

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC

TRATAMENTO DO PROBLEMA DE CONTATO E IMPACTO EM GRANDES  
DEFORMAÇÕES PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Eduardo Bittencourt

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil CPGEC,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em  
Engenharia.

Área de concentração: Estruturas mecânicas

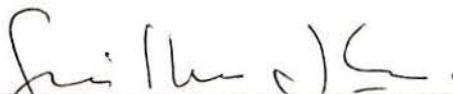
Porto Alegre

1994

ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia a aprovada em sua forma final pelo orientador e pela banca examinadora.

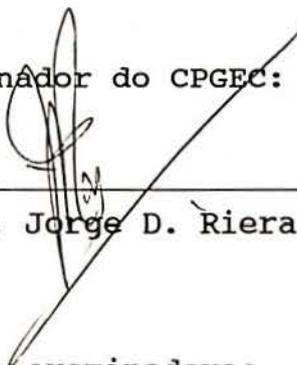
Orientador:



- Guillermo J. CREUS

Prof. da Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
D.Sc. pela Coordenadoria de Programas de Pós-Grad. em Eng. (COPPE), RJ

Coordenador do CPGEC:



- Prof. Jorge D. Riera

Banca examinadora:

- Raul FEIJÓO

Prof. do Laboratório Nacional de Computação Científica, RJ  
D.Sc. pela COPPE

- Ademar G. GROEHS

Prof. da Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
D.Sc. pela COPPE

- Carlos A. C. SELKE

Prof. da Universidade Federal de Santa Catarina  
Ph.D. pela Michigan University, EUA

## AGRADECIMENTOS

Aos professores Guillermo J. Creus do CPGEC/UFRGS e Michel Hogge do LTAS/ULG (Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales da Université de Liège, Bélgica), que permitiram que este trabalho pudesse ser realizado.

Aos colegas dr. J.-Ph. Ponthot e eng. Laurent Stainier do LTAS pelas frutíferas trocas de idéias, bem como à todos os demais colegas e professores do LTAS e CPGEC pela amizade e auxílio.

Ao CESUP (Centro Nacional de Super-Computação) em especial à profa. dra. Denise Ewald, pelo apoio logístico.

Ao prof. dr. Ademar G. Groehs pelo estímulo e apoio.

Ao CNPq, CAPES, PROPESP e Albarus S.A. pelo suporte financeiro.

Em especial, a meus pais, Cacildo e Edith.

## SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	viii
LISTA DE FIGURAS.....	xvi
LISTA DE TABELAS.....	xx
RESUMO.....	xxi
ABSTRACT.....	xxiii
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 RELAÇÕES BÁSICAS.....	4
2.1 Equações que Governam o Contínuo.....	4
2.2 Solução Numérica do Problema.....	7
3 ASPECTOS GERAIS DO TRATAMENTO DO PROBLEMA DE CONTATO E ATRITO.....	14
3.1 Contato Unilateral.....	14
3.2 Leis Constitutivas para o Tratamento do Atrito.....	18
3.2.1 Contato Colante ou Reversível.....	23
3.2.2 Contato Deslizante ou Irreversível.....	24
3.3 Leis Constitutivas de Contato em Grandes Deformações....	29
3.4 Integração Temporal das Leis Constitutivas.....	32
3.5 Obtenção de uma Matriz Tangente de Contato.....	38
3.5.1 O Contato Considerado como Cargas Distribuídas.....	39
3.5.2 O Contato Considerado como Cargas Nodais.....	41
3.5.3 Penalidade Variável.....	45

4	TRATAMENTO DO PROBLEMA DE CONTATO ENTRE CORPOS FLEXÍVEIS 2D.....	48
4.1	Introdução.....	48
4.2	Definição das Superfícies Alvo/Escrava.....	49
4.3	Algoritmo Pesquisa do Contato.....	51
4.3.1	Pesquisa à Nível Global.....	51
4.3.2	Pesquisa à Nível Local.....	53
4.4	Algoritmo para o Cálculo de Forças de Contato.....	58
5	GENERALIZAÇÃO DAS RELAÇÕES DE CONTATO PARA O TRATAMENTO DOS PROBLEMAS 3D.....	59
5.1	Leis Constitutivas de Contato em 3D.....	59
5.2	Matriz Tangente de Contato 3D.....	65
5.3	Processo de Pesquisa do Contato.....	69
5.3.1	Pesquisa à Nível Global e Local.....	69
5.3.2	Processo de Projeção Ortogonal 3D.....	71
5.4	Definição de um Sistema de Eixos Local.....	77
6	TRATAMENTO DO PROBLEMA DE CONTATO ENTRE CORPOS FLEXÍVEIS 3D.....	81
6.1	Introdução.....	81
6.2	Principais Dificuldades Encontradas.....	83
6.3	Definição do Contato.....	89
6.4	Algoritmo para o Contato 3D.....	93
7	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	94
7.1	Comparação dos Processos de Integração de Contato.....	94
7.2	Contato entre Corpos Flexíveis 2D.....	101
7.2.1	Impacto Tubo/Placa.....	101
7.2.2	Impacto em uma Turbina.....	111
7.3	O Elemento Volumétrico 3D.....	121

7.3.1	Mono Elemento em Cisalhamento.....	121
7.3.2	Viga em Flexão/Extensão.....	125
7.3.3	Impacto de uma Barra Sobre uma Superfície Rígida...	129
7.4	Contato 3D entre um Corpo Rígido e outro Flexível.....	136
7.4.1	Indentação por um Cilindro.....	136
7.4.2	Embutimento por um Punção.....	145
7.4.3	'Upsetting' de um Cilindro.....	152
7.4.4	Embutimento de uma Placa Circular.....	157
7.5	Contato 3D entre Corpos Flexíveis.....	168
7.5.1	Impacto Longitudinal de Barras.....	168
7.5.2	Impacto Entre Dois Tubos.....	171
8	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	176
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	178
	ANEXO 1: RELAÇÕES CINEMÁTICAS.....	187
	APÊNDICE 1: LEIS CONSTITUTIVAS EM PEQUENAS DEFORMAÇÕES.....	194
	APÊNDICE 2: LEIS CONSTITUTIVAS EM GRANDES DEFORMAÇÕES.....	202
	APÊNDICE 3: INTEGRAÇÃO DAS LEIS CONSTITUTIVAS.....	208
	APÊNDICE 4: CÁLCULO DO INCREMENTO DE TENSÃO.....	215
	APÊNDICE 5: VISÃO ALTERNATIVA DOS MODELOS DE ATRITO.....	222

## LISTA DE SÍMBOLOS

### CAPÍTULO 2

$(\dot{\phantom{x}})$	Derivada temporal
$\underline{\underline{g}}$	Tensor tensão de Cauchy
$\underline{\underline{t}}$	Forças externas
$\underline{\underline{b}}$	Forças de volume
$\underline{\underline{x}}$	Coordenadas
$\underline{\underline{u}}$	Deslocamento
$\underline{\underline{v}}$	Velocidade
$\underline{\underline{a}}$	Aceleração
$\rho$	Densidade do meio
$V$	Volume do corpo
$\underline{\underline{X}}$	Coordenadas nodais
$\underline{\underline{U}}$	Deslocamentos nodais
$\underline{\underline{A}}$	Aceleração nodal
$\phi$	Funções de forma
$\xi, \zeta, \eta$	Coordenadas reduzidas
$\underline{\underline{F}}$	Forças nodais
$\underline{\underline{K}}^T$	Matriz tangente
$\underline{\underline{M}}$	Matriz de massa
$\Gamma_c$	Superfície candidata ao contato
$\Gamma_o$	Superfície onde há deslocamentos prescritos
$\Gamma_F$	Superfície onde há forças aplicadas

## CAPÍTULO 3

$(\dot{\phantom{x}})$	Derivada temporal
$  $	Módulo
$\underline{\underline{g}}$	Tensor tensão de Cauchy
$\underline{\underline{t}}$	Forças externas
$\underline{\underline{b}}$	Forças de volume
$\underline{\underline{x}}$	Coordenadas
$\underline{\underline{u}}$	Deslocamento
$V$	Volume do corpo
$g_N$	Penetração normal no corpo rígido
$t_N$	Pressão normal ao corpo rígido
$k_N$	Penalidade normal
$g_T$	Escorregamento tang. ao corpo rígido (acumulado)
$t_T$	Pressão tangente ao corpo rígido
$k_T$	Penalidade tangente
$g_0$	Distância inicial normal corpo rígido/flexível
$\underline{\underline{n}}$	Normal externa ao corpo rígido
$\underline{\underline{t}}$	Tangente ao corpo rígido
$\mu$	Coefficiente de atrito
$f$	Superfície de escorregamento
$f^*$	Superfície de escorregamento modificada
$A$	Aderência
$g^{irr}$	Componentes irreversíveis do deslocamento de contato
$g^{re}$	Componentes reversíveis do deslocamento de contato
$\underline{\underline{K}}$	Rel. constitutiva para contato colante
$\underline{\underline{Y}}$	Rel. constitutiva para contato deslizant
$\phi$	Função de suavização ou de forma
$(\ )_{xy}$	Grandeza ( ) expressa em eixos globais
$(\ )_{tn}$	Grandeza ( ) expressa em eixos locais
$\underline{\underline{\eta}}$	Matriz de rotação (ortogonal)
$\underline{\underline{\theta}}$	Velocidade angular do sistema de referência (anti-simétrico)

$\frac{\nabla}{\Delta t}$	Taxa de pressão corrotacional
$t$	Tempo
$( )^T$	Tensor transposto
$( )^e$	Valor associado ao preditor elástico
$( )^t$	Valor associado à config. de referência
$( )^{t+\Delta t}$	Valor associado à config. atual
$J$	Jacobiano
$K^c$	Matriz tangente de contato
$w$	Pesos dos pontos de integração
$\varphi$	Ângulo entre a tangente à matriz e o elemento de contato
$G_N$	Penetração normal no corpo rígido, no nó em questão
$G_T$	Escorregamento tang. ao corpo rígido, no nó em questão (acumulado)
$F_1^{c,k}$	Força de contato no nó k, direção i.
$h_k$	Comprimento do elemento de contato k.
$k_N$	Penalidade para o elemento k.

## CAPÍTULO 4

$\underline{X}_e$	Coordenadas do nó escravo
$\underline{X}_c$	Coordenadas dos nós alvos
$\underline{t}$	Tangente ao elemento alvo
$\underline{P}$	Coordenadas da projeção ortogonal
$\phi$	Funções de forma
$\xi$	Coordenadas reduzidas da projeção ortogonal sobre o elemento alvo.
$\underline{n}$	Normal externa ao elemento alvo
$F_{Ne}$	Força normal sobre o nó escravo
$F_{NCi}$	Força normal sobre o nó alvo $i$ do elemento alvo

## CAPÍTULO 5

$\  \quad \ $	Norma euclidiana
$  \quad  $	Módulo
$( \quad )_{T1}$	Grandeza referida ao primeiro eixo tangente à matriz
$( \quad )_{T2}$	Grandeza referida ao segundo eixo tangente à matriz
$( \quad )_N$	Grandeza referida ao eixo normal à matriz
$g_N$	Penetração normal no corpo rígido
$t_N$	Pressão normal ao corpo rígido
$k_N$	Penalidade normal
$\Delta g_T$	Escorregamento tang. ao corpo rígido num passo de tempo
$\underline{t}_T$	Pressões tangentes ao corpo rígido
$k_T$	Penalidade tangente
$\Delta \underline{G}_T$	Escorregamento tang. ao corpo rígido, no nó em questão, num passo de tempo
$G_N$	Penetração normal, no nó em questão
$G_{Ni}$	Componentes globais do vetor penetração normal
$\underline{n}$	vetor unitário normal ao corpo rígido.
$\underline{t}_1$	primeiro vetor unitário tg. ao corpo rígido.
$\underline{t}_2$	segundo vetor unitário tg. ao corpo rígido.
$( \quad )^T$	Tensor transposto
$( \quad )^e$	Valor associado ao preditor elástico
$( \quad )^t$	Valor associado à config. de referência
$( \quad )^{t+\Delta t}$	Valor associado à config. atual
$\beta$	Fator de escala aplicado ao preditor elástico
$( \quad )_{xy}$	Grandeza ( ) expressa em eixos globais
$( \quad )_{tn}$	Grandeza ( ) expressa em eixos locais
$\underline{K}$	Rel. constitutiva para contato colante
$\underline{Y}$	Rel. constitutiva para contato deslizant

$F^{c,k}_1$	Força de contato no nó $k$ , direção $i$ .
$K^c$	Matriz tangente de contato
$\eta$	Matriz de rotação (ortogonal)
$\phi$	Funções de forma associadas à função matemática que define a superfície de contato rígida
$\underline{x}_e$	Coordenadas do nó escravo
$\underline{p}$	Coordenadas da projeção ortogonal
$\xi, \eta$	Coordenadas reduzidas da superfície rígida
$\underline{R}$	Resíduo no processo iterativo de projeção ortogonal.
$\underline{x}^i$	Coordenadas globais do polo $i$ da superfície rígida
$\underline{p}^i$	Coordenadas globais da projeção na curva de base $i$

## CAPÍTULO 6

$\vec{C}_i$	Vetor diferença entre dois nós alvos consecutivos ( $i = 1,4$ )
$\vec{G}$	Vetor diferença entre o nó escravo e um nó alvo
$\vec{S}$	Projeção de $\vec{G}$ sobre o plano do elemento alvo
$\vec{n}$	Normal externa ao elemento alvo
$G_N$	Distância normal nó escravo/alvo
$RL$	Comprimento da aresta
$R_i$	Raio das esferas
$d_{12}$	Distância entre esferas
TOL	Tolerância na definição de caixas
$F_{Ne}$	Força normal sobre o nó escravo
$k_N$	Penalidade normal
$F_{Nc1}$	Força normal de reação sobre nós alvos

## CAPÍTULO 7

E	Módulo de elasticidade
$\nu$	Coef. de Poisson
$\sigma$	Tensão equiv. de Von Mises
e	Deformação plástica equivalente
$\rho$	Densidade do material
$\sigma_v$	Tensão de escoamento inicial
H	Módulo de endurecimento linear

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1.1:	Definição de condições limites.....	5
Fig. 2.2.1:	Elementos 3D.....	8
Fig. 3.1.1:	a) corpo rígido; b) corpo flexível.....	15
Fig. 3.2.1:	Definição do deslocamento e forças tangenciais...	18
Fig. 3.2.2:	Processo de laminação.....	19
Fig. 3.2.3:	Lei de Coulomb em 2D.....	20
Fig. 3.2.4:	Relação força/deslocamento tangencial segundo a lei de Coulomb.....	21
Fig. 3.2.5:	Relação força/deslocamento modificada.....	22
Fig. 3.2.2.1:	Escorregamento não associado.....	25
Fig. 3.2.2.2:	Transformação de uma lei de escorregamento não associada em associada.....	28
Fig. 3.4.1:	Caminho de integração.....	32
Fig. 3.4.2:	Definição do deslocamento tangente.....	35
Fig. 3.5.1:	Elemento de contato k.....	39
Fig. 3.5.2.1:	Cargas de contato consideradas cargas nodais.....	41
Fig. 3.5.2.2:	Definição do ângulo $\varphi$ .....	42
Fig. 3.5.3.1:	Distribuição de pressão suposta.....	46
Fig. 4.2.1:	C - Sup. alvo; E - Sup. escrava.....	49
Fig. 4.3.1.1:	O nó escravo 1 pode penetrar o segmento alvo s; o nó 2 o segmento s e t. O nó 3 não pode entrar em contato.....	52
Fig. 4.3.2.1:	Projeção ortogonal.....	53
Fig. 4.3.2.2:	Nó numa região côncava.....	55

Fig. 4.3.2.3:	Nó numa região convexa.....	56
Fig. 4.3.2.4:	Cálculo de reações nodais.....	57
Fig. 5.1.1:	Lei de Coulomb em 3D.....	60
Fig. 5.3.1.1:	Definição da superfície da matriz de contato empregando superfícies planas.....	69
Fig. 5.3.1.2:	O nó 1 pode entrar em contato com a superfície curva. O nó 2 não pode entrar em contato.....	70
Fig. 5.3.2.1:	Divisão do domínio no espaço reduzido.....	71
Fig. 5.3.2.2:	Projeção ortogonal do nó 'e' sobre a superfície.	72
Fig. 5.3.2.3:	Superfície regrada.....	75
Fig. 5.3.2.4:	Determinação de coordenadas globais para o caso de uma curva de base circular.....	75
Fig. 5.3.2.5:	Superfície Coons.....	77
Fig. 5.4.1:	Definição de um eixo tangente $t_2$ à superfície...	78
Fig. 5.4.2:	Cálculo das componentes locais do 'gap' tang....	80
Fig. 6.1.1:	Elemento de contato flexível 3D.....	81
Fig. 6.2.1:	Definição da projeção.....	83
Fig. 6.2.2:	Definição do vetor $C_1'$ .....	84
Fig. 6.2.3:	Nó numa região côncava do corpo alvo.....	85
Fig. 6.2.4:	Situação onde o contato não é detectado.....	86
Fig. 6.2.5:	'Esferas' embebidas na superfície dos corpos....	87
Fig. 6.3.1:	Definição dos nós que podem ser projetados.....	89
Fig. 6.3.2:	a) Nó numa região convexa b) Nó numa região côncava.....	90
Fig. 7.1.1	Esmagamento de um bloco retangular.....	94
Fig. 7.1.2	Malha empregada.....	95
Fig. 7.1.3	a) Deformada com método nodal b) Deformada com penalidade variável.....	96
Fig. 7.1.4	Forças de contato/forças internas.....	97
Fig. 7.1.5	Pressões nodais e valores de $\sigma_{22}$ .....	98
Fig. 7.1.6	Deformadas.....	99
Fig. 7.2.1.1	Impacto tubo/placa.....	101
Fig. 7.2.1.2	Discretização do problema.....	102
Fig. 7.2.1.3	Deformadas.....	103
Fig. 7.2.1.4	'Zoom' da zona de contato.....	106
Fig. 7.2.1.5	Posição dos nós A e B.....	107
Fig. 7.2.1.6	Deformadas.....	108
Fig. 7.2.1.7	Posição dos nós A e B.....	110

Fig. 7.2.2.1	Visão em corte da turbina.....	111
Fig. 7.2.2.2	Geometria do teste experimental.....	112
Fig. 7.2.2.3	Malha inicial.....	113
Fig. 7.2.2.4	Deformadas.....	114
Fig. 7.2.2.5	Deformadas experimentais.....	116
Fig. 7.2.2.6	Tensão de Von Mises.....	117
Fig. 7.2.2.7	'Zoom' da zona de contato.....	119
Fig. 7.2.2.8	Trajetórias experimental e numérica.....	120
Fig. 7.3.1.1	Configuração inicial/final do mono-elemento.....	122
Fig. 7.3.1.2	Tensões $S_{11}$ .....	123
Fig. 7.3.1.2	Tensões $S_{12}$ .....	123
Fig. 7.3.1.2	Tensões $S_{12}$ (elasto-plástico).....	124
Fig. 7.3.2.1	Malha inicial da viga.....	125
Fig. 7.3.2.2	Deformada.....	126
Fig. 7.3.2.3	Deformação plástica equivalente.....	127
Fig. 7.3.2.4	Evolução das reações.....	128
Fig. 7.3.3.1	Discretização da barra de Taylor.....	130
Fig. 7.3.3.2	Deformadas.....	131
Fig. 7.3.3.3	Deformação plástica equivalente.....	133
Fig. 7.3.3.4	(a) Variação da altura da barra (b) Variação do raio.....	134
Fig. 7.4.1.1	Geometria do problema (indentação por um cil.)..	136
Fig. 7.4.1.2	Malha inicial.....	137
Fig. 7.4.1.3	Deformada sem atrito.....	138
Fig. 7.4.1.4	Deformação plástica equivalente.....	139
Fig. 7.4.1.5	Deformada com atrito.....	140
Fig. 7.4.1.6	Deformação plástica equivalente.....	141
Fig. 7.4.1.7	Caso 2D.....	143
Fig. 7.4.1.8	Força de conformação.....	144
Fig. 7.4.2.1	Malha inicial (embutimento por um punção).....	145
Fig. 7.4.2.2	Peças rígidas e peça flexível.....	146
Fig. 7.4.2.3	Deformadas.....	148
Fig. 7.4.2.4	Zoom da deformada e deformação pl. equiv.....	150
Fig. 7.4.2.5	Caso 2D.....	151
Fig. 7.4.3.1	Geometria do problema ('Upsetting' de um cil.)..	152
Fig. 7.4.3.2	Deformadas e deformação plástica equiv.....	153

Fig. 7.4.3.3	Deformadas e deformação plástica equiv.....	155
Fig. 7.4.3.4	Força de conformação.....	156
Fig. 7.4.4.1	Geometria do caso Wagoner.....	157
Fig. 7.4.4.2	Peça flexível e peças rígidas.....	158
Fig. 7.4.4.3	Malha inicial.....	158
Fig. 7.4.4.4	Deformadas e def. plástica equiv. (sem atrito)..	160
Fig. 7.4.4.5	Deformadas e def. plástica equiv. (sem atrito)..	161
Fig. 7.4.4.6	Deformadas e def. plástica equiv. (com atrito)..	163
Fig. 7.4.4.7	Deformadas e def. plástica equiv. (com atrito)..	164
Fig. 7.4.4.8	Força de conformação (sem atrito).....	165
Fig. 7.4.4.9	Força de conformação (com atrito).....	166
Fig. 7.5.1.1	Malha antes do impacto (barras longitudinais)...	168
Fig. 7.5.1.2	Deformadas.....	169
Fig. 7.5.1.3	Deformadas.....	170
Fig. 7.5.1.4	Trajetórias.....	171
Fig. 7.5.2.1	Malha inicial (impacto entre dois tubos).....	172
Fig. 7.5.2.2	Zoom.....	172
Fig. 7.5.2.3	Deformadas.....	173

## LISTA DE TABELAS

Tab. 7.1.1	Comparação dos processos de cálculo de contato..	100
Tab. 7.2.1.1	Performace do impacto placa/tubo.....	107
Tab. 7.2.2.1	Performace do impacto da turbina.....	120
Tab. 7.3.3.1	Comparações com o METAFOR 2D e DYNA.....	135
Tab. 7.3.3.2	Performace da barra de Taylor.....	135
Tab. 7.4.1.1	Comparação caso 2D e 3D.....	142
Tab. 7.4.1.2	Performace do caso da indentação.....	144
Tab. 7.4.2.1	Performace do embutimento por um punção.....	151
Tab. 7.4.3.1	Caso do 'upsetting' de um cilindro.....	156
Tab. 7.4.4.1	Performace do caso Wagoner.....	166

## RESUMO

O sistema METAFOR /P1/ é um sistema computacional dirigido para a solução de problemas elastoplásticos com deformações finitas em condições dinâmicas e estáticas. Assim o programa permite o tratamento de problemas de impacto e de conformação mecânica.

Este trabalho implementou os seguintes desenvolvimentos ao METAFOR:

a) Procedimento de integração espacial simplificado das pressões de contato, que torna o método da penalidade independente da malha.

b) Tratamento do problema de contato/atrito em casos tri-dimensionais. Quando um dos corpos é rígido, o programa pode usar solução implícita ou explícita. Se o corpo rígido é um plano, uma matriz tangente explícita consistente com o processo de integração temporal de pressões de contato é usada. Se o corpo rígido tem uma geometria arbitrária, uma matriz tangente numérica é empregada. Neste caso o corpo rígido é modelado com superfícies 'Coons'.

c) Tratamento do problema de contato entre corpos flexíveis. Neste caso a solução é limitada à casos explícitos. Um método simples e eficiente é aqui empregado.

Alguns exemplos foram comparados com dados da literatura e um bom acordo foi obtido.

## ABSTRACT

METAFOR is a large computational system addressed to the solution of elastoplasticity problems with finite deformations under static and dynamic conditions. As a practical applications, it can be used to model metal forming and impact problems.

In this work the METAFOR system is extended and improved in several ways:

- a) A simplified spatial integration procedure for contact pressure that allows for a mesh independent penalty method in two dimensional cases is implemented.
- b) The contact/friction capability is extended to three dimensional situations. When one of the bodies is rigid, the program can use implicit or explicit solutions. If the rigid body is a plane, an explicit tangent matrix consistent with the contact pressure integration scheme is used. If the rigid body has an arbitrary geometry, a numerical tangent matrix is used. In this case the rigid body is modeled with 'Coons' surfaces.
- c) A capability for impact problems between flexible bodies is introduced. In this case , an explicit solution must be used. A simple and precise algorithm for nodal projection is used.

Numerical examples for different problems show good agreement with results in the literature.

## 1 INTRODUÇÃO

Os estudos analíticos do problema de contato iniciaram no século passado com os trabalhos de Hertz (ver por exemplo /T1/). As soluções analíticas continuaram a ser estudadas, mas havendo sempre sérias limitações quanto a geometria e leis constitutivas dos materiais. Uma referência bem interessante na área, é o trabalho de Johnson /J1/.

Esta situação só começou a mudar na década de 70 com a aplicação do método dos elementos finitos ao problema. Pode-se encontrar no trabalho de Zhong e Mackerle /Z1/ uma extensa revisão bibliográfica sobre o tema *contato*, desde Hertz até os tempos atuais.

No presente trabalho é estudado o tratamento numérico do problema de contato e atrito, aplicando o método dos elementos finitos, quando em presença de grandes deformações. As contribuições deste trabalho para o tema, podem ser descritas em três partes:

1. Desenvolvimento de um processo de integração simplificado das tensões de contato, que permite um ajuste automático da penalidade à malha (capítulo 3) e de uma estimativa da pressão de contato. Este processo mostrou-se eficaz e também não causou uma degradação da taxa de convergência do processo de solução, que normalmente ocorre em algoritmos com integração empregando quadratura de Gauss, como relatado por Kikuchi /K1/.

2. Elaboração de um elemento de contato e atrito tri-dimensional (capítulo 5), empregando uma matriz tangente consistente com o processo de integração temporal das pressões de contato. As formas das matrizes rígidas de contato são arbitrárias uma vez que pode-se empregar superfícies Coons para gerá-las.

3. Elaboração de um elemento de contato para o caso de contato entre corpos flexíveis 2D (capítulo 4) e 3D (capítulo 6). Em ambos os casos, um robusto algoritmo do tipo *duplo passe/força bruta* foi empregado. No caso do desenvolvimento 3D um algoritmo extremamente simples e aparentemente eficaz foi criado, capaz de igualar-se, nestes aspectos, ao conhecido 'Pinball Algorithm' /B4/, oferecendo contudo uma muito maior precisão que este último.

A implementação computacional foi feita sobre o sistema METAFOR (METAL FORMing), código desenvolvido como tese de doutorado de J. Ph. Ponthot /P1/, e que possui as seguintes características gerais:

- Código para tratamento de materiais elasto-viscoplásticos ou hiper-elásticos em grandes deformações pelo método dos elementos finitos.

- Tratamento de problemas implícitos através do método de Newton-Raphson e Newmark e problemas explícitos através do método das diferenças centrais.

- Tratamento de problemas de contato e atrito.

- Emprego de uma formulação Lagrangeana Euleriana Arbitrária.

- Solução de problemas térmicos acoplados ao problema mecânico.

O elemento volumétrico tri-dimensional foi também parcialmente desenvolvido neste trabalho, seguindo a mesma metodologia empregada no elemento bi-dimensional (estado plano de deformações) do METAFOR.

No capítulo 7 algumas aplicações do programa são apresentadas e discutidas. Neste capítulo, especialmente com relação à versão 3D, ênfase foi dada à comparação de resultados com a versão 2D do METAFOR, amplamente testada.

No anexo 1, certas definições básicas de grandes deformações são descritas.

No final deste trabalho são fornecidos ainda quatro apêndices onde é descrito o processo de integração de tensões empregado pelo METAFOR que foi usado no desenvolvimento 3D. A leitura destes apêndices não é porém obrigatória para a compreensão desta tese.

## 2 RELAÇÕES BÁSICAS

### 2.1 EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O CONTÍNUO

Os problemas que serão estudados aqui, são problemas de mecânica do contínuo. Ou seja, a massa do corpo estudado é distribuída de forma contínua no seu volume. Este tipo de meio é regido pelas equações que seguem /M1/. Para simplificá-las supor-se-á que os processos aqui estudados são isotérmicos.

1. Primeira lei do movimento (ou conservação da quantidade de movimento):

$$\sigma_{1j,j} + b_1 = \rho \dot{v}_1 \quad (2.1.1)$$

onde

$\sigma_{1j}$  é o tensor de tensão de Cauchy.

$b_1$  são as forças volume aplicadas.

$\rho$  é a densidade do meio.

$v_1$  é a velocidade do ponto considerado. (·) indica derivada temporal.

2. Segunda lei do movimento (ou conservação do momento da quantidade de movimento).

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.1.2)$$

3. Equação da continuidade (ou conservação da massa):

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (2.1.3)$$

Se o meio é incompressível, então  $\dot{\rho} = 0$  e a equação (2.1.3) torna-se:

$$v_{i,i} = 0 \quad (2.1.4)$$

As equações precedentes devem ser respeitadas dentro do volume (V) do meio estudado. As condições limites seguintes devem também ser respeitadas (ver figura (2.1.1)):

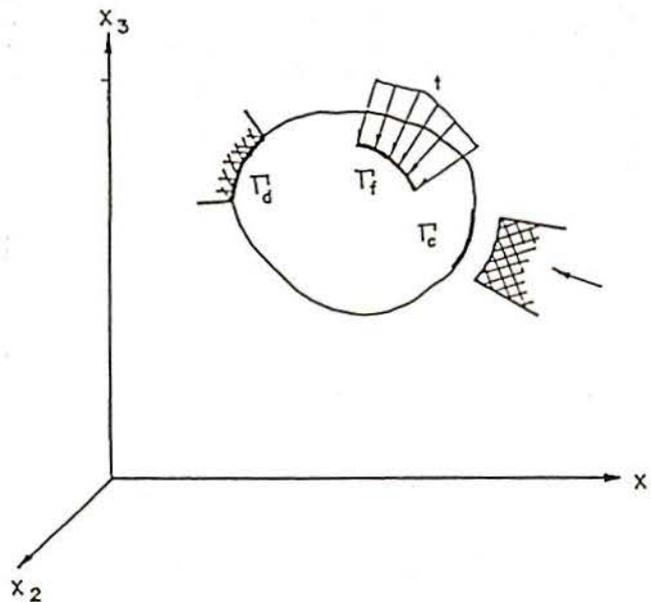


Figura (2.1.1)  
Definição de condições limites

4. Na superfície  $\Gamma_f$ :

$$\sigma_{ij}n_j = t_i \quad (2.1.5)$$

onde

$n_j$  é o vetor normal à superfície.

$t_i$  é o vetor pressão (forças por unidade de superfície).

5. Na superfície  $\Gamma_d$ :

$$u_i = \bar{u}_i \quad (2.1.6)$$

onde  $u_i$  são os deslocamentos do meio e  $\bar{u}_i$  os deslocamentos impostos.

6. Na superfície  $\Gamma_c$  (superfície candidata ao contato) deve-se garantir que os corpos não se interpenetrem, como ver-se-á com mais detalhes nos capítulos restantes.

O conjunto de equações acima não forma um problema fechado. Para que seja possível resolvê-lo, é necessário saber a relação entre  $\underline{g}$  e  $\underline{u}$ , ou seja, estabelecer uma relação constitutiva. (A forma como METAFOR estabelece esta relação pode ser encontrada junto aos apêndices no final deste trabalho). Da mesma forma, se existe um movimento relativo entre os corpos, forças tangentes à superfície de contato surgirão e sua determinação dependerá também de uma lei constitutiva, segundo as relações que serão introduzidas no parágrafo (3.2).

Estas equações formam a 'formulação forte' ou exata de um problema da mecânica do contínuo. Sua solução é difícil e limitada à carregamentos suaves. Como alternativa, pode-se adotar formas variacionais, como o método dos elementos finitos, que será aqui adotado e que permite uma solução aproximada do problema.

## 2.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Analisar-se-á aqui, a configuração num certo tempo  $t$ , de um corpo submetido à um conjunto qualquer de esforços. Como não se conhece a forma ou deformada do corpo neste tempo, vai-se simplesmente arbitrar esta deformada, a partir da qual o processo de cálculo pode ser iniciado.

Multiplicando (2.1.1) por um campo de deslocamento cinematicamente admissível  $\delta u$  e integrando por partes, sem considerar inicialmente a influência da inércia, pode-se demonstrar que sua forma integral ou 'fraca' vale:

$$\int \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV = \int t_i \delta u_i d\Gamma_F + \int b_i \delta u_i dV \quad (2.2.1)$$

onde

$$u_{i,j} = 1/2 (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \quad (2.2.2)$$

Para solucionar (2.2.1), vai-se empregar o método dos elementos finitos (ver por exemplo /Z3/). O domínio real é então subdividido em sub-domínios ou elementos finitos.

Os elementos finitos utilizados são do tipo isoparamétricos, (as funções empregadas para fazer a interpolação da geometria serão as mesmas empregadas para fazer a interpolação dos deslocamentos). Abaixo vê-se os elementos lineares (a), quadráticos (b) e cúbicos (c), para o caso de elemento tri-dimensional. Neste trabalho apenas elementos lineares serão empregados.

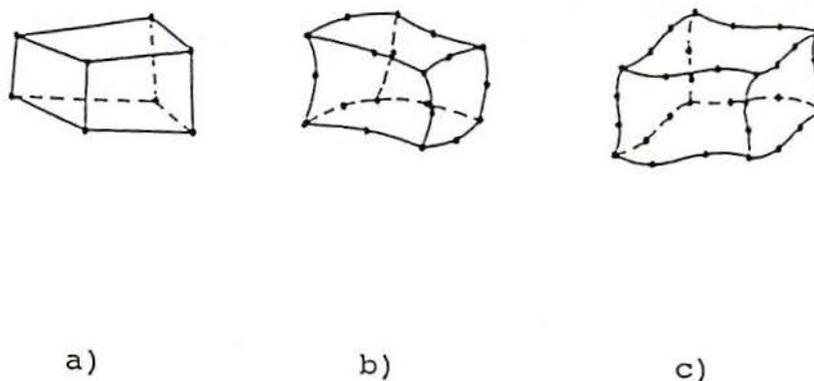


Figura (2.2.1)  
Elementos 3D

Para este caso, pode-se dizer que, para cada elemento finito:

$$u_i = \sum_{I=1}^N \phi^I(\xi, \eta, \zeta) U_i^I \quad (2.2.3)$$

$$\delta u_i = \sum_{I=1}^N \phi^I(\xi, \eta, \zeta) \delta U_i^I \quad (2.2.4)$$

$$x_i = \sum_{I=1}^N \phi^I(\xi, \eta, \zeta) X_i^I \quad (2.2.5)$$

onde  $x_i$  é a coordenada global de um ponto cujas coordenadas reduzidas são  $\xi, \eta, \zeta$  e  $X_i^I$  são as coordenadas dos nós do elemento (o índice superior  $I$  identifica o nó do elemento;  $\phi$  as funções de forma e  $N$  o número máximo de nós por elemento).  $U_i^I$  são os deslocamentos nos nós do elemento.

Para o caso tri-dimensional linear as funções  $\phi$  empregadas neste trabalho valem (figura (2.2.1a)):

$$\phi^I = 1/8 (1 + \xi\xi^I)(1 + \eta\eta^I)(1 + \zeta\zeta^I) \quad (2.2.6a)$$

onde  $\xi^I, \eta^I, \zeta^I$  são os valores aos nós  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

No caso de elementos bidimensionais lineares (4 nós) a expressão para a função de forma é substituída por:

$$\phi^I = 1/4 (1 + \xi\xi^I)(1 + \eta\eta^I) \quad (2.2.6b)$$

Pode-se escrever, ainda para um elemento:

$$\int \sigma_{,j1} \phi^I_{,j} \delta U_1^I dV^{\text{elem}} = \int t_1 \phi^I \delta U_1^I d\Gamma_F^{\text{elem}} + \\ + \int b_1 \phi^I \delta U_1^I dV^{\text{elem}}$$

que torna-se (aplicação do *lema fundamental do cálculo variacional*):

$$\int \sigma_{,j1} \phi^I_{,j} dV^{\text{elem}} = \int t_1 \phi^I d\Gamma_F^{\text{elem}} + \\ + \int b_1 \phi^I dV^{\text{elem}} \quad (2.2.7)$$

Em seguida, monta-se as contribuições de cada elemento segundo o esquema clássico dos elementos finitos. Assim, encontra-se que:

$$F_1^{\text{int}, I} = F_1^{\text{ext}, I} \quad (2.2.8)$$

onde  $F_1^{\text{int}, I}$  é dado pela parte esquerda da expressão (2.2.7) e  $F_1^{\text{ext}, I}$  pela parte direita. O super-índice  $I$  identifica o nó, enquanto que o sub-índice  $i$  identifica a direção da força.

A expressão (2.2.8) substituirá portanto a equação diferencial de equilíbrio (2.1.1) e ainda (2.1.5).

Se a deformada arbitrada não conduz ao equilíbrio, então, (2.2.8) torna-se:

$$F_1^{\text{he}, I} = F_1^{\text{int}, I} - F_1^{\text{ext}, I} \quad (2.2.8a)$$

onde  $F_i^{he, I}$  são as forças fora de equilíbrio ou também denominado resíduo.

Um processo iterativo do tipo Newton-Raphson pode ser utilizado para se aproximar do equilíbrio quando as forças desequilibradas são muito grandes frente a uma tolerância. Desenvolvendo estas forças em série de Taylor e negligenciando os termos de mais alta ordem, obtém-se a expressão abaixo:

$$\left[ \begin{array}{l} \underline{F}^{he(1)} + (\partial \underline{F}^{he} / \partial \underline{X})^{(1)} \Delta \underline{X} = 0 \\ \underline{X}^{(i+1)} = \underline{X}^{(i)} + \Delta \underline{X} \end{array} \right. \quad (2.2.9)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \underline{F}^{he(1)} + (\partial \underline{F}^{he} / \partial \underline{X})^{(1)} \Delta \underline{X} = 0 \\ \underline{X}^{(i+1)} = \underline{X}^{(i)} + \Delta \underline{X} \end{array} \right. \quad (2.2.10)$$

onde  $\underline{X}^{(i+1)}$  são as novas coordenadas dos nós. Com estas novas coordenadas, um novo campo de deformação pode ser determinado, à partir do qual as tensões de Cauchy são também recalculadas (ver apêndices). É possível assim determinar forças internas nodais (parte esquerda de (2.2.7)). Alterações também ocorrerão nas forças externas (parte direita de (2.2.7)), de modo que um novo resíduo pode ser calculado (equação (2.2.8a)).

No caso do programa METAFOR, o processo terminará quando a norma euclidiana do resíduo for menor que  $10^{-3}$ .

Além de iterativo, em processos não lineares, a carga do problema é dividida e tem-se então um processo também incremental de solução. Neste caso a equação (2.2.8) deve ser respeitada a cada passo de carga.

O termo entre parênteses em (2.2.9) é chamado a matriz tangente do problema:

$$\underline{K}^T = \partial \underline{F}^{he} / \partial \underline{X} \quad (2.2.11)$$

Se a configuração de partida da estrutura está próxima da solução, a convegência do processo é quadrática, ou seja, o resíduo atingirá em poucas iterações a tolerância pré estabelecida.

O ponto chave do cálculo é portanto a determinação das forças nodais. Como já ressaltado, a ênfase deste trabalho é o cálculo da forças externas de contato, o que será detalhado nos restantes capítulos deste trabalho.

Para o caso do elemento 3D um processo de derivação numérica foi empregado para a avaliação da matriz tangente (equação (2.2.11)). Calcula-se primeiro as forças fora de equilíbrio para uma configuração da estrutura ligeiramente modificada ou perturbada. Para um nó da estrutura tem-se:

$$F_{ij}^{he+} = F_{ij}^{he}(\underline{X} + d\underline{X}) \quad (2.2.12a)$$

$$F_{ij}^{he-} = F_{ij}^{he}(\underline{X} - d\underline{X}) \quad (2.2.12b)$$

$$(i, j = 1, 3)$$

A contribuição do nó à matriz tangente vale:

$$K_{ij}^T = (F_{ij}^{he-} - F_{ij}^{he+}) / 2 dX_j \quad (2.2.13)$$

onde  $dX_j$  é o valor da perturbação numérica e vale, para o cálculo das forças internas:

$$dX_j = 10^{-8} L \quad (2.2.14)$$

onde  $L$  é um comprimento característico da estrutura (aqui adotado como a maior dimensão da estrutura).

Se forem considerados efeitos de inércia, a forma fraca (2.2.1)

é reescrita como:

$$\int \rho \delta u_i a_i dV = \int \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV - \int t_i \delta u_i d\Gamma_F - \int b_i \delta u_i dV \quad (2.2.15)$$

onde  $a_i$  é a aceleração do corpo e  $\rho$  sua densidade. Discretizando em elementos finitos:

$$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{A}} \quad (2.2.16)$$

onde  $\underline{\underline{\phi}}$  são as funções de forma e  $\underline{\underline{A}}$  as acelerações dos nós. A equação de equilíbrio (2.2.8) é trocada por,

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{F}}^{he} \quad (2.2.17)$$

onde  $\underline{\underline{M}}$  é a matriz de massa e vale:

$$\underline{\underline{M}} = \int \rho \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}} dV \quad (2.2.18)$$

Para a integração de (2.2.17) será utilizado o método explícito das diferenças centrais. Este método é resumido abaixo:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{A}}^n &= \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{F}}^{he,n} \\ \dot{\underline{\underline{U}}}^{n+1/2} &= \dot{\underline{\underline{U}}}^{n-1/2} + \Delta t_n \underline{\underline{A}}^n \\ \underline{\underline{U}}^{n+1} &= \underline{\underline{U}}^n + \dot{\underline{\underline{U}}}^{n+1/2} \Delta t_n \\ n &= n + 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.19)$$

( $\dot{\underline{\underline{U}}}^{1/2}$  => velocidade inicial em cada nó)

onde  $n$  é a etapa iterativa,  $\dot{\underline{\underline{U}}}$  é a velocidade nodal e  $\Delta t_n$  é o passo de

tempo de integração.

Este método é condicionalmente estável e dependerá do tamanho do passo de tempo. O método aqui empregado para o cálculo do passo de tempo é aquele de Flanagan e Belitschko /F1/. Ainda para o caso de contato é recomendado /B1/ multiplicar o passo tempo calculado por um fator de segurança de 0.75.

Uma matriz de massa diagonalizada foi empregada pois ela é a que melhor se adapta ao método de integração temporal escolhido. Como apenas elementos lineares são empregados, uma matriz diagonalizada do tipo 'sum row' (soma de linha) é utilizada.

### 3 ASPECTOS GERAIS DO TRATAMENTO DO PROBLEMA DE CONTATO E ATRITO

Neste capítulo será feita uma revisão de conceitos sobre o tratamento do contato e atrito, baseado em idéias hoje já plenamente aceitas na literatura internacional, e servirão como embasamento necessário para o tratamento do contato 3D, que será visto no capítulo 5.

#### 3.1 O CONTATO UNILATERAL

Este parágrafo vai tratar o problema de contato de um meio flexível com outro infinitamente rígido. Antes porém vai-se definir um sistema de eixos local  $(t, n)$  onde  $n$  é a normal exterior ao corpo rígido (a), conforme a figura (3.1.1). Nesta figura foi representado  $g_N$  e  $g_0$ , que são respectivamente as distâncias inicial e final entre os corpos em contato. O deslocamento do corpo flexível (b) é dado por  $u$ . (Com o objetivo de introduzir conceitos básicos, nos parágrafos (3.1) e (3.2) será considerado que os eixos locais  $(n, t)$  e globais  $(x, y)$  coincidem. Dito de outra forma, não será considerado - nestes parágrafos - o efeito de grandes rotações e deslocamentos, em função

da coincidência dos sistemas de referência).

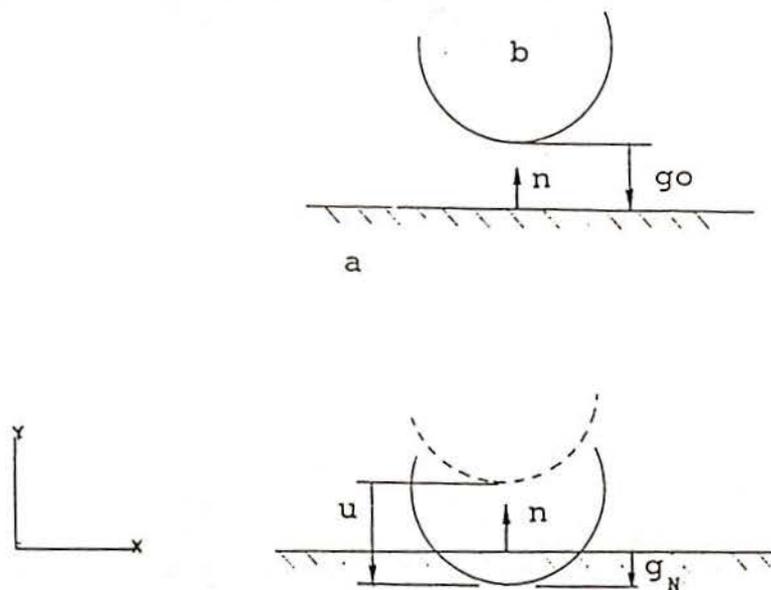


Figura (3.1.1)  
a) corpo rígido ou matriz de contato b) corpo flexível

Definindo o produto escalar  $g_N$  como:

$$g_N = (\underline{u} - \underline{g}_0) \cdot \underline{n} \quad (3.1.1)$$

Então, se  $g_N$  é negativo, há interpenetração entre os corpos cujo valor é dado pelo valor absoluto de  $g_N$ . Como isto não pode ocorrer, existe uma restrição que deve ser respeitada e que é dada por (3.1.2):

$$g_N \geq 0 \quad (3.1.2)$$

Nos pontos da superfície que entraram e permaneceram em contato, aparece uma pressão (força por unidade de superfície) dada por:

$$t_N \leq 0 \quad (3.1.3)$$

Nos outros pontos  $t_N$  é nulo.

A solução  $\underline{u}$  do problema deve pertencer ao conjunto N:

$N = \{ \text{conjunto de deslocamentos admissíveis que satisfazem à restrição } g_N \geq 0 \text{ em } \Gamma_C \}$

Será aqui empregado o método da penalidade (ver por exemplo /R1/), na qual a condição acima é relaxada, o que permite que interpenetrações muito pequenas ocorram. Para isto, inclue-se na formulação fraca (equação (2.2.1)), o trabalho virtual efetuado pela pressão de contato  $t_N$ , de maneira que,

$$\int \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV = \int t_i \delta u_i d\Gamma_F + \int b_i \delta u_i dV + \int t_N \delta g_N d\Gamma_C \quad (3.1.4)$$

$t_N$  é definido como:

$$t_N = k_N g_N \quad (3.1.5)$$

$k_N$  é denominado *penalidade normal*. Fisicamente, a penalidade normal pode ser visualizada como a rigidez de molas colocadas entre a matriz rígida e a peça flexível. Quando a distância entre ambas é nula as molas estão na sua posição de repouso. Uma vez que a interpenetração ocorre, as molas serão acionadas, deslocando os pontos do corpo flexível com uma força proporcional à interpenetração, conforme (3.1.5).

Dito de outra forma,  $k_N$  corresponde a rigidez normal da zona de contato. Experimentalmente, verificou-se que  $k_N$  variará como uma função do estado da superfície e do nível de carga /01/. Neste trabalho será utilizada sempre uma relação constitutiva de contato linear, dada por (3.1.5). No entanto, em casos onde a pressão de

contato pode atingir valores muito altos, certos trabalhos sugerem a utilização de uma lei exponencial como abaixo /W1/:

$$t_N = k_N g_N^n \quad (3.1.6)$$

onde  $n > 1$ .

### 3.2 LEIS CONSTITUTIVAS PARA O TRATAMENTO DO ATRITO

Quando existe um movimento relativo entre duas superfícies em contato, aparecem forças tangenciais. Estas forças, também chamadas forças de atrito, vão se opor ao movimento (ver figura (3.2.1)).

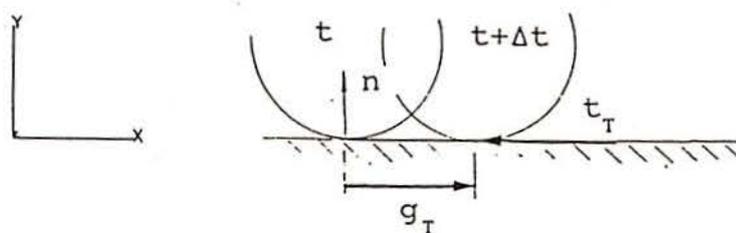


Figure (3.2.1)  
Definição do deslocamento e de forças tangenciais.

Estas forças, no caso de conformação mecânica, vão influir no fluxo da matéria e terão influência sobre a força necessária à conformação. Elas podem ainda produzir efeitos térmicos indesejáveis. Normalmente o efeito do atrito é nefasto, mas no caso de um processo

de laminação, por exemplo (ver figura (3.2.2)), sua presença é necessária para que os cilindros de laminação agarrem a placa a ser trabalhada.

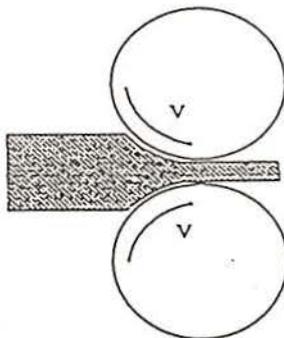


Figure (3.2.2)  
Processo de laminação

O trabalho virtual efetuado pelas forças de atrito pode ser acrescentado à forma fraca (3.1.4):

$$\int \sigma_{j1} \delta u_{i,j} dV = \int t_i \delta u_i d\Gamma_F + \int b_i \delta u_i dV + \int t_N \delta g_N d\Gamma_C + \int t_T \delta g_T d\Gamma_C \quad (3.2.1)$$

A exemplo do parágrafo precedente (3.1), deve-se estabelecer as relações constitutivas do problema de atrito, ou seja, determinar as relações entre a pressão tangencial  $t_T$  e o deslocamento  $g_T$ .

Os modelos mais utilizados são aqueles baseados na clássica lei de Coulomb. Segundo Coulomb, dois pontos permanecem juntos, enquanto o valor da pressão tangencial é menor que o produto entre o coeficiente de atrito das interfaces e o valor absoluto da pressão

normal de contato. No caso contrário, haverá escorregamento. Então,

$$\text{Se } |t_T| < \mu |t_N| \Rightarrow g_T = 0 \quad (3.2.2a)$$

$$\text{Se } |t_T| = \mu |t_N| \Rightarrow \exists \beta \geq 0 \mid g_T = -\beta t_T \quad (3.2.2b)$$

onde  $| \cdot |$  indica módulo e  $\mu$  o coeficiente de atrito estático. (Chama-se a atenção aqui para o fato de que em (3.2.2a,b)  $|t_T|$  corresponde ao módulo da força tangencial aplicada).

Pode-se ver que a pressão tangencial não pode ultrapassar o limite  $\mu |t_N|$  e pode-se assim imaginar a existência de uma 'superfície de escorregamento'  $f$ , tal que

$$f = |t_T| - \mu |t_N| = 0 \quad (3.2.3)$$

Para o caso bidimensional, graficamente o critério de Coulomb é mostrado na figura (3.2.3):

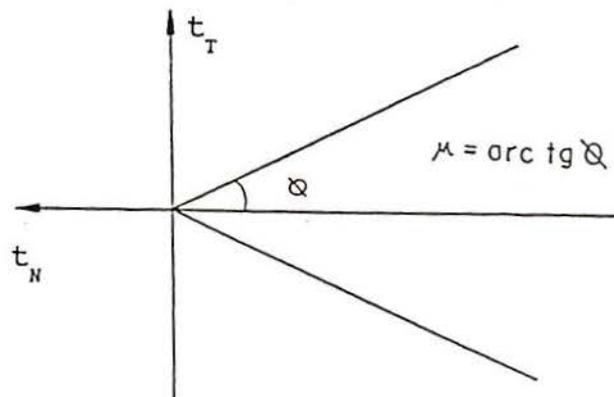


Figura (3.2.3)  
Lei de Coulomb em duas dimensões

Os valores permitidos para as pressões são delimitados pelo cone da figura (3.2.3). Quando a combinação de pressão atinge a superfície, o escorregamento começa. A zona fora do cone é inacessível.

A função  $f$  pode ser generalizada para levar em conta a aderência. Neste caso, mesmo sem pressão normal, é possível a aplicação de uma carga tangencial, sem que haja deslocamento.

$$f = |t_T| - \mu |t_N| - A \quad (3.2.4)$$

onde  $A$  caracteriza a aderência.

Fazendo uma analogia com a plasticidade, os modelos vistos tem um comportamento semelhante à uma lei rígido-plástica: passa-se da aderência total até ao escorregamento (deformação plástica) sem que haja uma transição (deformação elástica). Este tipo de modelo foi empregado por /B2/, por exemplo. A figura (3.2.4) mostra a relação entre  $t_T$  e  $g_T$ .

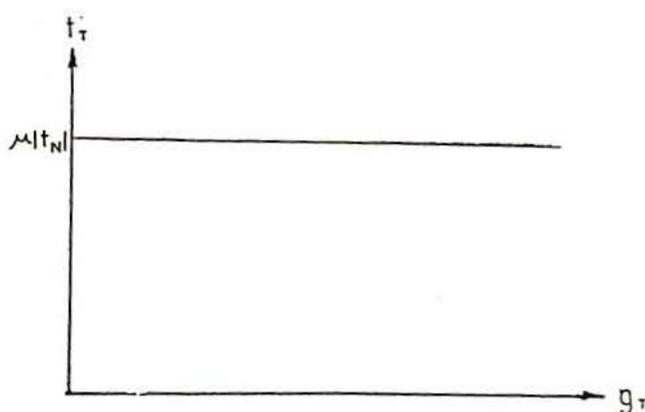


Figura (3.2.4)  
Relação força/deslocamento tangencial segundo a lei de Coulomb.

No entanto, testes experimentais /C1/, demonstram que não existe uma separação brusca entre aderência e escorregamento. Assim, se existem forças tangenciais - ainda que pequenas - ocorrerá um certo escorregamento. Aparentemente (ver ainda /C1/), até um certo valor, este escorregamento é reversível ou elástico. Deve-se então redefinir a relação entre  $t_T$  e  $g_T$ . O modelo mais simples é mostrado abaixo (figura (3.2.5)):

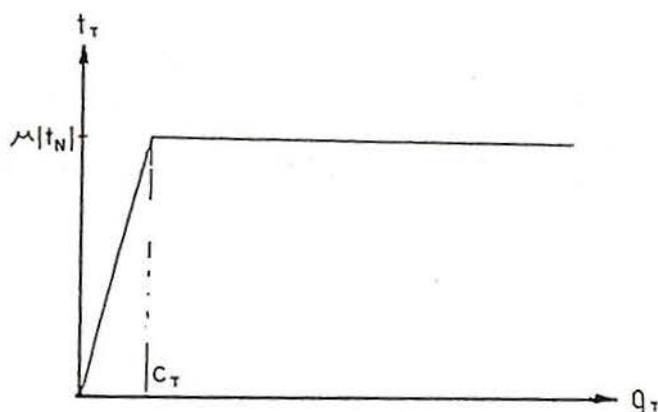


Figura (3.2.5)  
Relação força/deslocamento tangencial modificada

Recai-se numa lei constitutiva semelhante ao caso elasto-plástico perfeito e pode-se agora fazer uma analogia com os desenvolvimentos descritos nos apêndices deste trabalho. Como em plasticidade, trabalha-se com uma formulação em taxas. Isto é necessário pois o atrito é também um fenômeno dissipativo dependente da história, como a plasticidade.

Será então definido um vetor taxa de deslocamento de contato, constituído por uma componente tangencial e normal.

$$\dot{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \dot{g}_T \\ \dot{g}_N \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

A taxa de deslocamento é ainda decomposta em uma parte reversível e outra irreversível, conforme a equação (3.2.7):

$$\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{g}}^{re} + \dot{\mathbf{g}}^{ir} \quad (3.2.7)$$

$\dot{\mathbf{g}}^{re}$  é a componente reversível da taxa de deslocamento e  $\dot{\mathbf{g}}^{ir}$  a componente irreversível.

Para o caso bidimensional, tem-se a necessidade de uma única componente tangencial de pressão:

A seguir os dois casos possíveis serão analisados: escorregamento colante e escorregamento deslizante.

### 3.2.1 CONTATO COLANTE OU REVERSÍVEL

Neste caso, o valor de  $t_T$  não atinge o valor limite de  $\mu|t_N|$  (ver figura 3.2.5) e permanece dentro da zona reversível. Pode-se dizer então que:

$$\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{g}}^{re}$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{t}_T \\ \dot{t}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_T & 0 \\ 0 & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{g}_T^{re} \\ \dot{g}_N^{re} \end{bmatrix} \quad (3.2.1.1)$$

ou

$$\dot{t} = \underline{K} \dot{g}^{re} \quad (3.2.1.2)$$

com

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_T & 0 \\ 0 & k_N \end{bmatrix} \quad (3.2.1.2a)$$

$k_T$  está também relacionado com a rigidez da superfície (rigidez aos movimentos tangenciais). Seu valor é dado pela inclinação da reta da figura (3.2.5). (Na prática, no entanto, usa-se  $k_T = k_N/10$ ).

### 3.2.2 CONTATO DESLIZANTE OU IRREVERSÍVEL

Quando a pressão tangencial atinge o valor  $\mu|t_N|$ , o escorregamento irreversível ( $g^{ir}$ ) começa. Da equação (3.2.3), tem-se

$$f = 0 \quad (3.2.2.1)$$

Para fazer o cálculo de  $\dot{g}^{ir}$  pode-se supor um escorregamento associado, o que permite dizer que:

$$\dot{g}^{ir} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \quad (3.2.2.2)$$

Substituindo a expressão (3.2.3) em (3.2.2.2), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_T^{ir} \\ \dot{g}_N^{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda t_T / |t_T| \\ -\lambda \mu \end{bmatrix} \quad (3.2.2.3)$$

(Chama-se a atenção que as derivadas de (3.2.2.2) não são definidas na origem. Assim elas devem ser encaradas como derivadas direcionais).

Observa-se a existência de uma parcela irreversível ou dissipativa do deslocamento normal ( $\dot{g}_N^{ir}$ ), o que é incoerente frente às constatações físicas. Para resolver este problema, utilizar-se-á um tipo de *escorregamento não associado* onde o deslocamento irreversível não é mais normal à superfície de escorregamento, segundo a figura (3.2.2.1).

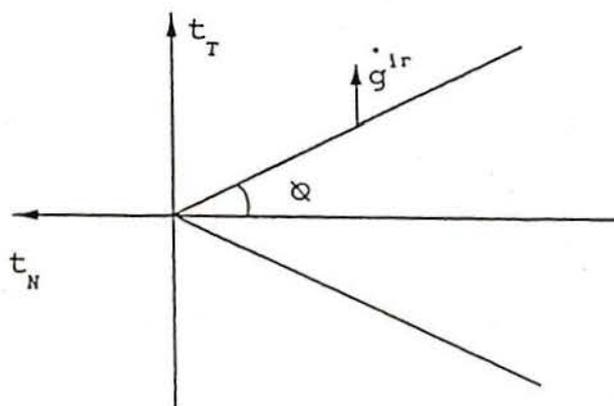


Figura (3.2.2.1)  
Escorregamento não-associado

A equação (3.2.2.3) torna-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_{ir} \\ \dot{g}_T \\ \dot{g}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda t_T / |t_T| \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.2.4)$$

ou

$$\dot{g}^{ir} = \lambda \frac{\partial f^*}{\partial t} \quad (3.2.2.5)$$

onde  $f^*$  é uma superfície de escorregamento modificada, para ter em conta (3.2.2.4).

Como em plasticidade, o escorregamento irreversível não é armazenável na forma de tensão. Então, de (3.2.7) e (3.2.1.2):

$$\dot{t} = \underline{K} (\dot{g} - \dot{g}^{ir}) \quad (3.2.2.6)$$

Pode-se aqui formular uma condição de consistência com a ajuda de (3.2.3): para um ponto em escorregamento irreversível,  $f$  deve ser nula:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} \dot{t} = 0 \quad (3.2.2.7)$$

Substituindo (3.2.2.6), (3.2.2.5) em (3.2.2.7), chega-se à:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \underline{K} \dot{g} - \frac{\partial f}{\partial t} \underline{K} \lambda \frac{\partial f^*}{\partial t} = 0 \quad (3.2.2.8)$$

Pode-se agora obter uma expressão para  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \underline{K} \dot{g}}{\frac{\partial f}{\partial t} \underline{K} \frac{\partial f^*}{\partial t}} \quad (3.2.2.9)$$

(Esta relação tem a mesma forma que (Ap.1.2.10), se não for considerado o endurecimento).

Colocando (3.2.2.9) em (3.2.2.5), e o resultado em (3.2.2.6), obtém-se:

$$\dot{\underline{t}} = \underline{Y} \dot{\underline{g}} \quad (3.2.2.10)$$

onde

$$\underline{Y} = \underline{K} - \frac{\underline{K} \frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}} \frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \underline{K}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \underline{K} \frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}}} \quad (3.2.2.11)$$

Como já foi visto a forma de calcular todos os valores de (3.2.2.11), encontra-se:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & \mu k_N t_T / |t_T| \\ 0 & k_N \end{bmatrix} \quad (3.2.2.12)$$

Observa-se que a matriz descrita em (3.2.2.12) é não-simétrica, o que conduzirá a um sistema de equações igualmente não simétrico. Assim, é exigida a solução completa do sistema de equações. Em certos problemas, contudo, pode-se empregar uma matriz simetrizada (média da triangular inferior/superior), sem maiores problemas de convergência.

