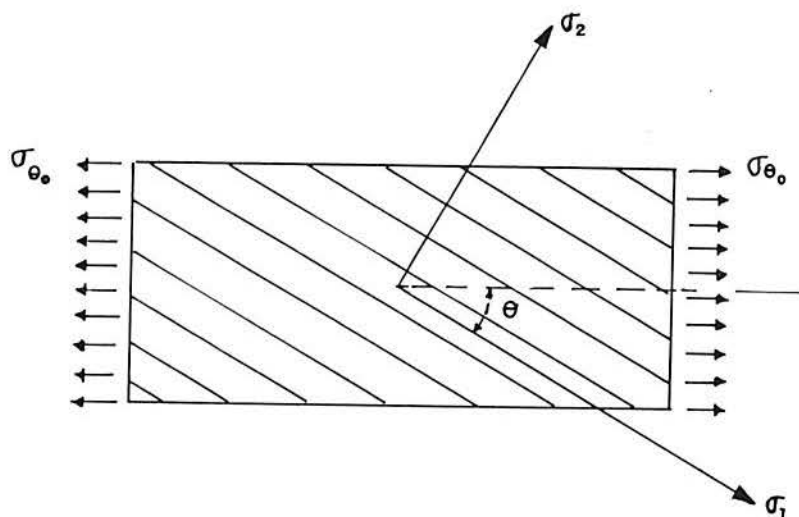


Figura 2.7 - Teste para obtenção do parâmetro  $a_{12}$

### 2.7.5 - Dedução da Relação Constitutiva Elasto-Plástica da Lâmina Referida aos Eixos Locais

O critério de escoamento adotado será expresso em função das componentes de tensão atuantes segundo às direções dos eixos locais da lâmina

$$f(\sigma', \kappa) = F(\sigma') - Y(\bar{\epsilon}^P) = 0 \quad (2.42)$$

sendo que em forma explícita  $F(\sigma')$  é obtida com o desenvolvimento da expressão

$$F(\sigma') = \bar{\sigma} = (\langle \sigma' \rangle^T [A'] \langle \sigma' \rangle)^{1/2} \quad (2.43)$$

A deformação efetiva  $\bar{\epsilon}^P$ , por sua vez, será definida em função do trabalho plástico  $W_p$  realizado pelas tensões atuantes no ponto sob suas respectivas deformações plásticas (OWEN; HINTON, 1980). São assim utilizadas as equações

$$W_p = \int dW^P \quad (2.44)$$

tal que

$$dW^P = \langle \sigma' \rangle^T \langle d\epsilon'^P \rangle \quad (2.45)$$

na qual  $\langle d\epsilon'^P \rangle$ , vetor contendo os incrementos das deformações plásticas referido as direções locais, é dado



por

$$\{d\epsilon'^P\} = \{d\epsilon'_{11}{}^P, d\epsilon'_{22}{}^P, d\epsilon'_{12}{}^P, d\epsilon'_{13}{}^P, d\epsilon'_{23}{}^P\}^T \quad (2.46)$$

e usando a lei da normalidade

$$\{d\epsilon'^P\} = d\lambda \{s'\} \quad (2.47)$$

sendo

$$\{s'\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \quad (2.48)$$

O incremento da deformação plástica efetiva é obtido a partir da relação

$$dW^P = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P \quad (2.49)$$

e a deformação plástica efetiva total por

$$\bar{\epsilon}^P = \int d\bar{\epsilon}^P \quad (2.50)$$

Desenvolvendo a equação (2.45) através da substituição das componentes de tensão segundo direções locais assim como das respectivas componentes de deformação plásticas obtidas das equações (2.47) e (2.48), resulta

$$dW^P = \bar{\sigma} d\lambda \quad (2.51)$$

e conclui-se, comparando as equações (2.49) e (2.51), que

$$d\bar{\epsilon}^P = d\lambda \quad (2.52)$$

Assume-se na teoria da plasticidade, com base na hipótese de serem pequenas as deformações, que os incrementos de deformações totais consistem da soma de parcelas elásticas e plásticas, na forma

$$\langle d\epsilon' \rangle = \langle d\epsilon'^e \rangle + \langle d\epsilon'^P \rangle \quad (2.53)$$

ou ainda

$$\langle d\epsilon' \rangle = [C']^{-1} \langle d\sigma' \rangle + d\lambda \langle s' \rangle \quad (2.54)$$

da qual em forma inversa pode-se obter

$$\langle d\sigma' \rangle = [C'] \langle d\epsilon' \rangle - d\lambda [C'] \langle s' \rangle \quad (2.55)$$

Desde que a condição de consistência é dada por

$$df = \langle s' \rangle^T \langle d\sigma' \rangle + \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}^P} d\bar{\epsilon}^P = 0 \quad (2.56)$$

a partir da expressão da função  $f$ , pela qual  $Y = \bar{\sigma}$ , e da hipótese que  $Y$  pode ser expressa como função unicamente da deformação plástica efetiva  $\bar{\epsilon}^P$ , pode-se escrever a equação (2.56) na forma

$$\langle s' \rangle^T \langle d\sigma' \rangle - \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^P} d\bar{\epsilon}^P = 0 \quad (2.57)$$

ou, ainda mais simplesmente,

$$\langle s' \rangle^T \langle d\sigma' \rangle - H_p d\bar{\epsilon}^P = 0 \quad (2.58)$$

na qual  $H_p$  (tangente à curva tensão efetiva x deformação plástica efetiva) é um parâmetro de endurecimento do material, o qual, para fins práticos é obtido da equação (2.38).

Usando a relação (2.52), a equação de consistência resulta

$$\langle s' \rangle^T \langle d\sigma' \rangle - H_p d\lambda = 0 \quad (2.59)$$

Substituindo os incrementos de tensões dados pela equação (2.55) nesta última, tem-se

$$d\lambda = \frac{1}{H_p + \langle s' \rangle^T [C'] \langle s' \rangle} \langle s' \rangle^T [C'] \langle d\epsilon' \rangle \quad (2.60)$$

Pela substituição de  $d\lambda$ , dado pela equação (2.60), na equação (2.52), obtém-se a relação constitutiva incremental elasto-plástica requerida

$$d\sigma' = [C'_{ep}] \langle \epsilon' \rangle \quad (2.61)$$

sendo a matriz constiutiva elasto-plástica dada por

$$[C'_{ep}] = [C'] - \frac{[C'](s')(s')^T[C']}{H_p + (s')^T[C'](s')} \quad (2.62)$$

### 3. FORMULAÇÃO INCREMENTAL LAGRANGEANA TOTAL DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE UM ELEMENTO FINITO

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Diferentes formulações incrementais do Método dos Elementos Finitos têm sido estabelecidas para a solução de problemas não lineares da Mecânica Estrutural.

Diferenças entre estas formulações podem ser assim situadas: a) relativas aos modelos de elementos finitos empregados; b) proporcionadas pela natureza dos efeitos não lineares que consideram e pela forma como estes efeitos são tratados.

Quanto ao item a, têm-se bem estabelecidos modelos em deslocamentos, modelos em forças ou em equilíbrio, modelos mistos e híbridos, os quais são deduzidos a partir de formas incrementais de diferentes princípios variacionais da mecânica dos sólidos, sendo o primeiro destes modelos ainda o mais utilizado.

Quanto ao item b, sabe-se que tais efeitos não lineares podem ser ditos geométricos, quando têm por causa a influência da mudança de geometria sofrida por um corpo quando solicitado por ações mecânicas ou de outra natureza, e físicos, quando devidos ao comportamento constitutivo não linear do material.

Com base na consideração de um dos tipos de

efeitos citados ou de ambos, as formulações são ditas: não linear geométrica, não linear física ou não linear geométrica e física.

Numa formulação linear admite-se que os deslocamentos e deformações sofridos pelo corpo sejam infinitesimais, que a relação constitutiva do material seja linear e que suas condições de contorno permaneçam inalteradas, sob efeito das ações externas aplicadas. Isto implica em se poder admitir que a mudança de geometria da estrutura é desprezível para efeito da avaliação da sua rigidez, e como consequência na obtenção dos deslocamentos, deformações e tensões. De tais hipóteses uma relação linear entre causa e efeito é obtida.

Numa formulação não linear geométrica, a importância da mudança de geometria sofrida pelo corpo é fundamental. Também se faz importante distinguir o tipo ou grau de não linearidade envolvido no problema que se deseja tratar, o qual em geral se enquadra numa das categorias: a) grandes deslocamentos, rotações e deformações; b) grandes deslocamentos, moderadas ou grandes rotações e pequenas deformações.

No estabelecimento de uma formulação não linear geométrica geral, se faz necessário considerar o movimento do corpo em relação a um sistema de eixos referencial, com o objetivo de determinar as configurações por ele assumidas para diferentes tempos e cargas, desde uma configuração inicial  $C_0$  correspondente ao tempo  $t=0$  até uma configuração final que se deseje obter num tempo,

diga-se por exemplo,  $t = \bar{t}$ .

Neste procedimento de discretização no tempo (real, se as variáveis envolvidas dependem explicitamente do tempo ou fictícia no caso contrário), assume-se em cada instante genérico  $t$  que todas as variáveis do problema são conhecidas e são requeridos os valores destas variáveis referentes ao tempo  $t + \Delta t$ . Assim diferentes configurações vão sendo obtidas sucessivamente ( $C_0, C_{\Delta t}, \dots, C_t, C_{t+\Delta t}, \dots, C_t^-$ ).

Este tipo de descrição do movimento de um corpo é referido na mecânica do contínuo como descrição Lagrangeana, ou descrição material, e difere da descrição Euleriana, mais apropriada para o estudo de problemas da Mecânica dos Fluidos, também referida como descrição espacial. Nesta última descrição, toma-se fixo um volume de controle e estuda-se o movimento de partículas que passam através dele. Mais detalhes sobre os tipos de descrição citados e outros existentes, podem ser obtidos em (MALVERN, 1969).

Na descrição Lagrangeana todas as grandezas são referidas a uma configuração pré-estabelecida, que pode ser a configuração inicial ou outra conhecida. Têm sido então muito usadas as descrições Lagrangeana Total e Lagrangeana Atualizada. Enquanto que na primeira todas as grandezas são referidas à configuração inicial do corpo, na última adota-se como referência a última configuração obtida (ou seja, que antecede aquela a ser determinada).

A partir da adoção de uma destas descrições

são obtidas as formulações Lagrangeana Total e Lagrangeana Atualizada, as quais mostram-se igualmente apropriadas para o tipo de problema não linear a ser tratado neste trabalho: análise não linear geométrica e física de cascas laminadas anisótropas, considerando-se grandes os deslocamentos e as rotações, e pequenas as deformações.

Uma apresentação de motivos que possa justificar a escolha entre uma ou outra formulação pode ser encontrada, por exemplo, em BATHE (1982). Nesta mesma referência forte razão é citada para que se dê preferência, no problema em questão, à formulação Lagrangeana Total. Trata-se que em problemas cujas deformações são pequenas, a não linearidade física pode ser tratada numa formulação Lagrangeana Total em forma idêntica a utilizada nos problemas de deslocamentos e deformações infinitesimais.

Pelas considerações feitas acima é que uma formulação incremental Lagrangeana Total e um modelo de elementos finitos em deslocamentos são empregados neste trabalho. Assim, com base nesta formulação, a equação não linear do movimento de um elemento finito é deduzida neste capítulo.

### 3.2 - EQUAÇÃO INCREMENTAL LAGRANGEANA TOTAL DO MOVIMENTO DE UM ELEMENTO FINITO

#### 3.2.1 - Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Considere-se na figura 3.1 três diferentes



configurações assumidas por um corpo em movimento, durante o qual pode este sofrer grandes deslocamentos, rotações e deformações, referido a um sistema fixo de coordenadas cartesianas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Naquela figura, tem-se o corpo representado em sua configuração inicial  $C_0$ , e em sucessivas configurações correspondentes aos tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ .

O equilíbrio do corpo na configuração  $C_{t+\Delta t}$ , a priori desconhecida, pode ser expresso através do princípio dos deslocamentos virtuais

$$\int_{t+\Delta t} \tau_{ij}^{t+\Delta t} \delta e_{ij}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (3.1)$$

na qual

$\tau_{ij}^{t+\Delta t}$  = Componentes cartesianas do tensor de Cauchy no tempo  $t+\Delta t$  (forças internas por unidade de área na configuração  $C_{t+\Delta t}$ )

$e_{ij}^{t+\Delta t}$  = Componentes cartesianas do tensor de deformações infinitesimais correspondentes aos deslocamentos  $u_i$  ocorridos entre as configurações dos tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ , referidas à configuração  $C_{t+\Delta t}$ , e que são dadas por

$$e_{ij}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j^{t+\Delta t}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^{t+\Delta t}} \right) \quad (3.2)$$

onde

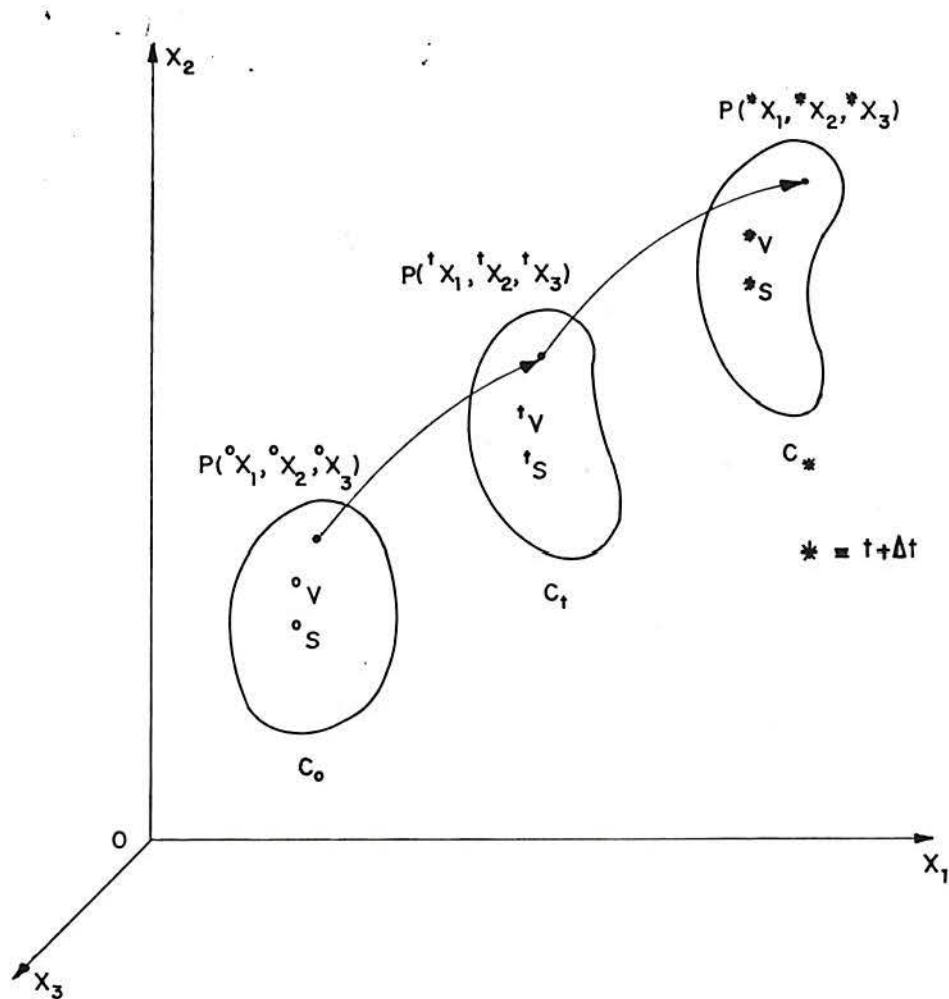


Figura 3.1 - Movimento de um contínuo referido a um sistema de eixos cartesiano

${}^{t+\Delta t}x_i$  = Componentes cartesianas de um ponto qualquer do corpo na configuração  $C_{t+\Delta t}$

sendo então

$$\delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) \quad (3.3)$$

e  ${}^{t+\Delta t}R$  expressa o trabalho realizado pelas cargas externas atuantes sobre o corpo quando este é submetido a deslocamentos virtuais  $\delta u_i$  no tempo  $t+\Delta t$ . Chamando de  ${}^{t+\Delta t}f_i^B$  e  ${}^{t+\Delta t}f_i^S$ , respectivamente, as componentes segundo a direção  $x_i$  das forças de volume e de superfície atuantes sobre o corpo, o trabalho virtual externo  ${}^{t+\Delta t}R$  pode ser expresso por

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}S} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i {}^{t+\Delta t}dS \quad (3.4)$$

O fato de que a configuração referente ao tempo  $t+\Delta t$  é desconhecida, a priori, impõe a necessidade de reescrever a equação (3.1) em uma forma, na qual as grandezas envolvidas sejam referidas à uma configuração conhecida, para que uma solução do problema não linear possa ser obtida. Como substitutos do tensor de tensão de Cauchy e do tensor de deformações infinitesimais, naquela

equação, medidas apropriadas de tensão e de deformação são requeridas.

Usando uma descrição Lagrangeana Total o princípio dos deslocamentos virtuais pode ser expresso em função dos energeticamente conjugados segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e tensor deformação de Green-Lagrange (BATHE, 1982), ambos referidos à configuração assumida pelo corpo no tempo 0

$$\int_{\mathcal{V}_0} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (3.5)$$

As componentes cartesianas do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff no tempo  $t$ , referidas à configuração inicial  $\mathcal{C}_0$ , relacionam-se com as componentes cartesianas do tensor de Cauchy por

$${}^t S_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 x_{i,m} {}^t \tau_{mn} {}^0 x_{j,n} \quad (3.6)$$

sendo

$${}^0 x_{r,s} = \frac{\partial {}^0 x_r}{\partial {}^t x_s} \quad (3.7)$$

e a relação entre as massas específicas do corpo nos tempos 0 e  $t$  ( ${}^0 \rho / {}^t \rho$ ) dada por

$$\frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} = \det \begin{bmatrix} {}^0x_{1,1} & {}^0x_{1,2} & {}^0x_{1,3} \\ {}^0x_{2,1} & {}^0x_{2,2} & {}^0x_{2,3} \\ {}^0x_{3,1} & {}^0x_{3,2} & {}^0x_{3,3} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

As componentes cartesianas do tensor de deformação de Green-Lagrange no tempo  $t$ , referidas à configuração inicial  $C_0$ , são definidas por

$${}^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \quad (3.9)$$

Os tensores de tensão e de deformação acima definidos apresentam as importantes características de serem simétricos e invariantes sob movimento de corpo rígido. A conveniência do emprego dos mesmos na solução do tipo de problema não linear a ser considerado neste trabalho encontra-se discutida com detalhes em BATHE et al. (1975) ou em BATHE (1982).

### 3.2.2 - Equação Incremental do Movimento de um Contínuo

A equação (3.5) será agora convenientemente desenvolvida com a finalidade de obter a equação incremental do movimento de um contínuo em uma forma aproximada. Na mesma, o trabalho externo  ${}^{t+\Delta t}R$  deverá ser avaliado em função de grandezas (forças de volume e de superfície) referidas à configuração do corpo no tempo 0

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{o_v} {}^{t+\Delta t} \int_i^B \delta u_i^o dV + \int_{o_s} {}^{t+\Delta t} \int_i^S \delta u_i^o dS \quad (3.10)$$

no caso da análise dinâmica a contribuição das forças de inércia a ser incluída no lado direito da equação (3.5) é dada por

$$- \int_{o_v} {}^o \rho {}^{t+\Delta t} u_i \delta u_i^o dV \quad (3.11)$$

Uma vez que também são desconhecidas as componentes de tensão de Piola-Kirchhoff e de deformação de Green-Lagrange correspondentes à configuração do corpo no tempo  $t+\Delta t$ , estas são decompostas na forma

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}^o S_{ij} \quad (3.12)$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^t \epsilon_{ij} + {}^o \epsilon_{ij} \quad (3.13)$$

ou seja, como a soma dos valores destas componentes de tensão ou de deformação correspondentes à configuração do tempo  $t$  e de seus respectivos incrementos ocorridos entre os tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ . Usando a equação (3.13), a definição das componentes do tensor deformação de Green-Lagrange dada pela equação (3.9), e a relação  ${}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + u_i$ , na qual  $u_i$  designa a componente segundo a direção  $i$  do incremento de deslocamento ocorrido em um ponto entre os tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ , obtém-se

$${}^0\varepsilon_{ij} = {}^0e_{ij} + {}^0\eta_{ij} \quad (3.14)$$

onde  ${}^0e_{ij}$  representa uma parte linear do incremento de deformação  ${}^0\varepsilon_{ij}$  dada por

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^0u_{i,j} + {}^0u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^0u_{k,j} + {}^0u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \quad (3.15)$$

e  $\eta_{ij}$  representa a parte não linear do mesmo incremento

$${}^0\eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}^0u_{k,i} {}^0u_{k,j}) \quad (3.16)$$

Durante os deslocamentos sofridos pelo corpo entre os tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ , tem-se já conhecidas as componentes de deformação  ${}^t\varepsilon_{ij}$ , sendo portanto válida a igualdade

$$\delta^{t+\Delta t} {}^0\varepsilon_{ij} = \delta {}^0\varepsilon_{ij} \quad (3.17)$$

A relação constitutiva elástica em termos de incrementos das componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e dos incrementos das componentes do tensor deformação de Green-Lagrange é dada por

$${}^0S_{ij} = {}^0C_{ijrs} {}^0\varepsilon_{rs} \quad (3.18)$$

Substituindo as equações (3.12), (3.13), (3.14), (3.17) e (3.18) na equação (3.5) resulta a equação não linear de equilíbrio

$$\int_{o_v} {}^o C_{ijrs} {}^o \epsilon_{rs} \delta {}^o \epsilon_{ij} {}^o dV + \int_{o_v} {}^t S_{ij} \delta {}^o n_{ij} {}^o dV = {}^{t+\Delta t} R$$

$$- \int_{o_v} {}^t S_{ij} \delta {}^o e_{ij} {}^o dV \quad (3.19)$$

Uma linearização desta equação pode ser introduzida admitindo-se as aproximações  ${}^o \epsilon_{ij} \cong {}^o e_{ij}$  e  $\delta {}^o \epsilon_{ij} \cong \delta {}^o e_{ij}$ , então

$$\int_{o_v} {}^o C_{ijrs} {}^o \epsilon_{rs} \delta {}^o e_{ij} {}^o dV + \int_{o_v} {}^t S_{ij} \delta {}^o n_{ij} {}^o dV = {}^{t+\Delta t} R$$

$$- \int_{o_v} {}^t S_{ij} \delta {}^o e_{ij} {}^o dV \quad (3.20)$$

Na análise dinâmica incluem-se nesta equação a contribuição das forças de inércia, obtendo-se assim a equação incremental do movimento do corpo no tempo  $t+\Delta t$  em forma aproximada

$$\int_{o_v} {}^o \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i {}^o dV + \int_{o_v} {}^o C_{ijrs} {}^o \epsilon_{rs} \delta {}^o e_{ij} {}^o dV +$$

$$\int_{o_v} {}^t S_{ij} \delta {}^o n_{ij} {}^o dV = {}^{t+\Delta t} R - \int_{o_v} {}^t S_{ij} \delta {}^o e_{ij} {}^o dV$$

$$(3.21)$$

### 3.2.3 - Equação Incremental do Movimento de um Elemento Finito

Usando os procedimentos usuais de uma



formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos, ou seja, substituindo-se na equação (3.21) as grandezas cinemáticas devidamente expressas como função dos incrementos dos deslocamentos nodais da estrutura, e rearranjando esta em forma matricial, resulta a equação incremental do movimento do elemento finito

$${}^t_0[M] {}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U}^e \rangle + ({}^t_0[K_L] + {}^t_0[K_{NL}]) \langle U^e \rangle = {}^{t+\Delta t}\langle R \rangle - {}^t_c\langle F \rangle \quad (3.22)$$

na qual  $\langle U^e \rangle$  é o vetor de incrementos de deslocamentos nodais do elemento,  ${}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U}^e \rangle$  é o vetor de acelerações nodais correspondentes ao tempo  $t+\Delta t$ ,  ${}^t_0[M]$ ,  ${}^t_0[K_L]$  e  ${}^t_0[K_{NL}]$  são, respectivamente, a matriz de massa, a matriz de rigidez linear e a matriz de rigidez não linear do elemento, e ainda,  ${}^{t+\Delta t}\langle R \rangle$  consiste no vetor de cargas nodais equivalentes às cargas externas e  ${}^t_c\langle F \rangle$  é o vetor de cargas nodais equivalentes às tensões atuantes no tempo  $t$  sobre o elemento, e que são obtidos pelas expressões

$${}^t_0[K_L] = \int_{o_v} {}^t_0[B_L]^T {}^t_0[C] {}^t_0[B_L] {}^o dV \quad (3.23)$$

$${}^t_0[K_{NL}] = \int_{o_v} {}^t_0[B_{NL}]^T {}^t_0[S] {}^t_0[B_{NL}] {}^o dV \quad (3.24)$$

$${}^t_0[M] = \int_{o_v} {}^o\rho {}^t_0[N]^T {}^t_0[N] {}^o dV \quad (3.25)$$

$${}^t_c\langle F \rangle = \int_{o_v} {}^t_0[B_L]^T {}^t_c\langle \hat{S} \rangle {}^o dV \quad (3.26)$$

Nestas equações,  ${}^t_0[B_L]$  e  ${}^t_0[B_{NL}]$  são matrizes deformação x deslocamento linear e não linear,  ${}^t_0[C]$  é a matriz constitutiva incremental,  ${}^t_0[S]$  e  ${}^t_0[\hat{S}]$  são uma matriz e um vetor contendo componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e  ${}^t[N]$  é uma matriz de interpolação dos incrementos de deslocamentos. Todas estas matrizes correspondem à configuração no tempo  $t$  e estão referidas às coordenadas globais no tempo 0. Mais detalhes sobre as mesmas são dados no capítulo 4 ou em BATHE (1982).

## 4. FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DO ELEMENTO FINITO

### 4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são estabelecidas as relações fundamentais para a implementação computacional do modelo não linear do elemento finito tridimensional degenerado.

As hipóteses básicas adotadas no modelo permitem que o elemento apresente grandes deslocamentos e rotações, mas consideram que as deformações totais do elemento e que os incrementos de rotação correspondentes a cada passo incremental da análise sejam pequenos.

### 4.2 - DESCRIÇÃO DO ELEMENTO

#### 4.2.1 - Geometria

O elemento representado na Figura 4.1 (a) encontra-se referido a um sistema de eixos cartesianos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  (eixos globais da estrutura) e sobre sua superfície média coordenadas curvilíneas normalizadas ( $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ ) são definidas.

As coordenadas  ${}^t x_i$  ( $i=1,2,3$ ) de um ponto qualquer do elemento em uma configuração correspondente a um tempo genérico  $t$ , são dadas por

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \left[ {}^t x_i^k + \frac{\xi}{2} h_k {}^t e_{si}^k \right] \quad (4.1)$$

sendo

$n$  - número de nós do elemento

${}^t x_i^k$  - coordenadas globais do nó  $k$  no tempo  $t$

$h_k$  - espessura do elemento no nó  $k$

${}^t e_{si}^k$  - componente segundo a direção  $x_i$  do vetor unitário  ${}^t \hat{e}_s^k$ , o qual é perpendicular à superfície média do elemento no nó  $k$  e no tempo  $t$

$N_k(\xi, \eta)$  - função de interpolação do nó  $k$

O vetor  ${}^0 \hat{e}_s^k$  pode ser obtido por

$${}^0 \hat{e}_s^k = \frac{{}^0 \hat{v}_s^k}{|{}^0 \hat{v}_s^k|} \quad (4.2)$$

sendo nesta  ${}^0 \hat{v}_s^k$  definido pelo produto vetorial de vetores tangentes à superfície média do elemento no ponto  $(\xi_k, \eta_k, 0)$  e no tempo 0

$${}^0 \hat{v}_s^k = ({}^0 \hat{v}_1^k \times {}^0 \hat{v}_2^k) \quad (4.3)$$

onde

$${}^0 \hat{v}_1^k = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \hat{i} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \hat{j} + \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \hat{k} \right) \quad (4.4)$$

e

$${}^0 \hat{v}_2^k = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \hat{i} + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \hat{j} + \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \hat{k} \right) \quad (4.5)$$

Para os tempos subsequentes o vetor  ${}^t \hat{e}_s^k$  vai sendo obtido incrementalmente (vide equação 4.10).

Tem-se ainda a espessura total do elemento,  $h$ , ou de uma lâmina,  $h_l$ , em um ponto qualquer dos mesmos, dadas por

$$h = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) h_k \quad ; \quad h_l = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) h_{lk} \quad (4.6)$$

#### 4.2.2 - Campo de Deslocamentos

O campo de deslocamentos do elemento tridimensional degenerado é obtido a partir da imposição das restrições abaixo citadas, sobre o campo de deslocamentos e deformações dos elementos isoparamétricos tridimensionais: (1) linhas retas normais à superfície média em sua configuração inicial permanecem retas, porém não necessariamente normais à esta superfície, após a deformação; (2) as componentes de deformação normais transversais são desprezadas.

Assumindo as hipóteses acima referidas resulta possível definir o campo de deslocamentos do elemento, adotando como graus de liberdade em cada nó, tres translações ao longo das direções globais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  e duas rotações da normal à superfície média (direção  $x'_3$ ), no nó, em torno de eixos ortogonais entre si e tangentes à mesma superfície (direções  $x'_1$  e  $x'_2$ ). As citadas direções,  $x'_1$ ,  $x'_2$  e  $x'_3$ , constituem um sistema de eixos locais obtido como abaixo descrito.

Sejam  ${}^t\hat{e}_1^k$ ,  ${}^t\hat{e}_2^k$  and  ${}^t\hat{e}_3^k$  vetores unitários que definem as direções de um sistema de eixos locais  $x_1^k$ ,  $x_2^k$  e  $x_3^k$ , sobre cada nó  $k$  do elemento, mostrados na Figura 4.1 (b). O vetor  ${}^t\hat{e}_3^k$ , normal à superfície média, já foi definido anteriormente e os demais, tangentes àquela superfície, são estabelecidos por

$${}^t\hat{e}_1^k = \frac{\hat{V}_2 \times {}^t\hat{e}_3^k}{|\hat{V}_2 \times {}^t\hat{e}_3^k|} \quad (4.7)$$

$${}^t\hat{e}_2^k = {}^t\hat{e}_3^k \times {}^t\hat{e}_1^k$$

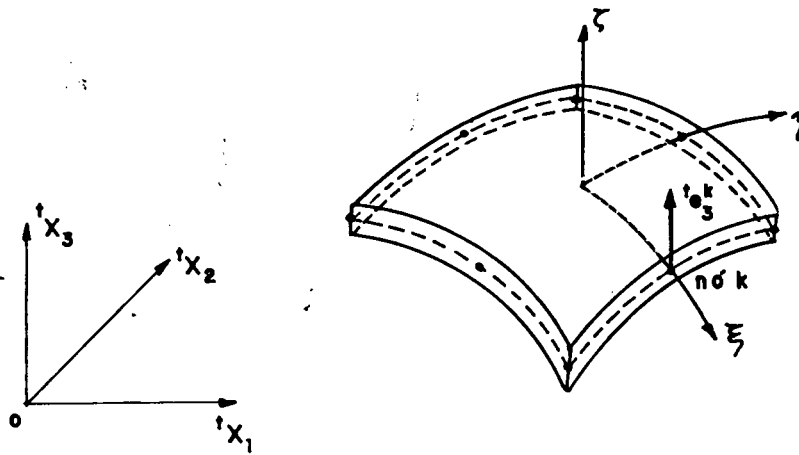
sendo  $\hat{V}_2$  um vetor unitário sobre o eixo global  $x_2$ .

