

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

VIRGÍNIA BORDIGNON

**CONTROLE PREDITIVO
MULTIVARIÁVEL APLICADO A UMA
PLANTA DE NÍVEL**

Porto Alegre
2016

VIRGÍNIA BORDIGNON

**CONTROLE PREDITIVO
MULTIVARIÁVEL APLICADO A UMA
PLANTA DE NÍVEL**

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheira Eletricista.

ORIENTADOR: Prof^a. Dr^a. Lucíola Campestrini

Porto Alegre
2016

VIRGÍNIA BORDIGNON

**CONTROLE PREDITIVO
MULTIVARIÁVEL APLICADO A UMA
PLANTA DE NÍVEL**

Este Projeto foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Disciplina Projeto de Diplomação do Departamento de Engenharia Elétrica e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof^a. Dr^a. Lucíola Campestrini, UFRGS
Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul -
Porto Alegre, RS

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, RS

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, RS

Prof^a. Dr^a. Lucíola Campestrini, UFRGS
Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, RS

Chefe do DELET: _____
Prof. Dr. Ály Ferreira Flores Filho

Porto Alegre, junho de 2016.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelos melhores anos da minha vida.

Ao LASCAR e aos bolsistas do laboratório, pelo suporte durante a realização deste trabalho.

Aos meus professores, em especial à Prof. Lucíola, pela confiança depositada em mim e pelo constante encorajamento.

A meus colegas de curso: meus amigos e irmãos, eles que me acompanharam nessa trajetória, que estiveram lá por mim em todos os momentos.

À minha família, por ter me ensinado o valor da educação desde cedo, por ter sido meu apoio e ao mesmo tempo meu guia.

RESUMO

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é o de implementar um algoritmo de controle preditivo baseado em modelo (MPC ou *Model Predictive Control*) a um sistema multivariável. Para o desenvolvimento do projeto, foi escolhido o algoritmo GPC (*Generalized Predictive Control*), que, baseado no modelo do sistema a ser controlado, fornece um sinal de controle que minimiza uma função custo quadrática, submetida a restrições, ao longo de um horizonte futuro de amostras estimadas. A principal vantagem do GPC consiste em fornecer um controle de alto desempenho e de fácil manutenção, já que sua parametrização é simplificada e se apresenta de forma intuitiva. Além disso, o GPC permite ainda levar em consideração um problema de otimização baseado na minimização de uma função custo na elaboração da lei de controle. O algoritmo foi implementado com auxílio do *software* MATLAB[®] e foi aplicado a uma planta de nível presente no Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica (LASCAR), do Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia (DELAE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). O sistema em questão, de modelo matemático conhecido, é composto de dois tanques comunicantes, cujos níveis constituem as saídas do sistema, e duas válvulas de controle, constituindo as entradas do mesmo. A fim de validar o algoritmo e o modelo matemático da planta, para diversas configurações de GPC propostas em publicações científicas, foram realizadas simulações com auxílio do modelo do sistema, e a seguir foram ensaiadas estas mesmas configurações em laboratório através de uma comunicação OPC implementada no *software* Simulink[®]. Alternativas na parametrização do algoritmo, de forma a minimizar o sobressinal e o efeito de ruídos de medição na resposta do sistema, foram igualmente apresentadas e implementadas.

Palavras-chave: Controle preditivo, MPC, GPC, controle de nível, controle linear, controle de horizonte retrocedente.

ABSTRACT

The goal of this end of term work is to implement and experiment a Model Predictive Control (MPC) algorithm on a multivariable system. In order to develop the project, the algorithm Generalized Predictive Control (GPC) has been chosen, which bases itself on the system model so to provide a control signal which minimizes a quadratic cost function, submitted to constraints, through a future horizon of predicted samples. The main advantage of GPC consists in providing a high performance control, which can be easily maintained, since its parametrization is simplified and presents itself in a very intuitive way. Moreover the GPC allows the user to consider a cost optimization problem in the formulation of the resulting control law. The algorithm has been implemented within MATLAB[®] software tool and it has been tested on a pilot plant situated in the *Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica* (LASCAR), from the *Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia* (DELAE) of the *Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (UFRGS). The plant, whose mathematical model is known, consists in two communicating tanks, levels of which constitutes on the system's outputs, and two control valves, being its inputs. In order to validate the algorithm and the mathematical model of the plant, for multiple GPC configurations proposed in scientific papers, the behavior of the system has been primarily simulated, and then tested in the real pilot plant. The tests have been performed in laboratory, through a OPC communication server implemented in Simulink[®] tool. Further alternatives on the tuning of the algorithm have been equally employed so to minimize the overshoot and the measurement noise seen in the system's response.

Keywords: Predictive control, MPC, GPC, level control, linear control, receding-horizon control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Sinal de referência, sinal de saída futuro e sinal de controle calculado.	16
Figura 2:	Esquema de funcionamento da planta de nível.	27
Figura 3:	Resultados de simulação para a configuração 1.	36
Figura 4:	Resultados de simulação para a configuração 2.A.	37
Figura 5:	Resultados de simulação para a configuração 2.B.	37
Figura 6:	Resultados de simulação para a configuração 2.A modificada.	38
Figura 7:	Resultados de simulação para a configuração 2.B modificada.	38
Figura 8:	Resultados de simulação para a configuração 3.	39
Figura 9:	Resultados de simulação para a configuração 4.	40
Figura 10:	Diagrama Simulink [®] utilizado nos ensaios em laboratório.	41
Figura 11:	Resultados de ensaio para a configuração 1.	42
Figura 12:	Espectro frequencial da saída 2 do sistema.	43
Figura 13:	Diagrama de Bode do polinômio $1/T$	44
Figura 14:	Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 2.A modificada.	44
Figura 15:	Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 2.B modificada.	45
Figura 16:	Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 3.	46
Figura 17:	Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 4.	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	20 primeiros índices da resposta ao degrau para a função de transferência da planta de nível.	28
-----------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS

CARIMA	<i>Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average</i>
DELAE	Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia
DMC	<i>Dynamic Matrix Control</i>
GPC	<i>Generalized Predictive Control</i>
LASCAR	Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica
MAC	<i>Model Algorithmic Control</i>
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
MLC	<i>Mean Level Control</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
OPC	<i>Open Platform Communications</i>
PID	<i>Proportional-Integral-Derivative</i>
SCADA	<i>Supervisory Control and Data Acquisition</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

N_1	Horizonte mínimo de predição
N_2	Horizonte máximo de predição
N_u	Horizonte de controle
t	Variável discreta de tempo
$H_{ij}(z)$	Função de transferência entre a saída i e entrada j
$ref(t)$	Sinal de referência
$w(t)$	Sinal de referência utilizado na otimização
$u(t)$	Sinal de controle do sistema
$y(t)$	Sinal de saída do sistema
$\hat{y}(t + j t)$	Previsão da saída $y(t)$ para o instante $t + j$ calculada no instante t
J	Função custo
Δ	Operador de diferença $1 - z^{-1}$
$P(z^{-1})$	Polinômio de controle do sobressinal
$T(z^{-1})$	Polinômio de filtragem do ruído
R	Matriz de peso do seguimento da referência
Q	Matriz de peso da ação de controle
G	Matriz de elementos da resposta ao degrau do sistema

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONTROLE PREDITIVO	14
2.1	Controle Preditivo Baseado em Modelo	14
2.2	Algoritmo GPC	15
2.2.1	Modelo de Predição	16
2.2.2	Lei de Controle	19
2.2.3	Propriedades do Algoritmo GPC	20
2.2.4	Polinômio $P(z^{-1})$	20
2.2.5	Polinômio $T(z^{-1})$	21
2.2.6	Análise da Parametrização	22
2.3	Algoritmo GPC Multivariável	23
3	PLANTA DE NÍVEL	26
3.1	Sistema Multivariável	26
3.1.1	Aplicação do Algoritmo GPC ao Modelo Matemático da Planta de Nível	28
3.2	Características do Sistema	29
3.3	Parametrização do GPC	30
3.3.1	Configuração 1: Controlador <i>deadbeat</i>	30
3.3.2	Configuração 2: Efeito do Horizonte de Predição	32
3.3.3	Configuração 3: Efeito do Polinômio $P(z^{-1})$	32
3.3.4	Configuração 4: Efeito das Matrizes de Peso	33
3.4	Restrições à Aplicação do GPC	33
4	RESULTADOS	35
4.1	Simulações	35
4.1.1	Simulação 1: Controlador <i>deadbeat</i>	35
4.1.2	Simulação 2: Horizonte de Predição	36
4.1.3	Simulação 3: Polinômio $P(z^{-1})$	39
4.1.4	Simulação 4: Matrizes de Peso	39
4.2	Ambiente Simulink®	40
4.3	Ensaios	41
4.3.1	Ensaio 1: Controlador <i>deadbeat</i>	42
4.3.2	Ensaio 2: Horizonte de Predição	44
4.3.3	Ensaio 3: Polinômio $P(z^{-1})$	45
4.3.4	Ensaio 4: Matrizes de Peso	46
5	CONCLUSÕES	48

REFERÊNCIAS	50
------------------------------	----

1 INTRODUÇÃO

Em alguns setores da indústria, como por exemplo o petroquímico, as condições de mercado são dinâmicas e frequentemente imprevisíveis. Dessa forma, é imperativo garantir que a operação das plantas industriais seja gerenciada de forma otimizada, considerando as variações de mercado, com o menor capital investido possível, ao mesmo tempo em que os demais critérios técnicos de otimização são levados em conta. Assim, além de objetivos tecnológicos, outros objetivos logísticos, econômicos e ambientais devem ser incluídos na equação.

O problema de controle neste caso é expresso como a necessidade de atualizar as variáveis de controle a cada instante de forma a satisfazer múltiplos critérios de desempenho – sujeitos a variações sistemáticas – diante de características variáveis da planta em questão. O conceito de MPC (*Model Predictive Control*), ou controle preditivo baseado em modelo, surgiu da necessidade da indústria em lidar com problemas de controle multivariável considerando restrições. Para sistemas lineares, aspectos como robustez, estabilidade e desempenho de algoritmos que se encaixam nesta categoria de métodos de controle são amplamente conhecidos. (MORARI; LEE, 1999)

Na indústria, cada processo tende a ser único e demanda uma abordagem de otimização diferenciada. Ao mesmo tempo, porém, seria extremamente custoso desenvolver um método dedicado a cada processo. O MPC neste aspecto apresenta ampla vantagem em relação a métodos de controle tradicionais, uma vez que, em sua implementação, ele permite antecipar a violação das restrições do problema de otimização e, dessa forma, corrigi-las de maneira sistemática (GARCÍA; PRETT; MORARI, 1989)

Na área de estudo do controle preditivo, um dos métodos que encontrou maior popularidade, devido a sua formulação generalista e parametrização simples, foi o método GPC (*Generalized Predictive Control*) (CAMACHO; BORDONS, 2007). É a aplicação prática deste método que este trabalho se propõe a realizar.

O objetivo deste trabalho é o de demonstrar o funcionamento do algoritmo preditivo GPC através da aplicação deste a uma planta de nível, presente no Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica (LASCAR), do Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia (DELAE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). A planta de nível é um sistema MIMO (*Multi-Input Multi-Output*) composta de dois tanques comunicantes, cujos níveis são as variáveis de saída. O controle do sistema é efetuado através da manipulação de duas válvulas que alimentam o sistema e estabelecem uma dinâmica entre os dois tanques.

Em um primeiro momento, são apresentados os conceitos teóricos de base para a compreensão geral do método de controle preditivo. Em seguida, a formulação do algoritmo GPC é detalhada, primeiramente para o caso SISO (*Single-Input Single-Output*) e, a seguir, para o caso multivariável. A planta de nível, sua estrutura e modelo matemático,

são então apresentados, e os modelos teóricos são finalmente aplicados ao processo escolhido. Por fim, são realizados, para uma série de cenários de parametrização escolhidos, simulações em software e ensaios práticos, de forma a validar o algoritmo GPC apresentado, assim como as configurações de parâmetros escolhidas. Além disso, a partir destes resultados, é possível validar igualmente o modelo matemático utilizado frente ao sistema de controle real.

2 CONTROLE PREDITIVO

2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelo

O conceito de controle preditivo surgiu no final da década de 70, com a introdução de métodos como o MAC, *Model Algorithmic Control* (RICHALET et al., 1978) e DMC, *Dynamic Matrix Control*, introduzido por Cutler e Ramaker (CUTLER; RAMAKER, 1980), engenheiros da empresa Shell. O conceito de MPC tornou-se popular por ser uma alternativa de controle de alto desempenho, baseada em um algoritmo de simples execução. Além disso, a possibilidade de considerar restrições na formulação de um problema multivariável mostrou-se particularmente interessante para aplicações industriais na área de Processos Químicos (GARCÍA; PRETT; MORARI, 1989).

O objetivo primeiro do método de controle preditivo é o de determinar, dentro de um horizonte futuro de predição finito, as ações de controle futuras a serem aplicadas de forma a minimizar a função erro – diferença entre a saída do processo e a referência do sistema – ao longo deste horizonte. A resolução deste problema consiste em solucionar um problema de otimização dinâmico, isto é, de forma *online* a cada período de amostragem. A cada instante então o problema de otimização é resolvido, porém apenas o sinal de controle do instante imediatamente posterior é aplicado ao processo, e a cada instante os dados utilizados nos cálculos são atualizados.

Este algoritmo é comum a outras formulações do problema preditivo. Uma delas, talvez a mais popular (CAMACHO; BORDONS, 2007), é a GPC, desenvolvida por Clarke *et al.* O algoritmo GPC é capaz de controlar processos de forma suficientemente flexível, variando seus parâmetros e ordem do modelo dinamicamente conforme dados da planta são fornecidos. Ele é eficiente inclusive em plantas de fase não-mínima, com tempo morto variável ou ainda instáveis em malha-aberta (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987a).

Muitos elementos são comuns a diversos métodos preditivos. Primeiramente, determina-se um modelo de predição a ser empregado na estimação do comportamento futuro do processo. Este modelo deve ser capaz de prever, a cada instante, os sinais de saída futuros dentro de um horizonte finito de predição. Neste modelo, em geral são utilizados sinais passados de saída do processo, e ações de controle passadas e futuras, que devem ser estimadas. Alguns modelos comumente usados são a resposta impulsiva, encontrado no método MAC, por exemplo, e a resposta ao degrau do sistema, encontrado no método DMC. No algoritmo GPC, é utilizado o conceito de função de transferência para descrever o modelo de predição, que será descrito na seção 2.2.

A seguir, é definida a função objetivo, ou função custo a ser otimizada. Em geral, esta função consiste em dois termos quadráticos: o primeiro representando o erro entre o sinal de saída futuro \hat{y} , de acordo com o modelo de predição escolhido previamente, e o sinal de referência conhecido w , e o segundo, representando o esforço de controle Δu

necessário para levar o sinal de saída à referência desejada. Esta função pode ser expressa da seguinte forma, com t representando a variável de tempo discreto.