Outra possibilidade - embora não empregada neste trabalho - é considerar a pressão normal como constante durante o cálculo da pressão tangencial /03/. A superfície de escorregamento dependerá da pressão normal somente para definir o limite entre escorregamento reversível/irreversível. Neste caso, portanto, a pressão normal desempenha o mesmo papel que a tensão de escoamento no caso

elasto-plástico. Evidentemente, tem-se agora uma lei de escorregamento que torna-se associada, como mostra a figura (3.2.2.2).

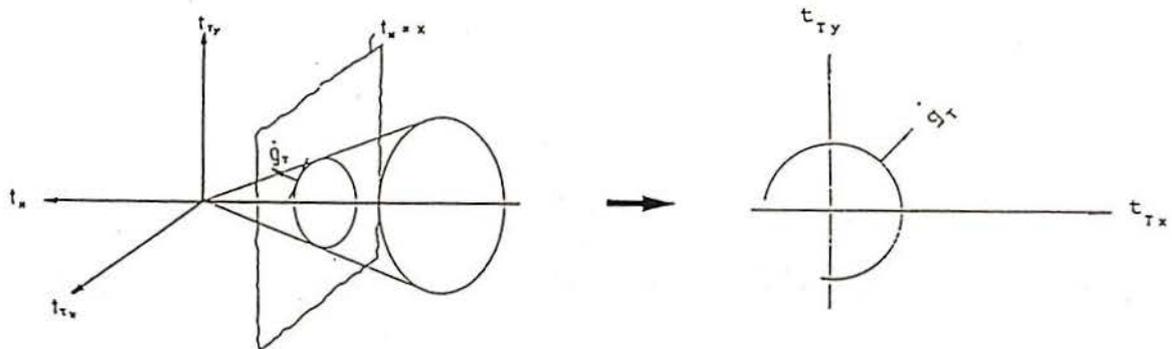


Figura (3.2.2.2)

Transformação de uma lei de escorregamento não associada em associada, supondo uma pressão normal  $t_N = \text{constante}$ .

Deve-se aqui dividir o algoritmo em duas partes: Na primeira, calcula-se apenas a pressão normal (sem considerar o atrito). Na segunda, calcula-se a pressão tangencial supondo  $t_N$  como fixo. Tem-se, neste caso, um sistema simétrico à resolver. Este algoritmo pode no entanto apresentar problemas de convergência em determinadas situações, como relatado em /W2/, /O3/ e também por este autor /B8/.

### 3.3 LEIS CONSTITUTIVAS DE CONTATO EM GRANDES DEFORMAÇÕES

Para evitar problemas de notação, será primeiro redefinida a pressão como:

$$\underline{t}_{xy} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{t}_{tn} = \begin{bmatrix} t_T \\ t_N \end{bmatrix}$$

onde,  $\underline{t}_{xy}$  e  $\underline{t}_{tn}$  representam o mesmo vetor de forças por unidade de superfície (pressão) no ponto em contato. A dupla notação servirá para que seja possível fazer-se referência as componentes nos eixos globais (x,y) e locais (t,n), respectivamente. Isto é necessário, à partir deste parágrafo, pois considera-se agora que os eixos locais giram em função da deformação e portanto, além de não haver mais coincidência entre os dois sistemas (local e global), a relação entre ambos varia no tempo!

Tal como a pressão, outros tensores também serão referidos, ora às suas componentes globais ora às suas componentes locais, conforme a notação acima.

Para que as relações constitutivas vistas no parágrafo (3.2) sejam válidas nestas condições, todas as grandezas presentes devem ser *objetivas* (ver apêndice 2). Assim, para uma mudança de referencial definida pela matriz ortogonal de rotação  $\eta(t)$  função do tempo, pode-se escrever que:

$$\underline{t}_{tn} = \eta \underline{t}_{xy} \quad (3.3.1)$$

Derivando temporalmente a expressão acima:

$$\dot{\underline{t}}_{tn} = \dot{\underline{\eta}} \underline{t}_{xy} + \underline{\eta} \dot{\underline{t}}_{xy} \quad (3.3.2)$$

Observa-se que a pressão é um tensor de primeira ordem. Para que um tensor genérico  $\underline{B}$  de primeira ordem seja objetivo frente à uma mudança do sistema de referência definido pela matriz ortogonal  $Q(t)_{ij}$  função do tempo, a relação seguinte deve ser respeitada:

$$B'_i = Q(t)_{ij} B_j \quad (3.3.2a)$$

onde  $B'_i$  é o valor das componentes do tensor no novo sistema de referência e  $B_j$  as componentes no sistema original.

Voltando ao caso em estudo, observa-se de (3.3.2) que

$$\dot{\underline{t}}_{tn} \neq \underline{\eta} \dot{\underline{t}}_{xy}$$

do qual conclue-se que  $\dot{\underline{t}}_{xy}$  não é objetivo.

A taxa da matriz ortogonal  $\underline{\eta}$  pode ser decomposta como (ver /M1/):

$$\dot{\underline{\eta}} = \underline{\varrho} \underline{\eta} \quad (3.3.2b)$$

onde  $\underline{\varrho}$  é uma matriz anti-simétrica que representa a velocidade angular do sistema de referência.

Utilizando (3.3.2b) pode-se reescrever (3.3.2) como,

$$\dot{\underline{t}}_{tn} = \underline{\eta} (\underline{\varrho} \underline{t}_{xy} + \dot{\underline{t}}_{xy}) \quad (3.3.3)$$

ou

$$\dot{\underline{t}}_{tn} = \eta \underline{\nabla} \underline{t} \quad (3.3.4)$$

onde

$$\underline{\nabla} = \theta \underline{t}_{xy} + \dot{\underline{t}}_{xy} \quad (3.3.5)$$

$\underline{\nabla}$  é uma taxa de pressão corrotacional e é uma grandeza *objetiva*, pois ela obedece (3.3.2a). Assim, as leis constitutivas vistas no parágrafo (3.2), tornam-se:

$$\underline{\nabla} = \underline{K}_{xy} \dot{\underline{g}}_{xy} \quad (3.3.6)$$

para o caso reversível (ver equação (3.2.1.1)) e,

$$\underline{\nabla} = \underline{Y}_{xy} \dot{\underline{g}}_{xy} \quad (3.3.7)$$

para o caso irreversível (ver equação (3.2.2.10)), que são as expressões válidas para constituir o problema de contato em grandes deformações.

Obviamente que as pressões escritas nos eixos locais ( $\underline{t}_{tn}$ ), são também grandezas objetivas, pois elas estão escritas em eixos que contém todo efeito de deformação pura (sem efeito de rotação) ou ainda eixos *corrotacionais*. Pode-se então dizer que as expressões seguintes são igualmente válidas para constituir o problema de grandes deformações:

$$\dot{\underline{t}}_{tn} = \underline{K}_{tn} \dot{\underline{g}}_{tn} \quad (3.3.8)$$

$$\dot{\underline{t}}_{tn} = \underline{Y}_{tn} \dot{\underline{g}}_{tn} \quad (3.3.9)$$

### 3.4 INTEGRAÇÃO TEMPORAL DAS LEIS CONSTITUTIVAS DE CONTATO

Será escolhido aqui o caminho de integração A-C, A-D, etc da figura (3.4.1), o que permitirá evitar os problemas de descarga numérica (ver apêndice 3).

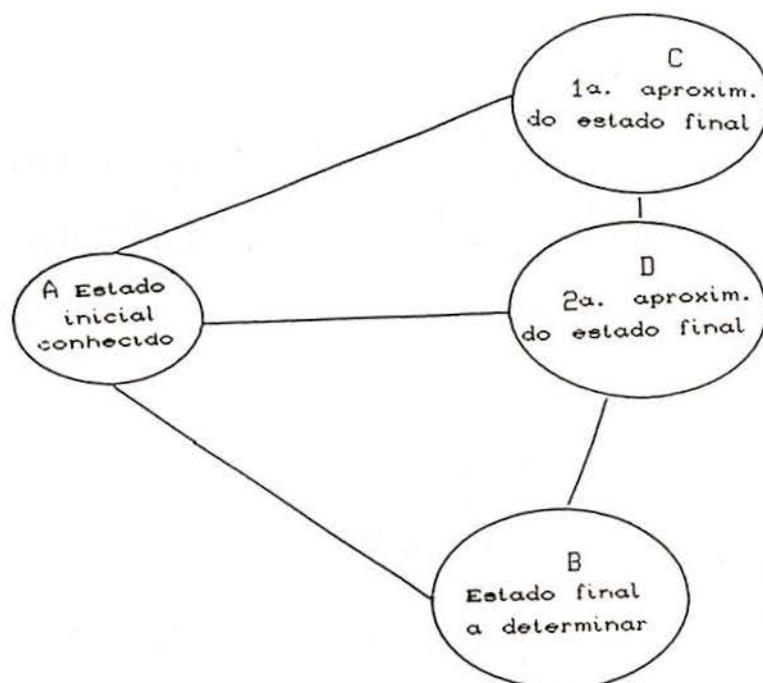


Figura (3.4.1)  
Caminho de integração

Assim a configuração de referência usada para integração a cada iteração é a última configuração equilibrada.

Uma observação importante a fazer é que o esquema de integração deve ser incrementalmente objetivo. Ou seja, se ocorre a mudança de referencial seguinte:

$$\underline{x}' = \eta \underline{x} \quad (3.4.1)$$

então o vetor  $\underline{t}$  deve transformar-se conforme (3.4.2):

$$\underline{t}' = \eta \underline{t} \quad (3.4.2)$$

Verificar-se-á primeiramente o que ocorre quando as pressões são integradas diretamente nos eixos globais:

A taxa de pressão de contato (3.3.5) vale:

$$\dot{\underline{t}}_{xy} = \underline{\nabla} - \underline{\theta} \underline{t}_{xy} \quad (3.4.3)$$

onde  $\underline{\nabla}$  é a taxa corrotacional e  $\underline{\theta}$  a velocidade de rotação do sistema de referência.

Tomando um processo do tipo Euler para resolver (3.4.3), obtém-se:

$$\underline{t}_{xy}^{t+\Delta t} = \underline{t}_{xy}^t + \Delta t \dot{\underline{t}}_{xy} \quad (3.4.4)$$

Se a velocidade de rotação for tomada constante ao longo do passo de tempo, a expressão (3.4.4) torna-se,

$$\underline{t}_{xy}^{t+\Delta t} = \underline{t}_{xy}^t - \Delta \underline{\theta} \underline{t}_{xy}^t + \Delta \underline{\nabla} \quad (3.4.5)$$

Se o atrito é reversível (equação (3.3.6)):

$$\Delta \underline{\nabla} = \int_t^{t+\Delta t} \underline{K}_{xy} \dot{\underline{g}}_{xy} d\tau \quad (3.4.6a)$$

ou, se o atrito é irreversível (equação (3.3.7)):

$$\Delta \underline{\nabla} = \int_t^{t+\Delta t} \underline{Y}_{xy} \dot{\underline{g}}_{xy} d\tau \quad (3.4.6b)$$

O esquema da equação (3.4.5) obviamente só dará bons resultados para valores muito pequenos de incrementos. Por este motivo este esquema é dito *incrementalmente não objetivo*.

Uma outra forma de realizar a integração, utiliza o chamado Método da Rotação Instantânea Final (detalhes podem ser encontrados na referência /N1/). Este método tem duas etapas:

a) Integração temporal das pressões sobre os eixos locais ou corrotacionais. (Integração de (3.3.8) ou (3.3.9), conforme abaixo:)

$$\underline{t}_{tn}^{t+\Delta t} = \underline{t}_{tn}^t + \int_t^{t+\Delta t} \underline{Y} \cdot \underline{g}_{tn} dt \quad (3.4.7)$$

b) Rotação das pressões para os eixos globais através de uma rotação instantânea, no tempo  $t+\Delta t$ .

Por definição, este esquema é *incrementalmente objetivo* e é empregado pelo METAFOR. Abaixo o método é detalhado:

a) Integração da expressão (3.4.7):

Observou-se no parágrafo (3.2) que não existe uma componente irreversível para o deslocamento normal: o cálculo da pressão normal é considerado como um processo que depende apenas da posição final (instantânea) entre corpo rígido e não rígido. Pode-se dizer portanto que, a componente normal de (3.4.7) vale:

$$t_N^{t+\Delta t} = k_N g_N \quad (3.4.8)$$

onde,  $g_N$  é a distância normal entre peça/matriz (figura 3.1.1).

Para a integração da componente tangencial, recai-se sobre um algoritmo do tipo 'return mapping'. Numerosos trabalhos seguiram já o

mesmo procedimento (cita-se /G3/ e /W1,2/, por exemplo). O cálculo da expressão (3.4.7) é então separado em duas etapas. Na primeira, supor-se-á que não há escorregamento irreversível e será chamado de preditor elástico. Neste caso, as pressões valerão:

$$t_T^e = k_T g_T \quad (3.4.9)$$

onde  $g_T$  corresponde ao escorregamento acumulado em um ponto, desde o momento onde ele entra em contato até o fim do contato, quando então o valor de  $g_T$  é zerado. Este procedimento é possível pois  $g_T$  é sempre medido sobre o mesmo sistema de referência: o plano tangente à matriz de contato (ver figura (3.4.2)).

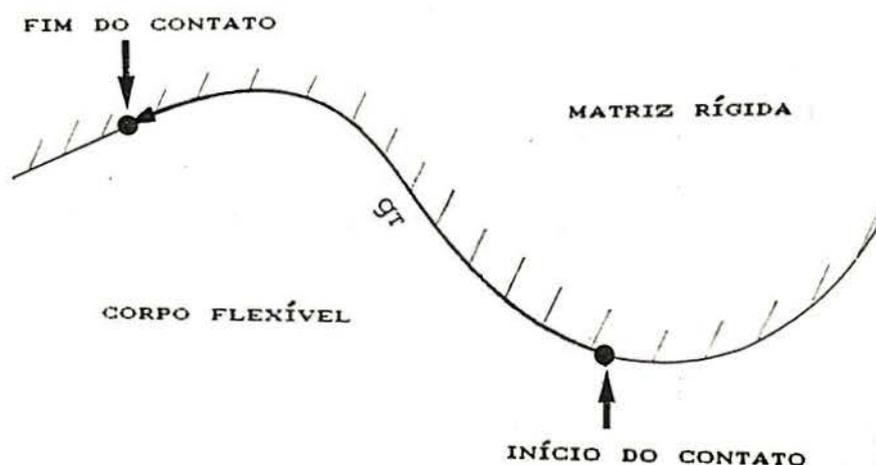


Figura (3.4.2)  
Definição do deslocamento tangente.

Se

$$t_T^e \leq \mu | t_N^{t+\Delta t} |$$

então o escorregamento é reversível, o processo de integração termina e a pressão de atrito vale:

$$t_T^{t+\Delta t} = k_T g_T \quad (3.4.10)$$

Caso contrário, deve-se trazer a pressão sobre a superfície de escorregamento. Para isto, será utilizado um método do tipo retorno radial. A pressão no final do passo de tempo pode se escrever como (ver expressão (A.5.4)):

$$t_T^{t+\Delta t} = t_T^e - t_T^{\text{corr}} \quad (3.4.11)$$

onde  $t_T^{\text{corr}}$  é o corretor plástico. Observa-se que o procedimento altera apenas a pressão tangencial e deixa a pressão normal como (3.4.8). Por comparação com a expressão (3.4.10),

$$t_T^{\text{corr}} = k_T \int_t^{t+\Delta t} \dot{g}_T^{ir} d\tau \quad (3.4.12)$$

onde  $\dot{g}_T^{ir}$  vem da expressão (3.2.2.4). Como a normal à superfície de escorregamento modificada  $f^*$  visto no parágrafo (3.2.2) é considerado constante, (3.4.12) pode ser escrito como,

$$t_T^{\text{corr}} = k_T \Delta \lambda \text{sign} (t_T^e) \quad (3.4.13)$$

onde  $\Delta \lambda$  vem da expressão (3.2.2.9), que após calculo vale,

$$\Delta\lambda = \text{sign} (t_T^e) \ g_T - \mu |k_N \ g_N| \quad (3.4.14)$$

Substituindo (3.4.14) em (3.4.13) e o resultado em (3.4.11), resulta

$$t_T^{t+\Delta t} = \frac{\mu |t_N^{t+\Delta t}|}{|t_T^e|} t_T^e \quad (3.4.15)$$

Deve-se observar que a relação pressão-deslocamento vista para o caso de escorregamento irreversível (3.2.2.12) é também *consistente* com o processo de integração, pois (3.2.2.12) não depende do deslocamento tangente e, por consequência, não depende do valor do preditor elástico. Ver-se-á no capítulo (5), no entanto, que este não é o caso quando o problema é 3D.

b) Finalmente a segunda e última etapa de cálculo do método da rotação instantânea final: a rotação das pressões para os eixos globais. Esta é fornecida pela expressão:

$$\underline{t}_{xy}^{t+\Delta t} = \underline{\eta}^T \underline{t}_{tn}^{t+\Delta t} \quad (3.4.16)$$

A obtenção da matriz de rotação  $\underline{\eta}$  dependerá do esquema de integração espacial (ver parágrafo seguinte). Para que haja coerência com o método, ela é definida sobre a configuração atual da estrutura (tempo  $t+\Delta t$ ).

### 3.5 OBTENÇÃO DA MATRIZ TANGENTE DE CONTATO

As forças de contato são forças distribuídas sobre a superfície. Um processo de integração espacial é então necessário para o cálculo das forças exteriores e da matriz tangente de contato.

Somando os dois últimos termos da forma fraca (equação (3.2.1)) para um elemento de contato, obtém-se:

$$W^{c,e} = \int \underline{t}_{xy} \delta g_{xy} d\Gamma_c \quad (3.5.1)$$

Este termo representa o trabalho produzido pelas pressões de contato sobre o elemento. As forças de contato tornam-se:

$$F_{xy_1}^{c,K} = \int \underline{t}_{xy_1}^K \phi^K d\Gamma_c \quad (3.5.2)$$

onde  $K$  representa o nó em contato,  $i$  a direção da força (segundo  $x$  ou  $y$ ) e  $\phi$  as funções de forma. Chama-se a atenção aqui que  $\underline{t}_{xy}$  em (3.5.1) representa na verdade um campo de pressões e em (3.5.2)  $\underline{t}_{xy}^K$  representa seus valores nodais. Como as funções  $\phi$  são definidas no intervalo  $(-1,1)$  (figura (3.5.1)) a integral (3.5.2) pode ser redefinida como:

$$F_{xy_1}^{c,K} = \int_{-1}^{+1} \underline{t}_{xy_1}^K \phi^K \det J ds \quad (3.5.3)$$

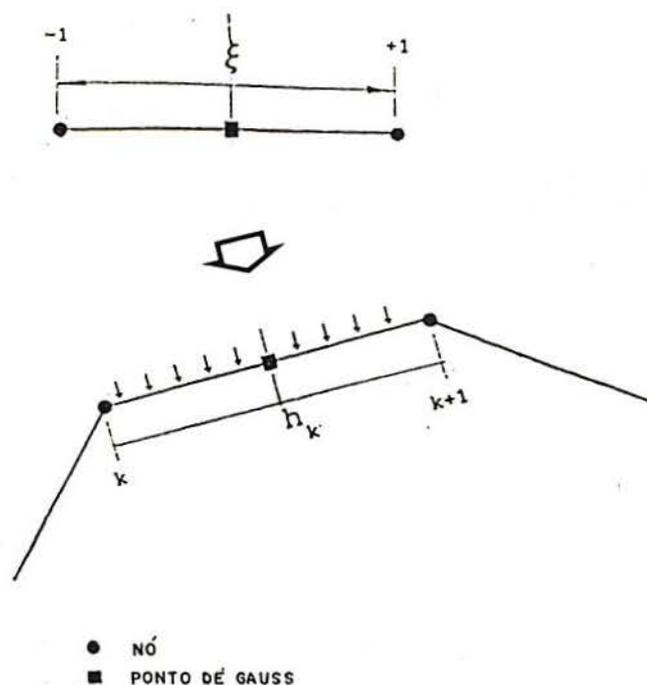


Figura (3.5.1)  
Elemento de contato  $k$ .

Para obter a contribuição à matriz tangente, deriva-se a expressão (3.5.1.3), de sorte que:

$$d\bar{F}_{xy}^{c,K} = \bar{K}_{xy}^{c,K} = \int_{-1}^{+1} dt_{xy}^k (\phi^K \det J) dS + \int_{-1}^{+1} \bar{t}_{xy}^k d(\phi^K \det J) dS \quad (3.5.4)$$

O termo da direita pode ser identificado como a parte *geométrica* da matriz tangente. Para a parte esquerda, deve-se utilizar a equação (3.4.3) para obter a taxa de pressão.

Diferentes formas de integração das forças de contato e de (3.5.4) serão tratadas nos itens (3.5.1), (3.5.2) e (3.5.3).

### 3.5.1 O CONTATO VISTO COMO CARGAS DISTRIBUÍDAS

O cálculo das forças de contato se faz com o auxílio da

expressão (3.5.3). De forma geral, empregando integração de Gauss-Legendre, pode-se dizer que:

$$F_{xy_1}^{c,K} = \sum_{m=1}^p [w^m t_{xy_1}^m \phi^{m,K} \det J^m] \quad (3.5.1.1)$$

onde  $m$  é o ponto de Gauss onde as grandezas são calculadas;  $J$  é o jacobiano da transformação entre as coordenadas reduzidas e a configuração atual;  $w$  os pesos de cada ponto de integração e  $p$  o número máximo de pontos de Gauss. Localmente a pressão  $t_{xy_1}^m$  vem da expressão (3.4.16) discretizada nos pontos de Gauss. Ela vale, antes da rotação:

$$t_N^m = \sum_{R=1}^2 k_N \phi^{m,R} G_N^R \quad (3.5.1.2)$$

$$t_T^m = \sum_{R=1}^2 k_T \phi^{m,R} G_T^R \quad (3.5.1.3)$$

para o contato colante. Para o contato deslizante:

$$t_T^m = \frac{\mu |t_N^m|}{|t_T^{e,m}|} t_T^{e,m} \quad (3.5.1.4)$$

onde  $t_T^{e,m}$  é o preditor elástico, calculado segundo (3.5.1.3), e  $G_T^R$  e  $G_N^R$  são os valores dos deslocamentos tangente e normal à matriz no nó  $R$ .

Deve-se ainda definir o número de pontos de Gauss. Normalmente nestes casos emprega-se apenas um ponto, resultando que:

$$\phi^{1,K} = 1/2 \quad (3.5.1.5)$$

$$\det J^1 = h_K/2 \quad (3.5.1.6)$$

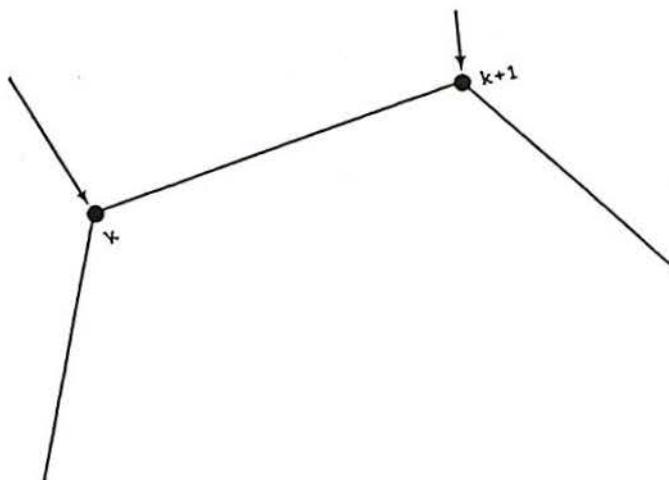
onde  $h_k$  é o comprimento do elemento de contato (ver figura (3.5.1)).

$$w^1 = 2 \quad (3.5.1.7)$$

Pode-se calcular então (3.5.1.1) com as definições (3.5.1.2-7). Deve-se já ressaltar, contudo, que o uso da quadratura de Gauss normalmente conduz a problemas de convergência no método, o que foi aqui constatado e também por Kikuchi /K1/. Por este motivo este método, embora implementado, não será tratado no capítulo (7) de exemplos.

### 3.5.2 O CONTATO VISTO COMO CARGAS NODAIS

Aqui a hipótese é considerar o contato como forças concentradas nos nós, como se vê na figura (3.5.2.1).



*Figura (3.5.2.1)  
Cargas de contato consideradas como concentradas nos nós.*

Neste caso, a equação (3.5.1.1) torna-se, para o nó K:

$$F_{xy_1}^{c,K} = t_{xy_1}^K \quad (3.5.2.1)$$

sendo suas componentes locais calculadas segundo (3.5.2.2) e (3.5.2.3):

$$t_N^K = k_N G_N^K \quad (3.5.2.2)$$

$$t_T^K = k_T G_T^K \quad (3.5.2.3)$$

para o contato reversível. No caso de contato irreversível:

$$t_T^K = \frac{\mu |t_N^K|}{|t_T^K|} t_T^{e,K} \quad (3.5.2.4)$$

onde  $t_T^{e,K}$  é o preditor elástico, calculado segundo (3.5.2.3), e  $G_T^K$  e  $G_N^K$  são ainda os valores dos deslocamentos tangente e normal à matriz no nó  $K$ .

Para obter a pressão em coordenadas globais ( $\underline{t}_{xy}$ ) utiliza-se (3.4.16). De forma geral, se o ângulo entre  $x$  et  $t$  vale  $\varphi$  (ver figura (3.5.2.2)), então:

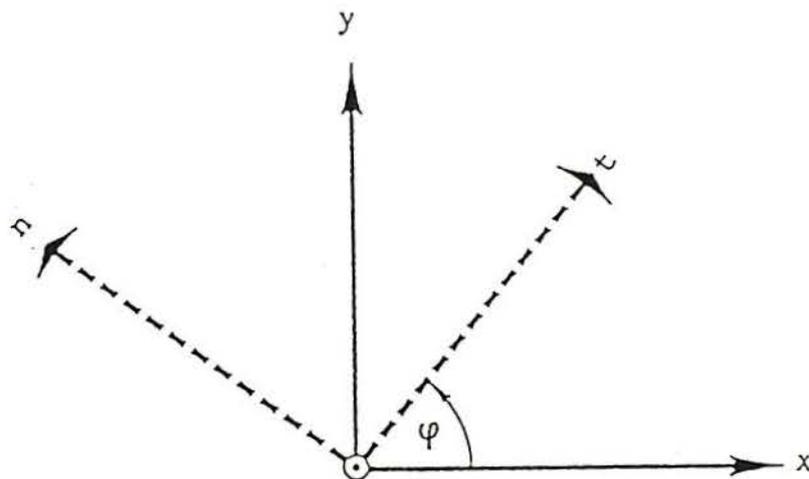


Figura (3.5.2.2)

Definição do ângulo  $\varphi$  ( $n$  = normal à matriz, no nó em contato).

A matriz de rotação é definida com:

$$\eta = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (3.5.2.7)$$

Como consequência, obtém-se, como forças nodais:

$$\underline{F}_{xy}^{c,K} = \eta^T \begin{bmatrix} k_T & G_T^K \\ k_N & G_N^K \end{bmatrix} \quad (3.5.2.8a)$$

$$\underline{F}_{xy}^{c,K} = \eta^T \begin{bmatrix} \mu F_N^K \text{sign}(t_T^{e,K}) \\ k_N & G_N^K \end{bmatrix} \quad (3.5.2.8b)$$

A obtenção da matriz tangente é também conseguida por derivação numérica. O processo é simples e consiste em variar a posição do nó em questão e em calcular a perturbação sobre a força de contato. Esta perturbação vale:

$$\Delta F_{xy_{1j}}^{c,K} = F_{xy_{1j}}^{c,K+} - F_{xy_{1j}}^{c,K-} \quad (3.5.2.9a)$$

onde

$$F_{xy_{1j}}^{c,K+} = F_{xy_1}^{c,K} (\underline{X} + d\underline{X}) \quad (3.5.2.9b)$$

$$F_{xy_{1j}}^{c,K-} = F_{xy_1}^{c,K} (\underline{X} - d\underline{X}) \quad (3.5.2.9c)$$

$\underline{X}$  são as coordenadas dos nós e  $d\underline{X}$  a perturbação sobre as coordenadas. As expressões (3.5.2.9b,c) definem portanto a variação da força de contato devido à perturbação  $+dX_j$  e  $-dX_j$ , respectivamente, sobre as coordenadas do nó. A contribuição do nó  $K$  em contato à rigidez, vale:

$$K_{xy_{1j}}^{c,K} = - \Delta F_{xy_{1j}}^{c,K} / 2 dX_j \quad (3.5.2.9d)$$

A perturbação  $dX_j$  vale (ver /P1/):

$$dX_j = 1.10^{-5} G_N^K$$

Em um único caso utiliza-se uma matriz tangente de contato explícita. É o caso de uma matriz (ou uma parte em questão da matriz) plana. Neste caso, como não há rotação, a expressão da derivada de pressões (equação (3.3.5)), torna-se:

$$d\underline{t}_{xy} = \underline{v} \quad (3.5.2.10)$$

Substituindo (3.5.2.10) em (3.5.4), e negligenciando a variação de comprimento do elemento ao longo do passo de tempo, pode-se dizer que (3.5.4) vale:

$$\underline{K}_{xy}^{c,K} = \underline{K}_{xy} \quad (3.5.2.11)$$

para o escorregamento reversível. Para o escorregamento irreversível:

$$\underline{K}_{xy}^{c,K} = \underline{Y}_{xy} \quad (3.5.2.12)$$

onde

$$\underline{K}_{xy} = \underline{\eta}^T \underline{K} \underline{\eta} \quad (3.5.2.13)$$

e

$$\underline{Y}_{xy} = \underline{\eta}^T \underline{Y} \underline{\eta} \quad (3.5.2.14)$$

$\underline{K}$  e  $\underline{Y}$  são dados pelas expressões (3.2.1.2a) e (3.2.2.12), respectivamente.

### 3.5.3 O MÉTODO DA PENALIDADE VARIÁVEL

Será aqui ainda considerado o contato como forças concentradas nos nós (figura (3.5.2.1)), mas calcular-se-á um campo de pressão utilizando estas forças, dado pela equação:

$$t_{xy_1}^K = F_{xy_1}^{c,K} / h_K^* \quad (3.5.3.1)$$

onde  $h_K^*$  é um comprimento adotado. Evidentemente estes valores de pressão são, à princípio, arbitrários pois vão depender do comprimento  $h_K^*$  escolhido. Portanto a escolha deste comprimento deve ser criteriosa. Para um nó de contato  $K$ , o comprimento é definido como:

$$h_K^* = 0.5 \parallel \underline{X}_K - \underline{X}_{K-1} \parallel + 0.5 \parallel \underline{X}_{K+1} - \underline{X}_K \parallel$$

onde  $\underline{X}_K$  é o vetor posição do nó  $K$ . Para o primeiro e último nó em contato ( $K = 1$  et  $K = nelc$ , onde  $nelc$  é o número de elementos de contato):

$$h_1^* = 0.5 \parallel \underline{X}_1 - \underline{X}_2 \parallel$$

$$h_{nelc}^* = 0.5 \parallel \underline{X}_{nelc} - \underline{X}_{nelc-1} \parallel$$

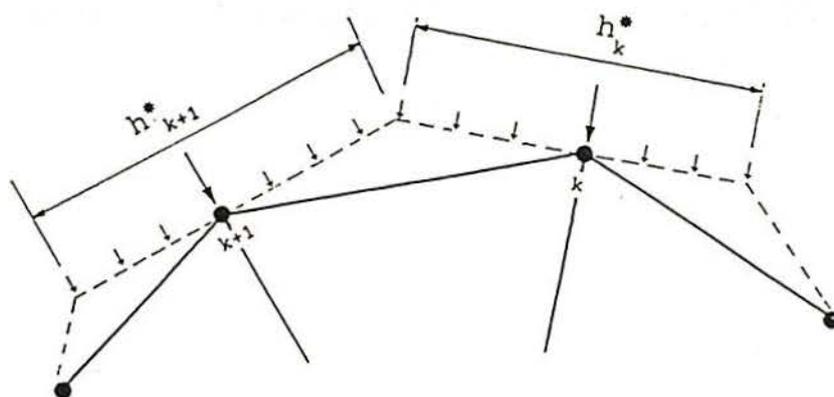


Figura (3.5.3.1)  
Distribuição de pressão suposta.

Pode-se escrever (3.5.3.1) de outra forma,

$$F_{xy_1}^{c,K} = t_{xy_1}^K h_K^* \quad (3.5.3.2)$$

e também as expressões (3.5.2.2) e (3.5.2.3) como,

$$t_N^K = k_N G_N^K h_K^* \quad (3.5.3.3)$$

$$t_T^K = k_T G_T^K h_K^* \quad (3.5.3.4)$$

Assim, todas as expressões vistas no parágrafo (3.5.2) são ainda válidas, desde que se troque a penalidade  $k_N$ ,  $k_T$  por:

$$k_N^K = k_N h_K^* \quad (3.5.3.5)$$

$$k_T^K = k_T h_K^* \quad (3.5.3.6)$$

Portanto, a penalidade passará a depender da malha, o que pode ser vantajoso quando trabalha-se com malhas pouco uniformes no contorno de contato. Isto é conseguido sem os inconvenientes relatados quando emprega-se a quadratura de Gauss.

## 4 TRATAMENTO DO CONTATO ENTRE CORPOS FLEXÍVEIS

### 4.1 INTRODUÇÃO

O tratamento do contato que foi visto ao longo do capítulo 3, considerava a matriz de contato como rígida. Esta aproximação é normalmente válida no caso de conformação mecânica onde a matriz é muito mais rígida que o corpo que se deforma. No entanto isto impede o cálculo de tensões na matriz. Por outro lado, a maior parte dos casos de impacto os corpos em contato sofrem deformações importantes de sorte que a aproximação de um corpo rígido não é mais possível. Neste último caso pode ainda ocorrer o contato do corpo com ele mesmo (fenômeno normalmente denominado de *auto-contato*), sobretudo quando se chega até a pós-flambagem.

Estas limitações do algoritmo precedente motivaram o desenvolvimento de um novo elemento de contato para dois corpos flexíveis. O desenvolvimento que foi feito é limitado ao caso explícito.

#### 4.2 DEFINIÇÃO DAS SUPERFÍCIES ALVO E ESCRAVA

Uma das superfícies em contato é denominada *escrava* (do inglês 'slave surface') e a outra é denominada *alvo* ('master surface'). As forças de contato são calculadas projetando os nós que pertencem à superfície escrava (ou nós escravos) sobre a superfície alvo, como será visto no parágrafo (4.3.2). Este procedimento simples porém, pode levar à resultados falsos, como se vê na figura (4.2.1), onde o contato não é detectado já que os nós escravos não tocam o elemento alvo.

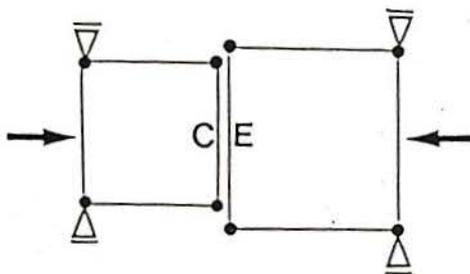


Figura (4.2.1)  
C - Superfície alvo; E - Superfície escrava.

Alguns trabalhos sugerem que a discretização mais fina entre as duas superfícies seja tomada como escrava (ver por exemplo /B1/). Isto pode evitar problemas no início do cálculo, mas como se está trabalhando no domínio das grandes deformações, não se pode prever qual será a malha mais fina no final do processo.

O problema pode ser resolvido mudando a atribuição de superfície alvo e escrava cada vez que se calcule as forças de contato. Isto quer dizer que dois passos são feitos: O elemento que é alvo num primeiro passo, será escravo no segundo e vice-versa. Este procedimento, nomeado *duplo passe*, será aqui empregado.

### 4.3 ALGORITMO DE PESQUISA DO CONTATO

Normalmente pode-se dividir o algoritmo de pesquisa do contato em duas partes: A pesquisa a nível global e a pesquisa a nível local. A primeira etapa é em geral aquela em que é possível obter maior ganho de tempo de cálculo, em função do algoritmo escolhido. Abaixo alguns deles são discutidos.

#### 4.3.1 PESQUISA A NÍVEL GLOBAL

O objetivo da pesquisa a nível global é encontrar quais são os elementos alvos candidatos ao contato com um nó escravo pré-definido. A forma mais segura de fazê-lo é passar em revista todos os elementos (ou nós) alvos. Este tipo de algoritmo é chamado força bruta ('brute force algorithm'). Normalmente a pesquisa pode ser feita de duas formas diferentes:

a) Calculando a distância entre o nó escravo e os nós alvos ('nearest neighbour'). Os nós alvos candidatos ao contato são aqueles cuja a distância calculada é menor.

b) Definindo caixas em torno de cada elemento alvo. Estas caixas são calculadas utilizando as coordenadas máximas e mínimas dos nós associados ao elemento mais uma tolerância (ver figura (4.3.1.1)). Se a caixa de um elemento contém o nó escravo, então este elemento é candidato ao contato com este nó. É possível ainda definir esferas no lugar das caixas (ver /B4/, /B5/).

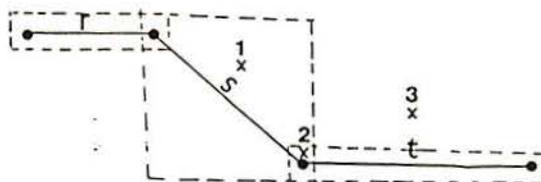


Figura (4.3.1.1)

O nó escravo 1 pode entrar em contato com o segmento alvo  $s$ ; o nó 2 com os segmentos  $s$  e  $t$ . O nó 3 não pode entrar em contato.

Para evitar passar em revista todos os elementos alvos ('brute force algorithm'), podem-se encontrar numerosos artifícios que permitem um grande ganho em tempo de cálculo, mas que não são tão robustos. Por exemplo, se num tempo  $t$  o nó escravo 'e' está em contato com o elemento alvo 'c', pode-se supor que no passo de tempo seguinte o contato será próximo à 'c'. Assim pode-se criar uma lista de elementos candidatos para o próximo passo de tempo. Assim a pesquisa entre os elementos alvos ficará restrita (ver Benson et Hallquist /B1/).

Uma outra forma de evitar o algoritmo força bruta é aquela empregada por Belytschko /B6/. Ele divide o domínio em células, cujas dimensões são bem maiores que a dos elementos. A pesquisa global será feita apenas sobre os elementos e nós que pertencem a um certo domínio ou célula. (Isto é possível pois à cada nó é associado o número da célula).

Neste trabalho, porém, será empregado o algoritmo 'brute force', que constitui um algoritmo de referência para este tipo de trabalho.

#### 4.3.2 - PESQUISA A NÍVEL LOCAL

Uma vez identificados os elementos alvos candidatos ao contato, deve-se agora confirmá-lo e calcular a projeção nodal sobre os elementos. Os elementos serão definidos sempre área à direita. Em outras palavras, a conectividade dos elementos de contato é definida de tal forma que, um observador percorrendo um elemento do nó inicial ao final, observará que o corpo encontra-se à sua direita. Então, seja a situação da figura (4.3.2.1):

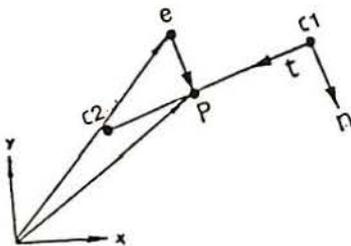


Figura (4.3.2.1)

onde

$$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} \quad (4.3.2.1)$$

são as coordenadas do nó escravo 'e';

$$\underline{x}_{c_i} = \begin{bmatrix} x_{c_i} \\ y_{c_i} \end{bmatrix} \quad (4.3.2.2)$$

são as coordenadas dos nós alvos do elemento alvo ( $i = 1, 2$ ), e

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.2.3)$$

é a tangente ao segmento alvo.

Numa primeira etapa, deve-se determinar a projeção ' $\underline{p}$ ' do nó escravo sobre o elemento. Sabe-se à priori que a direção de projeção do nó é perpendicular a direção tangente ao elemento alvo. Assim a condição seguinte deve ser satisfeita:

$$(\underline{p} - \underline{x}_e) \cdot \underline{t} = 0 \quad (4.3.2.4)$$

O valor de  $\underline{p}$  é obtido da expressão:

$$\underline{p} = \phi^1 \underline{x}_{c1} \quad (4.3.2.5)$$

onde  $\phi^1$  são as funções de forma associadas aos nós dos elementos e valem:

$$\phi^1 = 1/2 (1 - \xi) \quad (4.3.2.6)$$

$$\phi^2 = 1/2 (1 + \xi) \quad (4.3.2.7)$$

Substituindo (4.3.2.6,7) em (4.3.2.5) e o resultado em (4.3.2.4), obtém-se uma equação à uma só incógnita:

$$\xi = \frac{t_1 (2 x_e - x_{c1} - x_{c2}) + t_2 (2 y_e - y_{c1} - y_{c2})}{-x_{c1} t_1 + x_{c2} t_1 - y_{c1} t_2 + y_{c2} t_2} \quad (4.3.2.8)$$

Se

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad (4.3.2.9)$$

o nó escravo 'e' poderá ser projetado sobre o elemento. Esta é a primeira condição de contato.

Deve-se verificar ainda se o nó escravo está dentro do corpo alvo. Calcula-se então a normal exterior à cada elemento alvo candidato ao contato (ver figura (4.3.2.1)). Evidentemente, se o nó penetrou o elemento, o produto escalar seguinte (equação (4.3.2.10)) é positivo, o que define a segunda condição de contato.

$$(\underline{p} - \underline{x}_e) \cdot \underline{n} \geq 0 \quad (4.3.2.10)$$

o  $\underline{n}$  é o vetor normal ao elemento alvo. Para os elementos que verificam a condição acima, dois casos particulares devem ser previstos:

**Primeiro caso particular:** O nó escravo está dentro de uma região côncava (figura (4.3.2.2)). Neste caso, a primeira condição não é verificada.

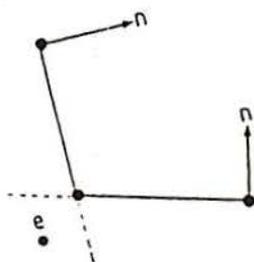


Figura (4.3.2.2)

Aqui, apesar do nó escravo ter penetrado no corpo alvo, a primeira condição de contato não é satisfeita para os dois elementos alvos candidatos. Uma solução adotada por /Z4/ e /B1/, por exemplo, consiste em projetar o nó escravo sobre o nó alvo mais próximo. Será aqui adotado a mesma solução.

**Segundo caso particular:** O nó escravo está dentro de uma região convexa (figura (4.3.2.3)):

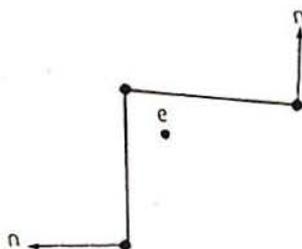


Figura (4.3.2.3)

Aqui, ao contrário do caso precedente, existe duas opções de projeção. Escolhe-se então a superfície mais próxima do nó (ver também /B1/ e /Z4/).

A última etapa é o cálculo de forças nos nós. Empregar-se-á aqui o procedimento simplificado, visto no parágrafo (3.5.2), onde o contato é tratado como forças nodais. Com o auxílio do método da penalidade, pode-se escrever então que a força de contato sobre o nó escravo 'e' vale (ver figura (4.3.2.4)):

$$F_{Ne} = k_N G_N \quad (4.3.2.11)$$

onde  $G_N$  é a distância normal entre o nó escravo e a superfície alvo,

$$G_N = \| \underline{x}_e - \underline{p} \| \quad (4.3.2.12)$$

$k_N$  é a penalidade normal.

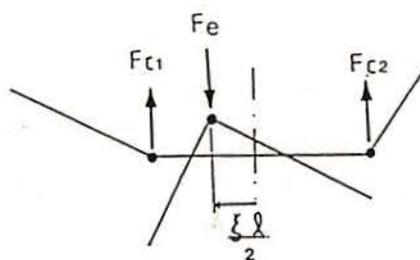


Figura (4.3.2.4)

As reações sobre os nós do elemento alvo valem (ver ainda a figura (4.3.2.4)):

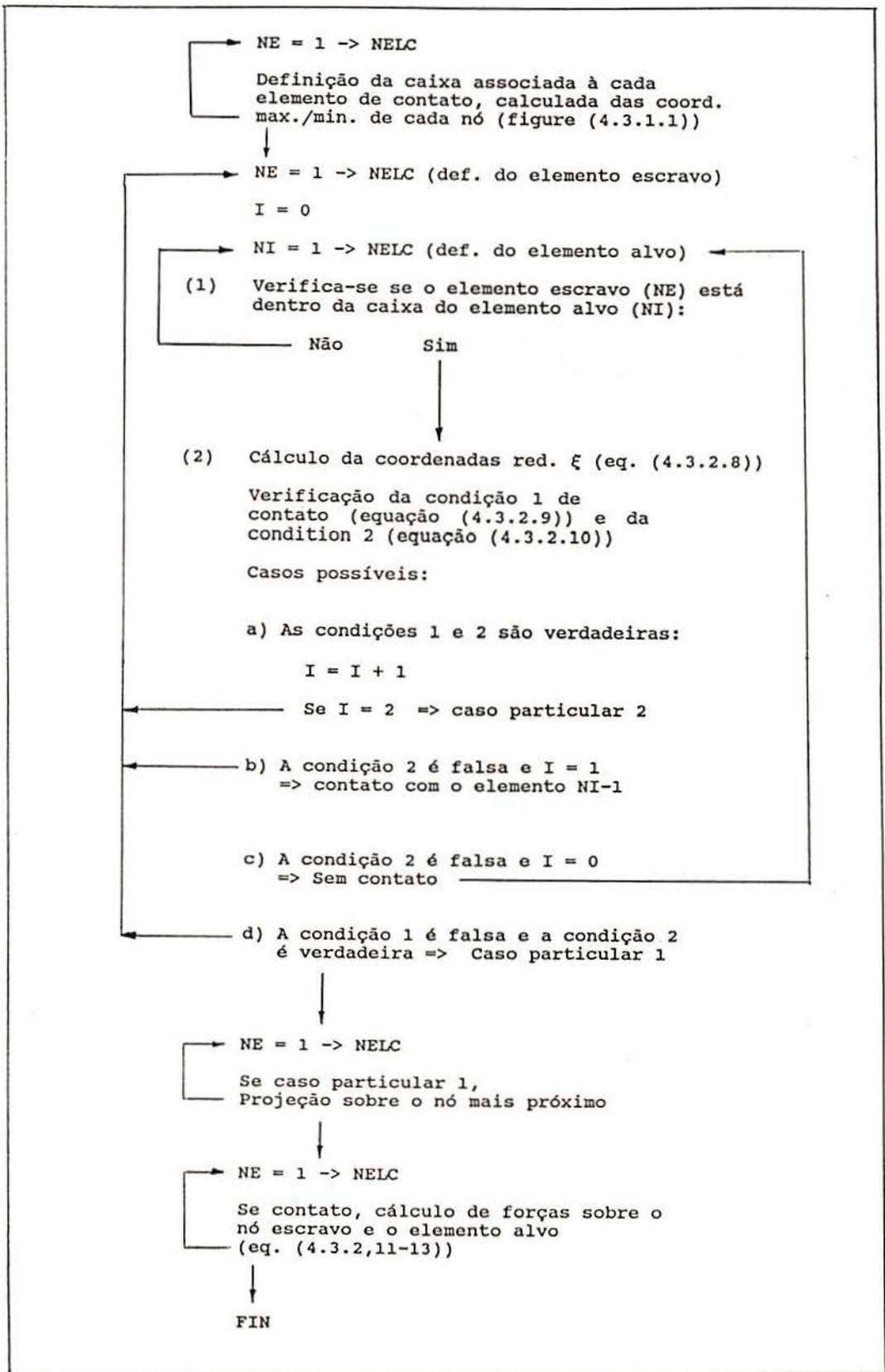
$$F_{Nc1} = - 1/2 F_{Ne} (1 + \xi) \quad (4.3.2.13a)$$

$$F_{Nc2} = - 1/2 F_{Ne} (1 - \xi) \quad (4.3.2.13b)$$

Onde  $\xi$  vem da expressão (4.3.2.8).

No parágrafo seguinte, um esquema resumido do algoritmo de contato entres corpos flexíveis é fornecido.

#### 4.4 ALGORITMO PARA O CÁLCULO DAS FORÇAS DE CONTATO ENTRE CORPOS FLEXÍVEIS



## 5 GENERALIZAÇÃO DAS RELAÇÕES DE CONTATO PARA O TRATAMENTO DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

### 5.1 LEIS CONSTITUTIVAS DE CONTATO EM TRÊS DIMENSÕES

Aqui serão empregados os mesmos modelos de atritos vistos no capítulo 3, salvo que agora, como a pressão tangencial têm duas componentes, a expressão (3.2.3) torna-se:

$$f = || \underline{t}_T || - \mu | t_N | \leq 0 \quad (5.1.1)$$

onde  $||\cdot||$  indica a norma euclidiana e  $\mu$  o coeficiente de atrito estático.

Graficamente o critério de Coulomb é visto na figura (5.1.1):

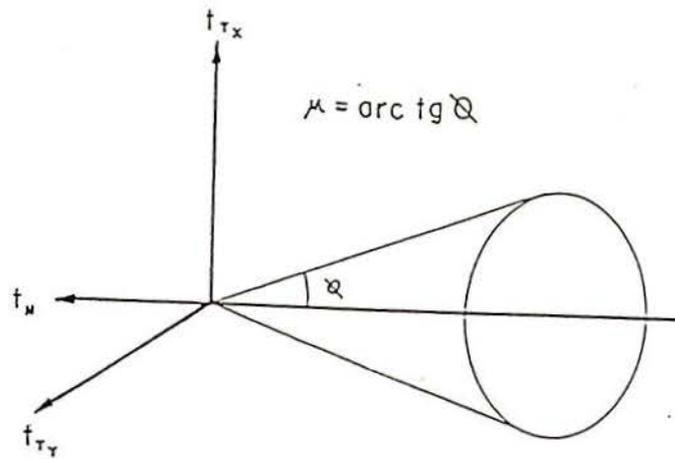


Figura (5.1.1)  
Lei de Coulomb em três dimensões

Como antes, os valores permitidos para as pressões são delimitadas pelo cone circular da figura (5.1.1). Quando a combinação de pressão atinge a superfície, o escorregamento começa. A zona fora do cone é proibida.

A outra função vista ((3.2.4)), torna-se,

$$f = || \underline{t}_T || - \mu | t_N | - A \quad (5.1.2)$$

Aplicar-se-á aqui a mesma teoria vista no capítulo 3. O escorregamento será então dividido em duas partes: o escorregamento reversível (colante) e o irreversível (deslizante), segundo a expressão (3.2.6). Mas a taxa de deslocamento terá três componentes, segundo a expressão (5.1.4) :

$$\dot{\underline{g}} = \begin{bmatrix} \dot{g}_{T1} \\ \dot{g}_{T2} \\ \dot{g}_N \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

O vetor taxa de pressão é agora dado por:

$$\dot{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \dot{t}_{T1} \\ \dot{t}_{T2} \\ \dot{t}_N \end{bmatrix} \quad (5.1.5)$$

Para o caso do contato colante, a relação pressão-deslocamento vale:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_T & 0 & 0 \\ 0 & k_T & 0 \\ 0 & 0 & k_N \end{bmatrix} \quad (5.1.6)$$

Já para o contato deslizante, recai-se sobre a expressão (3.2.2.11)

$$\underline{Y} = \underline{K} - \frac{\underline{K} \frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}} \frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \underline{K}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \underline{K} \frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}}} \quad (3.2.2.11)$$

No entanto, é necessário observar que  $f$  e  $f^*$  não são mais os mesmos utilizados no capítulo (3). A função  $f$  será agora substituída pela equação (5.1.1) onde o valor do termo  $\| \underline{t}_T \|$  é dado pela expressão seguinte:

$$\| \underline{t}_T \| = (t_{T1}^2 + t_{T2}^2)^{1/2} \quad (5.1.7)$$

e por consequência,

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{T1}/\| \underline{t}_T \| \\ t_{T2}/\| \underline{t}_T \| \\ -\mu \end{bmatrix} \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{T1}/\| \underline{t}_T \| \\ t_{T2}/\| \underline{t}_T \| \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.9)$$

Substituindo (5.1.6), (5.1.8) e (5.1.9) em (3.2.2.11), obtém-se:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} -k_T(t_{T1}/\| \underline{t}_T \|^2) + k_T & -k_T t_{T1} t_{T2} / \| \underline{t}_T \| \| \underline{t}_T \| & \mu k_N t_{T1} / \| \underline{t}_T \| \\ -k_T t_{T1} t_{T2} / \| \underline{t}_T \| \| \underline{t}_T \| & -k_T(t_{T2}/\| \underline{t}_T \|^2) + k_T & \mu k_N t_{T2} / \| \underline{t}_T \| \\ 0 & 0 & k_N \end{bmatrix} \quad (5.1.10)$$

Para a integração de tensões, as expressões do parágrafo (3.3) e as expressões (3.5.1-8) são ainda válidas. Integrar-se-á portanto nos eixos locais utilizando o método do retorno radial. Como têm-se duas componentes tangenciais o preditor elástico agora é escrito como:

$$\underline{t}_T^e = \underline{t}_T^t + k_T \Delta g_T \quad (5.1.11)$$

Onde  $\Delta g_T$  corresponde ao escorregamento de um ponto ao longo de um passo de integração no tempo. Ele é medido sobre o sistema local (plano tangente) da configuração atual.

Se o ponto perde o contato,  $\underline{t}_T^t$  é zerada.

Se

$$\| \underline{t}_T^e \| \leq \mu | t_N^{t+\Delta t} |$$

então e escorregamento é reversível e o processo de integração está terminado. A pressão de atrito (ou tangencial) vale,

$$\underline{t}_T^{t+\Delta t} = \underline{t}_T^t + k_T \Delta g_T \quad (5.1.12)$$

Caso contrário aplica-se o retorno radial para trazer a pressão sobre a superfície de Coulomb.

$$\underline{t}_T^{t+\Delta t} = \underline{t}_T^e - \underline{t}_T^{\text{corr}} \quad (5.1.13)$$

A correção  $\underline{t}_T^{\text{corr}}$  vale (ver (3.5.12)),

$$\underline{t}_T^{\text{corr}} = k_T \int_t^{t+\Delta t} \underline{g}_T^{\text{ir}} d\tau \quad (5.1.14)$$

onde

$$\underline{g}_T^{\text{ir}} = \lambda \underline{t}_T^e / \|\underline{t}_T^e\| \quad (5.1.15)$$

Substituindo (5.1.15) em (5.1.14) e supondo que a normal à superfície de escorregamento ( $\underline{t}_T / \|\underline{t}_T\|$ ) é constante entre  $t$  e  $t+\Delta t$ , vem que:

$$\underline{t}_T^{\text{corr}} = k_T \Delta \lambda \underline{t}_T^e / \|\underline{t}_T^e\| \quad (5.1.16)$$

onde  $\Delta \lambda$  vem da expressão (3.2.2.9) mas com  $\partial f / \partial \underline{t}$  e  $\partial f^* / \partial \underline{t}$  dados por (5.1.8) e (5.1.9), respectivamente. Então  $\Delta \lambda$  valerá:

$$\Delta \lambda = \underline{t}_{T1}^e / \|\underline{t}_T^e\| \Delta g_{T1} + \underline{t}_{T2}^e / \|\underline{t}_T^e\| \Delta g_{T2} - \mu \underline{t}_N^{t+\Delta t} / k_T \quad (5.1.17)$$

Substituindo (5.1.17) em (5.1.16) e o resultado em (5.1.13), obtém-se:

$$t_{T1}^{t+\Delta t} = t_{T1}^e - t_{T1}^{e3} / || \underline{t}_T^e ||^2 - t_{T1}^e t_{T2}^{e2} / || \underline{t}_T^e ||^2 + \mu t_N^{t+\Delta t} t_{T1}^e / || \underline{t}_T^e || \quad (5.1.18)$$

$$t_{T2}^{t+\Delta t} = t_{T2}^e - t_{T2}^{e3} / || \underline{t}_T^e ||^2 - t_{T2}^e t_{T1}^{e2} / || \underline{t}_T^e ||^2 + \mu t_N^{t+\Delta t} t_{T2}^e / || \underline{t}_T^e || \quad (5.1.19)$$

Após algumas operações chega-se à:

$$t_{T1}^{t+\Delta t} = \mu t_N^{t+\Delta t} t_{T1}^e / || \underline{t}_T^e || \quad (5.1.20)$$

$$t_{T2}^{t+\Delta t} = \mu t_N^{t+\Delta t} t_{T2}^e / || \underline{t}_T^e || \quad (5.1.21)$$

As expressões (5.1.20) e (5.1.21) são então utilizadas para o cálculo da pressão tangencial quando tem-se o escorregamento irreversível.

## 5.2 OBTENÇÃO DA MATRIZ TANGENTE DE CONTATO EM TRÊS DIMENSÕES

Antes de ver como definir a matriz tangente e as forças externas de contato, é interessante retornar um pouco atrás e rever a dedução da relação pressão-deslocamento quando o escorregamento é irreversível. Neste caso a pressão final é na verdade modificada por um fator de escala  $\beta$ ,

$$\underline{t}_T^{t+\Delta t} = \beta \underline{t}_T^e \quad (5.2.1)$$

Para determinar o fator  $\beta$  basta substituir (5.2.1) dentro da função de escorregamento (5.1.1):

$$\beta = \frac{\mu |t_N|}{|\underline{t}_T^e|} \quad (5.2.2)$$

Substituindo (5.2.2) em (5.2.1), obtém-se a pressão de atrito, que vale:

$$\underline{t}_T^{t+\Delta t} = \frac{\mu |t_N|}{|\underline{t}_T^e|} \underline{t}_T^e \quad (5.2.3)$$

Da expressão (5.2.1), pode-se reescrever a taxa de pressão de contato como (lembrando que  $\beta$  não altera a pressão normal):

$$d\underline{t}_T^{t+\Delta t} = d\beta \begin{bmatrix} t_{r1} \\ t_{r2} \\ 0 \end{bmatrix}^e + \beta \begin{bmatrix} dt_{r1} \\ dt_{r2} \\ 0 \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dt_N \end{bmatrix} \quad (5.2.4)$$

Da expressão (5.2.2), a taxa de  $\beta$  vale,

$$d\beta = \beta \left[ \frac{d(\mu|t_N|)}{\mu|t_N|} - \frac{d||\underline{t}_T^c||}{||\underline{t}_T^c||} \right] \quad (5.2.5)$$

Substituindo (5.2.5) em (5.2.4), recai-se sobre uma relação pressão-deslocamento diferente daquela vista na equação(5.1.10). Esta nova relação é dada pela equação abaixo:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} -k_T^*(t_{T1}/||\underline{t}_T||)^2 + k_T^* & -k_T^*t_{T1}t_{T2}/||\underline{t}_T|| ||\underline{t}_T|| & \mu k_N t_{T1}/||\underline{t}_T|| \\ -k_T^*t_{T1}t_{T2}/||\underline{t}_T|| ||\underline{t}_T|| & -k_T^*(t_{T2}/||\underline{t}_T||)^2 + k_T^* & \mu k_N t_{T2}/||\underline{t}_T|| \\ 0 & 0 & k_N \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

A expressão (5.2.6) é semelhante à (5.1.10), salvo que aqui o  $k_T$  é substituído por  $k_T^*$ , que é definido como:

$$k_T^* = k_T \beta \quad (5.2.7)$$

A matriz de (5.2.6) é consistente com o método do retorno radial e deve ser utilizada em lugar de (5.1.10) para que haja boa convergência do método de Newton-Raphson.

Utilizar-se-á aqui a hipótese do tópico (3.5.2), ou seja, de que as forças de contato no nó  $k$  são tomadas como iguais às pressões:

$$F_{tn_{k,i}}^c = t_{tn_{k,i}} \quad (5.2.8)$$

A pressão normal ao nó é calculada de:

$$t_{k,N} = k_N G_{k,N} \quad (3.5.2.2)$$

onde  $G_{k,N}$  é a distância entre o nó  $k$  da configuração de referência e sua projeção ortogonal sobre a matriz de contato (ver item (5.3.2)). Em caso de escorregamento reversível, a pressão no nó  $k$  vale, de (5.1.12),

$$\underline{t}_{k,T}^c = \underline{t}_{k,T}^t + k_T \Delta G_{k,T} \quad (5.2.9)$$

No caso irreversível, as pressões serão calculadas segundo (5.2.9) corrigidas por (5.1.20) e (5.1.21).

Para trazer estes valores de pressão aos eixos globais, será utilizado ainda a equação (3.5.16). Obtém-se desta forma, como forças externas nodais devidas ao contato:

$$\underline{F}_{xy}^{c,c} = \underline{\eta}^T \begin{bmatrix} t_{T1} \\ t_{T2} \\ t_N \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (5.2.10)$$

(A obtenção da matriz de rotação  $\underline{\eta}$  será vista no item (5.4)).