Os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento no tempo  $t$  e os incrementos de deslocamentos que ocorrem entre os tempos  $t$  e  $t + \Delta t$  são, respectivamente, dados por

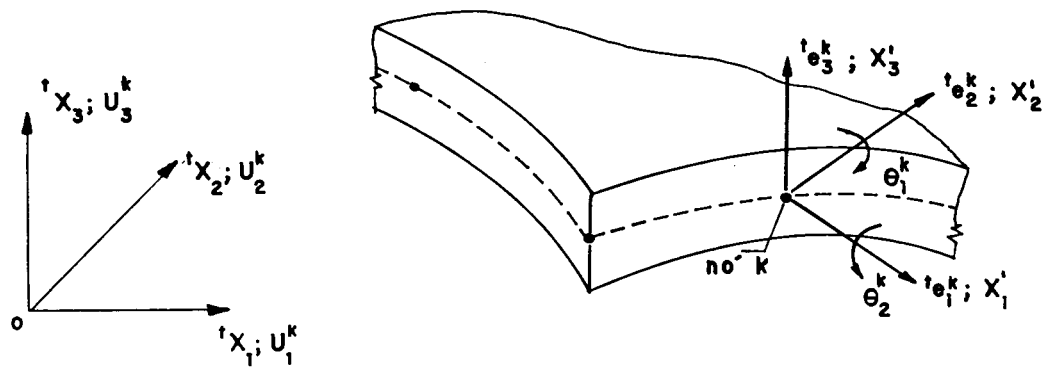
$${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left[ {}^t u_i^k + \frac{\zeta}{2} h_k ({}^t e_{3i}^k - {}^0 e_{3i}^k) \right] \quad (4.8)$$

$$u_i = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left[ u_i^k + \frac{\zeta}{2} h_k ({}^* e_{3i}^k - {}^t e_{3i}^k) \right] \quad (4.9)$$

Designando por  $\theta_1^k$  and  $\theta_2^k$ , os incrementos de rotação da normal à superfície média no nó  $k$ ,



(a) - Geometria



(b) - Campo de deslocamentos

Figura 4.1 - Elemento finito de nove nós em um tempo  $t$

correspondentes à cada passo incremental da análise, em torno dos eixos locais definidos pelos vetores  ${}^t\hat{e}_2^k$  e  ${}^t\hat{e}_1^k$ , respectivamente, e admitindo que sejam pequenos estes incrementos de rotação, pode-se escrever

$$\Delta {}^t\hat{e}_s^k = {}^{t+\Delta t}\hat{e}_s^k - {}^t\hat{e}_s^k = \theta_1^k {}^t\hat{e}_1^k - \theta_2^k {}^t\hat{e}_s^k \quad (4.10)$$

Substituindo a equação (4.10) na equação (4.9) resulta

$$u_i = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left[ u_i^k + \frac{\zeta}{2} h_k (\theta_1^k {}^t e_{1i}^k - \theta_2^k {}^t e_{2i}^k) \right] \quad (4.11)$$

a qual pode ser escrita na forma matricial

$$\langle u \rangle_{3 \times 1} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle^T = {}^t[N]_{3 \times 5n} \langle U \rangle_{5n \times 1} \quad (4.12)$$

onde

$$\langle U \rangle^T = \langle \langle U_1 \rangle^T \langle U_2 \rangle^T \dots \langle U_k \rangle^T \dots \langle U_n \rangle^T \rangle \quad (4.13)$$

$$\langle U_k \rangle^T = \langle U_1^k \quad U_2^k \quad U_3^k \quad \theta_1^k \quad \theta_2^k \rangle \quad (4.14)$$

$${}^t[N] = [{}^t[N_1] \quad {}^t[N_2] \quad \dots \quad {}^t[N_k] \quad \dots \quad {}^t[N_n]] \quad (4.15)$$

sendo



$${}^t[N_k] = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & \frac{N_k}{2} \zeta h_k {}^t e_{11}^k & -\frac{N_k}{2} \zeta h_k {}^t e_{21}^k \\ 0 & N_k & 0 & \frac{N_k}{2} \zeta h_k {}^t e_{12}^k & -\frac{N_k}{2} \zeta h_k {}^t e_{22}^k \\ 0 & 0 & N_k & \frac{N_k}{2} \zeta h_k {}^t e_{13}^k & -\frac{N_k}{2} \zeta h_k {}^t e_{23}^k \end{bmatrix}$$

(4.16)

e nesta última equação

$$N_k = N_k(\xi, \eta)$$

#### 4.3 - RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Para se obter as matrizes referidas nas expressões (3.23 a 3.26) a partir do desenvolvimento da equação (3.21), se faz necessário determinar as expressões das derivadas cartesianas dos deslocamentos e dos incrementos de deslocamentos em termos dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento.

Sendo os deslocamentos totais e seus respectivos incrementos expressos em função das coordenadas curvilíneas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , aquelas derivadas são obtidas da relação

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^t u_1}{\partial^o x_1} & \frac{\partial^t u_2}{\partial^o x_1} & \frac{\partial^t u_3}{\partial^o x_1} \\ \frac{\partial^t u_1}{\partial^o x_2} & \frac{\partial^t u_2}{\partial^o x_2} & \frac{\partial^t u_3}{\partial^o x_2} \\ \frac{\partial^t u_1}{\partial^o x_3} & \frac{\partial^t u_2}{\partial^o x_3} & \frac{\partial^t u_3}{\partial^o x_3} \end{bmatrix} = {}^o[J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^t u_1}{\partial \xi} & \frac{\partial^t u_2}{\partial \xi} & \frac{\partial^t u_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^t u_1}{\partial \eta} & \frac{\partial^t u_2}{\partial \eta} & \frac{\partial^t u_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^t u_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial^t u_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial^t u_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

(4.17)

na qual a matriz Jacobiana é dada por

$${}^o[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^o x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial^o x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial^o x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^o x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial^o x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial^o x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^o x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial^o x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial^o x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

e de forma semelhante são determinadas as derivadas dos incrementos de deslocamentos ( $\partial u_i / \partial^o x_j$ ). As derivadas dos deslocamentos totais e dos incrementos de deslocamentos com relação as coordenadas curvilíneas são obtidas das equações (4.8) e (4.11).

Substituindo as derivadas cartesianas acima referidas e a relação (4.12) na equação (3.21), as requeridas matrizes são obtidas.

Assim a matriz  ${}^t[S]$  da equação (3.24) tem a forma

$${}^t_0[S] = \begin{bmatrix} {}^tS_{11} [I]_3 & & \\ & \text{simétrica} & \\ {}^tS_{12} [I]_3 & {}^tS_{22} [I]_3 & \\ & & \\ {}^tS_{13} [I]_3 & {}^tS_{23} [I]_3 & {}^tS_{33} [I]_3 \end{bmatrix}$$

(4.19)

sendo  $[I]_3$  a matriz identidade de ordem  $3 \times 3$ .

A matriz  ${}^t_0[B_{NL}]$ , daquela mesma equação, relaciona as derivadas cartesianas dos incrementos de deslocamentos com os deslocamentos nodais do elemento

$${}^t_0\langle u, \rangle = [B_{NL}] \langle U^e \rangle \quad (4.20)$$

onde  ${}^t_0\langle u, \rangle =$

$$\langle u_{1,1} \ u_{2,1} \ u_{3,1} \ u_{1,2} \ u_{2,2} \ u_{3,2} \ u_{1,3} \ u_{2,3} \ u_{3,3} \rangle^T$$

e pode ser obtida pelo produto das matrizes

$${}^t_0[B_{NL}] = {}^t_0[H] {}^t[N] \quad (4.21)$$

sendo  ${}^t_0[H]$  uma matriz de operadores diferenciais, tal que sua transposta é dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix}$$

(4.22)

A partir da equação (3.15) obtém-se o vetor de incrementos de deformações lineares, em coordenadas globais,  ${}^0\langle e \rangle$   ${}^0\langle e \rangle^T = ({}^0e_{11} \quad {}^0e_{22} \quad {}^0e_{33} \quad 2{}^0e_{12} \quad 2{}^0e_{13} \quad 2{}^0e_{23})$  expresso por

$${}^0\langle e \rangle = {}^t[G] {}^0\langle u, \rangle \quad (4.23)$$

sendo  ${}^t[G]^T =$

$$\begin{bmatrix} 1+{}^t u_{1,1} & 0 & 0 & {}^t u_{1,2} & {}^t u_{1,3} & 0 \\ {}^t u_{2,1} & 0 & 0 & 1+{}^t u_{2,2} & {}^t u_{2,3} & 0 \\ {}^t u_{3,1} & 0 & 0 & {}^t u_{3,2} & 1+{}^t u_{3,3} & 0 \\ 0 & {}^t u_{1,2} & 0 & 1+{}^t u_{1,1} & 0 & {}^t u_{1,3} \\ 0 & 1+{}^t u_{2,2} & 0 & {}^t u_{2,1} & 0 & {}^t u_{2,3} \\ 0 & {}^t u_{3,2} & 0 & {}^t u_{3,1} & 0 & 1+{}^t u_{3,3} \\ 0 & 0 & {}^t u_{1,3} & 0 & 1+{}^t u_{1,1} & {}^t u_{1,2} \\ 0 & 0 & {}^t u_{2,3} & 0 & {}^t u_{2,1} & 1+{}^t u_{2,2} \\ 0 & 0 & 1+{}^t u_{3,3} & 0 & {}^t u_{3,1} & {}^t u_{3,2} \end{bmatrix}$$

A matriz  ${}^t_0[B_L]$ , por sua vez, relaciona o vetor de incrementos de deformações lineares  ${}_0\langle e \rangle$  com o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\langle U^e \rangle$  pela equação

$${}_0\langle e \rangle = {}^t_0[B_L] \langle U^e \rangle \quad (4.24)$$

podendo, assim, ser obtida a partir das equações (4.20), (4.21) e (4.23), como sendo

$${}^t_0[B_L] = {}^t[G] {}_0[H] {}^t[N] \quad (4.25)$$

Sendo cada elemento constituído por lâminas de diferentes materiais, as integrais das equações (3.23) a (3.26) são desenvolvidas numa soma de integrais sobre o volume de cada uma das lâminas. A resolução destas integrais através do emprego das fórmulas de quadratura de Gauss faz necessário uma mudança de variável de  $\zeta$  para  $\zeta_l$ , tal que esta última varie entre -1 e 1 ao longo da espessura de cada lâmina. Numerando-se as lâminas da face inferior (ou interna) da casca,  $\zeta = -1$ , para a face superior (ou externa),  $\zeta = 1$ , para cada lâmina  $l$  a correspondente lei de transformação é dada por

$$\zeta = -1 + [ 2 \sum_{l=1}^l h_l - h_l(1-\zeta_l) ] / h$$

A matriz  $[C]$  da equação (3.23), para cada lâmina é obtida a partir da matriz constitutiva  $[C']$  da mesma segundo direções locais  $x'_1$ ,  $x'_2$  e  $x'_3$ , definidas da

mesma forma que às direções locais estabelecidas sobre os nós do elemento ou também como descrito no capítulo 2. Em relação a este sistema de eixos locais é que são definidas as direções principais de cada lâmina do elemento, de forma que a matriz  $[C']$  possa ser obtida da equação (2.24).

Assim a matriz de rigidez elástica  ${}^t_0 [K_L]$  do elemento é obtida da integral

$${}^t_0 [K_L] = \sum_{l=1}^{n_l} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t_0 [B'_L]^T [C'] {}^t_0 [B'_L] |J| (h_l/h) d\xi d\eta d\zeta_l \quad (4.26)$$

sendo  $n_l$  o número total de lâminas.

Na análise elasto-plástica esta expressão é modificada somente pela substituição da matriz constitutiva elástica pela correspondente matriz constitutiva elasto-plástica para cada ponto plastificado do elemento.

#### 4.4 - ENRIJECEDORES EXCÊNTRICOS

Os enrijecedores são assumidos como vigas laminadas de seção transversal retangular, modeladas com elementos tridimensionais degenerados retangulares de seis nós.

Cada elemento é conectado à casca ou placa através de nós virtuais, os quais são definidos sobre uma superfície que apresenta uma excentricidade  $\bar{\zeta}$  em relação à superfície média do elemento, tal como mostrado na Figura 4.2. Assim, para cada nó real do elemento existe um

correspondente nó virtual com as mesmas coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ .

As coordenadas de um ponto qualquer do elemento podem ser obtidas por

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) [{}^t \bar{x}_i^k + \frac{1}{2} h_k (\xi - \bar{\xi}) {}^t e_{si}^k] \quad (4.27)$$

onde  ${}^t \bar{x}_i^k$  são as coordenadas globais do nó virtual  $k$ .

Para levar em consideração a excentricidade dos elementos enrijecedores são realizadas as seguintes transformações de coordenadas:

a) O vetor de deslocamentos  $\langle U^o \rangle$  correspondente aos nós reais do elemento é obtido do vetor de deslocamentos  $\langle \bar{U}^o \rangle$  correspondente aos nós virtuais por

$$\langle U^o \rangle = [T] \langle \bar{U}^o \rangle \quad (4.28)$$

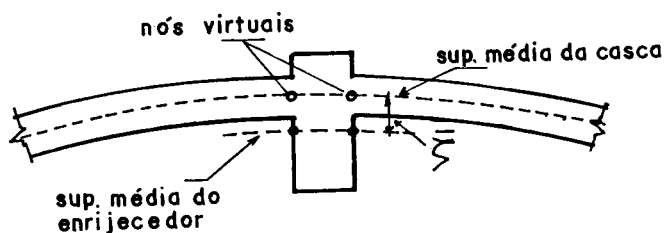


Figura 4.3 - Nós virtuais de um enrijecedor excêntrico

sendo  $[T]$  uma matriz transformação que pode ser deduzida da equação (4.11) e das relações  $\theta_i^k = \bar{\theta}_i^k$  ( $i=1,2$ ). Esta matriz tem a forma

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [T_2] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [T_k] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [T_n] \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

sendo  $[T_k]$  uma matriz que relaciona os deslocamentos dos nós real e virtual  $k$  ( $\langle U_k \rangle = [T_k] \langle \bar{U}_k \rangle$ ), a qual é dada por

$$[T_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\bar{\zeta} h}{2} e_{11}^k & \frac{\bar{\zeta} h}{2} e_{21}^k \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\bar{\zeta} h}{2} e_{12}^k & \frac{\bar{\zeta} h}{2} e_{22}^k \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\bar{\zeta} h}{2} e_{13}^k & \frac{\bar{\zeta} h}{2} e_{23}^k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

b) O vetor de forças atuantes sobre os nós virtuais do elemento é obtido do correspondente vetor de forças atuantes em seus nós reais por

$$\langle \bar{F}^e \rangle = [T]^T \langle F^e \rangle \quad (4.31)$$

c) A matriz de rigidez do elemento referida às coordenadas



da estrutura, definidas sobre os nós virtuais do elemento, é calculada usando a relação

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (4.32)$$

Devido a esparsidade da matriz  $[T]$ , as relações (4.28), (4.31) e (4.32) são facilmente calculadas.

## 5. PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

### 5.1 - INTRODUÇÃO

No presente capítulo são, primeiramente, descritos os procedimentos numéricos utilizados neste trabalho para a solução das equações não lineares de equilíbrio estático ou dinâmico.

Na análise estática, a solução das equações de equilíbrio é obtida através do método de Newton-Raphson (em sua forma padrão ou modificada), ou alternativamente, utilizando-se o método do controle por deslocamentos generalizados (MCDG). Este último método é usado aqui especialmente como ferramenta de estudo do comportamento de estruturas pós carga limite.

No caso da análise dinâmica, as equações diferenciais não lineares do movimento são discretizadas no tempo usando o método de integração direta de Newmark. As equações algébricas assim obtidas são resolvidas fazendo uso das técnicas incrementais/iterativas do método de Newton-Raphson.

Em seguimento são descritos, sumariamente, os procedimentos correspondentes à análise elasto-plástica.

São ainda referidos os critérios de convergência que estabelecem o término de um passo incremental.

## 5.2 - MÉTODO DE NEWMARK

Adotando-se os procedimentos do método de Newmark, em cada etapa da análise (transição entre tempos genéricos  $t$  e  $t+\Delta t$ ), os vetores dos deslocamentos e das velocidades nodais correspondentes ao tempo  $t+\Delta t$  são aproximados por

$${}^{t+\Delta t}\langle U \rangle = {}^t\langle U \rangle + {}^t\langle \dot{U} \rangle \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\langle \ddot{U} \rangle + \beta {}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle \right] (\Delta t)^2 \quad (5.1)$$

$${}^{t+\Delta t}\langle \dot{U} \rangle = {}^t\langle \dot{U} \rangle + \left[ (1-\alpha) {}^t\langle \ddot{U} \rangle + \alpha {}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle \right] \Delta t \quad (5.2)$$

nas quais  $\Delta t$  é o passo de tempo a ser adequadamente selecionado para que uma integração no tempo suficientemente precisa seja obtida e os valores  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 0,25$ , correspondentes ao método da aceleração média constante são adotados neste trabalho.

Substituindo na equação (3.22) a expressão do vetor  ${}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle$ , função de grandezas referentes ao tempo  $t$ , obtida com o uso da equação (5.1), resulta o sistema de equações algébricas

$${}^t_0[\hat{K}] \langle U \rangle = {}^{t+\Delta t} \langle \hat{R} \rangle \quad (5.3)$$

sendo  $\langle U \rangle = \langle \Delta U \rangle = {}^{t+\Delta t}\langle U \rangle - {}^t\langle U \rangle$  o vetor de incrementos de

deslocamentos nodais, e

$${}^t_0[\hat{K}] = a_0 {}^t_0[M] + {}^t_0[K_L] + {}^t_0[K_{NL}] \quad (5.4)$$

$${}^{t+\Delta t}\langle R \rangle = {}^{t+\Delta t}\langle R \rangle - {}^t_0\langle F \rangle + {}^t_0[M](a_1 {}^t\langle \dot{U} \rangle + a_2 {}^t\langle \ddot{U} \rangle) \quad (5.5)$$

nas quais

$$a_0 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \quad ; \quad a_1 = a_0 \Delta t \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

Após a obtenção do vetor  $\langle U \rangle$ , os vetores de deslocamentos, acelerações e velocidades correspondentes ao tempo  $t+\Delta t$  são obtidos por

$${}^{t+\Delta t}\langle U \rangle = {}^t\langle U \rangle + \langle U \rangle \quad (5.6)$$

$${}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle = a_0 \langle U \rangle - a_1 {}^t\langle \dot{U} \rangle - a_2 {}^t\langle \ddot{U} \rangle \quad (5.7)$$

$${}^{t+\Delta t}\langle \dot{U} \rangle = {}^t\langle \dot{U} \rangle + a_3 {}^t\langle \ddot{U} \rangle + a_4 {}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle \quad (5.8)$$

sendo

$$a_3 = (1-\alpha)\Delta t \quad ; \quad a_4 = \alpha\Delta t$$

### 5.3 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Em virtude do caráter aproximado das equações deduzidas, erros sucessivos vão sendo acumulados

ao longo da análise incremental. Uma forma de minimizar o afastamento da solução numérica da resposta verdadeira da estrutura consiste na realização de iterações em cada passo da análise.

Fazendo uso do método incremental/iterativo de Newton-Raphson assume-se que em cada passo da análise (transição entre os tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ ), após realizadas  $(i-1)$  iterações de cálculo, sejam conhecidos  ${}^{t+\Delta t}\langle U \rangle^{(i-1)}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\langle \dot{U} \rangle^{(i-1)}$  e  ${}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle^{(i-1)}$ .

A equação do movimento em forma incremental/iterativa fica

$${}^t_0[M] {}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle^i + ({}^{t+\Delta t}_0[K_L] + {}^{t+\Delta t}_0[K_{NL}])^{(i-1)} \langle \delta U \rangle^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\langle R \rangle - {}^{t+\Delta t}_0\langle F \rangle^{(i-1)} \quad (5.9)$$

na qual a matriz de massa foi considerada constante durante todo o passo e sendo

$$\langle \delta U \rangle^{(i)} = \langle U \rangle^{(i)} - \langle U \rangle^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\langle U \rangle^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\langle U \rangle^{(i-1)}$$

Usando os procedimentos já descritos no item 5.2, os vetores de deslocamentos e de velocidades nodais são agora aproximados por

$${}^{t+\Delta t}\langle U \rangle^{(i)} = {}^t\langle U \rangle + {}^t\langle \dot{U} \rangle \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\langle \ddot{U} \rangle + \beta {}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle^{(i)} \right] (\Delta t)^2 \quad (5.10)$$

$${}^{t+\Delta t}\langle \dot{U} \rangle^{(i)} = {}^t\langle \dot{U} \rangle + \left[ (1-\alpha) {}^t\langle \ddot{U} \rangle + \alpha {}^{t+\Delta t}\langle \ddot{U} \rangle^{(i)} \right] \Delta t \quad (5.11)$$

e a equação a ser resolvida na  $i$ -ésima iteração de cada passo da análise resulta pela substituição de  ${}^{t+\Delta t}\langle\hat{U}\rangle^{(i)}$  na equação (5.9)

$${}^t_0[\hat{K}]^{(i-1)} \langle\delta U\rangle^{(i)} = {}^{t+\Delta t}_0\langle\hat{R}\rangle^{(i-1)} \quad (5.12)$$

sendo

$${}^t_0[\hat{K}]^{(i-1)} = a_0 {}^t_0[M] + ( {}^{t+\Delta t}_0[K_L] + {}^{t+\Delta t}_0 K_{NL} )^{(i-1)} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}_0\langle\hat{R}\rangle^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}_0\langle R\rangle - {}^t_0[M](a_0\langle U\rangle^{(i-1)} - a_1\langle\dot{U}\rangle - a_2\langle\ddot{U}\rangle) \\ &\quad - {}^{t+\Delta t}_0\langle F\rangle^{(i-1)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

e

$${}^{t+\Delta t}_0\langle F\rangle^{(i-1)} = \int_{o_v} {}^{t+\Delta t}_0[B_L^{(i-1)}]^T {}^{t+\Delta t}_0\langle\hat{S}\rangle^{(i-1)} o_v \quad (5.15)$$

Uma solução convergente também pode ser obtida, dependendo do grau de não linearidade apresentado pela estrutura, com um menor esforço computacional fazendo uso das equações correspondente ao método de Newton-Raphson modificado, as quais são obtidas das anteriores fazendo-se constantes as matrizes  ${}^t_0[K_L]$  e  ${}^t_0[K_{NL}]$  durante algumas ou todas iterações realizadas em um passo incremental.

A sequência de procedimentos do método de Newton-Raphson para a obtenção da solução aproximada da equação não linear do movimento da estrutura (SUBBARAJ;

DOKAINISH, 1989) é abaixo estabelecida:

A) Inicialização da análise (t=0)

- A1. Construção da matriz de massa  ${}^t_0[M]$ .
- A2. Cálculos das constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ .
- A3. Inicialização dos vetores de deslocamentos, de velocidades e de acelerações.

B) Análise incremental/iterativa

- B1.  $t=t+\Delta t$
- B2.  $i=1$
- B3. Cálculo da matriz de rigidez efetiva  ${}^{t+\Delta t}_0[\hat{K}]^{(i-1)}$  quando for necessário ou desejado usando a equação (5.13);  ${}^{t+\Delta t}_0[\hat{K}]^{(0)}$  é determinada a partir dos deslocamentos e tensões obtidas no final do passo t).
- B4. Cálculo de  ${}^{t+\Delta t}_0\{\hat{R}\}^{(i-1)}$  pela equação (5.14);  $\{U\}^{(0)} = \{0\}$ .
- B5. Solução da equação (5.12), obtendo-se  $\{\delta U\}^{(i)}$
- B6.  $i=i+1$ , e atualizam-se: vetor de acelerações o vetor de incrementos de deslocamentos nodais e o vetor de deslocamentos nodais da estrutura.
- B7. Se  $i>1$  realiza-se teste de convergência (sim ou não).
- B8. Caso não, retorna-se ao passo B3.
- B9. Caso sim, atualiza-se o vetor de velocidades nodais e retorna-se ao passo B1 ou conclui-se a análise quando o tempo máximo pré-estabelecido for atingido.

A sequência de procedimentos para a solução

da equação de equilíbrio estático é obtida desta fazendo-se as devidas simplificações. Neste caso a variável  $t$  é fictícia e o passo 2 corresponde a atualização do vetor  ${}^{t+\Delta t}\langle R \rangle$ .

#### 5.4 - MÉTODO DO CONTROLE POR DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS (MCDG)

O Método do Controle por Deslocamentos Generalizados, (YANG; SHIEH, 1990) consiste numa técnica alternativa, entre outras existentes (RAMM, 1981) já citadas no capítulo 1, de análise do comportamento de estruturas em regime pré e pós-crítico cujos procedimentos são aqui descritos.

Em geral, na solução incremental/iterativa de problemas estruturais não lineares, o fator de incremento de carga de cada passo iterativo pode ser considerado como uma variável incógnita adicional. Assim, assumindo-se que o carregamento seja proporcional, pode-se escrever a equação de equilíbrio na forma

$$\left( {}^{t+\Delta t}_0 [K_L] + {}^{t+\Delta t}_0 [K_{NL}] \right)^{(i-1)} \langle \delta U \rangle^{(i)} = \left( {}^{t+\Delta t}_0 \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \right) \langle \bar{R} \rangle - {}^{t+\Delta t}_0 \langle F \rangle^{(i-1)} \quad (5.16)$$

ou mais simplesmente

$${}^{t+\Delta t}_0 [K_T]^{i-1} \langle \delta U \rangle^i = \Delta \lambda^i \langle \hat{R} \rangle + {}^{t+\Delta t}_0 \langle \psi \rangle^{i-1} \quad (5.17)$$



onde  $\Delta\lambda^i$  define o incremento de carga da iteração  $i$ ,  $\langle \bar{R} \rangle$  é um vetor de cargas nodais de referência e  ${}^{t+\Delta t}_o \langle \psi \rangle^{i-1}$  representa um vetor de forças desequilibradas na iteração  $i-1$ .

O vetor de incrementos de deslocamentos pode ser expresso pela soma de vetores

$$\langle \delta U \rangle^i = \Delta\lambda^i \langle \delta U_1 \rangle^i + \langle \delta U_2 \rangle^i \quad (5.18)$$

onde os vetores  $\langle \delta U_1 \rangle^i$  and  $\langle \delta U_2 \rangle^i$  são obtidos como solução dos sistemas de equações (Batoz; 1979)

$${}^{t+\Delta t}_o [K_T]^{i-1} \langle \delta U_1 \rangle^i = \langle \bar{R} \rangle \quad (5.19)$$

$${}^{t+\Delta t}_o [K_T]^{i-1} \langle \delta U_2 \rangle^i = {}^{t+\Delta t}_o \langle \psi \rangle^{i-1} \quad (5.20)$$

Adicionalmente equações específicas são estabelecidas pelos diferentes métodos existentes para o cálculo da incógnita adicional  $\Delta\lambda^{(i)}$

No método do controle por deslocamentos generalizados, usa-se um parâmetro referido como "General Stiffness Parameter" (GSP), para obter o incremento do fator de carga da primeira iteração do  $j$ -ésimo passo incremental, o qual é definido por

$$GSP = \frac{\langle \delta U \rangle_{11}^1 \langle \delta U \rangle_{11}^1}{\langle \delta U \rangle_{1j-1}^1 \langle \delta U \rangle_{1j}^1} \quad (5.21)$$

onde a representação  $\langle . \rangle$  designa vetor linha.

Assim, na primeira iteração do passo  $j$ , o incremento do fator de carga é dado por

$$\Delta\lambda_j^1 = \pm\Delta\lambda_1^1 (|\text{GSP}|)^{1/2} \quad (5.22)$$

na qual  $\Delta\lambda_1^1$  representa o incremento inicial do fator de carga (primeiro passo e primeira iteração de cálculo), enquanto que para as iterações subsequentes ( $i > 1$ ) do mesmo passo, tem-se

$$\Delta\lambda_j^i = - \frac{\langle \delta U \rangle_1^1 \langle \delta U \rangle_2^i}{\langle \delta U \rangle_1^1 \langle \delta U \rangle_1^i} \quad (5.23)$$

sendo que para  $j=1$ ,  $\langle \delta U \rangle_1^1$  é feito igual a  $\langle \delta U \rangle_1^1$ .

O sinal da equação (5.22) é definido de forma simples e automática pela variação do próprio parâmetro GSP, uma vez que este apresenta a peculiaridade de passar de sinal positivo para negativo em todo ponto limite, permitindo assim que tais pontos sejam identificados. Cada vez que isto acontece, o sentido do crescimento do carregamento da estrutura deve ser revertido.

Em forma sumária os procedimentos para a implementação deste método são abaixo descritos:

#### A) Inicialização da análise

A1. Cálculo do vetor de cargas de referência  $\langle \bar{R} \rangle$ .

A2. Inicializam-se vetores e escolhe-se  $\Delta\lambda_1^1$ .

B) Análise incremental/iterativa

- B<sub>1</sub>. Em um passo qualquer  $j$  da análise e na primeira iteração ( $i=1$ ).
- Construção da matriz de rigidez.
  - Se  $j \geq 2$  determina-se  $\Delta\lambda_j^1$  por (5.22).
  - Se  $GSP < 0$ , no passo  $j$ , verifica-se se  $GSP > 0$  no passo anterior  $j-1$  (sim ou não).
  - Caso sim  $\rightarrow$  reverte-se o sinal de  $\Delta\lambda_j$ .
  - Determina-se o vetor  $\langle \delta U_1 \rangle_j^1$  por (5.19) e  $\langle \delta U_2 \rangle_j^1 = \langle 0 \rangle$ .
- B<sub>2</sub>. Em um passo qualquer  $j$  e  $i \geq 2$
- Atualiza-se a matriz de rigidez quando necessário ou desejado.
  - Determinam-se os vetores  $\langle \delta U_1 \rangle_j^i$  e  $\langle \delta U_2 \rangle_j^i$  por (5.19) e (5.20).
  - Determina-se  $\Delta\lambda_j^i$  por (5.23).
- B<sub>3</sub>. Determina-se o vetor de incrementos de deslocamentos  $\langle \delta U \rangle_j^i$  por (5.18).
- B<sub>4</sub>. Atualizam-se : geometria, deslocamentos, cargas, etc.
- B<sub>5</sub>. Realiza-se teste de convergência (sim ou não)
- B<sub>6</sub>. Caso não, repetem-se os passos B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub> e B<sub>4</sub> até que a precisão desejada seja obtida.
- B<sub>6</sub>. Continua-se a análise incremental até que a carga total seja aplicada ou um determinado número de passos incrementais seja atingido.