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (1)$$

sendo que a notação $\hat{y}(t+j|t)$ corresponde à predição da saída do sistema $y(t)$, referente ao instante $t+j$, estimada no instante t com auxílio de um modelo de predição. Os parâmetros N_1 e N_2 correspondem aos limites inferior e superior do horizonte de predição, e o parâmetro N_u , ao horizonte de controle. Os coeficientes $\delta(j)$ e $\lambda(j)$ são usados como fatores de ponderação para o erro e o esforço de controle respectivamente. É comum atribuir sequências exponenciais a estes coeficientes, penalizando os erros (ou controles) de forma diferente ao longo do tempo.

Uma das vantagens do algoritmo preditivo é que, para um sinal de referência de evolução conhecida, o controlador pode reagir a alterações nesta referência com antecipação. Uma forma de controlar a agressividade do algoritmo de controle é de considerar o sinal de referência utilizado no algoritmo, $w(t+j)$, como sendo uma ponderação entre o valor presente da saída do sistema, $y(t)$, e o sinal de referência de fato, $ref(t+j)$, da seguinte forma:

$$w(t+j) = \alpha w(t+j-1) + (1-\alpha)ref(t+j) \quad (2)$$

com $w(t) = y(t)$.

Dessa forma, tem-se um parâmetro α a ser regulado entre 0 e 1, de forma a suavizar a aproximação da saída do sistema à referência final.

Deseja-se então, obter a sequência de N_u sinais de controle futuros que minimiza a função custo descrita em (1), a cada instante. Este problema de otimização pode levar em conta restrições na sua resolução, da seguinte forma:

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad (3)$$

$$y_{min} \leq y(t) \leq y_{max} \quad (4)$$

Por fim, a Lei de Controle é obtida como solução do problema de otimização. Para um modelo linear e sem restrições, uma solução analítica em geral pode ser obtida. Para problemas com restrição, um método de resolução iterativo deve ser empregado.

A Figura 1 ilustra um dado algoritmo preditivo: em um determinado instante t , a referência futura $w(t+j)$ e o sinal previsto para a saída do sistema futuro $\hat{y}(t+j)$ são considerados sobre um horizonte futuro de predição entre N_1 e N_2 instantes futuros. O erro entre estes dois sinais é minimizado, resultando em uma série de sinais de controle futuros otimizados $u(t+j)$ dentro do horizonte de controle N_u .

2.2 Algoritmo GPC

O algoritmo GPC, ou Controle Preditivo Generalizado, é um método de controle preditivo baseado no conceito de horizonte retrocedente, onde a cada instante são otimizadas as saídas futuras do processo, de acordo com um modelo de predição. Os sinais de controle futuros são considerados sobre um horizonte de controle finito para o cálculo de otimização.

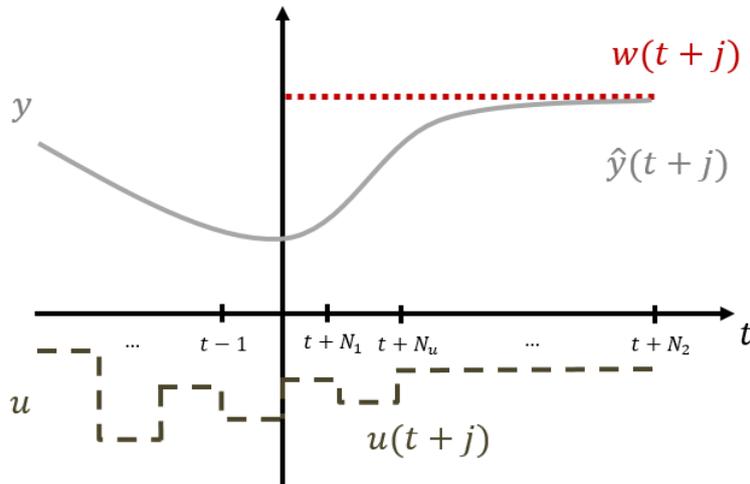


Figura 1: Sinal de referência, sinal de saída futuro e sinal de controle calculado.

Este método, de propósito geral, mostrou-se eficaz particularmente no caso de processos flexíveis, onde parâmetros do sistema não são conhecidos ou podem variar. Este método utiliza o modelo CARIMA (*Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*), que, devido à sua propriedade integradora, resulta em um comportamento em malha-fechada sem *offset*. Este comportamento é interessante em plantas industriais, onde perturbações não-estacionárias são mais comuns (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987a).

Diferentemente de outros métodos de controle preditivos, o GPC pode ser empregado em processos instáveis e de fase não-mínima. Ele também utiliza o conceito de horizonte de controle e atribui ao controle um peso durante a otimização da função-custo (CAMACHO; BORDONS, 2007). A seguir será apresentado em detalhe o algoritmo GPC para um sistema SISO linear, invariante no tempo.

2.2.1 Modelo de Predição

A fim de descrever o sistema linear, é considerado o modelo CARIMA da seguinte forma:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + C(z^{-1})\frac{\varepsilon(t)}{\Delta} \quad (5)$$

onde $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$ são polinômios em função do operador de atraso z^{-1} :

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}$$

O termo d é o tempo-morto do sistema, $\varepsilon(t)$ é o termo de ruído aleatório e não correlato, o termo de diferença $\Delta = 1 - z^{-1}$ e $C(z^{-1})$ é dado conforme

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}$$

Este modelo de perturbação integral é especialmente apropriado para aplicações industriais de perturbações não-estacionárias (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987a). O polinômio $C(z^{-1})$, que modela o termo de ruído, será considerado, por simplicidade, como $C(z^{-1}) = 1$. Finalmente o modelo do sistema se resume à seguinte expressão:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + \frac{\varepsilon(t)}{\Delta} \quad (6)$$

A seguir, a fim de expressar a previsão da saída do sistema para o instante $t + j$, é considerada a identidade diofantina:

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (7)$$

onde $\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$. O termo $E_j(z^{-1})$ corresponde a um polinômio único de grau $j - 1$ e $F_j(z^{-1})$, um polinômio de grau n_a .

Multiplicando-se (6) por $\Delta E_j(z^{-1})$ e deslocando-se todos os sinais em j unidades de tempo, obtém-se

$$\tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})\varepsilon(t+j) \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8), a expressão se torna

$$(1 - z^{-j}F_j(z^{-1}))y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})\varepsilon(t+j)$$

E finalmente a previsão de saída $y(t)$ do sistema para o instante $t + j$, calculada no instante t , é dada por

$$y(t+j) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})\varepsilon(t+j)$$

Como $E_j(z^{-1})$ é de grau $j - 1$, o terceiro termo do lado direito da equação, que corresponde à perturbação, está no futuro. Assim, aplicando-se o operador de esperança $E\{\cdot\}$ e considerando-se que $E\{\varepsilon\} = 0$, a predição do sinal de saída futuro no instante $t + j$, estimado no instante t é dado da seguinte forma:

$$\hat{y}(t+j|t) = F_j(z^{-1})y(t) + G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) \quad (9)$$

onde $G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})$. É possível considerar que o polinômio $G_j(z^{-1})$ representa a transformada Z da resposta ao degrau do sistema (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987a).

A expressão vista em (9) é utilizada no algoritmo GPC para estimar no instante t a saída futura $\hat{y}(t+j)$, onde j pertence ao horizonte de predição escolhido (digamos aqui de N_1 a N_2). Esta expressão é então usada para estimar $N_2 - N_1 + 1$ saídas futuras do sistema a cada instante.

Os polinômios $G_j(z^{-1})$ e $F_j(z^{-1})$ podem ser encontrados recursivamente a partir das seguintes expressões (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987a):

$$F_{j+1}(z^{-1}) = z(F_j(z^{-1}) - \tilde{A}(z^{-1})f_0) \quad (10)$$

$$E_{j+1} = E_j(z^{-1}) + z^{-j}f_0 \quad (11)$$

$$G_{j+1} = B(z^{-1})E_{j+1}(z^{-1})$$

onde f_0 é o elemento de grau zero do polinômio $F_j(z^{-1})$.

As condições iniciais são dadas da seguinte forma:

$$E_1 = 1 \quad (12)$$

$$F_1 = z(1 - \tilde{A}(z^{-1})) \quad (13)$$

Dessa forma, conhecendo os polinômios característicos do processo $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$, e as condições iniciais $E_1(z^{-1})$ e $F_1(z^{-1})$, é possível determinar o modelo de predição da planta em (9). Os limites inferior e superior do horizonte de predição, N_1 e N_2 respectivamente, podem ser determinados da seguinte forma: se a planta possuir um tempo morto conhecido d , define-se N_1 como sendo no mínimo igual a d , já que instantes anteriores são desprezíveis para a saída do sistema. Além disso, considera-se N_2 como sendo no mínimo igual ao grau do polinômio $B(z^{-1})$, de forma a levar em conta todos os termos futuros da saída do sistema afetados pelo controle atual dentro do problema de otimização.

Além do horizonte de predição, é possível determinar um horizonte de controle $N_u < N_2$. Este horizonte define no problema de otimização, quantas ações futuras de controle serão geradas pelo cálculo. Ou seja, considera-se que a partir N_u sinais de controle futuros, o controle é constante, ou seja

$$\Delta u(t + j - 1) = 0, j > N_u$$

Quanto maior o horizonte de controle considerado, mais ativo é o controle até um certo limite, enquanto valores menores de N_u resultam em controles mais suaves. Considerando $N = N_2 - N_1 + 1$, as previsões para a saída $y(t)$ podem ser escritas da seguinte forma vetorial, baseada em (9):

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{F}(z^{-1})y(t) + \mathbf{G}'(z^{-1})\Delta u(t - 1) \quad (14)$$

onde

$$\mathbf{y}_{(N \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t + N_1) \\ \vdots \\ \hat{y}(t + N_2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{(N_u \times 1)} = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \vdots \\ \Delta u(t + N_u - 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(z^{-1})_{(N \times 1)} = \begin{bmatrix} F_{N_1}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{N_2}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_{(N \times N_u)} = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & \cdots & 0 \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & \cdots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}'(z^{-1})_{(N_u \times 1)} = \begin{bmatrix} (G_{N_1}(z^{-1}) - g_{N_1})z \\ \vdots \\ (G_{N_2}(z^{-1}) - g_{N_1} - \cdots - g_{N_2-1}z^{-(N-1)})z^{N_2} \end{bmatrix}$$

Os termos g_i da matriz $\mathbf{G}_{(N \times N_u)}$ correspondem aos parâmetros da resposta ao degrau do sistema.

Observa-se em (14) que os dois últimos termos do lado direito da equação dependem de termos passados de controle e de medições da saída do sistema realizadas. Esta parcela da resposta do sistema é chamada de resposta livre, dada por \mathbf{f} na expressão

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (15)$$

com $\mathbf{f} = [f(t + N_1), f(t + N_1 + 1), \dots, f(t + N_2)]^T$. A resposta livre corresponde ao comportamento da saída do sistema se o controle permanece constante no futuro (incrementos de controle nulos). Este vetor é determinado recursivamente segundo (10) e (11), ou ainda segundo:

$$f_{j+1} = z(1 - \tilde{A}(z^{-1}))f_j + B(z^{-1})\Delta u(t - d + j)$$

onde f_{j+1} é o termo $f(t + j + 1)$ do vetor \mathbf{f} . E o termo inicial $f_0 = y(t)$. Como a Resposta livre considera apenas valores passados de controle, os termos $\Delta u(k)$ em que $k \geq t + j$ são considerados nulos na expressão acima.

2.2.2 Lei de Controle

Uma vez determinada a previsão da saída do sistema, o objetivo é então encontrar o sinal de controle futuro que minimiza o erro entre esta previsão da saída e o sinal de referência futuro dentro do horizonte de predição escolhido.

Primeiramente é definido o sinal de referência para o qual o sistema deve convergir. Conforme já apresentado na seção 2.2, se conhecido o sinal de referência futuro, é possível construir um sinal $w(t + j)$ como sendo a ponderação da saída atual do sistema e da referência conhecida no instante futuro, conforme (2), de forma a controlar a rapidez de convergência da saída do sistema para a referência final.

Caso a referência futura seja desconhecida, consideram-se os termos futuros de $w(t + j)$ como sendo idênticos ao sinal de referência no instante t , $w(t)$.

A fim de determinar a sequência de ações futuras ótimas, é considerada a seguinte função custo a ser minimizada:

$$J = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad (16)$$

Na expressão acima, \mathbf{e} é o vetor de erros futuros, ou seja, $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{w}$, em que \mathbf{y} é dado por (15) e \mathbf{w} é o vetor de sinais de referência futuros dado por $\mathbf{w} = [w(t + N_1), w(t + N_1 + 1), \dots, w(t + N_2)]^T$. O parâmetro escalar λ corresponde ao peso considerado para o segundo termo da expressão.

Observa-se então, de (16), que o primeiro termo quadrático busca minimizar o erro entre a saída futura prevista pelo modelo escolhido e a referência futura. Já o segundo termo corresponde ao esforço de controle futuro, ponderado de um fator λ .

Substituindo (15) em (16), obtém-se que

$$J = (\mathbf{y} - \mathbf{w})^T (\mathbf{y} - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad (17)$$

$$J = (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad (18)$$

Para um problema de otimização sem restrições, a resposta é dada de forma analítica resolvendo-se $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$. A solução para o problema sem restrições é dada por

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{w} - \mathbf{f}) \quad (19)$$

com \mathbf{I} , a matriz identidade de dimensão N .

O sinal de controle enviado ao processo no próximo instante é então o primeiro termo do vetor \mathbf{u} obtido em (19):

$$\begin{aligned} \Delta u &= \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \\ u(t) &= u(t - 1) + \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (20)$$

onde \mathbf{K} é a primeira linha da matriz $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$.

2.2.3 Propriedades do Algoritmo GPC

A escolha correta dos parâmetros do controle GPC deve ser realizada a fim de se reduzir os esforços de cálculo desnecessários e de garantir a convergência da saída do sistema.

O parâmetro N_1 , correspondente ao limite mínimo do horizonte de predição, deve ser escolhido como sendo no mínimo igual ao tempo morto do sistema. Se este valor de tempo for variável, toma-se N_1 igual a 1, e aumenta-se o grau do polinômio $B(z^{-1})$ a fim de considerar os possíveis valores de tempo morto que o sistema pode assumir.

Já o parâmetro N_2 , o limite máximo do horizonte de predição, deve ser escolhido de forma a considerar futuras amostras de saída positivas na função custo, quando o comportamento inicial do sistema for de fase não-mínima. Um valor superior ao grau do polinômio $B(z^{-1})$ é sugerido como escolha de N_2 (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987a). Quanto mais próximo N_2 for do tempo de subida do sistema, melhor será o resultado do algoritmo GPC (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1989) (GARRIGA; SOROUSH, 2010).