Para o cálculo da matriz tangente, como no caso plano, ocorrem duas situações possíveis:

a) A matriz de contato é plana: Neste caso, pode-se tomar a expressão (3.5.2.10) que substituída em (3.5.1.4) permite definir a contribuição do nó  $k$  à matriz tangente de contato como:

$$\underline{K}_{xy_k}^c = \underline{K}_{xy} \quad (5.2.11a)$$

para o escorregamento reversível. No caso irreversível, tem-se

$$\underline{K}_{xy_k}^c = \underline{Y}_{xy} \quad (5.2.11b)$$

onde

$$\underline{K}_{xy} = \underline{\eta}^T \underline{K} \underline{\eta} \quad (5.2.12)$$

ou

$$\underline{K}_{xy} = \underline{\eta}^T \underline{Y} \underline{\eta} \quad (5.2.13)$$

$\underline{K}$  e  $\underline{Y}$  são dados pelas expressões (5.1.6) e (5.2.6), respectivamente.

b) Para as matrizes de forma qualquer, utiliza-se, novamente, uma matriz tangente numérica, dada por (3.5.2.9d):

$$\underline{K}_{xy_{1j}}^{c,K} = - \Delta F_{xy_{1j}}^{c,K} / 2 dX_j \quad (3.5.2.9d)$$

onde

$$\Delta F_{xy_{1j}}^{c,K} = F_{xy_{1j}}^{c,K-} - F_{xy_{1j}}^{c,K+} \quad (3.5.2.9a)$$

e

$$F_{xy_{1j}}^{c,K+} = F_{xy_1}^{c,K} (\underline{X} + d\underline{X}) \quad (3.5.2.9b)$$

$$F_{xy_{1j}}^{c,K-} = F_{xy_1}^{c,K} (\underline{X} - d\underline{X}) \quad (3.5.2.9c)$$

$\underline{X}$  são as coordenadas do nó e  $d\underline{X}$  a perturbação das coordenadas. (As expressões (3.5.2.9b,c) definem a variação da força de contato devido a perturbação  $+dX_j$  e  $-dX_j$ , respectivamente, sobre as coordenadas do nó). A única diferença com relação ao caso 2D é que aqui os índices  $i$  et  $j$  variam de um à três.

### 5.3 PROCESSO DE PESQUISA DO CONTATO

#### 5.3.1 PESQUISA À NIVEL LOCAL E GLOBAL

A matriz de contato pode ser definida utilizando superfícies do tipo plana, regradada e mapeamento transfinito (também denominada superfície Coons) (ver detalhes no item (5.3.2)). A combinação destes três tipos de superfícies permitem a definição geométrica de matrizes de forma complexas em três dimensões sem ter necessidade do emprego de uma grande quantidade de superfícies.

Pode-se encontrar autores na literatura que trabalham desta forma (cita-se como exemplo /S2/), ou seja, definem a geometria da matriz de contato com o auxílio de superfícies complexas. Mas a maior parte dos trabalhos definem a matriz utilizando apenas as superfícies planas (quadriláteros ou triângulos) como na figura (5.3.1). Evidentemente esta última forma de trabalhar é menos precisa e necessita uma grande quantidade de superfícies para bem definir as superfícies curvas. Como consequência, muito tempo será perdido para encontrar quais superfícies da matriz podem entrar em contato com um nó de contato dado. (Conforme visto no capítulo 4, este processo é denominado *pesquisa global* ).



Figura (5.3.1.1)  
Definição da superfície da matriz de contato empregando superfícies planas.

Na aproximação aqui utilizada, a pesquisa global não representa uma etapa crítica uma vez que usa-se normalmente um número pequeno de superfícies definindo a matriz de contato. Para se obter as superfícies candidatas ao contato com um certo nó, define-se, em torno de cada superfície da matriz, uma caixa (ver figura (5.3.1.2)). Se um nó em contato está dentro da caixa de uma dada superfície, então esta superfície é candidata ao contato.

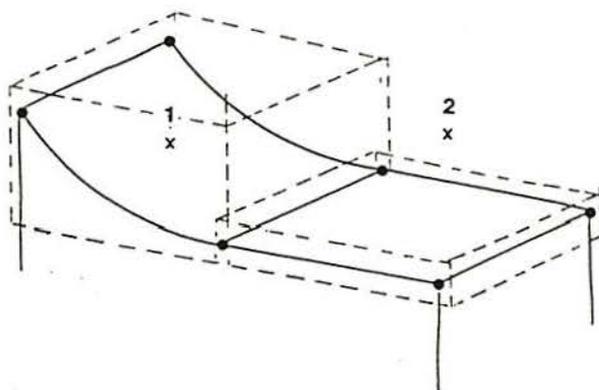


Figura (5.3.1.2)

O nó 1 pode entrar em contato com a superfície curva já que ele está dentro da caixa. O nó 2 não pode entrar em contato.

Uma vez definida as superfícies candidatas, faz-se a *pesquisa local* do contato, para definir exatamente sobre qual superfície o contato ocorrerá. Para isto faz-se uma projeção ortogonal do nó sobre a superfície em questão (ver próximo parágrafo). Esta projeção ficará unicamente definida desde que não sejam usados cantos vivos na geração da geometria da matriz (o que é sempre evitado na prática).

Normalmente aqui a pesquisa local será a etapa mais crítica, devido ao processo iterativo necessário à projeção.

### 5.3.2 PROCESSO DE PROJEÇÃO ORTOGONAL 3D

O cálculo da força normal de contato demanda a determinação da distância normal entre a matriz rígida e o nó que a penetrou. O processo consiste em projetar o nó ortogonalmente sobre a matriz e após calcular a distância entre o nó e sua projeção. Neste item este processo de projeção será detalhado.

O processo têm duas etapas principais:

a) Pesquisa de um ponto próximo do nó escravo, que pertence à superfície da matriz rígida. Para isto, divide-se as coordenadas reduzidas  $(\xi, \eta)$  da superfície rígida em dez partes, como mostra a figura (5.3.2.1).

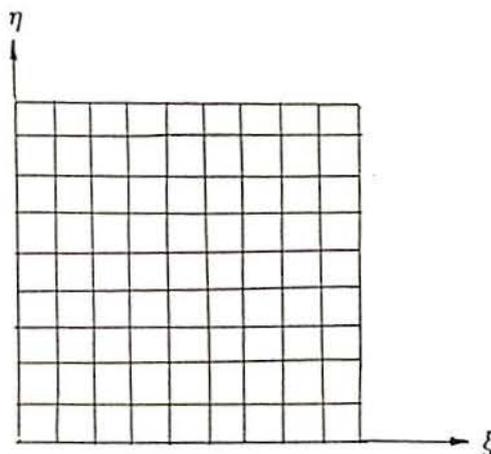


Figura (5.3.2.1)  
Divisão do domínio no espaço reduzido.

Define-se então uma série de valores para  $\xi$  e  $\eta$  e com estes, pode-se calcular as coordenadas globais dos pontos da superfície,

utilizando a expressão geral:

$$\underline{P}(\xi, \eta) = \phi^I(\xi, \eta) \underline{X}^I \quad (5.3.2.1)$$

onde  $\phi^I$  são as funções de forma que definem a superfície e  $\underline{X}^I$  as coordenadas dos polos ou pontos no espaço que definirão a forma da superfície.

Procura-se entre os 100 pontos calculados, aquele que é o mais próximo do nó escravo e considera-se inicialmente que este é a projeção ortogonal à superfície. Se o segmento ligando este ponto e o nó escravo é ortogonal à superfície, então o produto escalar seguinte será verdadeiro (ver figura (5.3.2.2)):

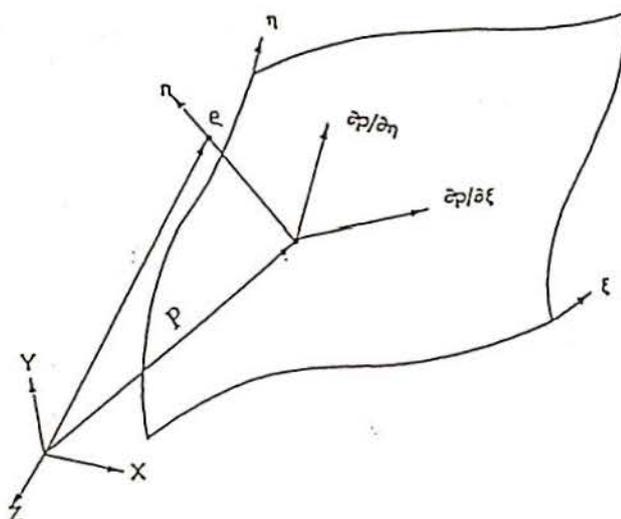


Figura (5.3.2.2)  
Projeção ortogonal do nó e sobre a superfície.

$$(\underline{P} - \underline{X}e) \cdot \frac{\partial \underline{P}}{\partial \xi} = 0 \quad (5.3.2.2a)$$

$$(\underline{P} - \underline{X}e) \cdot \frac{\partial \underline{P}}{\partial \eta} = 0 \quad (5.3.2.2b)$$

Caso contrário:

$$(\underline{P} - \underline{X}e) \cdot \frac{\partial \underline{P}}{\partial \xi} = R\xi \quad (5.3.2.3a)$$

$$(\underline{P} - \underline{X}e) \cdot \frac{\partial \underline{P}}{\partial \eta} = R\eta \quad (5.3.2.3b)$$

onde  $R\xi$  e  $R\eta$  são os resíduos.

Neste último caso, como no parágrafo (2.2) (equações (2.2.9,10)), pode-se construir um processo iterativo do tipo Newton-Raphson, para aproximar-se da solução (equações (5.3.2.2a,b)). Isto determinará a segunda etapa de cálculo:

b) Processo iterativo de pesquisa da projeção normal: O mesmo desenvolvimento em série empregado para as forças desequilibradas vistas no parágrafo (2.2), aplica-se aqui para os resíduos das equações (5.3.2.3a,b). Assim, aproxima-se da projeção ortogonal segundo o esquema abaixo:

$$\left[ \begin{array}{l} \underline{R}^{(1)} + (\partial \underline{R} / \partial \underline{\xi})^{(1)} \Delta \underline{\xi} = 0 \\ \underline{\xi}^{(1+1)} = \underline{\xi}^{(1)} + \Delta \underline{\xi} \end{array} \right. \quad (5.3.2.4a)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \underline{R}^{(1)} + (\partial \underline{R} / \partial \underline{\xi})^{(1)} \Delta \underline{\xi} = 0 \\ \underline{\xi}^{(1+1)} = \underline{\xi}^{(1)} + \Delta \underline{\xi} \end{array} \right. \quad (5.3.2.4b)$$

onde,

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (5.3.2.5)$$

e

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R\xi \\ R\eta \end{bmatrix} \quad (5.3.2.6)$$

A expressão entre parênteses em (5.3.2.4a) é a matriz tangente do processo e vale:

$$\left[ \begin{array}{cc} \partial \underline{P} / \partial \xi & \cdot & \partial \underline{P} / \partial \xi & & \partial \underline{P} / \partial \eta & \cdot & \partial \underline{P} / \partial \xi \\ \partial \underline{P} / \partial \eta & \cdot & \partial \underline{P} / \partial \xi & & \partial \underline{P} / \partial \eta & \cdot & \partial \underline{P} / \partial \eta \end{array} \right] \quad (5.3.2.7)$$

As iterações acabarão quando os valores de  $\Delta\xi$  são menores que uma tolerância que vale  $1.0 \times 10^{-09}$  em princípio.

As diferenciais que se vê em (5.3.2.7) são calculadas de modo numérico como:

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial \xi} = (\underline{P}(\xi, \eta) - \underline{P}(\xi + dper, \eta)) / dper \quad (5.3.2.8a)$$

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial \eta} = (\underline{P}(\xi, \eta) - \underline{P}(\xi, \eta + dper)) / dper \quad (5.3.2.8b)$$

onde  $dper$  usualmente vale  $1.0 \times 10^{-09}$ .

A única coisa que resta determinar é então cálculo de  $\underline{P}$  como uma função de  $(\xi, \eta)$ , ou seja, a solução da expressão geral (5.3.2.1). Isto dependerá, evidentemente do tipo de superfície utilizada para criar a matriz rígida. Têm-se aqui duas opções que permitem gerar não importa qual tipo de superfície 3D:

a) **Superfície regradada:** Uma superfície regradada (ou 'ruled surface' do inglês) é definida como a superfície gerada por uma reta (geratriz) que religa dois pontos situados sobre duas curvas (diretrizes). Estes pontos são móveis e possuem sempre a mesma abscissa curvilínea (figura (5.3.2.3)).

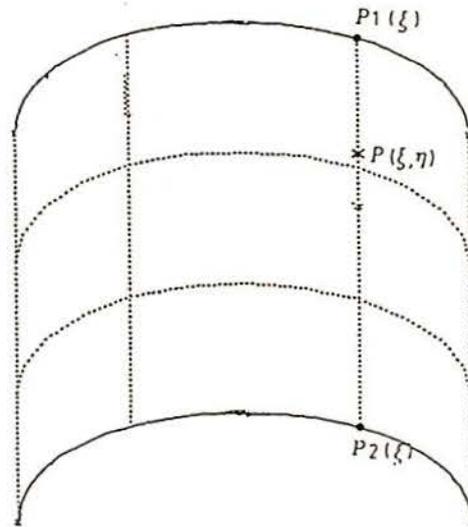


Figura (5.3.2.3)  
Superfície regrada

O procedimento para determinar as coordenadas globais à partir das coordenadas reduzidas tem igualmente duas etapas. Inicialmente determina-se as coordenadas sobre as curvas de base. Para o caso de um arco de círculo (caso estudado no capítulo 7 de aplicações), uma vez conhecida sua geometria, pode-se determinar (ver figura (5.3.2.4)): A normal ( $\underline{N}$ ) ao plano da curva; o vetor ( $\underline{A}$ ) religando o centro ao primeiro nó; o ângulo de abertura total ( $\theta_T$ ) do arco do círculo.

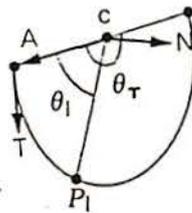


Figura (5.3.2.4)  
Determinação das coordenadas globais para o caso de uma curva de base circular.

Empregando as coordenadas reduzidas ( $\xi$ ) calcula-se o ângulo de abertura ( $\theta_1$ ):

$$\theta_1 = \xi \theta_T \quad (5.3.2.9)$$

As coordenadas globais do ponto  $P_1$  (figura (5.3.2.4)) serão dadas por:

$$\underline{P}_1 = \underline{C} + \underline{A} + \underline{T} \sin \theta_1 - \underline{A} \cos \theta_1 \quad (5.3.2.10)$$

onde  $\underline{C}$  são as coordenadas globais do centro do arco de círculo e a a tangente  $\underline{T}$  é calculada como:

$$\underline{T} = \underline{N} \times \underline{A} \quad (5.3.2.11)$$

O mesmo processo é repetido para o outro arco de círculo quando determina-se  $\underline{P}_2$ . As coordenadas globais do ponto sobre a superfície serão dadas pela interpolação linear abaixo:

$$\underline{P}(\xi, \eta) = \underline{P}_1(\xi) (1 - \eta) + \underline{P}_2(\xi) \eta \quad (5.3.2.12)$$

**b) Superfície Coons:** Uma superfície Coons é definida pelas quatro (ou três) linhas (retas ou curvas) que contituem sua fronteira (figura (5.3.2.5)). Se dois lados opostos são linhas retas, tem-se novamente uma superfície regrada que é portanto um caso particular das superfícies Coons. O cálculo de um ponto qualquer sobre a superfície é dada pela interpolação transfinita bilinear abaixo:

$$\begin{aligned} \underline{P}(\xi, \eta) = & (1 - \eta) \underline{P}_1(\xi) + \eta \underline{P}_3(\xi) + (1 - \xi) \underline{P}_4(\eta) + \xi \underline{P}_2(\eta) \\ & - (1 - \xi)(1 - \eta) \underline{X}^1 - \xi(1 - \eta) \underline{X}^3 \\ & - (1 - \xi) \eta \underline{X}^2 - \xi \eta \underline{X}^4 \end{aligned} \quad (5.3.2.13)$$

Os valores de  $\underline{P}_i$  são calculados segundo (5.3.2.10) para o caso de curvas de base circular, enquanto que  $\underline{X}^i$  são as coordenadas dos

quatro cantos da superfície (ver figura (5.3.2.5)).

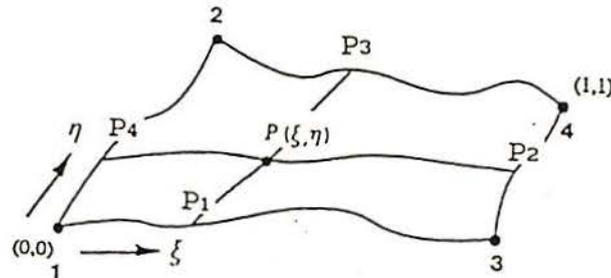


Figura (5.3.2.5)  
Superfície Coons

#### 5.4 DEFINIÇÃO DE UM SISTEMA DE EIXOS LOCAIS

Para o caso bidimensional, a definição da direção normal à matriz permite a determinação imediata de um sistema de eixos local.

No entanto, este não é mais o caso quando trabalha-se sobre o problema tridimensional: aqui o sistema de eixos não está inteiramente determinado, salvo o eixo ligado à direção normal. Mas os eixos tangentes à matriz são definidos de forma arbitrária.

Da projeção ortogonal do nó de contato (que doravante será denominado de nó escravo) sobre a matriz, pode-se calcular os cossenos diretores da normal como:

$$n_1 = G_{N1} / G_N \quad (5.4.1a)$$

$$n_2 = G_{N2} / G_N \quad (5.4.1b)$$

$$n_3 = G_{N3} / G_N \quad (5.4.1c)$$

onde  $G_N$  é a diferença entre o vetor posição do nó escravo e o vetor posição de sua projeção ortogonal sobre a matriz, visto como calcular no item anterior, e  $G_{Ni}$  as componentes nos eixos globais deste segmento.

Para o cálculo dos eixos tangentes, duas situações são possíveis:

a) Primeira iteração onde há contato: Para obter um vetor tangente à matriz na projeção do nó escravo sobre a mesma ( ponto  $P(\xi, \eta)$ ), calcula-se a posição de um novo ponto sobre a matriz cujas coordenadas reduzidas são  $(\xi + 0.01, \eta)$ . Define-se - desta maneira - um vetor aproximadamente tangente à matriz, na projeção do nó escravo. Este vetor será chamado de  $t_1'$  (ver figura (5.4.1)).

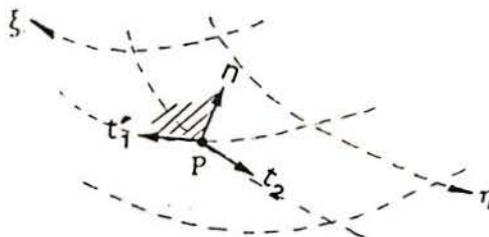


Figura (5.4.1)  
Definição de um eixo tangente  $t_2$  à superfície no nó em contato.

Calcula-se um eixo ( $\underline{t}_2$ ) tangente fazendo um produto vetorial entre o vetor normal  $\underline{n}$  e o vetor  $\underline{t}_1'$ :

$$\underline{t}_2 = \underline{n} \times \underline{t}_1' \quad (5.4.2)$$

Após normalização, este vetor fornecerá um dos eixos tangentes procurados. O segundo eixo tangente é obtido do produto vetorial abaixo (ver também figura (5.5.1)).

$$\underline{t}_1 = \underline{t}_2 \times \underline{n} \quad (5.4.3)$$

b) Para as outras iterações onde ocorre contato, o processo é o mesmo, salvo que o vetor *aproximadamente tangente*  $\underline{t}_1'$  é agora substituído pelo eixo tangente  $\underline{t}_1$  da iteração precedente. Ou seja, a equação (5.4.2) é substituída por:

$$\underline{t}_2^i = \underline{n} \times \underline{t}_1^{i-1} \quad (5.4.4)$$

onde o super-índice  $i$  identifica a iteração atual. Tem-se a garantia aqui que localmente o sistema de eixos não mudará ao longo do escorregamento do nó sobre a matriz. Desta forma, a equação (5.1.11) ou (5.1.12) podem ainda serem aplicadas, sem a necessidade da aplicação de uma rotação.

Para um nó escravo cuja posição na configuração de referência sobre a matriz é  $A$  e na configuração final é  $B$  (ver figura (5.4.2)), as componentes de  $\Delta G_T$  em eixos locais serão dadas pelo produto escalar:

$$\Delta G_{T1} = (\underline{B} - \underline{A}) \cdot \underline{t}_1 \quad (5.4.5)$$

$$\Delta G_{T2} = (\underline{B} - \underline{A}) \cdot \underline{t}_2 \quad (5.4.6)$$

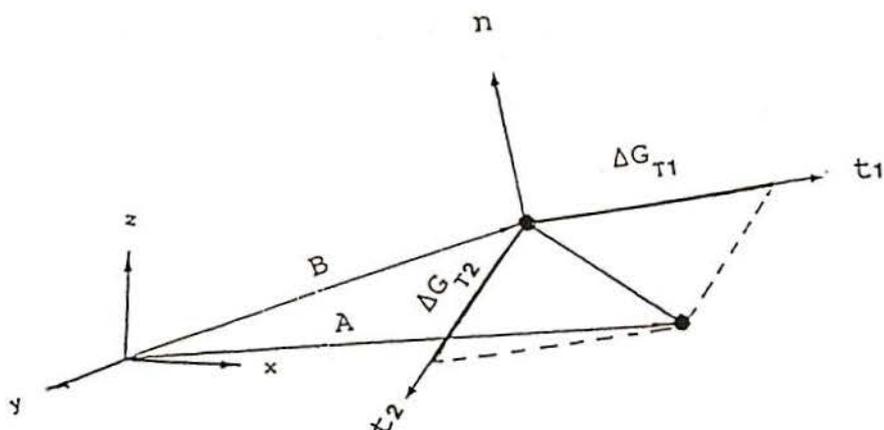


Figura (5.4.2)  
Cálculo das componentes locais do "gap" tangencial.

Finalmente, a relação entre os sistemas global e local é dada pela matriz de rotação abaixo:

$$\mathfrak{y}^T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & n_1 \\ t_{12} & t_{22} & n_2 \\ t_{13} & t_{23} & n_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.7)$$

## 6 CONTATO ENTRE CORPOS FLEXÍVEIS 3D

### 6.1 INTRODUÇÃO

Como visto para o caso 2D, pode-se dividir o algoritmo de contato em duas etapas: pesquisa global e local. Na pesquisa global é determinado quais elementos alvos poderão entrar em contato com um dado nó escravo. Neste aspecto, no algoritmo 3D que se está aqui propondo, não existe diferença com relação ao algoritmo visto para o caso 2D, ou seja, todos os nós de contato são testados com relação a todos elementos de contato (algoritmo *duplo passe/ força bruta*). Como já comentado no capítulo 4, este é um tipo de algoritmo de referência.

Os elementos alvos são constituídos agora por 4 nós, como indica a figura (6.1.1):

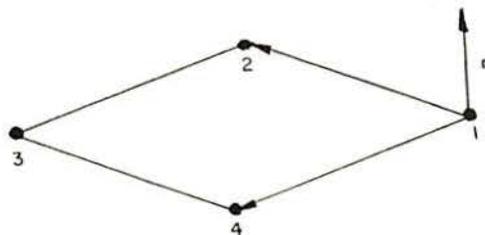


Figura (6.1.1)  
Elemento de contato flexível 3D

Portanto, o elemento será formado por uma face externa do elemento volumétrico. A conectividade do elemento de contato deve ser tal que a normal externa ao elemento pode ser identificada empregando a regra da mão direita (ver figura (6.1.1)).

A seguir, serão discutidas algumas dificuldades encontradas, sobretudo na pesquisa local do contato.

## 6.2 PRINCIPAIS DIFICULDADES ENCONTRADAS NA PESQUISA LOCAL

Uma vez definidos os elementos que podem entrar em contato com um dado nó escravo, é necessário estabelecer de forma única o contato com um certo elemento. Por exemplo, Hallquist /H1/, determina inicialmente qual nó alvo está mais próximo do nó escravo. Se as expressões (6.2.1a,b) são satisfeitas, este pode ser projetado sobre o elemento que contém o nó alvo (ver figura (6.2.1)).

$$(\underline{C}_1 \times \underline{S}) \cdot (\underline{C}_1 \times \underline{C}_2) \geq 0 \quad (6.2.1a)$$

$$(\underline{C}_1 \times \underline{S}) \cdot (\underline{S} \times \underline{C}_2) \geq 0 \quad (6.2.1b)$$

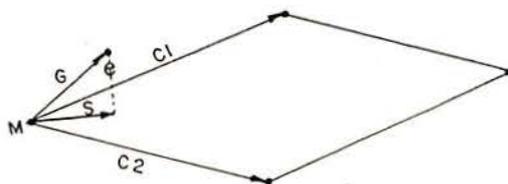


Figura (6.2.1)  
Definição da projeção

$e$  = nó escravo.

$M$  = nó alvo mais próximo.

$\underline{S}$  = proj. de  $\underline{G}$  sobre o plano formado por  $\underline{C}_1$  e  $\underline{C}_2$ .

Para que o contato seja confirmado no caso de Zhong /Z4/, as condições abaixo tem que ser cumpridas (ver também figura (6.2.2)).

$$-D_p \leq G_N \leq D_c \quad (6.2.2a)$$

$$P_i \leq 0 \quad (6.2.2b)$$

$$(i = 1, 4)$$

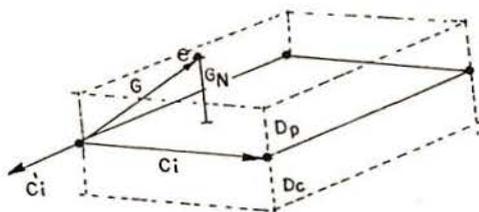


Figura (6.2.2)

$G_N$  = distância nó escravo / projeção sobre elemento alvo.

$D_p, D_c$  = valores pré-definidos.

$C_i'$  = vetor definido segundo eq. (6.2.4)

Onde  $G_N$  é a distância entre o nó escravo e sua projeção.  $P$  é definido pelo produto escalar abaixo:

$$P_i = \underline{G} \cdot \underline{C}_i' \quad (6.2.3)$$

onde

$$\underline{C}_i' = \underline{C}_i \times \underline{n} \quad (6.2.4)$$

$\underline{n}$  é a normal externa ao elemento e  $\underline{C}_i$  o vetor diferença entre dois nós consecutivos do elemento de contato.

Deve-se observar que a condição (6.2.2b) deve ser refeita para cada nó do elemento alvo.

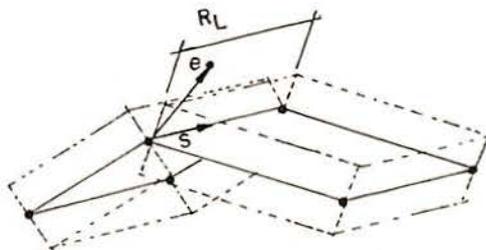
Todas estas operações não impedem contudo situações indefinidas como as das figuras (4.3.2.2) ou (4.3.2.3), onde o nó escravo

encontra-se em regiões côncavas ou convexas do corpo alvo. Isto leva a operações adicionais. Por exemplo, no caso de Zhong, se o nó está numa região côncava, então ele será projetado na aresta desde que as condições abaixo sejam cumpridas (ver figura (6.2.3)):

$$-D_p \leq G_N \leq D_c \quad (6.2.5a)$$

$$| \underline{s} | \leq R_L \quad (6.2.5b)$$

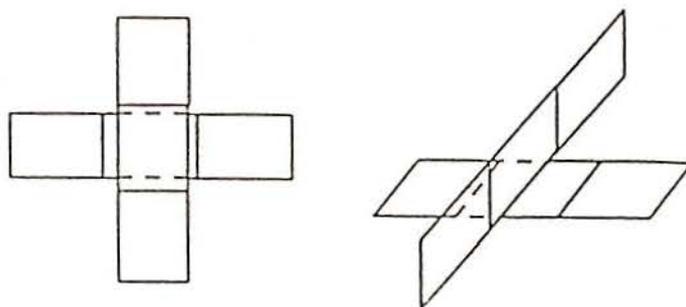
onde  $R_L$  é o comprimento da aresta.



*Figura (6.2.3)*  
Nó numa zona côncava do corpo alvo.

Existe ainda uma dificuldade séria na definição da projeção ortogonal quando os elementos alvos são constituídos por 4 nós, como neste trabalho, pois neste caso não há garantias de que estes nós formem um plano. Neste caso um processo iterativo, do tipo Newton-Raphson é necessário ao cálculo da projeção /B1/, /Z4/.

O fato de pesquisar-se o caso de um nó penetrando em uma superfície, pode ainda levar a situações onde a detecção do contato torna-se impossível, como no caso da figura (6.2.4), mesmo empregando o algoritmo força bruta.



*Figura (6.2.4)*  
*Situação onde o contato não é detectado.*

Todas estas dificuldades podem ser superadas empregando o chamado 'Pinball Algorithm' (/B4/,/B5/). Basicamente, este algoritmo consiste em embeber esferas dentro de cada elemento de contato, como mostra a figura (6.2.5a,b).

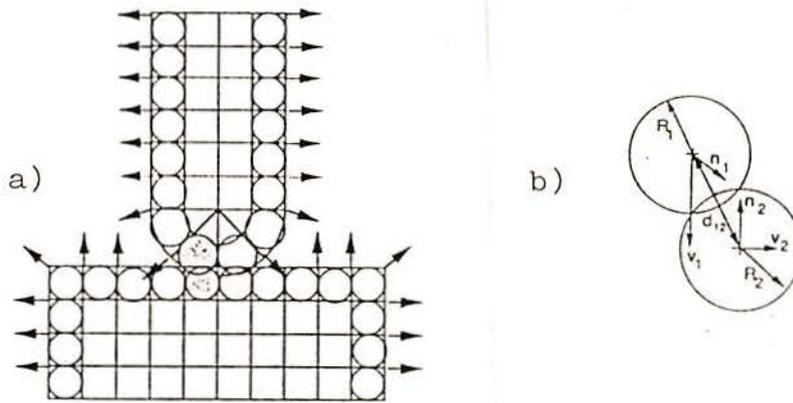


Figura (6.2.5)

'Esferas' embebidas na superfície dos corpos e que impedem interpenetração.

Assim se (ver figura (6.2.5b)):

$$d_{12} < R_1 + R_2 \quad (6.2.6)$$

então existe interpenetração e forças de contato surgem afastando as esferas. O raio de cada esfera é determinado do volume de cada elemento finito do contorno.

Além da pesquisa local ser extremamente simplificada, o algoritmo dispensa processos iterativos de projeção. Tudo isto torna o algoritmo altamente vetorizável, segundo os autores. Porém, existem algumas situações onde este algoritmo não fornece bons resultados:

a) Toda situação na qual o elemento do contorno deixa de ser cúbico, leva a uma imprecisão crescente que pode inviabilizar o

método. Isto é flagrante no caso de cascas. Além disto, se o elemento é cúbico no início do processo, como tabalha-se em grandes deformações, não existe garantia de que ele permaneça com esta forma até o final do contato.

b) O método tem uma imprecisão inerente, pois substitui o contorno por esferas.

c) A implicitação do método é pouco provável, como relatado pelos próprios autores.

Existe uma variante do método (Splitting Pinball) /B5/, capaz de suplantar especialmente as dificuldades descritas em (a), mas que conduz também a um algoritmo mais complexo.

### 6.3 DEFINIÇÃO DO CONTATO

No algoritmo que será aqui proposto, utilizar-se-á uma proposta semelhante aquela do 'Pinball Algorithm'. Ou seja, será feita uma opção pela simplicidade, mesmo que pague-se o preço de uma maior imprecisão. O algoritmo têm assim apenas duas etapas:

a) **Definição do elemento alvo:** Se o nó escravo está dentro de uma caixa definida pelas coordenadas extremas dos nós do elemento alvo (figura (6.1.1)) mais uma tolerância, então este poderá ser o elemento no qual o nó escravo será projetado. Esta situação é indicada na figura (6.3.1).

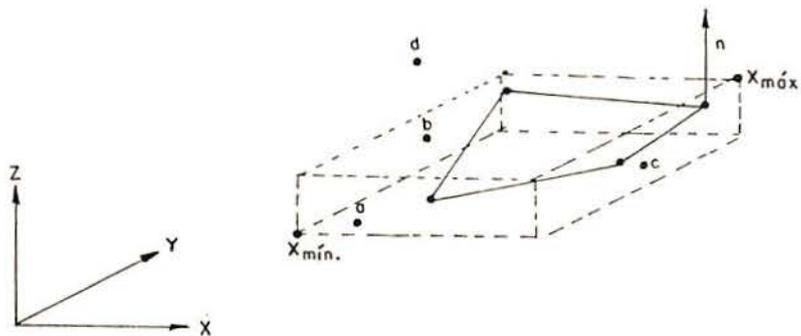


Figura (6.3.1)  
Nós 'a', 'b' e 'c' podem ser projetados; Nó d não pode.

Esta caixa, é definida por dois pontos :  $\underline{X}_{\min}$ ,  $\underline{X}_{\max}$ , conforme expressões (6.3.1a,b):

$$\underline{X}_{\min} = \min (\underline{X}^1, \underline{X}^2, \underline{X}^3, \underline{X}^4) - \text{TOL} \quad (6.3.1a)$$

$$\underline{X}_{\max} = \max (\underline{X}^1, \underline{X}^2, \underline{X}^3, \underline{X}^4) + \text{TOL} \quad (6.3.1b)$$

onde  $\underline{X}^i$  são coordenadas dos nós do elemento.

O valor de TOL deve ser o menor possível para que um nó não acabe sendo projetado sobre o elemento errado. Porém, TOL deve ser grande o suficiente para que sejam evitados problemas nas regiões côncavas, como indicam as figuras (6.3.2a,b). Neste caso, a projeção é feita sobre uma extensão do elemento de contato.

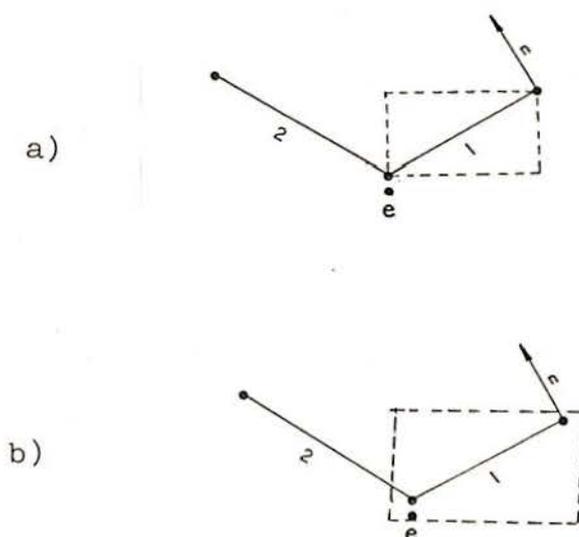


Figura (6.3.2)

Nó numa região côncava: a) TOL muito pequeno impede projeção; b) Projeção é possível sobre a extensão do elemento.

No caso do nó escravo estar dentro de numa região convexa, embora existam duas opções de projeção, esta será feita sobre o primeiro elemento cuja caixa contém o nó.

b) **Projeção ortogonal do nó sobre o elemento alvo:** Calcula-se primeiramente uma normal exterior aproximada ao elemento  $\underline{n}$  (ver figura (6.2.1)):

$$\underline{n} = \underline{C}_1 \times \underline{C}_2 \quad (6.3.2)$$

O valor da penetração do nó sobre a superfície será dada por:

$$G_N = \underline{n} \cdot \underline{G} \quad (6.3.3)$$

onde  $\underline{G}$  é o vetor distância nó escravo / primeiro nó do elemento alvo. Se  $G_N$  é negativo, considera-se que houve penetração e seu módulo indicará o valor desta penetração. Caso contrário, será necessário pesquisar outros elementos alvos.

Pode-se observar que o número de operações feito até aqui é muito pequeno e comparável ao método 'Pinball'. Existe porém a possibilidade de que nós relativamente longe do elemento alvo sejam projetados sobre o mesmo, dependendo do valor de TOL e da orientação dos elementos com relação ao sistema de referência global (ver figura (6.3.1)). Para evitar problemas nestes casos, o teste indicado pela expressão (6.2.2b) é ainda realizado. Assim, se

$$P_i > 0 \quad (6.3.4)$$

$$(i=1,4)$$

então a pesquisa do elemento alvo deve ser continuada.

Para o cálculo das forças nodais sobre o nó escravo, empregar-se-á a expressão abaixo:

$$F_{Ne} = k_N G_N \quad (6.3.5)$$

Para as forças reativas no elemento alvo, a exemplo do método 'Pinball', simplesmente será empregado a mesmo valor sobre cada nó alvo, conforme (6.3.6)

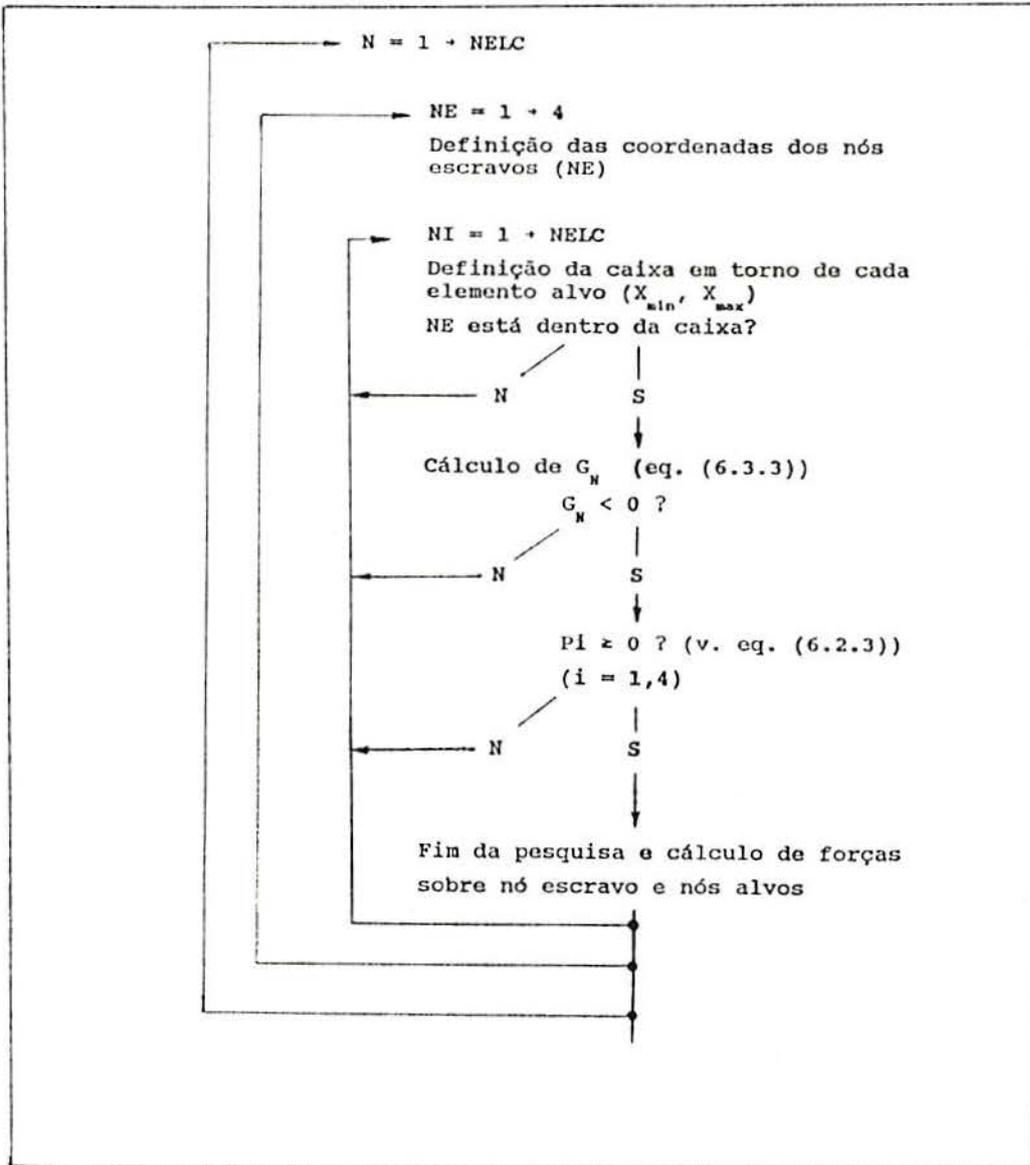
$$F_{Nc1} = 0.25 F_{Ne} \quad (6.3.6)$$

$$(i = 1,4)$$

Estas forças devem ainda ser rotadas para coordenadas globais, compondo o vetor de forças externas.

Deve-se novamente ressaltar que o método é uma aproximação, uma vez que os elementos de quatro nós não necessariamente formarão um plano. Porém, resultados preliminares (ver capítulo 7 de aplicações) demonstram ser o método relativamente preciso e robusto.

## 6.4 ALGORITMO PARA O CONTATO 3D



## 7 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 7.1 COMPARAÇÃO ENTRE OS PROCESSOS DE INTEGRAÇÃO DO CONTATO

O problema da 'aproximação nodal' adotada para o cálculo do contato (item (3.5.2)) é sua incapacidade de *adaptar-se* à malha. Para deixar isto mais claro, vejamos o exemplo do esmagamento de um pedaço de matéria, como mostra a figura (7.1.1):

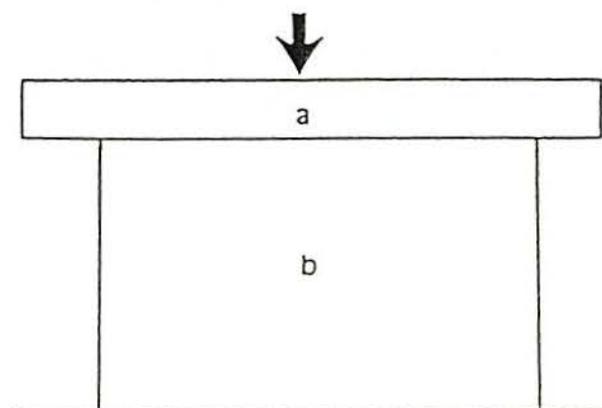


Figura (7.1.1)  
Esmagamento de um pedaço de matéria.  
a) Matriz rígida  
b) Peça flexível

As características mecânicas valem:

$$E = 1000 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

O material é elasto-plástico com uma lei constitutiva segundo a expressão:

$$\bar{\sigma} = 10 + 5 \bar{\epsilon}$$

onde  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\epsilon}$  são a tensão de Von Mises e a deformação plástica equivalente, respectivamente. As dimensões são 2 x 2 cm, em estado plano de deformações. Uma malha composta de dois elementos foi empregada como na figura (7.1.2). Os nós 2 e 5 são fixados na direção y e o nó 1 é engastado.

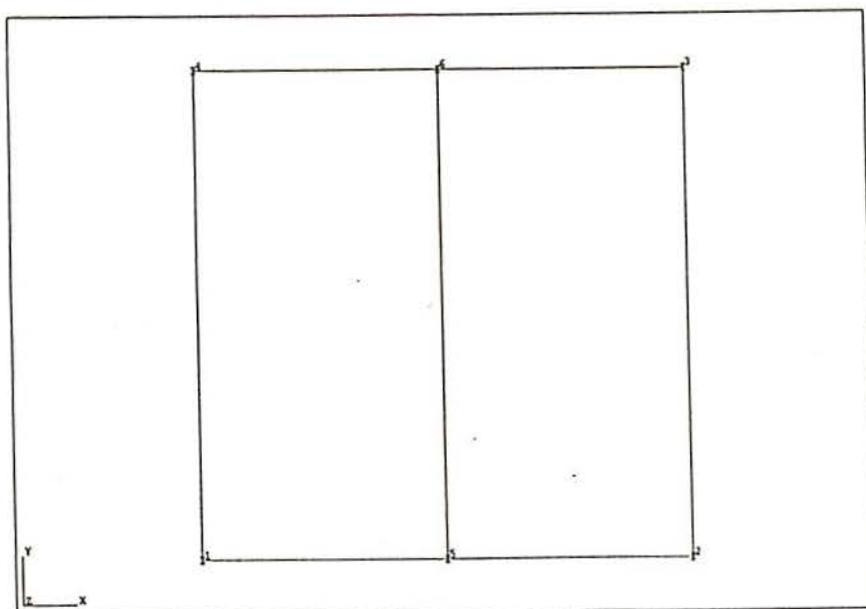
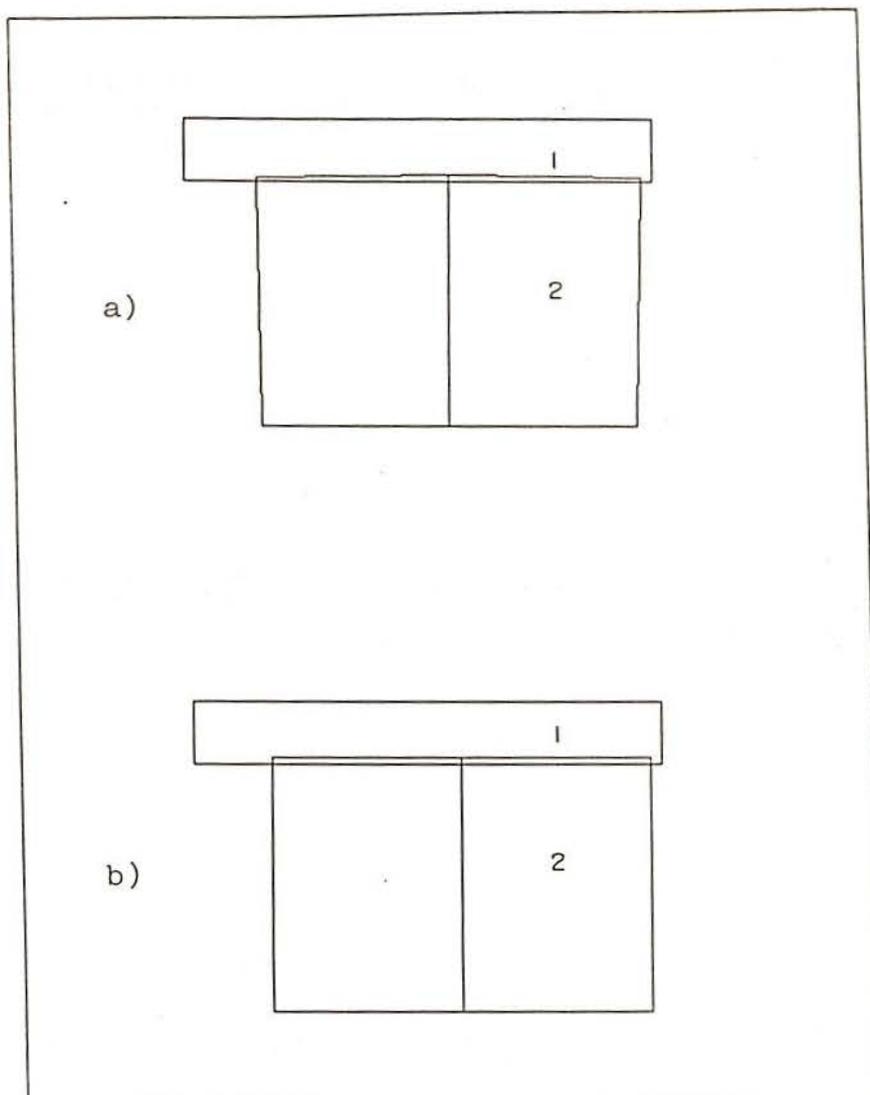


Figura (7.1.2)  
Malha empregada

A deformada obtida com o processo nodal (item (3.5.2)) é mostrado na figura (7.1.3a) e com o método da penalidade variável (item (3.5.3)) a deformada é mostrada na figura (7.1.3b), para uma indentação de 0.4 cm ou 20% de redução.



*Figura (7.1.3a,b)*

*1) Matriz rígida; 2) Corpo flexível*

*a) Deformada com o método nodal (item (3.5.2))*

*b) Deformada com o método da penalidade variável (item (3.5.3)).*

Observa-se que o primeiro método não fornece uma deformada uniforme. Isto acontece pois a força de contato sobre cada nó é constante. As forças internas são também constantes, mas evidentemente, quando é feito a montagem de forças, o nó do meio vai ter a contribuição de forças do elemento à esquerda e à direita (ver

figura (7.1.4)). A força interna sobre este nó será então duas vezes maior que as forças internas dos nós da extremidade, o que explica a forma da figura (7.1.3a). Isto não acontece no segundo caso, pois as forças de contato não são constantes.

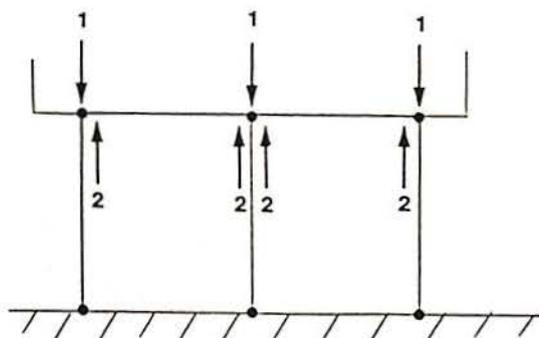


Figura (7.1.4)  
1 - Forças de contato  
2 - Forças internas

O método da penalidade variável permite também uma estimativa da pressão de contato, como visto no item (3.5.3). Da equação de Cauchy (2.1.5) pode-se dizer que:

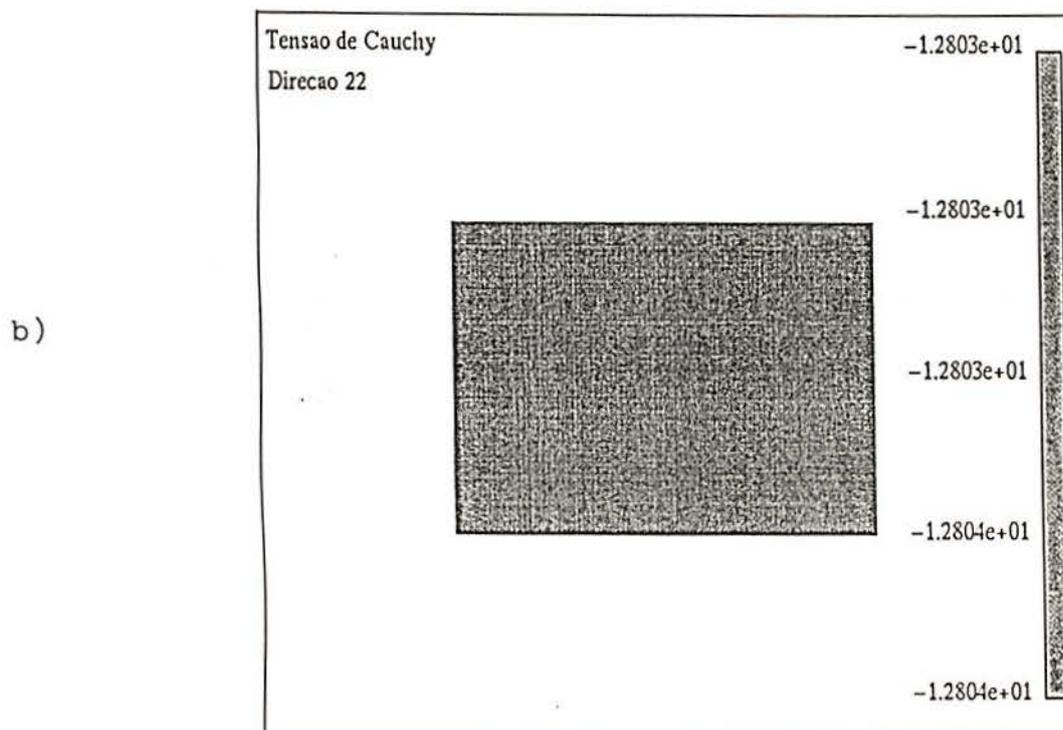
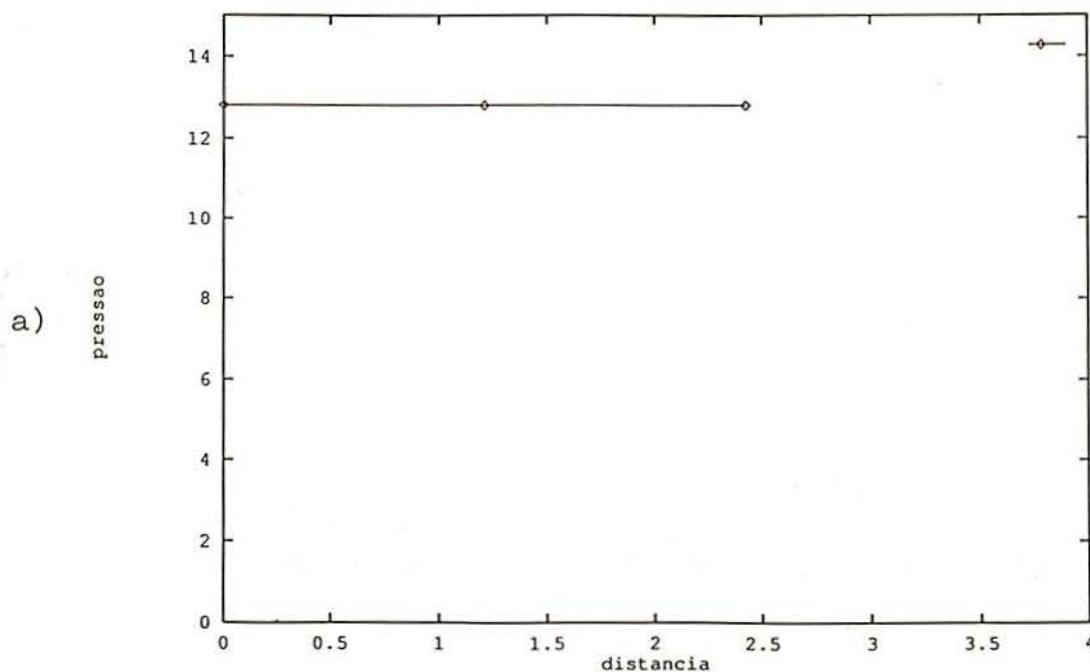
$$\sigma_{2j} n_j = t_2$$

onde  $\underline{\sigma}$  é a tensão de Cauchy,  $\underline{n}$  o vetor normal à superfície e  $\underline{t}$  o vetor pressão externa. Como  $\underline{n}$  vale  $[0,0,1]$ , a pressão externa na direção  $y$  (componente 2) vale,

$$t_2 = \sigma_{22} \quad (7.1.1)$$

As figuras (7.1.5a,b) mostram os valores de pressão de contato e os valores da componente (2,2) da tensão de Cauchy. Observa-se então

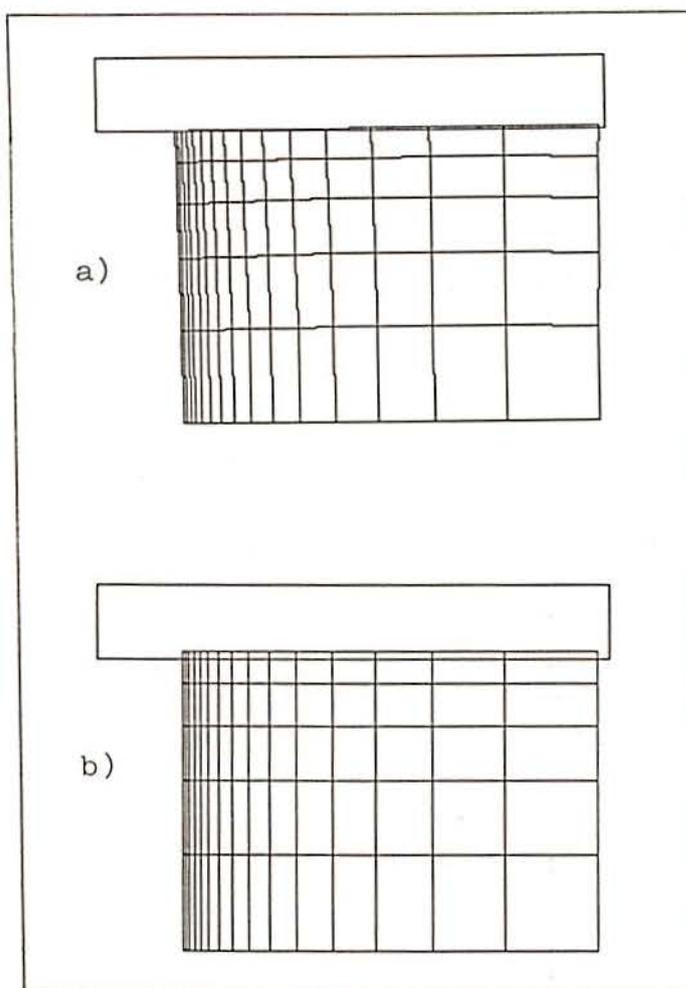
que a equação (7.1.1) é respeitada. Este resultado assegura que o campo de pressões suposto (ver figura (3.5.3.1)) foi bem escolhido.



**Figura (7.1.5)**  
a) Valores da pressão normal  
b) Tensão  $\sigma_{22}$  dentro da peça.

O problema descrito não é apenas um efeito de canto. Ele irá

sempre acontecer quando tem-se uma malha com grandes diferenças a nível do tamanho dos elementos de contato. As figuras (7.1.6a,b) mostram os resultados do mesmo caso analisado, mas agora utilizando uma malha que mistura elementos de contato de diferentes tamanhos. Para a aproximação nodal tem-se de novo uma deformação não uniforme (figura (7.1.6a)).



*Figure (7.1.6a,b)*  
a) Deformada com o método nodal (item (3.5.2))  
b) Deformada com o método da penalidade variável (item (3.5.3)).

A tabela (7.1.1) indica que a mudança no processo de cálculo das

forças de contato (penalidade variável), não causa problemas de taxa de convergência, que normalmente ocorre empregando, por exemplo a quadratura de Gauss.

<i>CASO</i>	<i>NUM. ITER.</i>	<i>NUM. PASSOS</i>
<i>APROX. NODAL</i>	<i>19</i>	<i>21</i>
<i>PENALIDADE VAR.</i>	<i>13</i>	<i>21</i>

*TABELA (7.1.1)*  
*Comparação dos processos de cálculo do contato.*

Chama-se a atenção aqui que a penalidade empregada foi bastante baixa (350) o que permitiu que fosse visualizada a interpenetração. Porém, mesmo empregando valores maiores de penalidade, a boa velocidade de convergência não fica alterada.

## 7.2 CONTATO ENTRE CORPOS FLEXÍVEIS 2D

### 7.2.1 IMPACTO TUBO/PLACA

O primeiro exemplo aqui analisado, trata-se do caso do impacto de um tubo com uma placa, em estado plano de deformação, como mostra a figura (7.2.1.1).

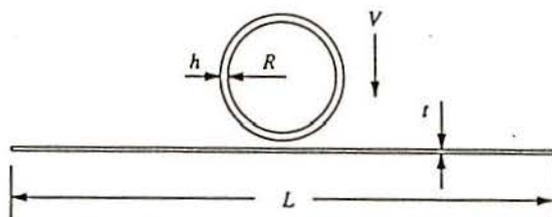


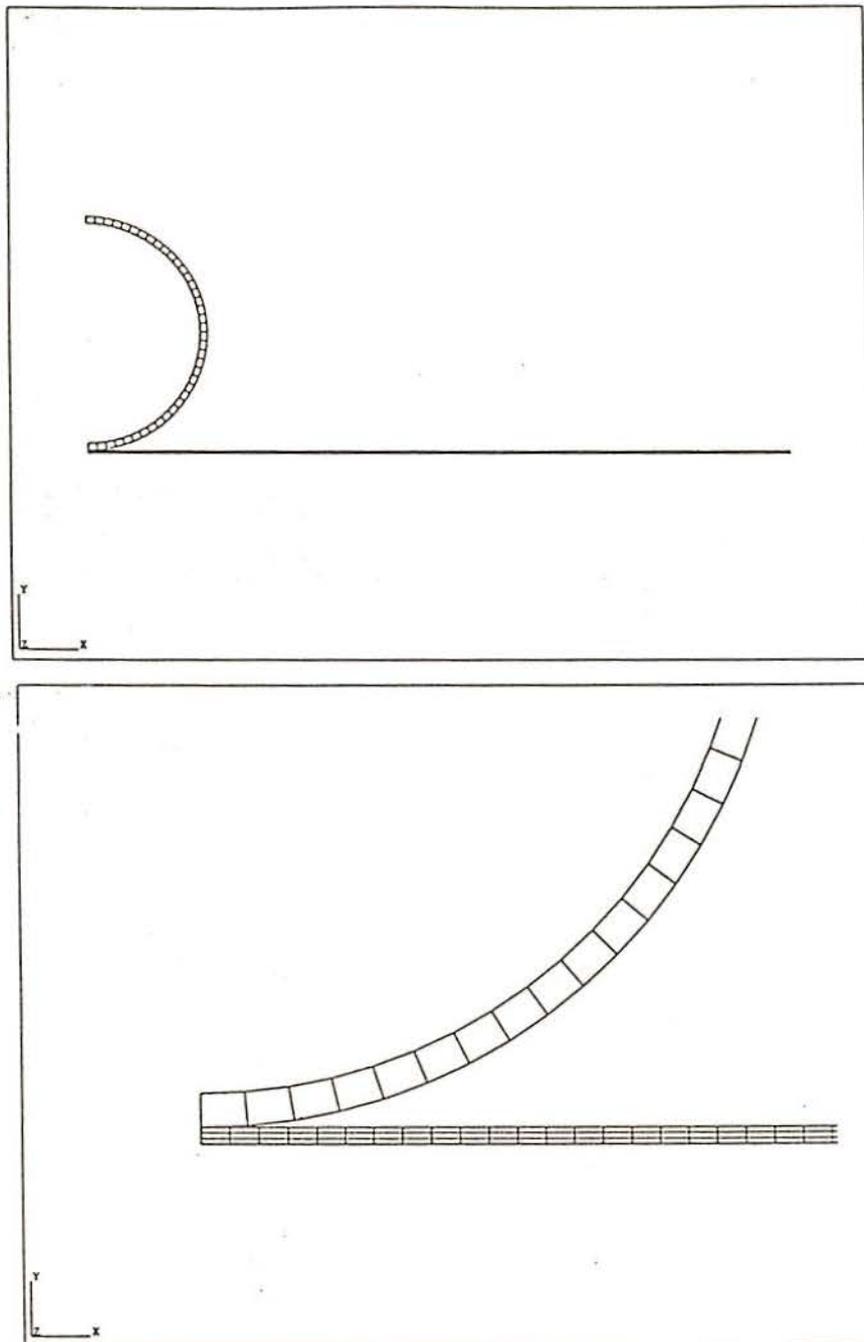
Figura (7.2.1.1)

$$R = 0.097 \text{ m}; h = 0.006 \text{ m}; L = 1.2 \text{ m}; t = 0.003 \text{ m}$$

A discretização do problema é fornecida na figura (7.2.1.2). 40 elementos são empregados para o tubo e 360 elementos são utilizados para a placa.