## 5.5 - PROCEDIMENTOS NUMERICOS NA ANALISE ELASTO-PLASTICA

Nesta seção são descritos sucintamente os procedimentos adicionais a serem realizados no caso de uma análise elasto-plástica com base no que se expôs no capítulo 2. Tais procedimentos correspondem à determinação das tensões em cada ponto de integração plastificado num tempo genérico  $t+\Delta t$  e numa iteração  $i$ , a partir das quais são determinadas a matriz constitutiva dos mesmos e o vetor de forças residuais relativos à iteração subsequente.

Uma vez que, mesmo numa análise elástica, já se faz necessário ter sob controle a grandeza do incremento do fator de carga referente a cada passo incremental, como forma de limitar as grandezas dos incrementos de rotações ao mesmo correspondentes; também na análise elasto-plástica foi adotado a mesma estratégia como forma de minorar o afastamento da superfície de escoamento de sua real forma, o qual ocorre em função da consideração de incrementos de carga finitos ao invés de infinitesimais. Estes procedimentos são:

- A) Tratando-se da primeira iteração do passo, determina-se  $\Delta\lambda^1$  (não sendo o caso deste ser previamente definido).
- B) Usando a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais correspondentes ao estágio em que se encontra a análise (passo  $j$  e iteração  $i$ ), calculam-se os incrementos de deslocamentos, de deformações e de tensões  $\langle \Delta\sigma_e \rangle^i$  (estas calculadas em regime elástico).
- C) Apenas no caso de análise estática, na primeira iteração

de cada passo, determina-se para cada ponto ainda não plastificado anteriormente, qual a fração  $r$  de  $\Delta\lambda^1$  correspondente ao início de plastificação nos mesmos, usando-se a condição  $F(\sigma) + r(\Delta\sigma_e) = Y(\bar{\epsilon}_p)$

D) Seleciona-se o menor valor encontrado  $r_{min}$ , e se  $\alpha_m r_{min}$  for menor que 1,0, redefine-se:  $\Delta\lambda^1 = \alpha_m r_{min} \Delta\lambda^1$  ( $\alpha_m$  é um coeficiente de majoração adotado entre 1,0 e 1,25).

E) Recalculam-se os incrementos de deslocamentos e de tensões em conformidade com o novo valor de  $\Delta\lambda$ .

F) Aproximam-se as tensões totais por  $\langle\sigma\rangle^i = \langle\sigma\rangle^{i-1} + \langle\Delta\sigma_e\rangle^i$

G) Determina-se  $f(\langle\sigma\rangle^i)$  e procede-se como descrito nos itens abaixo discriminados

G<sub>1</sub>. Tratando-se de um ponto já plastificado na iteração anterior (identificado por um código pré-definido), passa-se a verificar se na iteração atual ocorreu descarregamento ( $\bar{\sigma} < Y$ ). Caso sim, segue-se para o passo H; caso contrário, o ponto continua escoando, procede-se então a redução das tensões  $\langle\Delta\sigma_e\rangle^i$  para  $\langle\Delta\sigma\rangle^i$ , como mostra a Figura 5.1, localizando o ponto sobre a superfície de escoamento. Segue-se então para o item G<sub>3</sub>.

G<sub>2</sub>. Para um ponto anteriormente em estágio elástico, verifica-se ter ocorrido ou não escoamento na iteração corrente. Não tendo ocorrido segue-se ao passo H, e no caso contrário procede-se a redução das tensões  $m\langle\Delta\sigma_e\rangle^i$  para  $\langle\Delta\sigma\rangle^i$  conforme esclarece a Figura 5.2 ( $m = \overline{AB/BC}$ ). Prossegue-se no item G<sub>3</sub>.

G<sub>3</sub>. Corrigem-se as tensões totais por

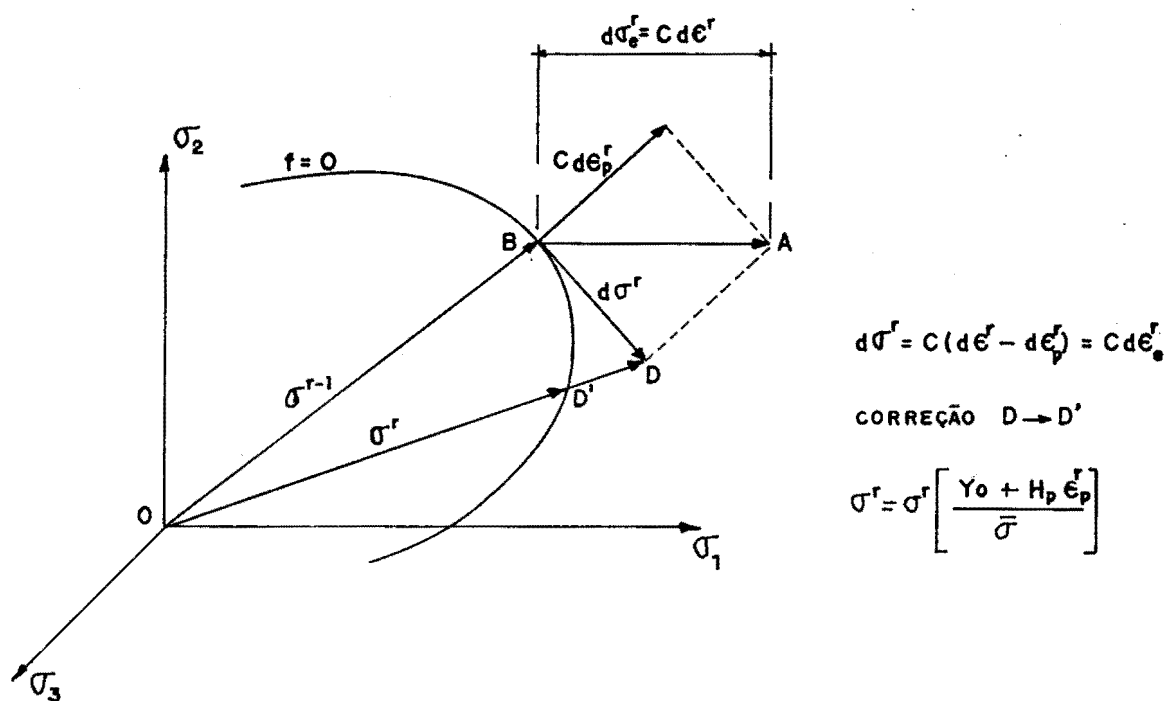


Figura 5.1 - Vetor de incrementos de tensões em um ponto plastificado anteriormente



$$\langle \sigma \rangle^i = \langle \sigma \rangle^{i-1} + \langle \Delta \sigma \rangle^i - d\lambda [C] \langle \partial f / \partial \sigma \rangle$$

sendo  $\langle \partial f / \partial \sigma \rangle$  calculado com  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle^{i-1} + (1-m) \langle \Delta \sigma \rangle^i$  na qual  $m = 1,0$  no caso da Figura 5.1.

G4. Determinam-se o incremento da deformação efetiva (equação 2.51) e a deformação efetiva total por  $\bar{\varepsilon}_p^i = \bar{\varepsilon}_p^{i-1} + \Delta \bar{\varepsilon}_p$ , com a qual será calculada a tensão de escoamento  $Y$  na iteração seguinte.

H) Se realizada as etapas anteriores em todos os pontos de integração da estrutura dá-se prosseguimento a análise até a convergência do passo incremental.

## 5.6 - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Para definir o fim de um passo incremental qualquer são adotadas, alternativamente, duas condições:

$$1) \quad \frac{\| {}^{t+\Delta t} \langle \psi \rangle^i \|}{M \| {}^{t+\Delta t} \lambda^i \| \| \langle \bar{R} \rangle \|} \leq \varepsilon$$

$$2) \quad \frac{\| \langle \delta U \rangle^{(i)} \|}{\| {}^{t+\Delta t} \langle U \rangle^{(i)} \|} \leq \varepsilon$$

Nas quais, o símbolo  $\| \quad \|$  designa a norma Euclideana de um vetor,  $\varepsilon$  é uma tolerância prescrita e  $M$  é o número de graus de liberdade da estrutura analisada. As duas condições são utilizadas na análise estática e dinâmica, porém a segunda delas é particularmente indicada quando admite-se para o material um comportamento elasto-plástico.



## 6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS I: ANÁLISE ELÁSTICA GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR

### 6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados diferentes exemplos de análise elástica geometricamente não linear, estática e dinâmica, de estruturas tais como vigas, placas e cascas. Consideram-se para efeito de avaliação dos procedimentos utilizados, casos de estruturas constituídas de material isótropo e de estruturas laminadas anisótropas, mais especificamente, constituídas por lâminas reforçadas por fibras unidirecionais. Placas e cascas dotadas de enrijecedores excêntricos ou não, são também analisadas usando os procedimentos citados no capítulo 4.

Na solução dos problemas estáticos são empregados o método de Newton - Raphson ou o método do controle por deslocamentos generalizados. Este último é sempre usado nos exemplos em que um comportamento pós-fambagem seja investigado. Na análise dinâmica são usados os métodos de Newmark e de Newton-Raphson .

Através da solução de diferentes exemplos, a eficiência de diferentes regras de integração numérica (total, reduzida uniforme e reduzida seletiva) sobre a superfície média da estrutura é verificada. Ao longo da

espessura da estrutura, em geral, adotou-se uma regra de integração total (2 pontos de Gauss) no caso desta ser constituída por uma única camada, enquanto que no caso de estruturas constituídas por mais de uma camada, sub-camadas foram consideradas e uma regra de integração reduzida (1 ponto de Gauss) em cada uma delas foi adotada.

Em todos os exemplos de estruturas laminadas anisótropas resolvidos, devido a simetria geométrica da estrutura, foi adotada a estratégia usual no caso de estruturas constituídas de material isótropo de modelar apenas um quarto (ou metade) da estrutura, por razões de economia de tempo computacional e também com a finalidade de comparar os resultados obtidos através do modelo numérico proposto neste trabalho com outros resultados encontrados por diferentes pesquisadores usando também esta estratégia. Deve-se ressaltar, no entanto, que na análise de estruturas laminadas anisótropas, principalmente no caso de esquemas de laminação tipo "angle-ply" ou de disposição de lâminas não simétrica com relação à superfície média da estrutura, o uso de modelos reduzidos requer o conhecimento por parte do analista dos casos em que é possível obter proveito da simetria da estrutura e de como isto pode ser feito. Cita-se aqui, então, os trabalhos de NOOR; CAMIN (1976), NOOR et. al. (1977) e NOOR et. al. (1987) para maiores esclarecimentos sobre o problema questionado.

Nos exemplos de análise dinâmica admitiu-se a aplicação instantânea da carga sobre a estrutura, e deslocamentos e velocidades iniciais nulos foram adotados.

## 6.2 - ANÁLISE ESTATICA : VIGAS, PLACAS E CASCAS

### 6.2.1 - Viga em balanço sob carga concentrada

Neste exemplo, a viga em balanço de material homogêneo e isotrópico, solicitada por uma carga concentrada em sua extremidade livre, mostrada na Figura 6.1 (a), é analisada. As propriedades elásticas do material são:  $E = 12 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$  e  $\nu = 0$ .

A viga foi modelada com cinco elementos de nove nós e uma regra de integração  $2 \times 2 \times 2$  (reduzida uniforme no plano do elemento e dois pontos de integração ao longo da espessura) foi empregada.

A análise foi realizada utilizando-se o método de controle por deslocamentos generalizados adotando-se de partida uma carga igual a  $1/20$  da carga de referência (4 KN) adotada. No passo incremental de número 12 foi atingida a carga de 3,87 KN, e o deslocamento vertical extremo (W), correspondente a esta carga, obtido foi de 6,456m.

Observou-se na análise desta estrutura que melhores características de convergência ocorreram (menor número de iterações por passo) sendo a matriz  $[K_{NL}]$  obtida com as tensões convergentes, ou seja, tensões obtidas no final do passo anterior, ao invés de com as tensões atualizadas, obtidas no final da última iteração concluída, apesar de ambos procedimentos produzirem resultados concordantes.

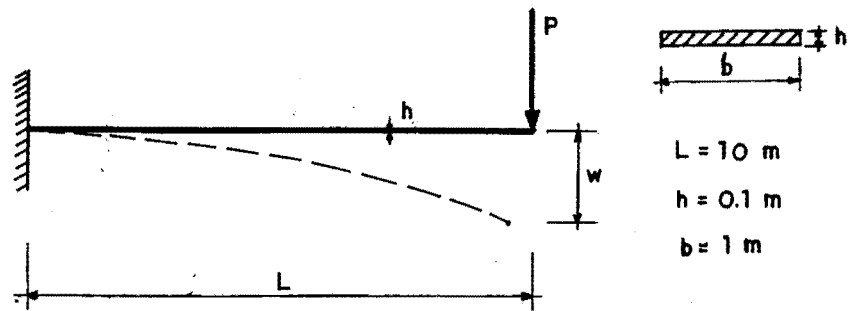
Na Figura 6.1 (b), é representada a curva carga (P) x deslocamento na extremidade da viga (W) obtida conforme acima descrito. Para efeito de comparação, são também representados os resultados encontrados por CHANG; SAWAMI PHAKDI (1982).

#### 6.2.2 - Casca cilíndrica abatida com carga no centro

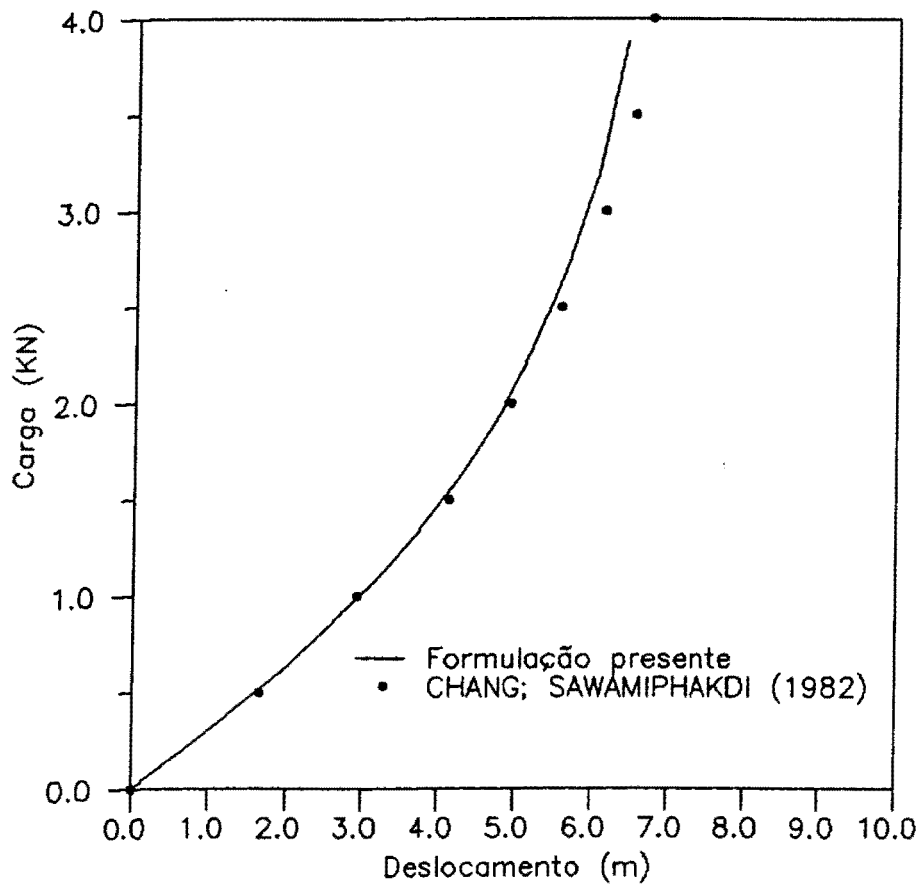
Neste exemplo considera-se a análise de uma casca cilíndrica abatida constituída de material isótropo solicitada por uma carga concentrada conforme mostra a Figura 6.2 (a). As bordas transversais da casca são livres e as longitudinais são articuladas. As constantes elásticas do material são:  $E = 3103 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0,3$ .

Apenas um quarto da casca foi discretizado com quatro elementos de nove nós, e uma regra de integração reduzida seletiva nos termos de cisalhamento da matriz de rigidez linear dos elementos foi utilizada.

Observou-se dos resultados deste exemplo, um bom desempenho do método do controle por deslocamentos generalizados e demais procedimentos empregados em modelar o comportamento fortemente não linear desta estrutura. Os fenômenos ditos "snap-through" e "snap-back", por exemplo, apresentados por esta estrutura, foram detectados sem que qualquer problema de convergência ocorresse. A carga de referência e o fator de carga inicial adotados foram, respectivamente, 0,6 KN e 0,20, e duas ou três iterações foram realizadas por passo incremental.



(a) - Geometria



(b) - Curva carga x deslocamento

Fig. 6.1 - Viga em balanço sob carga concentrada

Os resultados encontrados são na figura 6.2 (b) mostrados e comparados com os obtidos por OLIVER; ONATE (1984).

#### 6.2.3 - Casca esférica engastada sob carga concentrada

Analisa-se neste exemplo uma casca esférica de material homogêneo e isotrópico, com bordas engastadas, solicitada por uma carga concentrada em seu centro, tal como mostrado na Figura 6.3 (a). As propriedades elásticas do material são  $E = 10^7$  psi e  $\nu = 0,3$ .

Em virtude da simetria da estrutura, apenas um quarto da mesma foi considerado na análise, o qual foi discretizado com 8 elementos de 9 nós.

A curva carga x deslocamento encontrada é representada na figura 6.3 (b), na qual mostra-se ainda ter havido concordância com os resultados obtidos por OLIVER; ONATE (1984). Nesta citada referência também foram usados uma formulação Lagrangeana Total e elementos finitos tridimensionais degenerados. As relações cinemáticas usadas no modelo permitem a ocorrência de incrementos de rotações finitos em cada passo incremental. A estrutura foi discretizada com sete elementos de oito nós.

#### 6.2.4 - Placa simplesmente apoiada laminada sob pressão uniforme

Com a finalidade de testar a validade e

eficiência dos procedimentos utilizados na análise de estruturas laminadas anisótropas, considera-se aqui o caso de uma placa quadrada mostrada na Figura 6.4 ( $a = 10\text{in}$  e  $h = 0,02\text{in}$ ), constituída por duas lâminas de material composto, para o qual foram adotadas as seguintes propriedades:  $E_1 = 40 \times 10^6 \text{psi}$ ,  $E_2 = 10^6 \text{psi}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0,5 \times 10^6 \text{psi}$ ,  $G_{23} = 0,2 \times 10^6 \text{psi}$  e  $\nu_{12} = 0,25$ . Admitiu-se atuar sobre a estrutura uma carga uniformemente distribuída ( $q = 100\text{psi}$ ) e diferentes esquemas de laminação tipo "angle-ply" ( $-\theta/\theta$ , com  $\theta = 5^\circ, 25^\circ, 35^\circ$  e  $45^\circ$ ) foram considerados.

Devido a falta de simetria do material a estrutura completa foi discretizada com uma malha de  $5 \times 5$  elementos de nove nós. Os resultados obtidos (deslocamento vertical e momentos fletores  $M_{xx}$  e  $M_{yy}$  do centro da placa) com o presente trabalho, utilizando uma regra de integração reduzida seletiva no plano da estrutura e uma subdivisão de cada lâmina da estrutura em quatro camadas, são comparados aos resultados obtidos por WILT et. al. (1990) e com resultados "exatos" (obtidos via solução analítica) divulgados pelos mesmos autores nas tabelas 1, 2 e 3.

#### 6.2.5 - Placa laminada sob carga uniforme

Considera-se, neste exemplo, uma placa quadrada constituída por duas lâminas de material reforçado com fibras, "angle-ply" ( $-45/45$ ), solicitada por uma carga uniformemente distribuída. A geometria e a discretização da estrutura estão representadas na Figura 6.5 (a). As

Tabela 1 - Deslocamento central de uma placa quadrada laminada

[ $\pm\theta$ ]	(deslocamento central)		
	"Exato"	WILT et. al. (1990)	Modelo presente
[ $\pm 5$ ]	592	597	603,32
[ $\pm 25$ ]	984	1003,7	1028,03
[ $\pm 35$ ]	945	967,6	992,71
[ $\pm 45$ ]	915	937,6	962,48

Tabela 2 - Momento fletor  $M_{xx}$  no centro de uma placa quadrada laminada

[ $\pm\theta$ ]	(Momento fletor $M_{xx}$ )		
	"Exato"	WILT et. al. (1990)	Modelo presente
[ $\pm 5$ ]	1318,8	1324,8	1300,8
[ $\pm 25$ ]	843,6	844,9	836,7
[ $\pm 35$ ]	564,6	563,7	562,5
[ $\pm 45$ ]	368,1	360,8	366,8

Tabela 3 - Momento fletor  $M_{yy}$  no centro de uma placa quadrada laminada

[ $\pm\theta$ ]	(Momento fletor $M_{yy}$ )		
	"Exato"	WILT et. al. (1990)	Modelo presente
[ $\pm 5$ ]	34,2	33,8	35,4
[ $\pm 25$ ]	226,0	227,9	226,0
[ $\pm 35$ ]	304,1	304,2	304,0
[ $\pm 45$ ]	368,1	360,8	366,8



propriedades elásticas das lâminas são:  $E_1/E_2 = 25$ ;  $E_2 = 7,031 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$ ;  $G_{12}/E_2 = 0,5$ ;  $G_{13} = G_{12}$ ;  $G_{23}/E_2 = 0,2$  e  $\nu_{12} = 0,25$ .

A mesma estrutura foi analisada com duas diferentes condições de contorno C1 e C2 para fins de comparação com os resultados encontrados por LIAO; REDDY (1987), tal como mostrado nas Figuras 6.5 (b) e 6.5 (c).

No plano da estrutura uma regra de integração reduzida uniforme foi empregada enquanto que ao longo da espessura subdividiu-se cada lâmina em duas camadas e um ponto de integração em cada camada foi considerado.

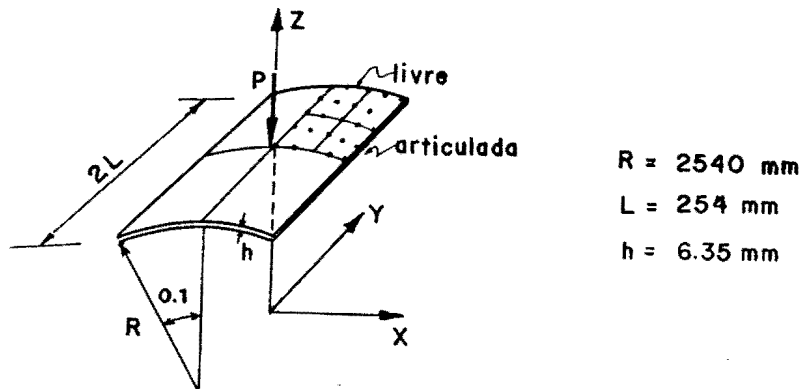
Para a solução das equações não lineares de equilíbrio foi empregado o método do controle por deslocamentos generalizados (sendo a carga de referência igual a  $0,02 \text{ N/cm}^2$  e  $\Delta\lambda_1$  igual a  $0,015$ ). Na análise da placa com condições de contorno C1 foi achado um deslocamento central de  $0,55 \text{ cm}$  em correspondência a uma carga de  $0,02 \text{ N/cm}^2$  (valores aproximados) ao final do décimo oitavo passo passo incremental.

Condições de contorno C1:

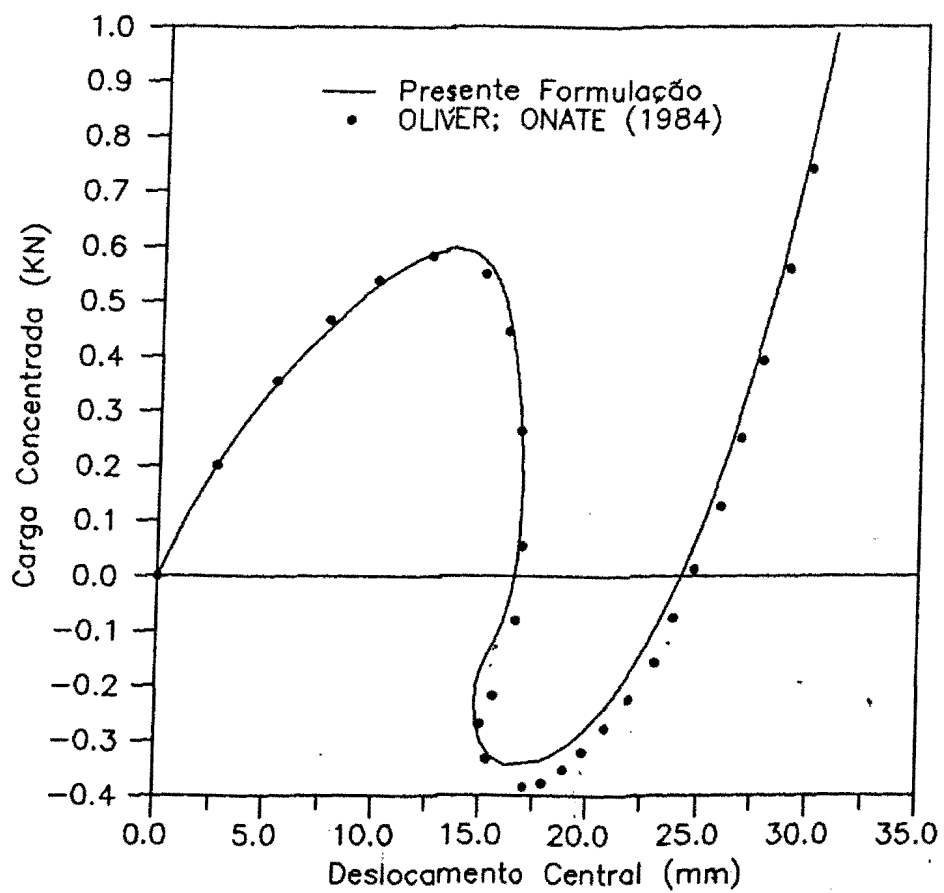
$$u = w = \theta_2 = 0 \text{ em } x = a/2,$$

$$v = w = \theta_1 = 0 \text{ em } y = a/2,$$

$$v = \theta_2 = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } u = \theta_1 = 0 \text{ em } x = 0$$

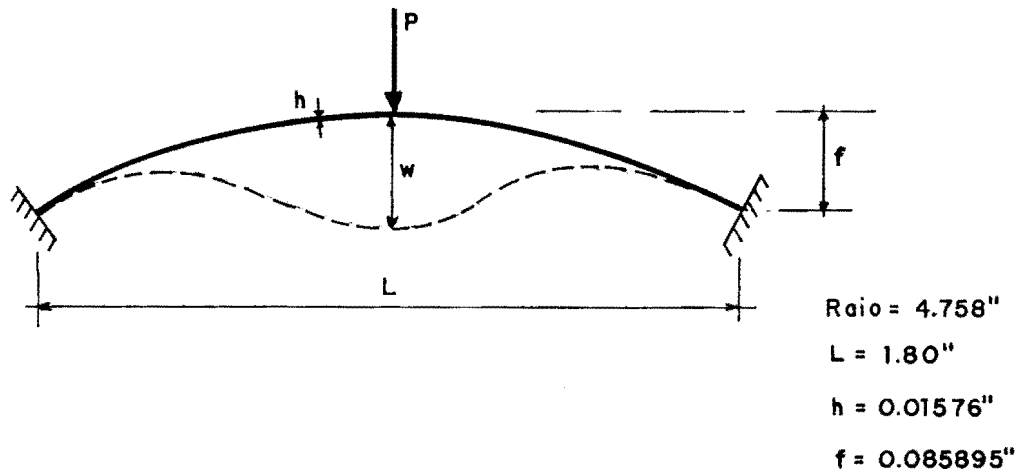


(a) - Geometria

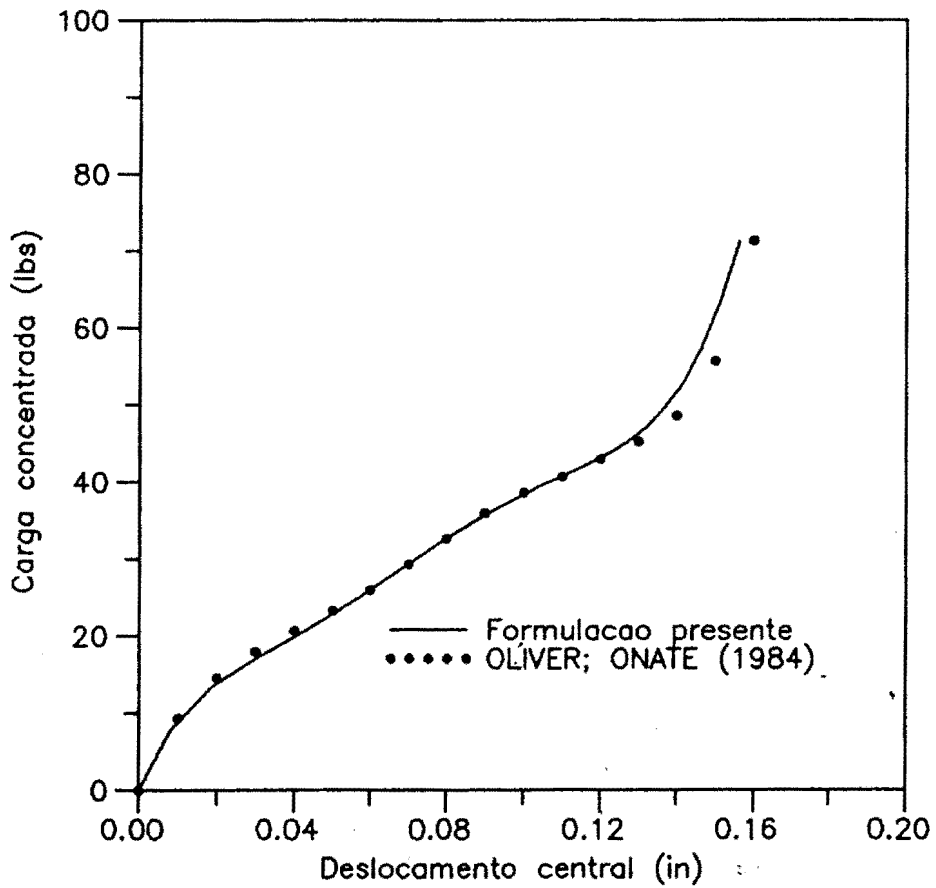


(b) - Curva carga x deslocamento

Figura 6.2 - Casca cilíndrica abatida sob carga concentrada



(a) - Geometria



(b) - Curva carga x deslocamento

Figura 6.3 - Casca esférica engastada

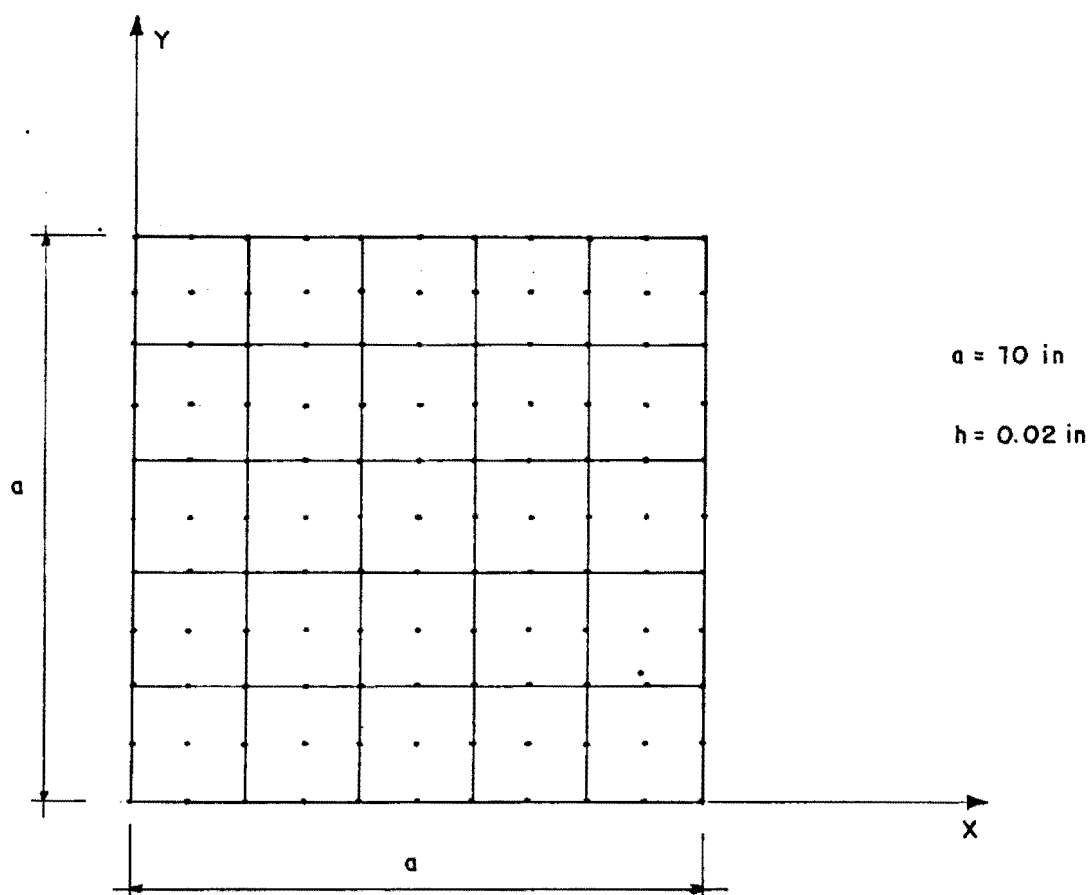


Figura 6.4 - Placa quadrada laminada do exemplo 6.2.4

Condições de contorno C2:

$$u = w = \theta_2 = 0 \text{ em } x = a/2,$$

$$v = w = \theta_1 = 0 \text{ em } y = a/2,$$

$$u = \theta_2 = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } v = \theta_1 = 0 \text{ em } x = 0$$