Um horizonte de controle N_u de valor maior que 1 resulta em uma resposta mais ativa até um certo limite em que um aumento de N_u tem pouco ou nenhum efeito sobre a resposta do sistema. Para processos estáveis, a sequência de controle obtida como resultado da otimização tende a ser bem comportada, face a uma referência do tipo degrau. Assim, um valor de N_u igual a 1 tende a ser o suficiente. Em geral, N_u pode ser escolhido adequadamente como sendo igual ao grau de polinômio $B(z^{-1})$, ou ainda igual ao número de polos próximo ao limite de estabilidade. Para uma maior suavização do sinal de controle, é igualmente possível aumentar o parâmetro λ , peso do esforço de controle na função custo.

A fim de garantir a robustez matemática do algoritmo e a inversibilidade do termo de (19), o parâmetro λ é tomado como sendo não-nulo e positivo.

A fim de melhorar o seguimento de referência, é incluída ainda a função de transferência auxiliar $P(z^{-1})$ na formulação do problema GPC (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1989). Seu funcionamento será detalhado a seguir.

2.2.4 Polinômio $P(z^{-1})$

Conforme já mencionado anteriormente, uma das formas de suavizar a resposta do sistema é através da definição do polinômio auxiliar $P(z^{-1})$. Esta função auxiliar é dada da seguinte forma:

$$P(z^{-1}) = \frac{P_n(z^{-1})}{P_d(z^{-1})}$$

de forma que $P(1) = 1$, a fim de garantir um controle sem *offset*. Esta função funciona como um polinômio de ponderação do seguimento de referência. Um termo auxiliar de saída φ é definido da seguinte forma:

$$\varphi(t) = P(z^{-1})y(t) \quad (21)$$

Tomando esta nova saída, $y(t)$ é então substituído por $\varphi(t)$ na função custo, dada em (17), fazendo com que o erro a ser minimizado passe a ser $\varphi(t) - w(t)$.

Considerando ainda a entrada auxiliar $\vartheta(t) = P(z^{-1})u(t)$, o modelo do sistema torna-se

$$A(z^{-1})\varphi(t) = B(z^{-1})z^{-d}\vartheta(t-1) + \frac{\varepsilon(t)}{\Delta} \quad (22)$$

O algoritmo GPC é então resolvido para $\varphi(t)$ e $\vartheta(t)$, e a cada instante o sinal de controle a ser enviado ao sistema é calculado como

$$u(t) = u(t-1) + \frac{\Delta\vartheta}{P(z^{-1})}$$

Para sistemas que possuem um grande sobressinal (*overshoot*), a função $P(z^{-1})$ age de forma a penalizar este sobressinal (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987b). Dessa forma, a saída é forçada a seguir o sinal de referência de acordo com a dinâmica do filtro $P(z^{-1})$.

Uma forma mais simples e equivalente de assimilar a função no problema GPC, é a de considerar o sinal de referência utilizado para o cálculo do algoritmo $w(t)$ como sendo o sinal real de referência filtrado pelo termo $1/P(z^{-1})$ da seguinte forma:

$$w(t) = \frac{ref(t)}{P(z^{-1})} \quad (23)$$

onde $ref(t)$ corresponde ao sinal de referência real que deve ser seguido.

2.2.5 Polinômio $T(z^{-1})$

Outro polinômio auxiliar que pode ser utilizado na parametrização do algoritmo GPC é o polinômio $T(z^{-1})$. Sua função é a de restringir a banda de frequências em que o algoritmo de controle GPC busca prever valores futuros (LAMBERT, 1987). Dessa forma, busca-se diminuir a sensibilidade do algoritmo a perturbações e dinâmicas não consideradas durante o levantamento do modelo do sistema.

Retomando o modelo descrito em (5), substitui-se o polinômio $T(z^{-1})$ da seguinte forma:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + T(z^{-1})\frac{\varepsilon(t)}{\Delta} \quad (24)$$

de forma que a equação diofantina a ser resolvida passa a ser

$$T(z^{-1}) = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (25)$$

Substituindo-se (25) em (24), e tomando a esperança da expressão resultante, tem-se que a melhor previsão da saída do sistema $\hat{y}(t+j)$ é dada por

$$\hat{y}(t+j) = F_j(z^{-1})y_T(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u_T(t+j-d-1) \quad (26)$$

onde $y_T(t) = y(t)/T(z^{-1})$ e $u_T(t) = u(t)/T(z^{-1})$, ou seja, as variáveis $y(t)$ e $u(t)$ são filtradas por $T(z^{-1})$.

Em (CAMACHO; BORDONS, 2007) é demonstrado que, em malha fechada, o polinômio $T(z^{-1})$ é cancelado na função de transferência entre a saída do sistema e o sinal de referência, exercendo papel de polinômio observador. No entanto, este mesmo polinômio funciona, em malha fechada, como filtro na função de transferência entre a saída do sistema e a perturbação, contribuindo com a robustez e estabilidade do sistema em malha fechada.

Segundo (MCINTOSH; SHAH; FISHER, 1991) e (LAMBERT, 1987), uma ordem 2 para $T(z^{-1})$ é o suficiente para que $\Delta/T(z^{-1})$ constitua um filtro passa-banda. Tomando-se um polinômio de polo duplo do tipo $T(z^{-1}) = (1 - \tau z^{-1})^2$, tem-se como frequência de corte $-\ln \tau/T_s$, com T_s sendo o período de amostragem. Para uma banda passante

de até $1/5T_s$ rad/s, a constante τ deve ser de aproximadamente $\tau = 0,8$ para $T_s = 1$ s. Esta escolha de $T(z^{-1}) = (1 - 0,8z^{-1})^2$ é sugerida por (LAMBERT, 1987) e (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987b) como uma escolha inicial para o problema de estabilidade do algoritmo.

Para casos em que há apenas ruído de medição, sem incompatibilidade do modelo com o sistema, (SOETERBOEK, 1992) sugere o uso de $T(z^{-1}) = A(z^{-1})(1 - \mu z^{-1})$, onde $A(z^{-1})$ corresponde ao polinômio denominador da função de transferência da planta e onde μ , definido entre 0 e 1, é usado como parâmetro de ajuste da margem de ganho do sistema em malha fechada. Quanto mais próximo de 1 for μ , maior a robustez do sistema.

Para modelos de ruído que já possuem ação integradora, como mostrado em (5), a escolha $T(z^{-1}) = A(z^{-1})$ mostra-se eficaz (SOETERBOEK, 1992) do ponto de vista de robustez e regulação (minimização da variância dos sinais de saída e controle). Já um polinômio do tipo $T(z^{-1}) = (1 - \mu z^{-1})^n$, com $\mu = 0,8$, como sugerido acima por (MCINTOSH; SHAH; FISHER, 1991) fornece resultados adequados na maioria dos casos, incluindo em situações em que o modelo matemático não corresponde exatamente à dinâmica real do sistema.

2.2.6 Análise da Parametrização

Os seguintes teoremas relacionam a estabilidade do algoritmo com o caráter de controlabilidade e observabilidade do sistema (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1989).

Teorema 1 *O algoritmo GPC resulta em um controlador de resposta mínima (deadbeat) estável quando*

- i O sistema é completamente controlável e observável com n estados, e*
- ii $N_1 = n$, $N_2 \geq 2n - 1$, $N_u = n$ e $\lambda = 0$ (peso dado ao controle).*

Um controlador *deadbeat* age sobre o sistema de forma que o tempo de subida seja mínimo, com erro estacionário nulo obtido em um intervalo de tempo finito.

Teorema 2 *O comportamento em malha-fechada, sob controle GPC, é estável se o sistema é estabilizável e detectável e se*

- i $N_2 \rightarrow \infty$, $N_u = N_2$ e $\lambda > 0$, ou*
- ii $N_2 \rightarrow \infty$, $N_u = N_2 - n + 1$ e $\lambda = 0$, desde que a planta não possua zero no limite de estabilidade.*

De forma mais particular, o seguinte teorema estabelece uma relação entre o controle GPC e um controle de nível médio (MLC):

Teorema 3 *O comportamento em malha-fechada, sob controle GPC, é estável e tende a um controle do tipo MLC se o sistema é estabilizável e detectável e se $N_2 \rightarrow \infty$, $N_u = 1$ e $\lambda = 0$.*

Um controle *mean-level* fornece um único degrau como sinal de controle em resposta a uma variação no sinal de referência. Este controle, mantido constante, deve conduzir a saída do sistema à referência em regime permanente (MCINTOSH; SHAH; FISHER, 1991).

2.3 Algoritmo GPC Multivariável

Em geral, na indústria, os processos possuem mais de uma variável a ser controlada, resultando em mais de uma saída. Quando a interação entre variáveis do processo não é desprezível, a planta deve ser considerada um sistema MIMO para o projeto dos controladores.

O algoritmo apresentado na seção 2.2 pode ser facilmente generalizado para o caso multivariável. O modelo de predição CARIMA utilizado para um sistema de n saídas e m entradas é expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{u}(t-1) + \frac{1}{\Delta}\mathbf{C}(z^{-1})\varepsilon(t) \quad (27)$$

em que $\mathbf{A}(z^{-1})$ e $\mathbf{C}(z^{-1})$ são matrizes polinomiais de dimensão $(n \times n)$ e $\mathbf{B}(z^{-1})$, matriz polinomial de dimensão $(n \times m)$. Estas matrizes são definidas conforme as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z^{-1}) &= \mathbf{I}_{(n \times n)} + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_{n_a} z^{-n_a} \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_{n_b} z^{-n_b} \\ \mathbf{C}(z^{-1}) &= \mathbf{I}_{(n \times n)} + \mathbf{C}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{C}_{n_c} z^{-n_c} \end{aligned}$$

E o operador de diferença é dado como $\Delta = 1 - z^{-1}$. Além disso, o termo $\mathbf{y}(t)$ representa o vetor de dimensão $(n \times 1)$ de saída do sistema em um dado instante t , $\mathbf{u}(t)$, o vetor $(m \times 1)$ de entradas no instante t , e $\varepsilon(t)$, o vetor de tamanho $(n \times 1)$ de ruído branco de média nula.

A função custo quadrática a ser minimizada é dada no seguinte formato:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \|\hat{\mathbf{y}}(t+j|t) - \mathbf{w}(t+j)\|_{\mathbf{R}}^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \|\Delta \mathbf{u}(t+j-1)\|_{\mathbf{Q}}^2 \quad (28)$$

onde $\hat{\mathbf{y}}(t+j|t)$ é o vetor de predição das n saídas do sistema, calculado e atualizado a cada instante t discreto, referente ao instante $t+j$. N_1 e N_2 são os limites mínimo e máximo do horizonte de predição. Já o vetor $\mathbf{w}(t+j)$ corresponde ao sinal de referência futuro para as n saídas do sistema. Aqui as notações $\|\cdot\|_{\mathbf{R}}^2$ e $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}}^2$ indicam que os termos quadráticos são ponderados por matrizes diagonais \mathbf{R} e \mathbf{Q} respectivamente.

A diferença em relação à formulação para sistemas SISO, é justamente a introdução dessas matrizes de ponderação do termo relativo ao erro de seguimento da referência – matriz \mathbf{R} – e do termo relativo ao esforço de controle – matriz \mathbf{Q} . Escrito de forma vetorial, com o resultado demonstrado em (33), tem-se que:

$$J = (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T \mathbf{R} (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) + \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} \quad (29)$$

onde \mathbf{R} e \mathbf{Q} são matrizes diagonais de dimensão $(n * N \times n * N)$ e $(m * N_u \times m * N_u)$ respectivamente.

Considerando a matriz polinomial $\mathbf{C}(z^{-1})$ como sendo a matriz identidade $\mathbf{I}_{(n \times n)}$, a equação diofantina na forma matricial é expressa como

$$\mathbf{I}_{(n \times n)} = \mathbf{E}_j(z^{-1})\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) + z^{-j}\mathbf{F}_j(z^{-1}) \quad (30)$$

onde $\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) = \Delta \mathbf{A}(z^{-1})$, e $\mathbf{E}_j(z^{-1})$ e $\mathbf{F}_j(z^{-1})$ são matrizes polinomiais de ordem $j - 1$ e n_a respectivamente.

As matrizes polinomiais $\mathbf{E}_j(z^{-1})$, $\mathbf{F}_j(z^{-1})$, que são matrizes diagonais, podem ser encontradas solucionando-se a equação diofantina em (30). Os termos diagonais $E_{j_i}(z^{-1})$ e $F_{j_i}(z^{-1})$ são obtidos dividindo-se sucessivamente o termo diagonal I_i da matriz identidade $\mathbf{I}_{(n \times n)}$ pelo termo diagonal \tilde{A}_i de $\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1})$ até que o resto da divisão possa ser fatorado em $z^{-j} F_{j_i}(z^{-1})$. O quociente é então equivalente a $E_{j_i}(z^{-1})$. O processo é repetido para $i = 1, \dots, n$, ou seja, para os n componentes diagonais das matrizes $\mathbf{E}_j(z^{-1})$ e $\mathbf{F}_j(z^{-1})$.

A partir de (27) e (30), e de um desenvolvimento similar ao realizado para o caso SISO apresentado anteriormente, obtém-se a seguinte expressão do vetor de predição das saídas do sistema:

$$\hat{\mathbf{y}}(t + j|t) = \mathbf{F}_j(z^{-1})y(t) + \mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(t + j - 1)$$

ou ainda, considerando que os termos diagonais de $\mathbf{E}_j(z^{-1})$ possuem grau $j - 1$ e que os termos diagonais de $\mathbf{F}_j(z^{-1})$ têm grau n_a , é possível separar termos passados e futuros de $\Delta \mathbf{u}$ da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{y}}(t + j|t) = \mathbf{G}_j(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(t + j - 1) + \mathbf{G}_{jp}(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(t - 1) + \mathbf{F}_j(z^{-1})y(t) \quad (31)$$

onde o termo $\mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})$ foi separado em $\mathbf{G}_j(z^{-1}) + z^{-j}\mathbf{G}_{jp}(z^{-1})$, com $\mathbf{G}_j(z^{-1})$ de grau inferior a j .

Observa-se que os últimos dois termos de (31), composto apenas de termos passados, constitui a resposta livre do sistema \mathbf{f}_j . O vetor de n saídas previstas para o instante $t + j$ pode ser reescrito como

$$\hat{\mathbf{y}}(t + j|t) = \mathbf{G}_j(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(t + j - 1) + \mathbf{f}_j \quad (32)$$

com os elementos kl da matriz $\mathbf{G}_j(z^{-1})$ sendo dados da forma polinomial $\mathbf{G}_j^{kl}(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{j-1} g_i^{kl} z^{-i}$. Os termos g_i^{kl} são os termos da resposta a degrau da função de transferência entre a entrada l e a saída k para o instante i , conforme será visto a seguir.