O material é o mesmo para o tubo e placa, sendo suas características fornecidas abaixo:

$$\begin{aligned} E &= 200 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.3 \\ \rho &= 7800 \text{ Kg/m}^3 \\ \sigma_v &= 100 \text{ MPa} \\ H &= 50 \text{ GPa} \end{aligned}$$



*Figura (7.2.1.2)*  
*Discretização do problema*

O cilindro tem uma velocidade inicial de  $-50$  m/s na direção  $y$ , enquanto que a placa tem uma velocidade de  $50$  m/s também na direção

y. Não é considerado aqui o atrito, e a penalidade normal vale  $3.5 \times 10^{11}$ .

Deve-se ressaltar que foi possível empregar simetria neste problema pois foi utilizado um elemento de contato rígido vertical, no plano de simetria, que impede que a placa - quando se deforma - ultrapasse este plano.

A figura (7.2.1.3) fornece a deformada em quatro diferentes passos de tempo. Observa-se que a deformação que o cilindro sofre no início do impacto é elástica pois no fim do impacto ele reencontra sua forma inicial.

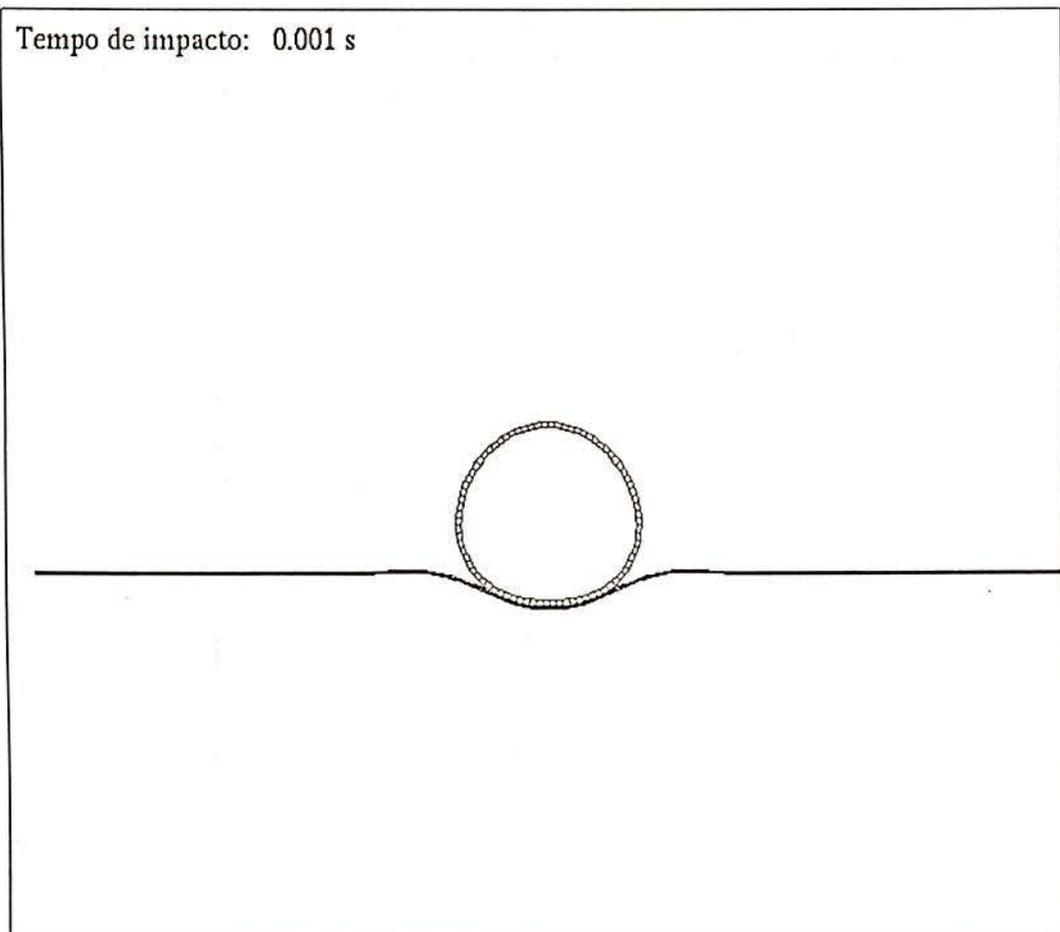
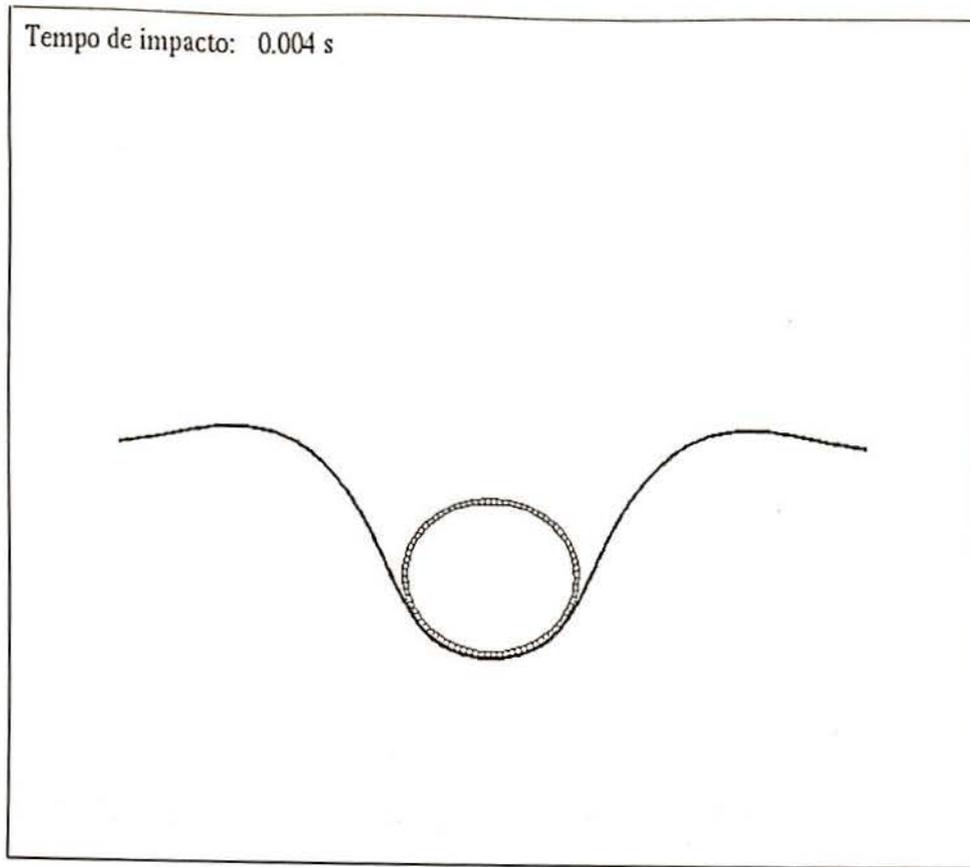
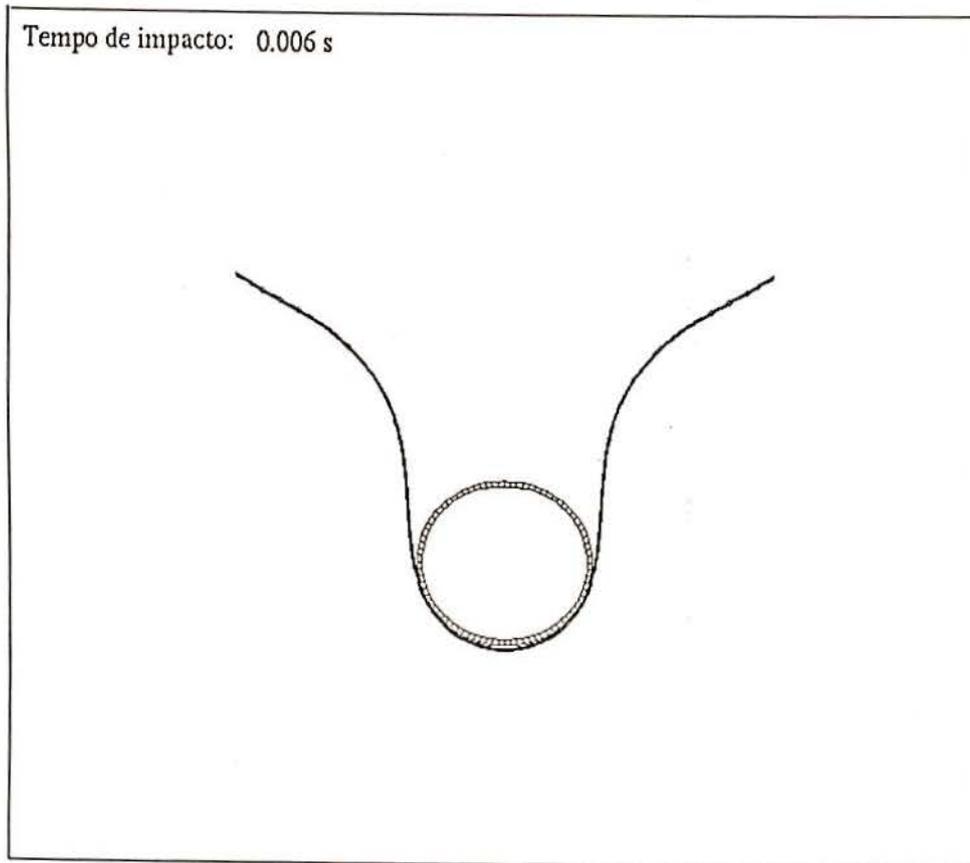


Figura (7.2.1.3)  
Deformada: a) 0.001 s

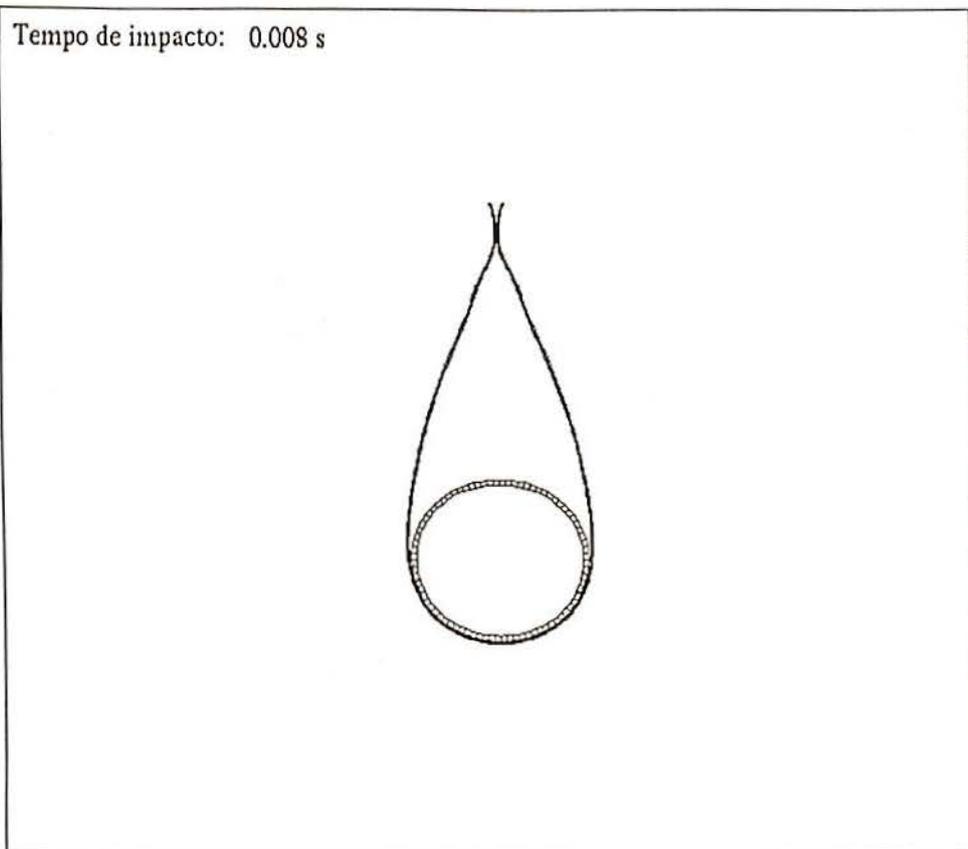
b)



c)



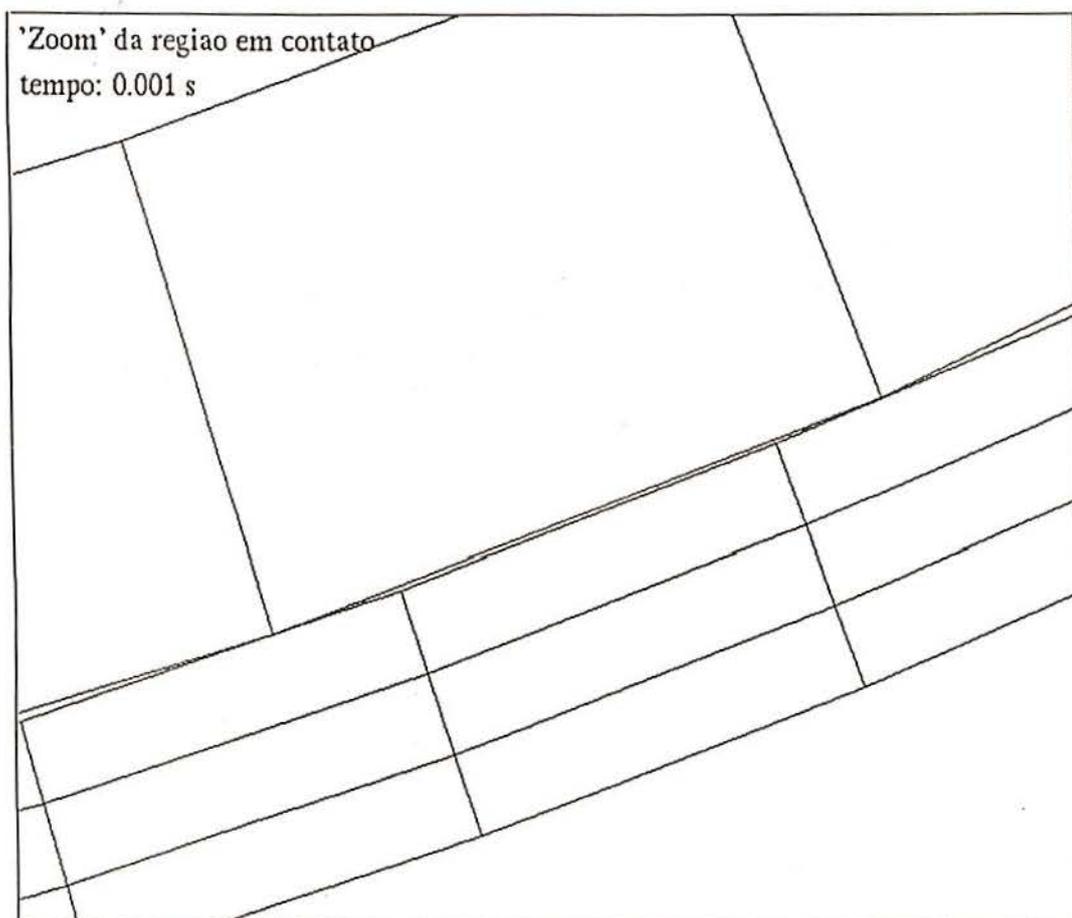
*Figura (7.2.1.3)*  
Deformada: b) 0.004 s c) 0.006 s



*Figura (7.2.1.3)*

*d) 0.008 s*

O zoom na figura (7.2.1.4) mostra a eficiência do algoritmo de contato para evitar as interpenetrações entre os corpos.



*Figura (7.2.1.4)*  
Zoom dos nós em contato para um tempo de 0.001 s.

No gráfico da figura (7.2.1.5) é indicado a variação dos nós A e B (ver figura (7.2.1.2)) com o tempo. O nó A pertence ao tubo e o nó B à placa. Verifica-se que à partir do tempo 0.0075 s começa a haver

um 'rebote' no movimento dos dois corpos, indicando uma maior energia cinética da placa, no final do impacto, o que está de acordo com resultados obtidos por ZHONG /Z4/.

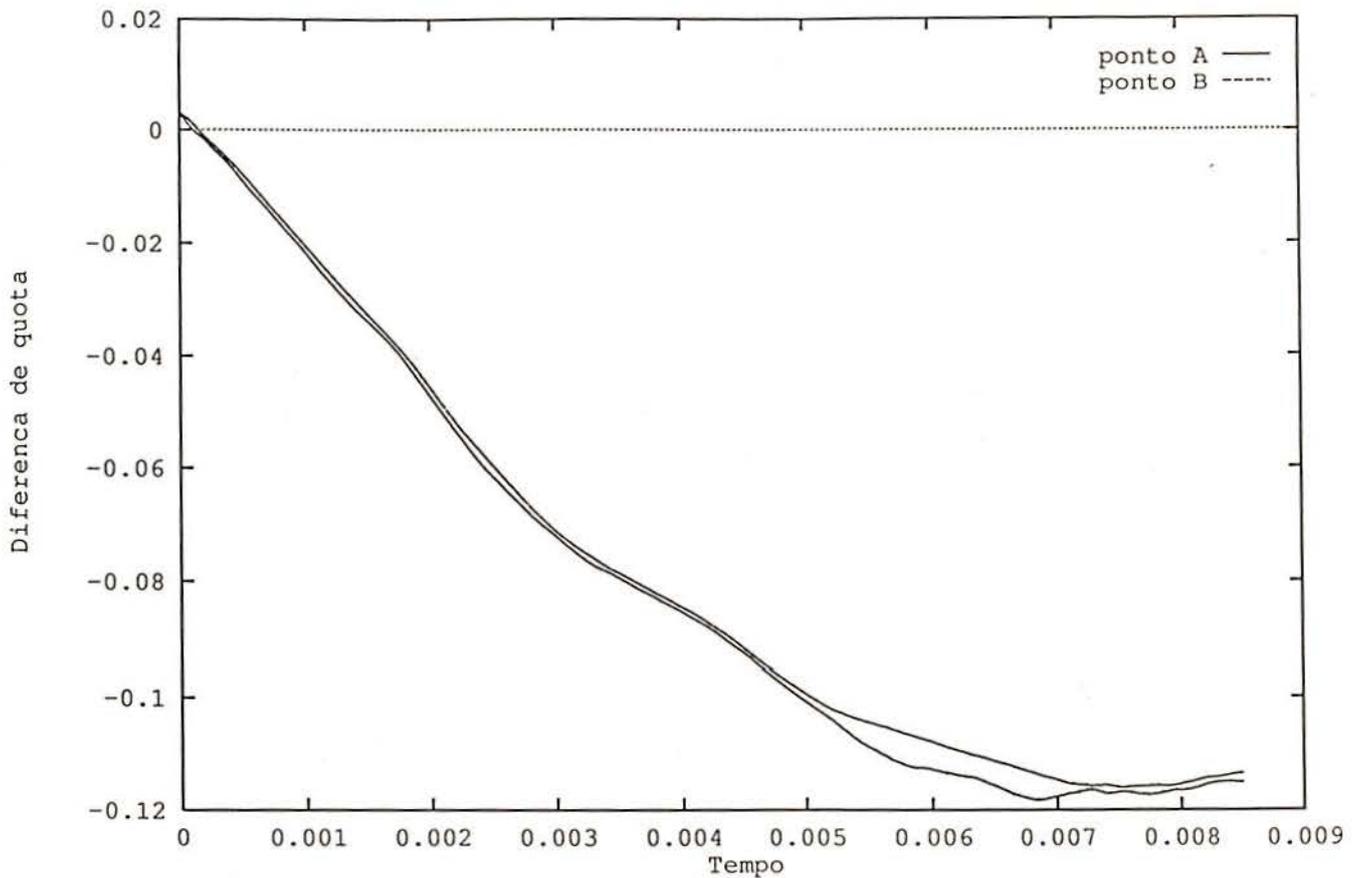


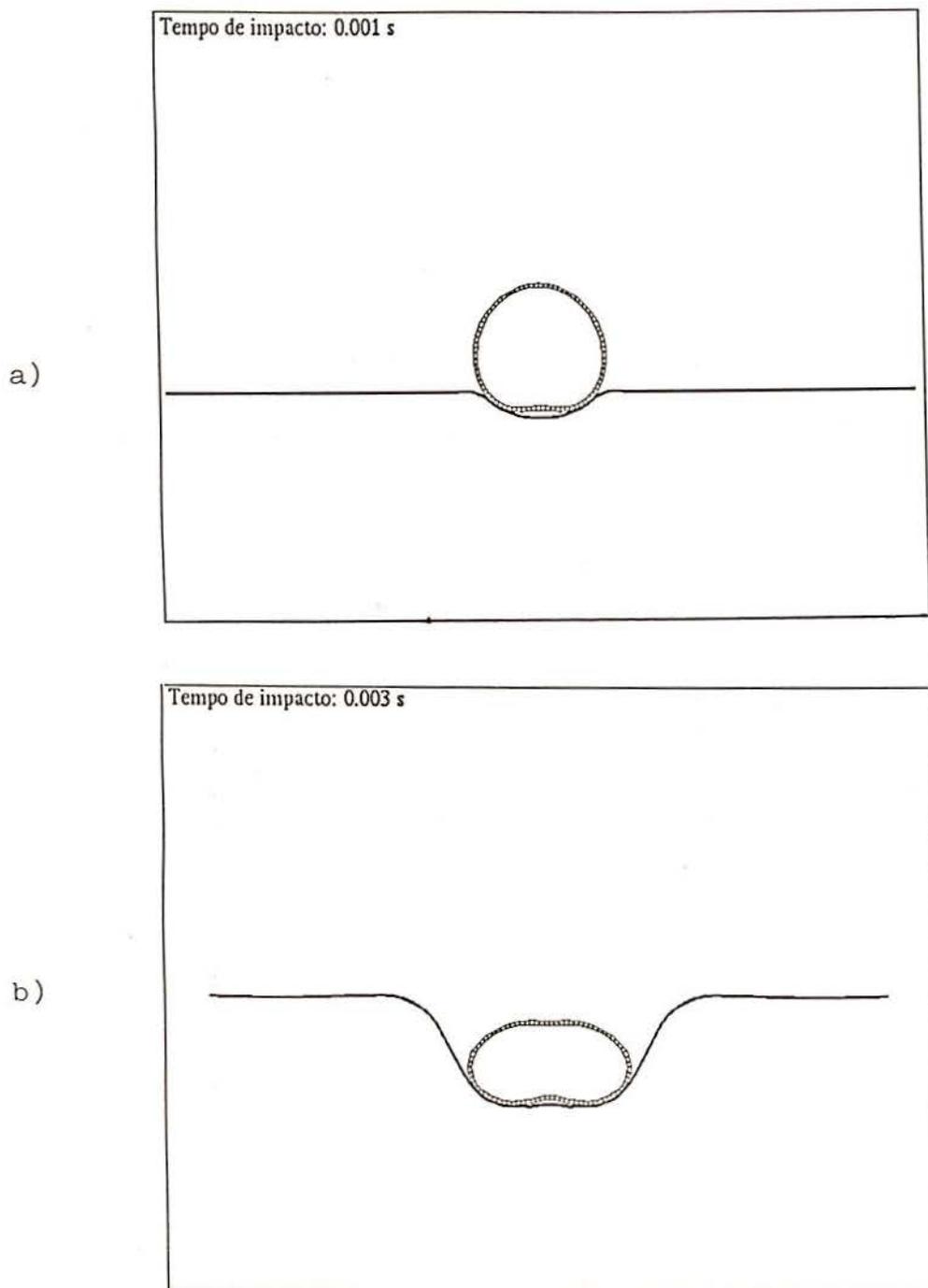
Figura (7.2.1.5)  
Posição dos nós A e B (fig. (7.2.1.2)) com o tempo.

A tabela (7.2.1.1) fornece o número de passos necessários à análise.

NUM. DE ELEM.	NUM. ITER.	NUM. PASSOS
400	- x -	70655

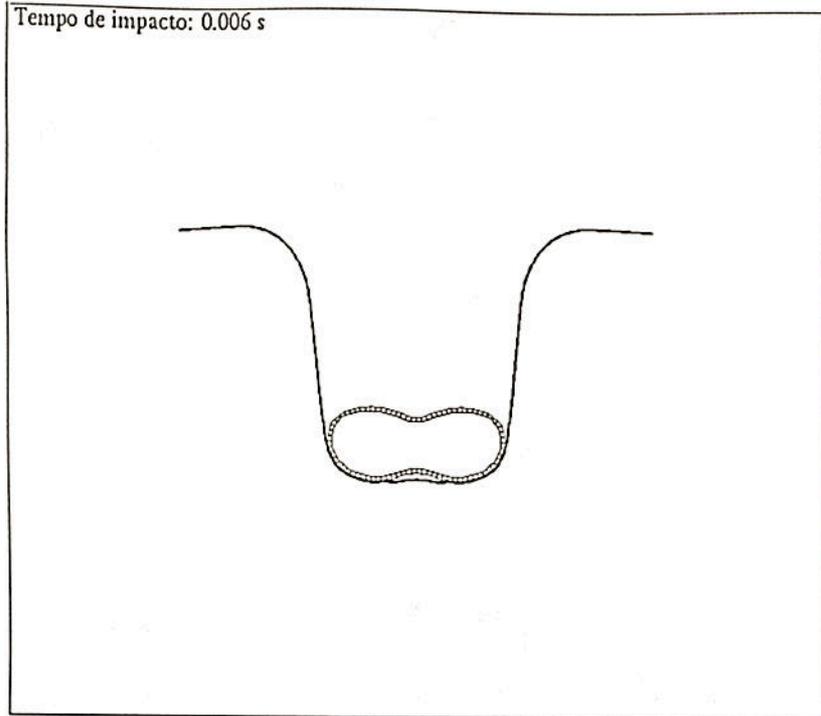
TABELA (7.2.1.1)  
Performace do impacto tubo/placa.

Este mesmo exemplo foi ainda refeito, agora modificando a lei elastoplástica ( $H = 800$  MPa). A figura (7.2.1.6) fornece as deformadas obtidas. Neste caso, o tubo sofre forte deformação plástica.

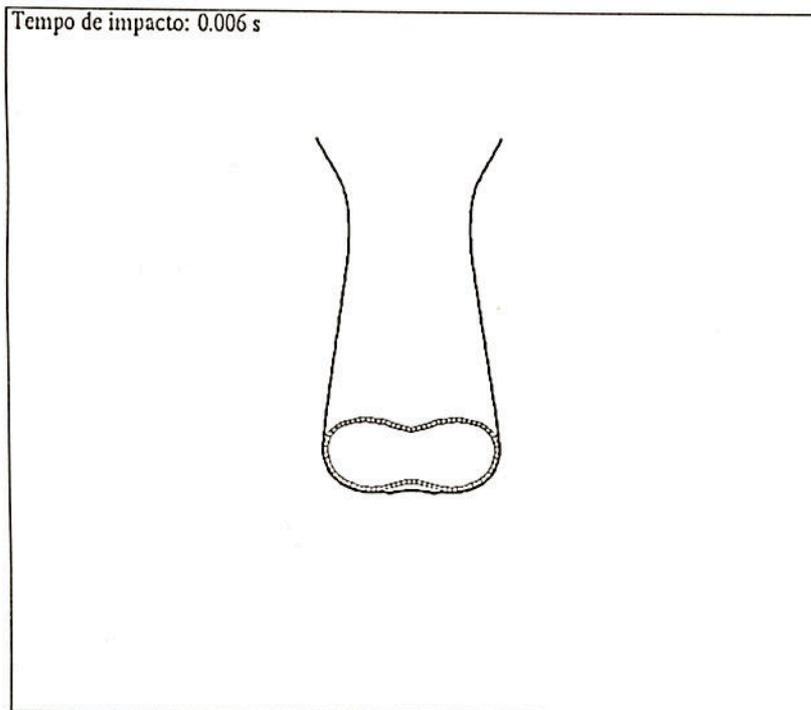


**Figura (7.2.1.6)**  
Deformadas: a)  $t = 0.001$  s; b)  $t = 0.003$  s

c)

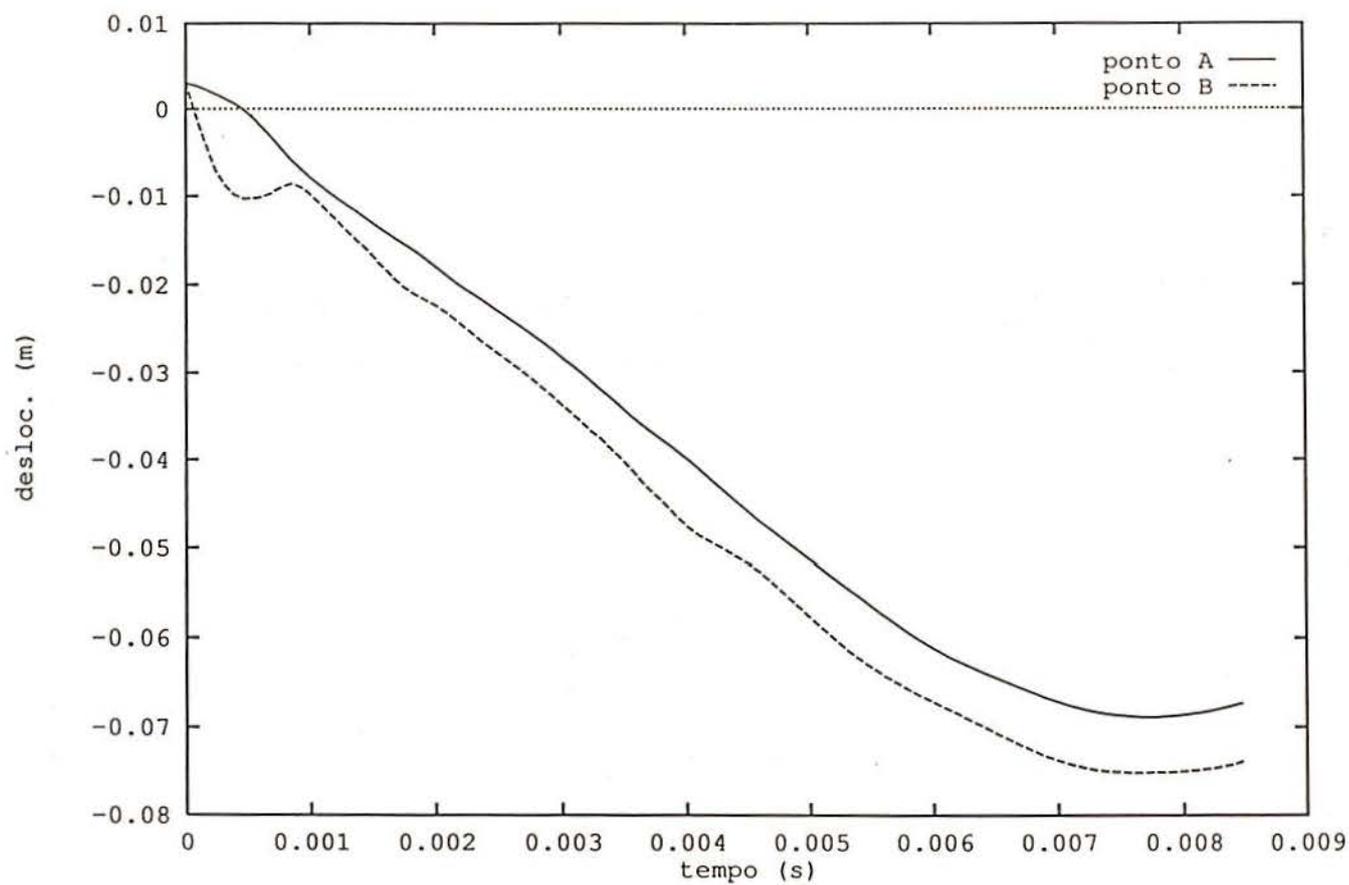


d)



**Figura (7.2.1.6)**  
**Deformadas: c)  $t = 0.006$  s; d)  $t = 0.008$  s**

Na figura (7.2.1.7) são também fornecidas os valores das posições dos nós A e B e novamente observa-se um rebote próximo aos 0.0075 segundos.



*Figura (7.2.1.7)*  
*Posição dos nós A e B (fig. (7.2.1.2)) com o tempo.*

## 7.2.2 IMPACTO EM UMA TURBINA

O segundo exemplo testado, trata da simulação de um acidente em uma turbina de usina nuclear, na qual o rotor da turbina se rompe e atinge as carcaças da mesma. O caso mais crítico (ver /S5/) é aquele no qual o rotor rompe-se em 3 partes, caso aqui analisado.

Uma visão geral da turbina é mostrada na figura (7.2.2.1):

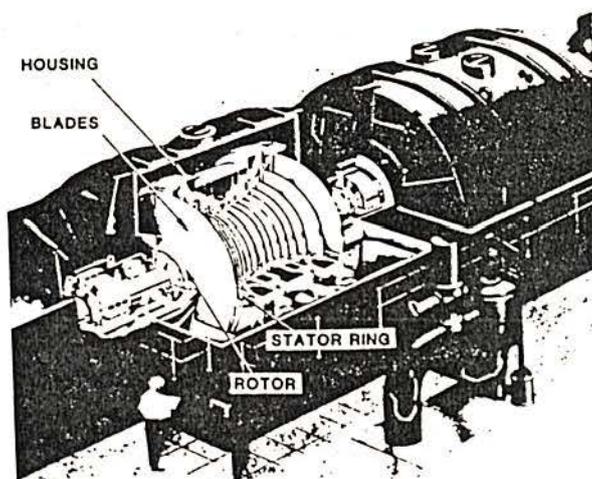


Figura (7.2.2.1)  
Visão em corte da turbina real.

Testes experimentais foram feitos para simular esta condição de acidente pela Sandia National Laboratories /S5/, sendo a geometria da turbina bastante simplificada, como mostra a figura (7.2.2.2).

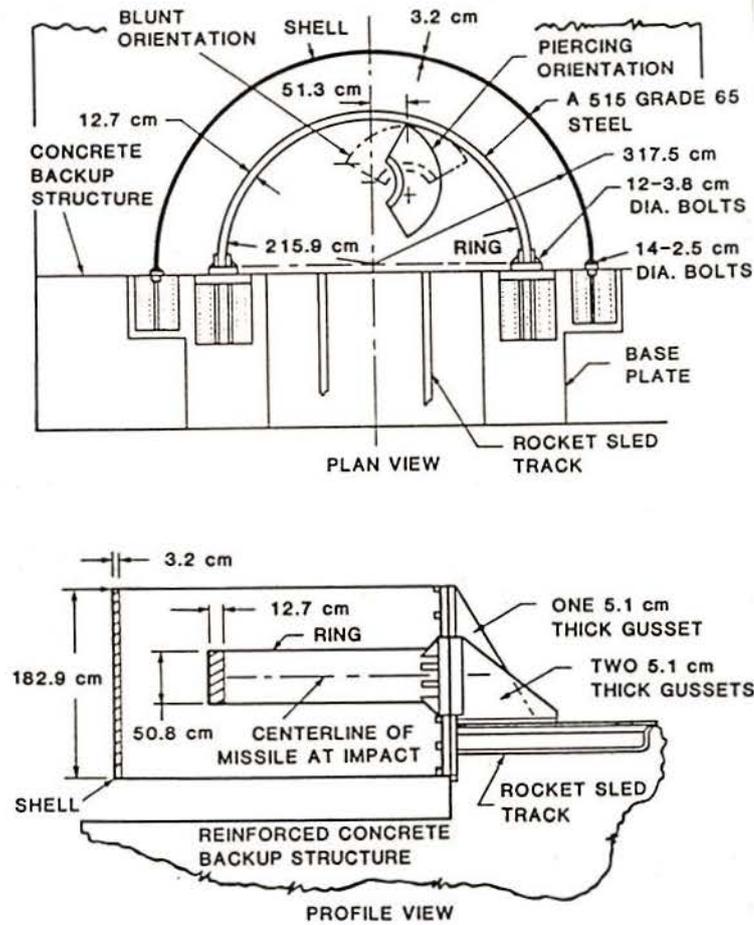
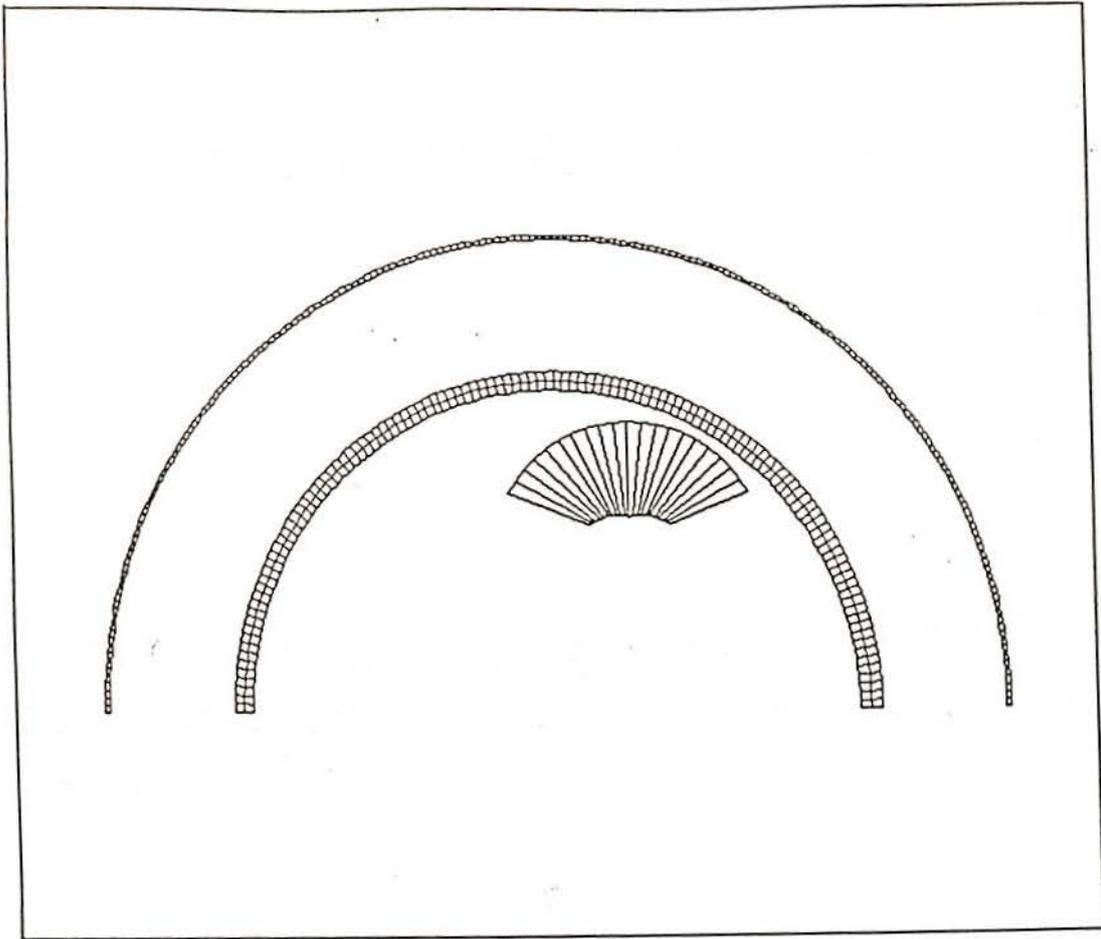


Figura (7.2.2.2)  
Geometria do teste experimental /S5/.

Num acidente hipotético, o rotor se desprende do eixo com um movimento rotacional mais translacional, podendo atingir a carcaça sob diferentes ângulos de orientação. A orientação estudada neste exemplo é indicada na figura (7.2.2.3), e consiste na condição de impacto mais conservativa (máxima absorção). Esta figura indica também o modelo empregado na presente análise. Portanto este sofreu uma simplificação adicional, sendo o modelo 3D substituído por um modelo 2D (estado plano de deformações).



*Figura (7.2.2.3)  
Modelo de elementos finitos empregado.*

No teste experimental, o movimento rotacional do projétil foi desconsiderado. Mesmo assim, sua energia rotacional foi incluída na análise através de um aumento na sua velocidade translacional, que vale então 151 m/s.

O material empregado na análise é um aço ASTM A515 Grau 65 trabalhado à frio. Este material possui as seguintes características:

$\sigma_v = 241 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{ruptura} = 448 \text{ MPa}$   
Alongamento: 26 %

As figuras (7.2.2.4a-d) fornecem as deformadas obtidas em diferentes passos de tempo, que assemelha-se consideravelmente com a resposta experimental (ver figuras (7.2.2.5a-f)). Deve-se aqui considerar que no tempo 0.0095 segundos, aproximadamente, existe o rompimento dos parafusos da casca interna do lado direito. Este fato foi também considerado no modelo.

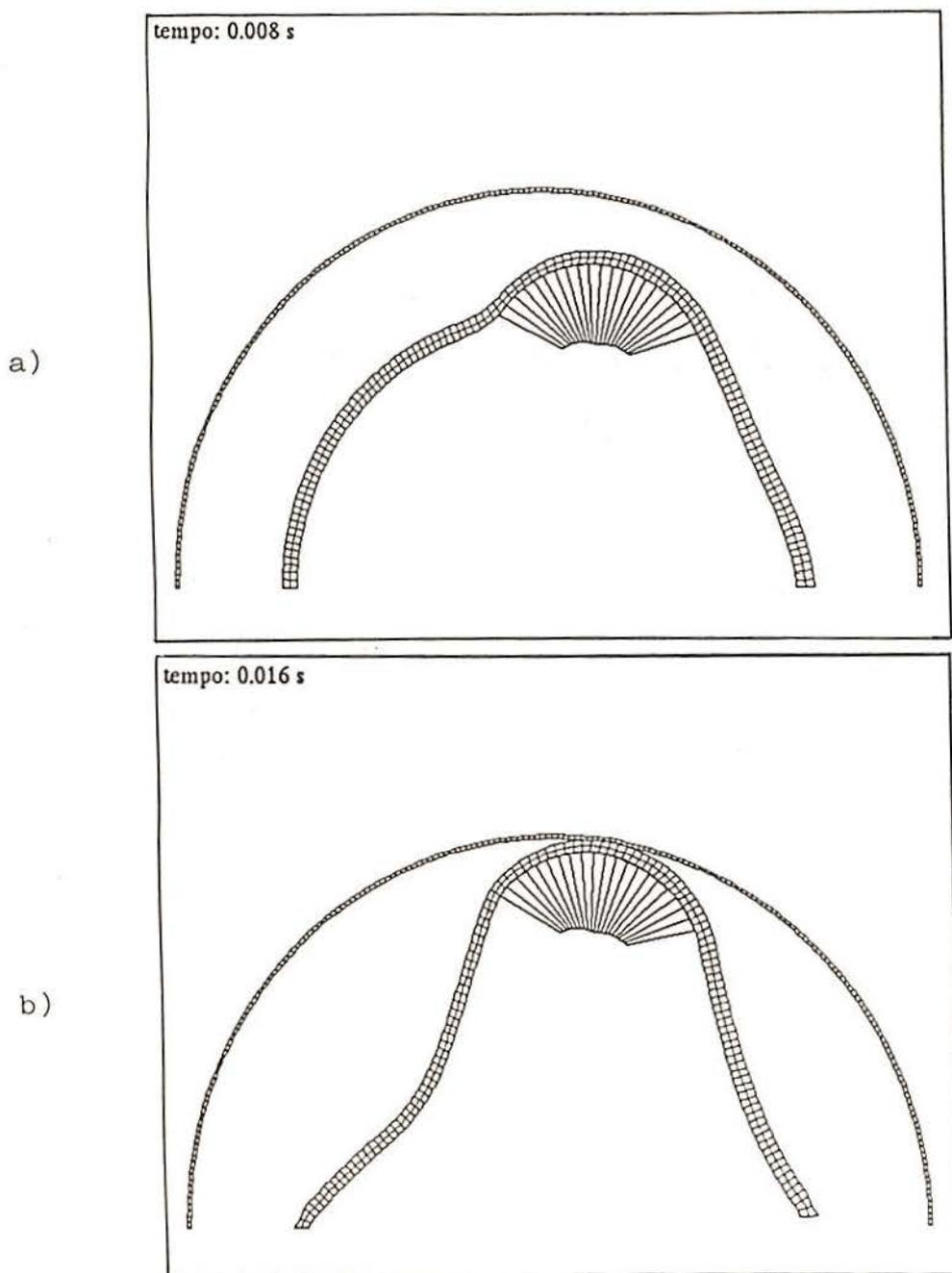
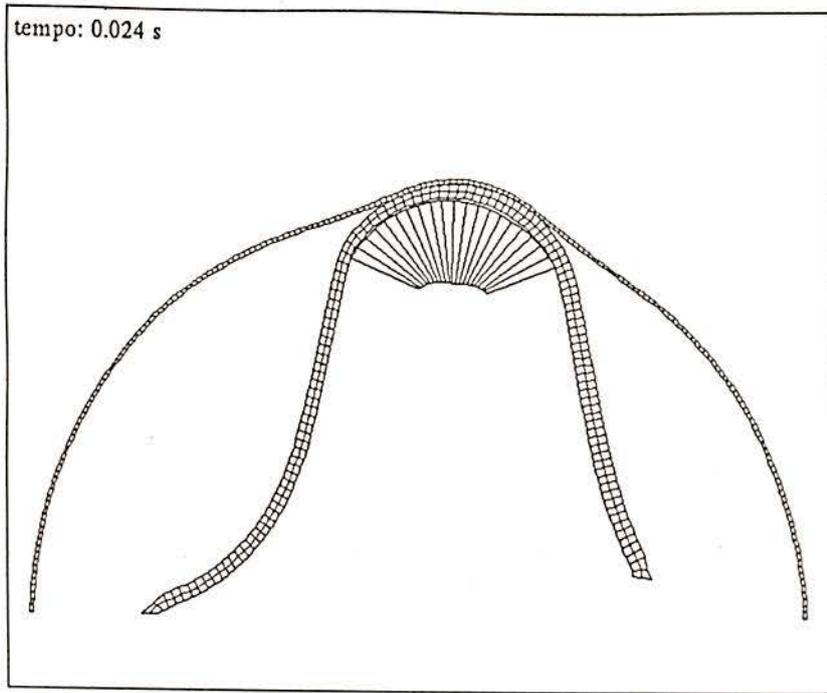


Figura (7.2.2.4)  
Deformadas

c)



d)

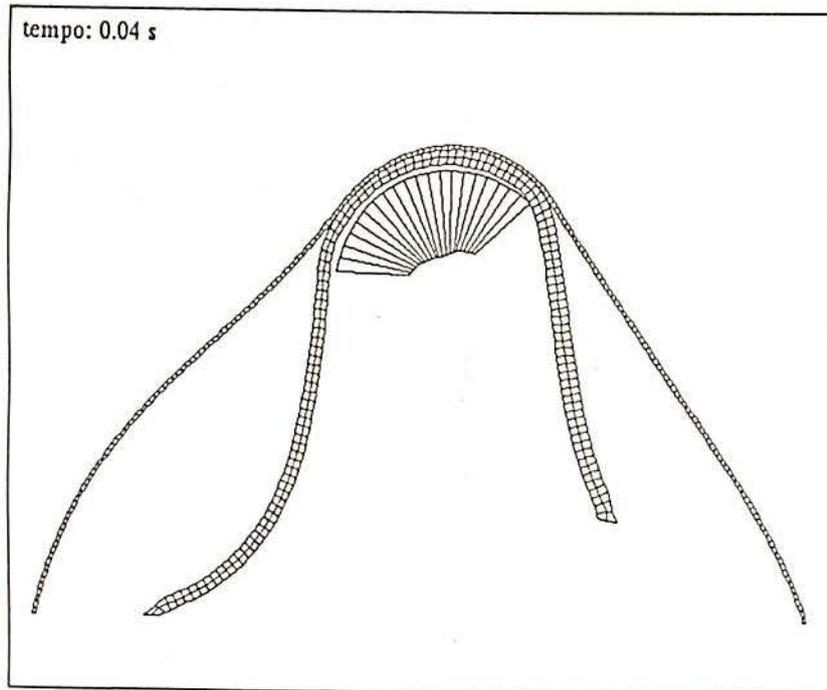


Figura (7.2.2.4)  
Deformadas

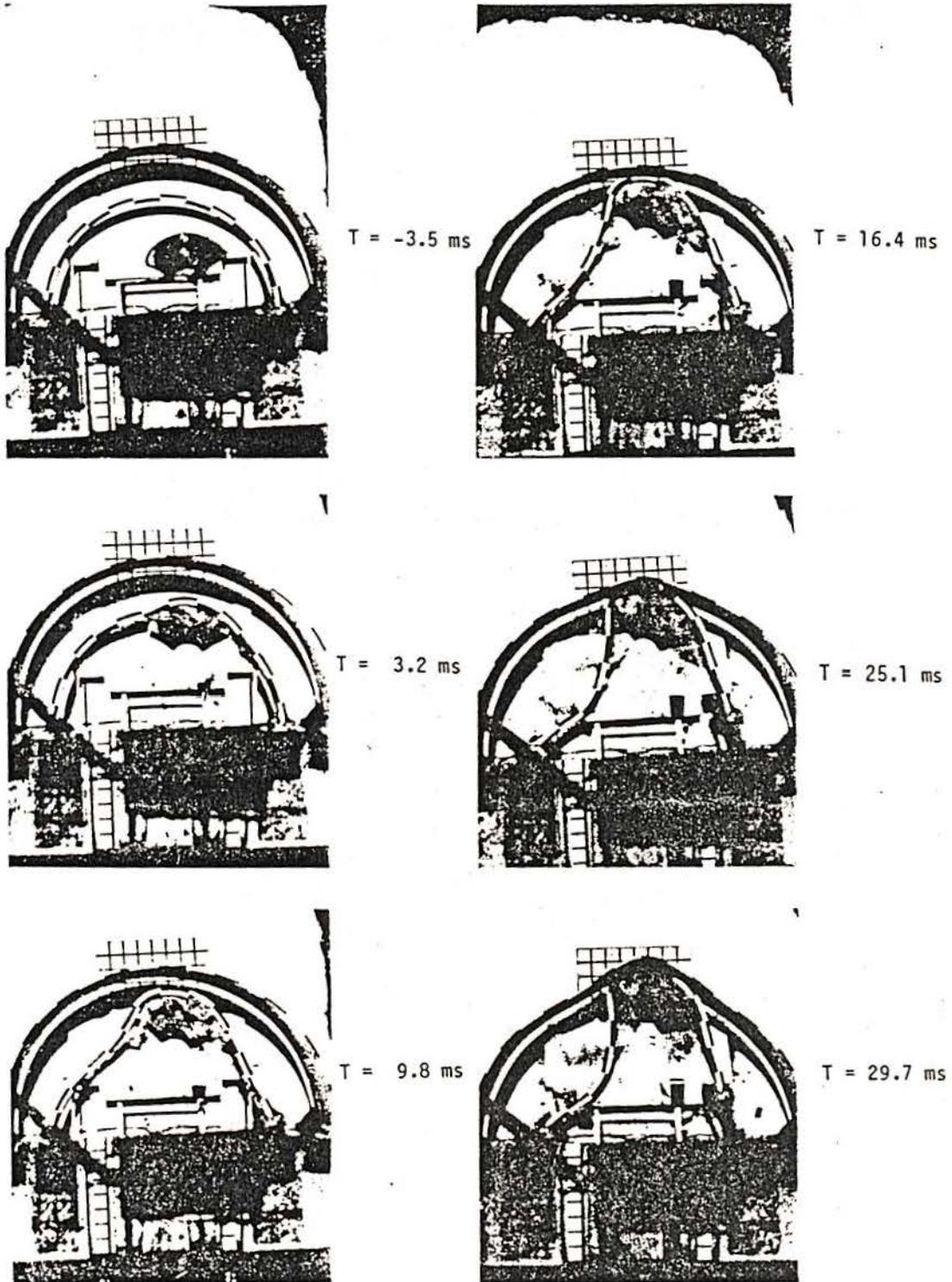


Figura (7.2.2.5)  
Deformadas (experimentais)

Ainda nas figuras (7.2.2.6a,b) é indicado os valores das tensões de Von Mises para dois instantes do impacto. Observa-se que já no tempo 0.008 segundos, os valores de tensão na zona do impacto são bem mais elevados que a tensão de ruptura do metal. Como esta é uma zona submetida à elevada taxa de deformação, a ruptura não ocorre na zona provavelmente pelo ganho de resistência do material nestas condições.

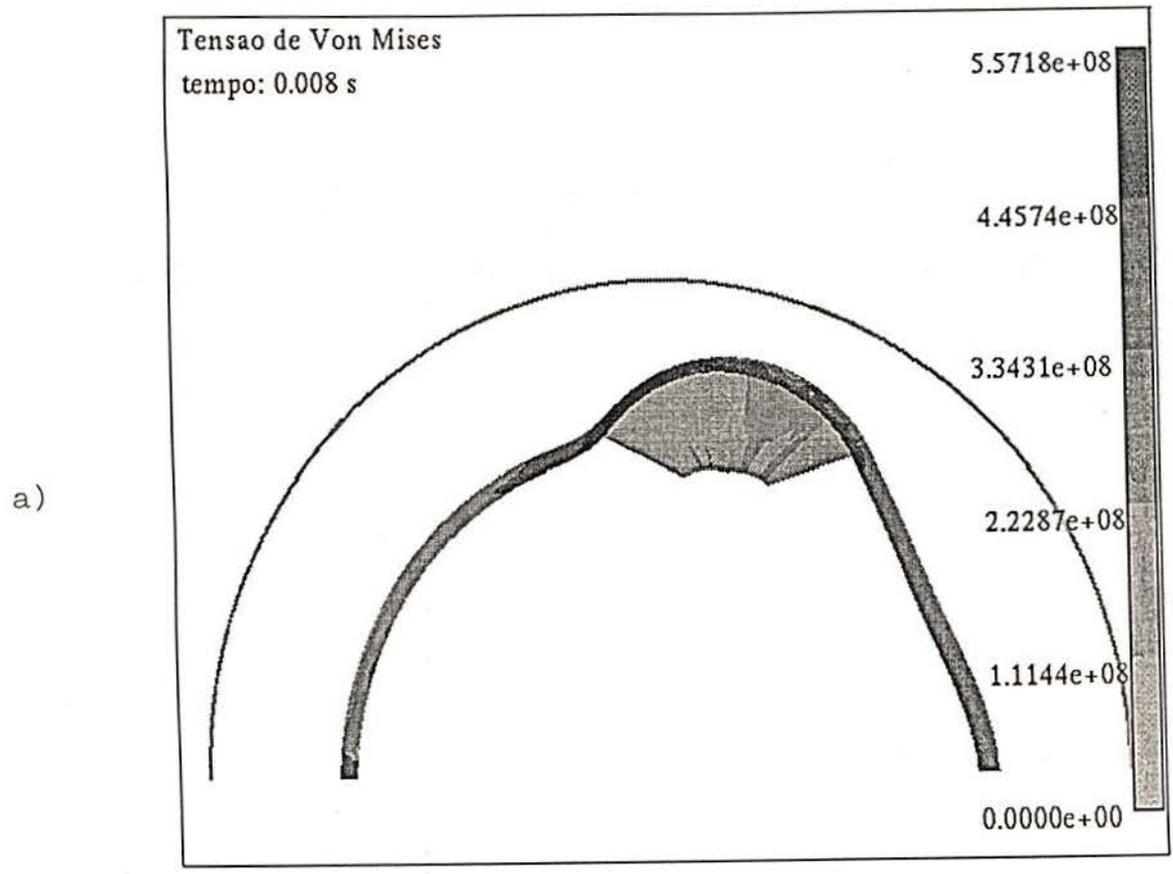
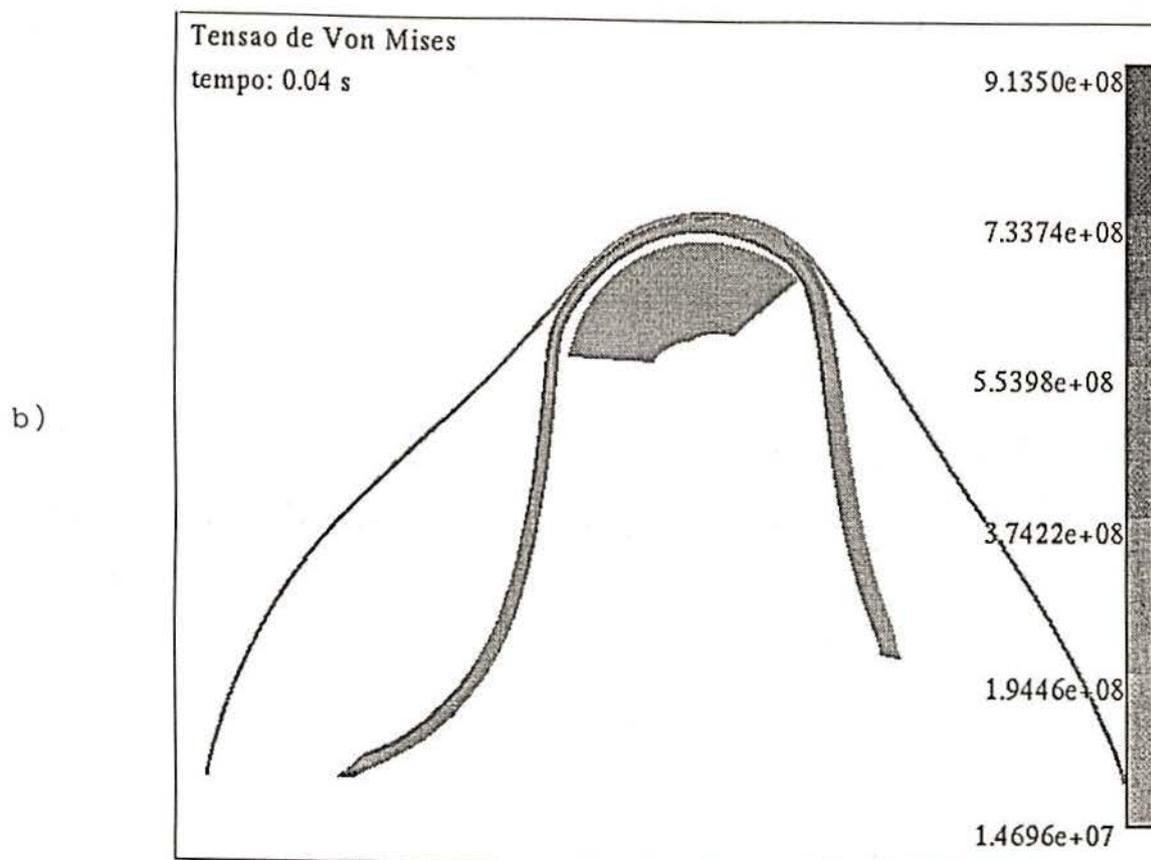
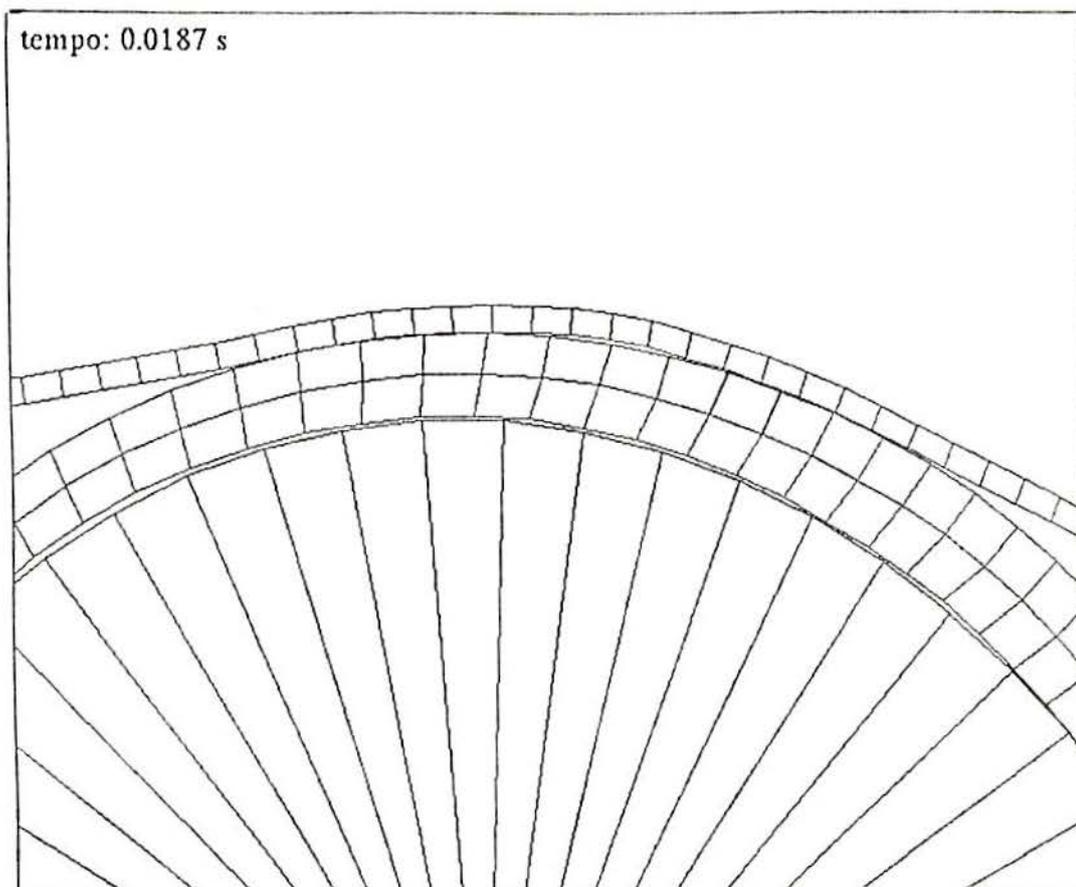


Figura (7.2.2.6)  
Tensões de Von Mises



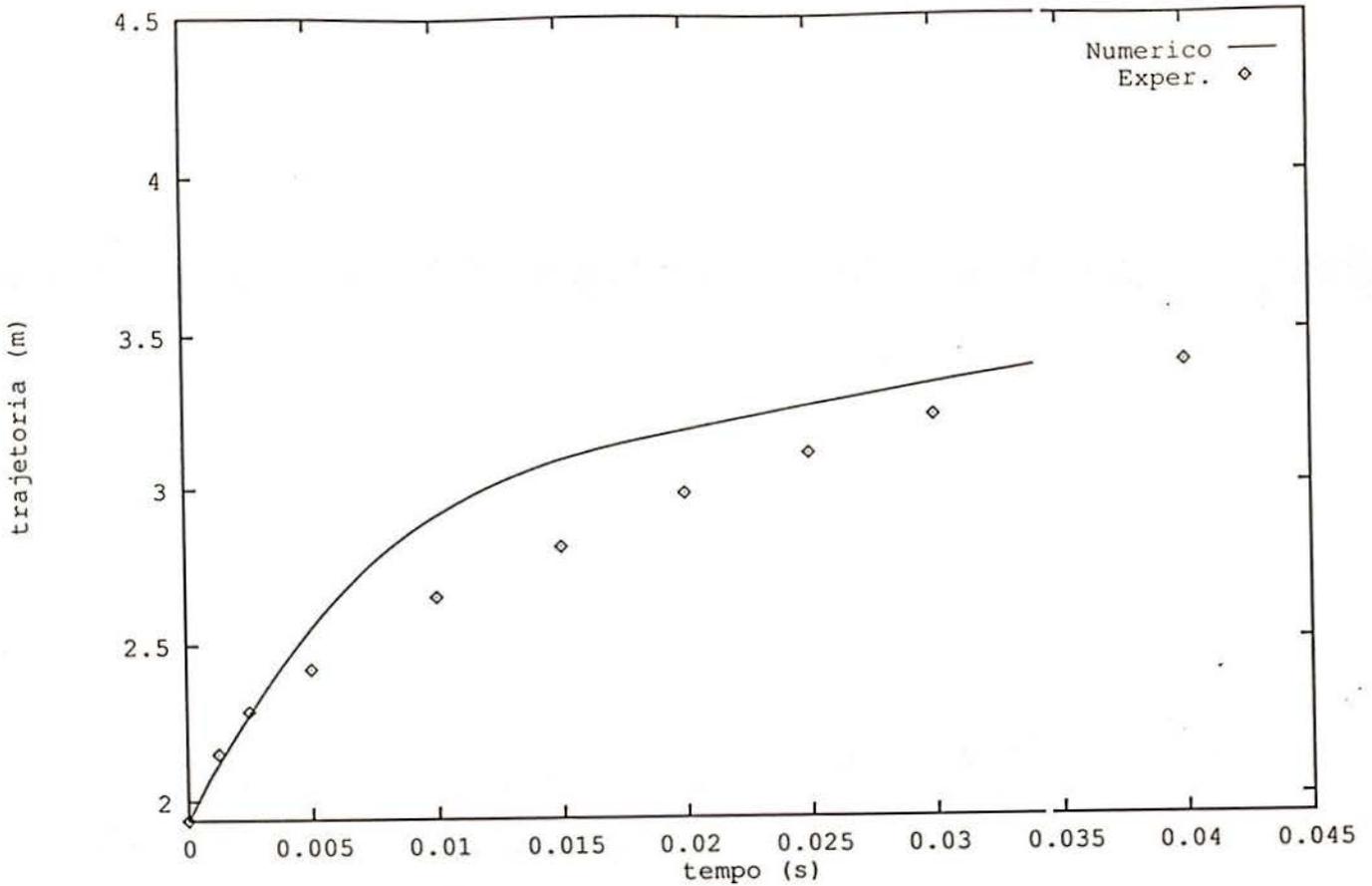
*Figura (7.2.2.6)*  
*Tensões de Von Mises*

Na figura (7.2.2.7) mostra-se um 'zoom' da região do impacto, num momento em que a casca intermediária fica comprimida entre o projétil e a casca externa. Não observa-se portanto interpenetrações dos corpos.