6.2.6 - Placa laminada engastada

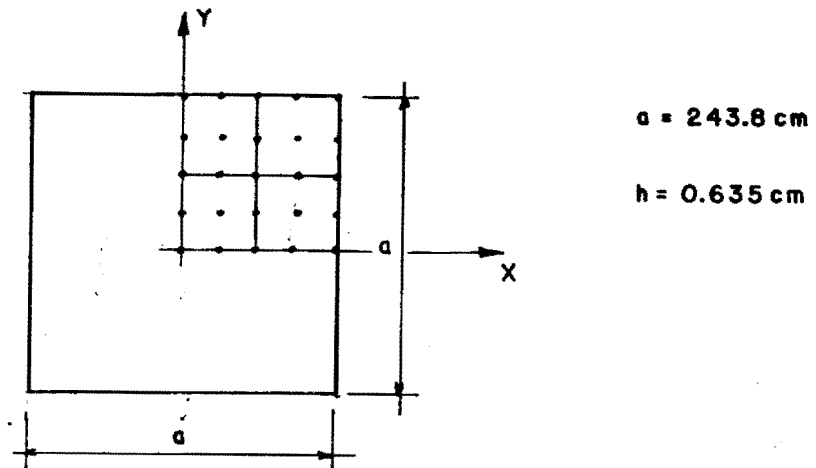
Uma placa constituída de quatro camadas, "cross-ply" (0/90/90/0) solicitada por uma carga uniforme, cujas geometria ( $a = 12\text{in}$  e  $h = 0,096\text{in}$ ) e discretização são as mesmas representadas na Figura 6.5 (a), é analisada neste exemplo. As propriedades do material são  $E_1 = 1,8282 \times 10^6$  psi;  $E_2 = 1,8315 \times 10^6$  psi;  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3,125 \times 10^6$  psi e  $\nu = 0,23949$ .

Os resultados obtidos são mostrados na Figura 6.6, juntamente com os resultados encontrados por LIAO; REDDY (1987).

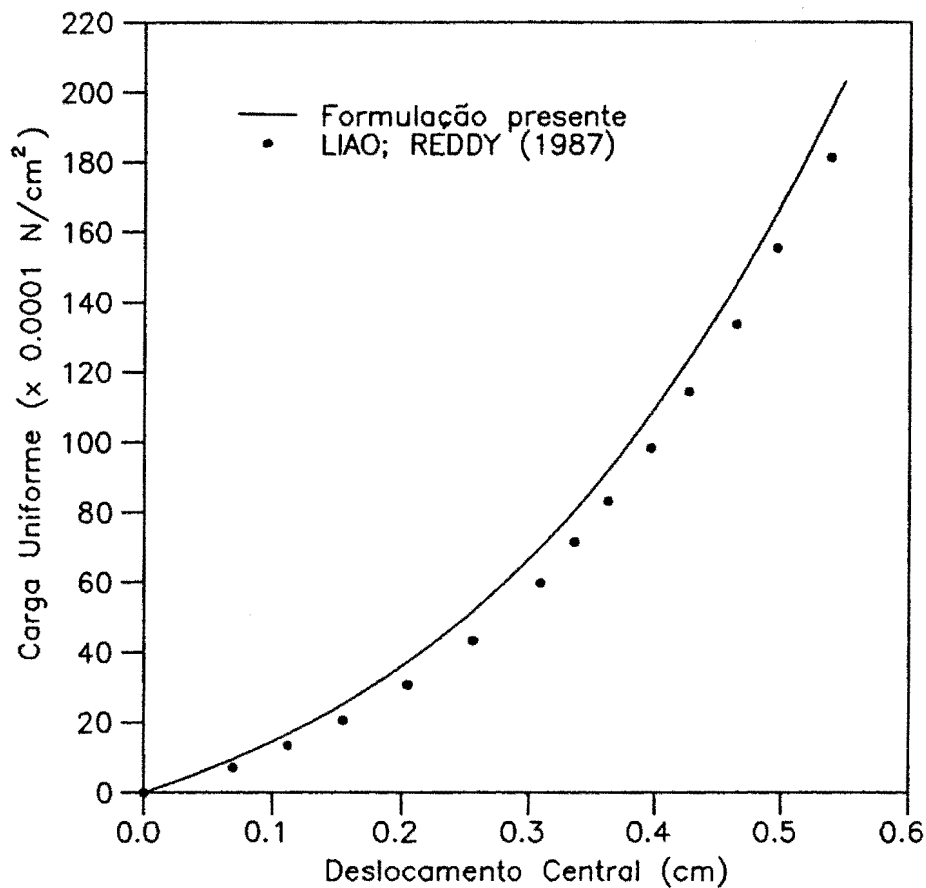
6.2.7- Casca esférica laminada sob carga uniforme

Considera-se aqui uma casca esférica constituída por duas lâminas de material composto reforçado com fibras, com esquema de laminação tipo "cross-ply" (0/90), solicitada por uma carga uniforme. As propriedades do material de cada lâmina são:  $E_1/E_2 = 25$ ;  $E_2 = 10^6$  psi;  $G_{12}/E_2 = 0,5$ ;  $G_{13} = G_{12}$ ;  $G_{23}/E_2 = 0,2$ ;  $\nu_{12} = 0,25$ .

A geometria da casca é representada na Figura 6.7 (a) e duas condições de contorno, C1 e C3, das

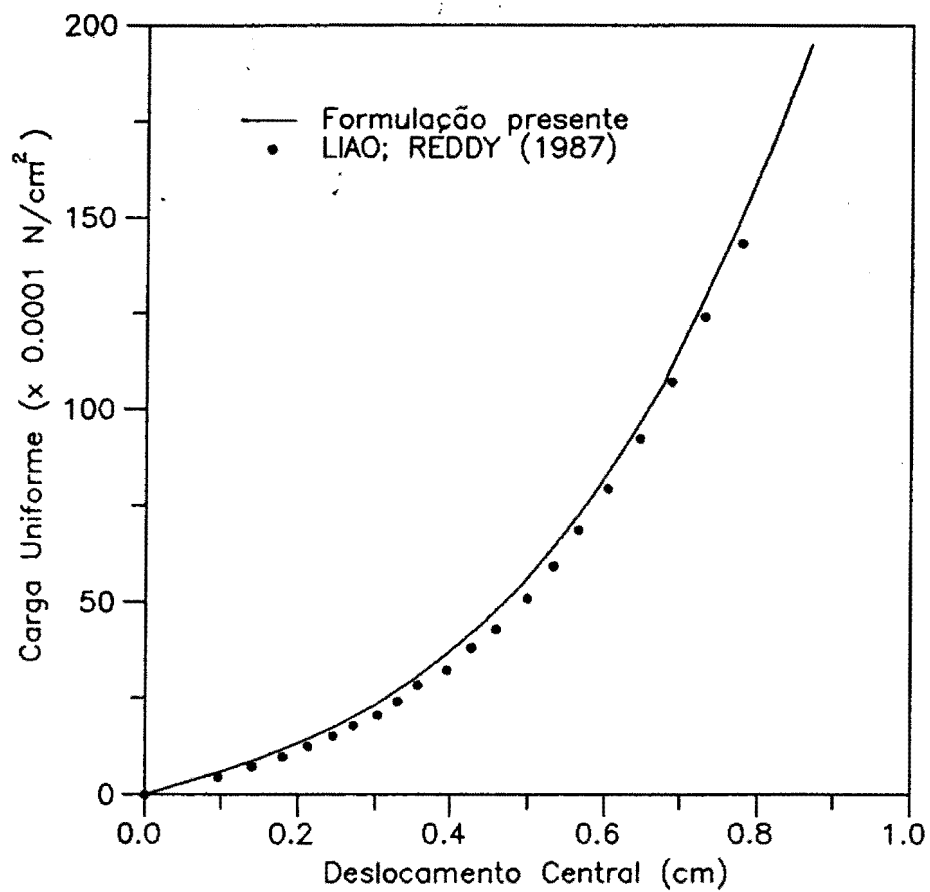


(Ca) - Geometria e Discretização



(Cb) - Curva carga x Deslocamento (condição de contorno C1)

Figura 6.5 - Placa laminada com duas camadas



(c) - Curva carga x deslocamento (condição de contorno C2)

Figura 6.5 - Placa laminada com duas camadas

quais a primeira já foi anteriormente definida, foram adotadas. Apenas um quarto da estrutura foi modelado usando 4 elementos de nove nós. Adotou-se uma regra de integração total (3x3) no plano da estrutura e apenas um ponto de integração na espessura de cada lâmina foi tomado.

As curvas carga x deslocamento central foram obtidas com o uso do método de controle por deslocamentos generalizados com um total de 100 passos incrementais. Nas Figuras 6.7 (b) e 6.7 (c) os resultados obtidos neste trabalho e os resultados encontrados por LIAO; REDDY (1987) são confrontados.

Condições de contorno C3:

$$v = w = \theta_2 = 0 \text{ em } x = a/2; \quad v = \theta_2 = 0 \text{ em } y = 0$$

$$u = w = \theta_1 = 0 \text{ em } y = a/2, \quad u = \theta_1 = 0 \text{ em } x = 0$$

6.2.8 - Casca esférica constituída de nove camadas

Uma casca esférica constituída de nove camadas de grafite-epóxi (0/90/0/90/0...), cujas carga e geometria são mostradas na Figura 6.7 (a), é neste exemplo analisada. A mesma discretização e propriedades materiais do exemplo 6.2.7 foram adotadas. As condições de contorno C3 foram aqui consideradas.

A resposta da estrutura foi obtida através do método de controle por deslocamentos generalizados e comparada com a obtida por LIAO; REDDY (1987) na Figura 6.8.



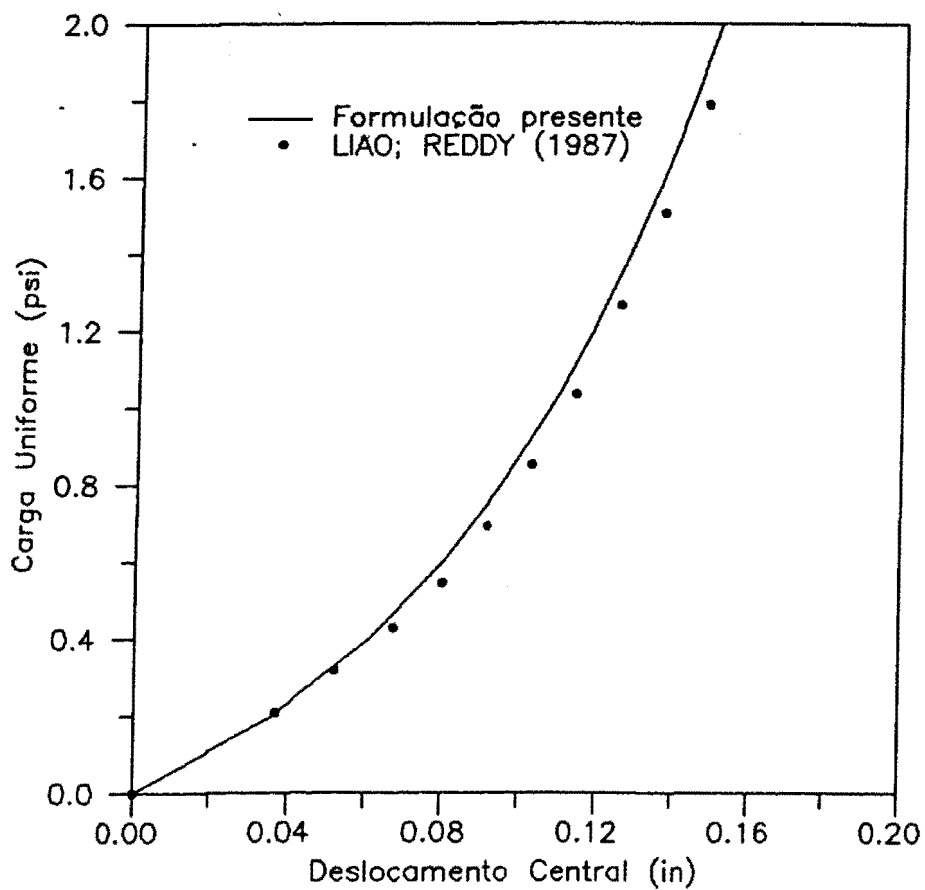
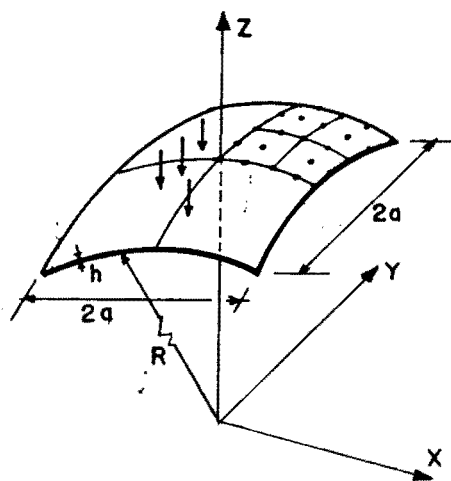
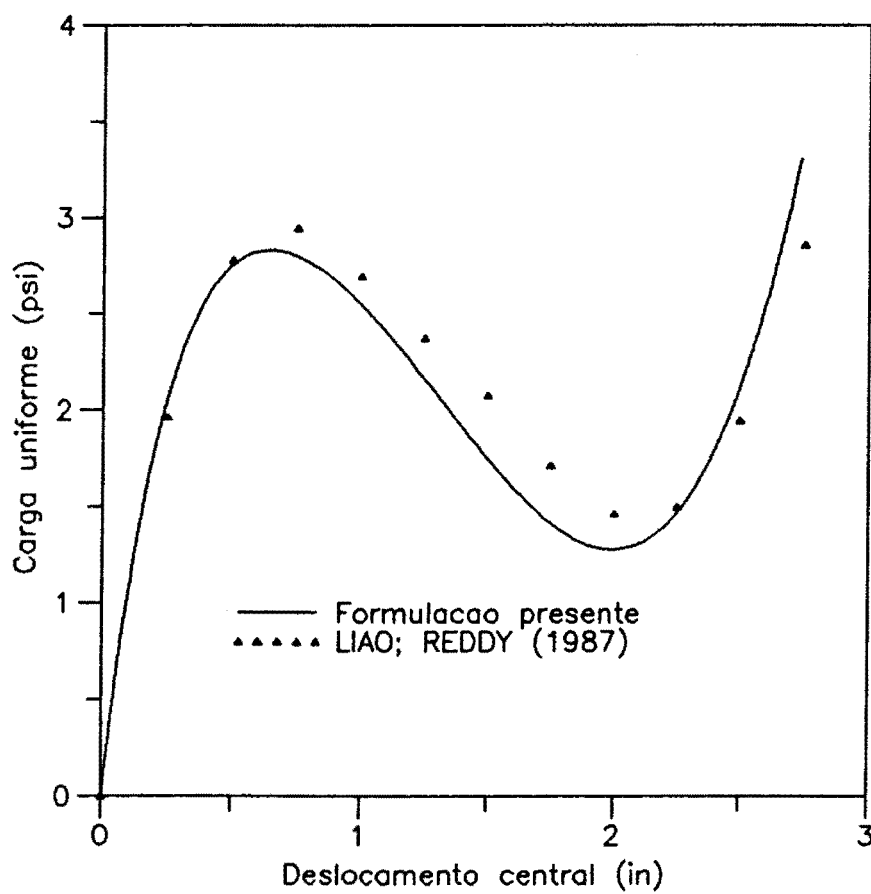


Figura 6.6 - Placa laminada com quatro camadas



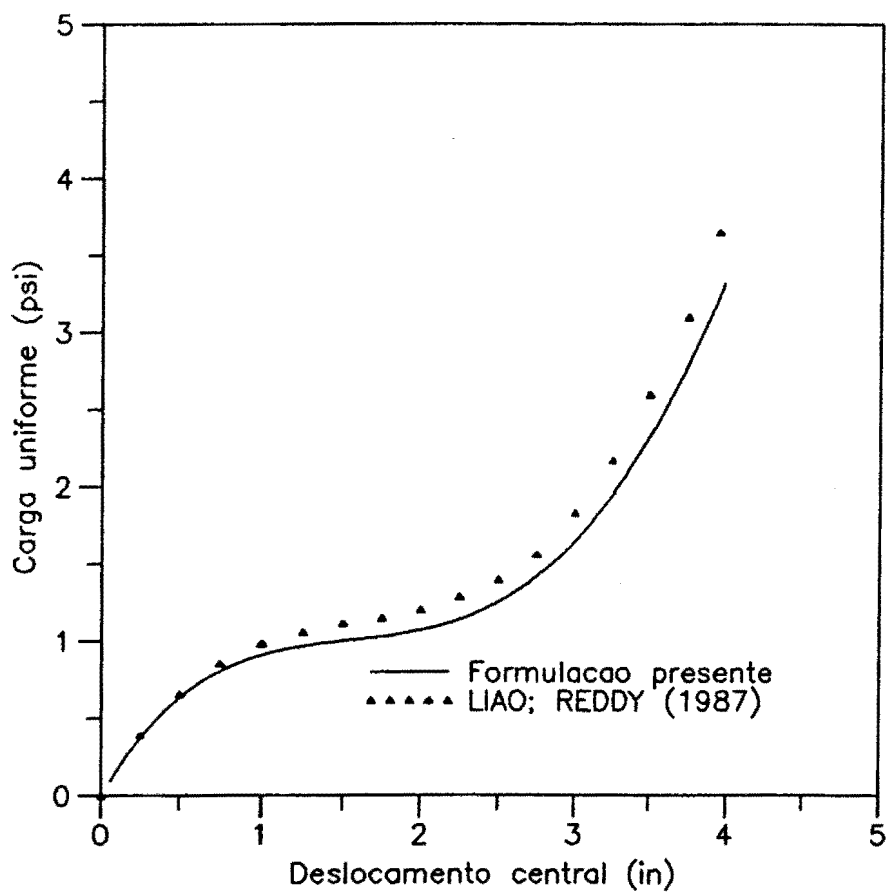
$R = 1000$  in.  
 $a = 50$  in  
 $h = 1$  in

(a) - Geometria



(b) - Curva carga x deslocamento (caso C1)

Figura 6.7 - Casca esférica laminada sob carga uniforme



(c) - Curva carga x deslocamento (caso C3)

Figura 6.7 - Casca esférica laminada sob carga uniforme

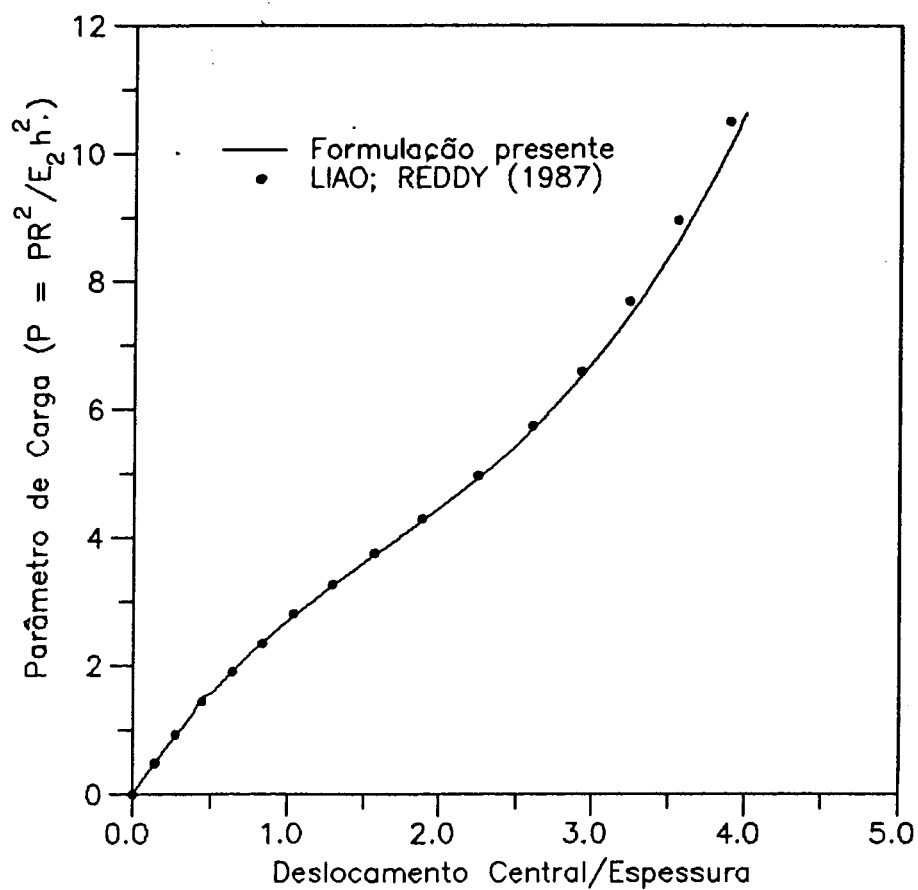


Figura 6.8 - Casca esférica com nove camadas

### 6.3 - ANÁLISE ESTÁTICA: PLACAS E CASCAS ENRIJECIDAS

#### 6.3.1 - Análise de uma placa engastada dotada de enrijecedores excêntricos

Realiza-se neste exemplo a análise de uma placa engastada, constituída de material homogêneo e isótropo, dotada de enrijecedores excêntricos laterais, conforme mostrado na Figura 6.9 (a). A placa é solicitada por duas cargas concentradas aplicadas nas extremidades livres dos enrijecedores.

As matrizes de rigidez dos elementos foram obtidas fazendo uso de uma integração reduzida seletiva no plano da estrutura enquanto que ao longo da espessura dois pontos de integração foram tomados. Apenas metade da estrutura foi considerada na análise, sendo a mesma discretizada por uma malha constituída de dois elementos de nove nós e dois de seis nós.

Com a finalidade de testar os procedimentos utilizados no presente trabalho foi realizada, a princípio, uma análise linear desta estrutura para uma carga  $P = 2lb$ , tendo-se comparado o valor da deflexão máxima obtido ( $0,250449 \times 10^{-3}$  in) com valores obtidos usando a Teoria clássica de viga ( $0,25195 \times 10^{-3}$  in) e por LIAO; REDDY (1987) usando 2 elementos tridimensionais degenerados de casca de nove nós e 4 elementos tridimensionais degenerados de vigas de 3 nós ( $0,25533 \times 10^{-3}$  in). As respostas não lineares da estrutura com e sem os enrijecedores foram também obtidas.

Como esperado, estas respostas são muito diferentes, sendo quase linear para a estrutura enrijecida e fortemente não linear no caso da estrutura sem os enrijecedores.

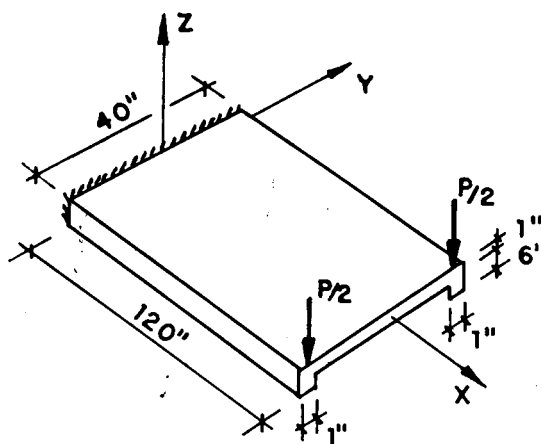
Na figura 6.9 (b) mostram-se os resultados obtidos com o presente trabalho e os resultados divulgados por LIAO; REDDY (1987).

### 6.3.2 - Placa quadrada simplesmente apoiada enrijecida

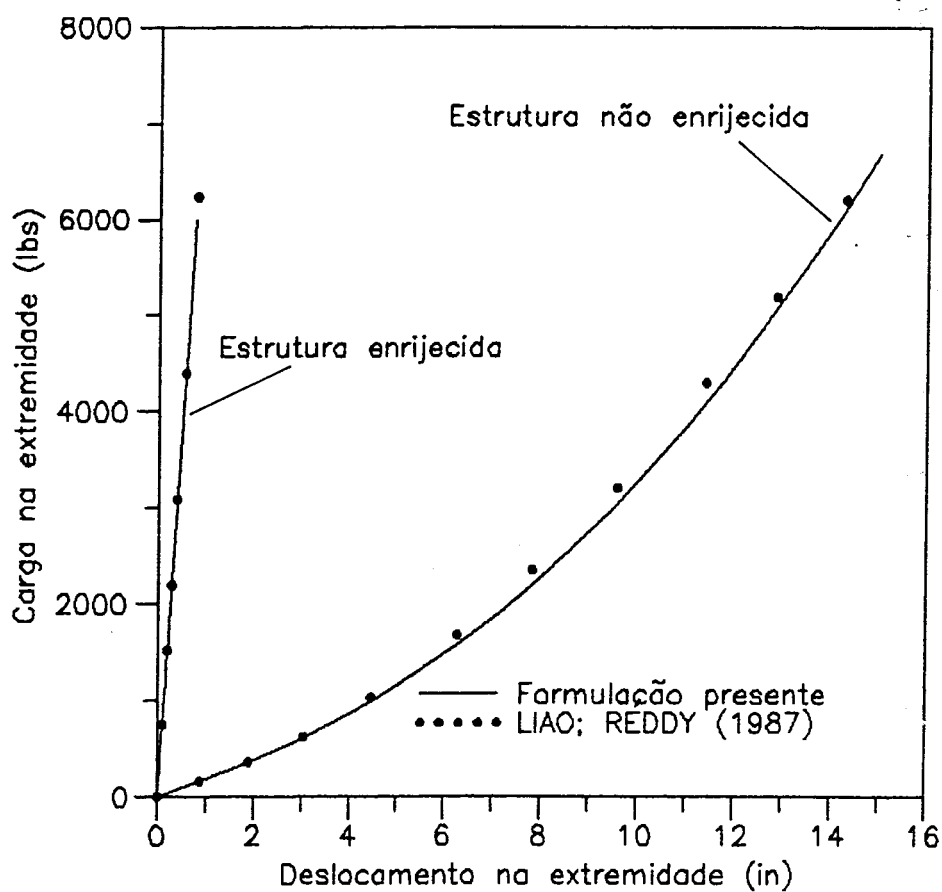
Analisa-se neste exemplo uma placa quadrada de material homogêneo e isótropo, simplesmente apoiada e reforçada por enrijecedores conforme mostrado na Figura 6.10 (a). Uma carga uniformemente distribuída admitiu-se atuar sobre a estrutura e foram adotadas as seguintes propriedades elásticas para o material:  $E = 30 \times 10^6$  psi e  $\nu = 0,3$ .

Devido a simetria apenas um quarto da placa enrijecida foi discretizada com quatro elementos de nove nós e quatro elementos de seis nós.

A curva carga x deslocamento da placa é mostrada na Figura 6.10 (b), e está em plena concordância com a obtida por LIAO; REDDY (1987) modelando-se um quarto da placa com quatro elementos tridimensionais degenerados de cascas de nove nós e os enrijecedores com oito elementos tridimensionais degenerados de vigas de três nós.