O vetor de previsão de saídas para o instante $t + j$ é da forma $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_1(t + j), \dots, \hat{y}_n(t + j)]^T$, o vetor de entradas no instante $t + j - 1$ é dado como $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1(t + j - 1), \dots, \Delta u_m(t + j - 1)]^T$ e o vetor de resposta livre para as n saídas do sistema definido como $\mathbf{f}_j = [f_1(t + j), \dots, f_n(t + j)]^T$. O vetor de previsão para as n saídas do sistema, considerando um horizonte de predição entre N_1 e N_2 é dado da seguinte forma e um horizonte de controle N_u :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (33)$$

onde $\mathbf{y} = [\hat{y}_1(t + N_1), \hat{y}_2(t + N_1), \dots, \hat{y}_n(t + N_1), \hat{y}_1(t + N_1 + 1), \dots, \hat{y}_n(t + N_2)]^T$. O vetor de controles futuros é definido como $\mathbf{u} = [\Delta u_1(t), \Delta u_2(t), \dots, \Delta u_m(t), \Delta u_1(t + 1), \dots, \Delta u_m(t + N_u)]^T$. Além disso, o vetor referente à resposta livre do sistema é dado como a seguinte concatenação: $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_{N_1}^T, \mathbf{f}_{N_1+1}^T, \dots, \mathbf{f}_{N_2}^T]^T$.

De forma alternativa à solução da equação diofantina, é possível determinar a matriz \mathbf{G} a partir da resposta ao degrau do sistema. A matriz \mathbf{G} é formada pelos termos g_i^{kl} da resposta ao degrau de da função de transferência que caracteriza o comportamento entre a saída k e a entrada l , relativa ao instante i . Para o problema proposto nesta seção, $N_1 < i < N_2$, $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq l \leq m$.

O formato da matriz \mathbf{G} , de dimensão $(n * N \times m * N_u)$, é dado por

$$\begin{bmatrix} g_{N_1}^{11} & \cdots & g_{N_1}^{1m} & g_{N_1-1}^{11} & \cdots & g_{N_1-1}^{1m} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{N_1}^{n1} & \cdots & g_{N_1}^{nm} & g_{N_1-1}^{n1} & \cdots & g_{N_1-1}^{nm} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ g_{N_1+1}^{11} & \cdots & g_{N_1+1}^{1m} & g_{N_1}^{11} & \cdots & g_{N_1}^{1m} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{N_1+1}^{n1} & \cdots & g_{N_1+1}^{nm} & g_{N_1}^{n1} & \cdots & g_{N_1}^{nm} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ g_{N_2}^{11} & \cdots & g_{N_2}^{1m} & g_{N_2-1}^{11} & \cdots & g_{N_2-1}^{1m} & \cdots & g_{N_2-N_u+1}^{11} & \cdots & g_{N_2-N_u+1}^{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{N_2}^{n1} & \cdots & g_{N_2}^{nm} & g_{N_2-1}^{n1} & \cdots & g_{N_2-1}^{nm} & \cdots & g_{N_2-N_u+1}^{n1} & \cdots & g_{N_2-N_u+1}^{nm} \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, é possível determinar o termo correspondente à resposta livre, sem passar pela determinação das matrizes polinomiais $\mathbf{E}_j(z^{-1})$ e $\mathbf{F}_j(z^{-1})$. O vetor resposta livre do sistema, em um instante futuro $j + 1$ pode ser calculado recursivamente conforme a seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_{j+1} = z(\mathbf{I} - \mathbf{A}(z^{-1}))\mathbf{f}_j + \mathbf{B}(z^{-1})\Delta\mathbf{u}(t + j) \quad (34)$$

com $\mathbf{f}(t) = \mathbf{y}(t)$ e os termos futuros de $\Delta\mathbf{u}(t + a)$, em que $a \geq 0$, considerados nulos.

A solução ótima, para o problema de otimização sem restrições, que minimiza a função-custo mostrada em (27) se dá de forma muito similar à solução para o caso SISO:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} + \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{R} (\mathbf{w} - \mathbf{f}) \quad (35)$$

3 PLANTA DE NÍVEL

A fim de validar o algoritmo preditivo apresentado, foi utilizada uma planta piloto de nível, localizada no Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica, pertencente ao Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia (DELAE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

O sistema consiste em um conjunto de dois tanques de 70 litros cada, um reservatório de 250 litros, duas válvulas e duas bombas, em que o nível dos tanques são as variáveis de saída, controladas através da abertura das válvulas e do acionamento das bombas. Por simplicidade, as bombas foram configuradas para operar de forma constante.

As válvulas pneumáticas são acionadas com o auxílio de um posicionador inteligente de válvulas Smar FY302. A medição dos níveis é dada pelo sensor de pressão Smar LD302 posicionados no fundo de cada tanque. A comunicação dos elementos inteligentes da planta se dá via *software* Elipse Scada, que permite acionar e monitorar as variáveis do sistema em tempo real.

O sistema resultante equivale a um sistema MIMO de duas entradas, abertura das válvulas, e duas saídas, níveis dos tanques.

3.1 Sistema Multivariável

A planta de nível é composta de dois tanques cilíndricos sobrepostos, de forma a estabelecer um fluxo contínuo do tanque superior para o tanque inferior. Além disso, o tanque inferior é conectado a um reservatório, para onde o conteúdo do tanque inferior flui naturalmente por ação gravitacional. A fim de alimentar este sistema, uma primeira bomba estabelece um fluxo hidráulico do reservatório ao tanque superior, e uma segunda bomba age entre os dois tanques, de forma a alimentar o tanque superior a partir do conteúdo do tanque inferior. Ambos os fluxos de alimentação são interrompidos por válvulas de abertura controlável. Além disso, como a operação das bombas é tomada como sendo sempre constante, as variáveis de controle passam a ser somente a abertura destas válvulas.

A Figura 2 ilustra o esquema de funcionamento da planta de nível. Nota-se que o sistema, operando em malha fechada, é composto de quatro controladores do tipo PID (representados na Figura 2 como sendo C_{11} , C_{12} , C_{21} e C_{22}). Os controladores C_{11} e C_{12} atuam na abertura da Válvula 1, tendo como entrada o erro entre o sinal de referência e o nível do Tanque 1 e do Tanque 2 respectivamente. Já os controladores C_{21} e C_{22} atuam sobre a Válvula 2, tendo igualmente como entrada o erro entre o sinal de referência e o nível dos tanques.

Neste trabalho, estes controladores foram utilizados apenas para levar o sistema a um dado ponto de operação, já que, uma vez em acomodado o sistema em torno deste ponto,

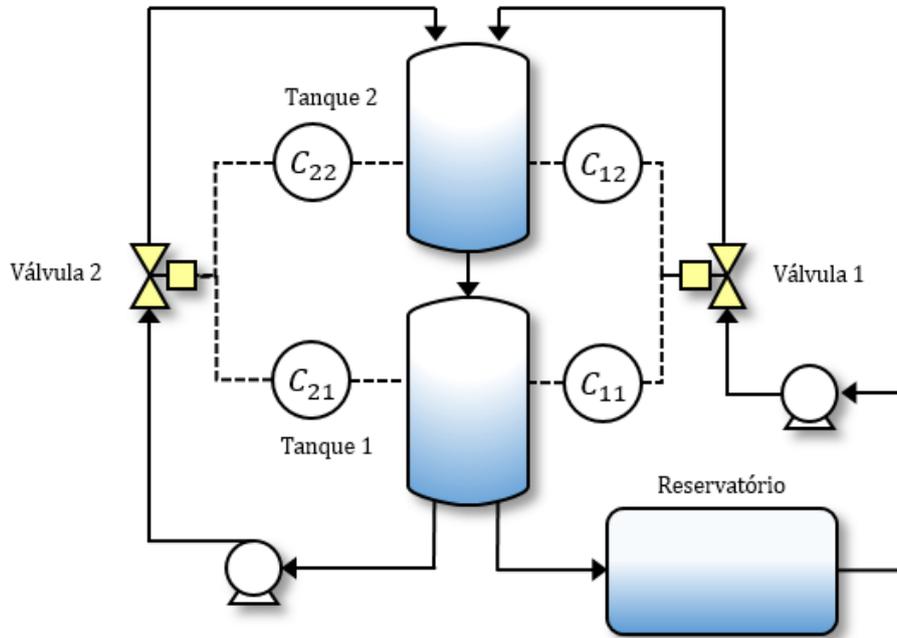


Figura 2: Esquema de funcionamento da planta de nível.

os ensaios com o algoritmo GPC são realizados em malha aberta.

Dessa forma, o sistema se caracteriza de forma multivariável, com dois sinais de entrada, correspondendo à abertura das válvulas, e dois sinais de saída, correspondendo ao nível dos tanques. O sistema pode então ser caracterizado segundo as seguintes funções de transferência discretas:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(z^{-1}) & H_{12}(z^{-1}) \\ H_{21}(z^{-1}) & H_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$, correspondem aos níveis dos tanques 1 e 2 respectivamente; $u_1(t)$ e $u_2(t)$ representam as aberturas das válvulas 1 e 2, respectivamente.

A identificação do modelo matemático da planta, feita previamente pelo grupo de pesquisa do laboratório, foi realizada com base no comportamento em um dado ponto de operação da planta de nível. Foram considerados os fluxos hidráulicos de alimentação como sendo proporcionais à abertura das válvulas, e os fluxos de queda ao reservatório, como sendo proporcionais ao nível dos tanques. Considerando estas aproximações, o modelo resultante é dado, para um período de amostragem de 1 s, de acordo com

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,9725 \cdot 10^{-5}}{(z-0,9943)(z-0,9926)} & \frac{-2,9743 \cdot 10^{-3}(z-1)}{(z-0,9943)(z-0,9926)} \\ \frac{6,3312 \cdot 10^{-3}}{(z-0,9943)} & \frac{2,7207 \cdot 10^{-3}}{(z-0,9943)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Em malha fechada, os sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$ possuem a seguinte relação com o erro entre o sinal de referência e o nível dos tanques:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) \\ C_{21}(z) & C_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

onde $e_1(t) = ref_1(t) - y_1(t)$ corresponde ao erro de nível do Tanque 1 e $e_2(t) = ref_2(t) - y_2(t)$, ao erro de nível do Tanque 2.

3.1.1 Aplicação do Algoritmo GPC ao Modelo Matemático da Planta de Nível

Como visto na seção 2.2 e 2.3, o modelo matemático do sistema a ser controlado é essencial para a execução do algoritmo preditivo. De forma explícita, tem-se que o modelo utilizado na formulação GPC multivariável, apresentado em (27), pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 - 1,987z^{-1} + 0,9869z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - 0,9943z^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 3,9725 \cdot 10^{-5} z^{-2} & -2,9743 \cdot 10^{-3} (z^{-1} - z^{-2}) \\ 6,3312 \cdot 10^{-3} z^{-2} & 2,7207 \cdot 10^{-3} z^{-2} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \frac{1}{\Delta} \varepsilon(t)$$

onde $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$, vetor referente ao nível dos tanques no instante t , e $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$, vetor referente à abertura das válvulas.

A fim de determinar a equação de predição do sistema, dado de acordo com (33), para um horizonte de predição dado pelo intervalo $[N_1, N_2]$ e um horizonte de controle N_u , é necessário definir a matriz \mathbf{G} , composta pelos índices da resposta ao degrau da função de transferência da planta. Na Tabela 1, são mostrados os 20 primeiros índices da resposta ao degrau para as funções de transferência de cada par entrada-saída, obtidos com auxílio da função *step()*, do software MATLAB®: g_i^{11} corresponde aos índices da resposta da saída $y_1(t)$ a um degrau em $u_1(t)$; g_i^{12} corresponde aos índices da resposta da saída $y_1(t)$ a um degrau em $u_2(t)$; g_i^{21} , aos índices da saída $y_2(t)$ a um degrau em $u_1(t)$; e finalmente g_i^{22} , aos índices da saída $y_2(t)$ a um degrau em $u_2(t)$.

Tabela 1: 20 primeiros índices da resposta ao degrau para a função de transferência da planta de nível.

i	g_i^{11}	g_i^{12}	g_i^{21}	g_i^{22}
1	0,000	$-2,974 \cdot 10^{-3}$	$6,331 \cdot 10^{-3}$	$2,721 \cdot 10^{-3}$
2	$3,972 \cdot 10^{-5}$	$-5,909 \cdot 10^{-3}$	$1,263 \cdot 10^{-2}$	$5,426 \cdot 10^{-3}$
3	$1,187 \cdot 10^{-4}$	$-8,806 \cdot 10^{-3}$	$1,888 \cdot 10^{-2}$	$8,115 \cdot 10^{-3}$
4	$2,363 \cdot 10^{-4}$	$-1,166 \cdot 10^{-2}$	$2,511 \cdot 10^{-2}$	$1,079 \cdot 10^{-2}$
5	$3,920 \cdot 10^{-4}$	$-1,448 \cdot 10^{-2}$	$3,129 \cdot 10^{-2}$	$1,345 \cdot 10^{-2}$
6	$5,855 \cdot 10^{-4}$	$-1,727 \cdot 10^{-2}$	$3,745 \cdot 10^{-2}$	$1,609 \cdot 10^{-2}$
7	$8,161 \cdot 10^{-4}$	$-2,001 \cdot 10^{-2}$	$4,356 \cdot 10^{-2}$	$1,872 \cdot 10^{-2}$
8	$1,083 \cdot 10^{-3}$	$-2,272 \cdot 10^{-2}$	$4,964 \cdot 10^{-2}$	$2,133 \cdot 10^{-2}$
9	$1,387 \cdot 10^{-3}$	$-2,539 \cdot 10^{-2}$	$5,569 \cdot 10^{-2}$	$2,393 \cdot 10^{-2}$
10	$1,726 \cdot 10^{-3}$	$-2,803 \cdot 10^{-2}$	$6,170 \cdot 10^{-2}$	$2,651 \cdot 10^{-2}$
11	$2,100 \cdot 10^{-3}$	$-3,063 \cdot 10^{-2}$	$6,768 \cdot 10^{-2}$	$2,908 \cdot 10^{-2}$
12	$2,509 \cdot 10^{-3}$	$-3,319 \cdot 10^{-2}$	$7,362 \cdot 10^{-2}$	$3,164 \cdot 10^{-2}$
13	$2,953 \cdot 10^{-3}$	$-3,572 \cdot 10^{-2}$	$7,953 \cdot 10^{-2}$	$3,418 \cdot 10^{-2}$
14	$3,430 \cdot 10^{-3}$	$-3,822 \cdot 10^{-2}$	$8,540 \cdot 10^{-2}$	$3,670 \cdot 10^{-2}$
15	$3,940 \cdot 10^{-3}$	$-4,068 \cdot 10^{-2}$	$9,125 \cdot 10^{-2}$	$3,921 \cdot 10^{-2}$
16	$4,484 \cdot 10^{-3}$	$-4,310 \cdot 10^{-2}$	$9,705 \cdot 10^{-2}$	$4,171 \cdot 10^{-2}$
17	$5,059 \cdot 10^{-3}$	$-4,550 \cdot 10^{-2}$	$1,028 \cdot 10^{-1}$	$4,419 \cdot 10^{-2}$
18	$5,667 \cdot 10^{-3}$	$-4,786 \cdot 10^{-2}$	$1,086 \cdot 10^{-1}$	$4,665 \cdot 10^{-2}$
19	$6,306 \cdot 10^{-3}$	$-5,018 \cdot 10^{-2}$	$1,143 \cdot 10^{-1}$	$4,911 \cdot 10^{-2}$
20	$6,976 \cdot 10^{-3}$	$-5,248 \cdot 10^{-2}$	$1,199 \cdot 10^{-1}$	$5,155 \cdot 10^{-2}$

A composição da matriz \mathbf{G} depende dos horizontes escolhidos. Mais adiante para a configuração de controle *deadbeat*, descrita na seção 3.3.1, será exemplificada a formação desta matriz, a partir dos índices apresentados na Tabela 1.