*Figura (7.2.2.7)*  
Zoom da zona de contato

A figura (7.2.2.8) fornece a trajetória do projétil no tempo nos casos experimental e teórico.



**Figura (7.2.2.8)**  
Trajetórias do projétil (experimental e numérico)

Finalmente na tabela (7.2.2.1) o número de etapas de cálculo é fornecido.

NUM. DE ELEM.	NUM. ITER.	NUM. PASSOS
460	- x -	11776

**TABELA (7.2.2.1)**  
Performace do impacto na turbina.

### 7.3 O ELEMENTO VOLUMÉTRICO 3-D

Para verificar a implementação do elemento volumétrico, três exemplos foram feitos. Um mono elemento em cisalhamento, uma viga em flexão extensão e o impacto de uma barra sobre uma superfície plana. Chama-se a atenção neste item de que os resultados pretendem fundamentalmente estabelecer uma comparação com a versão 2D do sistema METAFOR, já amplamente testada.

#### 7.3.1 MONO-ELEMENTO EM CISALHAMENTO

Um elemento cúbico, de dimensões unitárias, é deformado em cisalhamento segundo a figura (7.3.1.1). Os 4 nós da base são engastados enquanto que os outros quatro têm um deslocamento imposto segundo x e deslocamento zero em y e z. Neste caso a relação entre a configuração inicial ( $\underline{X}$ ) e final ( $\underline{x}$ ) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= X_1 + e(t) X_2 \\x_2(t) &= X_2 \\x_3(t) &= X_3\end{aligned}$$

O deslocamento segundo  $x_1$  é 10 vezes o comprimento do lado (ver figura (7.3.1.1)).

Pode-se encontrar que a solução analítica para este caso, empregando a derivada de Jaumann, vale (ver /M2/):

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = G (1 - \cos e(t)) \quad (7.3.1.1)$$

$$\sigma_{12} = G \sin e(t) \quad (7.3.1.2)$$

onde  $G = E/2(1+\nu)$

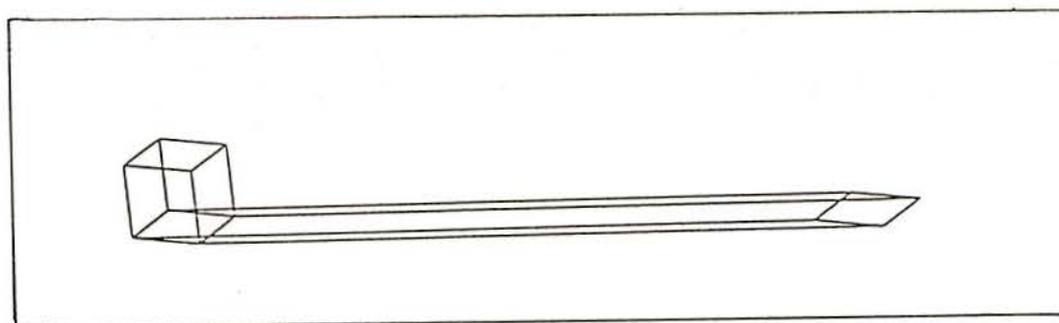
$E$  = módulo de elasticidade ;  $\nu$  = coeficiente de Poisson

Para um material com as seguintes constantes elásticas:

$$E = 20000 \text{ N/cm}^2$$

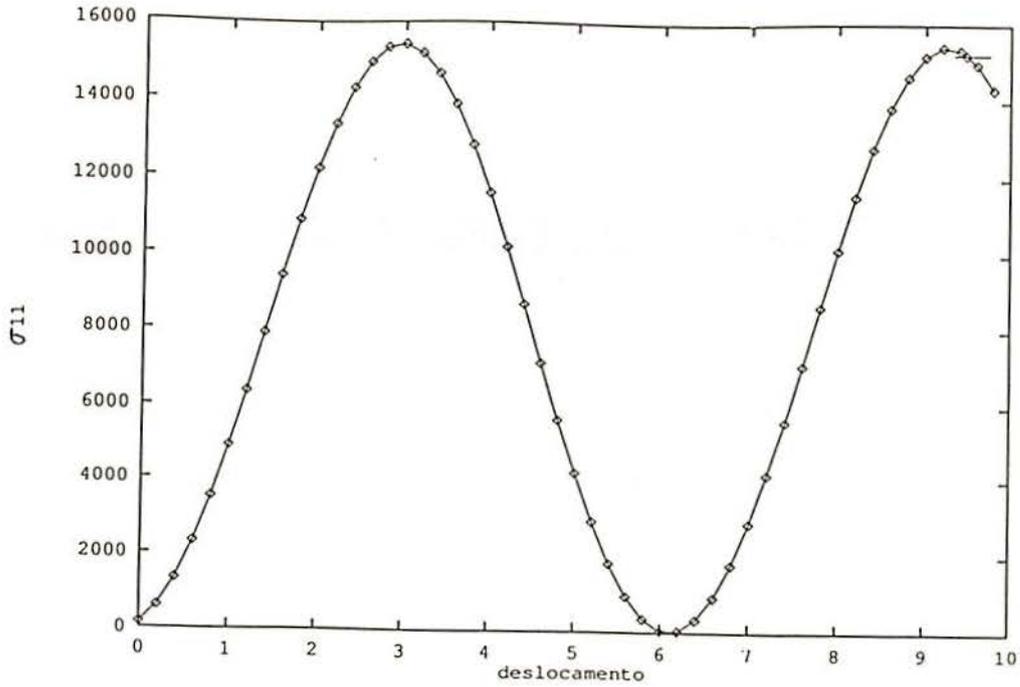
$$\nu = 0.3$$

é aplicada deformação acima. A deformada é mostrada na figura (7.3.1.1).

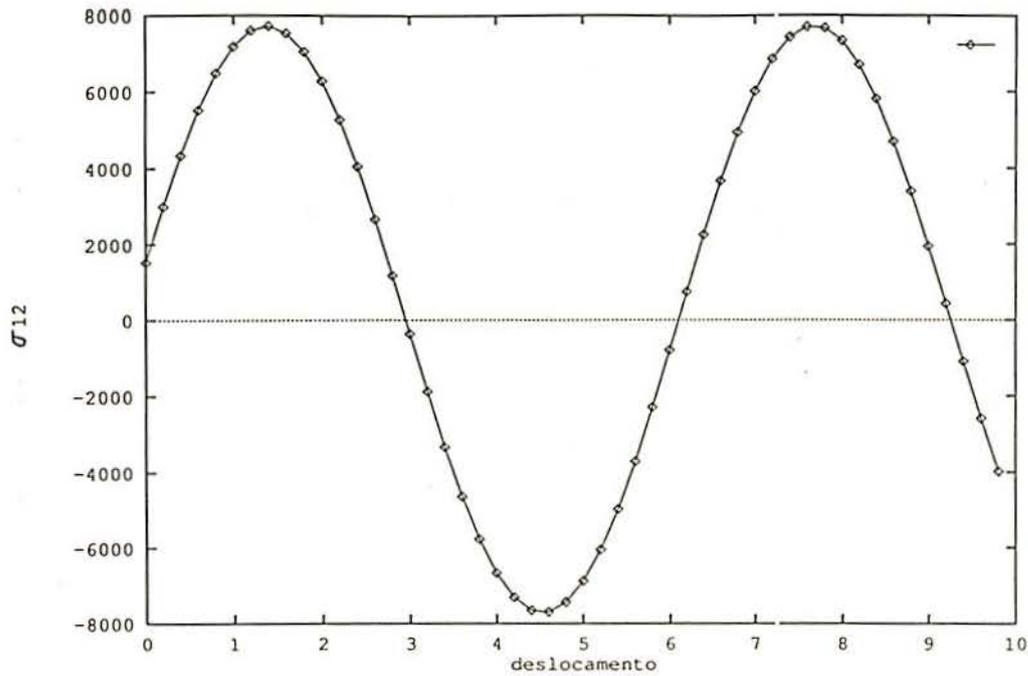


*Figura (7.3.1.1)*  
*Configuração inicial e após o carregamento*

Encontra-se aqui as oscilações previstas na teoria, como mostram as figuras (7.3.1.2) e (7.3.1.3).



**Figura (7.3.1.2)**  
Tensão  $\sigma_{11}$  x deslocamento (50 passos de tempo).  
Cisalhamento de um mono-elemento. Caso elástico.



**Figura (7.3.1.3)**  
Tensão  $\sigma_{12}$  x deslocamento (50 passos de tempo).  
Cisalhamento de um mono elemento. Caso elástico.

Se por outro lado utiliza-se um modelo constitutivo elasto-plástico, com endurecimento linear e com os parâmetros:

$$E = 1000 \text{ N/cm}^2$$

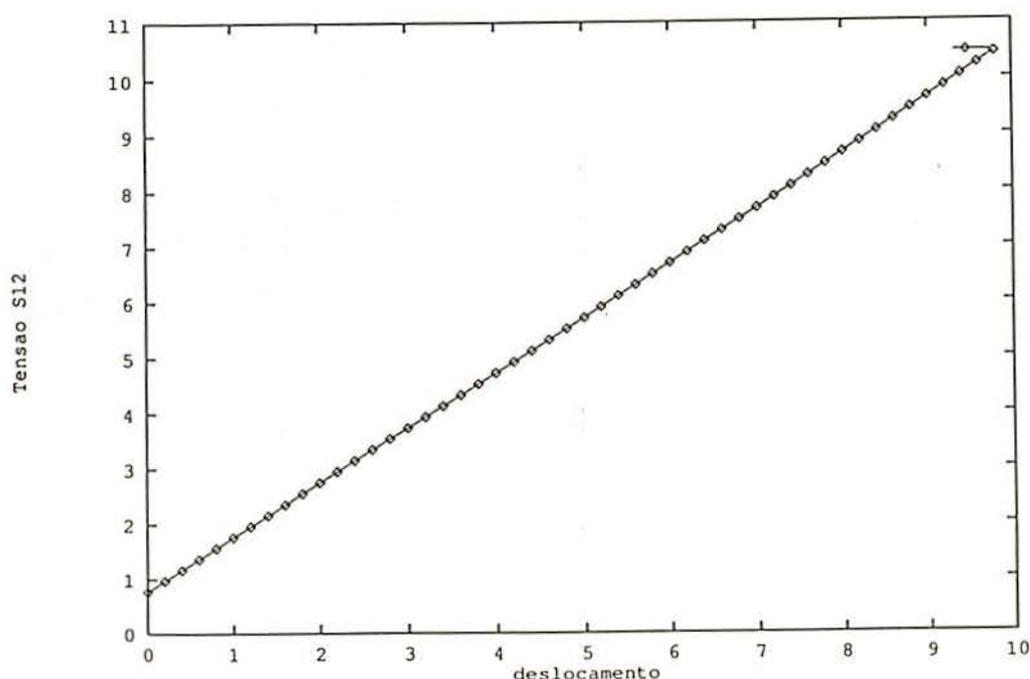
$$\sigma_v = 1 \text{ N/cm}^2$$

$$h = 3 \text{ N/cm}^2$$

pode-se dizer que (ver /P1/), a tensão desviadora (componente  $S_{12}$ ) vale:

$$S_{12} = 1/(3)^{-1/2} \sigma_v + 1/3 h e(t) \quad (7.3.1.3)$$

Neste caso as oscilações desaparecem, como se vê na figura (7.3.1.4):



*Figura (7.3.1.4)*  
*Tensão  $s_{12}$  x deslocamento (50 passos de tempo)*  
*Mono-elemento em cisalhamento. Caso elasto-plástico.*

### 7.3.2 VIGA EM FLEXÃO/EXTENSÃO

Este exemplo é interessante pois têm-se efeitos combinados de extensão e flexão, além de elementos em pequenas e grandes deformações. Além disto é possível comparar com resultados em 2D (estado plano de deformações).

A malha empregada é mostrada na figura (7.3.2.1).

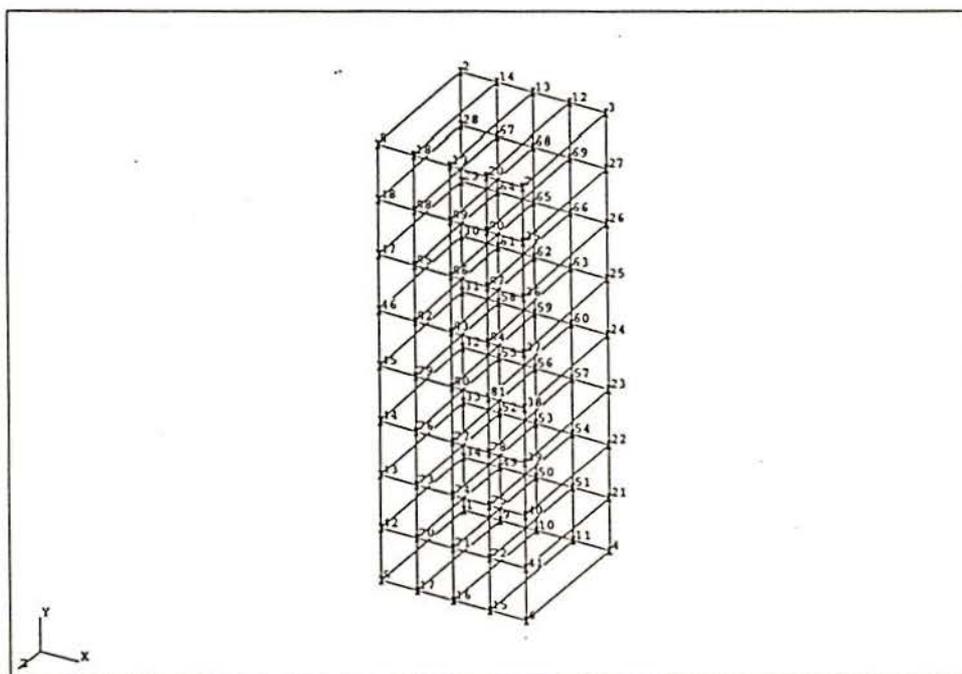


Figura (7.3.2.1)  
Malha antes da aplicação da carga

As características da lei elasto-plástica são fornecidas abaixo:

$$E = 200000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_v = 250 \text{ N/mm}^2$$

$$H = 1000 \text{ N/mm}^2$$

Todos os nós são fixados segundo  $z$ ; os nós da base são ainda fixados na direção  $y$ . Os nós 4 e 6 da base são engastados. O carregamento é aplicado nos nós 2 e 8 e vale:

$$x = 1 \text{ mm}$$

$$y = 0$$

A seção da viga é um quadrado  $1 \times 1 \text{ mm}$  e seu comprimento é  $3 \text{ mm}$ . A figura (7.3.2.2) mostra a deformada obtida.

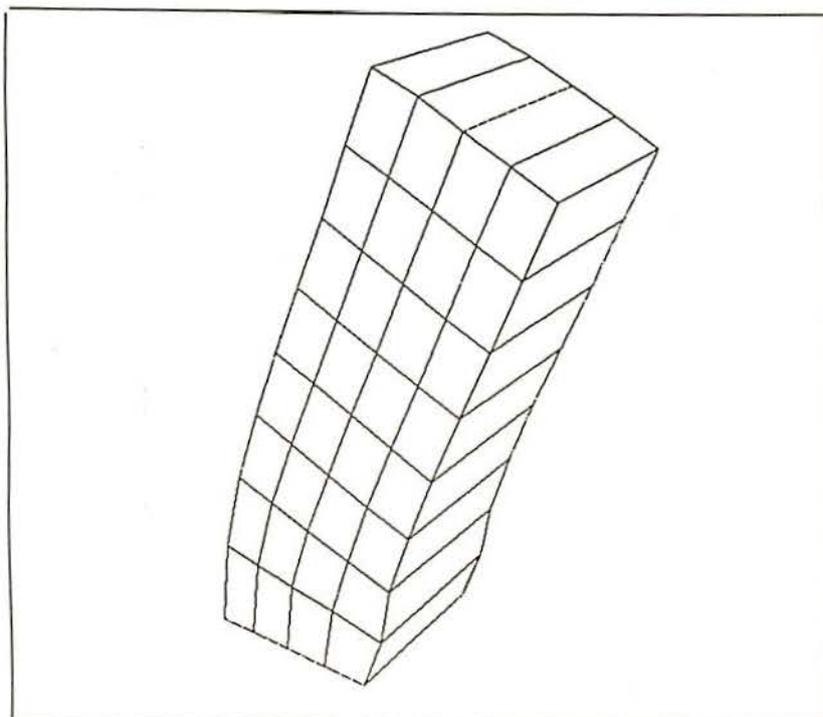


Figura (7.3.2.2)  
Deformada da viga após o carregamento

Os valores de deformação plástica equivalente são mostrados na figura (7.3.2.3).

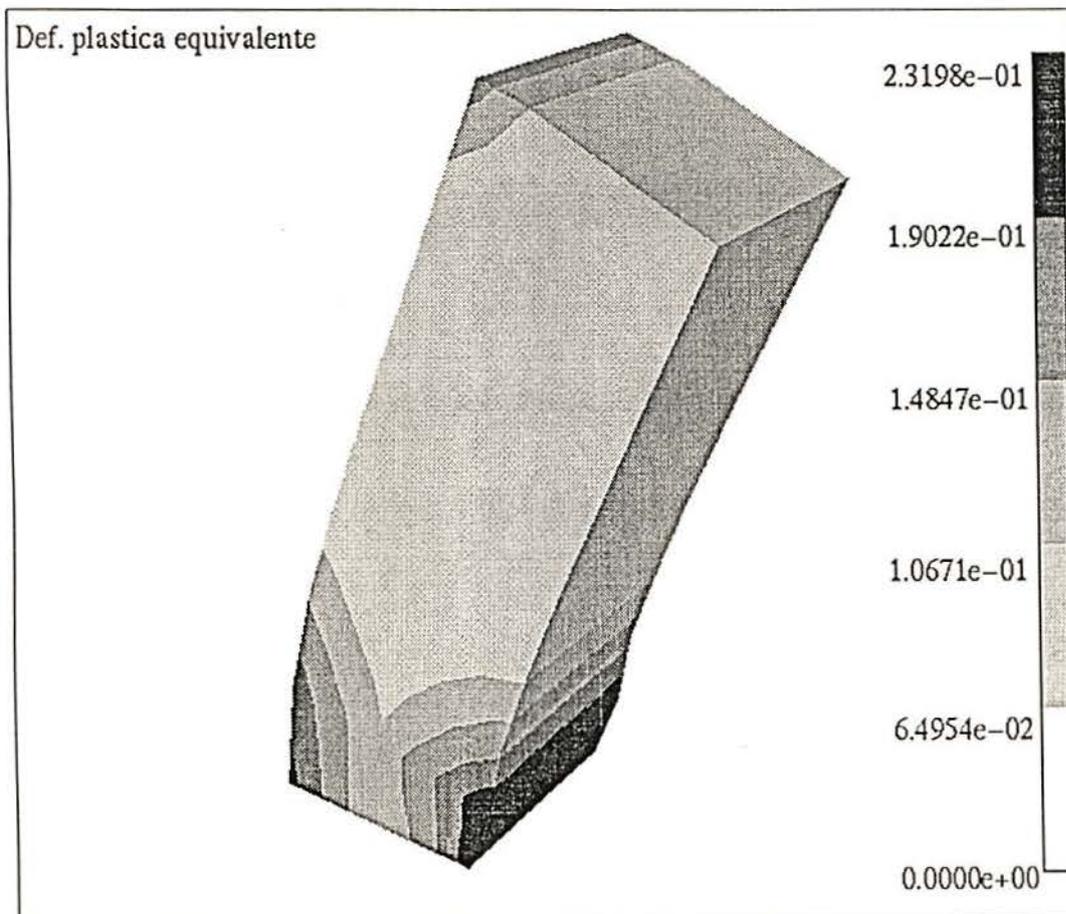
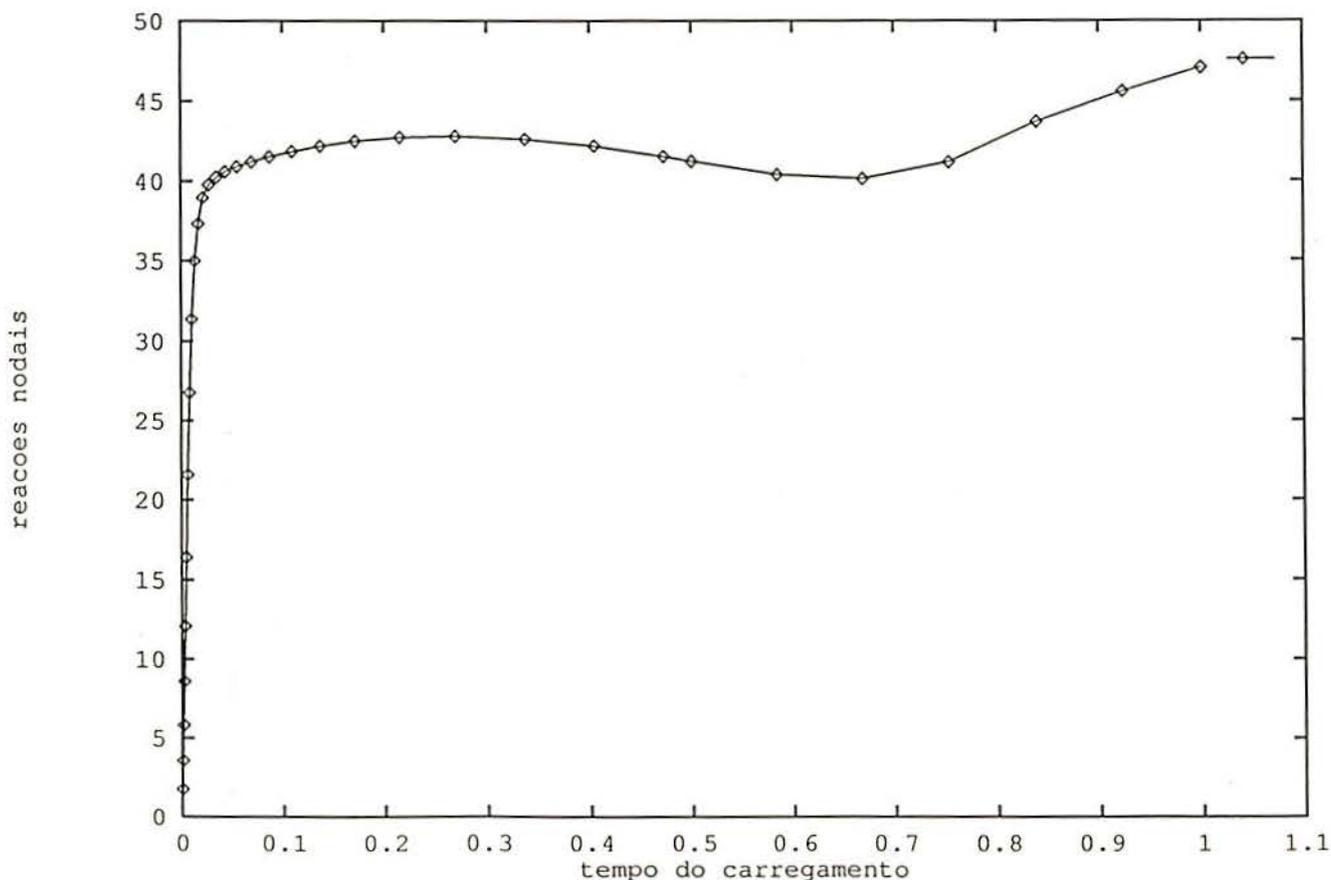


Figura (7.3.2.3)  
Deformação plástica equivalente

Na figura (7.3.2.4) é mostrado a evolução das reações (somadas) dos nós 2 e 8 onde é aplicado o carregamento. No início do carregamento os efeitos de flexão são predominantes frente aos de tração. Com a plastificação na zona do engaste uma rótula plástica forma-se levando ao ramo descendente que se observa na evolução das reações após a plastificação. Posteriormente o material recupera rigidez quando os efeitos de tração passam a ser importantes, como mostra o aumento nas reações na figura (7.3.2.4).



*Figura (7.3.2.4)*  
Evolução das reações nos nós 2 e 8 (somadas) com o tempo.

Estes resultados são os mesmos obtidos pela versão 2D do sistema METAFOR /P1/, em estado plano de deformação, o que indica que o elemento 3D foi implementado corretamente segundo a metodologia do sistema. Igualmente, à nível de taxa de convergência, os resultados obtidos em 3D são bem próximos daqueles obtidos em 2D (número de passos de tempo = 34; número de iterações = 53), como se vê na tabela (7.3.2.1).

NUM. DE ELEM.	NUM. ITER.	NUM. PASSOS
32	66	33

TABELA (7.3.2.1)  
Performace da viga em flexo-tração

### 7.3.3 IMPACTO DE UMA BARRA SOBRE UMA SUPERFÍCIE RÍGIDA

O caso estudado aqui é conhecido da literatura como a 'barra de Taylor'. É o caso do impacto de uma barra cilíndrica sobre uma superfície indeformável. A geometria vale:

$$h = 32.4 \text{ mm}$$

$$\varnothing = 7.4 \text{ mm}$$

As propriedades do material (cobre) são:

$$E = 117 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

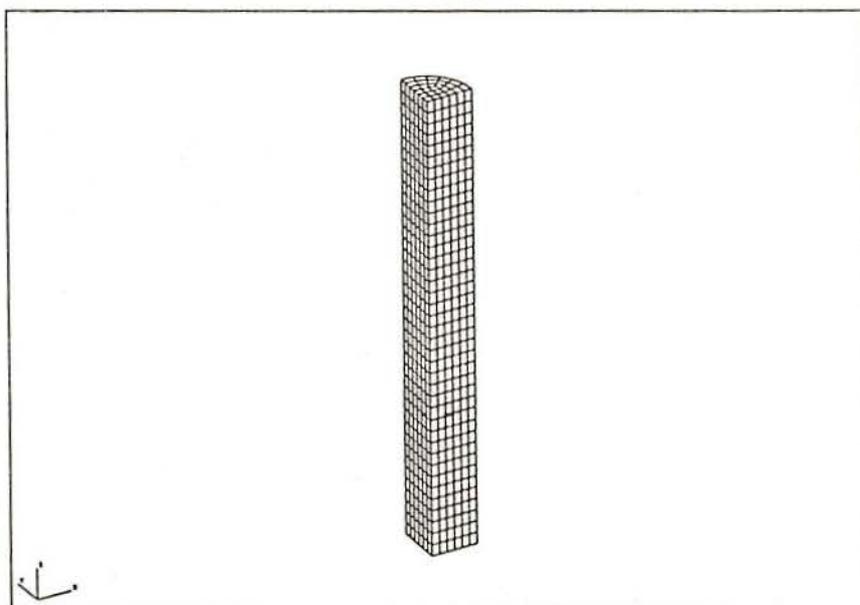
$$\nu = 0.35$$

$$\rho = 8930 \text{ Kg/m}^3$$

$$\sigma_v = 400 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$H = 100.08 \text{ N/m}^2$$

O impacto se produz em  $80 \mu\text{s}$  à uma velocidade de  $227 \text{ m/s}$ . Discretiza-se apenas uma parte da estrutura, devida à simetria, como se vê na figura (7.3.3.1). Utiliza-se aqui o método explícito de integração das equações de equilíbrio como viu-se no parágrafo (2.2).

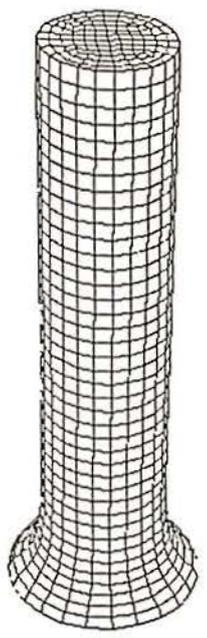


*Figura (7.3.3.1)*  
*Discretização da barra de Taylor tridimensional*

A figura (7.3.3.2) mostra a evolução da deformada ao longo do impacto.

Impacto da barra de Taylor  
tempo: 0.00002 seg.

a)



Impacto da barra de Taylor  
tempo: 0.00005 seg.

b)

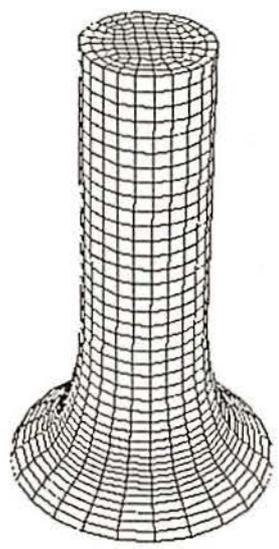
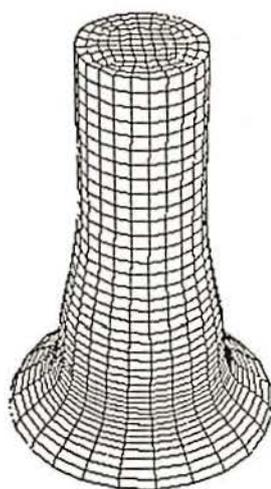


Figura (7.3.3.2)  
Deformada

a) tempo: 20  $\mu$ s; b) tempo: 50  $\mu$ s

Impacto da barra de Taylor  
tempo: 0.00008 seg.



*Figura (7.3.3.2)*  
*c) Deformada tempo 80  $\mu$ s*

A figura (7.3.3.3) mostra uma outra vista da deformada final (tempo  $80\mu\text{s}$ ) com os valores de deformação plástica equivalente.

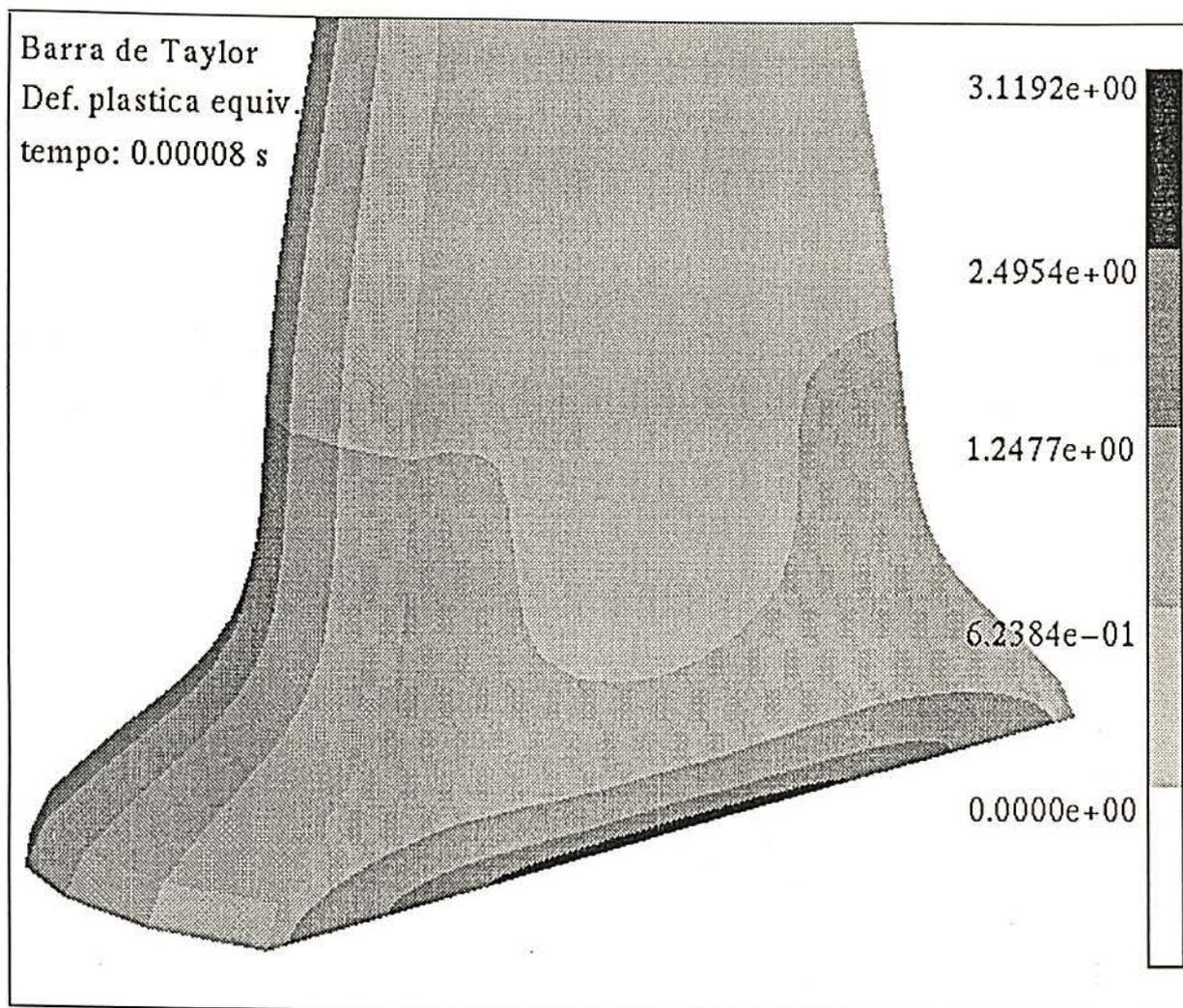
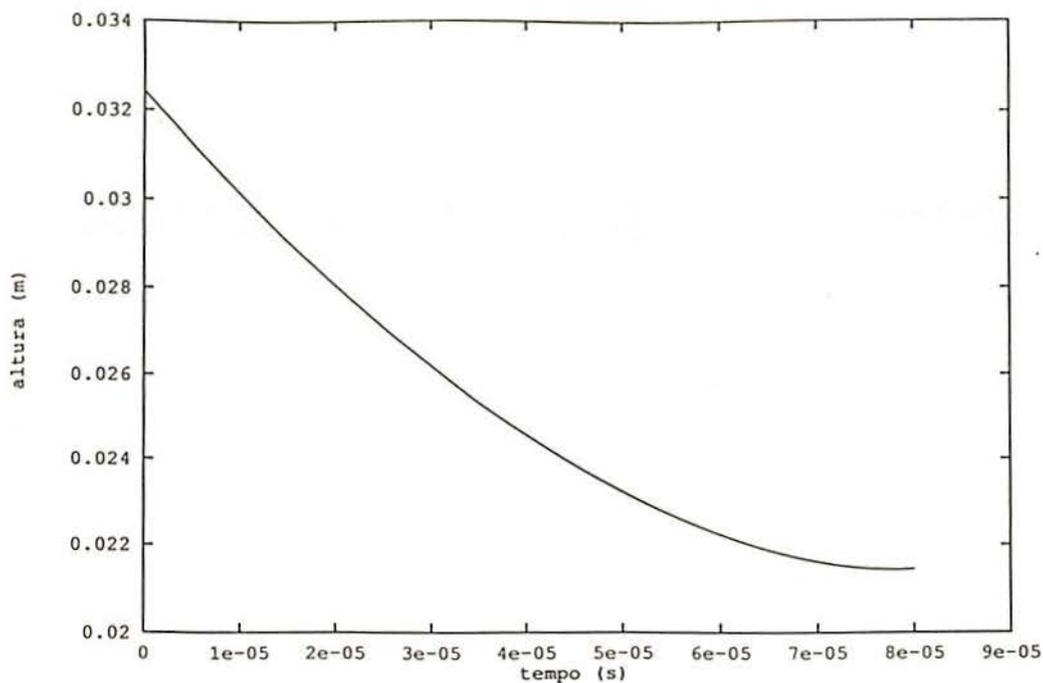


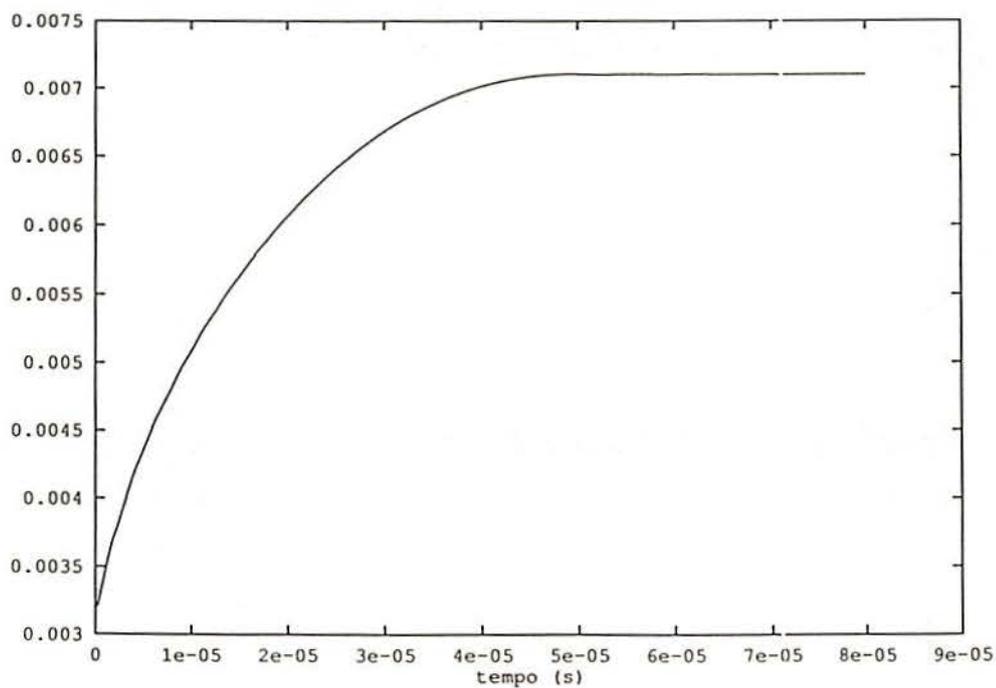
Figura (7.3.3.3)  
Deformação plástica equivalente. (Tempo:  $80\mu\text{s}$ )

As figuras (7.3.3.4a,b) fornecem a variação no tempo do raio e da altura da barra, respectivamente. Observa-se que estes valores estabilizam-se de modo que o tempo de análise foi suficiente.

a)



b)



*Figura (7.3.3.4)*

*(a) Variação da altura da peça com o tempo.*

*(b) Variação do raio com o tempo.*

A tabela (7.3.3.1) indica algumas comparações com a versão 2D do METAFOR /S1/ e também com o DYNA-2D /H1/, para o mesmo teste.

PROGRAMA	DEF. PL. MAX.	R FINAL	H FINAL
METAFOR 3D	3.119	0.0070998	0.02144
METAFOR 2D	3.122	0.007126	0.02135
DYNA 2D	-x-	0.007127	0.02147

TABELA (7.3.3.1)

Comparações com o METAFOR 2D e com o DYNA 2D

Outros resultados são mostrados na tabela (6.2.3.2).

NUM. DE ELEM.	NUM. ITER.	NUM. DE PASSOS
1080	- x -	7876

TABELA (7.3.3.2)

Performace da barra de Taylor

#### 7.4 CONTATO TRIDIMENSIONAL ENTRE UM CORPO RÍGIDO E OUTRO FLEXÍVEL

O objetivo desta seção é novamente comparar performance e resultados da versão 3D com as da versão 2D, previamente testada. Quando possível, comparações são realizadas com dados obtidos na literatura. Basicamente três geometrias de superfícies de contato são empregadas: Superfícies planas; com simples curvatura; com dupla curvatura. Estes casos foram tratados com e sem atrito.

##### 7.4.1 INDENTAÇÃO POR UM CILINDRO

O primeiro exemplo estudado aqui trata-se da indentação de um cilindro rígido sobre uma base flexível (ver figura (7.4.1.1)), cujas dimensões são:

$r = 0.8 \text{ cm}$   
 $b = 2 \text{ cm}$   
 $a = 1 \text{ cm}$   
 (Espessura unitária.)

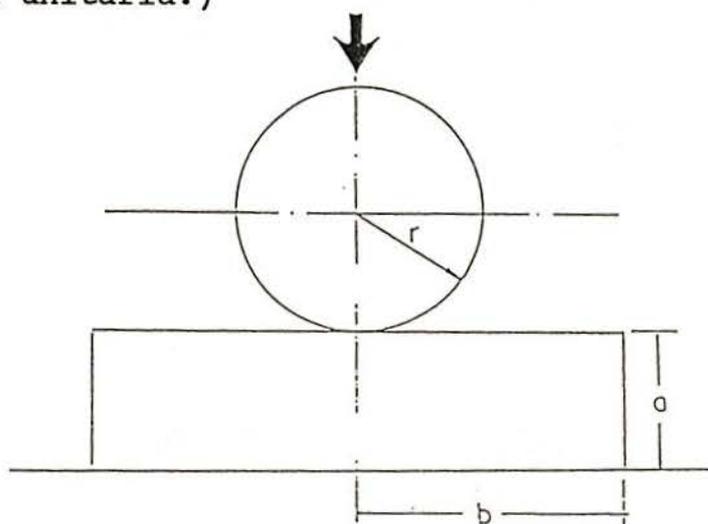


Figura (7.4.1.1)  
 Geometria do problema.

As características mecânicas valem:

$$E = 1000 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

O material é elasto-plástico com uma lei constitutiva segundo a expressão:

$$\bar{\sigma} = 10 + 5 \bar{\epsilon}$$

onde  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\epsilon}$  são a tensão de Von Mises e a deformação plástica equivalente, respectivamente.

A figura (7.4.1.2) mostra a malha antes do carregamento. Somente a metade da peça foi discretizada. Todos os nós são fixados segundo z. Os nós mais à esquerda (plano de simetria da peça) são fixados segundo x. Todos os nós na base são fixados em x.

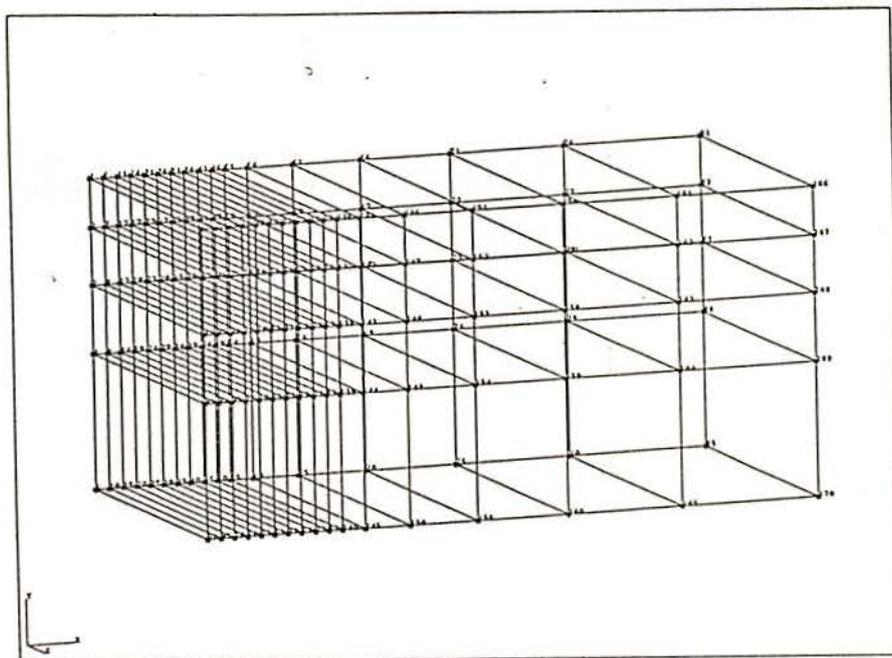
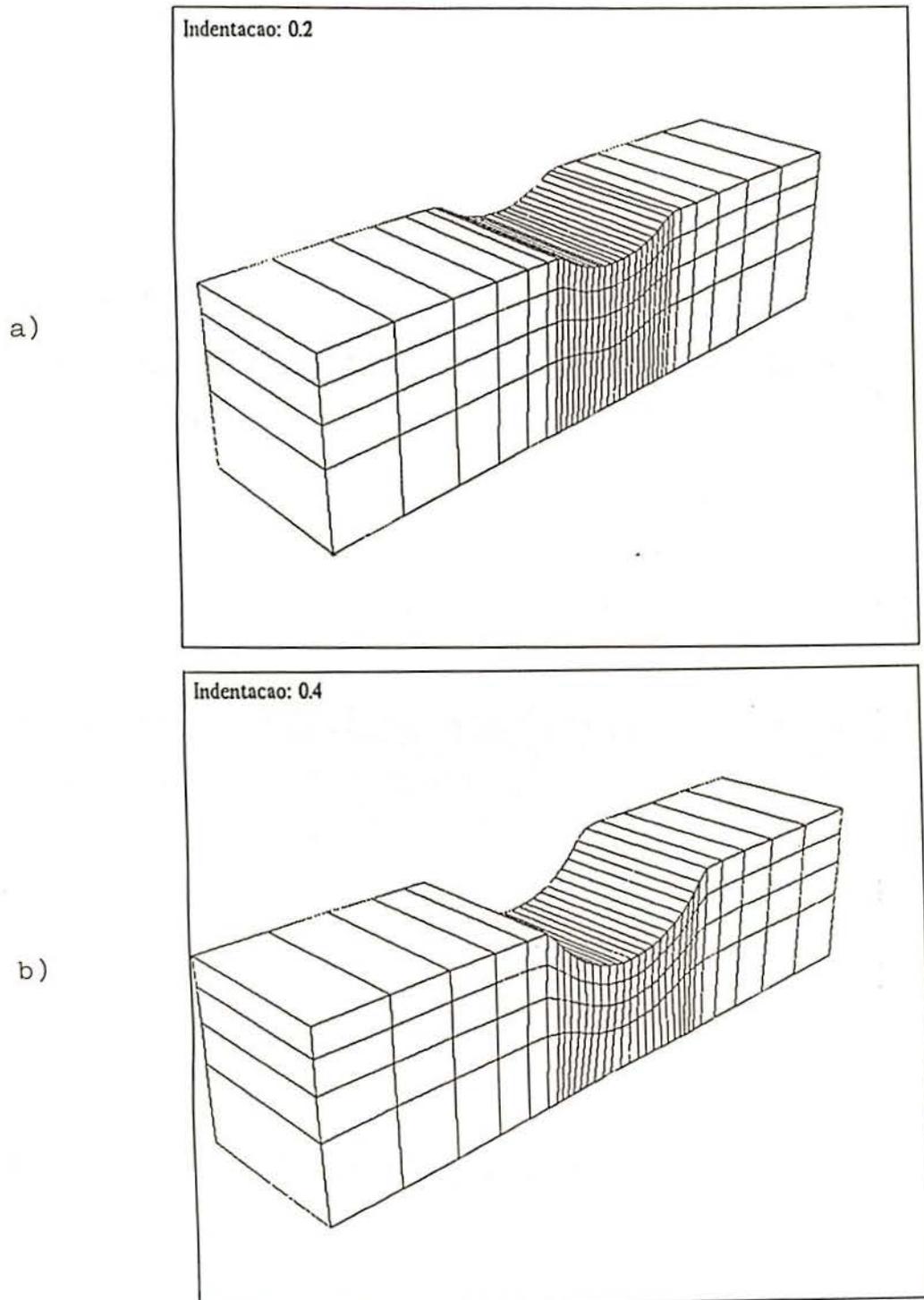


Figura (7.4.1.2)  
Malha antes da conformação

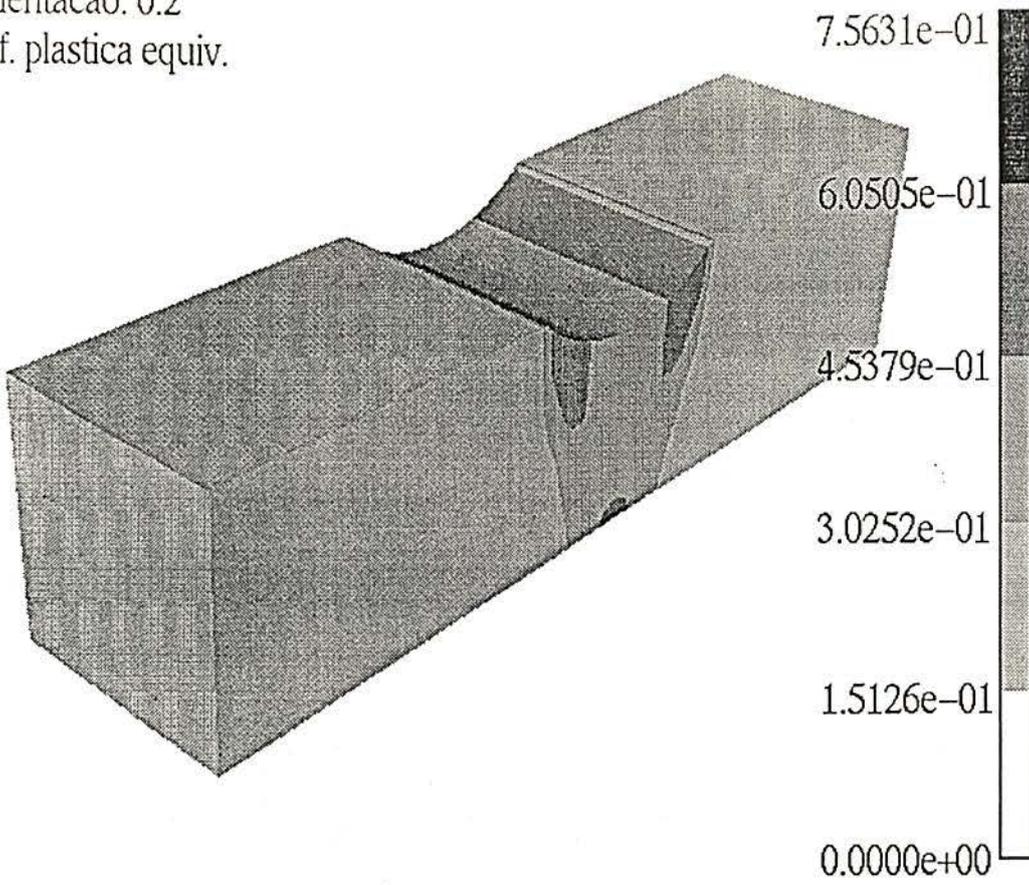
Dois casos foram estudados. O primeiro, sem atrito ( $K_N = 3.5 \times 10^3$ ) e o segundo com atrito ( $K_N = 3.5 \times 10^3$  e  $K_T = 3.5 \times 10^2$  e  $\nu = 0.3$ ). No primeiro caso as deformadas são fornecidas em (7.4.1.3a,b) e as deformações plásticas em (7.4.1.4a,b). Para o caso com atrito, as mesmas ilustrações são fornecidas em (7.4.1.5a,b) e (7.4.1.6a,b).