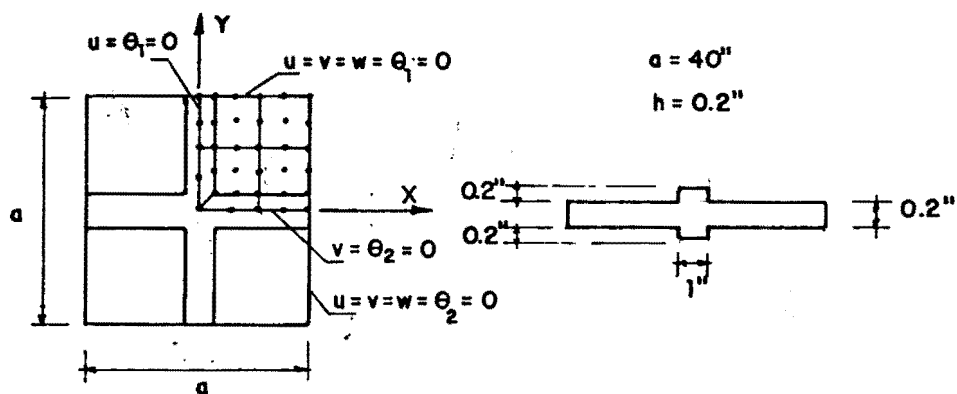


(Ca) - Geometria

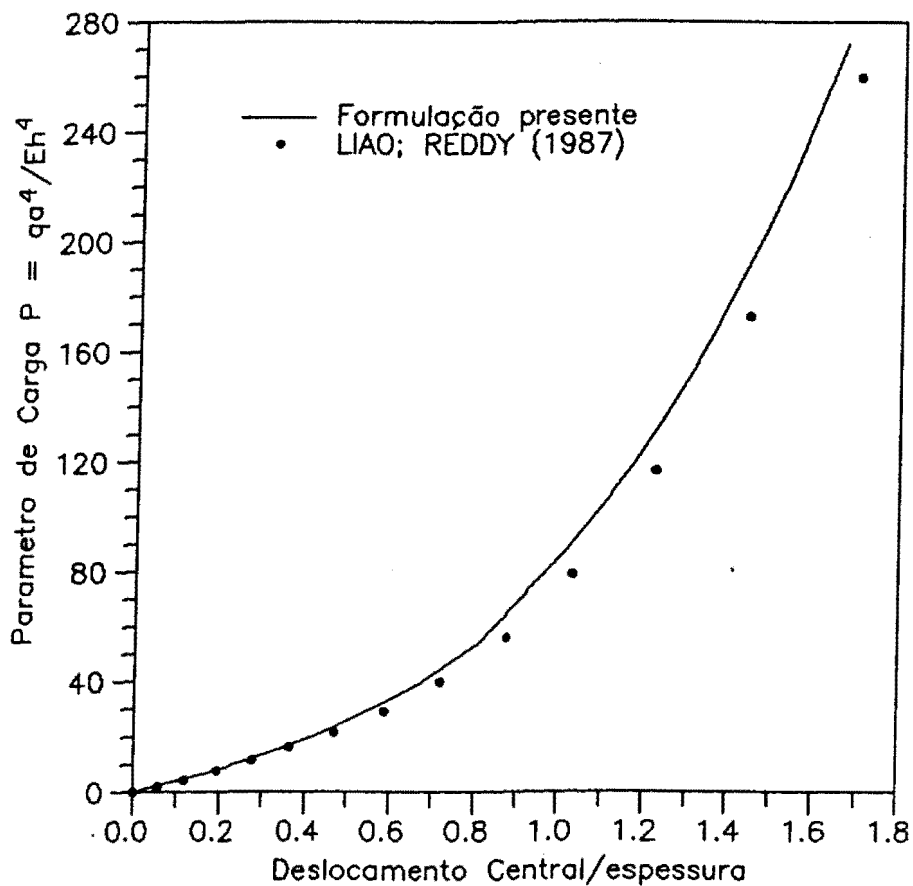


(Cb) Curvas carga x deslocamento

Figura 6.9 - Placa engastada dotada de enrijecedores



(a) - Geometria



(b) - Curva carga x deslocamento

Figura 6.10 - Placa quadrada enrijecida



### 6.3.3. - Placa laminada dotada de enrijecedores

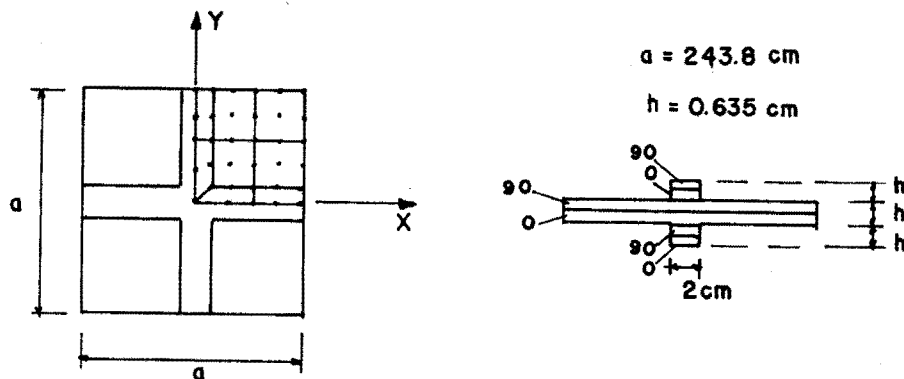
Uma placa laminada enrijecida simplesmente apoiada é solicitada por uma carga uniforme. A geometria e os esquemas de laminação "cross-ply" e "angle-ply"(-45/45) da mesma são representados nas Figuras 6.11 (a) e 6.11 (c). Para o material das lâminas foram adotadas as seguintes constantes elásticas:  $E_1/E_2 = 25$ ;  $E_2 = 7,03 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$ ;  $\nu_{12} = 0,25$ ;  $G_{12}/E_2 = 0,5$ ;  $G_{13} = G_{12}$ ;  $G_{23}/E_2 = 0,2$ .

As condições de contorno adotadas são C1 para o esquema de laminação tipo "cross-ply" e C2 para o esquema de laminação "angle-ply". Foram utilizados quatro elementos de nove nós e quatro elementos de seis nós para a discretização de um quarto da estrutura.

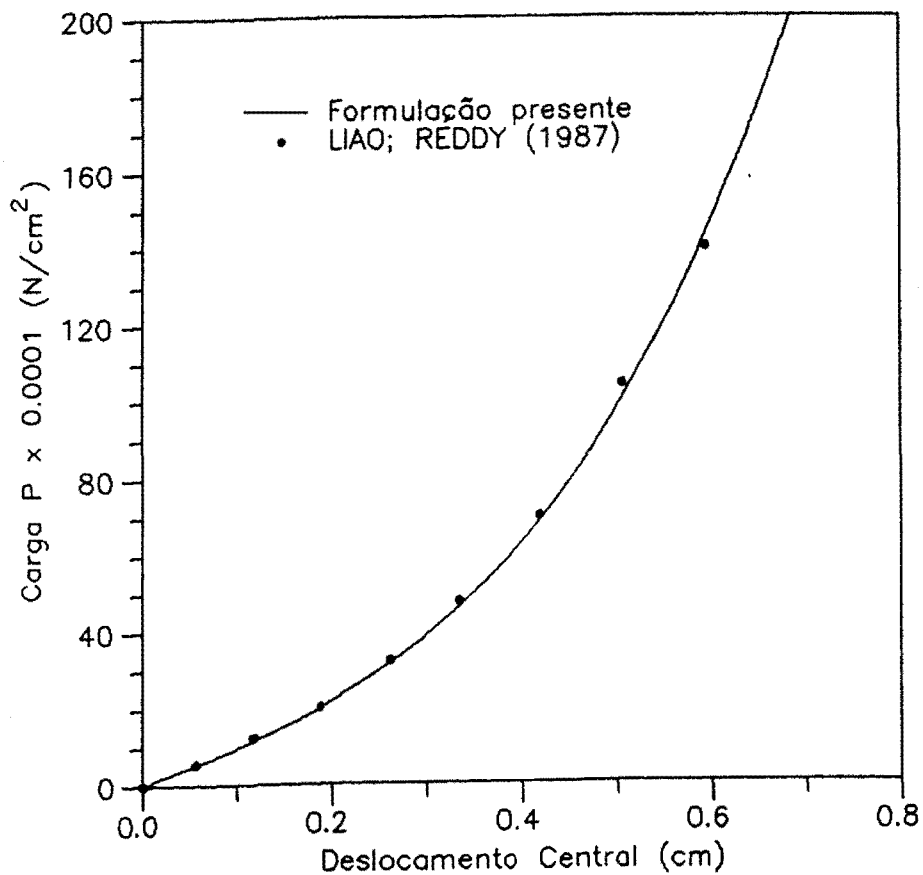
Os resultados obtidos com o presente trabalho e aqueles obtidos por LIAO; REDDY (1987) são mostrados nas Figuras 6.11 (b) e 6.11 (d).

### 6.3.4 - Casca esférica laminada enrijecida

Uma casca esférica simplesmente apoiada constituída de duas camadas de material composto, cuja geometria e esquema de laminação ("cross-ply") são mostrados na Figura 6.12 (a), é neste exemplo analisada. As propriedades elásticas da lâmina são:  $E_1/E_2=25$ ;  $E_2=10^6 \text{ psi}$ ;  $\nu_{12}=0,25$ ;  $G_{12}/E_2=0,5$ ;  $G_{13}=G_{12}$  e  $G_{23}/E_2=0,2$ .

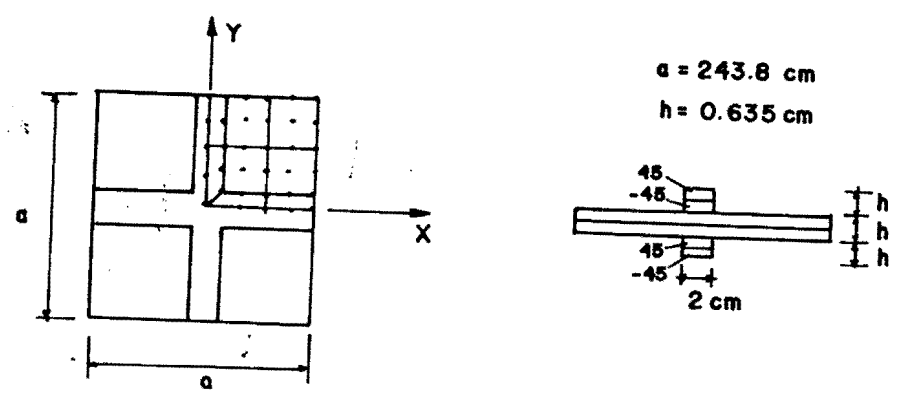


(a) - Geometria e distribuição de lâminas

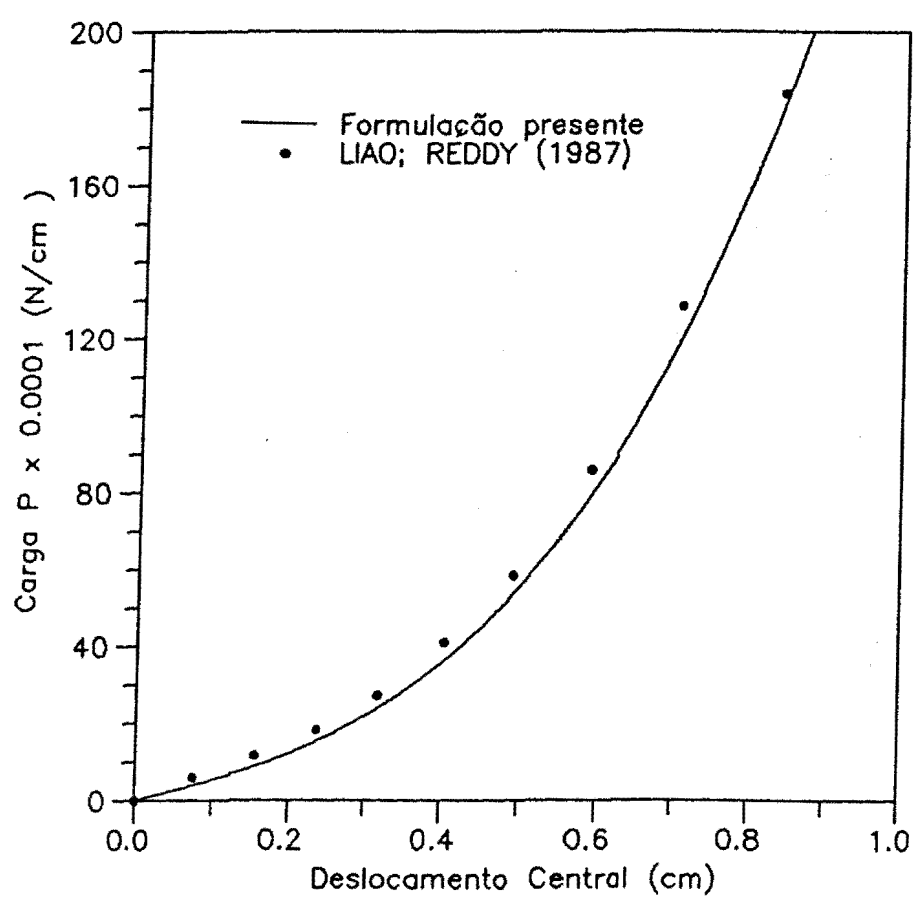


(b) - Curva carga x deslocamento no caso "cross-ply"

Figura 6.11 - Placa laminada enrijecida

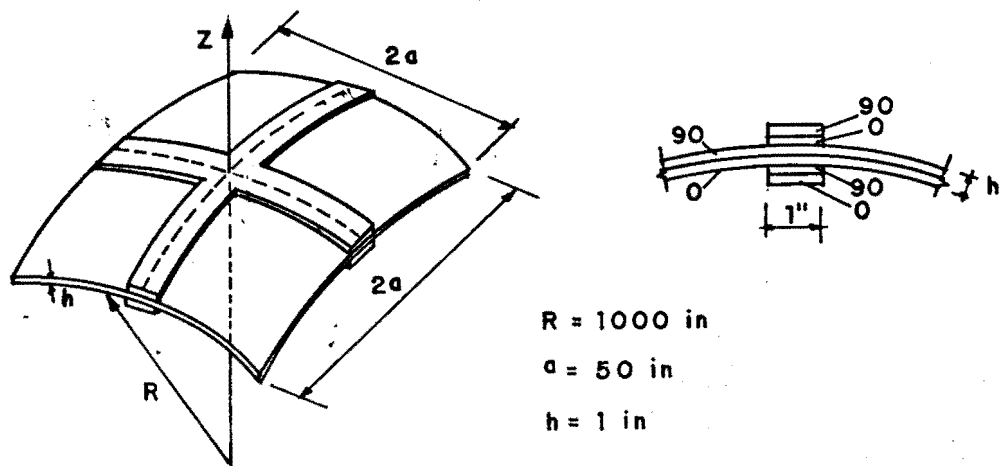


(c) - Geometria e distribuição de lâminas

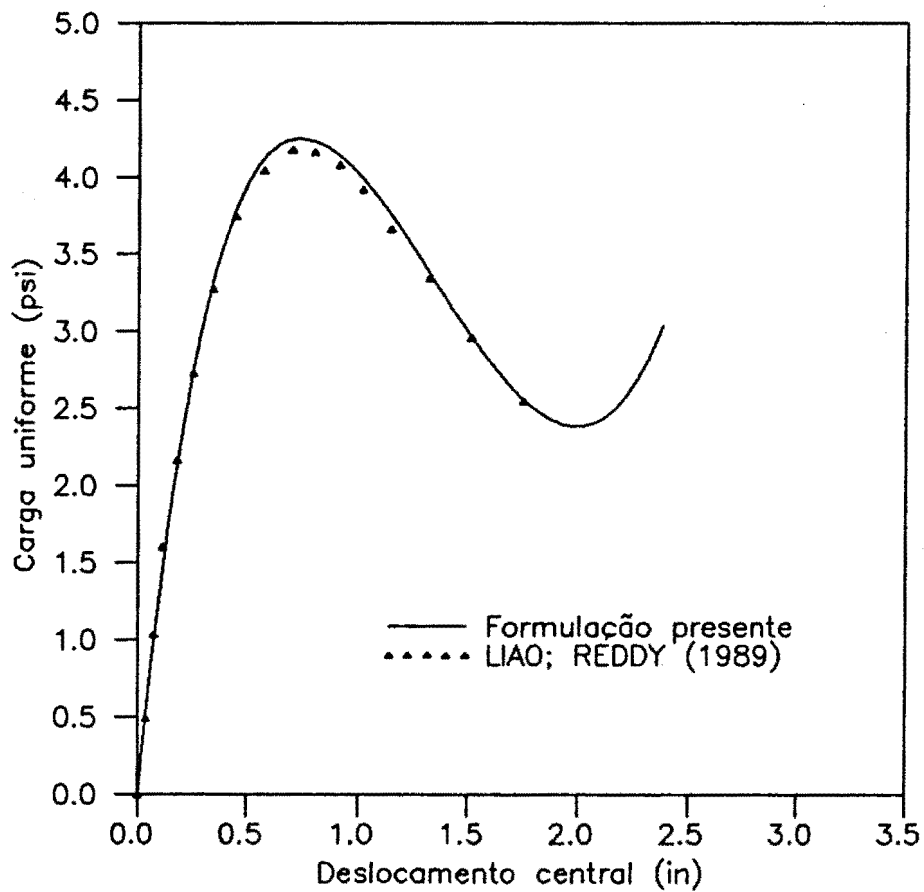


(d) - Curva carga x deslocamento no caso "angle-ply"

Figura 6.11 - Placa laminada enrijecida



(a) - Geometria



(b) - Curva carga x deslocamento

Figura 6.12 - Casca laminada enrijecida

As condições de contorno são as mesmas da placa ("cross-ply") do exemplo anterior e também a mesma discretização daquele exemplo foi aqui adotada.

A curva carga x deslocamento obtida com o presente trabalho e a encontrada por LIAO; REDDY (1989) são mostradas na Figura 6.12 (b).

#### 6.4 - ANÁLISE DINÂMICA: VIGAS PLACAS E CASCAS

##### 6.4.1 - Viga engastada sob carga uniforme

Uma viga engastada de material isótropo e solicitada por uma carga uniformemente distribuída, mostrada na Figura 6.13 (a), é analisada neste exemplo. As constantes elásticas do material são  $E = 1,2 \times 10^4 \text{ lb/in}^2$ ,  $\nu = 0,2$  e a massa específica do material é  $\rho = 10^{-6} \text{ lb s}^2/\text{in}^4$ .

Adotou-se uma malha constituída por 5 elementos de 9 nós. O passo de tempo adotado foi igual a  $1/42$  do período fundamental da estrutura (ou seja,  $57,3 \times 10^{-4} \text{ s}$ ) como em BATHE et al. (1975).

Os resultados obtidos são mostrados na Figura 6.13 (b) juntamente com os divulgados na referência acima citada.

##### 6.4.2 - Placa simplesmente apoiada sob carga uniforme

Uma placa constituída de material isótropo

com as seguintes propriedades:  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ,  $\nu = 0,25$  e  $\rho = 8 \times 10^{-6} \text{ N s}^2/\text{cm}^4$  é aqui considerada. A geometria e a discretização adotada são as mesmas representadas na Figura 6.5 (a), sendo  $a = 25 \text{ cm}$  e  $h = 5 \text{ cm}$ . A estrutura é solicitada por uma carga uniformemente distribuída igual a  $10 \text{ N/cm}^2$ . A análise foi realizada adotando-se um passo de tempo igual a  $10 \mu\text{s}$ . Condições de contorno adotadas:

$$u = v = w = \theta_z = 0 \text{ para } x = a/2; \quad v = \theta_z = 0 \text{ para } y = 0$$

$$u = v = w = \theta_x = 0 \text{ para } y = a/2; \quad u = \theta_x = 0 \text{ para } x = 0$$

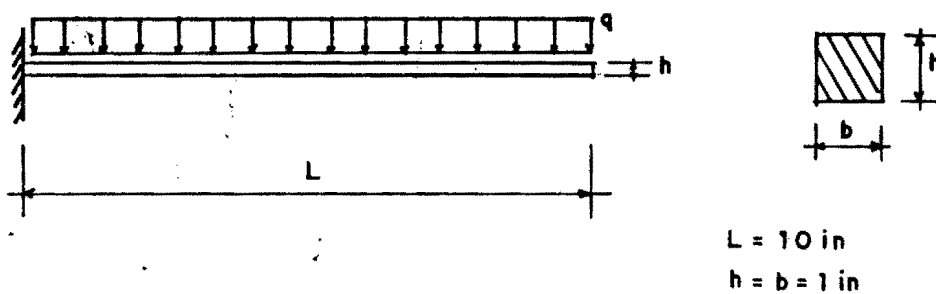
Os resultados obtidos neste trabalho e os encontrados por LIAO; REDDY (1987) são mostrados na Figura 6.14.

#### 6.4.3 - Casca cilíndrica laminada sob pressão interna

Uma casca cilíndrica com bordas engastadas constituída por duas lâminas de material composto é analisada neste exemplo. A geometria da casca encontra-se representada na Figura 6.2 (a), sendo aqui  $h = 2,54 \text{ mm}$ . Um esquema de laminação tipo "angle-ply" (-45/45) foi adotado. Propriedades elásticas:  $E_1/E_2 = 25$ ;  $E_2 = 10^6 \text{ N/mm}^2$ ;  $G_{12}/E_2 = 0,5$ ;  $G_{13} = G_{12}$ ;  $G_{23}/E_2 = 0,2$  e  $\nu_{12} = 0,25$ .

Um quarto da casca foi modelado com quatro elementos de nove nós. Admitiu-se atuando sobre a estrutura uma pressão interna de  $1,0 \text{ N/mm}^2$ . Adotou-se  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ .

Os resultados achados são comparados aos resultados obtidos por REDDY; CHANDRASHEKHARA (1984) na Figura 6.15.



(a) - Geometria

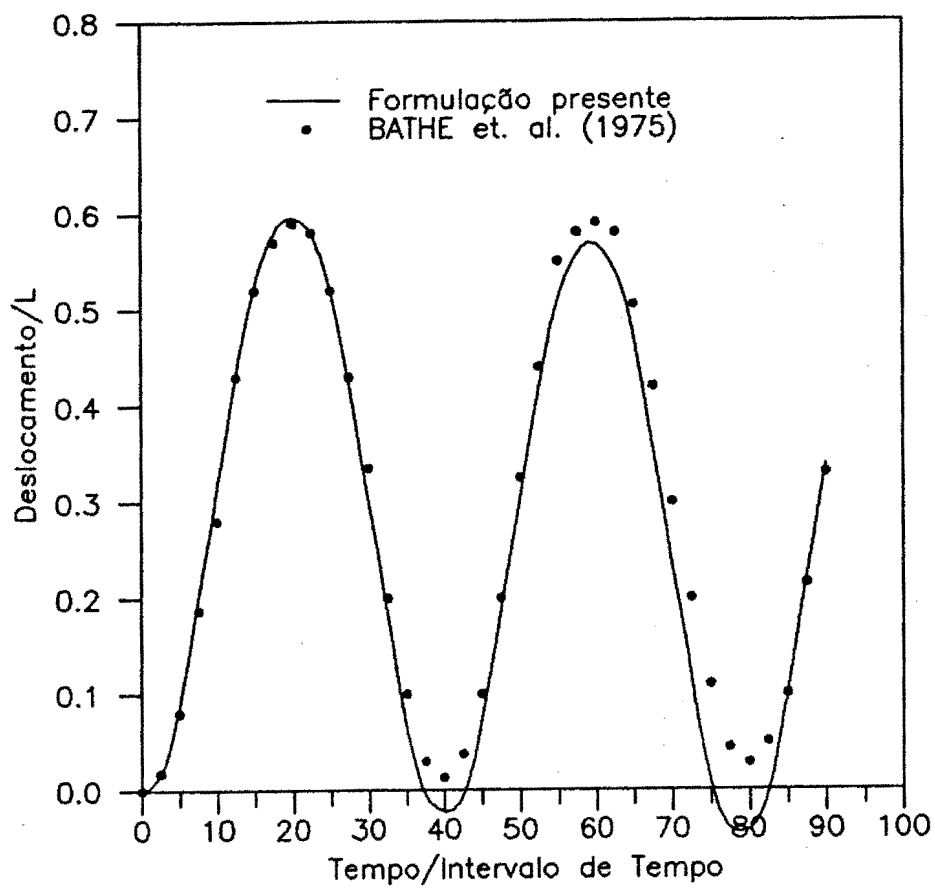
(b) - Curva relação  $(W/L)$  x relação  $(t/\Delta t)$ 

Figura 6.13- Viga engastada sob carga uniforme

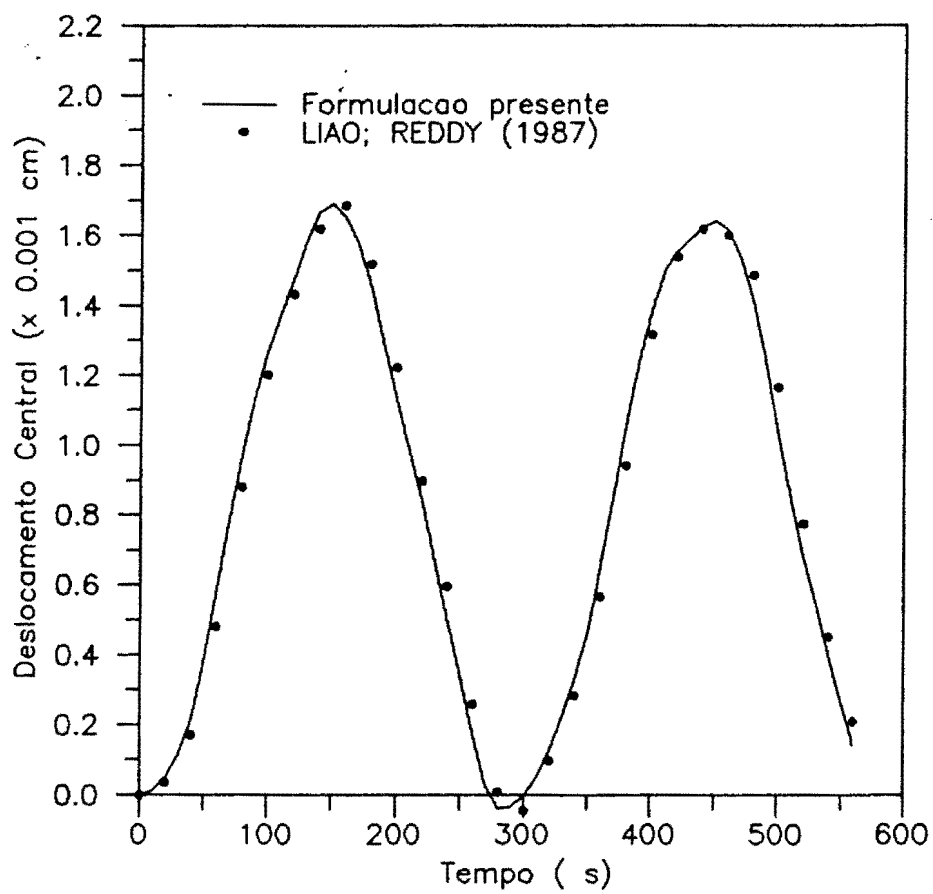


Figura 6.14 - Placa simplesmente apoiada



#### 6.4.4 - Casca esférica laminada sob pressão externa

Analisa-se uma casca esférica simplesmente apoiada constituída por duas lâminas de material composto, adotando-se um esquema de laminação "cross-ply" (0/90). As propriedades de cada lâmina são:  $E_1 = 25 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ;  $E_2 = 10^6 \text{ N/cm}^2$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0,5 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ ;  $G_{23} = 0,2 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$  e  $\nu_{12} = 0,25$ .

A geometria da casca é idêntica a do exemplo 6.2.7, sendo aqui  $R = 1000\text{cm}$ ,  $a = 50\text{cm}$  e  $h = 1\text{cm}$ ; e também a mesma discretização usada naquele exemplo foi aqui adotada. Foram admitidos ainda  $\rho = 1 \text{ N s}^2/\text{cm}^4$  e  $\Delta t = 0,05\text{s}$ . Uma pressão externa de  $1,0\text{N/cm}^2$  foi admitida atuando sobre a estrutura.

Os resultados obtidos pelo presente estudo são confrontados com os resultados divulgados em REDDY; CHANDRASHEKHARA (1984) na Figura 6.16.

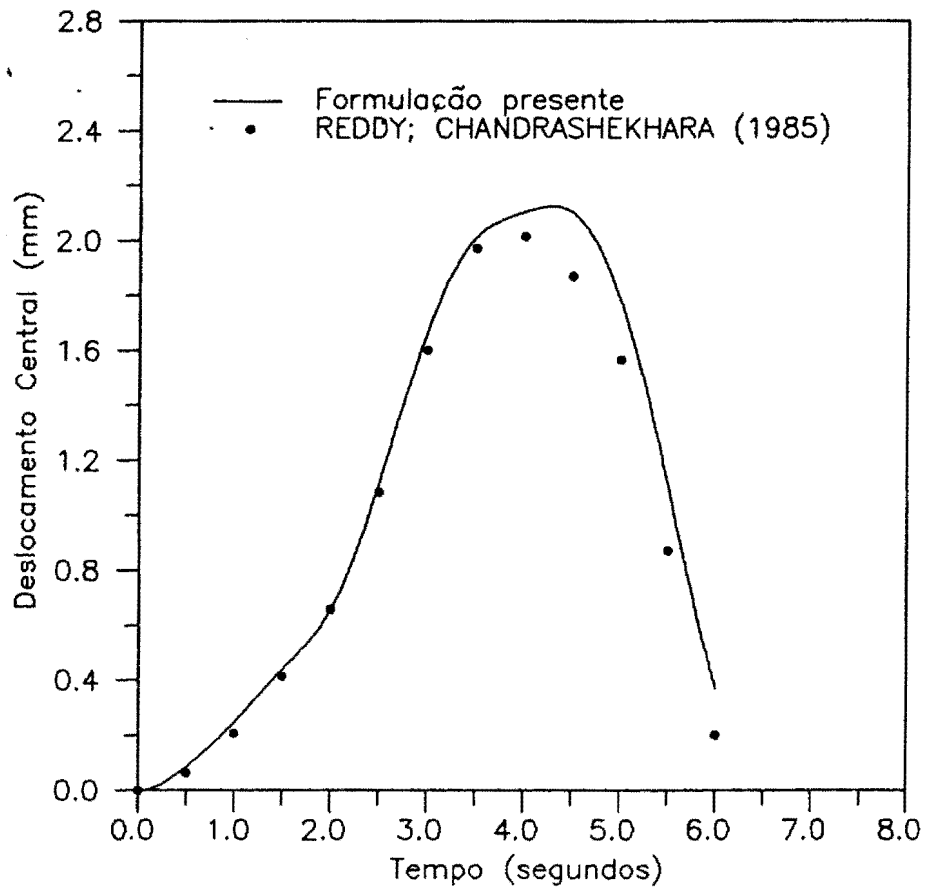


Figura 6.15 - Casca cilíndrica com duas camadas

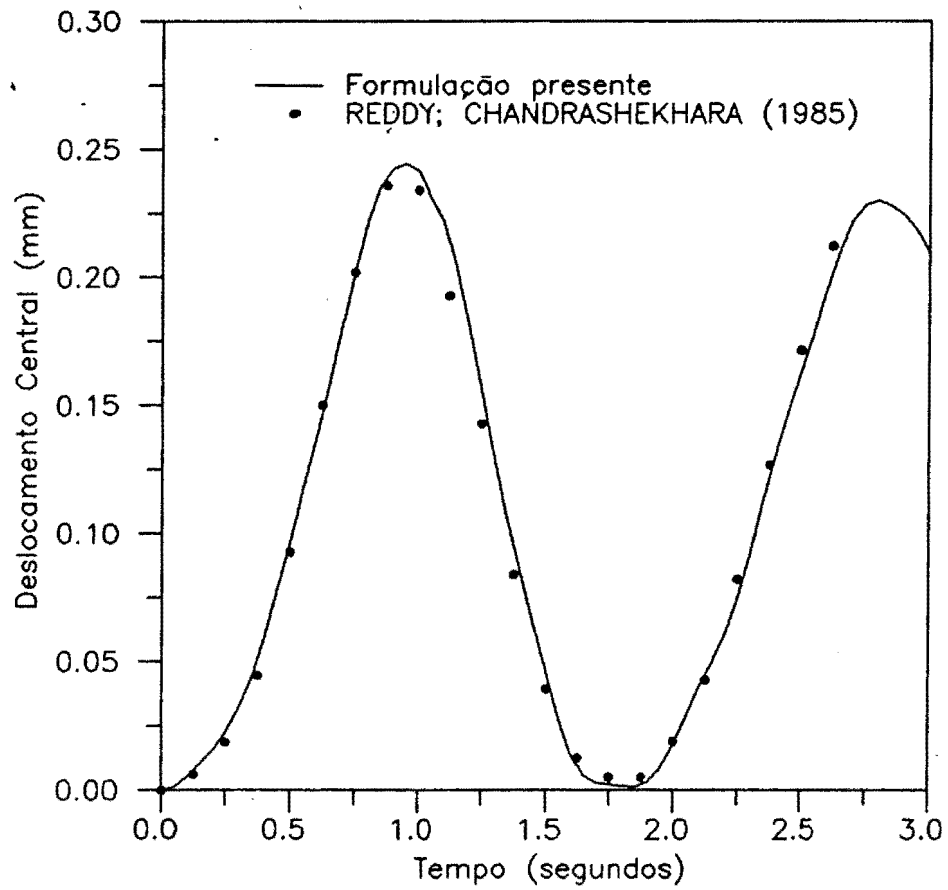


Figura 6.16 - Casca esférica com duas camadas

## 6.5 - ANÁLISE DINÂMICA: PLACAS E CASCAS ENRIJECIDAS

### 6.5.1 - Análise não linear transiente da placa do exemplo 6.3.2

Realiza-se a análise transiente da mesma estrutura do exemplo 6.3.2. Os dados adicionais do problema são  $q = 3.75$  psi,  $\rho = 2,5393 \times 10^{-4}$  lb s<sup>2</sup>/in<sup>4</sup> e  $\Delta t = 0,0002$ s.