A resposta livre do sistema, é calculada iterativamente, da seguinte forma – baseada em (34):

$$\begin{aligned} f_1(t+j+1) &= 2,987f_1(t+j) - 2,974f_1(t+j-1) + 0,9869f_1(t+j-2) \\ &+ 3,9725 \cdot 10^{-5} \Delta u_1(t+j-2) + 2,9743 \cdot 10^{-3} \Delta u_2(t+j-2) \end{aligned} \quad (39)$$

$$f_2(t+j+1) = 1,994f_2(t+j) - 0,994f_2(t+j-1) \quad (40)$$

com $N_1 \leq j+1 \leq N_2$; $f_1(t) = y_1(t)$ e $f_2(t) = y_2(t)$; e onde $f_1(t+j+1)$ corresponde à resposta livre do sistema, referente à saída $y_1(t)$, em um instante futuro $t+j+1$, e $f_2(t+j+1)$, à resposta livre referente à saída $y_2(t)$, no instante futuro $t+j+1$.

3.2 Características do Sistema

Algumas características do sistema apresentado acima são importantes na parametrização do algoritmo GPC.

Um sistema é dito controlável quando, dentro de um intervalo de tempo finito, for possível transferir o estado inicial do sistema para um estado qualquer. Considerando um sistema expresso em espaço de estados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

onde \mathbf{x} corresponde ao vetor de estados, de dimensão n ; \mathbf{u} representa a entrada do sistema; \mathbf{y} o vetor de saídas; e t , a variável de tempo discreto.

Matematicamente um sistema é controlável em todos os seus estados quando a seguinte condição é satisfeita (OGATA, 2001):

$$\text{Posto}\{[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\} = n \quad (41)$$

onde $[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \partial$ corresponde à matriz de controlabilidade do sistema. Se esta possui então n colunas linearmente independentes, o sistema é completamente controlável.

Por outro lado, um sistema é dito observável quando, a partir da observação da saída do sistema durante um intervalo de tempo finito, seus estados puderem ser estimados. Esta característica é particularmente importante para situações onde é necessário estimar variáveis não-mensuráveis (OGATA, 2001).

Matematicamente um sistema é completamente observável quando a equação

$$\text{Posto}\{[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \mid \dots \mid \mathbf{A}^{T^{n-1}}\mathbf{C}^T]\} = n \quad (42)$$

for satisfeita, onde $[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \mid \dots \mid \mathbf{A}^{T^{n-1}}\mathbf{C}^T] = \sigma$ é a matriz de observabilidade do sistema.

O modelo que caracteriza a planta de nível, dado em (37), pode ser representado em espaço de estados, conforme mostra a seguinte expressão:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0,9927 & 0,01769 \\ 5,912 \cdot 10^{-6} & 0,9942 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -2,622 \cdot 10^{-4} & -0,06722 \\ 0,05065 & 0,02201 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0,04432 & 2,294 \cdot 10^{-4} \\ 4,589 \cdot 10^{-4} & 0,125 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Nota-se que a representação de estados em sua forma mínima demanda apenas dois estados, i.e. $n = 2$. Estes estados não correspondem necessariamente a variáveis físicas, sendo apenas uma representação matemática. Calculando-se as matrizes de controlabilidade e de observabilidade segundo indicado em (41) e (42), obtém-se que $Posto\{\partial\} = Posto\{\sigma\} = 2$. Finalmente, o sistema correspondente à planta de nível é considerado um sistema completamente controlável e observável.

Além disso, a partir destas duas conclusões podem ser inferidas duas outras: o sistema, visto que é controlável, é estabilizável; e o sistema, visto que é observável, é detectável.

3.3 Parametrização do GPC

Com tais conclusões sobre a controlabilidade e observabilidade do sistema, é possível perceber que todos os teoremas apresentados na seção 2.2.6 são aplicáveis ao sistema da planta de nível.

Primeiramente, para um controlador tipo *deadbeat*, segundo o Teorema 1, é necessário que o peso dado ao controle seja nulo. No caso multivariável, essa ponderação é dada pela matriz \mathbf{Q} . Dessa forma, e segundo o Teorema 1, a parametrização do algoritmo GPC, de forma que o controlador resultante seja de resposta mínima, será dada na seção 3.3.1.

Nesta mesma seção, será ilustrado numericamente o processamento do algoritmo. Os cálculos necessários para a execução do algoritmo serão igualmente explicitados.

3.3.1 Configuração 1: Controlador *deadbeat*

- Horizonte mínimo de predição: $N_1 = 2$;
- Horizonte máximo de predição: $N_2 = 3$;
- Horizonte de controle: $N_u = 2$;
- Matriz de peso (referente ao seguimento de referência): $\mathbf{R} = \mathbf{I}_{(4 \times 4)}$;
- Matriz de peso (referente ao controle): $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$;

As matrizes polinomiais $\mathbf{E}_j(z^{-1})$ e $\mathbf{F}_j(z^{-1})$ são matrizes diagonais, calculadas segundo descrito na seção 2.3. Considerando $j \in [2, 3]$, as matrizes $\mathbf{E}_j(z^{-1})$ são dadas como

$$\mathbf{E}_2(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 + 2,9868z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 + 1,9943z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 + 2,9868z^{-1} + 5,9413z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 + 1,9943z^{-1} + 2,9829z^{-2} \end{bmatrix}$$

Já as matrizes $\mathbf{F}_j(z^{-1})$, para $j \in [2, 3]$, são dadas como

$$\mathbf{F}_2(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 5,9414 - 7,8952z^{-1} - 2,9478z^{-2} & 0 \\ 0 & 2,9829 - 1,9829z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_3(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 9,8503 - 14,7199z^{-1} + 5,8636z^{-2} & 0 \\ 0 & 3,9659 - 2,9659z^{-1} \end{bmatrix}$$

A partir das matrizes definidas acima, é possível calcular as demais matrizes $\mathbf{G}_j(z^{-1})$, $\mathbf{G}_{jp}(z^{-1})$ segundo (31). De forma mais simples, é possível tomar a resposta ao degrau do sistema para compor a matriz \mathbf{G} .

A matriz \mathbf{G} , para a configuração *deadbeat* é dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3,972 \cdot 10^{-5} & -5,909 \cdot 10^{-3} & 0 & -2,974 \cdot 10^{-3} \\ 1,263 \cdot 10^{-2} & 5,426 \cdot 10^{-3} & 6,331 \cdot 10^{-3} & 2,721 \cdot 10^{-3} \\ 1,187 \cdot 10^{-4} & -8,806 \cdot 10^{-3} & 3,972 \cdot 10^{-5} & -5,909 \cdot 10^{-3} \\ 1,888 \cdot 10^{-2} & 8,115 \cdot 10^{-3} & 1,263 \cdot 10^{-2} & 5,426 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (43)$$

formada a partir dos índices na Tabela 1, seguindo o modelo descrito na seção 2.3.

O vetor \mathbf{f} , correspondente à resposta livre, pode ser calculado como $\mathbf{G}_{jp}\Delta\mathbf{u}(t-1) + \mathbf{F}_j(z^{-1})\mathbf{y}(t)$, segundo (31), com $\Delta\mathbf{u}(t-1) = [\Delta u_1(t-1), \Delta u_2(t-1)]^T$ e $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$. De forma mais simples, é possível calcular este vetor \mathbf{f} iterativamente a partir de (34).

O vetor de resposta livre \mathbf{f} , é dado da seguinte forma:

$$\mathbf{f} = [f_1(t+2) \quad f_2(t+2) \quad f_1(t+3) \quad f_2(t+3)]^T$$

em que

$$\begin{aligned} f_1(t+2) &= 5,9482y_1(t) - 7,8964y_1(t-1) + 2,9479y(t-2) \\ &\quad + 1,171 \cdot 10^{-4}\Delta u_1(t-1) + 8,884 \cdot 10^{-3}\Delta u_2(t-1) \\ f_1(t+3) &= 9,869y_1(t) - 14,739y_1(t-1) + 5,870y(t-2) \\ &\quad + 2,363 \cdot 10^{-4}\Delta u_1(t-1) + 1,768 \cdot 10^{-2}\Delta u_2(t-1) \\ f_2(t+2) &= 2,983y_2(t) - 1,983y_2(t-1) \\ f_2(t+3) &= 3,966y_2(t) - 2,966y_2(t-1) \end{aligned}$$

O problema consiste então em otimizar a seguinte função custo:

$$J = (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) \quad (44)$$

onde $\mathbf{u} = [\Delta u_1(t) \quad \Delta u_2(t) \quad \Delta u_1(t+1) \quad \Delta u_2(t+1)]^T$ é o vetor de controles futuros, e onde $\mathbf{w} = [w_1(t+2) \quad w_2(t+2) \quad w_1(t+3) \quad w_2(t+3)]^T$ é o vetor de referências futuras para as saídas y_1 e y_2 .

O resultado ótimo, para o problema sem restrições, é da forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \quad (45)$$

Na seção 4, serão mostrados os resultados gráficos em simulação para o caso com restrições nos sinais de entrada (abertura das válvulas).

3.3.2 Configuração 2: Efeito do Horizonte de Predição

Nesta configuração foi aumentado o horizonte de predição primeiramente em $N_2 = 10$ e a seguir $N_2 = 30$, com uma matriz de peso \mathbf{Q} primeiramente nula e, a seguir, não-nula, a fim de observar o efeito do horizonte de predição sobre o algoritmo. Segundo o Teorema 2, visto na seção 2.2.6, quando se aumenta o horizonte de predição de forma que $N_2 \rightarrow \infty$, o sistema em malha fechada é certamente estável. Segundo mostra (MCINTOSH; SHAH; FISHER, 1991), o parâmetro N_2 é utilizado para variar o tempo de resposta da saída em malha fechada.

Para uma matriz \mathbf{Q} nula, o Teorema 3, apresentado na seção 2.2.6, indica que o controlador tende a um MLC com o aumento de N_2 . Isso porque, com um horizonte de predição da mesma ordem de grandeza do tempo de subida do sistema em malha aberta, os polos em malha fechada tendem aos polos de malha aberta (LAMBERT, 1987)(MCINTOSH; SHAH; FISHER, 1989). Tomando-se o polo mais lento do sistema, visto em (37), $p = 0,9943$, este deve determinar de forma predominante o tempo de subida do sistema. Tal polo, considerando que o modelo matemático é baseado em um período de amostragem de 1 segundo, é equivalente a uma constante de tempo $T = 1/(1 - 0,9943) \approx 175$ s. Para um processo aproximadamente de 1ª ordem, tem-se que o tempo de subida a 95% do valor final de saída é dado como $t_r \approx 3T$ (OGATA, 2001). Dessa forma, quando $N_2 \rightarrow \infty$, o tempo de acomodação do sistema em malha fechada tende a 525 s. Espera-se então que, com um maior horizonte de predição, a resposta se torne mais similar ao comportamento da planta em malha fechada, para uma matriz de peso \mathbf{Q} nula.

Para esta configuração, o parâmetro \mathbf{Q} será deixado em aberto, para fins de afinação da simulação e ensaio.

3.3.2.1 Configuração 2.A

- Horizonte mínimo de predição: $N_1 = 1$;
- Horizonte máximo de predição: $N_2 = 10$;
- Horizonte de controle: $N_u = 1$;
- Matriz de peso (referente ao seguimento da referência): $\mathbf{R} = \mathbf{I}_{(20 \times 20)}$;

3.3.2.2 Configuração 2.B

- Horizonte mínimo de predição: $N_1 = 1$;
- Horizonte máximo de predição: $N_2 = 30$;
- Horizonte de controle: $N_u = 1$;
- Matriz de peso (referente ao seguimento da referência): $\mathbf{R} = \mathbf{I}_{(60 \times 60)}$;

3.3.3 Configuração 3: Efeito do Polinômio $P(z^{-1})$

Tomando a Configuração 2.B, descrita anteriormente, para um horizonte de predição de $N_2 = 30$, procurou-se observar o efeito da aplicação de um polinômio $P(z^{-1})$ na eliminação do sobressinal da resposta do sistema em malha fechada.

Segundo (MCINTOSH; SHAH; FISHER, 1991), a inserção deste polinômio ao algoritmo tem como resultado o de observar os zeros de $P(z^{-1})$ como polos da resposta em malha fechada. Desta forma, para uma escolha de tipo $P(z^{-1}) = (1 - p_1) - p_1 z^{-1}$, com

$p_1 \rightarrow 1$, obtém-se uma resposta mais lenta, com incrementos de controle mais lentos e, consequentemente, efeitos de sobressinal mais baixos ou inexistentes.

A configuração escolhida de parâmetros foi idêntica à configuração 2.B, com $P(z^{-1}) = (1 - 0,98z^{-1})/0,02$ aplicado somente à saída 1 do sistema.

3.3.4 Configuração 4: Efeito das Matrizes de Peso

Para a Configuração 2.A de horizontes $N_1 = 1$, $N_2 = 10$ e $N_u = 1$, foi aplicada uma matriz de peso \mathbf{R} de dimensão (20×20) conforme mostrado abaixo:

$$\mathbf{R}_{(20 \times 20)} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 20 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 30 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (46)$$

e uma matriz peso $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{(2 \times 2)}$. A matriz \mathbf{R} aparece no problema de otimização como atribuindo um peso ao vetor erro (entre os N_2 sinais de saída previstos e os N_2 sinais de referência futuros). No caso do sistema da planta de nível, que possui duas variáveis de saída, o nível do Tanque 1 e o nível do Tanque 2, a matriz descrita em (46) tem como efeito prático o de atribuir um peso de 30 ao seguimento de referência do nível do Tanque 1 e um peso de 20 ao seguimento de referência do nível do Tanque 2.

Um efeito similar na resolução do problema de otimização seria alcançado caso fosse utilizada uma matriz $\mathbf{R} = \mathbf{I}_{(20 \times 20)}$ e \mathbf{Q} de dimensão (2×2) no seguinte formato:

$$\mathbf{Q}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

onde q_1 e $q_2 < 1$. Ambas as configurações conferem similar comportamento na resposta do sistema: um aumento na rapidez da resposta, e consequentemente amplitudes de controle maiores.