**Figura (7.4.1.3)**  
**Deformada. Indentação:**  
 a) 0.2 cm b) 0.4 cm

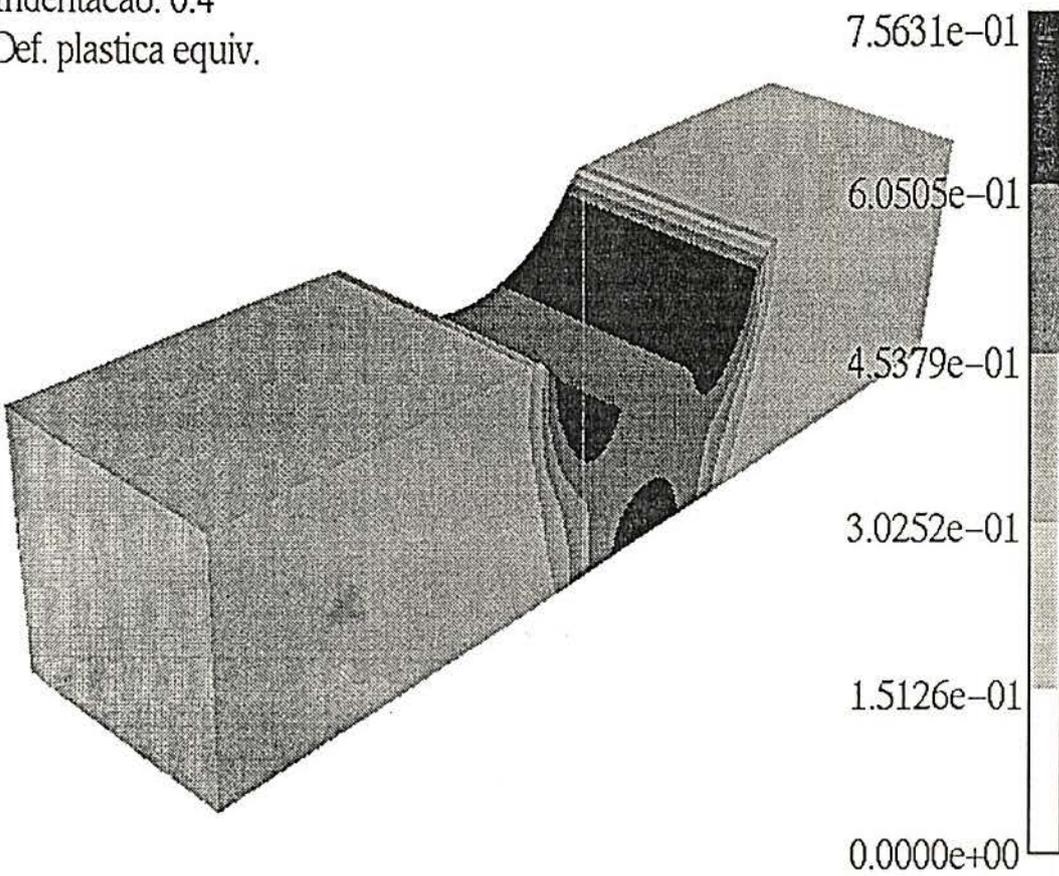
Indentacao: 0.2  
Def. plastica equiv.

a)



Indentacao: 0.4  
Def. plastica equiv.

b)



**Figura (7.4.1.4)**  
**Deformação plástica**  
a) 0.2 cm b) 0.4 cm

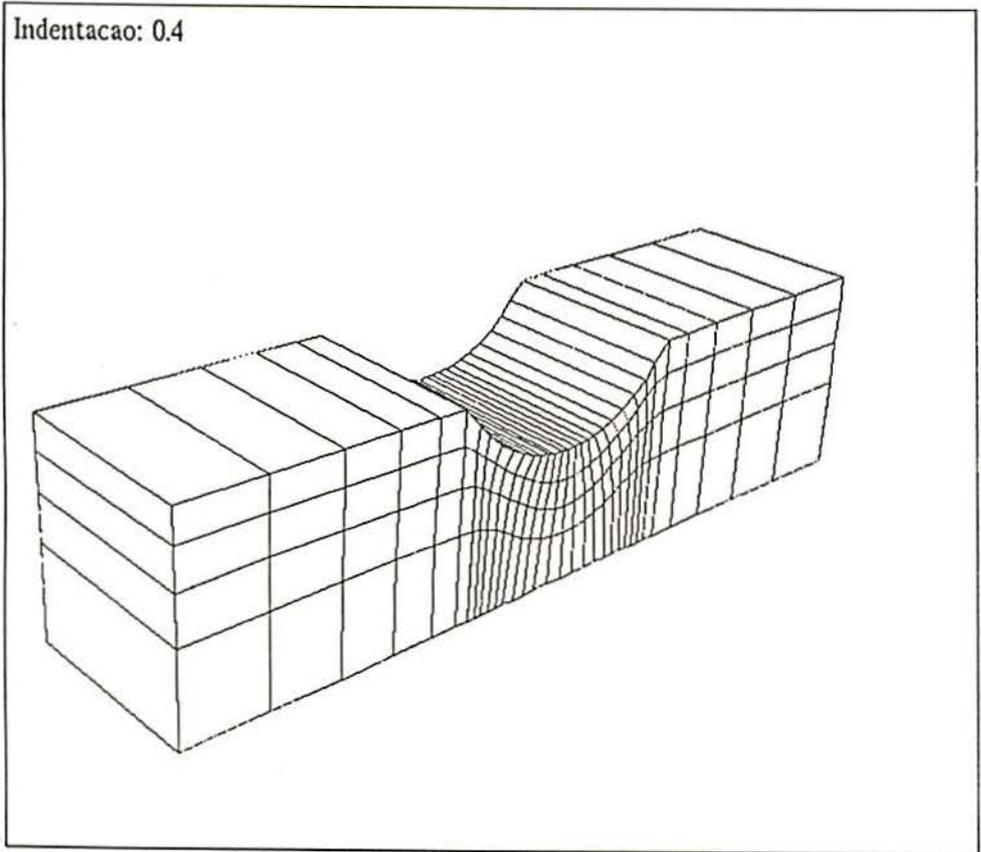
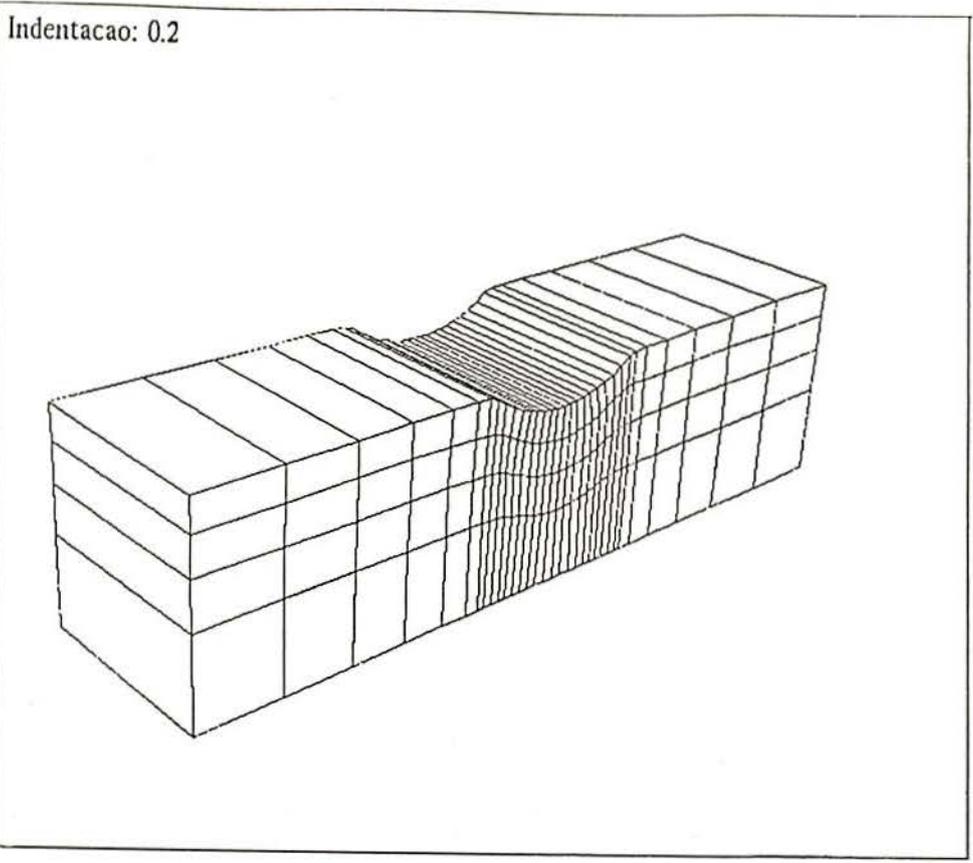
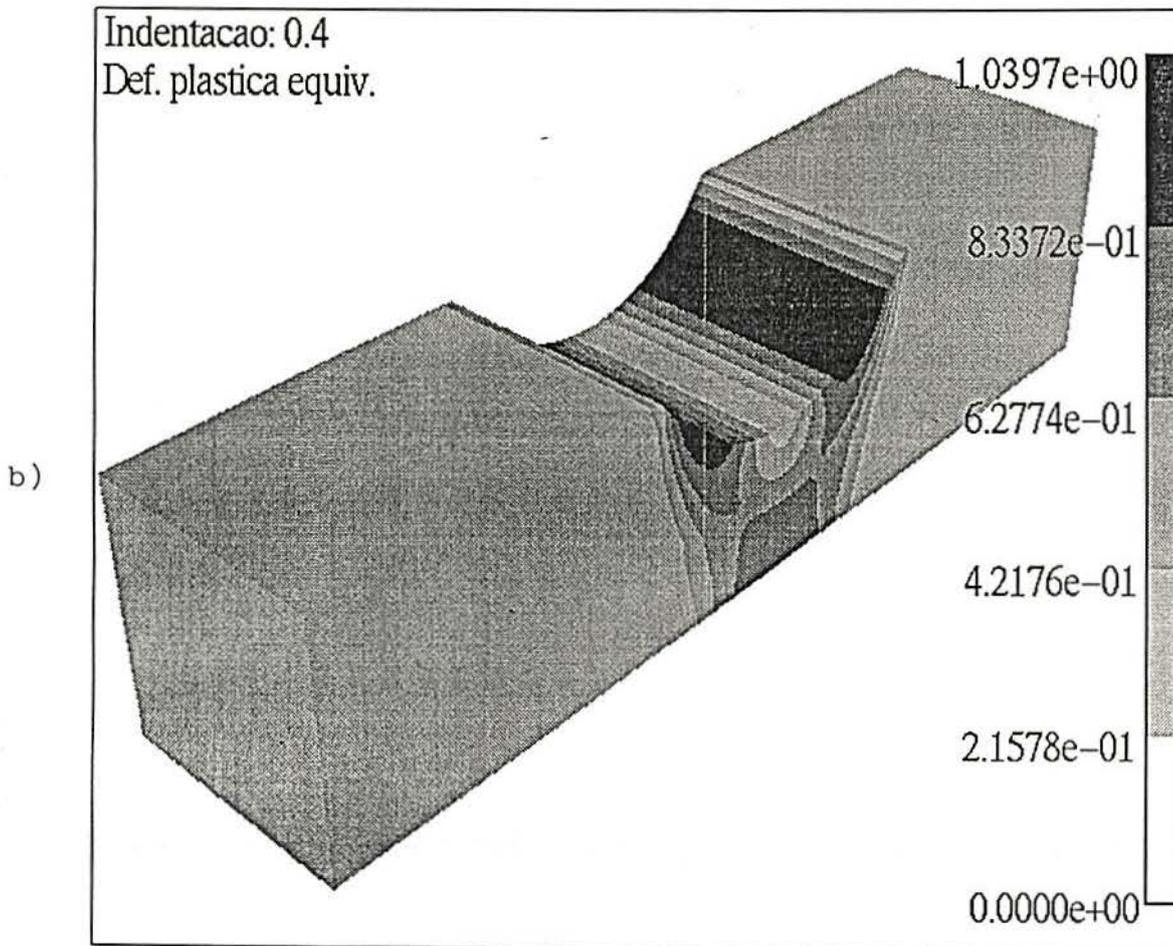
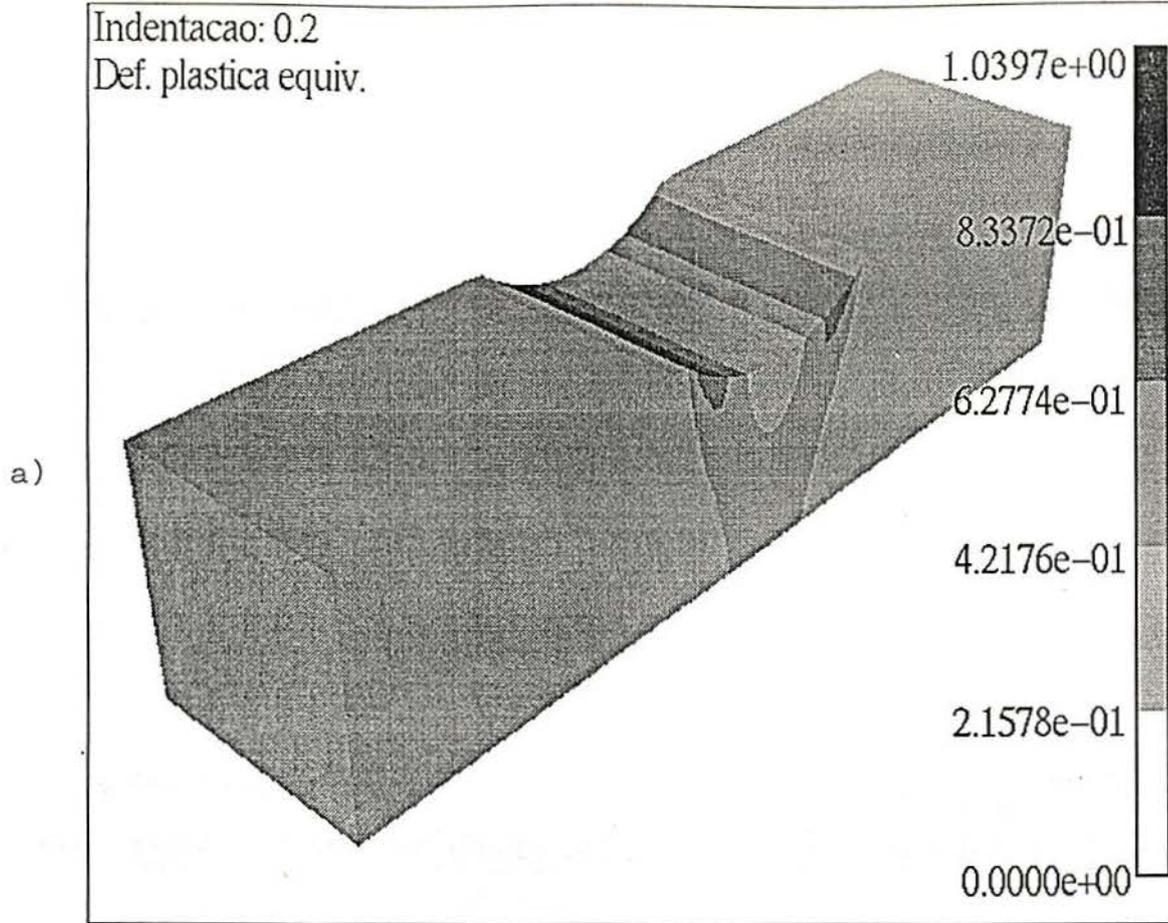


Figura (7.4.1.5)  
Deformada (com atrito)  
a) 0.2 cm b) 0.4 cm



**Figura (7.4.1.6)**  
**Deformação plástica (com atrito)**  
a) 0.2 cm b) 0.4 cm

Assim quando existe atrito, o movimento da malha abaixo da matriz na direção das extremidades é impedido. Observa-se também um aumento da deformação plástica equivalente quando existe atrito.

Dados comparativos com a versão 2D são indicados na tabela (7.4.1.1). As deformadas para o caso 2D são mostradas nas figuras (7.4.1.7a,b). Observa-se um bom acordo, o que indica que para superfícies de simples curvaturas tem-se:

a) Projeção ortogonal correta.

b) Definição do sistema de eixos locais de contato também feita de forma correta, uma vez que a deformada obtida em 3D é praticamente a mesma obtida em 2D, onde sabe-se que a definição dos eixos locais é unívoca.

CASO	DEF. PLASTICA EQ. MAX.
2D	757 $\times 10^{-3}$
3D	756 $\times 10^{-3}$
2D + atrito	1.07
3D + atrito	1.04

TABELA (7.4.1.1)  
Comparação caso 3D e 2D (estado plano de def.)

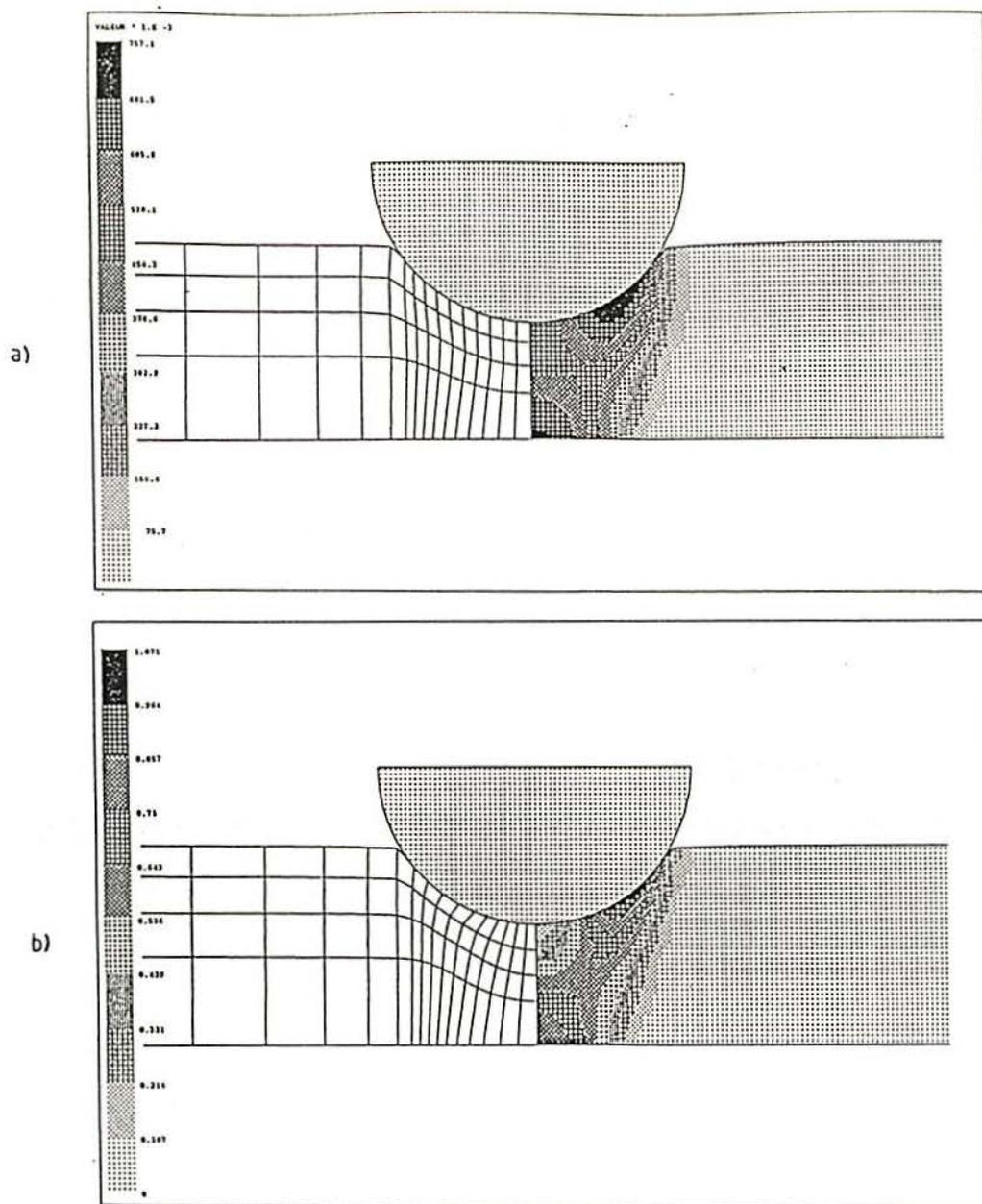
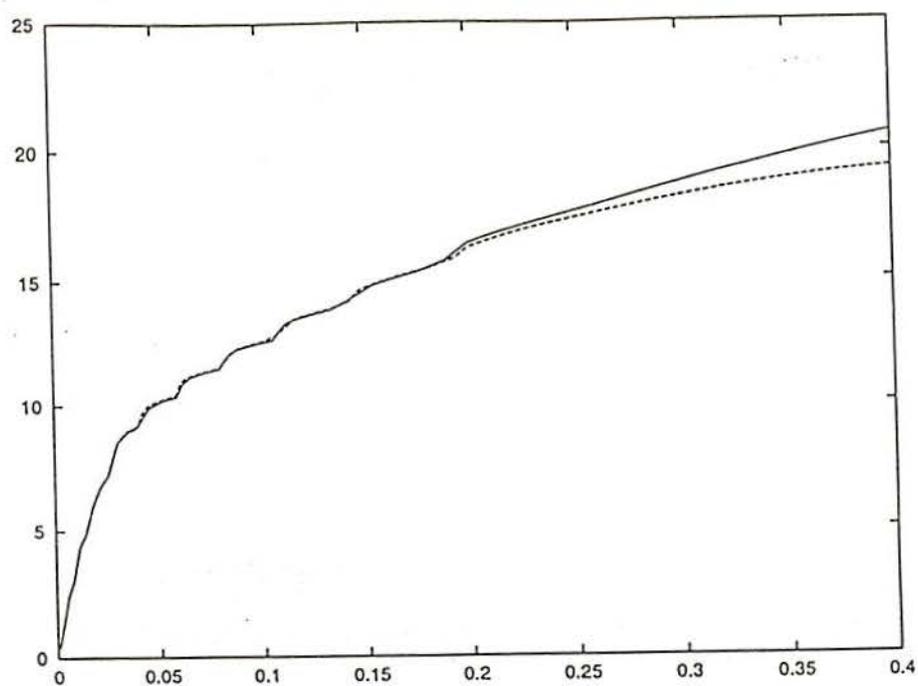


Figura (7.4.1.7)  
 Deformação plástica equivalente e deformada. Caso 2D em estado  
 plano de deformação.  
 a) Sem atrito b) Com atrito

A figura (7.4.1.8) mostra os valores da força de conformação. Observa-se um aumento da força para o caso com atrito no fim da indentação. Finalmente, a tabela (7.4.1.2) o número de iterações/passos de tempo é fornecido para os dois casos.



**Figura (7.4.1.8)**  
**Força de conformação (N) x deslocamento (cm)**  
 — Com atrito                      - - - - Sem atrito.

CASO	NUM DE ELEM.	NUM. ITER.	NUM. DE PASSOS
a	64	149	67
b	64	130	61

**TABELA (7.4.1.2)**  
**Performace do caso da indentação (a = sem atrito; b = com atrito)**

#### 7.4.2 EMBUTIMENTO POR UM PUNÇÃO

Neste caso é feito o dobramento de uma viga, cujas dimensões da metade da seção valem 3 mm x 24 mm e a profundidade vale 4 mm, como é visto na figura (7.4.2.1). Todos os nós são fixados segundo z. Os nós mais à esquerda (plano de simetria) são ainda fixados na direção x.

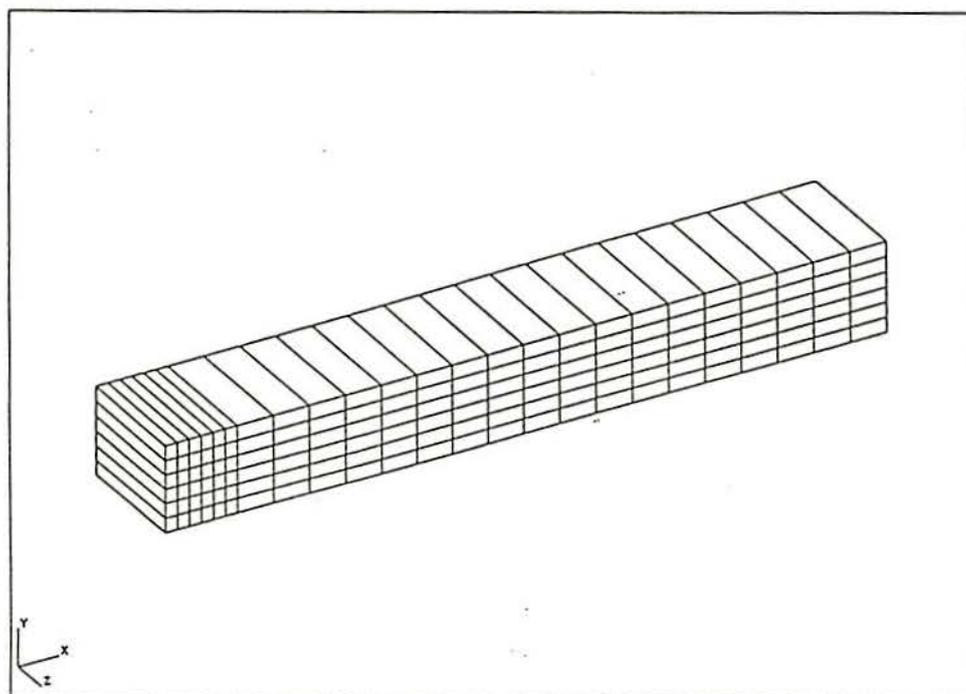


Figura (7.4.2.1)  
Malha antes do dobramento

A figura (7.4.2.2) mostra a metéria flexível, o punção e a

matriz rígida que fazem o dobramento. O punção é modelado por uma superfície regradada e um plano, enquanto a matriz fixa por dois planos ligados por uma superfície regradada.

Este exemplo é um excelente teste para o algoritmo de contato, pois os nós vão escorregar de um domínio da matriz à outro, de forma contínua, durante o dobramento. Além disto a peça é totalmente apoiada sobre as matrizes de contato.

A matéria é elasto-plástica com as características:

$$\begin{aligned} E &= 210000 \text{ N/mm}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ H &= 400 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_v &= 210 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

A penalidade empregada vale  $k_N = 3.5 \times 10^5$ .

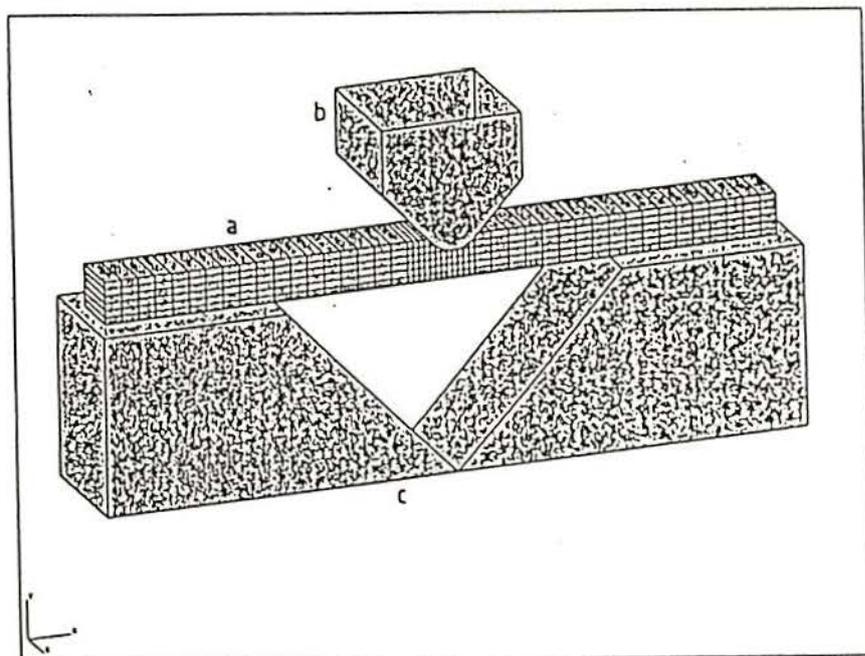
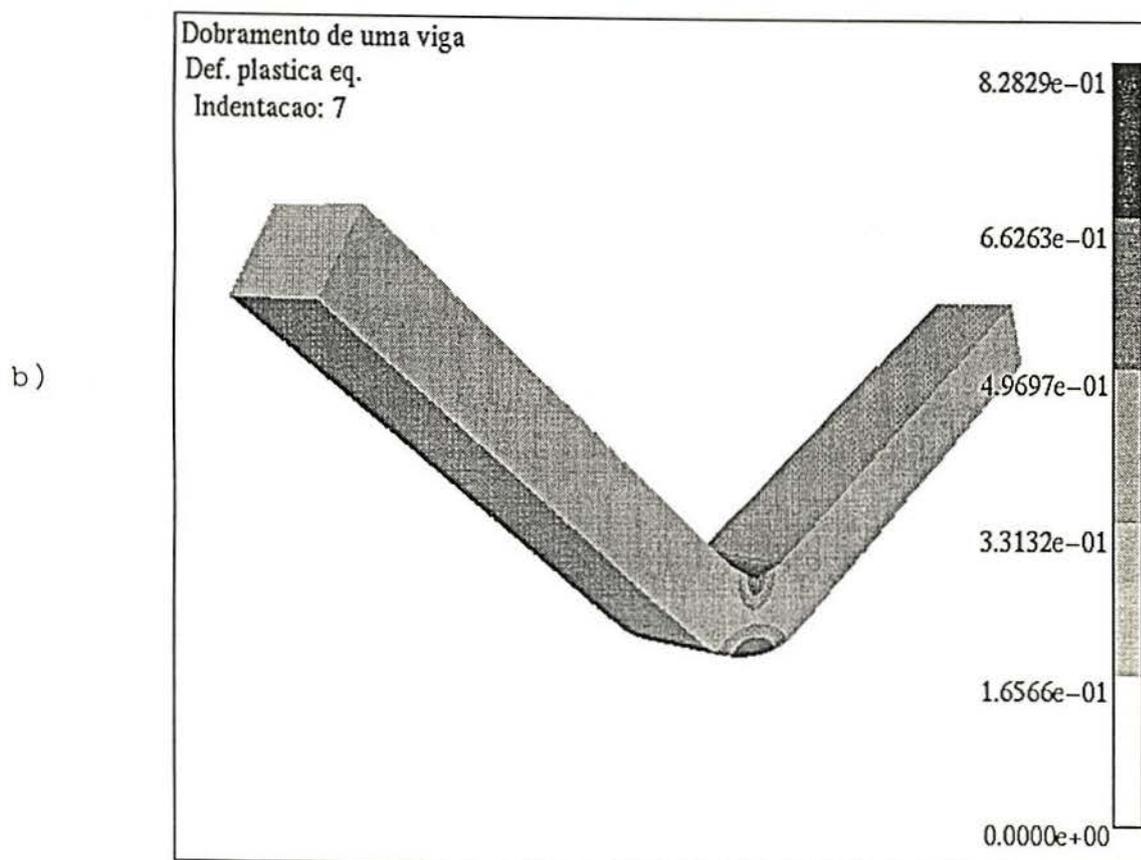
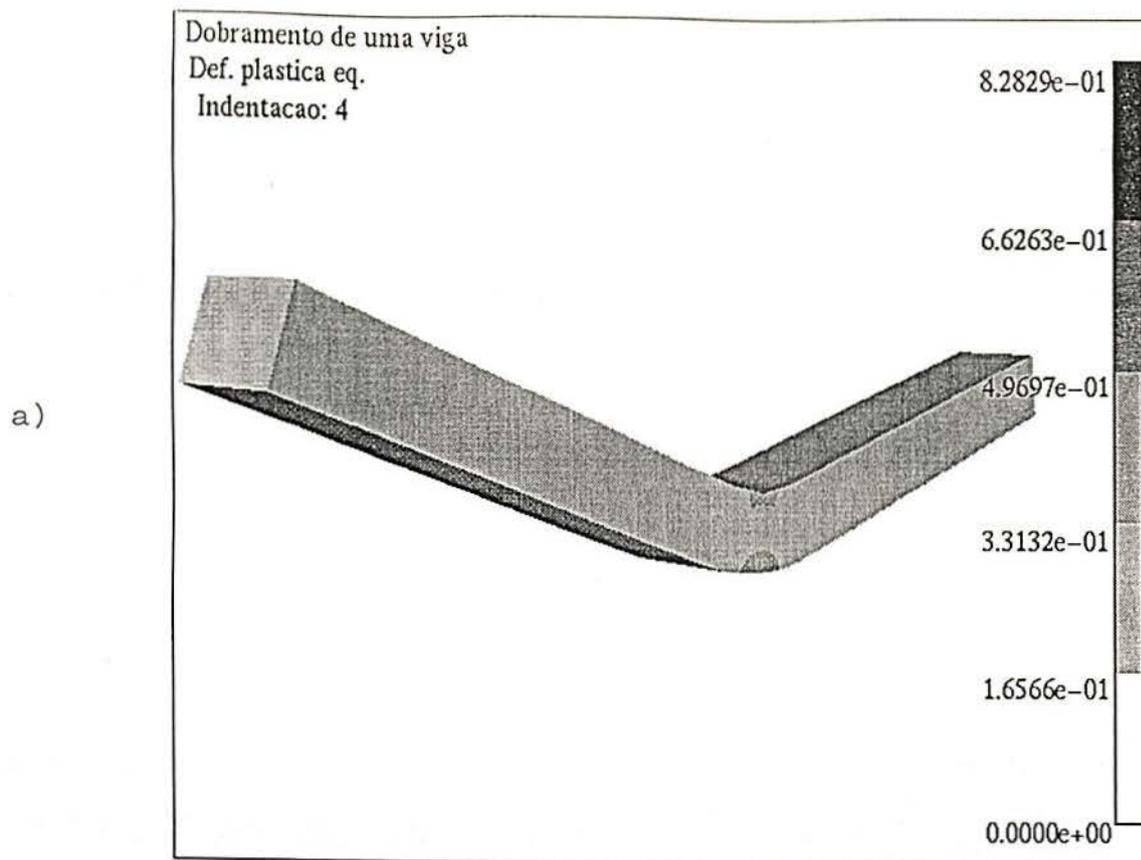


Figura (7.4.2.2)

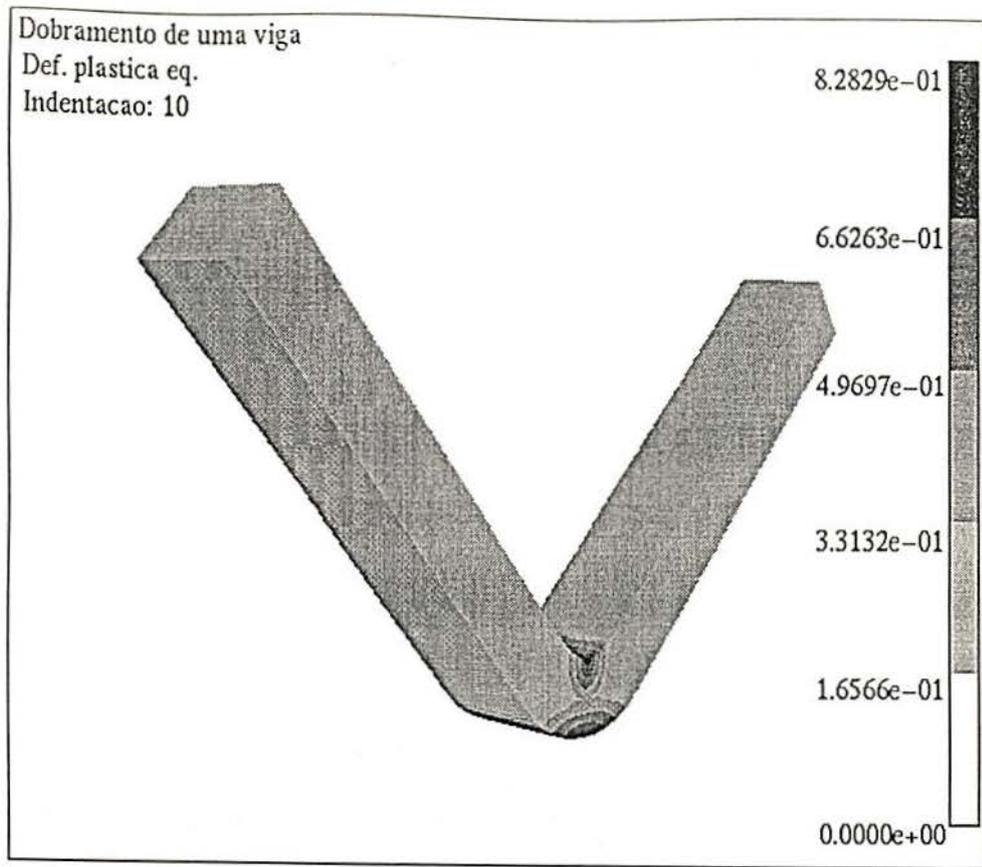
- a) Peça flexível
- b) Punção (deslocamento vertical):  
raio = 2 mm
- ângulo de abertura = 83°
- c) Matriz (fixa): ângulo de abertura = 83°

Os resultados de deformação plástica obtidos para diferentes deslocamentos verticais do punção, são mostrados na figura (7.4.2.3a-d). Nas figuras seguintes (7.4.2.4a,b), vê-se um zoom da zona crítica do dobramento para um deslocamento de 10.5 mm do punção, que corresponde ao momento em que as paredes planas do punção encostam na superfície da viga.



**Figura (7.4.2.3)**  
Deformação plástica equivalente. Deslocamento vertical do punção:  
a) 4 mm; b) 7 mm;

c)



d)

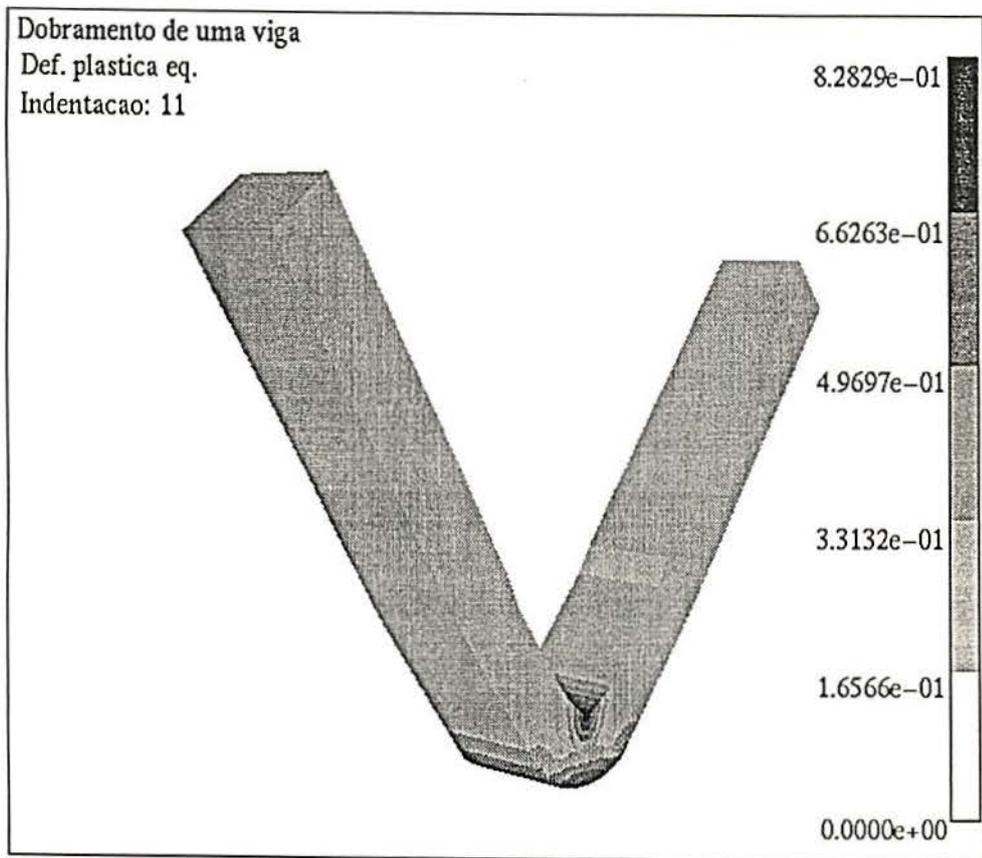
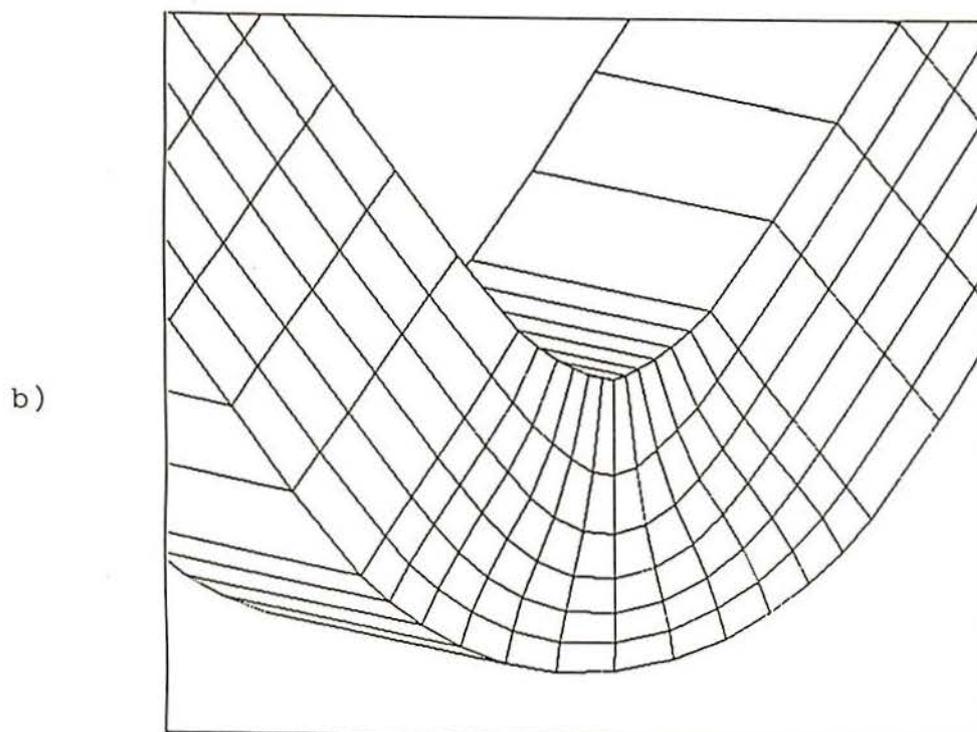
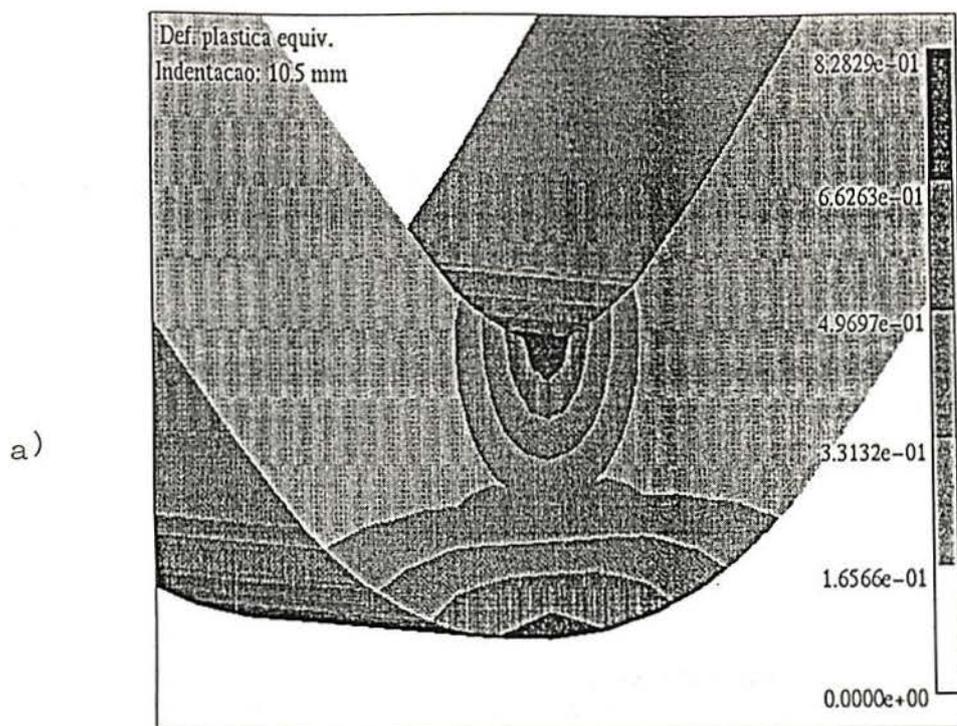


Figura (7.4.2.3)  
Deformação plástica equivalente. Deslocamento vertical do punção:  
c) 10 mm; d) 11 mm.



**Figura (7.4.2.4)**  
 (a) Deformada e (b) deformação plástica equivalente (caso 3D)  
 Deslocamento do punção: 10.5 mm.

A figura (7.4.2.5) mostra o mesmo caso feito em estado plano de deformações (2D). Não se vê diferença à nível de deformada. As pequenas diferenças entre os valores de deformação plástica equivalente são provavelmente devidas ao método de transferência de dados aos nós. No caso 3D toma-se diretamente os valores dos pontos de Gauss como valores nodais. No caso 2D o método do mínimos quadrados (local) foi empregado /P1/.

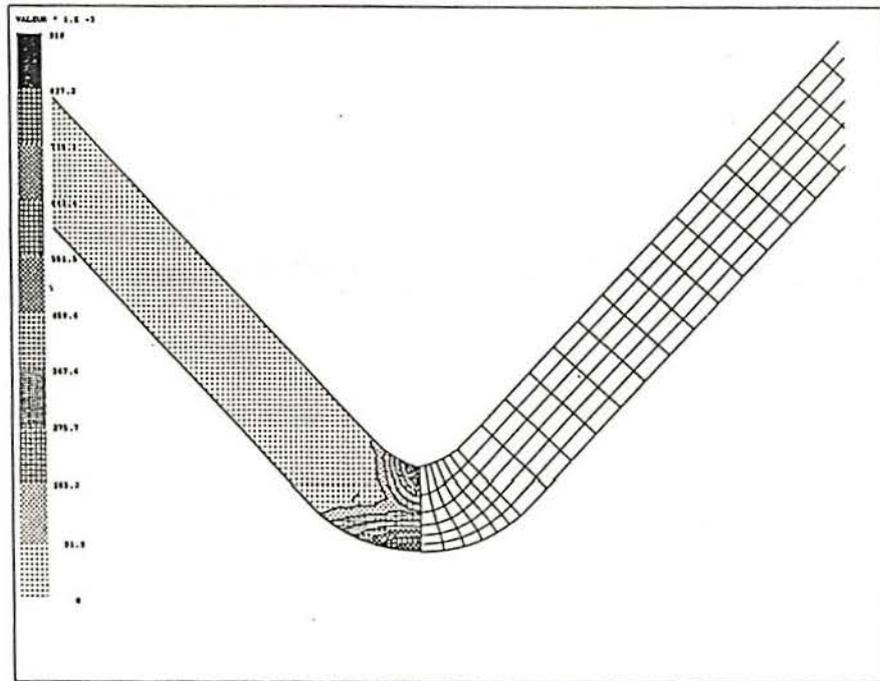


Figura (7.4.2.5)  
Deformação plástica equivalente (caso 2D)

A tabela (7.4.2.1) fornece o número de iterações/passos de tempo. Observa-se um aumento à nível do número de iterações com relação ao caso 2D em estado plano de deformações (319 iterações) mas uma queda no número de passos de tempo (203 passos para o 2D).

NUM. DE ELEM.	NUM. ITER.	NUM. DE PASSOS
144	338	173

TABELA (7.4.2.1)  
Performace do embutimento por um punção

### 7.4.3 'UPSETTING' DE UM CILINDRO

Este caso foi proposto por Taylor e Becker /T2/ no início dos anos 80 e consiste em comprimir 64 % um cilindro de 20 mm de diâmetro e 30 mm de altura por uma matriz rígida plana com um coeficiente de atrito de 0.3. O material é aço, cujas características valem:

$$\begin{aligned} E &= 200 \text{ KN/mm}^2 \\ \sigma_v &= 0.7 \text{ KN/mm}^2 \\ H &= 0.3 \text{ KN/mm}^2 \end{aligned}$$

A penalidade normal empregada vale  $3.5 \times 10^5$ , enquanto que a penalidade tangencial vale  $3.5 \times 10^4$ .

A discretização empregada é mostrada na figura (7.4.3.1). Todos os nós no plano normal ao eixo  $x$  são fixados na direção  $x$  enquanto que os nós no plano normal ao eixo  $y$  são fixados na direção  $y$ . A matriz de contato está no plano  $xy$  e tem um movimento na direção  $z$ .

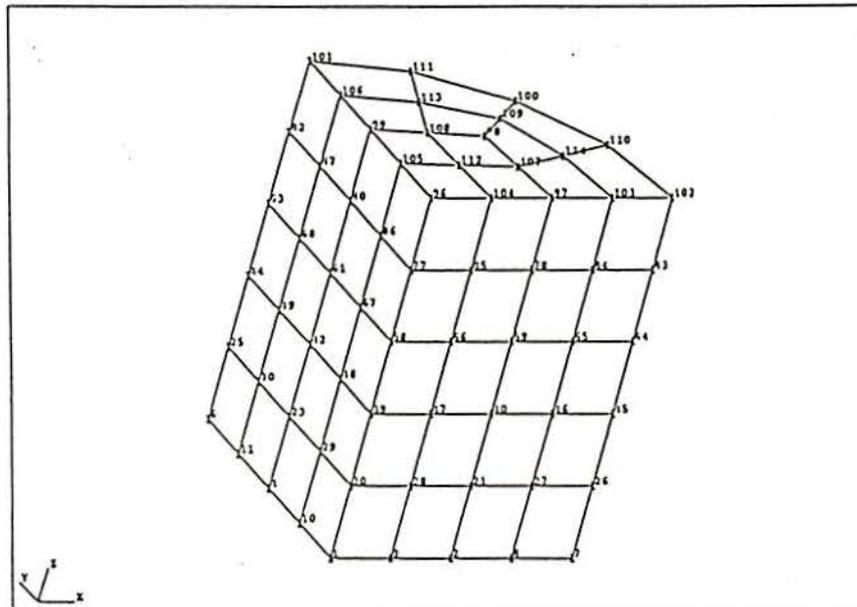


Figura (7.4.3.1)  
Discretização empregada

As deformadas e os valores de tensão equivalente de Von Mises são mostradas nas figuras (7.4.3.2) e (7.4.3.3).

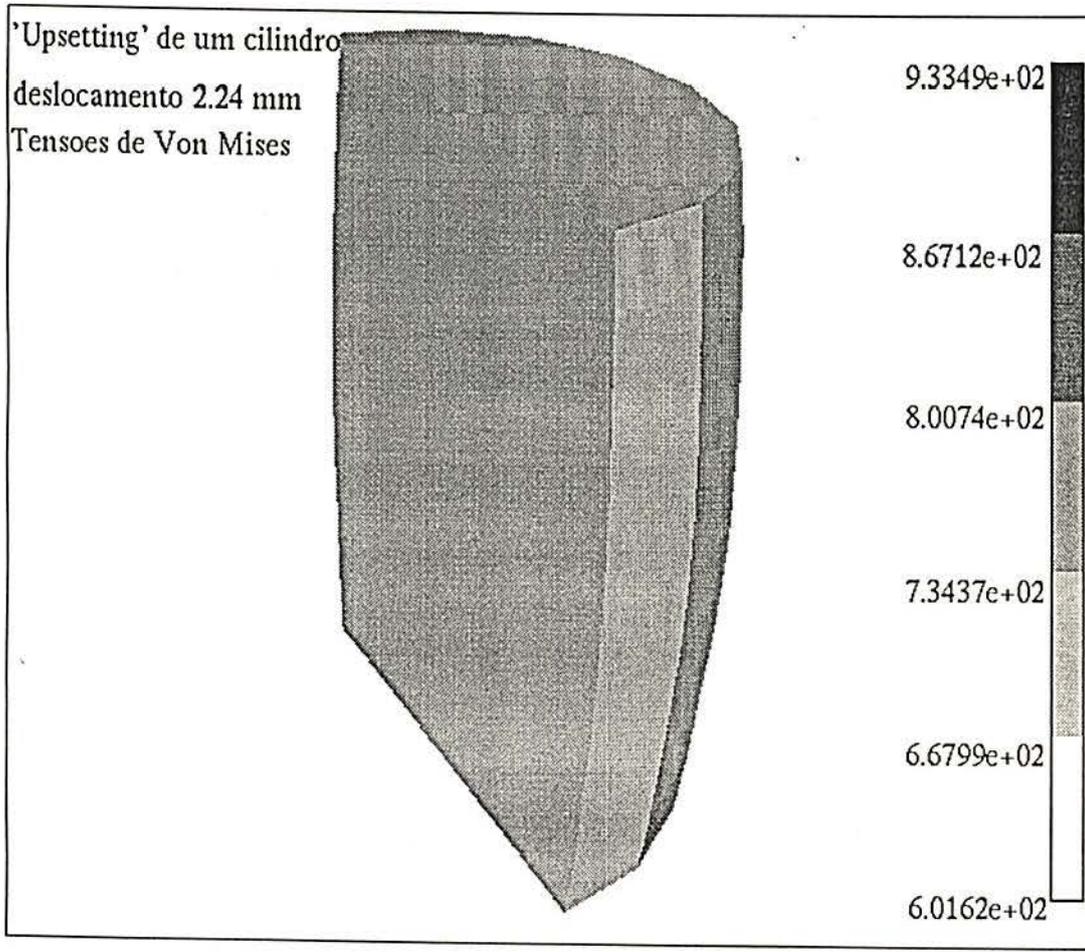
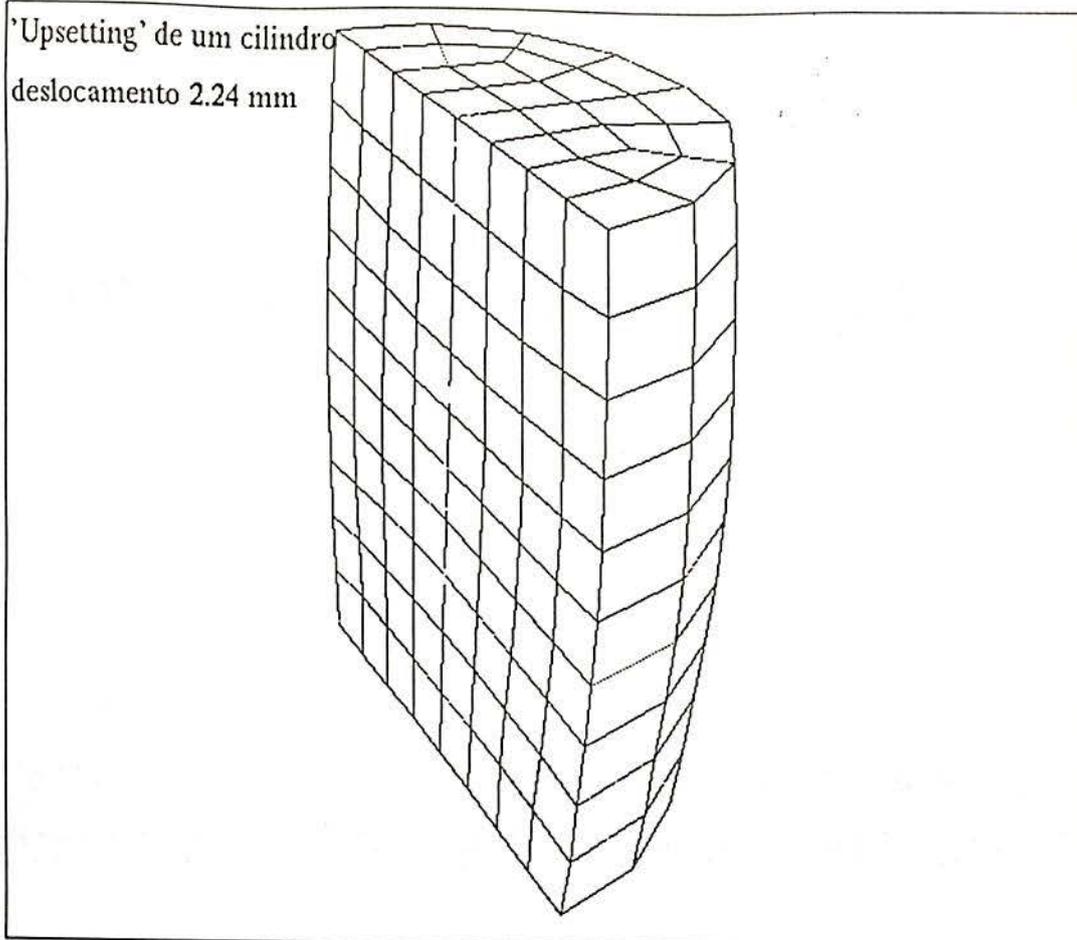
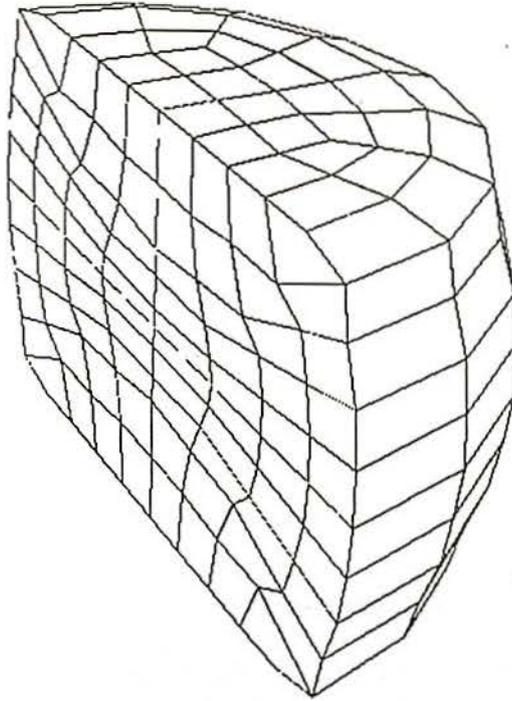
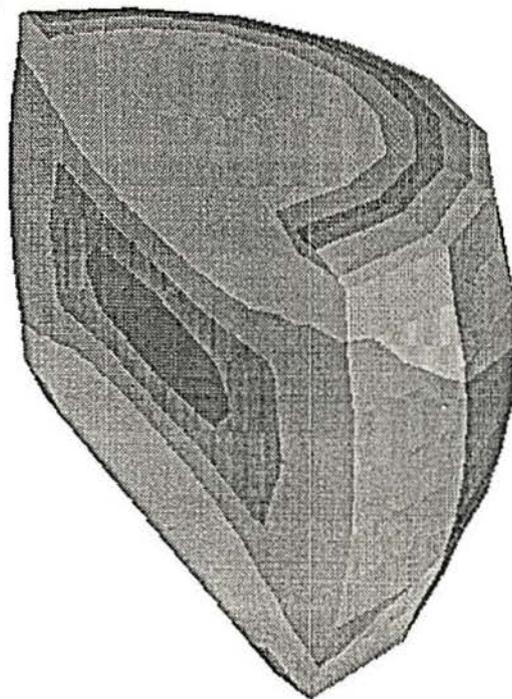


Figura (7.4.3.2)  
a) Deformação de 30 %

'Upsetting' de um cilindro  
deslocamento 7.8 mm



'Upsetting' de um cilindro  
deslocamento 7.8 mm  
Tensoes de Von Mises



9.3349e+02

8.6712e+02

8.0074e+02

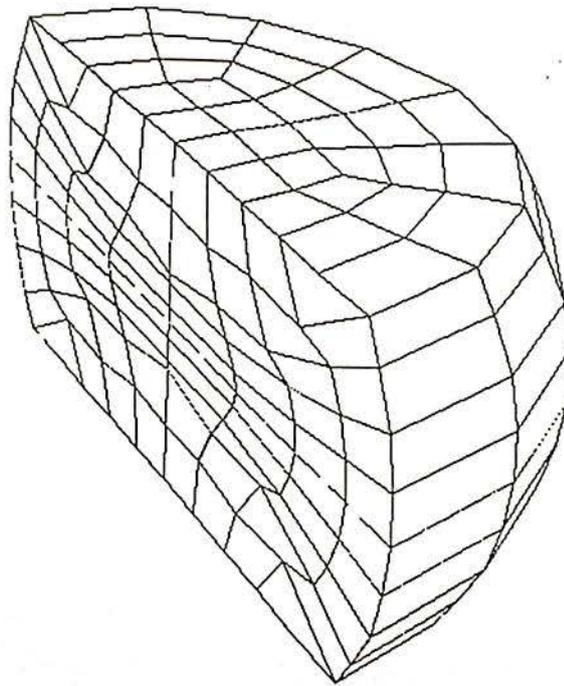
7.3437e+02

6.6799e+02

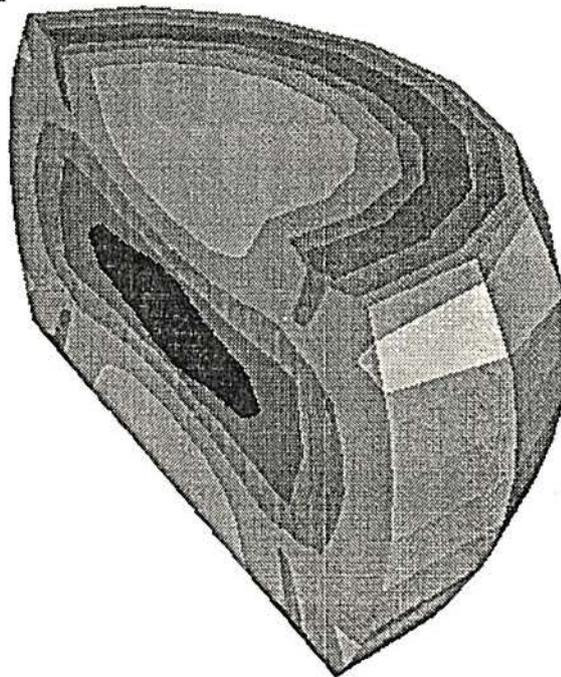
6.0162e+02

Figura (7.4.3.2)  
b) Deformação de 52 %

'Upsetting' de um cilindro  
deslocamento 9.6 mm



'Upsetting' de um cilindro  
deslocamento 9.6 mm  
Tensoes de Von Mises



9.3349e+02

8.6712e+02

8.0074e+02

7.3437e+02

6.6799e+02

6.0162e+02

Figura (7.4.3.3)  
Deformação de 64 %

Não notou-se uma influência substancial do tamanho do passo de tempo sobre a solução obtida (como Cheng e Kikuchi /C3/). A figura (7.4.3.4) compara os resultados aqui obtidos com os da literatura. No final do processo este trabalho fornece uma força de conformação que é menor do que a da literatura, pois esta última empregou uma malha mais fina. Neste último caso, o aumento da área dá-se mais realisticamente.

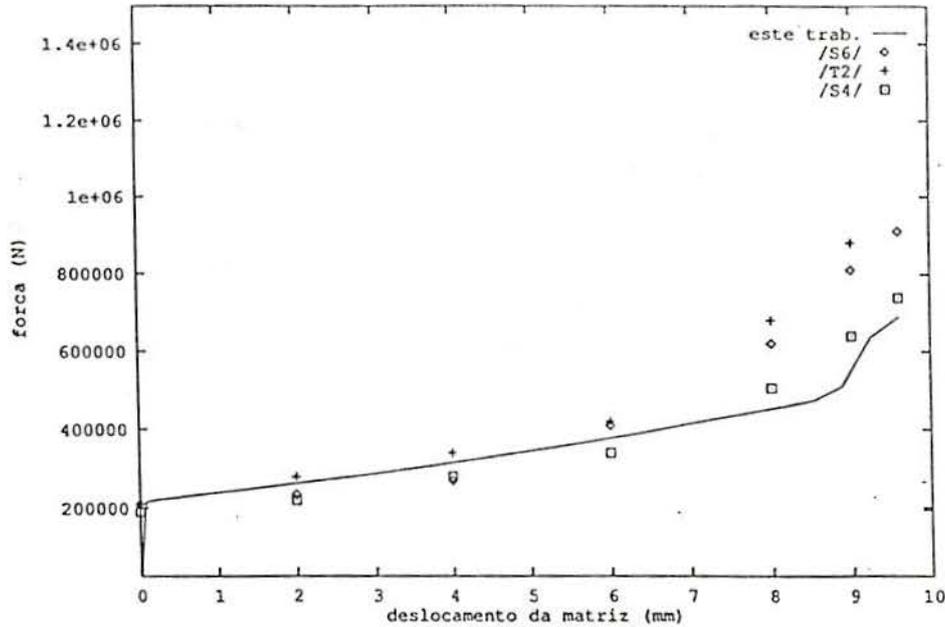


Figura (7.4.3.4)  
Valores de força de conformação

Se o mesmo caso é feito com  $\mu = 0.1$  tem-se um escorregamento irreversível. Neste caso para valores maiores de  $k_T$ , para que haja boa convergência do método, deve-se utilizar a matriz tangente consistente (expressão (5.2.6)) conforme indica a tabela (7.4.3.1).

CASO	NUM DE ELEM.	NUM. ITER.	NUM. DE PASSOS
a	60	53	38
b	60	80	43

TABELA (7.4.3.1)

$k_T = k_N = 3.5 \times 10^5$  (a = matriz tangente de contato consistente; b = matriz não consist.)  
Caso do 'upsetting' de um cilindro.

#### 7.4.4 EMBUTIMENTO DE UMA PLACA CIRCULAR

Este caso foi proposto por Lee, Wagoner e Nakamashi /L1/ (hoje ele é conhecido simplesmente como caso Wagoner). *E* o caso do embutimento de uma placa circular engastada por um punção esférico cujas dimensões são dadas na figura (7.4.4.1). As características do material valem:

$$E = 69004 \text{ MPa}$$
$$\nu = 0.3$$

A tensão equivalente de Von Mises é dada por:

$$\bar{\sigma} = 589 (10^{-4} + \bar{\epsilon})^{0.216}$$

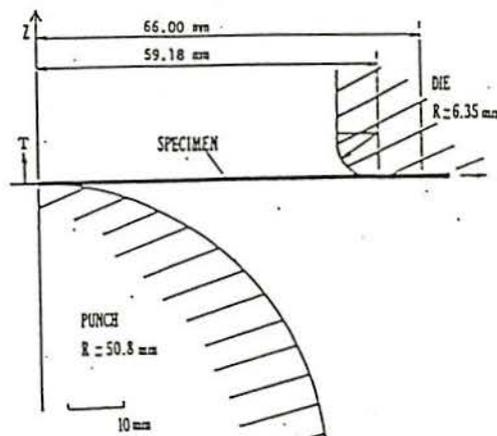


Figura (7.4.4.1)  
Geometria do caso Wagoner

A discretização do problema em 3D é dada na figura (7.4.4.2).