Considerou-se a mesma discretização usada na análise estática e uma regra de integração reduzida uniforme (2x2) no plano foi realizada.

A resposta da estrutura é confrontada com a obtida por LIAO; REDDY (1987) na Figura 6.17.

### 6.5.2 - Análise não linear transiente de uma casca esférica simplesmente apoiada enrijecida

Obtém-se neste exemplo a resposta não linear dinâmica de uma casca esférica de material homogêneo e isótropo dotada de enrijecedores centrados e solicitada por uma carga concentrada como mostrado na Figura 6.18 (a). As propriedades elásticas do material são  $E = 10^4$  psi e  $\nu = 0,3$ . Adicionalmente considerou-se:  $P = 8000$ lbs;  $\rho = 2,3763 \times 10^{-5}$  lb s<sup>2</sup>/in<sup>4</sup> e  $\Delta t = 0,0007$ s. A mesma discretização do exemplo anterior foi também aqui adotada.

Na Figura 6.18 (b) são mostradas a resposta obtida através do presente trabalho e a resposta obtida por LIAO; REDDY (1987).

### 6.5.3 - Análise não linear transiente da placa do exemplo 6.3.3

A resposta dinâmica (transiente) da mesma estrutura do exemplo 6.3.3 é obtida neste exemplo. Os dados complementares adotados foram:  $q = 50 \times 10^{-4} \text{ N s}^2/\text{cm}^4$ ;  $\rho = 2,547 \times 10^{-6} \text{ N s}^2/\text{cm}^4$  e  $\Delta t = 0,002\text{s}$ . Apenas o esquema de laminação "cross-ply" foi aqui considerado. Uma regra de integração reduzida seletiva no plano da estrutura foi adotada em conjunção com uma malha constituída por quatro elementos de nove nós (para modelar a placa) e quatro de seis nós (para modelar os enrijecedores).

A resposta da estrutura é representada na Figura 6.19 juntamente com a correspondente resposta obtida por LIAO; REDDY (1987).

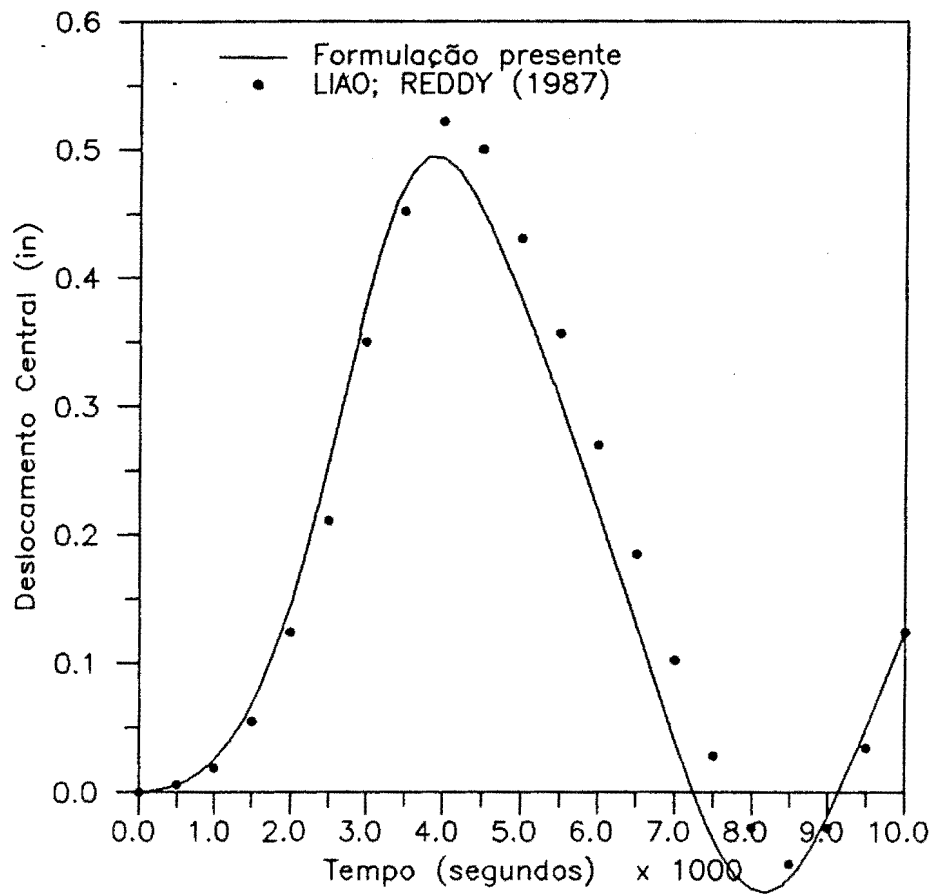
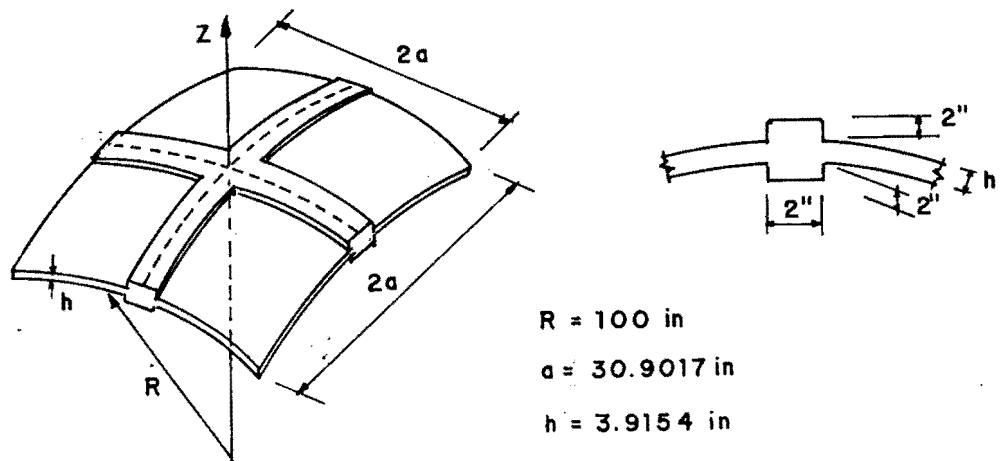
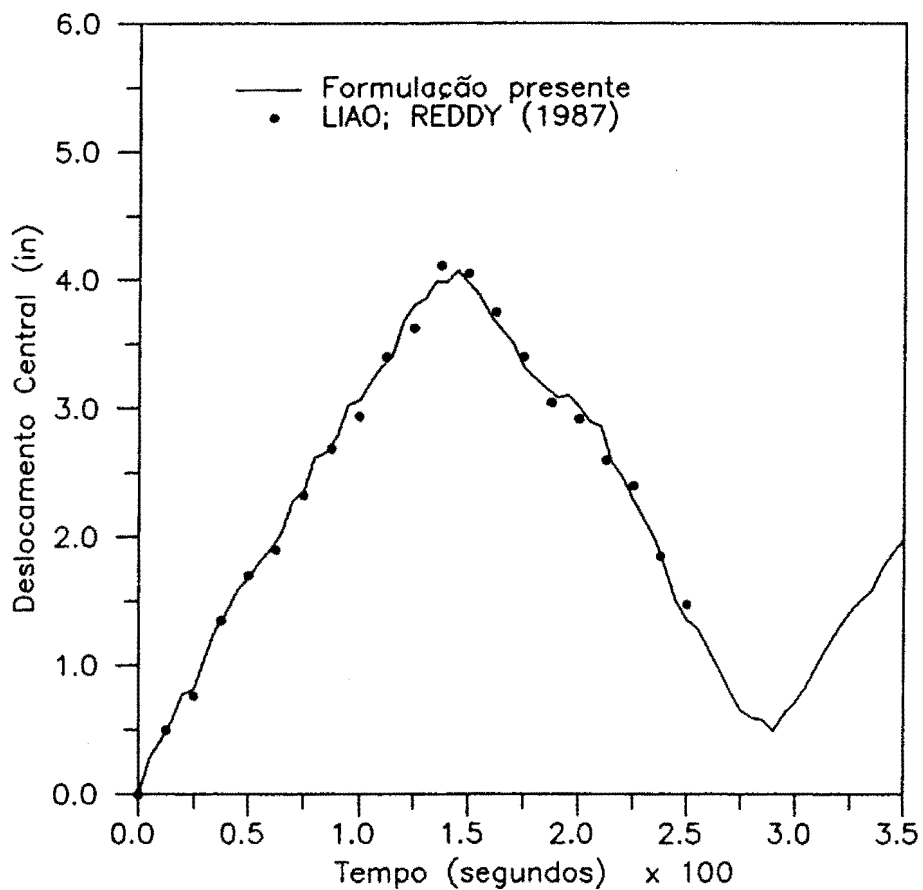


Figura 6.17 - Resposta não linear transiente de uma placa simplesmente apoiada enrijecida



(Ca) - Geometria



(Cb) - Curva deslocamento x tempo

Figura 6.18 - Resposta não linear transiente de uma casca simplesmente apoiada enrijecida

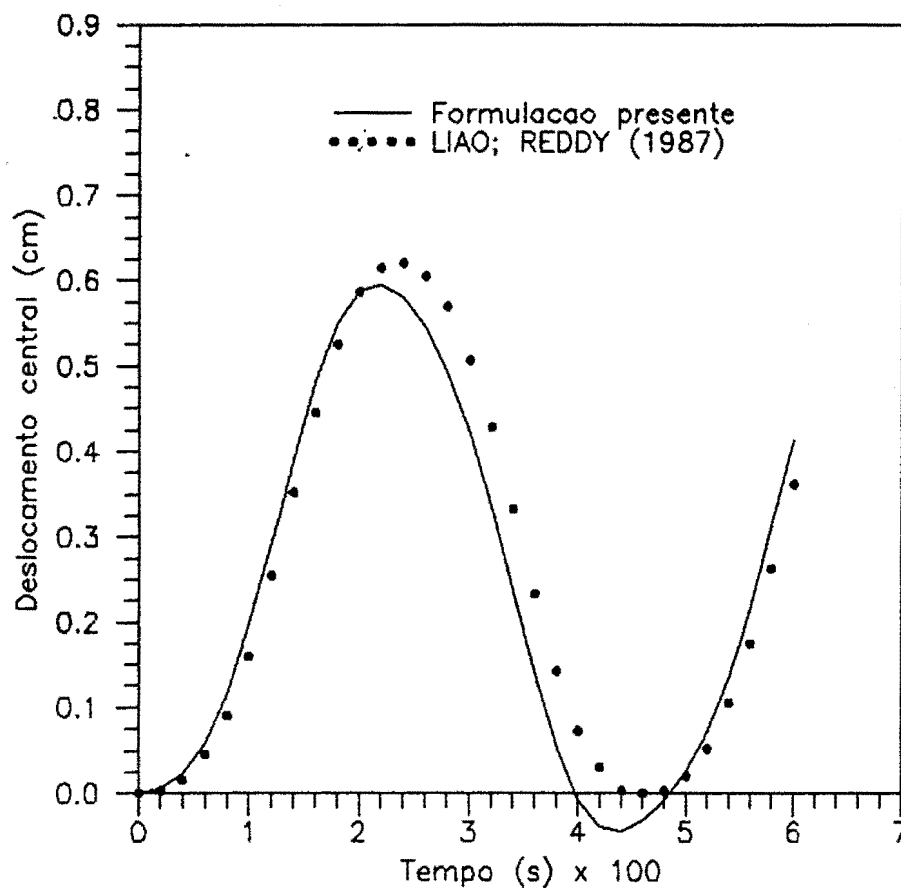


Figura 6.19 - Resposta transiente não linear de uma placa laminada (0/90)



## 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS II: ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

### 7.1 - INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste capítulo diferentes exemplos de análise elasto-plástica geometricamente não linear, estática e dinâmica, de placas e cascas. O modelo numérico empregado no presente trabalho é testado na solução de estruturas constituídas de material homogêneo e isótropo e utilizado para investigar o comportamento de estruturas laminadas anisótropas.

Através dos citados exemplos, a influência da orientação das direções principais das lâminas, de diferentes esquemas de laminação e da adoção de diferentes curvas tensão efetiva x deformação plástica efetiva, sobre a resposta da estrutura (curva carga x deslocamento e configurações de plastificação para determinados valores da carga) foi observada.

Os procedimentos numéricos utilizados para a solução das equações não lineares de equilíbrio estático e dinâmico são aqueles já referidos no capítulo 6 acrescidos dos procedimentos da seção 5.5.

As observações feitas no capítulo 6 a respeito de ser ou não válido modelar apenas parte de uma estrutura laminada anisótropa ( $1/4$  ou  $1/2$ , geralmente), em

função da sua geometria simétrica, dever ser também neste capítulo consideradas.

Em todos os exemplos desta seção as matrizes de rigidez dos elementos foram obtidas usando uma regra de integração reduzida uniforme (2x2) no plano da estrutura.

## 7.2 - ANÁLISE ESTATICA

### 7.2.1 - Análise elasto-plástica da casca do exemplo 6.2.3

A resposta elasto-plástica da casca do exemplo 6.2.3, considerando  $\bar{\sigma}_0 = 5 \times 10^4$  psi e  $H_p = 0$ , é neste exemplo obtida. A mesma discretização utilizada na solução elástica foi aqui adotada.

Este exemplo, tal como o exemplo 6.2.3, foi também resolvido por OLIVER; ONATE (1984), usando o critério de escoamento de Huber-Mises e uma lei de escoamento associada. Os resultados obtidos através do presente trabalho e os resultados encontrados pela citada referência são comparados na Figura 7.1. Em ambos trabalhos uma subdivisão da estrutura em oito camadas e uma regra de integração reduzida uniforme no plano da estrutura foram adotadas.

### 7.2.2 - Placa quadrada engastada

O comportamento elasto-plástico (isotrópico e anisotrópico) de uma placa quadrada ( $a = 6m$  e  $h = 0,2m$ )

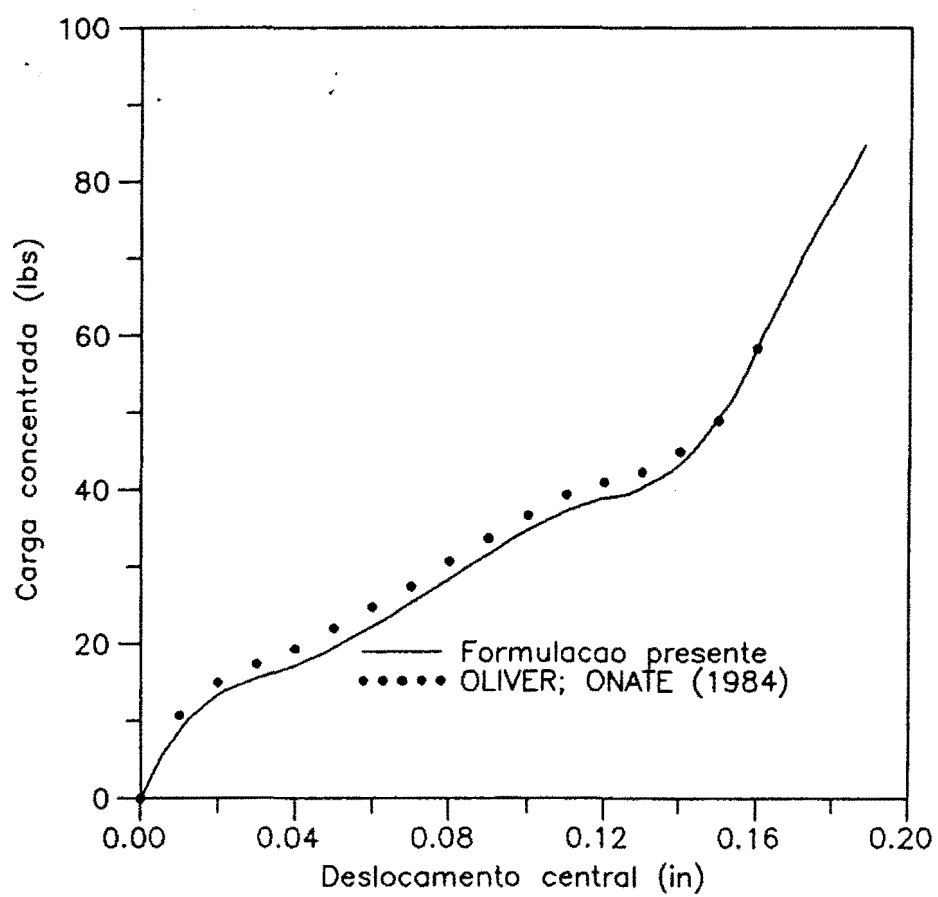


Figura 7.1 - Casca esférica sob carga concentrada

solicitada por uma carga uniformemente distribuída é neste exemplo investigado. As propriedades do material são:

caso isotrópico:

$$E_1 = E_2 = 30000; \nu = 0,30; G_{12} = G_{13} = G_{23} = 11540;$$

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_{01} = \bar{\sigma}_{02} = \bar{\sigma}_{045} = 30; \bar{\tau}_{012} = \bar{\tau}_{013} = \bar{\tau}_{023} = 17,32;$$

$$E_p = 300$$

caso anisotrópico:

$$\bar{\sigma}_{02} = 40,0; \bar{\sigma}_{045} = 35,0; \bar{\tau}_{012} = 20,2;$$

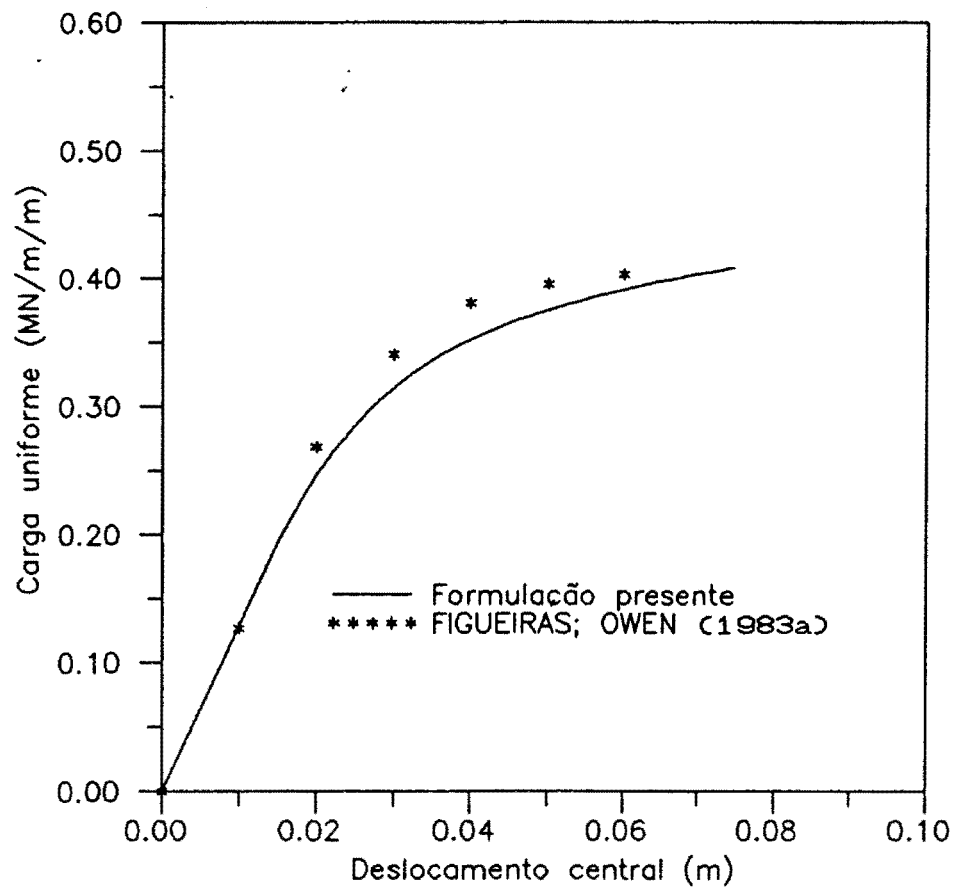
As outras constantes são as mesmas do caso isotrópico (unidades: MN,m)

Apenas um quarto da estrutura foi modelado com 9 elementos de nove nós (com oito camadas cada um deles).

Nas Figuras 7.2 (a) e 7.2 (b), os resultados obtidos com o presente trabalho para os casos isotrópico e anisotrópico, respectivamente, são confrontados com os correspondentes resultados achados por OWEN; FIGUEIRAS (1983a) usando elementos do tipo "semiloof" e considerando pequenos deslocamentos. As configurações de plastificação de um quarto da estrutura e relativas às camadas inferior (primeira camada) e superior (oitava camada), para os casos isotrópico e anisotrópico são ainda, respectivamente, representadas nas Figuras 7.2 (c) e 7.2 (d).

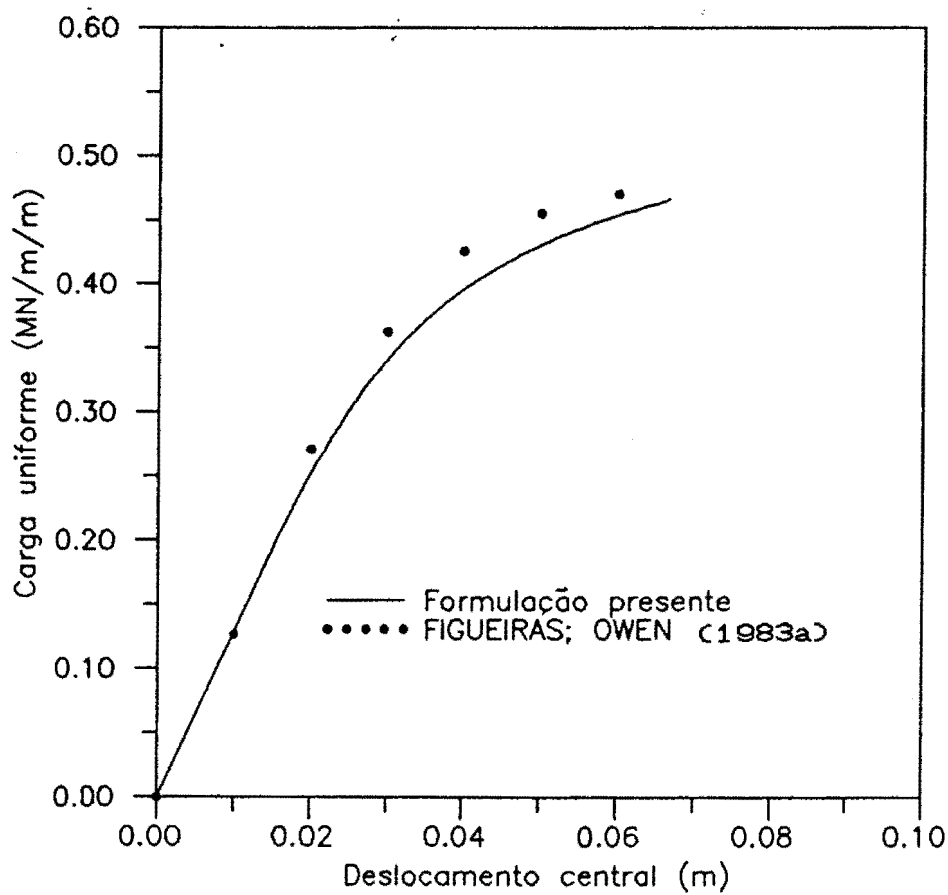
### 7.2.3 - Casca quadrática engastada

O comportamento elasto-plástico de uma casca engastada solicitada por uma carga concentrada em seu



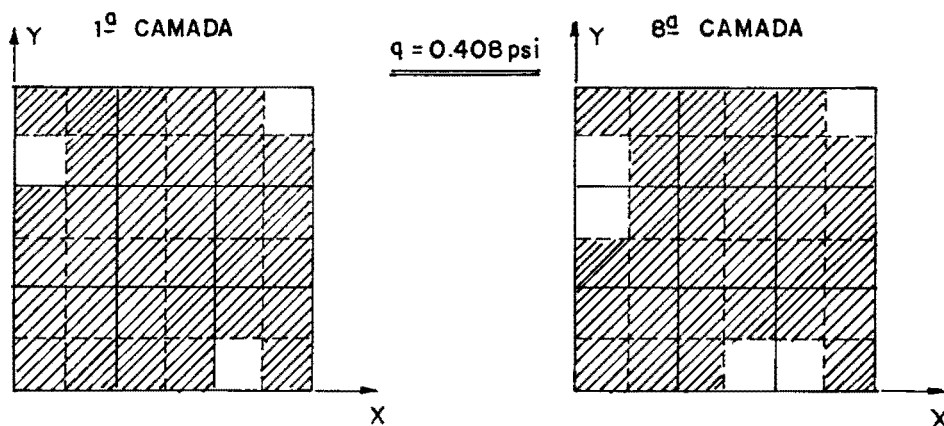
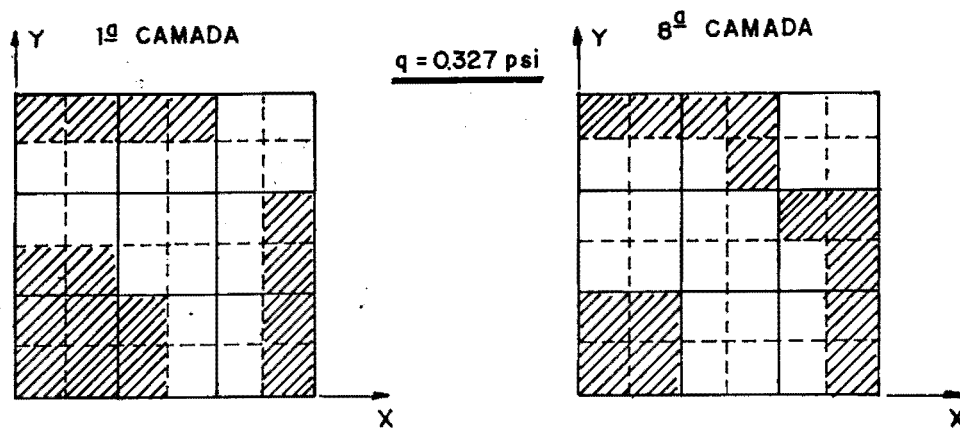
(a) - Curva carga x deslocamento (caso isotrópico)

Figura 7.2 - Análise Elasto-Pástica de uma placa engastada



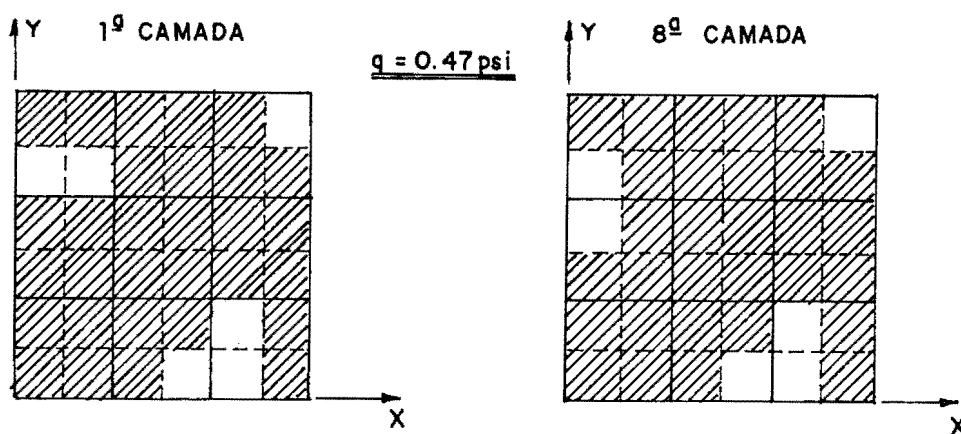
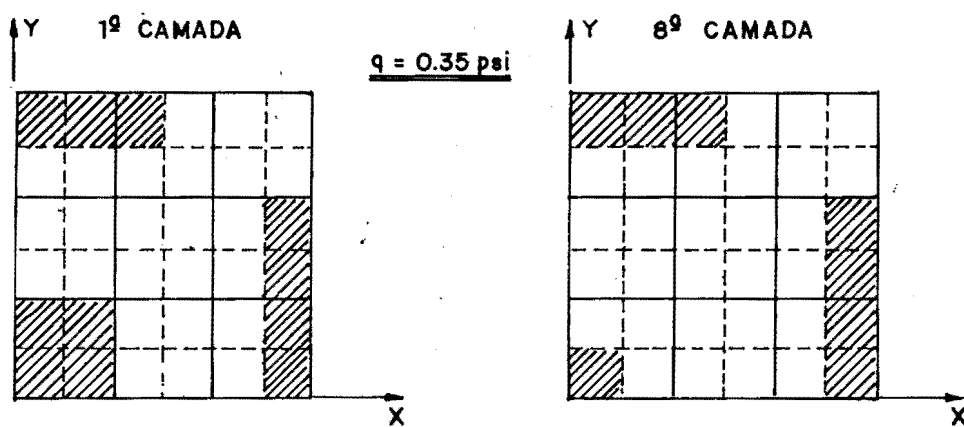
(b) - Curva carga x deslocamento (caso anisotrópico)

Figura 7.2 - Análise Elasto-Pástica de uma placa engastada



(c) - Configurações de plastificação (caso isotrópico)

Figura 7.2 - Análise Elasto-Pástica de uma placa engastada



(d) - Configurações de plastificação (caso anisotrópico)

Figura 7.2 - Análise elasto-plástica de uma placa engastada



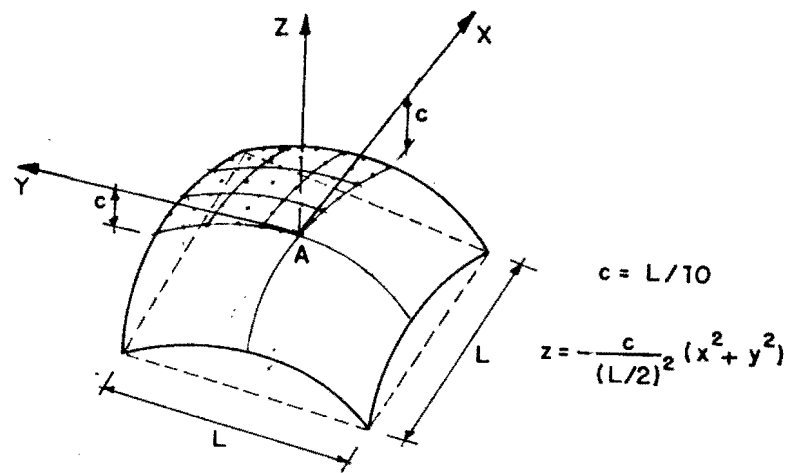
centro é investigado. As características do material e a discretização utilizada são as mesmas do exemplo 7.2.2.