3.4 Restrições à Aplicação do GPC

Algumas adaptações devem ser feitas ao algoritmo a fim de levar em conta o caráter real da planta de nível. Primeiramente devem ser adicionadas ao problema de otimização restrições quanto ao uso das válvulas, já que sua abertura é limitada fisicamente entre 0 e 100%. Dessa forma, as restrições são dadas por

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1(t) \leq 100 \\ 0 &\leq u_2(t) \leq 100 \end{aligned} \quad (48)$$

O problema de otimização a ser resolvido *online* passa a depender destas restrições ao problema matemático. Dessa forma, reformula-se o problema dado em (29) da seguinte forma quadrática:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{b}^T \mathbf{u} + f_0 \\ 0 &\leq \mathbf{u} \leq 100 \end{aligned} \quad (49)$$

onde $\mathbf{H} = 2(\mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} + \mathbf{Q})$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{G}^T \mathbf{R}(\mathbf{f} - \mathbf{w})$ e $f_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{w})^T (\mathbf{f} - \mathbf{w})$.

O algoritmo utilizado para resolução da otimização em (49) foi o método de ponto interior convexo (*interior-point-convex*), aplicado através da função *quadprog*, disponível

no software MATLAB[®]. Este algoritmo foi escolhido pois, em alguns casos em que o peso do controle, matriz Q , tende a uma matriz nula e o problema de otimização torna-se mal condicionado, ele ainda é aplicável (GOULD; TOINT, 2004).

4 RESULTADOS

Os resultados aqui apresentados consistem em simulações baseadas no modelo matemático da planta de nível, realizadas com auxílio do *software* MATLAB[®], e igualmente de ensaios práticos executados em laboratório. O objetivo aqui é o de observar a correspondência dos resultados de simulação e de ensaio, o que está diretamente ligado à correspondência entre o modelo matemático e o sistema real.

Os cenários de simulação e ensaio se repetem, para fins de comparação. Em geral, partiu-se de um ponto de operação em que ambos os tanques estivessem no entorno de 20 cm de nível. A seguir, um degrau de -5 cm é aplicado ao sinal de referência do Tanque 1, e, após um intervalo de tempo suficiente para a acomodação dos níveis, um degrau de -5 cm é aplicado ao sinal de referência do Tanque 2.

Além disso, as restrições descritas na seção 3.4 para os sinais de controle, referentes à abertura das válvulas, são aplicadas a todas as configurações.

4.1 Simulações

Com o auxílio do *software* MATLAB[®], foram reproduzidas as configurações descritas na seção 3.3, submetidas às restrições vistas na seção 3.4. Além de validar as observações realizadas nos artigos aqui citados, deseja-se comparar os resultados de simulação com os resultados obtidos em laboratório.

4.1.1 Simulação 1: Controlador *deadbeat*

Em um primeiro momento, foi simulado o comportamento do sistema para a Configuração 1 de controle, dada na seção 3.3.1. O resultado gráfico pode ser visto na Figura 3.

Percebe-se que, devido às restrições impostas ao problema de otimização, os sinais de controle resultantes são saturados nos dois instantes em que ocorre a variação dos sinais de referência. Isto porque o controlador *deadbeat* tem justamente como objetivo o de conduzir a saída do sistema o mais rapidamente possível ao valor instantâneo da referência. Essa rapidez de resposta do sistema exige sinais de controle igualmente rápidos e de grande amplitude. Com as restrições impostas, a saída do sistema não pode alcançar instantaneamente o valor final desejado. Assim, é necessário um intervalo de ao menos 25 s para que o nível do Tanque 1 atinja o seu valor final de 25 cm, enquanto que, para o Tanque 2, este intervalo é de cerca de 12 s, como pode ser visto na Figura 3.

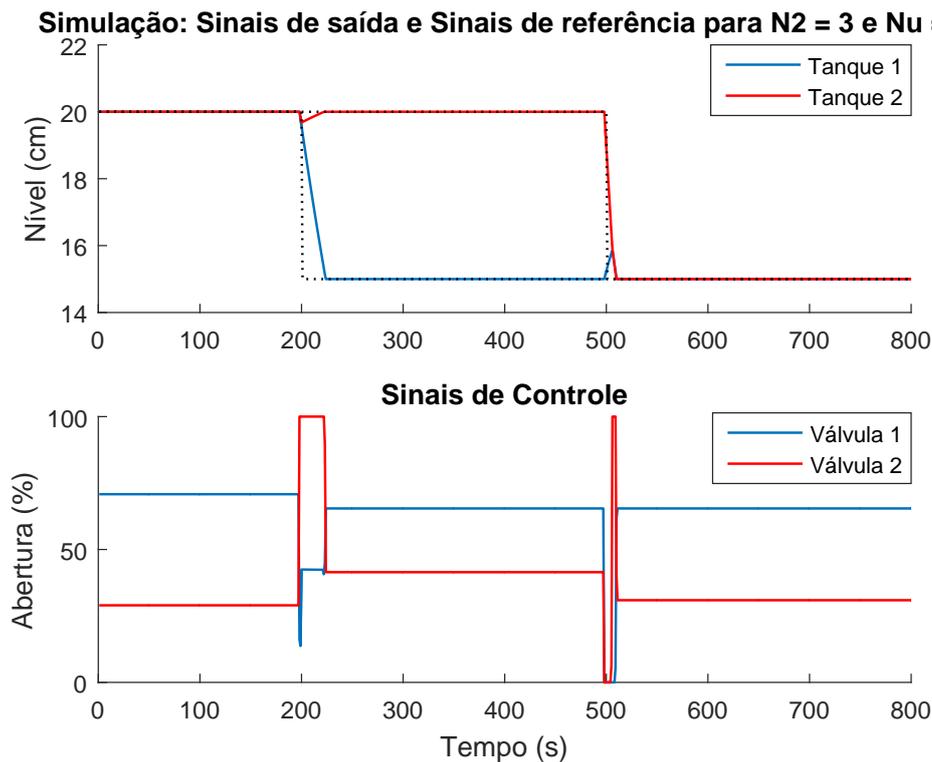


Figura 3: Resultados de simulação para a configuração 1.

4.1.2 Simulação 2: Horizonte de Predição

A seguir, a fim de ilustrar o comportamento do controlador GPC face a um aumento do horizonte de predição, a simulação foi reproduzida primeiramente para um horizonte $N_2 = 10$ e a seguir $N_2 = 30$, para uma matriz \mathbf{Q} nula. Os resultados podem ser vistos respectivamente na Figura 4 e na Figura 5.

Observa-se na Figura 5 que, para um horizonte de predição de 30, o tempo de subida da planta aumenta para 90 segundos, superior ao tempo de subida observado na Figura 4, de cerca de 40 segundos. Os resultados para N_2 ainda maiores não serão aqui mostrados, mas a mesma tendência se repete para valores superiores de horizonte de predição.

A fim de observar o efeito da matriz de peso \mathbf{Q} , foram repetidas as simulações para as configurações 2.A e 2.B, considerando a matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{(2 \times 2)}$. Os resultados para um horizonte de predição de 10 e 30 pode ser visto respectivamente na Figura 6 e na Figura 7.

Uma das consequências da aplicação de uma matriz de peso \mathbf{Q} não-nula é a maior penalização do esforço de controle. Para um mesmo horizonte $N_2 = 10$, na Figura 4 observa-se que o sinal de controle é saturado em 100% no instante da primeira variação na referência. Já na Figura 6, este pico referente à válvula 2 alcança apenas 60%, resultando em um comportamento de saída mais lento.

Aumentando-se o horizonte de predição, segundo mostra a Figura 7, não se observa uma redução no tempo de resposta como esperado para um aumento de N_2 . Pelo contrário, atinge-se uma resposta de rapidez similar à observada na Figura 5. Isso indica que, para uma matriz \mathbf{Q} não-nula, seu efeito sobre o sinal de controle do sistema é tanto maior, quanto menor for o horizonte de predição escolhido.

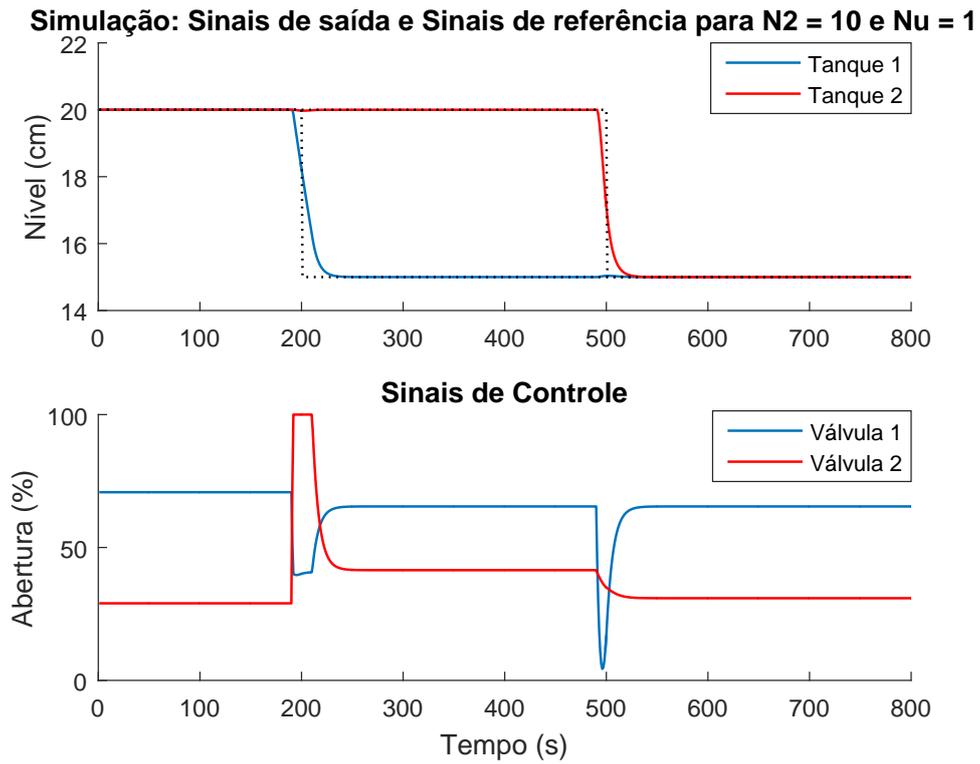


Figura 4: Resultados de simulação para a configuração 2.A.

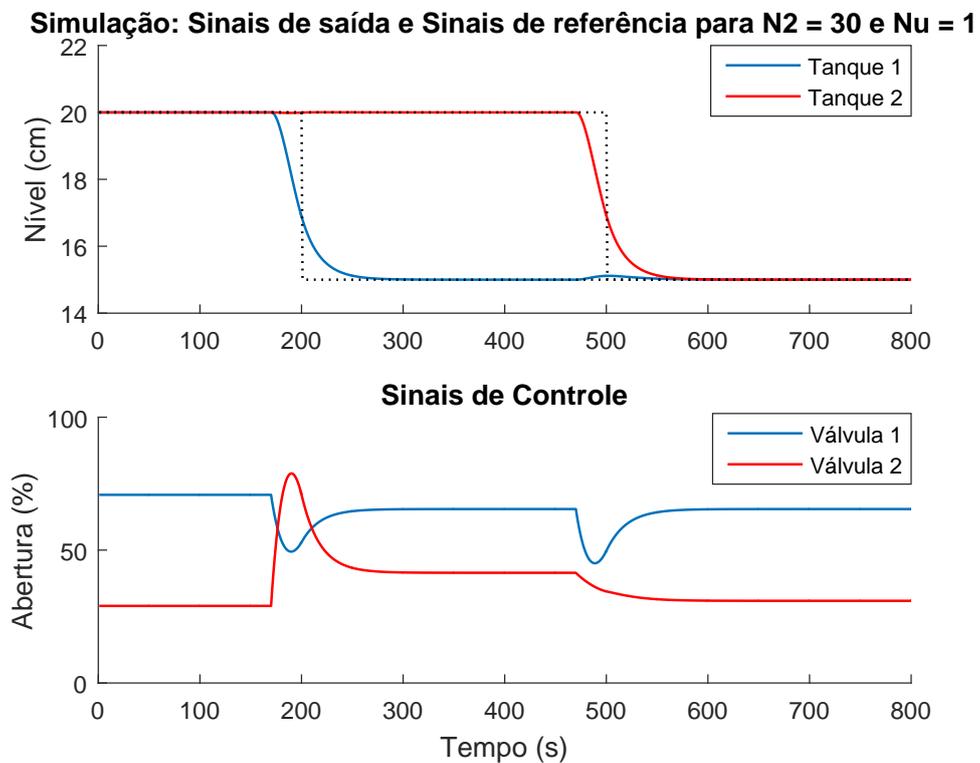


Figura 5: Resultados de simulação para a configuração 2.B.

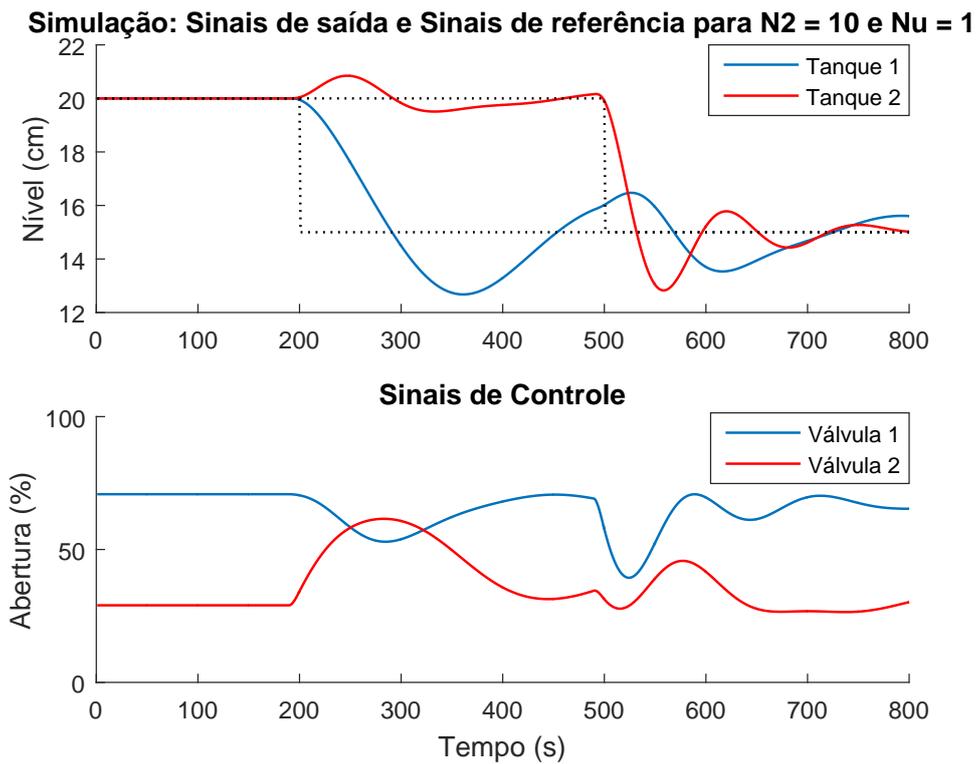


Figura 6: Resultados de simulação para a configuração 2.A modificada.