Somente uma quarta parte da estrutura, do punção e da matriz (fixa) foram discretizadas por causa da simetria. Para modelização do punção, 3 superfícies Coons e uma plana foram empregadas. Para modelizar a matriz, tomou-se uma só superfície Coons. A discretização da matéria é mostrada na figura (7.4.4.3).

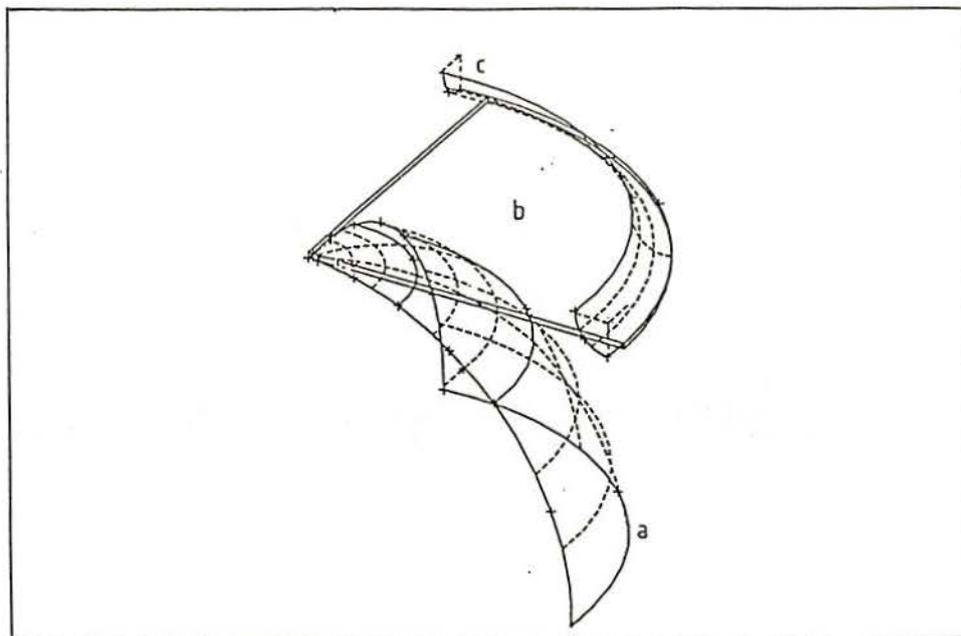


Figura (7.4.4.2)

a) Punção b) Matéria deformável c) Matriz fixa

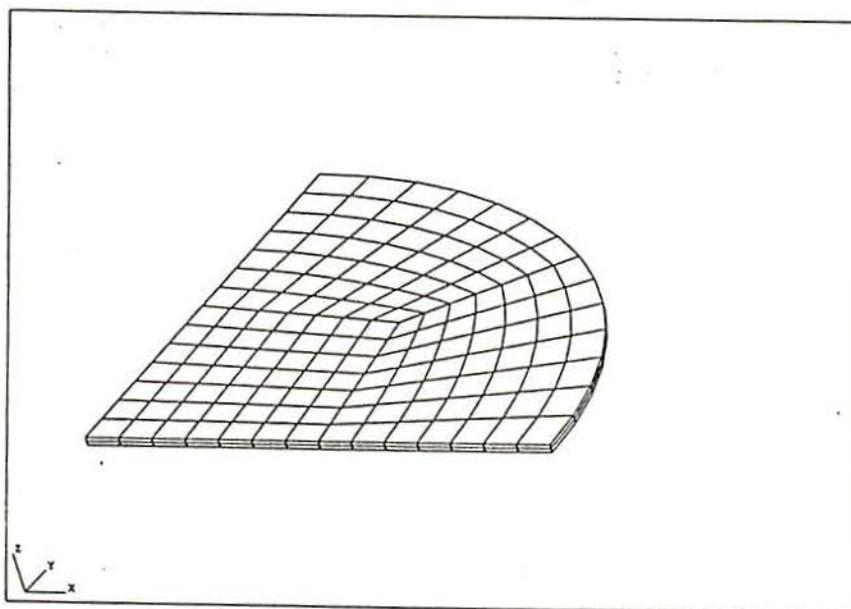
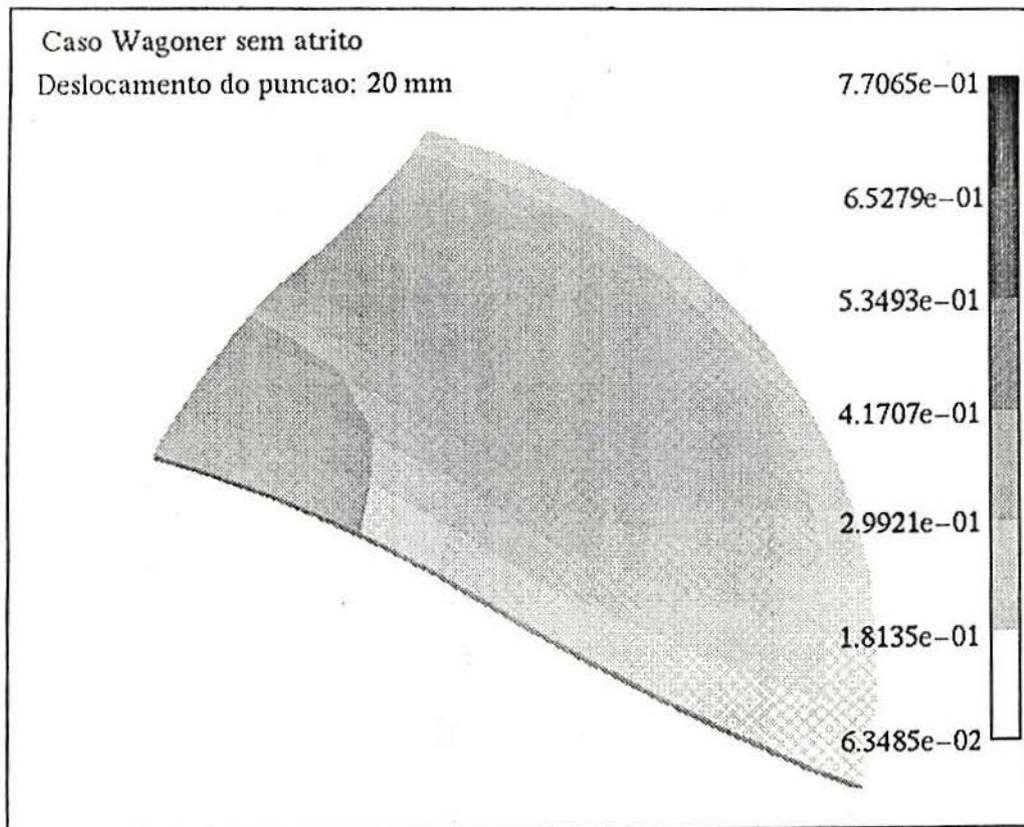
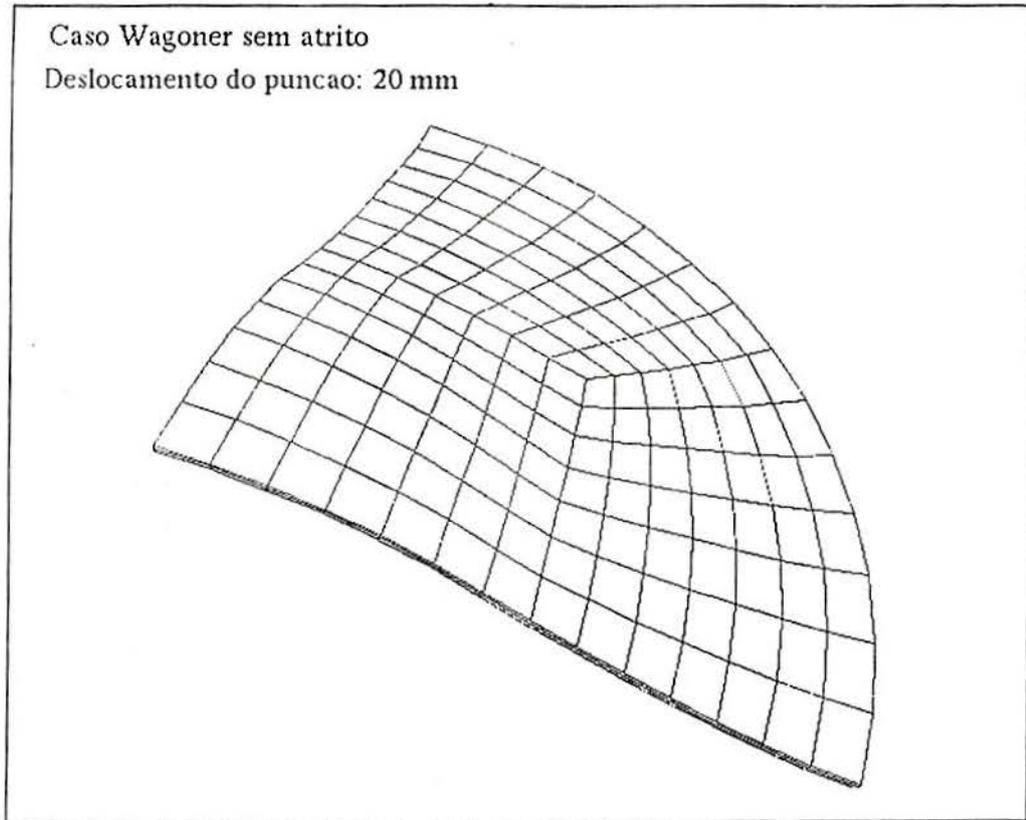


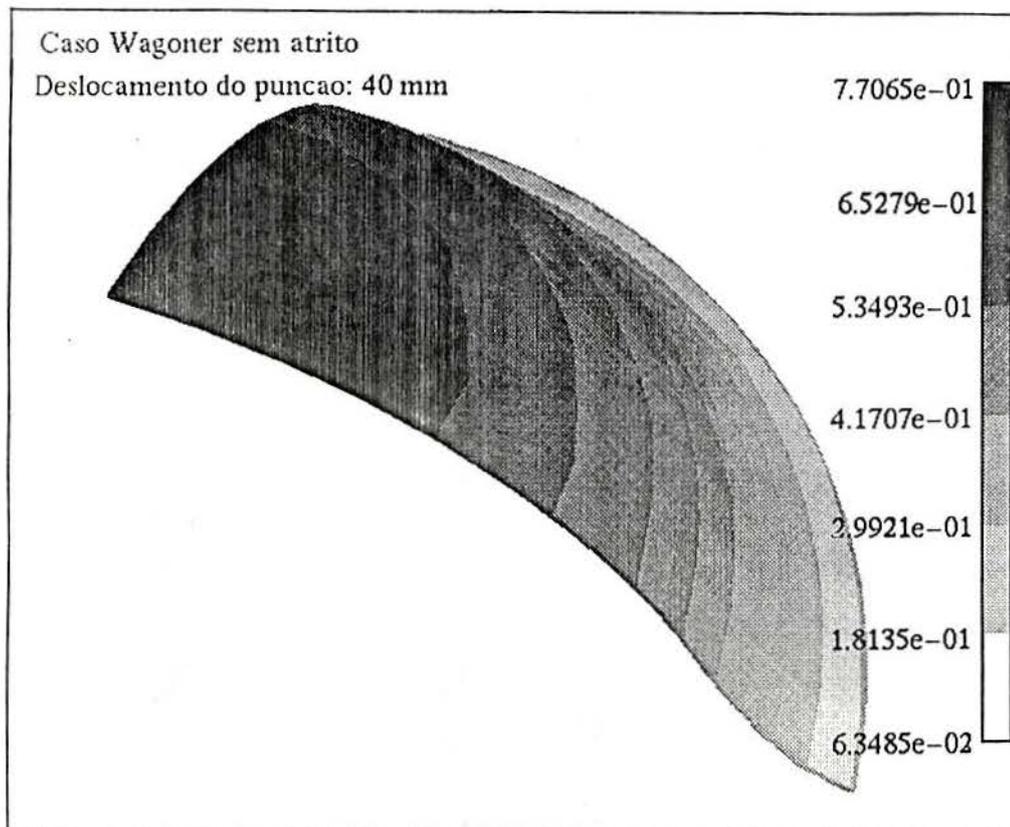
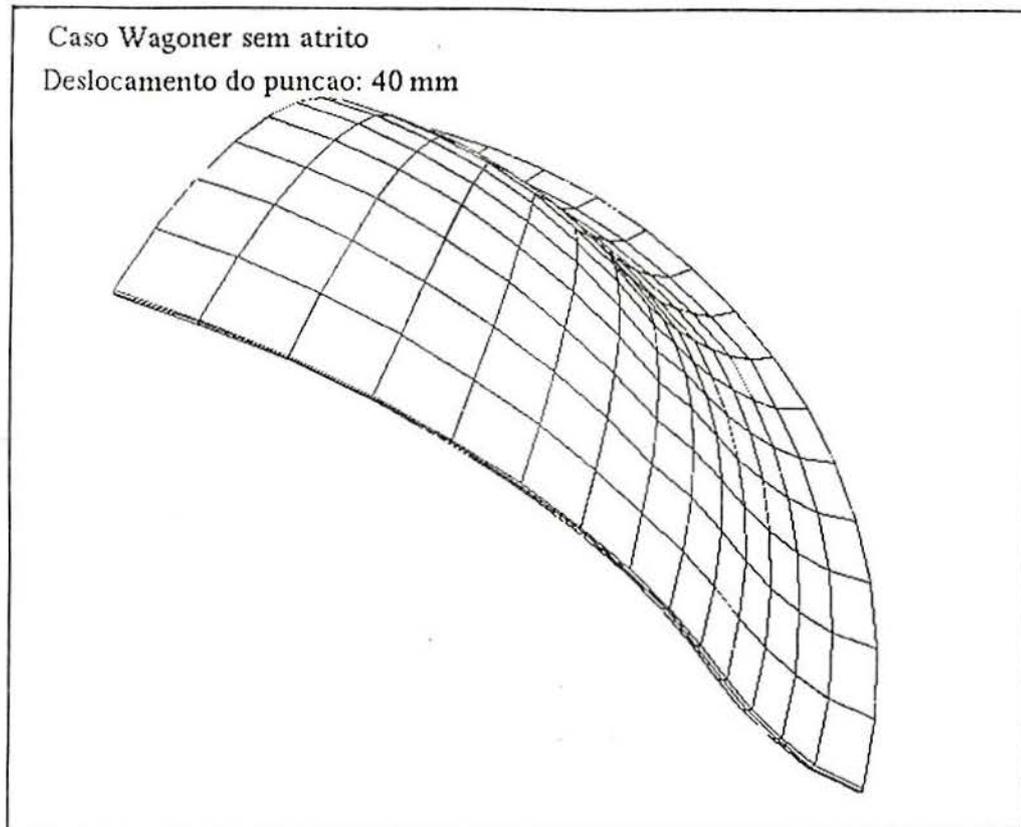
Figura (7.4.4.3)

Discretização da matéria

Dois exemplos foram analisados. O primeiro, sem atrito e com uma penalidade normal de  $1 \times 10^5$ . Os resultados da deformada e a deformação plástica equivalente são dadas nas figuras (7.4.4.4a,b), respectivamente para uma indentação de 20 mm. A configuração final (indentação de 40 mm) é fornecida nas figuras (7.4.4.5a,b).

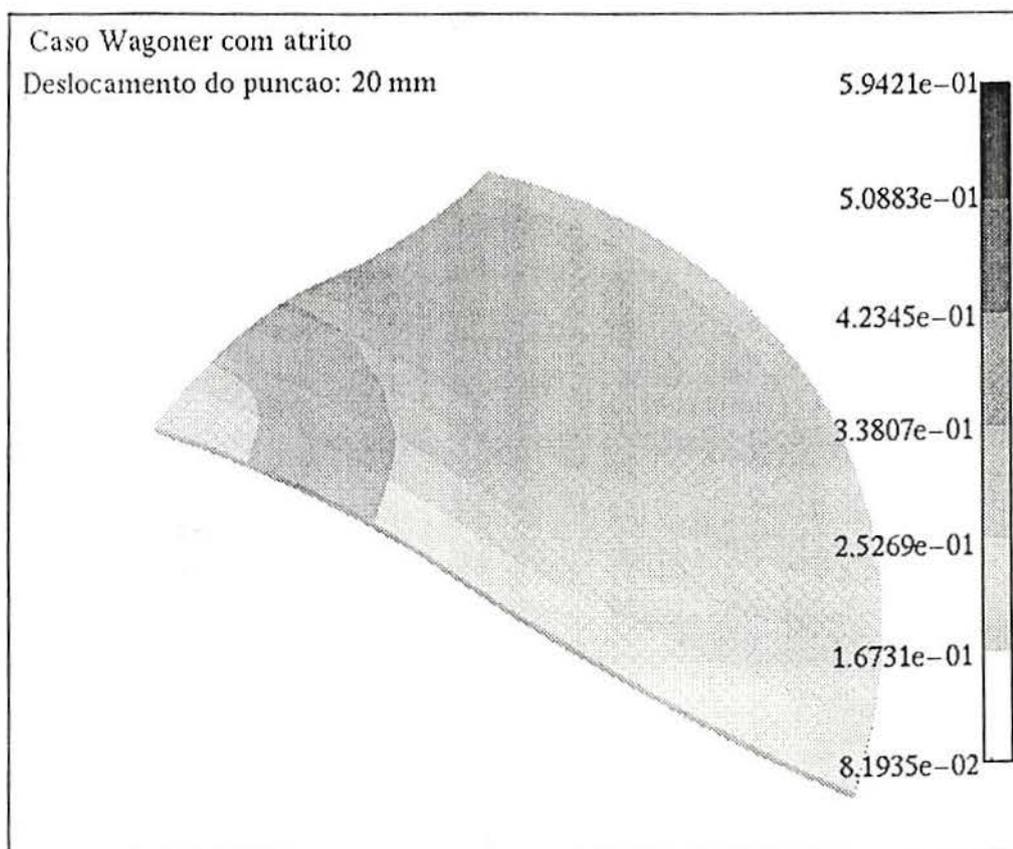
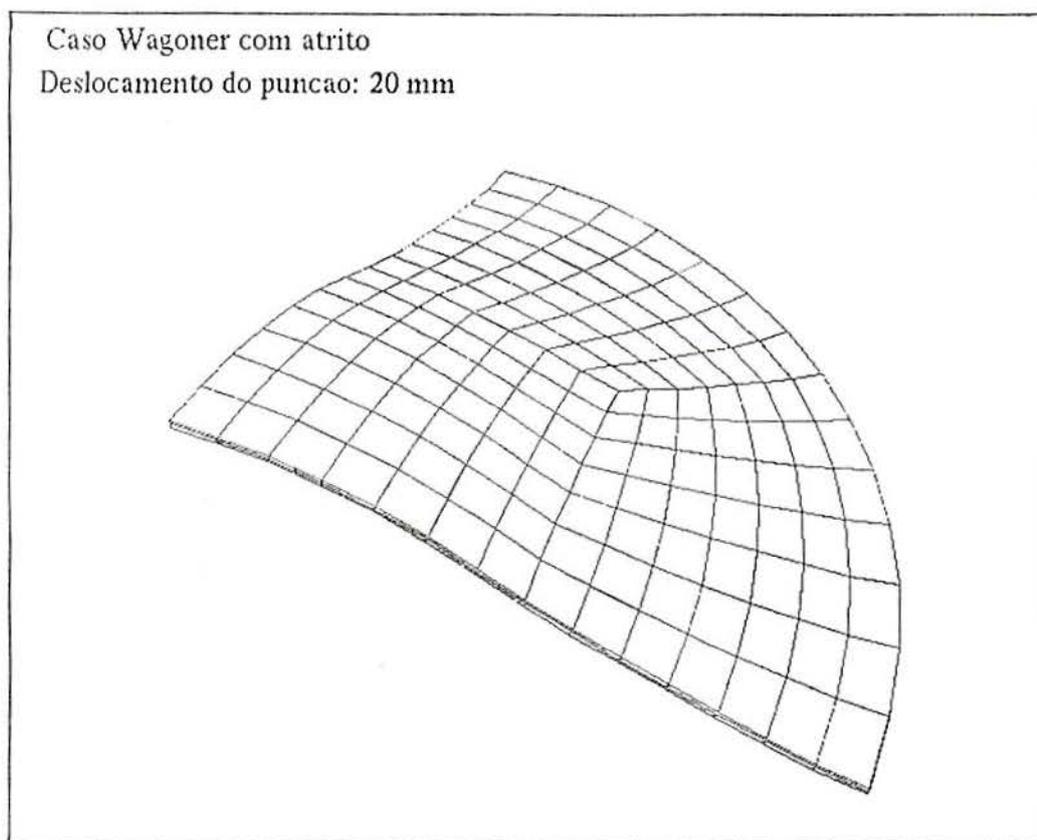


**Figura (7.4.4.4)**  
**(a) Deformada e (b) deformação plástica equivalente para uma indentação de 20 mm (sem atrito).**



**Figura (7.4.4.5)**  
**(a) Deformada e (b) deformação plástica equivalente para uma indentação de 40 mm (sem atrito).**

Observa-se então que a deformação máxima está situada bem no centro da placa. Se o mesmo caso é feito com atrito ( $K_T = 5 \times 10^3$  e  $\mu = 0.15$ ), observa-se que a zona de estrição desloca-se como mostra as figuras (7.4.4.6) e (7.4.4.7).



**Figura (7.4.4.6)**  
**(a) Deformada e (b) deformação plástica equivalente para uma indentação de 20 mm (com atrito).**

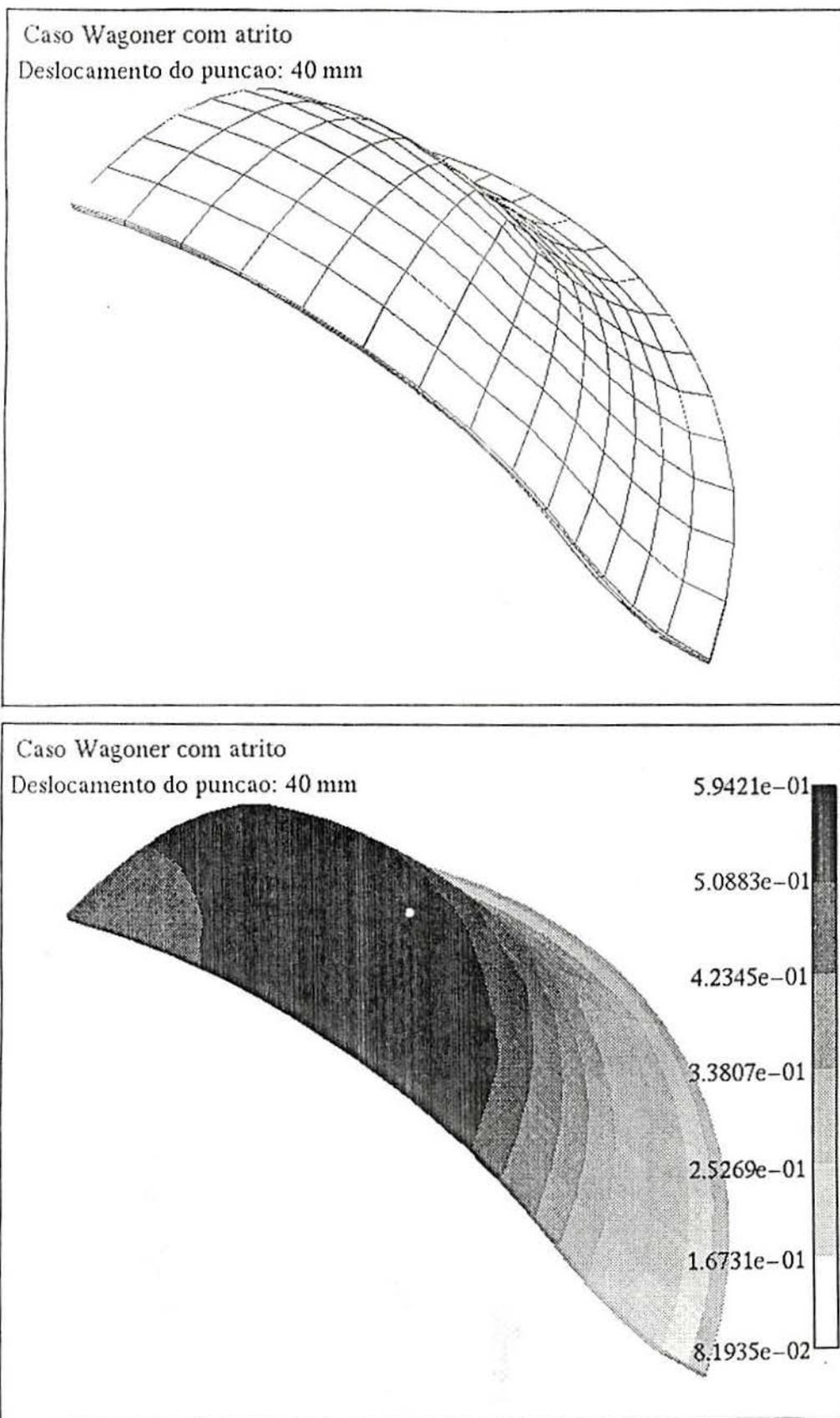
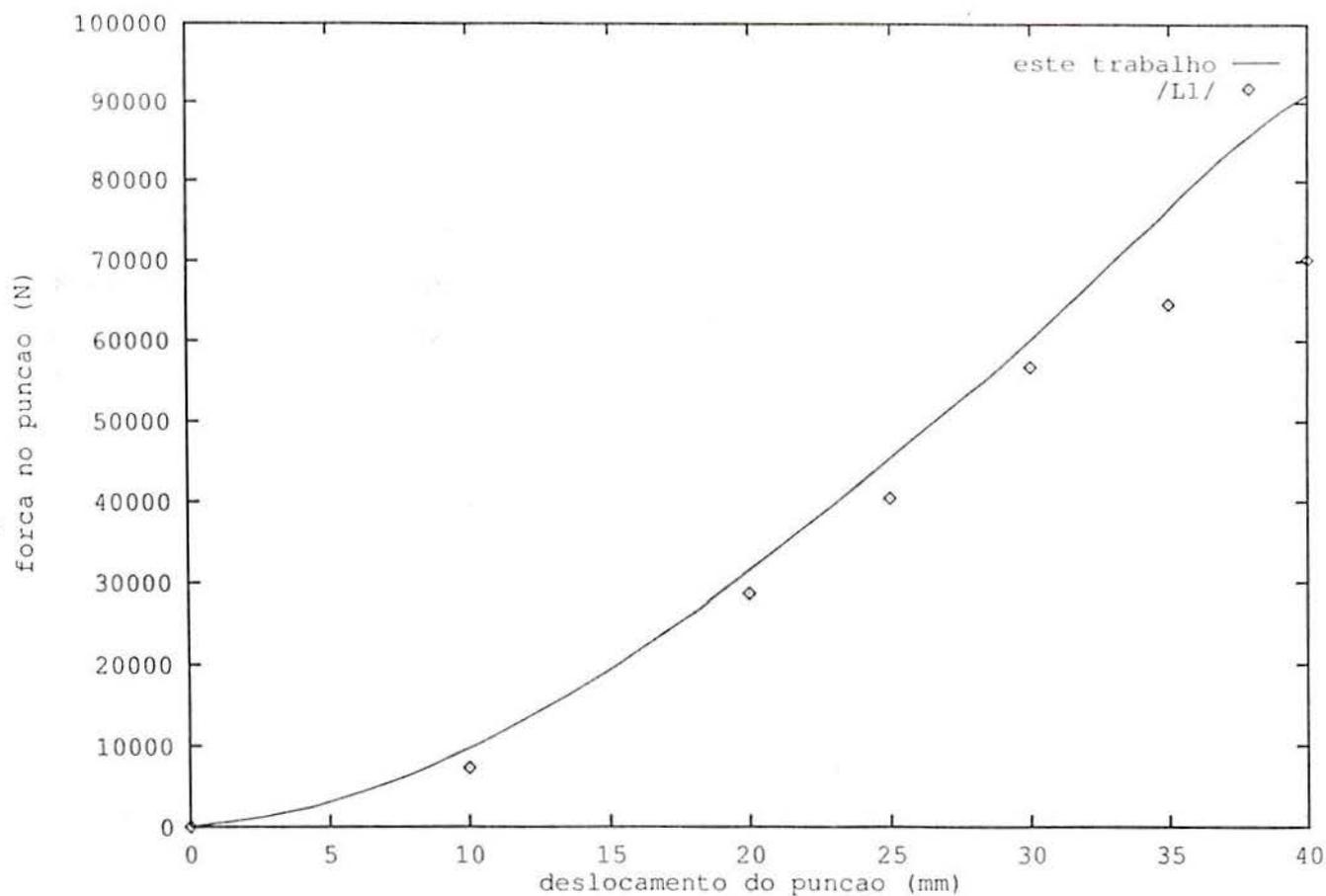
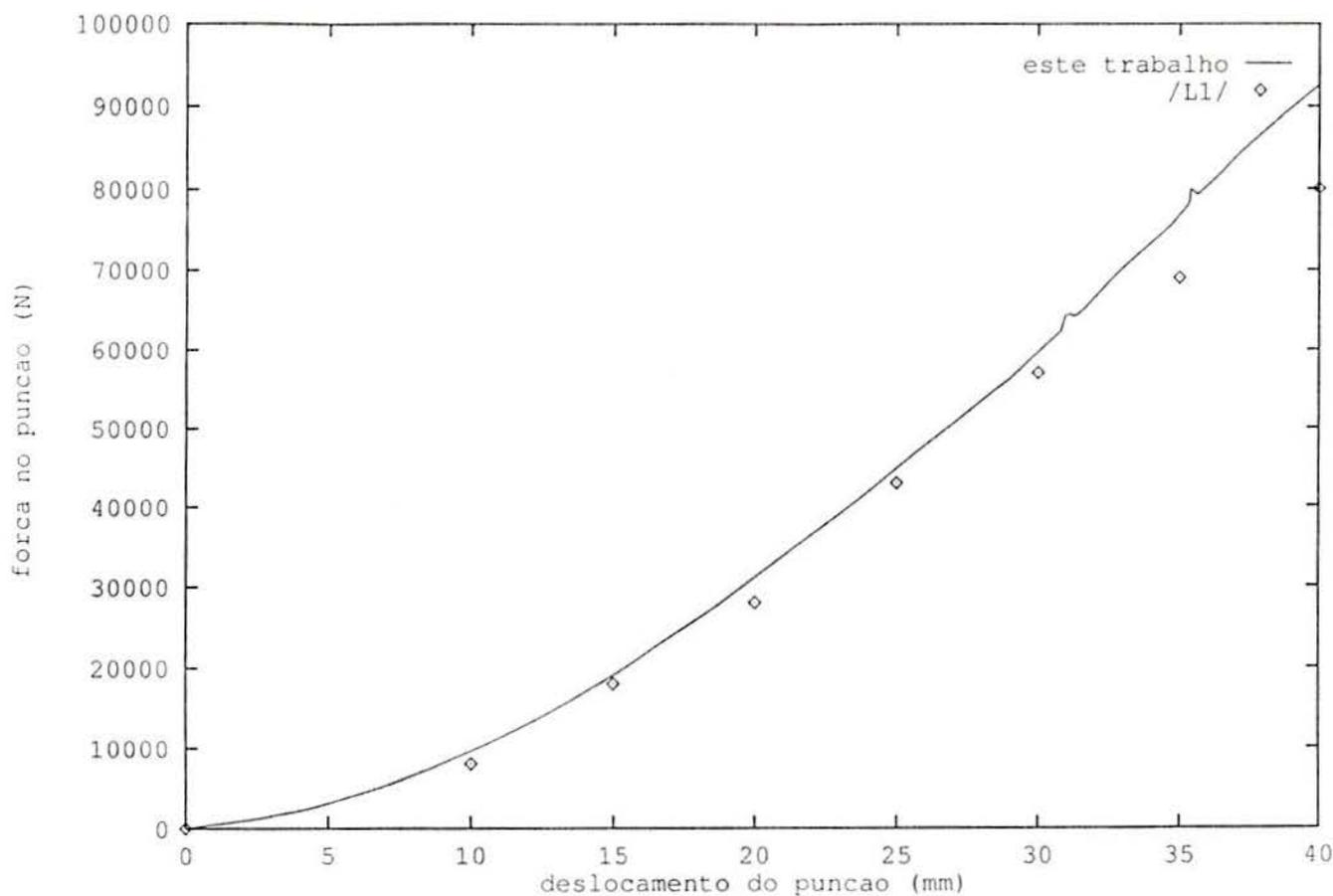


Figura (7.4.4.7)  
(a) Deformada e (b) deformação plástica equivalente para uma indentação de 40 mm (com atrito).

A força de conformação para o caso com atrito é fornecida na figura (7.4.4.8), junto aos resultados médios fornecidos no relatório de Lee et al /L1/. O mesmo é feito para o caso com atrito, na figura (7.4.4.9).



**Figura (7.4.4.8)**  
**Comparação de resultados, caso Wagoner sem atrito**



*Figura (7.4.4.9)  
Caso com atrito.*

A tabela (7.4.4.1) fornece o número de passos de tempo/iterações para os dois casos (sem e com atrito).

CASO	NUM. ELEM.	NUM. ITER.	NUM. DE PASSOS
a	294	177	84
b	294	191	90

*Tabela (7.4.4.1)  
Performace do caso 'Wagoner' (a = sem atrito; b =  
com atrito). Deslocamento de 40 mm do punção.*

A figura (7.4.4.10) compara os resultados aqui obtidos de deformação logarítmica com resultados médios fornecidos no relatório de Lee et al /L1/.

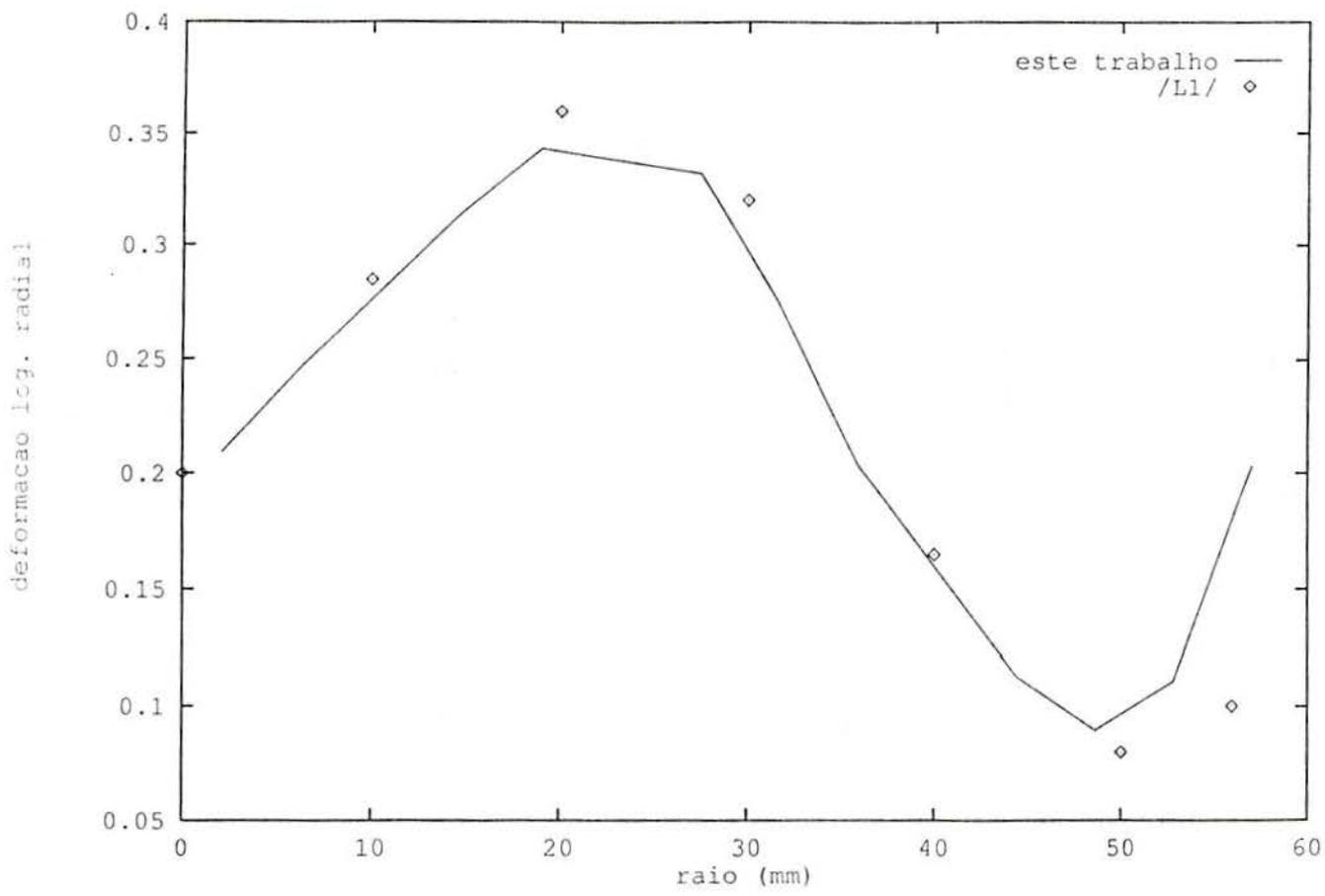


Figura (7.4.4.10)  
Comparação de resultados, caso Wagoner com atrito  
indentação de 40 mm.

De forma similar ao item (7.4.1), pode-se então concluir que também para o caso de superfícies de dupla curvatura, tanto a projeção ortogonal como a determinação do sistema de eixos locais é adequada.

## 7.5 CONTATO ENTRE CORPOS FLEXÍVEIS 3D

### 7.5.1 IMPACTO LONGITUDINAL ENTRE BARRAS

Este é um exemplo acadêmico clássico, mas que serve como um bom teste para o algoritmo de contato 3D entre corpos flexíveis, já que o contato é a única não linearidade envolvida. O problema consiste no impacto frontal de duas barras elásticas cujas características são:

$$\begin{aligned} E &= 1 \text{ N/cm}^2 \\ \nu &= 0 \\ \rho &= 0.01 \text{ kg/cm}^3 \end{aligned}$$

As barras têm dimensões idênticas, ou seja, têm uma seção de 1 x 1 cm e um comprimento de 5 cm. A barra A (ver figura (7.5.1.1)) é animada com um movimento de 1 cm/s, enquanto a barra B está parada.

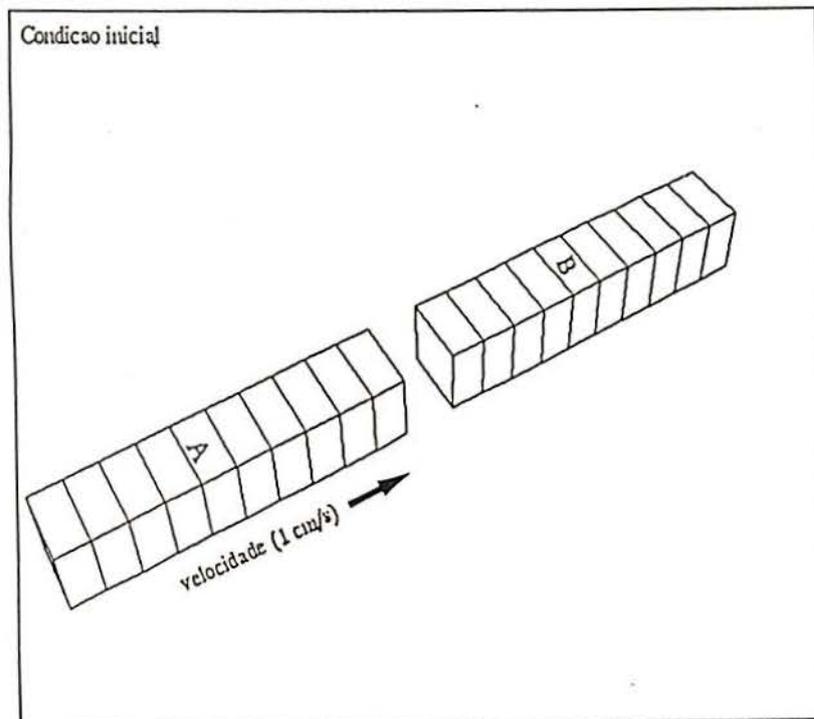


Figura (7.5.1.1)  
Condição inicial do impacto longitudinal de duas barras.

Da teoria clássica da elasticidade (ver também /T1/), quando a barra A impacta a barra B, sabe-se que:

a) Duas ondas de compressão formam-se e propagam-se em direção às extremidades.

b) A velocidade das barras será igual e valerá

$$V_A/2 = 0.5 \text{ cm/s}$$

(Ver figura (7.5.1.2))

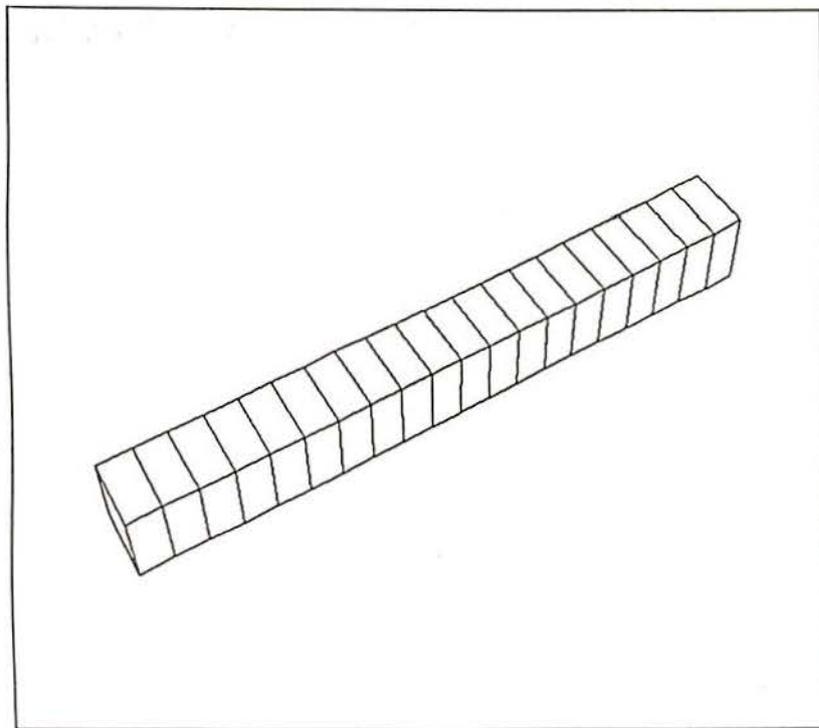


Figura (7.5.1.2)  
Configuração das barras 0.5 seg. após impacto.

As ondas vão refletir-se nas extremidades das barras e vão reencontrar-se na superfície de contato num tempo  $2 l/c$ , onde:

$l$  = comprimento da barra (5 cm)

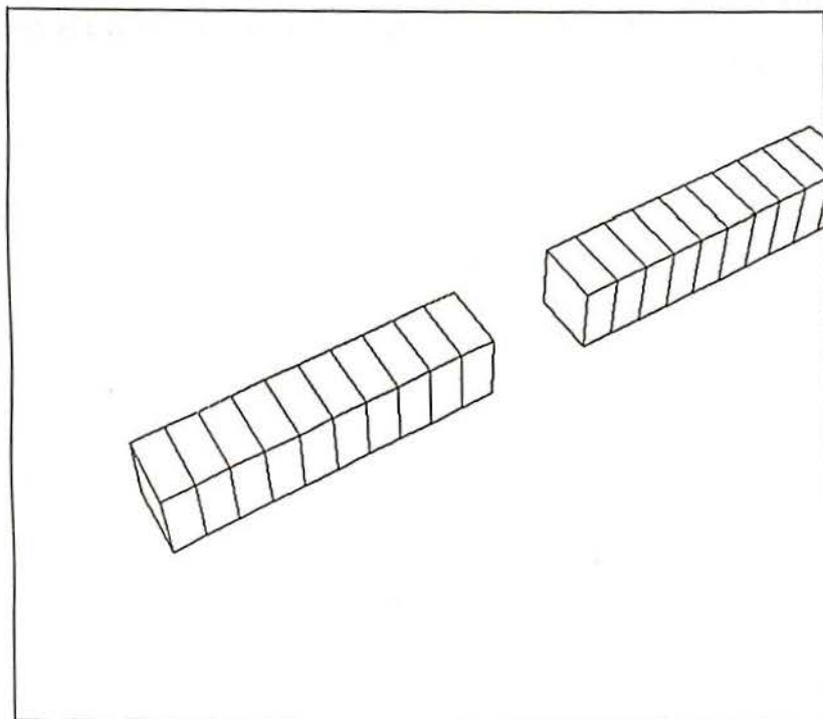
$c$  = velocidade de propagação das ondas de pressão no meio (que vale 10 m/s para o exemplo dado).

Isto quer dizer que, o reencontro das ondas na superfície de contato, ocorrerá 1 segundo após o impacto. Neste instante deve haver uma reversão de velocidades entre as barras, ou seja:

$$V_B = 1 \text{ cm/s}$$

$$V_A = 0 \text{ cm/s}$$

(Ver figura (7.5.1.3))



*Figura (7.5.1.3)*  
Configuração das barras 3 seg. após impacto.

Pode-se ver mais claramente a reprodução numérica destes fenômenos na figura (7.5.1.4), que mostra os deslocamentos das superfícies de contato.

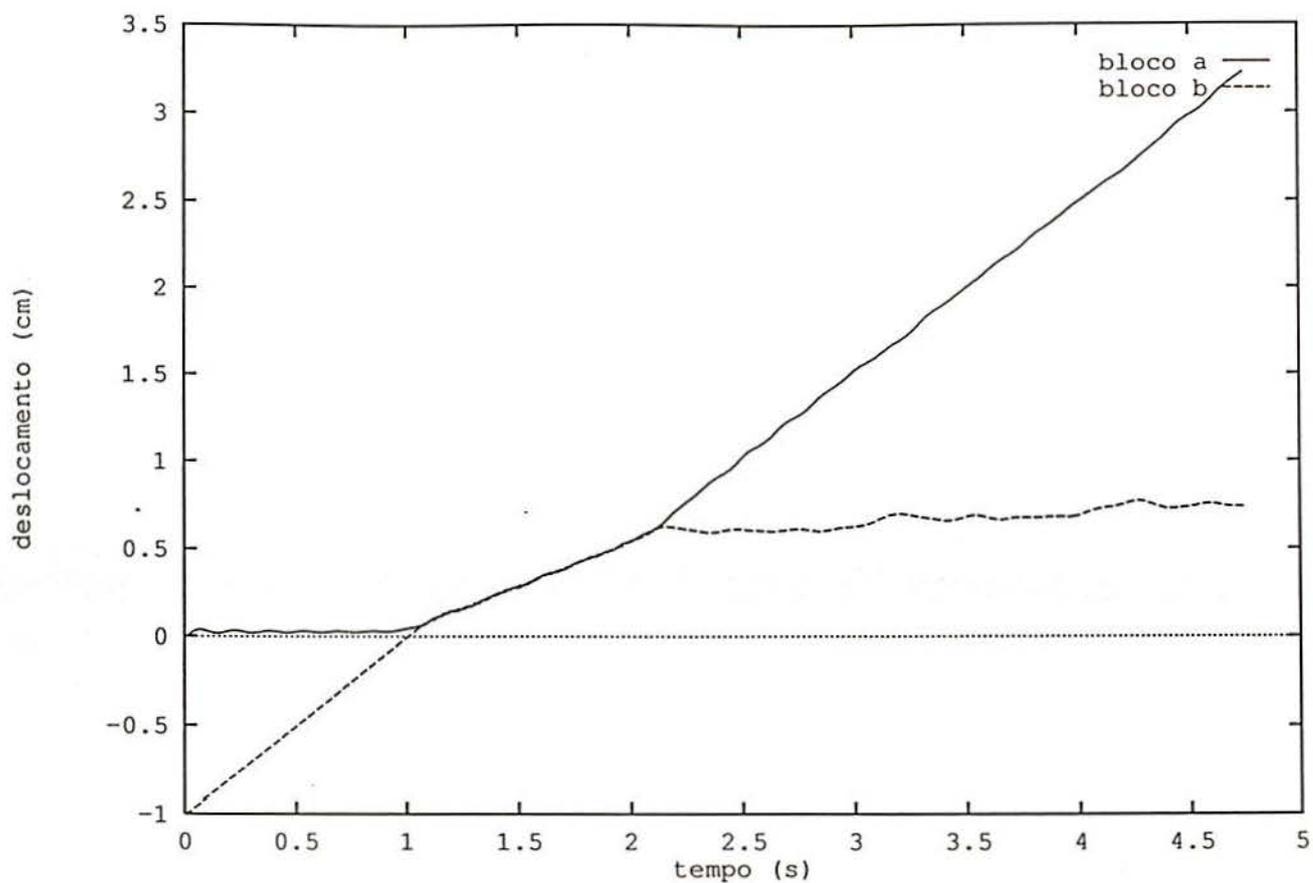


Figura (7.5.1.4)

*Deslocamentos (no tempo), das superfícies de contato.*

#### 7.5.2 IMPACTO ENTRE DOIS TUBOS

Este é um problema no qual dois tubos flexíveis iguais (mesma geometria e material) colocados transversalmente, chocam-se a uma velocidade de 35 m/s (cada cilindro). Geometria, juntamente com a malha empregada é fornecida na figura (7.5.2.1).

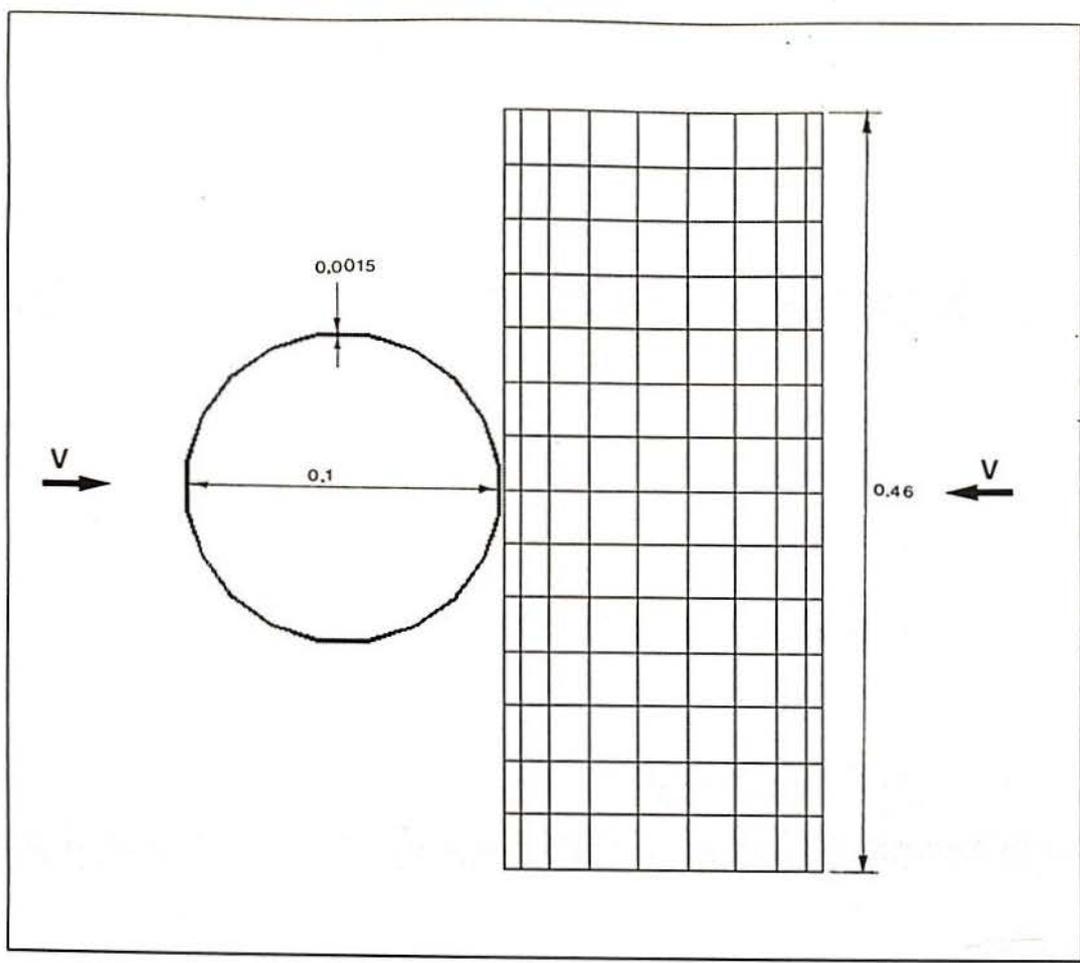


Figura (7.5.2.1)  
Malha e geometria

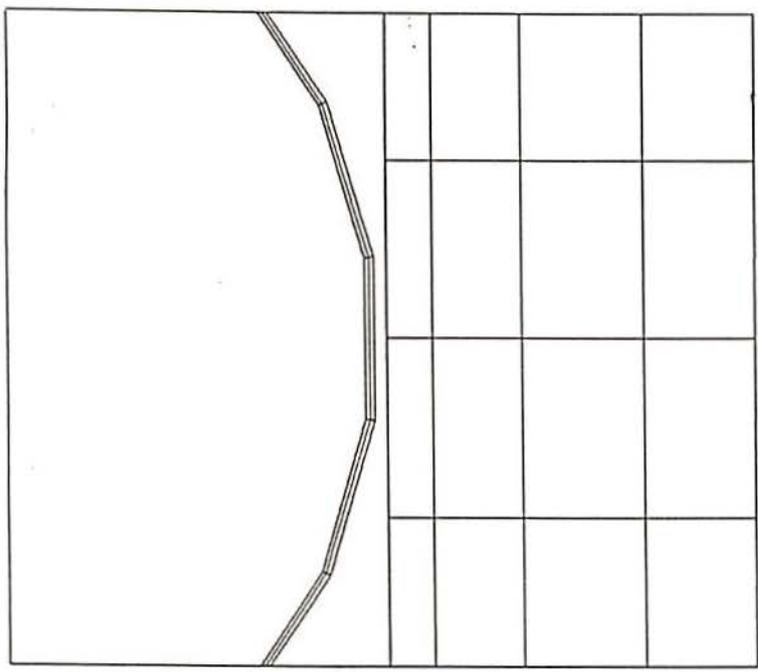


Figura (7.5.2.2)

Dois elementos foram empregados na espessura, conforme mostra a figura (7.5.2.2). Uma penalidade de  $1 \times 10^{11}$  foi utilizada.

As características do material valem:

$$\begin{aligned} E &= 25 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ \sigma_v &= 2 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \\ H &= 630 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \\ \rho &= 7840 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned}$$

As figuras (7.5.2.3 a,b,c) mostram as deformadas em 3 tempos do impacto:

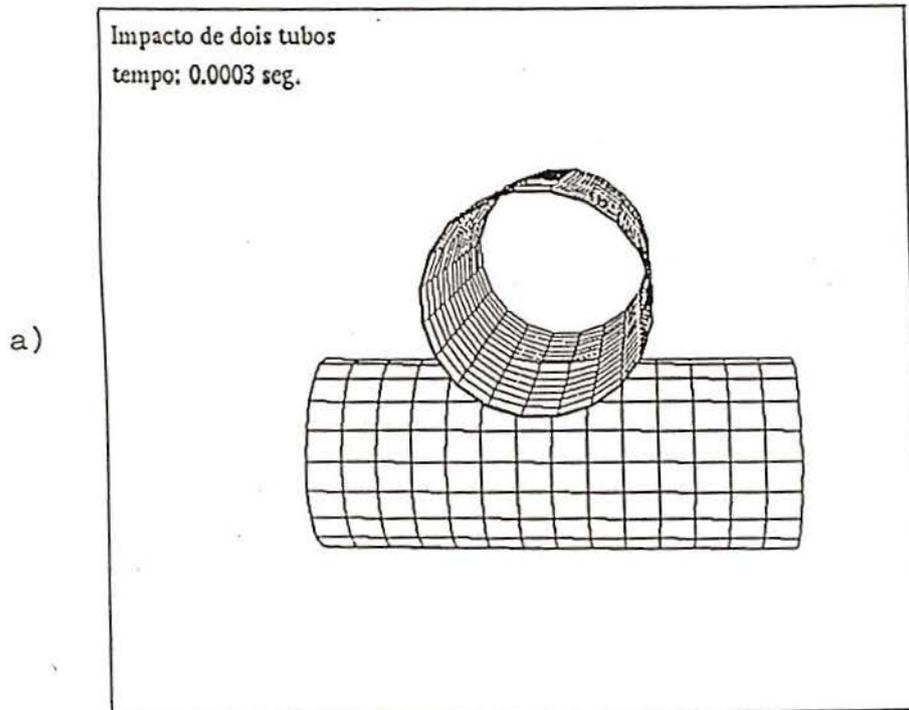
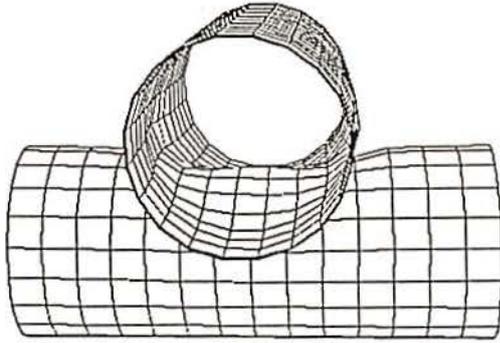


Figura (7.5.2.3)  
Deformada

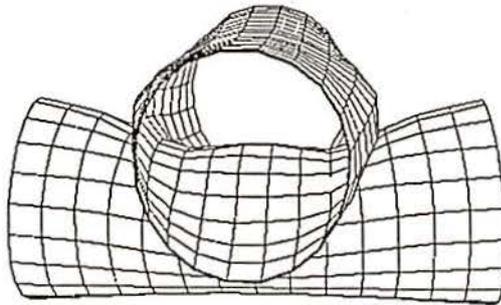
b)

Impacto de dois tubos  
tempo: 0.001 seg.



c)

Impacto de dois tubos  
tempo: 0.002 seg.



*Figura (7.5.2.3)*  
*Deformadas*

Este mesmo exemplo foi feito por Zhong e Nilsson /Z5/, e apesar destes autores terem empregado elementos de casca, existe um aparente acordo das deformadas.

Observa-se também que não existem interpenetrações aparentes e a deformada mantém-se simétrica.

Pode-se concluir que o algoritmo proposto no capítulo 6, apesar de simples, ao menos neste dois exemplos propostos apresentou bons resultados.

## 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Toda implementação computacional feita neste trabalho, procurou seguir a mesma metodologia do sistema base (METAFOR /P1/). Assim o processo de integração temporal de pressões de contato adotado mostrou-se objetivo e incrementalmente objetivo através do uso do método da rotação instantânea final. O método exige o cálculo das pressões em eixos locais. A determinação destes eixos no caso 3D, contudo, mostrou-se não ser uma questão trivial.

A obtenção das matrizes tangentes aparentemente foi correta em função dos bons resultados obtidos em termos de velocidade de convergência no método de Newton-Raphson. Mesmo o processo de integração espacial das pressões de contato (caso 2D), não acarretou problemas de convergência. Não se deve esquecer, contudo, que o cálculo da matriz tangente do elemento volumétrico se faz via perturbação numérica. Este processo de cálculo custa extremamente caro computacionalmente e seu uso justifica-se apenas para uma primeira etapa de implementação computacional. Portanto é necessário futuramente explicitar o cálculo da matriz tangente.

Quando trabalha-se com o caso de contato entre corpos flexíveis (casos sempre explícitos), o algoritmo apresentou bons resultados, embora existam inúmeras possibilidades de aprimorar o processo de pesquisa global do contato que permitem um ganho em tempo nesta etapa

do cálculo, o que deverá ser explorado nos futuros desenvolvimentos do código. Além disto, também será necessário tornar este processo *implícito*, o que permitirá o tratamento de problemas quase-estáticos ou casos de impacto em baixa velocidade entre corpos flexíveis.

No último item apresentado no capítulo de exemplos, ficou claro a necessidade da implementação de um elemento de casca ao programa METAFOR. Isto permitirá o tratamento de problemas complexos como o impacto de veículos.

O programa METAFOR foi otimizado para emprego em computadores escalares. Portanto seu uso em máquinas vetoriais não é dos mais satisfatórios. Por exemplo num Cray YMP2E a velocidade obtida em milhões de operações de ponto flutuante (Mflops) foi de aproximadamente 17, enquanto esta máquina é capaz de velocidades de 300 Mflops. Assim um investimento adicional será necessário para que se possa tirar uma maior performance deste programa neste tipo de máquina, antes que seja possível o tratamento de problemas de grande porte, como o citado no parágrafo acima. Da mesma forma poder-se-á verificar a eficiência do algoritmo de contato 3D entre corpos flexíveis, que em função de sua simplicidade certamente possibilitará um alto grau de vetorização.

## REFERÊNCIAS

### B

- B1 BENSON, D. J. & HALLQUIST J. O.  
A single surface contact algorithm for the post buckling analysis of shell structures.  
Comp. Meth. in App. Mech. in Eng. , VOL 78, p 141-163, 1990.
- B2 BATHE, K-J & CHAUDHARY, A.  
A solution method for planar and axisymmetric contact problems.  
Int. j. for num. methods in eng., VOL. 15, p 1862-1867, 1985.
- B3 BECKERS, P.  
Introduction à la C.A.O.  
Notas de aula (em francês), Faculté de Sciences Appliquées, ULG, Liège, Bélgica, 1992.
- B4 BELYTSCHKO, T. & NEAL, M. O.  
Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods.  
Int. j. for num. methods in eng., VOL. 31, p 547-572, 1991.
- B5 BELYTSCHKO, T. & YEH, L. S.  
The splitting pinball method for contact-impact problems.  
Comp. Meth. in App. Mech. and Eng., VOL 105, p 375-393, 1993.