Na Figura 7.3 (a) encontra-se representada a geometria da estrutura e nas Figuras 7.3 (b) e 7.3 (c), respectivamente, mostram-se representadas as respostas (curva carga x deslocamento) da estrutura para os casos isotrópico e anisotrópico. Para fins de comparação, nestas mesmas figuras os resultados obtidos por LI; OWEN (1988) são também mostrados.

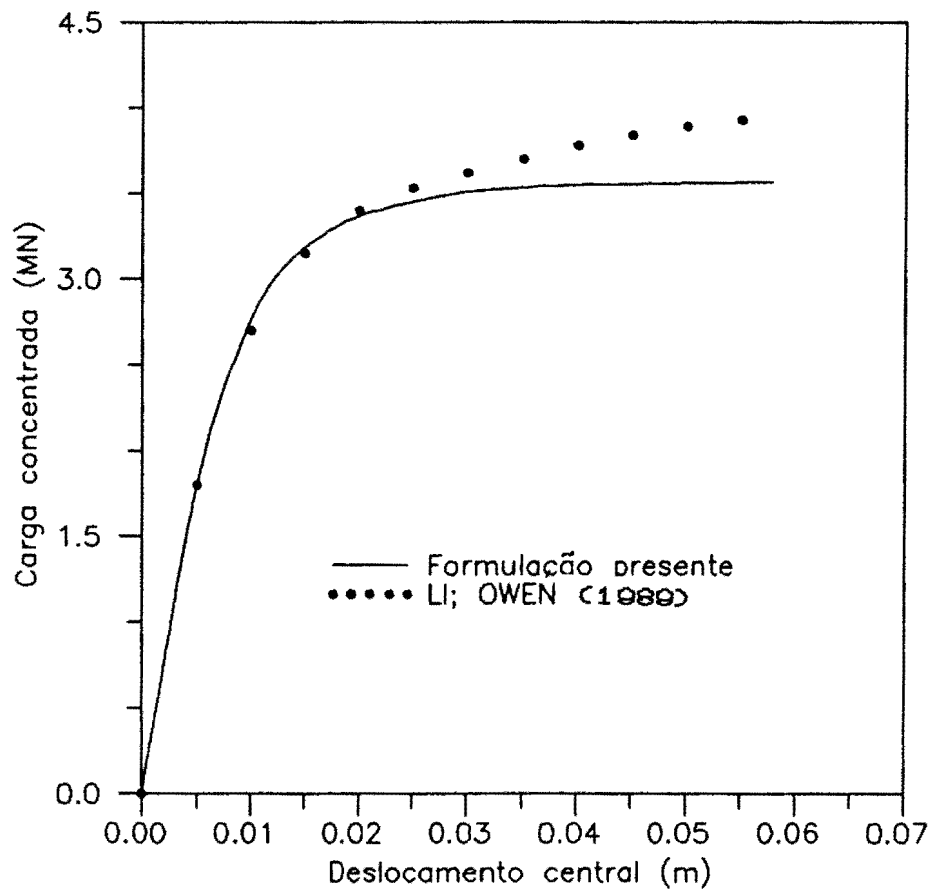
#### 7.2.4 - Placa laminada simplesmente apoiada

As respostas elasto-plásticas de uma placa quadrada ( $a = 12\text{in}$  e  $h = 0,3\text{ in}$ ) laminada, uniformemente carregada, para quatro diferentes esquemas de laminação, "cross-ply" (0/90/0/90) e "angle-ply" ( $-\theta/\theta/-\theta/\theta$ ) com  $\theta$  igual a  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , são obtidas neste exemplo. As condições de contorno adotadas para os casos "angle-ply" e "cross-ply" são, respectivamente, C2 (citada no exemplo 6.2.5) e C3 (citada no exemplo 6.2.7).

Os dados elásticos adotados correspondem a um grafite-epóxi T300/5208 e são:  $E_1 = 19,2 \times 10^6 \text{psi}$ ,  $E_2 = 10^6 \text{psi}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0,82 \times 10^6 \text{psi}$ ,  $G_{23} = 0,49 \times 10^6 \text{psi}$  e  $\nu_{12} = 0,24$ . Adicionalmente, para a realização da análise elasto-plástica, foram admitidos os seguintes dados:  $\bar{\sigma}_{10} = 9,8 \times 10^9 \text{psi}$ ,  $\bar{\sigma}_{20} = 2,1 \times 10^9 \text{psi}$ ,  $\bar{\sigma}_{450} = 4,2 \times 10^9 \text{psi}$ ,  $\bar{\sigma}_{120} = \bar{\sigma}_{190} = 3,5 \times 10^9 \text{psi}$  e  $\bar{\sigma}_{23} = 1,5 \times 10^9 \text{psi}$ , e o material foi admitido como elasto-plástico perfeito. A carga de referência adotada

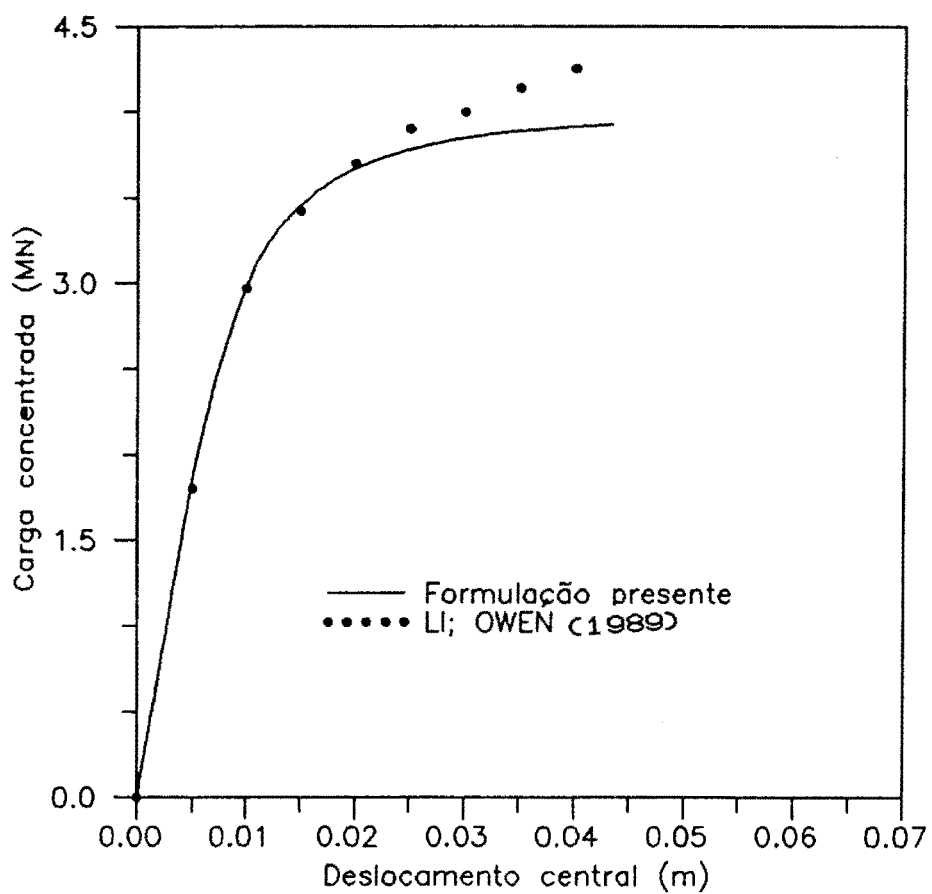


(a) - Geometria



(b) - Curva carga x deslocamento (caso isotrópico)

Figura 7.3 - Casca quadrática engastada



(c) - Curva carga x deslocamento (caso anisotrópico)

Figura 7.3 - Casca quadrática engastada

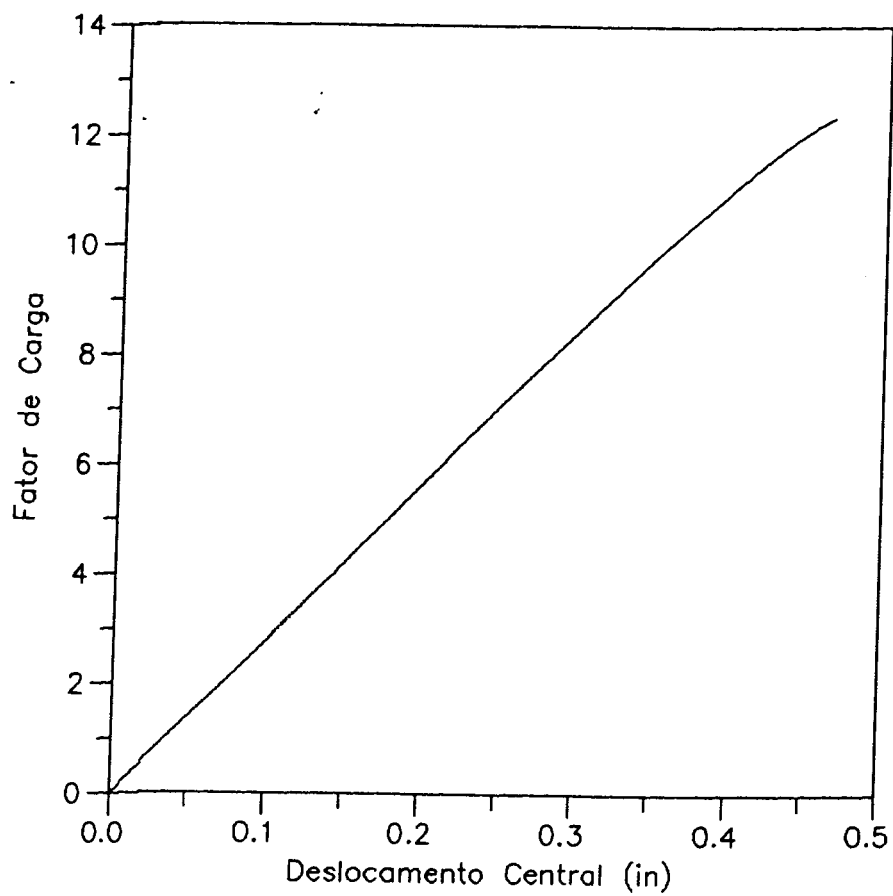
para o caso "cross-ply" foi  $q = 5,0 \text{ psi}$ .

Um quarto da estrutura foi modelado por uma malha de  $3 \times 3$  elementos e, para obter uma integração mais precisa ao longo da espessura, cada lâmina foi subdividida em duas camadas.

As curvas carga  $\times$  deslocamento central da placa obtidas apresentaram-se bem diferentes para os casos "cross-ply" e "angle-ply", como pode-se observar nas Figuras 7.4 (a) e 7.4 (b) e também como já é sabido ocorrer com frequência até mesmo tratando-se de análise elástica. No caso "cross-ply" a placa apresentou um comportamento quase linear dentro da faixa de solicitação admitida (carga entre 0 e  $60 \text{ psi}$ , aproximadamente). As respostas para as estruturas com esquemas de laminação tipo "angle-ply", se comparadas entre si, dão indícios de um comportamento mais rígido para o caso em que  $\theta = 60^\circ$ .

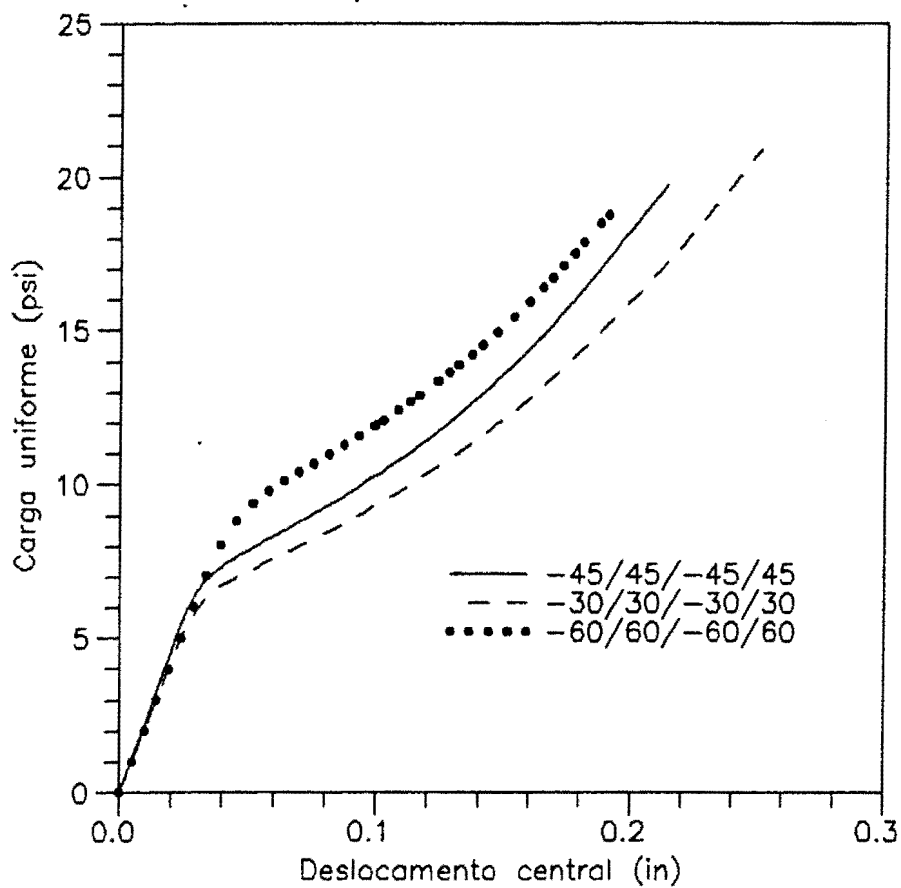
#### 7.2.5 - Casca cilíndrica laminada

A casca cilíndrica, representada na Figura 7.5 (a), com bordas longitudinais engastadas e bordas transversais livres, é analisada neste exemplo. A estrutura é solicitada por uma carga concentrada em seu centro e constituída por três lâminas, para as quais foram adotadas as seguintes propriedades elásticas:  $E_1 = 25 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $E_2 = 10^6 \text{ psi}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0,5 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $G_{23} = 0,2 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $\nu_{12} = 0,25$ , e adicionalmente com o objetivo de investigar o comportamento elasto-plástico da estrutura foram admitidas



(a) - Curva carga x deslocamento central (caso "cross-ply")

Figura 7.4 - Placa laminada simplesmente apoiada



(b) - Curva carga x deslocamento central (caso "angle-ply")

Figura 7.4 - Placa laminada simplesmente apoiada

as seguintes propriedades  $\sigma_{10} = 10,8 \times 10^9 \text{ psi}$ ,  $\sigma_{20} = 3,2 \times 10^9 \text{ psi}$ ,  $\bar{\sigma}_{450} = 5,4 \times 10^9 \text{ psi}$ ,  $\bar{\sigma}_{120} = \bar{\sigma}_{130} = 3,5 \times 10^9 \text{ psi}$ ,  $\bar{\sigma}_{230} = 1,8 \times 10^9 \text{ psi}$ ,  $H_{p1} = 2,0 \times 10^9 \text{ psi}$  e  $H_{p2} = 0,25 \times 10^9 \text{ psi}$ .

Foram considerados dois diferentes esquemas de laminação, (0/90/0) e (90/0/90), e para cada um destes esquemas, foram feitas duas análises:

caso 1 - Identificando a curva tensão efetiva x deformação plástica efetiva com a curva  $\bar{\sigma}_1 \times \epsilon_{p1}$ .

caso 2 - Identificando a curva tensão efetiva x deformação plástica efetiva com a curva  $\bar{\sigma}_2 \times \epsilon_{p2}$ .

As respostas obtidas para os dois esquemas de laminação considerados são significativamente diferentes, mostrando-se bem mais rígida a estrutura com o esquema (0/90/0). Este resultado era esperado pelo fato de que para esta configuração tem-se duas lâminas com as fibras dispostas ao longo da curvatura da casca. As respostas obtidas com os dois diferentes casos de análise (1 e 2) concordaram consideravelmente bem, principalmente para o esquema (90/0/90), conforme pode-se visualizar na Figura 7.5 (b), onde todos estes resultados são apresentados. Na Figura 7.5 (c) são representadas as configurações de plastificação (1/4 da casca) das camadas inferior e superior da estrutura (caso 1 e esquema 0/90/0) para diferentes valores da carga.

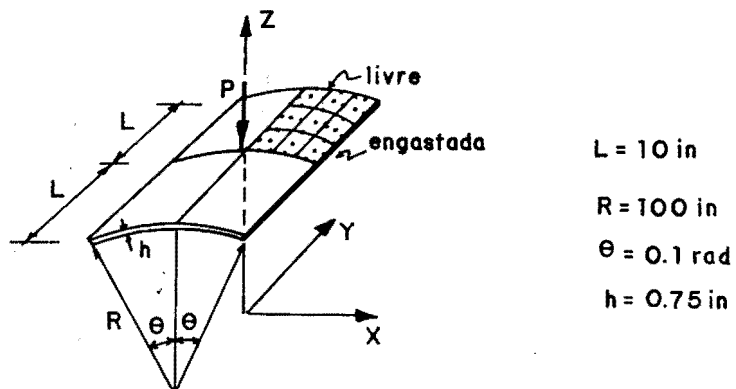
#### 7.2.6 - Casca esférica laminada simplesmente apoiada

Analiza-se neste exemplo a mesma casca esférica laminada do exemplo 6.2.7 (caso "cross-ply" com

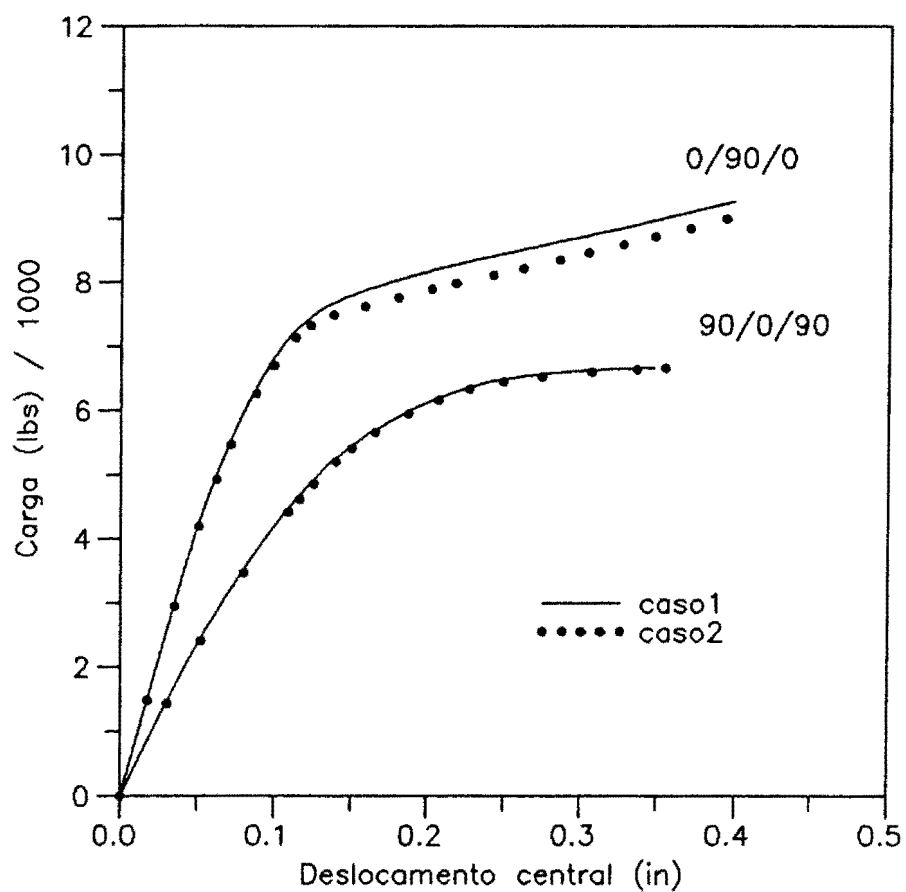
condições de contorno C3). Aqui um quarto da estrutura foi discretizado com uma malha de 3x3 elementos e cada uma das duas lâminas da estrutura foi subdividida em quatro camadas com a finalidade de detectar a plastificação ao longo da espessura. As propriedades adotadas para o material são as mesmas do exemplo anterior.

Na Figura 7.6 (a) são mostradas as respostas elástica (caso 3) e elasto-plásticas da estrutura, sendo estas últimas obtidas como descrito no exemplo anterior (casos 1 e 2). Na obtenção de todas estas respostas foram usadas as mesmas discretização e regras de integração. Na Figura 7.6 (b) são mostradas a propagação da plastificação ao longo da espessura da estrutura nos planos XZ e YZ.



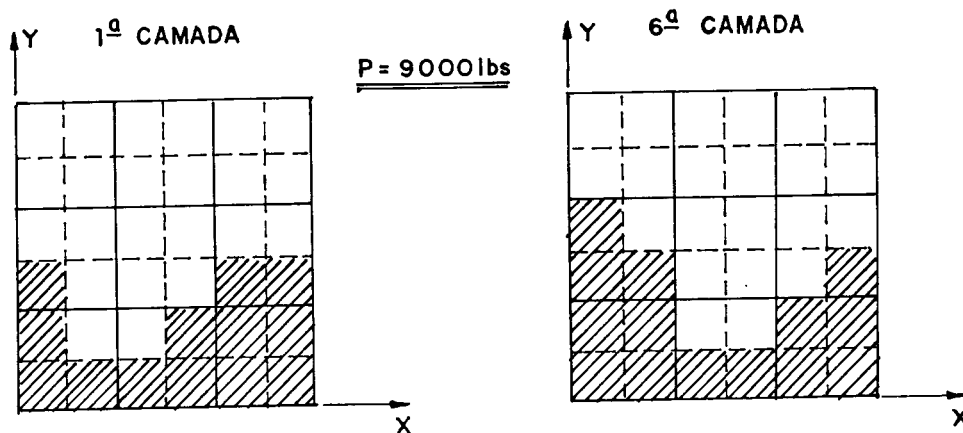
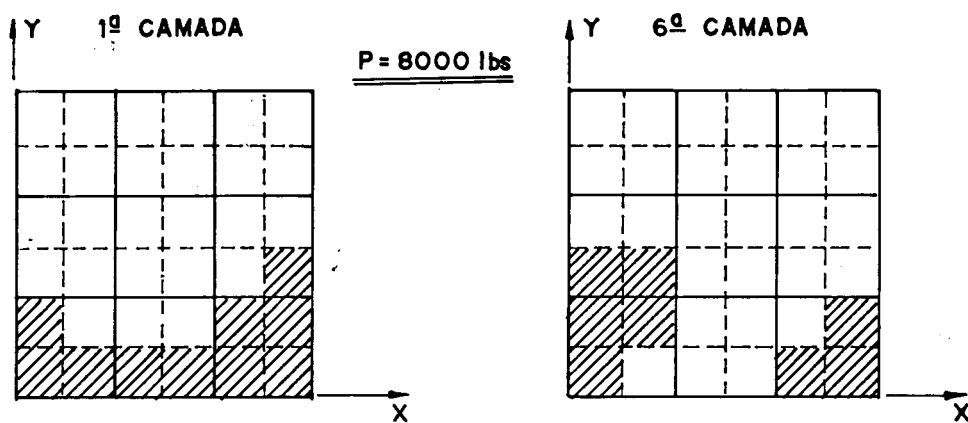


(a) - Geometria e discretização



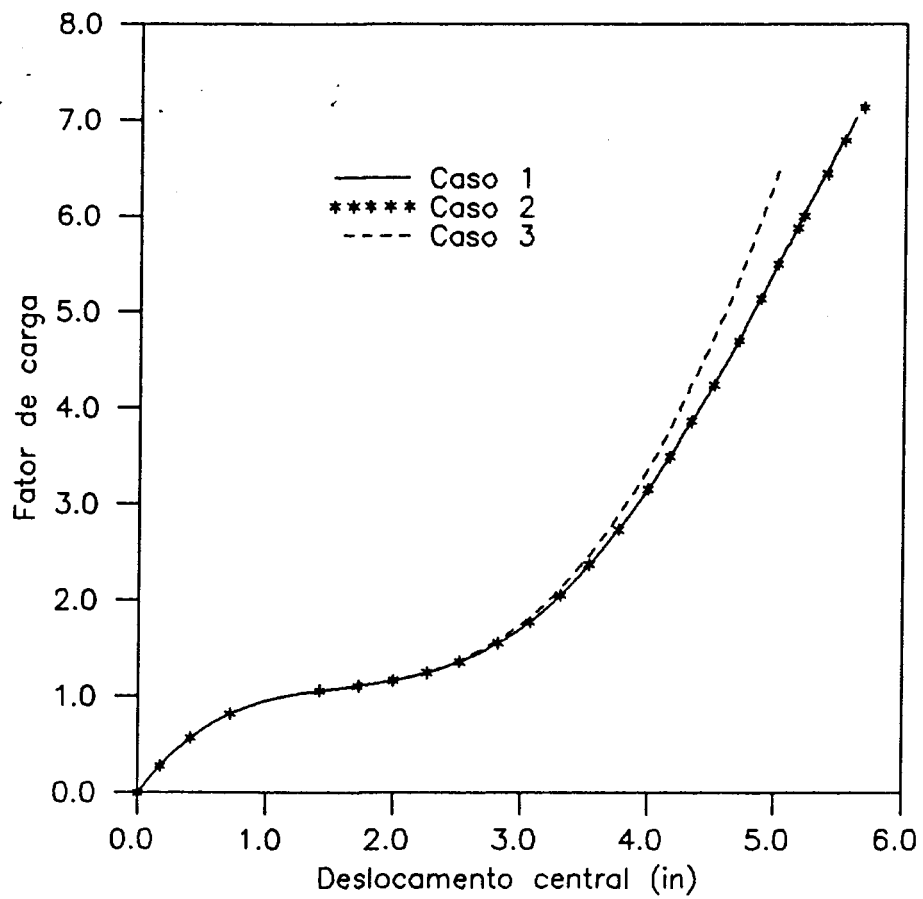
(b) - Curvas carga x deslocamento para diferentes condições de análise

Figura 7.5 - Casca cilíndrica com tres camadas



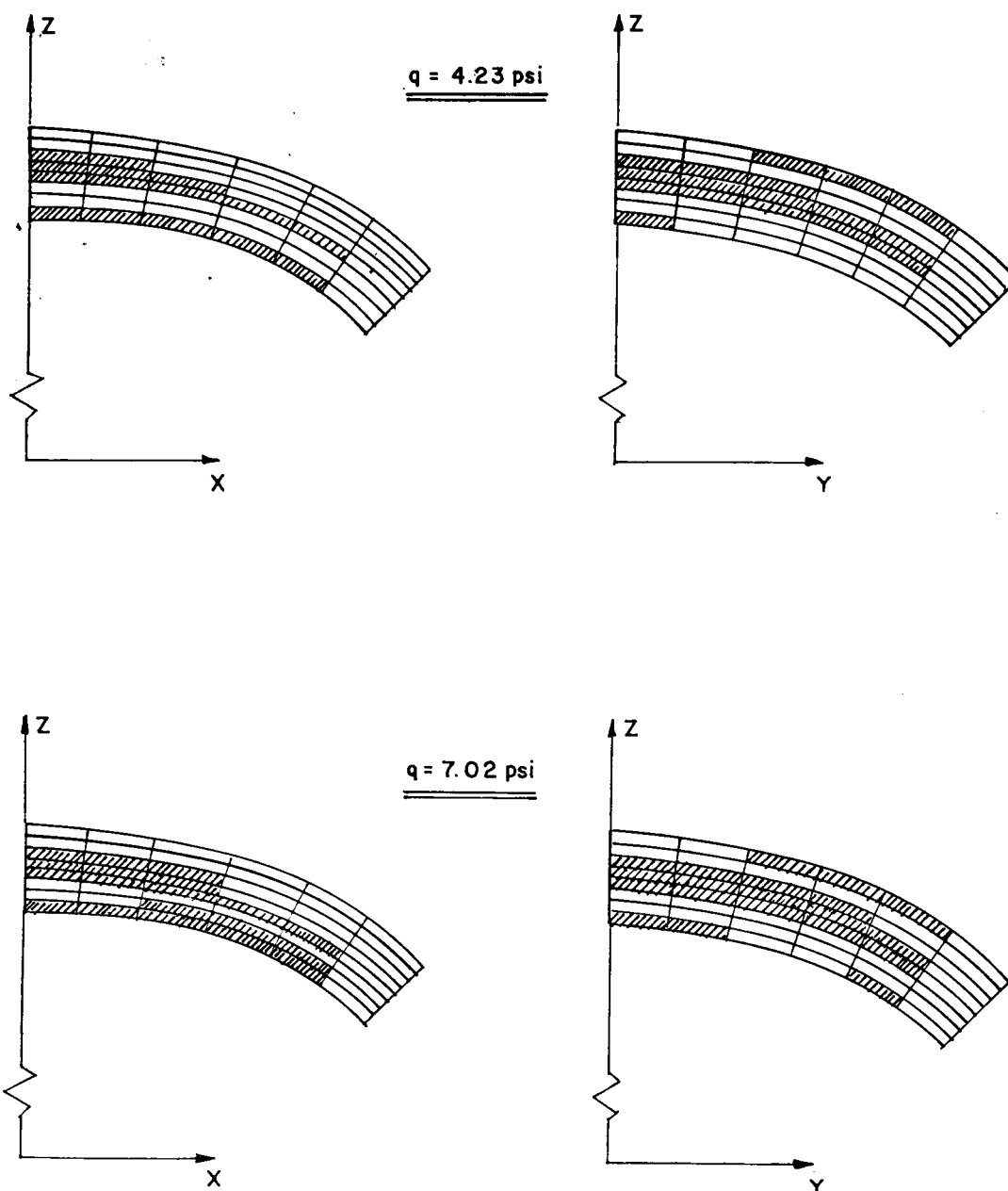
(b) - Configurações de plastificação para as camadas inferior e superior da casca

Figura 7.5 - Casca cilíndrica com tres camadas



(a) - Curvas carga x deslocamento elástica e elasto-plástica

Figura 7.6 - Casca esférica com duas camadas (0/90)



(b) - Plastificação ao longo da espessura nos planos  
XZ e YZ

Figura 7.6 - Casca esférica com duas camadas (0/90)

### 7.3 - ANÁLISE DINÂMICA

#### 7.3.1 - Placa quadrada simplesmente apoiada

Neste exemplo, a resposta transiente de uma placa quadrada ( $a = 10\text{in}$  e  $h = 0,5\text{in}$ ), constituída por um material isótropo e elasto-plástico perfeito e solicitada por uma carga uniforme, é investigada. As propriedades do material são:  $E = 10^7$  psi;  $\nu = 0,3$ ;  $\bar{\sigma} = 3,0 \times 10^4$  psi,  $\rho = 2,5888 \times 10^{-4} \text{lb s}^2/\text{in}^4$  e  $E_T = 0,0$ .