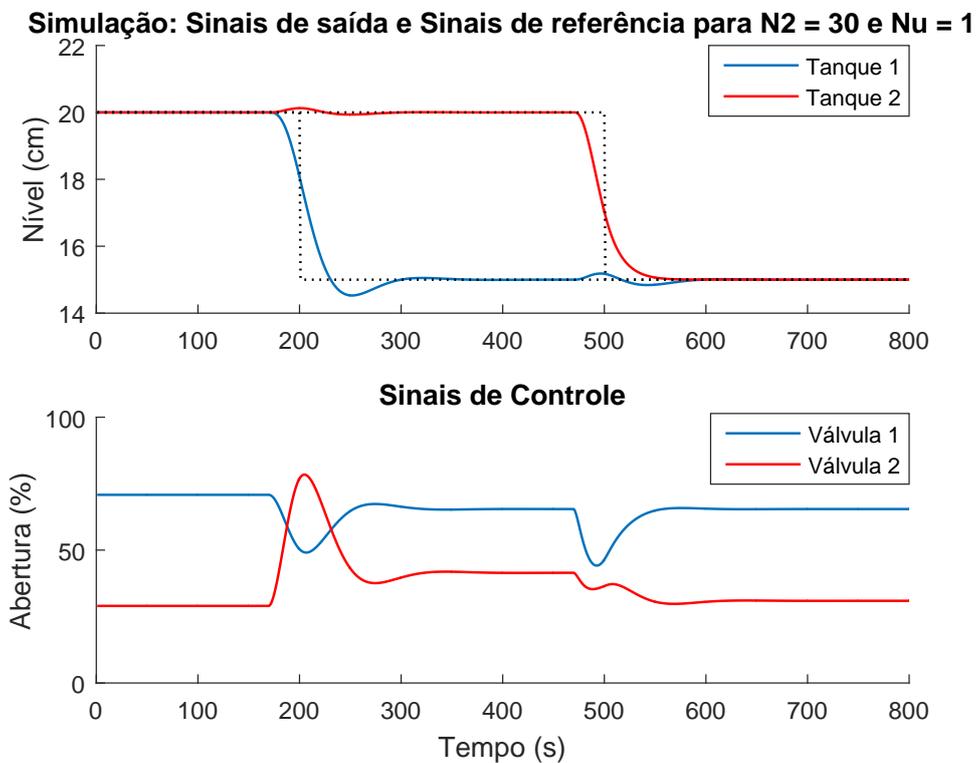


Figura 7: Resultados de simulação para a configuração 2.B modificada.

4.1.3 Simulação 3: Polinômio $P(z^{-1})$

Nos resultados de simulação apresentados anteriormente, observa-se que para um horizonte de predição de $N_2 = 30$ existe um sobressinal na resposta da saída 1, relativa ao nível do Tanque 1. Uma das formas de eliminar este sobressinal, sem demandar uma ação de controle maior, é de incluir o polinômio $P(z^{-1})$ no problema de otimização, de forma a penalizar variações muito rápidas do sinal de saída.

Para isso, foi simulada a configuração 3, vista na seção 3.3.3, onde o polinômio $P(z^{-1}) = (1 - 0,98z^{-1})/0,02$ é considerado apenas na otimização da saída 1. O resultado em simulação pode ser visto na Figura 8. Observa-se na saída 1, uma resposta mais lenta, porém sem sobressinal, com picos de controle moderados.

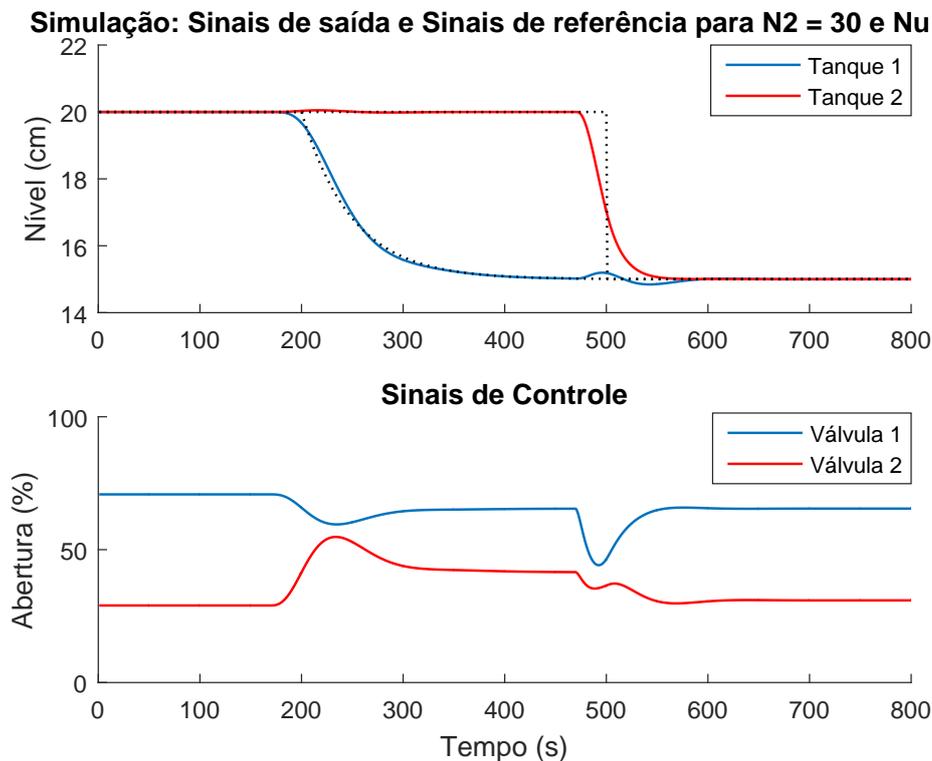


Figura 8: Resultados de simulação para a configuração 3.

Percebe-se também que, para uma variação na referência da saída 2 no instante 500, a saída 1 sofre uma perturbação, reflexo da ação das válvulas. Este comportamento poderia ser igualmente eliminado, se um segundo polinômio $P(z^{-1})$ fosse aplicado igualmente à saída 2, suavizando a resposta do sistema e reduzindo em amplitude a ação das válvulas neste instante.

4.1.4 Simulação 4: Matrizes de Peso

Por fim, foi simulada a configuração 4, com a matriz de peso \mathbf{R} descrita na seção 3.3.4, horizonte de predição $N_2 = 10$, e matriz de peso $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{(2 \times 2)}$. O resultado da simulação pode ser visto na Figura 9.

Em comparação com o resultado obtido na Figura 6, observa-se que o tempo de subida a 95% de ambas as saídas foi expressivamente menor, cerca de 30 s para a saída 1 e 20 s para a saída 2. Esta rapidez na resposta do sistema se deve às maiores amplitudes

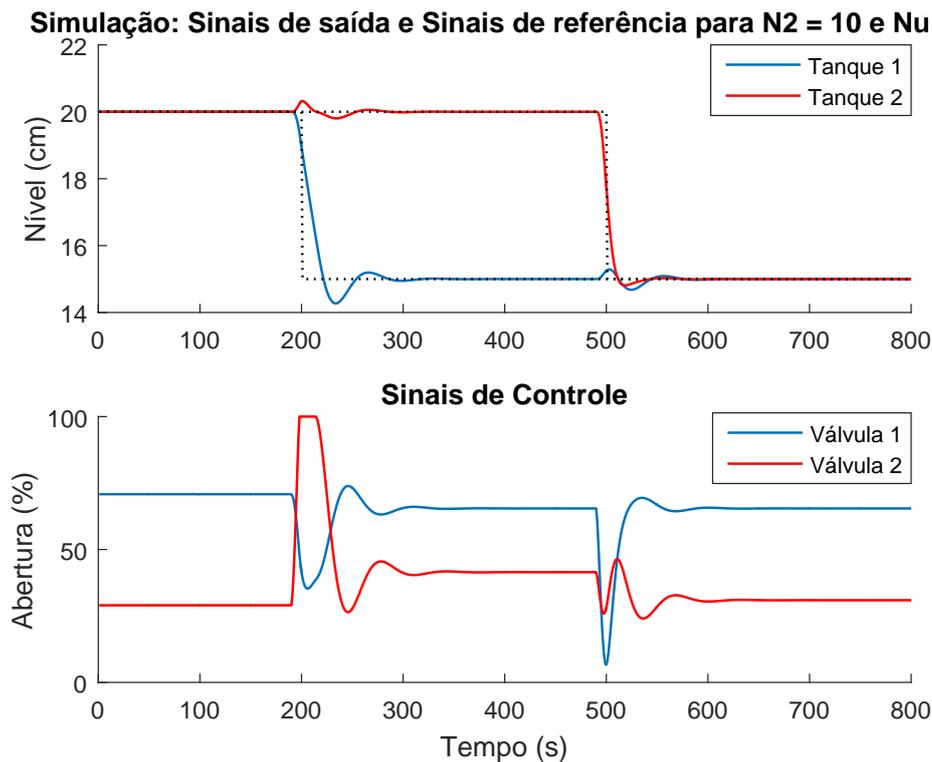


Figura 9: Resultados de simulação para a configuração 4.

de controle vistas igualmente na Figura 9, onde percebe-se que o sinal de controle 2 é saturado no entorno do instante 200.

4.2 Ambiente Simulink[®]

A fim de realizar os ensaios práticos, foi utilizado o *software* Simulink[®], versão R2013a. O ambiente consiste em alguns elementos básicos: um *script* de preparação de variáveis, contendo todos os dados estáticos do algoritmo GPC; uma interface de comunicação entre o sistema embarcado da planta de nível e o Simulink[®], implementado através de um servidor OPC; um bloco tipo MATLAB Function que resolve o problema de otimização dinamicamente a cada período de amostragem da simulação.

Outra ferramenta de interface importante é o *software* Elipse SCADA, utilizado em um primeiro momento para levar a planta a operar no ponto de partida desejado (no caso aqui explorado, de 20 cm de nível em ambos os tanques). Da mesma forma, é a partir dele que o sistema é configurado para operar em malha fechada ou aberta. Em malha fechada, as constantes de tempo dos controladores PID internos podem ser definidas nesta mesma interface SCADA.

Os parâmetros do algoritmo GPC são definidos no *script* de preparação de dados. Uma vez executado este *script*, o sistema é posto para operar em malha aberta e a simulação em Simulink[®] pode então ser igualmente executada.

O diagrama Simulink[®], utilizado nos ensaios, pode ser visto na Figura 10. Os nodos OPC Write e OPC Read realizam a interface entre o algoritmo GPC e a planta de nível. O nodo MATLAB Function contém a lógica do algoritmo GPC, e possui como input os valores passados das saídas y_1 e y_2 , dos sinais de controle u_1 e u_2 e dos incrementos de

controle Δu_1 e Δu_2 . No modelo abaixo, o polinômio $T(z^{-1})$, visto na seção 2.2.5, é utilizado para filtrar as saídas do sistema, e os sinais de controle resultantes do algoritmo GPC.

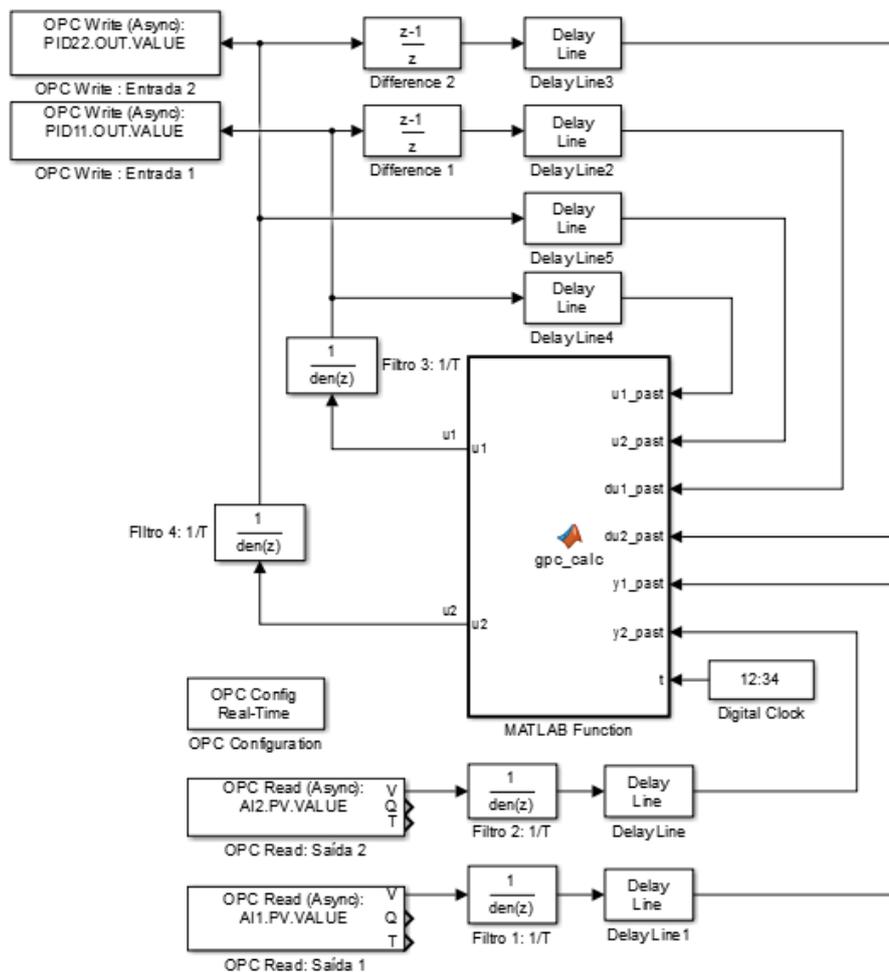


Figura 10: Diagrama Simulink® utilizado nos ensaios em laboratório.

4.3 Ensaios

Como o algoritmo de controle preditivo leva em consideração o modelo do sistema a ser controlado a fim de prever seu comportamento futuro, é necessário que tal modelo corresponda adequadamente ao processo real para que o algoritmo seja bem-sucedido. No caso do sistema de nível considerado neste trabalho, o modelo considera apenas seu comportamento em torno de um ponto de operação definido. Dessa forma, é necessário em um primeiro momento atingir um dado ponto de operação com o auxílio de controladores em malha fechada.

Os controladores utilizados, em um primeiro momento, para atingir um dado ponto de

operação possui a seguinte característica:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 4,35 + \frac{1}{27,49(1 - z^{-1})} \\ C_{12} &= 3,12 \\ C_{21} &= 10,4 + \frac{1}{14,12(1 - z^{-1})} \\ C_{22} &= 0,22 + \frac{1}{21,92(1 - z^{-1})} \end{aligned}$$

O modelo matemático do sistema não contempla o comportamento inicial da planta, enquanto os tanques partem de um ponto de operação de nível nulo. Assim, todos os ensaios realizados iniciam-se já em torno de um ponto de operação escolhido.