- B6 BELYTSCHKO, T. & LIN, J. I.  
A three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion.  
Comp. & Structures, VOL 25, p 95-104, 1987.
- B7 BITTENCOURT, E. et all.  
Utilização da sub-incrementação na solução de problemas não lineares.  
Anais XXV Jornadas Sul-Americanas de Eng. Estrutural, Porto Alegre, 11-15 de novembro, VOL 1, p 295-306, 1991.
- B8 BITTENCOURT, E.  
Seminário de Doutorado  
Relatório Interno, CPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1992.

## C

- C1 COURTNEY-PRATT, J. S. & EISNER, E.  
The effect of a tangencial force on the contact metallic bodies.  
Proc. Royal Soc. A, VOL 238, p 529-550, 1957.
- C2 CHARLIER, R.  
Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis.  
Tese de doutorado (em francês), Faculté de Sciences Appliquées, ULG, Liège, Bélgica, 1987.
- C3 CHENG, J. H. & KIKUCHI, N.  
An incremental constitutive relation of unilateral contact friction for large deformation analysis.  
J. of applied mech., VOL. 52, p 639-648, 1985.

## F

- F1 FLANAGAN, D. P. & BELYTSCHKO, T.  
Eigenvalues and stable time steps for the uniform strain hexahedron and quadrilateral.

J. Appl. Mech., VOL. 51, p 35-40, 1984.

- F2 FREDRIKSSON, B.  
Non-linearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems.  
Comp. and Struct., VOL 6, p 281-290, 1976.
- F3 FREY F.  
L'analyse statique non linéaire des structures par la methode des éléments finis et son application a la construction metallique.  
Tese de doutorado (em francês), Faculté de Sciences Appliquées, ULG, Liège, Bélgica, 1978.

#### G

- G1 GROEHS, A. G.  
ESFINGE: Uma linguagem orientada para o cálculo elasto-plástico de estruturas.  
Tese de Doutorado, Coordenadoria dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia (COPPE), RJ, 1983.
- G2 GARCIA GARINO, C. & OLIVER, J.  
Simulation of sheet metal forming processes using a frictional finite strain elastoplastic model.  
First European Conference on Numerical Methods in Engineering, 7-11 sept., p 185-192, 1992.
- G3 GIANNAKOPOULOS, A. E.  
The return mapping method for the integration of friction constitutive relations.  
Comp. & Struct., VOL 32, p 157-167, 1989.

#### H

- H1 HALLQUIST, J. O.  
Theoretical manual for DYNA-3D  
Lawrence Livermore National Laboratories, Livermore, USA, 1983.

- H2 HUGHES, T. J. R. & WINGET, J.  
Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis.  
Int. J. for Num. Meth. in Eng., VOL. 15, p 1862-1867, 1980.

## J

- J1 JOHNSON, K. L.  
Contact Mechanics.  
Cambridge University Press, New York, USA, 1985.

## K

- K1 KIKUCHI, N.  
A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems.  
Int. j. for num. meth. in eng., VOL. 18, p 343-350, 1982.
- K2 KIKUCHI, N. & SONG, Y. J.  
Penalty/finite element approximation of a class of unilateral problems in linear elasticity.  
Quart. app. math., VOL 39, p 1-22.

## L

- L1 LEE, J. K. & WAGONER, R. H., NAKAMASHI, E.  
A benchmark test for sheet forming analysis.  
Report Number ERC/NSM-S-90-22, The Ohio State Univ., USA, 1990.

## M

- M1 MALVERN, L. E.  
Introduction to the mechanics of a continuous medium.  
Prentice Hall, Englewood, USA, 1969.
- M2 MOSS, W. C.  
On instabilities in large deformation simple shear loading.  
Comp. meth. in app. mech. and eng., VOL. 46, p 329-338, 1984.
- M3 MICHALOWSKI, R. & MROZ,  
Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems.  
Arch. mech., VOL 30, p 259-276, 1978.

## N

- N1 NAGTEGAAL, J. C.  
On the implementation of inelastic constitutive equation with special reference to large deformation problems.  
Comp. meth. in app. mech. and eng., VOL. 33, p 469-484, 1982.

## O

- O1 ODEN, J. T. & MARTINS, J. A. C.  
Models and computational methods for dynamic friction phenomena.  
Comp. meth. in appl. mech. and eng., VOL. 52, p

527-634, 1985.

- O2 ODEN, J. T. & LIN,  
On the general rolling contact problem for finite  
deformations of viscoelastic cylinder.  
Comp. meth. in Appl. mech. and eng., VOL. 57, p  
297-367, 1986.
- O3 ODEN, J. T. & CAREY, G. F.  
Finite element - Special problems in solids mechanics,  
Vol. 5  
Prentice Hall, Englewood, USA, 1984.
- O4 OWEN, D. R. J. & HINTON, E.  
Finite elements in plasticity: theory and practice.  
Pineridge Press, Swansea, UK, 1980.

P

- P1 PONTHOT, J. P.  
Methodologie eulerienne-lagrangienne et test par  
éléments finis pour l'étude des grandes  
déformations thermomécanique.  
Tese de Doutorado (em francês), Faculté de Sciences  
Apliquées, ULG, Liège, Belgique, 1994.
- P2 PONTHOT, J. P.  
Modelisation des processus de formage secondaire des  
materiaux.  
Notas de aula (em francês), Faculté de Sciences Apliquées,  
ULG, Liège, Belgique, 1992.
- P3 PERIC, D. & OWEN, D. R. J.  
Computacional model for 3-D contact problems with  
friction based on the penalty method.  
Int. j. for num. meth. in eng., VOL 35, p 1289-1310, 1992.

R

- R1 REDDY, J. N.

Applied functional analysis and variational methods in engineering.

McGraw Hill, New York, USA, 1986.

S

- S1 STAINIER, L.  
Calcul optimal des matrices d'éléments finis pour les milieux incompressibles en grandes déformations  
 Relatório interno (em francês), ULG, Liège, Bélgica, 1992.
- S2 SHIAU, Y. C. & KOBAYASHI, S.  
 Three-dimensional finite element analysis of open-die forging.  
Int. j. for num. meth. in eng., VOL 25, p 67-85, 1988.
- S3 SAMCEF  
Introdution a BACON  
 SAMTECH, Liège, Bélgica, 1993.
- S4 SIMO, J. C.  
 A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition. Part I  
Comp. meth. in Appl. mech. and eng., VOL. 66, p 199-219, 1988.
- S5 SANDIA NATIONAL LABORATORIES  
Full-Scale Turbine Missile Casing Tests  
 EPRI NP-2741, Albuquerque, New Mexico, USA, 1983.
- S6 SIMO, J. C. & JU, J. W.  
 On continuum damage-elastoplasticity at finite strains.  
Comp. Mech., VOL. 5, 1989
- S7 SCHREYER, H. L. & KULAK, R. L. & KRAMER, J. M.  
 Accurate numerical solution for elastoplastic models.  
J. Pr. Vessel Tech., ASME 101, p 226-234, 1979.
- S8 SIMO, J. C. & TAYLOR, R.L.  
 Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity.  
Comp. Meth. in App. Mech. Eng., VOL 48, p 101-118, 1985.

## T

- T1 TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N.  
Theory of Elasticity  
McGraw-Hill, New York, USA, 1970.
- T2 TAYLOR, L. M. & BECKER, E. B.  
Some computational aspects of large deformation, rate  
dependant plasticity problems.  
Comp. meth. in Appl. mech. and eng., VOL. 41, p  
251-277, 1983.

## V

- V1 VAN DER LUGT, J.  
A finite element method for the simulation of  
thermo-mechanical contact problems in forming  
processes.  
Tese de Doutorado, Twente University, Holanda, 1988.

## X

- X1 XIANGJUN, Q., PLESHA M. E. & MEYER, D. W.  
Stiffness matrix integration rules for contact-friction  
finite elements.  
Comp. meth. in app. mech. and eng., VOL. 93, p 385-399,  
1991.

## W

- W1 WRIGGERS, P., VU VAN, T. & STEIN, E.  
Finite Element formulation of large deformation  
impact-contact problems with friction.  
Compt. & Structures, VOL. 37, p 319-331, 1990.
- W2 WRIGGERS, P.  
On consistent tangent matrices for frictional contact  
problems.  
Proc. of NUMETA '87, Swansea, UK, 1987.

## Z

- Z1 ZHONG, Z. & MACKERLE, J.  
Static contact problems - a review.  
Eng. comp., VOL. 9, p 3-37, 1992.
- Z2 ZHU, Y.  
Contribution to the local approach of fracture in  
solid dynamics.  
Tese de doutorado, Faculté de Sciences Appliquées, ULG,  
Liège ,Belgica, 1993.
- Z3 ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L.  
The finite element method.  
McGraw-Hill, London, UK, 1989.
- Z4 ZHONG, Z-H.  
Finite element procedures for contact-impact problems  
Oxford Un. Press, New York, USA, 1993.
- Z5 ZHONG, Z-H. & NILSSON, L.  
A contact searching algorithm for general 3D  
contact-impact problems.  
Comp. & Struct., VOL. 34, p. 327-335, 1990.

## ANEXO 1: RELAÇÕES CINEMÁTICAS

### A.1.1 O TENSOR GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO

Seja um corpo que ocupa duas posições diferentes no espaço euclidiano. Uma configuração será considerada como de referência. Um ponto qualquer nesta configuração será identificada como  $\underline{X}$ . O mesmo ponto na outra configuração, chamada configuração atual, é identificado como  $\underline{x}$ .

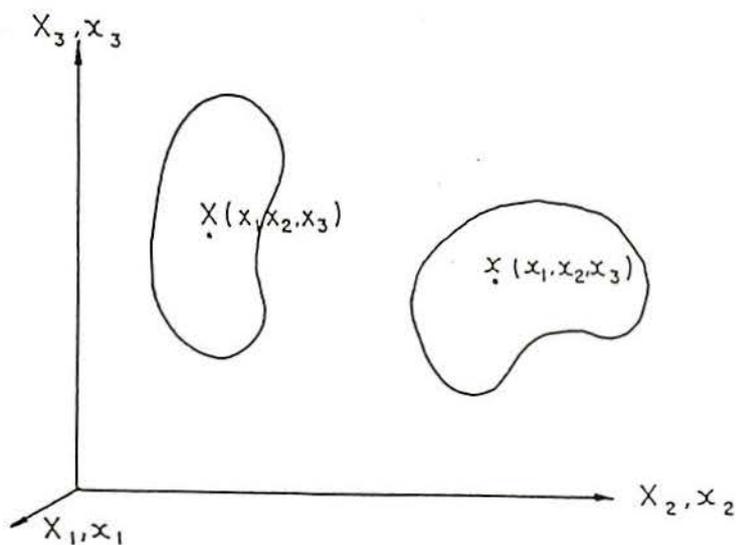


Figura (A.1.1.1)

Pode-se escrever a relação seguinte

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad (\text{A.1.1.1})$$

e

$$\underline{X} = \underline{X}(\underline{x}, t) \quad (\text{A.1.1.2})$$

A variação do comprimento  $dx$  pode ser definida fazendo um desenvolvimento em série:

$$d\underline{x} = \partial\underline{x}/\partial\underline{X} d\underline{X} + \partial^2\underline{x}/\partial\underline{X}^2 d\underline{X}^2 + \dots \quad (\text{A.1.1.3})$$

Será suposto que os termos de mais alta ordem são desprezíveis. Pode-se escrever então que:

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X} \quad (\text{A.1.1.4})$$

$$\underline{F} = \partial\underline{x}/\partial\underline{X} \quad \text{ou} \quad F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j \quad (\text{A.1.1.5})$$

Onde  $F$  é denominado o gradiente de deformação entre a configuração de referência e a atual.

O tensor  $F$  pode sempre ser decomposto de forma única em uma rotação pura ( $R$ ) e uma deformação pura ( $U$  ou  $V$ ) utilizando a chamada **Decomposição polar**:

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R} \quad (\text{A.1.1.6})$$

$R$  é um tensor ortogonal ou

$$\underline{R}^T \underline{R} = \underline{I} \quad (\text{A.1.1.7})$$

onde  $I$  é o tensor identidade.

$U$  e  $V$  são chamados tensores de deformação direita e esquerda,

respectivamente. Eles são simétricos e positivos-definidos.  $\underline{U}$  é uma deformação aplicada na configuração original, enquanto que  $\underline{V}$  é aplicada sobre a configuração rotada. De (A.1.1.6),

$$\underline{V} = \underline{R} \underline{U} \underline{R}^T \quad (\text{A.1.1.8})$$

$$\underline{U} = \underline{R}^T \underline{V} \underline{R} \quad (\text{A.1.1.9})$$

### A.1.2 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

Seja a variação de comprimento  $dS$  definido na figura (A.1.2.1)

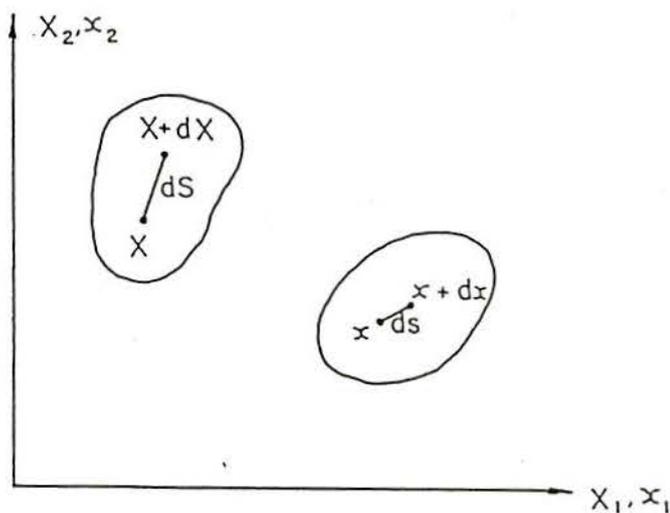


Figura (A.1.2.1)

$$ds^2 = d\underline{x}^T d\underline{x} \quad (\text{A.1.2.1})$$

$$ds^2 = d\underline{x}^T d\underline{x} \quad (\text{A.1.2.2})$$

Da equação (A.1.1.5), encontra-se:

$$ds^2 = d\underline{x}^T \underline{F}^T \underline{F} d\underline{X} \quad (\text{A.1.2.3})$$

$$dS^2 = d\underline{x}^T \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1} d\underline{x} \quad (\text{A.1.2.4})$$

Se substrai-se (A.1.2.3) de (A.1.2.4),

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= d\underline{x}^T (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) d\underline{x} \\ &= d\underline{x}^T (\underline{I} - \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1}) d\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{A.1.2.5})$$

Observa-se que as quantidades entre parênteses em (A.1.2.5) podem ser consideradas medidas de deformação de  $dS$ . Além disto elas são nulas no caso de movimentos rígidos. Estes termos servem para definir alguns tensores de deformações bem conhecidos na literatura:

$$\underline{E}^G = 1/2 (\underline{C} - \underline{I}) \quad (\text{A.1.2.6})$$

$$\underline{E}^A = 1/2 (\underline{I} - \underline{B}^{-1}) \quad (\text{A.1.2.7})$$

onde

$$\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T = \underline{V}^2 \quad (\text{A.1.2.8})$$

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{U}^2 \quad (\text{A.1.2.9})$$

$\underline{E}^G$  = Tensor de Green-Lagrange  
 $\underline{E}^A$  = Tensor de Almansi

A relação entre estes dois tensores é dada por:

$$\underline{E}^A = \underline{F}^{-T} \underline{E}^G \underline{F}^{-1} \quad (\text{A.1.2.10})$$

Uma outra medida de deformação importante é o tensor logarítmico ou natural, dado por:

$$\underline{E}^N = \ln \underline{U} = 1/2 \ln (\underline{F}^T \underline{F})$$

Utilizando a relação (A.1.2.6),

$$\underline{E}^N = 1/2 \ln (2\underline{E}^G + \underline{I}) \tag{A.1.2.11}$$

### A.1.3 O TENSOR GRADIENTE DE VELOCIDADE

O tensor gradiente de velocidade é definido na configuração atual e vale:

$$\underline{L} = \dot{\underline{x}} / \underline{\partial x} = (\dot{\underline{\partial x}} / \underline{\partial x}) (\underline{\partial x} / \underline{\partial x}) = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \tag{A.1.3.1}$$

Pode-se decompor este tensor em uma parte simétrica e anti-simétrica como:

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \tag{A.1.3.2}$$

onde  $\underline{D}$  é a taxa de deformação dada por:

$$\underline{D} = \underline{D}^T = 1/2 (\underline{L} + \underline{L}^T) \tag{A.1.3.3}$$

e  $\underline{W}$  é a taxa de rotação que vale:

$$\underline{W} = -\underline{W}^T = 1/2 (\underline{L} - \underline{L}^T) \tag{A.1.3.4}$$

Pode-se ainda estabelecer uma relação entre a taxa de deformação

$\underline{D}$  é a taxa do tensor de Green-Lagrange com a expressão:

$$\underline{F}^T \underline{D} \underline{F} = \dot{\underline{E}}^G \quad (\text{A.1.3.5})$$

Observa-se que  $\underline{D}$  é uma taxa referida à configuração atual e  $\dot{\underline{E}}^G$  é referida à configuração inicial.

Nas soluções do tipo incrementais, onde a configuração de referência está sempre muito próxima da configuração atual, pode-se dizer que:

$$\underline{F} \approx \underline{I} \quad (\text{A.1.3.6a})$$

$$\underline{U} \approx \underline{I} \quad (\text{A.1.3.6b})$$

$$\underline{R} \approx \underline{I} \quad (\text{A.1.3.6c})$$

Neste caso, utilizando as expressões (A.1.3.1), (A.1.3.2) e (A.1.3.6a,b,c), chega-se facilmente à:

$$\underline{D} \approx \dot{\underline{U}} \quad (\text{A.1.3.7})$$

$$\underline{W} \approx \dot{\underline{R}} \quad (\text{A.1.3.8})$$

#### A.1.4 O TENSOR VELOCIDADE ANGULAR

Seja o vetor  $\underline{n}$  que gira com a matéria, sem se deformar. No instante inicial,  $t_0$ , ele é identificado por  $\underline{N}$ :

$$\underline{n} = \underline{R} \underline{N} \quad (\underline{R}_{t=t_0} = \underline{I}) \quad (\text{A.1.4.1})$$

Derivando a expressão precedente com relação ao tempo:

$$\dot{\underline{n}} = \dot{\underline{R}} \underline{N} \quad (\text{A.1.4.2})$$

$$\dot{\underline{n}} = \dot{\underline{R}} \underline{R}^{-1} \underline{n} \quad (\text{A.1.4.2})$$

A velocidade angular  $\underline{\Omega}$  é definida como:

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{R}} \underline{R}^{-1} \quad (\text{A.1.4.3})$$

Assim, a expressão (A.1.4.2) torna-se:

$$\dot{\underline{n}} = \underline{\Omega} \underline{n} \quad (\text{A.1.4.4})$$

Pode-se ver que no caso de um movimento de corpo rígido, onde  $\underline{D}$  é nulo e portanto  $\underline{F} = \underline{R}$ , obtém-se que  $\underline{\Omega} = \underline{W}$ . No entanto, se existe deformação,  $\underline{W}$  e  $\underline{\Omega}$  podem ser bem diferentes.

Na formulação que será aqui utilizada (do tipo incremental) no entanto, utilizando as conclusões do parágrafo (A.1.3), chega-se que:

$$\underline{\Omega} \approx \underline{W} \quad (\text{A.1.4.5})$$

## APÊNDICE 1: LEIS CONSTITUTIVAS EM PEQUENAS DEFORMAÇÕES

As expressões dos parágrafos (2.1) e (2.2) são válidas para um material qualquer. No entanto, para que se possa resolvê-las é necessário estabelecer a relação entre  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{u}$  que dependerá do tipo de material. Apenas dois casos serão aqui estudados: Materiais elásticos e elasto-plásticos.

### Ap.1.1 MATERIAL ELÁSTICO

Neste caso, as tensões de Cauchy devem satisfazer a relação:

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} D_{kl} \quad (\text{Ap.1.1.1})$$

Onde  $\underline{D}$  é a taxa de deformação e o tensor  $\underline{H}$  vem da lei de Hooke da elasticidade linear:

$$H_{ijkl} = k \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G (\delta_{ik} \delta_{jl} - 1/3 \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (\text{Ap.1.1.2})$$

onde, E = Módulo de elasticidade ou de Young

$\nu$  = Coeficiente de Poisson

$G = E / 2(1 + \nu)$

$k = E / 3(1 - 2\nu)$

$\delta$  = delta de Kroennecker

Para o desenvolvimento que segue, é necessário separar as

componentes hidrostáticas e desviadoras de  $\dot{\underline{g}}$ . A componente hidrostática vale:

$$\dot{p} = k D_{mm} \quad (\text{Ap.1.1.3})$$

e a componente desviadora,

$$\dot{s}_{ij} = 2 G D_{ij} \quad (\text{Ap.1.1.4})$$

#### Ap.1.2 MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO

Se um ponto do corpo em estudo é submetido a uma combinação de esforços tal que ocorrem deformações permanentes, considera-se este ponto num regime plástico. (Fisicamente há um movimento de planos atômicos, ou de discordâncias).

Neste caso, pode-se reescrever a lei constitutiva como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} D_{kl} \quad (\text{Ap.1.2.1})$$

Para a determinação do tensor  $\underline{L}$ , duas etapas serão consideradas:

##### 1. Identificação do início da plastificação.

Para identificar o início da plastificação, define-se, no espaço de tensões de Cauchy, uma superfície denominada de plastificação ( $f$ ). Se a combinação de tensões em um ponto da matéria está dentro desta superfície, ele é elástico. Se a combinação de tensões atinge a superfície, o processo de plastificação é iniciado. A região fora da superfície é proibida.

$$\begin{aligned} f(\underline{g}, c) = 0 & \Rightarrow \text{ponto sobre a superfície de plastificação} \\ f(\underline{g}, c) < 0 & \Rightarrow \text{ponto elástico} \end{aligned}$$

onde  $c$  é um conjunto de variáveis que definirá a forma da superfície. Será considerado aqui que a superfície de plastificação depende apenas da tensão de plastificação ( $\sigma_v$ ). Então,

$$f(\underline{g}, c) = f(\underline{g}, \sigma_v) \quad (\text{Ap.1.2.2})$$

Para definir se um ponto, sobre a superfície de plastificação é elástico ou plástico, é necessário definir a condição de consistência:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_v} \dot{\sigma}_v \quad (\text{Ap.1.2.3})$$

Então se  $f = 0$  e:

$$\dot{f} < 0 \quad \Rightarrow \text{ponto elástico} \quad (\text{Ap.1.2.3a})$$

$$\dot{f} = 0 \quad \Rightarrow \text{ponto plástico} \quad (\text{Ap.1.2.3b})$$

## 2. Análise ao longo da plastificação

O tensor taxa de deformação será decomposto em uma parte elástica e uma parte plástica:

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (\text{Ap.1.2.4})$$

Como a deformação plástica é considerada uma deformação instantânea e irreversível, ela não pode ser expressa sob a forma de

tensão. Então, (Ap.1.1.1) pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} (D_{kl} - D_{kl}^p) \quad (\text{Ap.1.2.5})$$

Será utilizado aqui uma plasticidade associada. Neste caso,  $f$  é um potencial de  $D^p$ :

$$D_{ij}^p = \Gamma \partial f / \partial \sigma_{ij} \quad (\text{Ap.1.2.6})$$

Da expressão (Ap.1.2.6) pode-se concluir que a deformação plástica é normal à superfície de plastificação  $f$ . A expressão (Ap.1.2.6) pode ainda ser escrita como:

$$D_{ij}^p = \gamma N_{ij} \quad (\text{Ap.1.2.7})$$

onde  $\gamma$  et  $\underline{N}$  são o módulo e a direção da deformação plástica, respectivamente.

$\dot{\sigma}_v$  define-se como:

$$\dot{\sigma}_v = \gamma q \quad (\text{Ap.1.2.8})$$

onde o  $\gamma$  representa a dependência de  $\sigma_v$  do módulo da deformação plástica. O  $q$  dependerá do material.

Substituindo (Ap.1.2.5), (Ap.1.2.7) e (Ap.1.2.8) em (Ap.1.2.3b), chega-se a:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{1j}} H_{1jkl} (D_{kl} - \gamma N_{1j}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_v} \gamma q = 0 \quad (\text{Ap.1.2.9})$$

Isolando  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} H_{rsnm} D_{nm}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} H_{pqtu} N_{tu} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_v} q} \quad (\text{Ap.1.2.10})$$

O critério de plastificação que será utilizado aqui é o de Von Mises:

$$f = 1/2 \phi_{1j} \phi_{1j} - 1/3 \sigma_v^2 = 0 \quad (\text{Ap.1.2.11})$$

$$\text{onde } \phi_{1j} = s_{1j} - \alpha_{1j} \quad (\text{Ap.1.2.12})$$

$\alpha_{1j}$  = tensor que definirá a posição do centro da superfície de plastificação. Aqui ele será considerado como nulo. (Será utilizado então um endurecimento isótropo. Este tipo de endurecimento é válido para situações onde não existe reversão de carga). A expressão final de Von Mises é então fornecida abaixo:

$$f = 1/2 s_{1j} s_{1j} - 1/3 \sigma_v^2 = 0 \quad (\text{Ap.1.2.13})$$

Considerando agora um material com endurecimento linear, (ver figura (Ap.1.2.1))

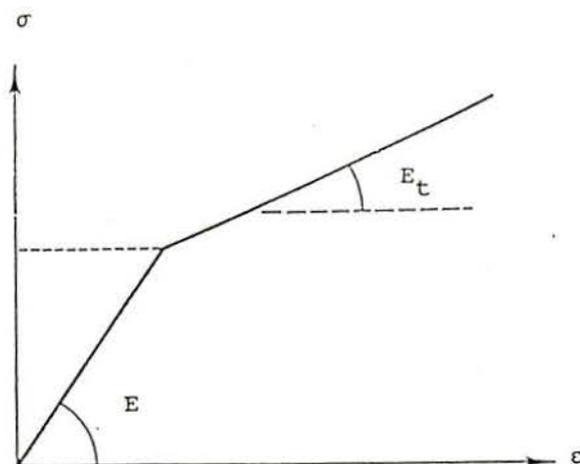


Figura (Ap.1.2.1)

Da figura, pode-se determinar que:

$$h = E E_t / (E - E_t) \quad (\text{Ap.1.2.14})$$

Neste caso:

$$\dot{\sigma}_v = h \dot{\bar{D}}^p \quad (\text{Ap.1.2.15})$$

onde  $\bar{D}^p$  é a deformação plástica equivalente, dada por:

$$\bar{D}^p = (2/3 D_{1j}^p D_{1j}^p)^{1/2} \quad (\text{Ap.1.2.16})$$

Portanto, substituindo (Ap.1.2.7) em (Ap.1.2.16) e o resultado em (Ap.1.2.15), obtém-se:

$$\dot{\sigma}_v = h \gamma (2/3)^{1/2} \quad (\text{Ap.1.2.17})$$

(Aqui foi utilizado o fato que  $N_{ij} N_{ij} = 1$  )

Uma comparação entre (Ap.1.2.8) e (Ap.1.2.17) nos permite dizer que:

$$q = h (2/3)^{1/2} \quad (\text{Ap.1.2.18})$$

Da expressão (Ap.1.2.13):

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \quad (\text{Ap.1.2.19})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_v} = -\frac{2}{3} \sigma_v \quad (\text{Ap.1.2.20})$$

Da expressão (Ap.1.1.2) chega-se facilmente as relações abaixo:

$$H_{ijkl} N_{kl} = 2 G N_{ij} \quad (\text{Ap.1.2.21})$$

$$H_{ijkl} s_{kl} = 2 G s_{ij} \quad (\text{Ap.1.2.22})$$

(Aqui foi utilizado o fato que  $s_{11} = N_{11} = 0$ )

Introduzindo as expressões (Ap.1.2.18) - (Ap.1.2.22) em (Ap.1.2.10):

$$\gamma = \frac{2 G s_{mn} D_{mn}}{s_{pq} 2 G N_{pq} + 2/3 \sigma_v (2/3)^{2/3} h} \quad (\text{Ap.1.2.23})$$

Como a direção de  $\underline{N}$  e  $\underline{s}$  coincidem, é então possível escrever o vetor unitário  $\underline{N}$  como,

$$N_{ij} = \frac{s_{ij}}{(s_{kl} s_{kl})^{1/2}} \quad (\text{Ap.1.2.24})$$

Da expressão acima e (Ap.1.2.13), pode-se reescrever (Ap.1.2.23) como:

$$\gamma = \frac{N_{mn} D_{mn}}{\left(1 + \frac{h}{3G}\right)} \quad (\text{Ap.1.2.25})$$

Substituindo (Ap.1.2.25) em (Ap.1.2.7) e o resultado em (Ap.1.2.5) obtém-se, finalmente, a relação tensão - deformação procurada:

$$L_{ijkl} = H_{ijkl} - \frac{3 G s_{ij} s_{kl}}{\sigma_v^2 \left(1 + \frac{h}{3 G}\right)} \quad (\text{Ap.1.2.26})$$

A relação acima é às vezes chamada do inglês como 'continuum elastoplastic tangent operator' /S1/. Sua validade dependerá do processo de integração (ver apêndice 4).

## APÊNDICE 2 LEIS CONSTITUTIVAS EM GRANDES DEFORMAÇÕES

### Ap.2.1 O CONCEITO DA OBJETIVIDADE

Não se pode utilizar diretamente as expressões vistas no Apêndice 1 em grandes deformações pois elas não respeitam o "Princípio da Objetividade", como ver-se-á em seguida. Este princípio estipula que a resposta de um corpo a um carregamento seja a mesma, independente do movimento do sistema de referência ou do observador.

Não se deve confundir o princípio da objetividade e aquele da invariância tensorial. Este último que dizer invariância com relação a dois sistemas coordenados diferentes cuja relação entre eles é fixa, ou seja, estão relacionados ao mesmo observador ou referencial. Por outro lado, quando se fala de objetividade, significa invariância mesmo quando o referencial no qual as grandezas são medidas, está submetido à um movimento qualquer, dependente do tempo.

Consideremos a função seguinte:

$$f(A, B_1, C_{1j}) = 0 \quad (\text{Ap.2.1.1})$$

e seja a mudança de referencial segundo,

$$\underline{x} = Q(t)\underline{x} + \underline{c} \quad (\text{Ap.2.1.2})$$

onde  $Q$  é um tensor (ortogonal) de segunda ordem, função do tempo e  $c$  é um vetor qualquer;  $f$  será uma função objetiva se os tensores  $A$ ,  $B$  e  $C$  transformam-se como,

$$A' = A \quad (\text{Ap.2.1.3a})$$

$$B'_{ij} = Q(t)_{ij} B_j \quad (\text{Ap.2.1.3b})$$

$$C'_{ij} = Q(t)_{ik} C_{kl} Q(t)_{lj} \quad (\text{Ap.2.1.3c})$$

Na expressão (Ap.1.2.1), a taxa de deformação  $\underline{D}$  é uma gradeza objetiva, assim como as tensões de Cauchy. Então:

$$\underline{\sigma}' = \underline{Q} \underline{\sigma} \underline{Q}^T \quad (\text{Ap.2.1.4})$$

Derivando a expressão (Ap.2.1.4), obtém-se:

$$\dot{\underline{\sigma}}' = \dot{\underline{Q}} \underline{\sigma} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{\sigma}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \underline{\sigma} \dot{\underline{Q}}^T \quad (\text{Ap.2.1.5})$$

Como (Ap.2.1.5) não respeita (Ap.2.1.3c), a taxa de tensão de Cauchy é não objetiva e sua utilização em uma formulação de grandes deformações forneceria resultados errados.

## Ap.2.2 TAXAS DE TENSÃO OBJETIVAS

Seja um sistema de eixos que gira com uma velocidade angular  $\theta$  com relação a um referencial fixo (os eixos globais  $x, y$  e  $z$  por exemplo) de sorte que a derivada temporal da matriz de rotação da transformação vale (ver /M1/):

$$\dot{\underline{\eta}} = \underline{\varrho} \underline{\eta} \quad (\text{Ap.2.2.1})$$

onde  $\underline{\eta}$  é uma matriz ortogonal e  $\underline{\varrho}$  uma matriz anti-simétrica. Aplicando uma rotação ao tensor de Cauchy, podemos reescrevê-lo como:

$$\underline{\sigma}' = \underline{\eta}^T \underline{\sigma} \underline{\eta} \quad (\text{Ap.2.2.2})$$

e sua derivada:

$$\dot{\underline{\sigma}}' = \dot{\underline{\eta}}^T \underline{\sigma} \underline{\eta} + \underline{\eta}^T \dot{\underline{\sigma}} \underline{\eta} + \underline{\eta}^T \underline{\sigma} \dot{\underline{\eta}} \quad (\text{Ap.2.2.3})$$

Por causa da definição (Ap.2.2.1), obtém-se facilmente:

$$\dot{\underline{\sigma}}' = \underline{\eta}^T (\dot{\underline{\sigma}} - \underline{\varrho} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\varrho}) \underline{\eta} \quad (\text{Ap.2.2.4})$$

Alternativamente,

$$\dot{\underline{\sigma}}' = \underline{\eta}^T \underline{\overset{\nabla}{\sigma}} \underline{\eta} \quad (\text{Ap.2.2.5})$$

$$\text{onde } \underline{\overset{\nabla}{\sigma}} = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\varrho} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\varrho} \quad (\text{Ap.2.2.6})$$

$\underline{\overset{\nabla}{\sigma}}$  é denominada uma taxa de tensão corrotacional. O sistema de eixos rotado (definido por  $\underline{\eta}$ ) é igualmente chamado um sistema de eixos corrotacional. Pode-se neste caso reescrever (Ap.2.2.5) como,

$$\underline{\sigma}^c = \underline{\eta}^T \underline{\sigma} \underline{\eta} \quad (\text{Ap.2.2.7})$$

$$\dot{\underline{\sigma}}^c = \underline{\eta}^T \underline{\overset{\nabla}{\sigma}} \underline{\eta} \quad (\text{Ap.2.2.8})$$

onde  $\dot{\underline{\sigma}}^c$  é chamado taxa corrotacional de Cauchy.

Da expressão (Ap.2.2.8) pode-se deduzir que a taxa corrotacional de Cauchy é um tensor objetivo.

Pode-se agora tomar as leis constitutivas escritas em pequenas deformações (ver por exemplo (Ap.1.2.1)) como válidas em grandes deformações desde que todos seus termos sejam avaliados no referencial corrotacional. Então:

$$\dot{\underline{\sigma}}^c = \underline{L}^c \underline{D}^c \quad (\text{Ap.2.2.9})$$

$$\text{onde } \underline{D}^c = \underline{\eta}^T \underline{D} \underline{\eta} \quad (\text{Ap.2.2.10})$$

$$\underline{L}^c(\underline{\sigma}) = \underline{L}(\underline{\sigma}^c) \quad (\text{Ap.2.2.11})$$

No entanto, a taxa de tensão  $\dot{\underline{\sigma}}$ , calculada nos eixos iniciais (x, y, z) é também uma grandeza objetiva segundo (Ap.2.2.8). Então, a equação (Ap.2.2.9) pode ser também escrita como:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{L} \underline{D} \quad (\text{Ap.2.2.12})$$

Assim, as expressões (Ap.2.2.9) e (Ap.2.2.12) podem ser utilizadas para constituir o problema de grandes deformações. Pode-se notar que, diferentemente da expressão (Ap.2.2.9), todas as grandezas em (Ap.2.2.12) são referidas aos eixos globais. Evidentemente o processo de obtenção das tensões de Cauchy na configuração final será diferente nos dois casos. Discutir-se-á isto com mais detalhes no apêndice 3.

Diferentes taxas corrotacionais ( $\dot{\underline{\sigma}}$ ) conhecidas na literatura podem ser obtidas escolhendo diferentes valores para  $\underline{\varrho}$  e  $\underline{\eta}$ . Por exemplo, pode-se definir o tensor anti-simétrico  $\underline{\varrho}$  como o tensor  $\underline{\Omega}$  (velocidade angular conforme equação (A.1.4.3)):

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{R}} \underline{R}^T \quad (\text{Ap.2.2.13})$$

onde  $\underline{R}$  vem da decomposição polar (ver equação (A.1.1.6)).

Neste caso, pode-se redefinir a expressão (Ap.2.2.1) como:

$$\dot{\underline{\eta}} = \dot{\underline{R}} = \underline{\Omega} \underline{R} \quad (\text{Ap.2.2.14})$$

Chega-se então à taxa corrotacional de Green-Nagdhi:

$$\underline{\nabla}^{\text{GN}} \underline{\sigma} = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\Omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\Omega} \quad (\text{Ap.2.2.15})$$

Uma outra alternativa é escolher  $\underline{\varrho}$  como a taxa de rotação  $\underline{W}$  (ver equação (A.1.3.4)). A expressão (Ap.2.2.1) torna-se:

$$\dot{\underline{\eta}} = \dot{\underline{Q}} = \underline{W} \underline{Q} \quad (\text{Ap.2.2.16})$$

A taxa corrotacional torna-se, neste caso, a taxa de Jaumann:

$$\underline{\nabla}^{\text{J}} \underline{\sigma} = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{W} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{W} \quad (\text{Ap.2.2.17})$$

A escolha mais conveniente para  $\underline{\varrho}$  é aquela que permite uma rotação tal que faz com que os eixos corrotacionais acompanhem a deformação do corpo, de sorte que um observador ligado a estes eixos, não note rotações rígidas do corpo. De modo intuitivo, escolhe-se  $\underline{\eta} = \underline{R}$  da decomposição polar, pois todo o efeito de rotação da transformação  $\underline{F}$  está contido em  $\underline{R}$ . Para verificar isto, basta realizar a operação que segue:

$$\underline{D}^c = \underline{R}^T \underline{D} \underline{R} \quad (\text{Ap.2.2.18})$$

Substituindo (A.1.3.3), (A.1.3.1) e (A.1.1.6), pode-se reescrever a expressão (Ap.2.2.18) como,

$$\underline{D}^c = \dot{\underline{U}} \underline{U}$$

(Ap.2.2.19)

Assim um observador ligado aos eixos corrotacionais definidos por  $\underline{R}$ , observa apenas a deformação da matéria.

Portanto, aparentemente, a escolha de  $\underline{\eta} = \underline{R}$  é a melhor. Porém, sublinhou-se no parágrafo (2.1) que a formulação empregada neste trabalho será sempre do tipo incremental, onde a configuração tomada como de referência está próxima da configuração atual. Neste caso, como já havia sido descrito no anexo (A.1.3),

$$\dot{\underline{R}} \approx \underline{W}$$

(Ap.2.2.20)

Isto quer dizer que, na prática, a escolha de  $\underline{\eta}$  segundo (Ap.2.2.14) ou (Ap.2.2.16) fornecerá resultados bastante próximos.

**APÊNDICE 3: INTEGRAÇÃO DAS LEIS CONSTITUTIVAS**

O primeiro passo para a integração das expressões (Ap.2.2.9) (ver /P1/) ou (Ap.2.2.12) (ver /G1/) é escolher um caminho de integração. É possível seguir o caminho A-C-D-B, da figura (Ap.3.1) (a iteração  $i-1$  é tomada como referência para o cálculo da iteração  $i$ , ao longo de um passo de tempo).

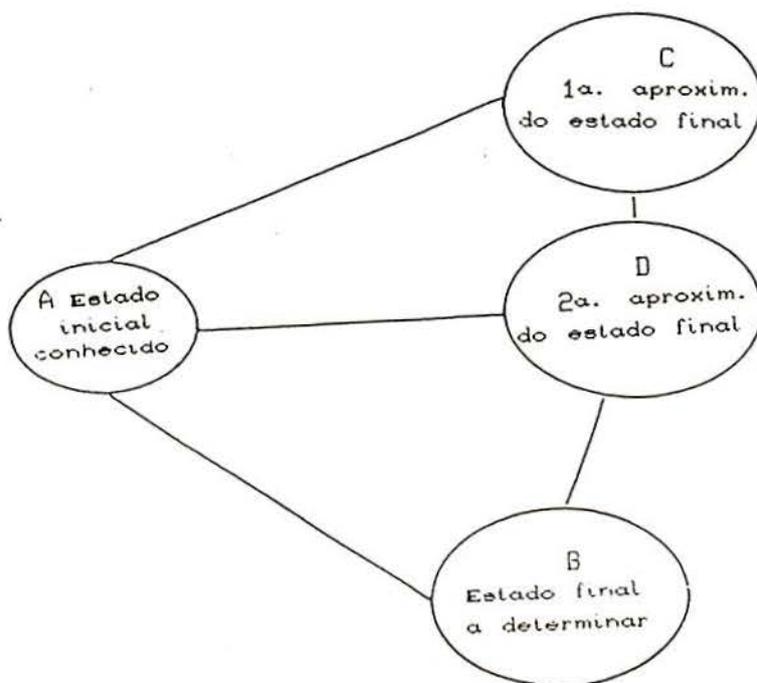


Figura (Ap. 3.1)

Este tipo de caminho toma como referência de cálculo uma configuração não-equilibrada e portanto fisicamente inexistente. Neste caso, problemas de descarga numérica podem acontecer.

Para evitar estes problemas, pode-se utilizar o caminho A-C, A-D, etc que toma como referência a última configuração equilibrada.

Para a integração de (Ap.2.2.9) ou (Ap.2.2.12), é necessário conhecer a taxa de deformação à todo momento. Como os passos de carga ou de tempo utilizados são discretos, é necessário fazer uma hipótese sobre a evolução das deformações entre dois passos. A hipótese mais corrente é supor a taxa de deformação constante, seja dentro do referencial corrotacional (/P1/) ou dentro dos eixos globais (/G1/).

O esquema de integração das leis constitutivas deve ser ainda incrementalmente objetivo, isto quer dizer que, se:

$$\underline{\dot{x}}' = \underline{\eta} \underline{x} \quad (\text{Ap.3.1})$$

então,

$$\underline{\dot{\sigma}}' = \underline{\eta} \underline{\sigma} \underline{\eta}^T \quad (\text{Ap.3.2})$$

Nos parágrafos seguintes vai-se apresentar alguns esquemas de integração para os dois casos (equações (Ap.2.2.9) e (Ap.2.2.12)):

### Ap.3.1 INTEGRAÇÃO EM EIXOS GLOBAIS

Pode-se obter a variação de tensão de Cauchy integrando a expressão (Ap.2.2.6):

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\theta} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\theta} + \underline{\nabla} \underline{\sigma} \quad (\text{Ap.3.1.1})$$

Normalmente, para solucionar numericamente esta expressão, utiliza-se um método do tipo Euler de sorte que:

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{\sigma}^t + \Delta \dot{\underline{\sigma}} \quad (\text{Ap.3.1.2a})$$

Em /G1/, a velocidade de rotação e a taxa de deformação são tomadas constantes. Se for ainda utilizada a taxa de Jaumann, obtém-se a expressão (Ap.3.1.2a):

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{\sigma}^t + \Delta \underline{W} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \Delta \underline{W} + \Delta \underline{\nabla} \underline{\sigma} \quad (\text{Ap.3.1.2b})$$

onde

$$\Delta \underline{\nabla} \underline{\sigma} = \int_t^{t+\Delta t} \underline{L} \underline{D} dt \quad (\text{Ap.3.1.3})$$

$$\underline{D} = 1/\Delta t \underline{B} \Delta \underline{x} \quad (\text{Ap.3.1.4})$$

$\underline{L}$  é a matriz constitutiva definida no apêndice 1 (equação (Ap.1.2.26)).

A matriz  $\underline{B}$  é a tradicional relação deformação-deslocamento empregada em códigos de elementos finitos /Z3/. Finalmente,

$$\Delta \underline{W} = \underline{B}^* \Delta \underline{x} \quad (\text{Ap.3.1.5})$$

onde  $\underline{B}^*$  é também uma relação deformação-deslocamento, que permite calcular (A.1.3.4).

Será visto como avaliar a expressão (Ap.3.1.3) no anexo 4.

O processo de integração indicado por (Ap.3.1.2) dará bons

resultados se o incremento de carga/tempo é muito pequeno. Para visualizar isto, considera-se o exemplo seguinte: seja o corpo da figura (Ap.3.1.1) submetido à uma tensão de Cauchy dada por:

$$\sigma^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.1.6})$$

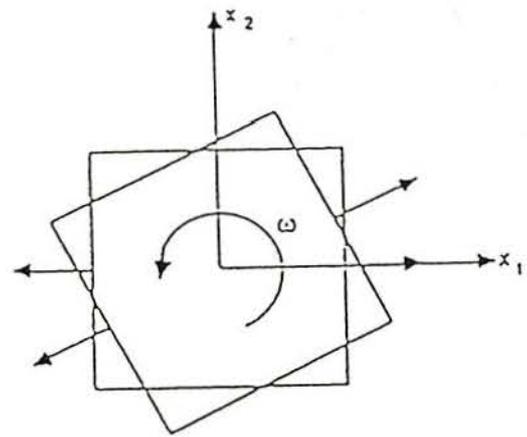


Figura (Ap.3.1.1)

A rotação é dada por,

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.1.7})$$

Para que o princípio da objetividade seja verificado, as expressões (Ap.3.1) e (Ap.3.2) devem ser respeitadas. Então,

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{Q} \underline{\sigma}^t \underline{Q}^T$$

Após cálculos,

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & -\sin\varphi \cos\varphi \\ -\sin\varphi \cos\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.1.8})$$

neste caso, como o corpo não sofre deformação, pode-se escrever (Ap.3.1.2) como

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{\sigma}^t + \Delta \underline{W} \underline{\sigma}^t - \underline{\sigma}^t \Delta \underline{W} \quad (\text{Ap.3.1.10})$$

onde

$$\Delta \underline{W} = \begin{bmatrix} 0 & \tan\varphi \\ -\tan\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.1.11})$$

Colocando (Ap.3.1.6) e (Ap.3.1.11) na relação (Ap.3.1.10), chega-se, após cálculos, à:

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ -\tan\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.1.12})$$

Uma comparação entre o resultado de (Ap.3.1.8) e (Ap.3.1.12) mostra que o esquema de integração não é incrementalmente objetivo.

Um processo iterativo pode ser utilizado para torná-lo incrementalmente objetivo. A expressão (Ap.3.1.2) é então substituída pela expressão seguinte:

$$\sigma_{k+1}^{t+\Delta t} = \sigma_k^t + \Delta t \dot{\sigma}_{k+1}^{t+\alpha\Delta t} \tag{Ap.3.1.13}$$

onde

$$\dot{\sigma}_{k+1}^{t+\alpha\Delta t} = \frac{\nabla_{t+\alpha\Delta t}}{\sigma_k} + W_k^{t+\alpha\Delta t} \sigma_k^{t+\alpha\Delta t} - \sigma_k^{t+\alpha\Delta t} W_k^{t+\alpha\Delta t} \tag{Ap.3.1.14}$$

Todas as grandezas em (Ap.3.1.14) são calculadas no tempo fictício  $t+\alpha\Delta t$ :

$$y^{t+\alpha\Delta t} = (1-\alpha)y^t + y^{t+\Delta t} \tag{Ap.3.1.15}$$

onde  $\alpha$  é um valor compreendido entre 0 e 1 e  $k$  é o contador de etapas iterativas. O processo iterativo terminará quando obtem-se uma tolerância aceitável para o cálculo das tensões. Se  $\alpha = 0$  recai-se sobre a expressão (Ap.3.1.2).

Este método pode ser ainda melhorado dividindo o passo de tempo em sub-intervalos /B7/.

Uma solução alternativa é mostrada por /H2/, que dá um processo não iterativo e incrementalmente objetivo. Neste método, é no entanto necessário conhecer uma configuração intermediária, de sorte que o método é também de implementação cara.

### Ap.3.2 INTEGRAÇÃO EM EIXOS CORROTACIONAIS

Aqui a taxa de tensões nos eixos corrotacionais  $\underline{D}^c$  é igualmente suposta constante durante o passo de tempo. Com esta hipótese, pode-se determinar  $\underline{D}^c$  de (Ap.2.2.19), que após cálculo vale:

$$\underline{D}^c = 1/\Delta t \ln \underline{U} = 1/\Delta t \underline{E}^N \quad (\text{Ap.3.2.1})$$

Onde  $\underline{U}$  é a deformação calculada da decomposição polar, com relação à configuração de referência. Utiliza-se aqui o método da rotação instantânea final (ver /N1/). Isto quer dizer que durante a integração, considera-se apenas a deformação pura, sem rotação; então a tensão no tempo  $t+\Delta t$  vale:

$$\underline{\sigma}^{c,t+\Delta t} = \underline{\sigma}^t + \int_t^{t+\Delta t} \underline{L}^c \underline{D}^c dt \quad (\text{Ap.3.2.2})$$

O cálculo da integral acima será detalhado no apêndice 4.

A rotação  $\underline{R}$  é aplicada de modo instantâneo no tempo  $t+\Delta t$ , ou seja após o cálculo de (Ap.3.2.2), de sorte que:

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{R}^T \underline{\sigma}^{c,t+\Delta t} \underline{R} \quad (\text{Ap.3.2.3})$$

Observando (Ap.3.2), vê-se que o esquema é evidentemente objetivo. Este esquema é empregado pelo METAFOR.

#### APÉNDICE 4 CÁLCULO DO INCREMENTO DE TENSÃO

Vai supor-se aqui que o material está em deformação pura, sem sofrer rotação. Esta última foi considerada no parágrafo (Ap.3). Como já visto, o tratamento destes dois efeitos é desacoplado. Então, as expressões (Ap.3.2.2) e (Ap.3.1.2) podem ser genericamente escritas como:

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{\sigma}^t + \int_t^{t+\Delta t} \underline{L} \underline{D} dt \quad (\text{Ap.4.1})$$

onde  $\underline{L}$  é a matriz constitutiva definida no apêndice 1 (equação (Ap.1.2.26)).

O processo de integração da expressão acima é normalmente dividido em duas partes. Na primeira, supõe-se que não existe plasticidade. Esta etapa é chamada preditor elástico. Neste caso, da equação (Ap.1.2.26), pode-se dizer que  $\underline{L} = \underline{H}$  e a equação (Ap.4.1) torna-se:

$$\underline{p}^e = \underline{p}^t + k \Delta \underline{D} \quad (\text{Ap.4.2a})$$

$$\underline{s}^e = \underline{s}^t + 2G \Delta \underline{D}_d \quad (\text{Ap.4.2b})$$

ou, se for utilizada a deformação natural,

$$p^e = p^t + k E_{mm}^N \quad (\text{Ap.4.3a})$$

$$\underline{s}^e = \underline{s}^t + 2G \underline{E}^{N,d} \quad (\text{Ap.4.3b})$$

onde  $\underline{E}^N$ ,  $\underline{E}^{N,d}$ , são as deformações naturais e suas componentes desviadoras, respectivamente.

Se as tensões estão fora da superfície de plastificação, um processo de retorno é necessário para levá-las de volta para sobre a superfície. Atualmente os métodos mais utilizados são os do tipo "Return Mapping" (ver detalhes em /S7/). Entre eles o mais empregado é o método do Retorno Radial, que é o método empregado pelo METAFOR e será abaixo descrito. Neste caso as tensões são trazidas de volta para a superfície de plastificação através de um corretor plástico. Assim as tensões desviadoras após a correção podem ser escritas como:

$$s_{ij}^{t+\Delta t} = s_{ij}^e - s_{ij}^{corr} \quad (\text{Ap.4.4})$$

onde fisicamente  $\underline{s}^{corr}$  é uma relaxação instantânea de tensões, causada por um movimento de discordâncias, que caracteriza a deformação plástica. Por analogia com (Ap.4.2b),

$$s_{ij}^{corr} = 2G \int_t^{t+\Delta t} D_{ij}^p d\tau \quad (\text{Ap.4.5})$$

Da definição de  $D^p$  (expressão (Ap.1.2.7)), pode-se reescrever (Ap.4.5) como,

$$s_{ij}^{corr} = 2G \int_t^{t+\Delta t} \gamma N_{ij} d\tau \quad (\text{Ap.4.6})$$

A solução de (Ap.4.6) vai depender da escolha de  $\underline{N}$ . No método do retorno radial,  $\underline{N}$  é tomado como a normal à uma superfície de

plastificação hipotética que passa por  $s^e$ , como mostra a figura (Ap.4.1).

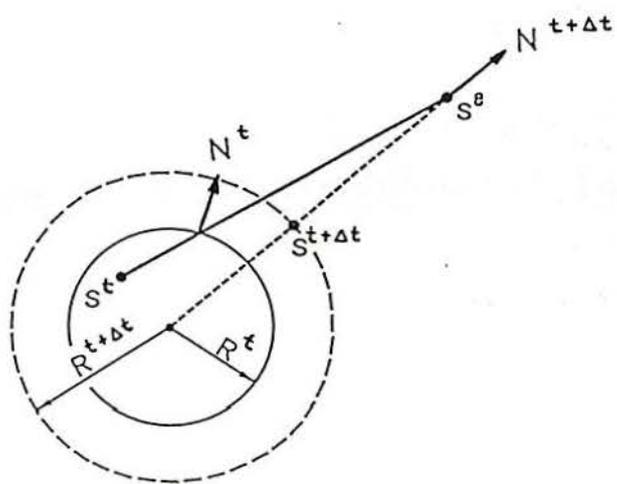


Figura (Ap.4.1)

Neste caso,

$$N_{1j} = N(t+\Delta t)_{1j} = \frac{s_{1j}^e}{(s_{k1}^e s_{k1}^e)^{1/2}} \quad (\text{Ap.4.7})$$

A expressão (Ap.4.6) pode ser escrita como:

$$s_{ij}^{corr} = 2G N_{ij} \Gamma \quad (\text{Ap.4.8})$$

$$\text{onde } \Gamma = \int_t^{t+\Delta t} \gamma \, dt \quad (\text{A.5.9})$$

e  $\gamma$  vem da expressão (Ap.1.2.25).

O problema em seguida, consiste em determinar  $\Gamma$ . Do apêndice 1 (equação (Ap.1.2.17)).

$$\dot{\sigma}_v = h \gamma (2/3)^{1/2} \quad (\text{Ap.4.10})$$

Então,

$$\sigma_v^{t+\Delta t} = \sigma_v^t + h (2/3)^{1/2} \Gamma \quad (\text{Ap.4.11})$$

Substituindo (Ap.4.4) e (Ap.4.11) dentro do critério de plastificação:

$$1/2 s_{ij}^{t+\Delta t} s_{ij}^{t+\Delta t} - 1/3 (\sigma_v^{t+\Delta t})^2 = 0 \quad (\text{Ap.4.12})$$

vem a expressão:

$$\Gamma = \frac{s_{kl}^e s_{kl}^e - (2/3)^{1/2} \sigma_v^t}{2G (1 + \frac{h}{3G})} \quad (\text{Ap.4.13})$$

Com a expressão (Ap.4.13), pode-se calcular  $\underline{s}^{t+\Delta t}$  e  $\sigma_v^{t+\Delta t}$ .

Finalmente, pode-se dizer que, neste método,  $\underline{s}^e$  é modificado por um fator de escala  $\beta$ :

$$s_{ij}^{t+\Delta t} = \beta s_{ij}^e \quad (\text{Ap.4.14})$$

Para obter  $\beta$ , coloca-se (Ap.4.14) em (Ap.4.12) obtendo-se:

$$\beta = \frac{\sigma_v^{t+\Delta t}}{(3/2 s_{ij}^e s_{ij}^e)^{1/2}} = \frac{\sigma_v^{t+\Delta t}}{\|\underline{s}^e\|} \quad (\text{Ap.4.15})$$

Pode-se dizer que a tensão final de Cauchy vale:

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \beta s_{ij}^e + \sigma_{kk}^{t+\Delta t} / 3 \quad (\text{Ap.4.16})$$

Derivando a expressão acima, obtém-se,

$$d\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = d\beta s_{ij}^e + \beta ds_{ij}^e + d\sigma_{kk}^{t+\Delta t} \quad (\text{Ap.4.17})$$

Aqui considera-se o fato de que a tensão desviadora no início do processo de integração é *discretamente* diferente da tensão final. Este fato não foi considerado no apêndice 1 e por este fato a matriz lá deduzida foi denominada de *contínua*.

O valor de  $d\beta$  pode ser calculado facilmente de (Ap.4.15) e vale:

$$d\beta = \beta \left[ \frac{d\sigma_v}{\sigma_v} - \frac{d\|\underline{s}^e\|}{\|\underline{s}^e\|} \right] \quad (\text{Ap.4.18})$$

Substituindo (Ap.4.18) em (Ap.4.17), chega-se a uma expressão semelhante à (Ap.1.2.26), salvo que  $G$  et  $h$  são agora substituídos por  $\tilde{G}$  et  $\tilde{h}$ , que valem:

$$\tilde{G} = \beta G \quad (\text{Ap.4.19})$$

$$\tilde{h} = h / (1 + (1 - 1/\beta))(h/3G) \quad (\text{Ap.4.20})$$

Para  $\beta = 1$ , recai-se sobre (Ap.1.2.26). Mas normalmente o valor de  $\beta$  pode ser bem diferente, sobretudo quando utiliza-se o caminho A-C, A-D, etc, em lugar do caminho A-C, C-D, etc (ver figura Ap.3.1) para a integração (no último caso, a configuração de referência e a atual praticamente se confundem). Este fato poderá prejudicar a convergência quadrática do método de Newton-Raphson (ver /S8/). Para evitar este problema uma outra alternativa consiste em dividir o cálculo de tensões em sub-intervalos.

Deve-se notar que este fato deve ser tomado em consideração mesmo em pequenas deformações, se ocorrem passos de carga grandes. Portanto, mesmo trabalhos bem conhecidos da literatura (como o livro de Plasticidade computacional de Owen e Hinton /04/) podem ter dificuldade de convergência.

Já o esquema de integração de tensões empregado em /G1/ não pode ser considerado um método do tipo "return mapping": Ele emprega também um preditor elástico como em (Ap.4.2). A nova configuração é definida por:

$$\underline{s}^{t+\Delta t} = \underline{s}^e + (r - 1)\Delta \underline{s}^e \quad (\text{Ap.4.21})$$

$$\underline{p}^{t+\Delta t} = \underline{p}^e + (r - 1)\Delta \underline{p}^e \quad (\text{Ap.4.22})$$

$$\underline{x}^{t+\Delta t} = \underline{x}^e + (r - 1)\Delta \underline{x}^e \quad (\text{Ap.4.23})$$

onde todas as grandezas com o índice superior e vem do preditor elástico (equação (Ap.4.2)) e  $r$  é um fator à determinar. Para um ponto já plastificado (ver figura (Ap.4.2)), seu valor máximo é:

$$r = 0.08 \sigma_v / |\Delta \underline{s}^e| \quad (\text{Ap.4.24})$$

Substituindo (Ap.4.24) em (Ap.4.21), obtém-se,

$$s_{1j}^{t+\Delta t} = s_{1j}^t + 0.08 \sigma_v N_{1j} \quad (\text{Ap.4.25})$$

Uma outra característica do método empregado por /G1/ é o fato dele não ser um verdadeiro Newton - Raphson (na verdade um Newton-Raphson modificado ), pois a matriz 'tangente' é tomada como constante durante as etapas iterativas.

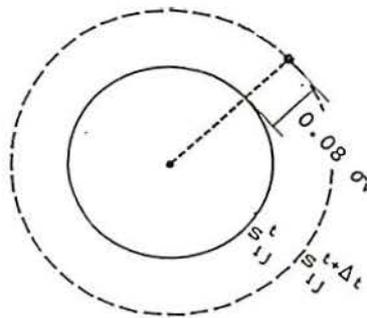


Figura (A.4.2)  
Superfície de plastificação na configuração de referência ( $s^t$ ) e na configuração atual ( $s^{t+\Delta t}$ ).

### APÊNDICE 5: UMA VISÃO ALTERNATIVA PARA OS MODELOS DE ATRITO

Todo o processo descrito em (3.2), pode ser visto como um processo de *regularização* de um *funcional* associado ao problema de atrito (ver por exemplo /O3/). Este novo funcional é diferenciável na origem devido a representação do escorregamento reversível. Para redefinir a forma fraca, pode-se reescrever o último termo de (3.2.1) como:

$$\int t_T \partial\phi/\partial g_T \delta g_T d\Gamma_c \quad (\text{Ap.5.1})$$

Aqui  $\phi$  pode ser visto como uma função de suavização. Para o caso da figura (3.2.5),  $\phi$  vale:

$$\phi(g_T) = \begin{cases} g_T - (1/2)c_T & \text{para } g_T \geq c_T \\ g_T^2/2c_T & \text{para } g_T \leq c_T \end{cases} \quad (\text{Ap.5.2})$$

onde  $c_T$  é o valor limite do escorregamento reversível (ver figura (3.2.5)).

Das expressões (Ap.5.1) e (Ap.5.2), encontrar-se-á as expressões do parágrafo (3.2.1) e (3.2.2) (ver por exemplo /B8/). A simulação de leis de atrito mais complexas como (3.2.4) podem ser formuladas desde que se utilize diferentes funções  $\phi$  em (3.2.3.2).