Um quadrante da estrutura foi modelado com uma malha de  $3 \times 3$  elementos subdivididos em 8 camadas de igual espessura. Adotou-se  $\Delta t = 22,3\mu\text{s}$  como em BATHE; BOLOURCHI (1975).

Na Figura 7.7, mostra-se que os resultados encontrados concordaram razoavelmente bem com os resultados apresentados na referência acima citada.

#### 7.3.2 - Análise dinâmica da placa do exemplo 7.2.5

A resposta transiente elasto-plástica para a placa laminada, caso "cross-ply" (0/90/0/90), do exemplo 7.2.4 é neste exemplo obtida. Adimitiu-se atuando sobre a estrutura uma carga uniforme de intensidade igual a 16psi. Foram adotados  $\rho = 0,145 \times 10^{-3} \text{lb s}^2/\text{in}^4$  e  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ .

Na Figura 7.8 são representadas para efeito de comparação as curvas deslocamento x tempo elástica e elasto-plástica obtidas.

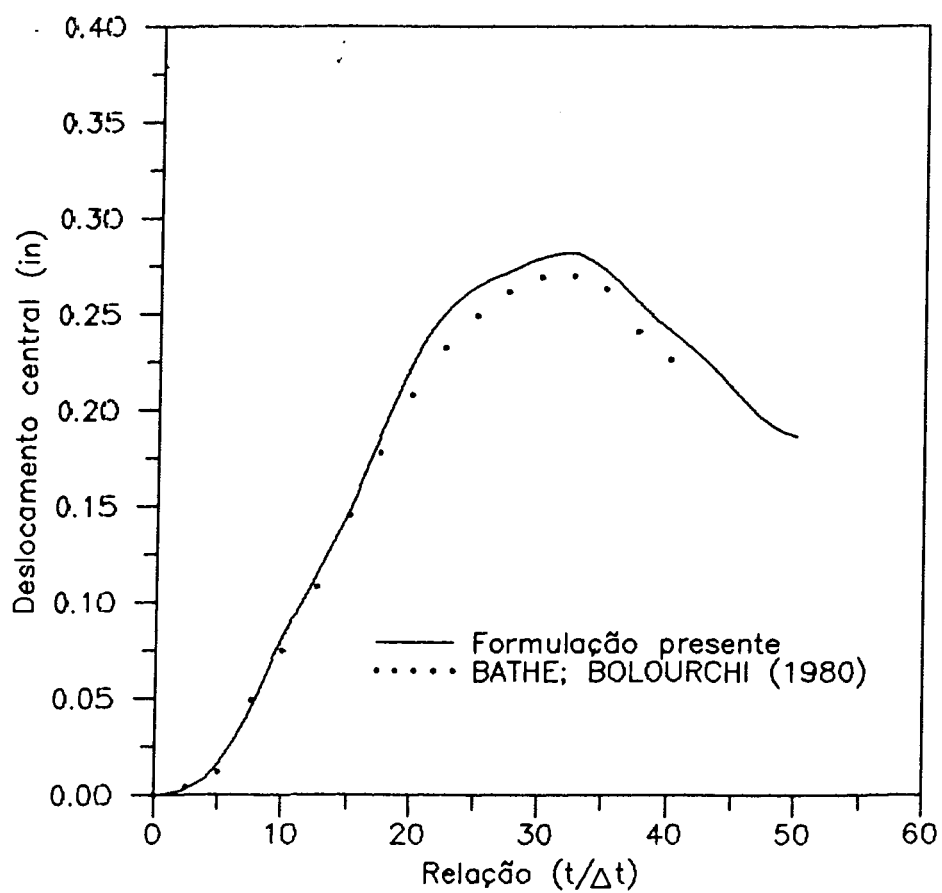


Figura 7.7 - Análise transiente elasto-plástica de uma placa simplesmente apoiada

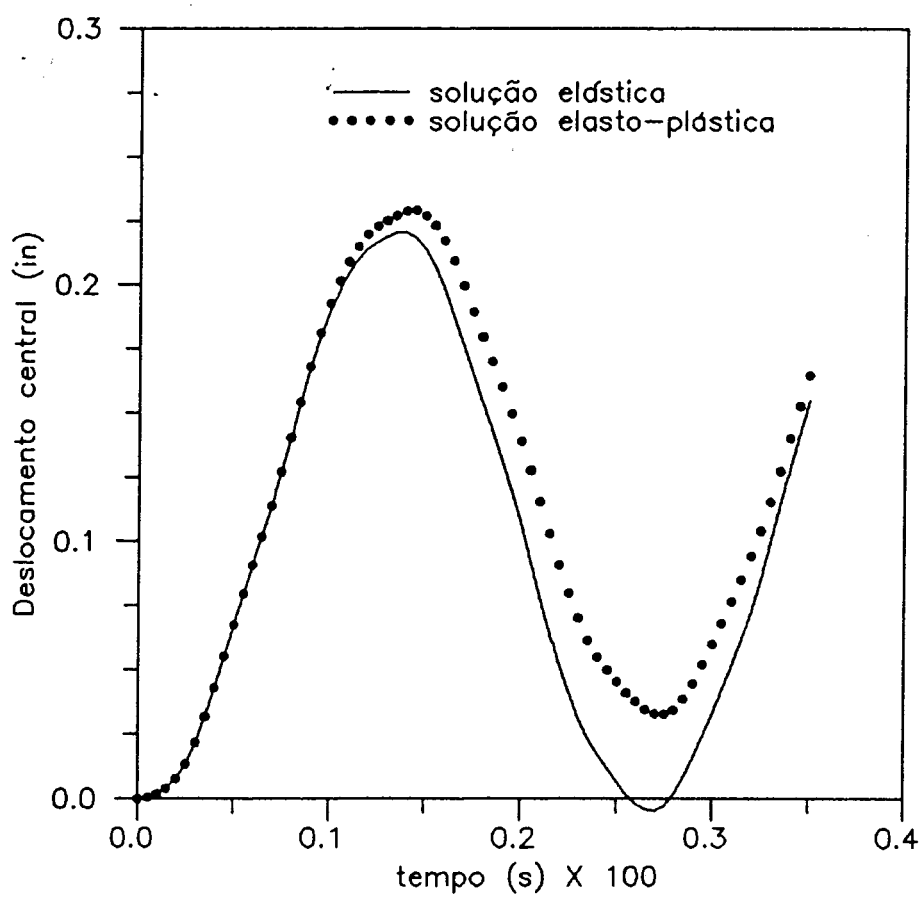


Figura 7.8 - Respostas dinâmica elástica e elasto-plástica da placa laminada do exemplo 7.2.4.

### 7.3.3 - Análise dinâmica da casca do exemplo 7.2.6

Realiza-se aqui a análise dinâmica elasto-plástica da casca dos exemplos 6.2.7 e 7.2.6. Além das propriedades elásticas e elasto-plásticas já definidas anteriormente foram adotados  $\rho = 2,3763 \times 10^{-5} \text{ lb s}^2/\text{in}^4$  e  $\Delta t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$ . Foi usada a mesma discretização adotada no caso da análise estática elasto-plástica e foram obtidas as respostas da estrutura para cargas uniformes de 1,25psi e 2,25psi. As curvas deslocamento x tempo encontradas são apresentadas na Figura 7.9.



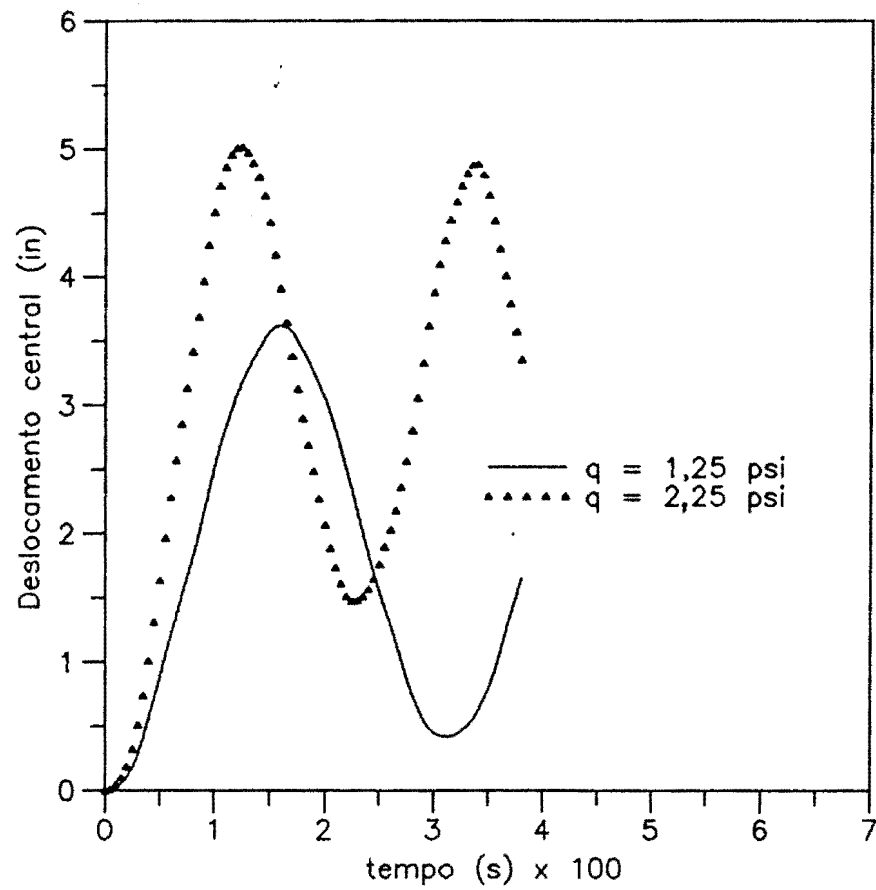


Figura 7.9 - Resposta dinâmica elasto-plástica da casca laminada do exemplo 7.2.6

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Apresentou-se no presente trabalho um modelo numérico para a análise estática e dinâmica (transiente) de placas e cascas laminadas anisótropas. Efeitos não lineares físicos foram considerados admitindo que o material se comportasse como elasto-plástico com ou sem endurecimento; e efeitos não lineares geométricos foram considerados mediante o uso de uma formulação cinemática apropriada para o estudo de problemas em que ocorram grandes deslocamentos e rotações e sejam pequenas as deformações.

Os procedimentos utilizados foram testados através da solução de um número considerável de exemplos divulgados na literatura. Entre estes exemplos constavam problemas de natureza não linear geométrica e/ou física, exemplos de estruturas de material isótropo ou anisótropo e de análise estática ou dinâmica, sempre buscando aferir a implementação computacional do modelo proposto e em alguns casos mostrar a influência de efeitos que naqueles exemplos não foram considerados.

Neste sentido, na maioria dos exemplos em que se desejava encontrar a resposta não linear geométrica (estática ou dinâmica) de estruturas laminadas anisótropas os resultados obtidos foram comparados com resultados encontrados por LIAO; REDDY (1987), pelo fato de ter-se usado no presente trabalho uma formulação cinemática

semelhante à adotada pelos citados autores. As diferenças não significativas verificadas entre os resultados obtidos neste trabalho e os encontrados pelos referidos autores podem ser atribuídas a diversos fatores:

a) LIAO; REDDY (1987) obtiveram as matrizes de rigidez dos elementos com o uso de integração explícita ao longo da espessura dos mesmos (para isto a matriz Jacobiana foi admitida como independente da coordenada normalizada  $\zeta$ ).

b) LIAO; REDDY (1987) em muitos dos exemplos analisados não fizeram menção à ordem de integração numérica utilizada para a obtenção das matrizes de rigidez dos elementos, ou seja, se total, reduzida uniforme ou reduzida seletiva.

c) A regra de integração reduzida seletiva utilizada por aqueles autores consiste em fazer na equação (4.26) a matriz constitutiva  ${}_0[C]$  como sendo a soma de duas matrizes (uma sem os termos de cisalhamento transversais,  $[C']_B$ , e a outra contendo apenas estes citados termos,  $[C']_S$ ); a integral daquela equação é então resolvida usando uma regra total (3x3) para os termos que incluem os coeficientes de  ${}_0[C']_B$  e uma regra reduzida (2x2) para os termos que incluem os coeficientes de  ${}_0[C']_S$ . Ao contrário, neste trabalho fez-se uso de uma regra de integração reduzida seletiva que consistiu em primeiramente se avaliar os termos referentes às deformações de cisalhamento transversais da matriz  $[B]_L$  (duas últimas linhas) usando uma regra 2x2 e depois por meio de extrapolação obter destes os referidos termos daquela matriz nos nove pontos de Gauss correspondentes à uma regra de integração 3x3,

para então efetuar a integral da equação (4.26). Esta forma de proceder, conforme cita HUGHES (1987), é mais apropriada para problemas não lineares ou problemas em que o material apresente anisotropia.

Exemplos adicionais foram considerados com o objetivo de testar o modelo em si, globalmente, e com o mesmo investigar o comportamento de placas e cascas laminadas anisótropas sob diferentes aspectos. Nestes, efeitos tais como a influência da sequência das lâminas ou da orientação das direções principais destas mesmas foram observados. As configurações de plastificação de algumas camadas e para valores específicos das cargas, relativas a alguns destes exemplos, foram representadas. Considerou-se também adequado verificar a influência sobre a resposta elasto-plástica de algumas estruturas, admitindo-se que o material que as constituem apresente endurecimento, de se identificar a curva tensão efetiva  $\times$  deformação plástica efetiva com a curva  $\bar{\sigma}_1 \times \bar{\epsilon}_{p1}$  ou com a curva  $\bar{\sigma}_2 \times \bar{\epsilon}_{p2}$ , uma vez que o desconhecimento da forma real daquela curva é um ponto vulnerável do modelo de endurecimento empregado.

Em geral o modelo numérico apresentou um bom desempenho, como sejam boas características de convergência e respostas em razoável concordância com outras divulgadas na literatura. Na análise elasto-plástica manteve-se sempre sob controle o número de pontos de Gauss plastificados e o valor da deformação plástica efetiva e foi possível observar que o número de iterações aumentava de forma significativa quando uma grande quantidade (em torno de

85%) de pontos de Gauss plastificava e/ou quando o valor da deformação plástica efetiva era muito próximo de 0,02, ocorrendo divergência em seguida. No caso de análise estática não linear geométrica (salvo o caso em que a estrutura sofre um forte enrijecimento) e em geral no caso da análise dinâmica, o processo de convergência apresentou-se sempre muito uniforme com o número de iterações variando entre 2 e 3.

É preciso salientar que não se tinha como objetivo neste trabalho obter um modelo numérico capaz de descrever realisticamente o comportamento elasto-plástico de cascas laminadas anisótropas. Como sabido da literatura, as dificuldades inerentes ao estudo do comportamento elasto-plástico de materiais anisótropos, sobretudo de materiais compostos reforçados com fibras, apesar de estarem sendo tratadas com o uso de metodologias distintas, ainda não permitiu o desenvolvimento de um modelo com as potencialidades acima citadas. Contudo, subsídios para a elaboração de modelos mais realísticos podem ser obtidos a partir da análise de resultados encontrados com modelos mais simples, principalmente quando são também disponíveis resultados experimentais.

Desta forma, acredita-se aqui terem sido alcançados os objetivos que motivaram o presente trabalho, proporcionando uma pequena contribuição ao desenvolvimento do tema de estudo abordado. Espera-se ainda que este trabalho possa servir como base para futuras investigações. Como os procedimentos adotados neste trabalho são bem

adequados à análise de estruturas de materiais compostos laminados, como sugestões para estas investigações podem ser citadas: o uso de outras metodologias para tratar ainda do comportamento elasto-plástico destas estruturas, a inclusão de análise de falhas causadas por danos sofridos pelos constituintes do material, e ainda a consideração de efeitos higrotérmicos, viscoelásticos e visco-plásticos.

## REFERÊNCIAS

- . AHMAD, S., IRONS, B.M., AND ZIENKIEWICZ, O.C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2, 1970, pp.419-451.
- . ARGYRIS, J. H., "Continua and Discontinua", Proceedings of First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, pp. 11-89, Ohio, 1965.
- . BATHE, K.J., RAMM, E. and WILSON, E. L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 9, 2, pp. 353-386, 1975.
- . BATHE, K.J. and BOLOURCHI, S., "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element", Computers&Structures, 11, pp. 23-48, 1980.
- . BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1982.
- . BATHE, K. J., DVORKIN, E. and HO, L. W., "Our Discrete-Kirchhoff and Isoparametric Shell Elements for Nonlinear Analysis"- An Assesment, Computers & Structures, 16, pp. 89-98, 1983.
- . BATOZ, J. L. and DHATT, G., "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, pp. 1262-1266, 1979.
- . BHIMARADDI, A., CARR, A. J. and MOSS, P. J., "Finite

- Element Analysis of Laminated Shells of Revolution with Laminated Stiffeners", *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 1, pp. 295-305, 1989.
- BRIASSOULIS, D., "The Zero Modes Problem of the Nine-Node Lagrangian Degenerated Shell Element", *Computer & Structures*, 30, 6, 1988, pp. 1389-1402.
- COOK, R.D., MALKUS, D.S. and PLESHA, M.E., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, 1988.
- CHANG, T.Y. and SAWAMIPHAKDI, K., "Large Deformation Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method", *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 331-340, 1981.
- CHANG, T.Y. and SAWAMIPHAKDI, K., "Large Deflections and Post - Buckling Analysis of Shell Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, pp. 311-326, 1982.
- CHAO, W. C. and REDDY, J. N., "Analysis of Laminated Composite Shells Using a Degenerated 3 - D Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, pp. 1991-2007, 1984.
- CHEN, W. F. and HAN, D. J., "Plasticity for Structural Engineers", Springer-Verlag, New York, 1988.
- CRIESFIELD, M. A., "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap - Through", *Computers & Structures*, 13, pp. 55-62, 1981.
- CRIESFIELD, M. A., "An Arc Length Method Including Line Searches and Accelerations", *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 19, pp. 1269-1289, 1983.



- . FIGUEIRAS, J.A. and OWEN, D.R.J., "Analysis of Elasto-Plastic and Geometrically Nonlinear Anisotropic Plates and Shells", in Finite Element Software for Plates and Shells (E. Hinton and D.R.J. OWEN eds.), Pineridge Press, 1984.
- . GALLAGHER, R. H., "Analysis of Plate and Shell Structures", Proc. of Symp. on Applications of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, pp. 155-206, 1969.
- . GALLAGHER, R.H., "Problems and Progress in Thin Shell Finite Element Analysis", in Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, John Wiley & Sons, 1976.
- . GEIER, B. and ROHWER, K. " On the Analysis of the Buckling Behavior of Laminated Composite Plates and Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.27, 403-427, 1989.
- . HILL, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon Press, Oxford, 1950.
- . HU, L. W., "Studies on Plastic Flow of Anisotropic Metals", Journal of Applied Mechanics, September, 1956.
- . HUGHES, T. J. R., "The Finite Element Method": Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- . HUGHES, T. J. R. and LIU, W. K., "Nonlinear Finite Element Analysis of Shells": Part I. Three-Dimensional Shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 20, pp. 331-362, 1981.
- . IRONS, B. W., "The Semiloof Shell Element", in Finite Element Methods for Thin Shell Structures and Curved

- Members (Edited by R.H. Gallagher and D.G. Anshwell), pp. 197-222, John Wiley, New York, 1985.
- . JANG, J. and PINSKY, P. M., "An Assumed covariant strain based 9-node Shell Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, pp. 2389-2411, 1987.
- . JENSEN, W. R., FALBY, W. E. and PRINCE, N., "Matrix Analysis Methods for Anisotropic Inelastic Structures", AFFDL TR 65-220, 1966.
- . JONES, R. M., "Mechanics of Composite Materials", Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975.
- . KAMOULAKOS, A., "Understanding and Improving the Reduced Integration of Mindlin Shell Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, pp. 2009-2029, 1988.
- . KANOK-NUKULCHAI, W. TAYLOR, R.L. and HUGHES, T.J.R., "A Large Deformation Formulation for Shell Analysis by the Finite Element Method", Computers & Structures, 13, pp. 19-27, 1981.
- . KAPANIA, R. K., "A Review on the Analysis of Laminated Shells", Journal of Pressure Vessel Technology, 111, May, 1989.
- . LOVE, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications, New York, 1944.
- . LEE, S. W., WANG, S. C. and RHIU, J. J., "Study of a Nine-Node Mixed Formulation Finite Element for Thin Plates and Shells", Computers & Structures, 21, pp. 1325-1334, 1985.

- . LEKHNITSKII, S. G., "Theory of Elasticity of an Anisotropic Body", Holder-Day, San Francisco, 1963.
- . LI, Z.H. and OWEN, D.R.J., "Elasto-Plastic Analysis of Laminated Anisotropic Shells by a Refined Finite Element Laminated Model", Computers & Structures, 32, 5, pp. 1005-1024, 1989.
- . LIAO, C. L. and REDDY, J. N., "An Incremental Total Lagrangian Formulation for General Anisotropic Shell-Type Structures", Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 24061, 1987.
- . LIAO, C.L., and REDDY, J.N., "Continuum - Based Stiffened Composite Shell Element for Geometrically Nonlinear Analysis", AIAA Journal, 27, 1, pp. 95-101, 1989.
- . MALKUS, D. S. and HUGHES, T.J.R., "Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 15, pp. 63-81, 1978.
- . MALVERN, L. E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- . NOOR, A.K. and CAMIN, R.A., "Symmetry Considerations for Anisotropic Shells", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 9, pp. 317-335, 1976.
- . NOOR, A.K., MATHERS, M.D. and ANDERSON, M.S., "Exploiting Symmetries for Efficient Postbuckling Analysis of Composite Plates", AIAA Journal, Vol. 15, No. 1, pp. 24-32, 1977.
- . NOOR, A.K., ANDERSEN, C.M. and TANNER, J.A., "Exploiting symmetries in the Modeling and Analysis of Tires",

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 63, pp. 37-81, 1987.
- . NOOR, A. K., "Mechanics of Anisotropic Plates and Shells - A New Look at an Old Subject", Computer & Structures, 44, 3, pp. 499- 514, 1992.
- . OLIVER, J. and ONATE, E., "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures using Finite Elements". Part I. Two-Dimensional Problems: Shells and Plates Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 2253-2281, 1984.
- . OWEN, D. R. J. and HINTON, E., "Finite Elements in Plasticity": Theory and Practice, Pineridge Press, Swansea, U. K., 1980.
- . OWEN, D. R. J. and FIGUEIRAS, J. A., "Elasto-Plastic Analysis of Anisotropic Plates and Shells by the Semiloof Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 521-539, 1983a.
- . OWEN, D.R.J. and FIGUEIRAS, J.A., "Anisotropic Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 545-566, 1983b.
- . OWEN, D.R.J. and LI, Z. H., "Refined Finite Element Laminated Models for the Static and Dynamic Elasto-Plastic Analysis of Anisotropic Shells", in Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells (W.B. Kratzig and E. Onate, eds.), Springer-Verlag, Germany, 1990.
- . PALANI, G. S., IYER, N. R. and APPA RAO, T. V. S. R., "An Efficient Finite Element Model for Static and Vibration Analysis of Eccentrically Stiffened Plates/shells",

- Computer & Structures, 43, pp. 651-661, 1992.
- . PANDA, S. and NATARAJAN, R., "Analysis of Laminated Composite Shell Structures by Finite Element Method", Computer & Structures, 14, 3-4, pp. 225-230, 1981.
- . PARISCH, H., "Geometrical Nonlinear Analysis of Shells", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 14, pp. 159-178, 1978.
- . PARISCH, H., "A Critical Survey of The 9-Node Degenerated Shell Element With Special Emphasis on Thin Shell Application and Reduced Integration", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 20, pp. 323-350, 1970.
- . PARISCH, H., "Large Displacements of Shells Including Material Nonlinearities", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 27, pp. 183-214, 1981.
- . PAWSEY, S. F. and CLOUGH, R.W., "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, pp. 575-586, 1987.
- . POWELL, G. and SIMONS, J., "Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, pp. 1455-1467, 1981.
- . RAMM, E., "A Plate/Shell Element for Large Deflections and Rotations", in K. J. Bathe, J. T. Oden and W. Wunderlich, eds., Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis (M. I. T., Cambridge, MA, 1977), pp. 264-273.
- . RAMM, E., "Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points", Proc. Europe - U.S. Workshop on

Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer-Verlag, 1981.

- . RAMM, E. and STEGMULLER, M., "The Displacement Finite Element Method in Nonlinear Buckling Analysis of Shells", in "Buckling of Shells", Proceedings of a State-of-Art Colloquium. Universitat Stuttgart, Germany, May 6-7, Springer-Verlag, pp. 201-235, 1982.
- . RAO, K.P., "A Rectangular Laminated Anisotropic Shallow Thin Shell Finite Element", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 15, pp. 13-33, 1978.
- . REDDY, J. N., "Finite Element Modeling of Layered, Anisotropic Composite Plates and Shells: A Review of Recent Research", Shock and Vibration Digest, Vol. 13, No. 12, 1981.
- . REDDY, J. N., "Bending of Laminated Anisotropic Shells by a Shear Deformable Finite Element", Fiber Science and Technology, 17, pp. 9-24, 1982.
- . REDDY, J. N. and CHANDRASHEKHARA, K., "Geometrically Non-Linear Transient Analysis of Laminated Doubly Curved Shells", International Journal of Non-Linear Mechanics, 20, 2, pp. 79-90, 1985.
- . REDDY, J. N. and CHANDRASHEKHARA, K., "Recent Advances in the Nonlinear Analysis of Laminated Composite Plates and Shells, Shock and Vibration Digest, Vol.19, No. 4, 1987.
- . REDDY, J. N., "On Refined Computational Models of Composite laminates", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 27, pp. 361-382, 1989.
- . RHIU, J. J. and LEE, S. W., "A New Efficient Mixed Formulation for Thin Shell Finite Element Models",

- International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, pp. 581-604, 1987.
- . RIKS, E., "The Application of Newton's Methods to the Problem of Elastic Stability, Journal of Applied Mechanics, 39, pp.1060-1066, 1972.
  - . RIKS, E., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problem", International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, pp. 529-551, 1979.
  - . SCHELLEKENS, J. C. J. and BORST, R., "The Use of the Hoffman Yield Criterion in Finite Element Analysis of Anisotropic Composites", Computer & Structures, 37, pp. 1087-1096, 1990.
  - . SOKOLNIKOFF, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1946.
  - . SOMASHEKAR, B. R., PRATHAP, T. J. R. and BABU, C. R., "A Field-Consistent Four-Noded, Laminated, Anisotropic Plate/Shell Element", Computers & Structures, 25, pp. 345-353, 1987.
  - . SUBBARAJ, K. and DOKAINISH, M.A., "A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics - II". Implicit Methods. Computers & Structures, Vol. 32, pp. 1387-1401, 1989.
  - . SURANA, K. S., "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, pp. 581-615, 1983.
  - . VENKATESH, A. and RAD, K. P., "Analysis of Laminated Shells with Laminated Stiffeners using Rectangular Finite Elements", Computer Methods of Applied Mechanics and

- Engineering, 38, pp. 255-272, 1983.
- . VENKATESH, A. and RAO, K. P., "Analysis of Laminated Shells of Revolution with Laminated Stiffeners using a Doubly Curved quadrilateral Finite Element", Computers & Structures, 20, pp. 669-682, 1985.
  - . WEMPNER, G. A., "Discret Approximations related to Nonlinear Theories of Solids", International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, pp. 1581-1599, 1971.
  - . WHANG, B., "Elasto - Plastic Orthotropic Plates and Shells", Proc. of Symp. on Application of Finite Element Method in Civil Engineering, pp. 481-515. Vanderbilt University, Tennessee, 1969.
  - . WILT, T. E., SALEEB, A. F. and CHANG, T. Y., "A Mixed Element for Laminated Plates and Shells", Computers & Structures, 37, pp. 597-611, 1990.
  - . YANG, H.T.Y., SAIGAL, S. and LIAW, D.G., "Advances of Thin Shell Finite Elements and Some Applications - Version I", Computers & Structures, Vol. 35, No. 4, pp. 481-504, 1990.
  - . YANG, Y.B. and McGUIRE, W., "A Work Control Method for Geometrically Nonlinear Analysis", NUMETA 85 - 1985 International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications, Edited by J. Middleton and G. N. Pande, University College Swansea, Wales, UK, pp. 913-921, 1985.
  - . YANG, Y. B. and SHIEH, M. S., "Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points", A.I.A.A. Journal, 28, pp. 2110-2116, 1990.



- . YEOM, C. H., SCARDERA, M. P. and LEE, S. W., "Shell Analysis with a Combination of Eight Node and Nine Node Finite Elements", Computers & Structures, 28, pp. 155-163, 1988.
- . ZIENKIEWICZ, O. C., "Incremental Displacement in Non-Linear Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3, pp. 587-588, 1971.
- . ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R. L. AND TOO, J. M., "Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3, pp. 275-290, 1971.