A fim de realizar os ensaios, o ponto de operação escolhido foi de 20 cm de nível para ambos os tanques. Para ambos os tanques, porém em tempos diferentes, um sinal de referência tipo degrau, com valor final de 15 cm, foi empregado.

4.3.1 Ensaio 1: Controlador *deadbeat*

Em um primeiro ensaio, tentou-se obter um comportamento próximo ao controle *deadbeat*. A configuração 1, mostrada na seção 3.3.1, foi reproduzida em laboratório, porém o resultado não será aqui mostrado. Os incrementos excessivos de controle, vistos na simulação da Figura 3, não são reproduzíveis na planta de nível devido a limitações físicas das válvulas.

Um ensaio próximo ao controlador *deadbeat* foi, no entanto, realizado, com horizontes $N_1 = 1$, $N_2 = 3$ e $N_u = 1$, matriz de peso $\mathbf{Q} = 10^{-3} * \mathbf{I}_{(2 \times 2)}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{I}_{(6 \times 6)}$. O resultado pode ser visto na Figura 11.

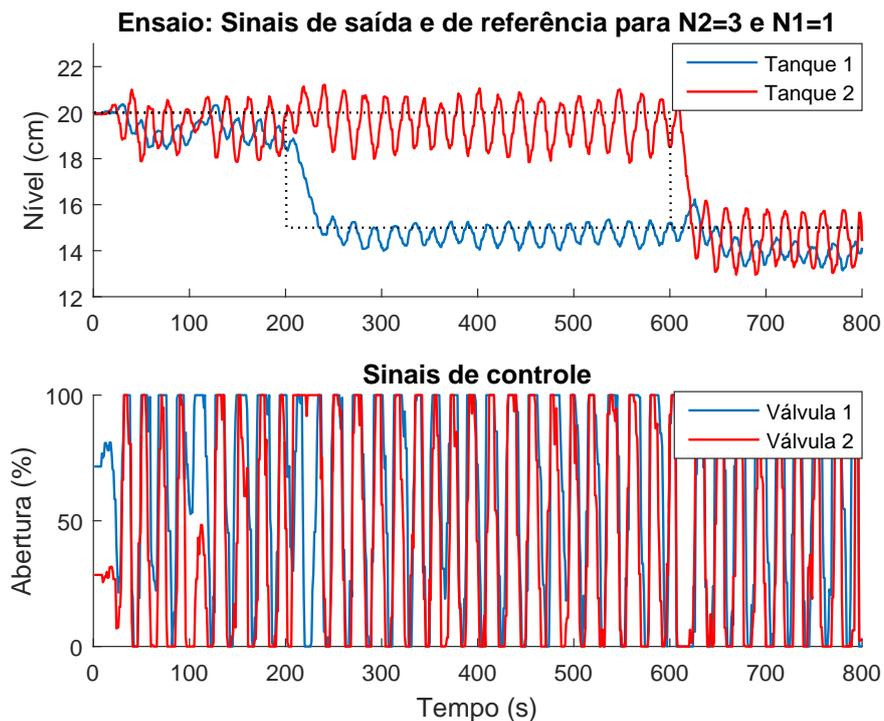


Figura 11: Resultados de ensaio para a configuração 1.

Apesar do comportamento médio estar próximo do esperado, uma dinâmica não prevista no modelo da planta faz com que o comportamento dinâmico seja demasiadamente oscilatório.

Essa dinâmica não-prevista tem relação provável com o mau funcionamento de alguma das válvulas (ou mesmo de ambas). Como o desempenho do algoritmo GPC está diretamente relacionado à qualidade do modelo do sistema a ser controlado, os demais ensaios foram realizados de forma a evitar as condições em que essa dinâmica aparece. Isso quer dizer que não será possível reproduzir situações em que o sinal de controle é mais reativo, situações em que o tempo de resposta do sistema seria menor.

Esta dinâmica também possui impacto sobre a escolha do filtro $T(z^{-1})$. Isso porque, ao mesmo tempo que o polinômio é necessário para evitar que ruídos de medição sejam levados em conta na otimização dinâmica do GPC, ele não deverá atenuar a banda de frequências em que a dinâmica da válvula defeituosa se encontra. Isso porque, o controlador, na medida do possível, tentará compensar este comportamento intruso no sistema. Se esta dinâmica for atenuada, o controlador não reagirá imediatamente a ela, e a resposta do sistema tenderá a ser ainda mais oscilatória. Na Figura 12 vemos o espectro em frequência da resposta da saída 2, vista na Figura 11.

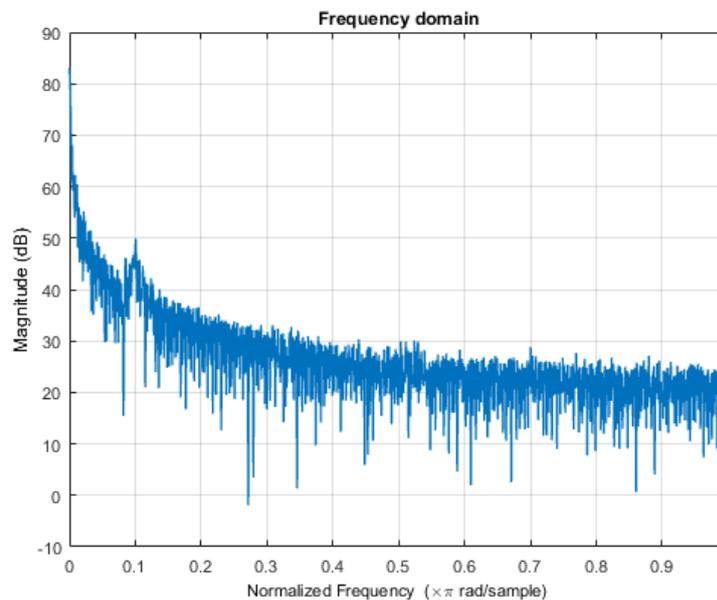


Figura 12: Espectro frequencial da saída 2 do sistema.

Percebe-se na Figura 12 um pico de amplitude próximo à frequência $0,1\pi$ rad/s, ou seja, $0,5$ Hz, que corresponde aproximadamente à frequência observada na Figura 11. Dessa forma, para os demais ensaios foi escolhido $T(z^{-1}) = (1 - 0,3z^{-1})(1 - 0,3z^{-1})/0,7^2$, de forma a não atenuar sinais nesta banda de frequências. A resposta em frequência de $1/T(z^{-1})$ pode ser vista na Figura 13, onde a atenuação para frequências em torno de $0,1\pi$ rad/s é pouco significativa e chega a -10 dB para frequências superiores.

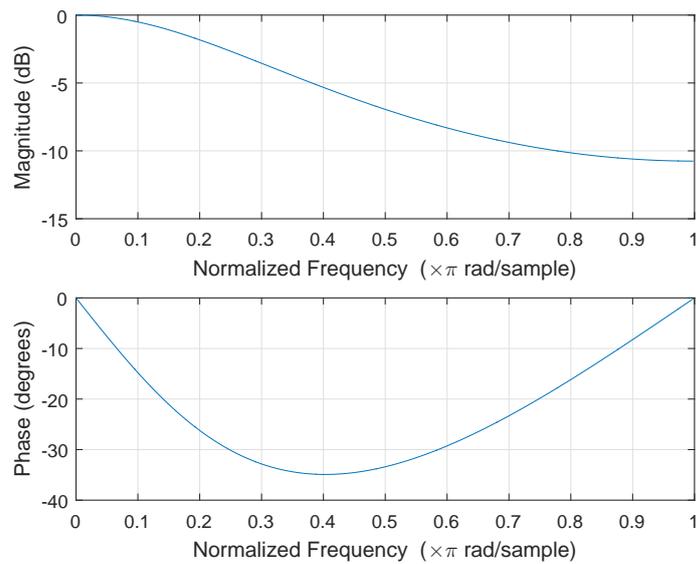


Figura 13: Diagrama de Bode do polinômio $1/T$.

4.3.2 Ensaio 2: Horizonte de Predição

A seguir, foi realizado um segundo ensaio a partir da configuração 2, descrita na seção 3.3.2. Os resultados podem ser vistos nas Figura 14 e Figura 15, para a configuração 2.A e para a configuração 2.B respectivamente. A escolha de uma matriz de peso Q não-nula deve-se à restrição das válvulas reais em atender a incrementos de controle significativos, como visto no ensaio anterior.

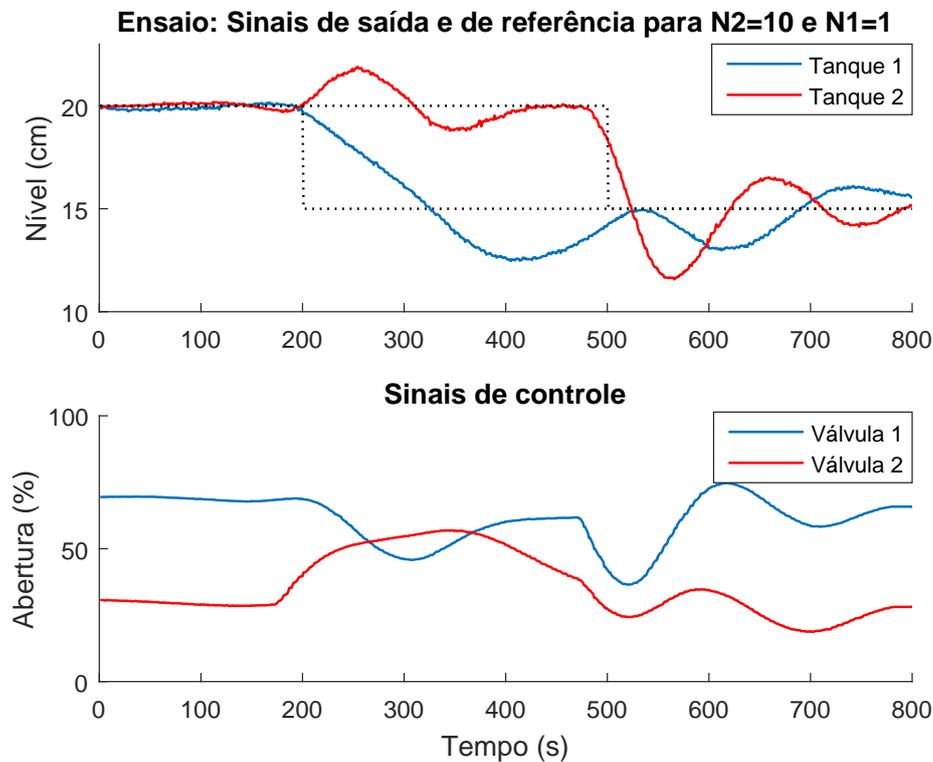


Figura 14: Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 2.A modificada.

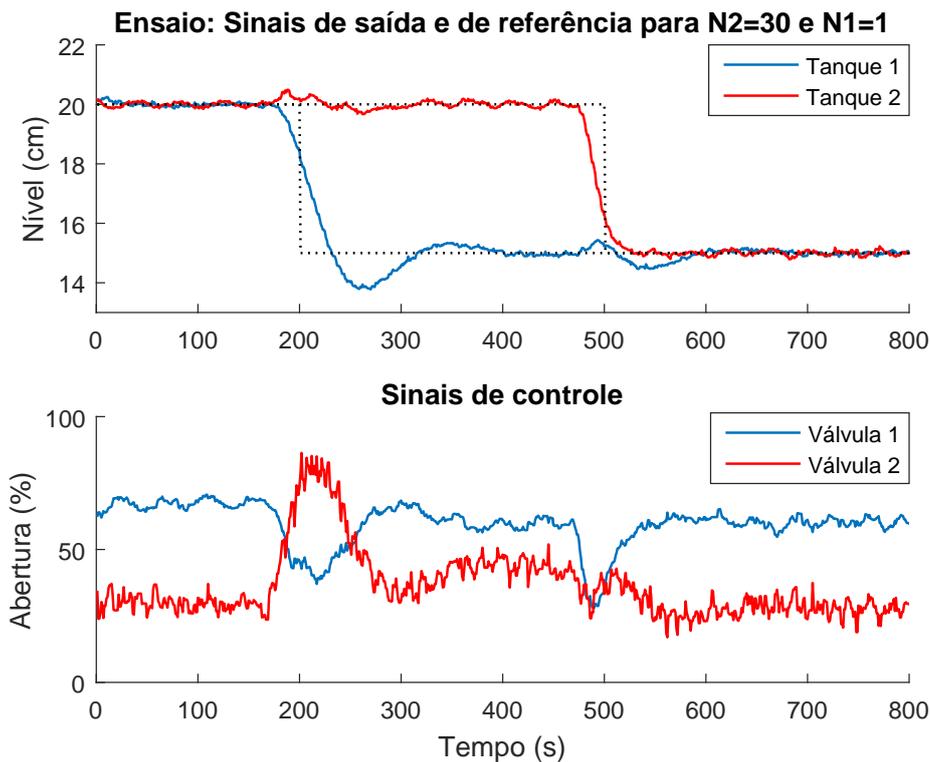


Figura 15: Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 2.B modificada.

Os resultados obtidos correspondem bem às simulações vistas na Figura 6 e na Figura 7. Percebe-se que, para o horizonte de previsão $N_2 = 30$ apresentado na Figura 15, mesmo com a ação do filtro passa-baixa $1/T(z^{-1})$, a amplificação do ruído de medição é significativa (ordem de cerca de 10% para o sinal da válvula 2). Este ruído é pouco visível na saída e mais notável nos sinais de controle. Além disso, para esta configuração, devido à maior ação de controle, já é possível perceber a dinâmica da válvula defeituosa no sinal de controle da válvula 1 e igualmente na saída do sistema.

4.3.3 Ensaio 3: Polinômio $P(z^{-1})$

Em um terceiro ensaio, foi empregado o polinômio $P(z^{-1}) = (1 - 0,98z^{-1})/0,02$ no algoritmo GPC, de forma a penalizar variações bruscas na referência do sistema. Este artifício foi utilizado apenas para a saída 1 do sistema, referente ao nível do Tanque 1. Isso porque, conforme mostrado na Figura 15, seu comportamento é mais lento se comparado ao da saída 2. Dessa forma, ações de controle excessivas tendem a gerar um sobressinal na sua resposta.

A fim de eliminar este sobressinal, sem exigir sinais de controle ainda mais rápidos que poderiam vir a desestabilizar a resposta com o comportamento não-previsto da válvula 1, escolheu-se aplicar o parâmetro do polinômio $P(z^{-1})$. A resposta do sistema, reproduzindo as mesmas condições da configuração 2.B do ensaio 2, pode ser vista na Figura 16. Nota-se que o sobressinal é eliminado da saída 1 em detrimento do seu tempo de resposta. O resultado é esperado, assim como a redução do pico de controle da válvula 2 que é reduzido em cerca de 20% quando da primeira variação na referência do sistema, aos 200 s de ensaio.

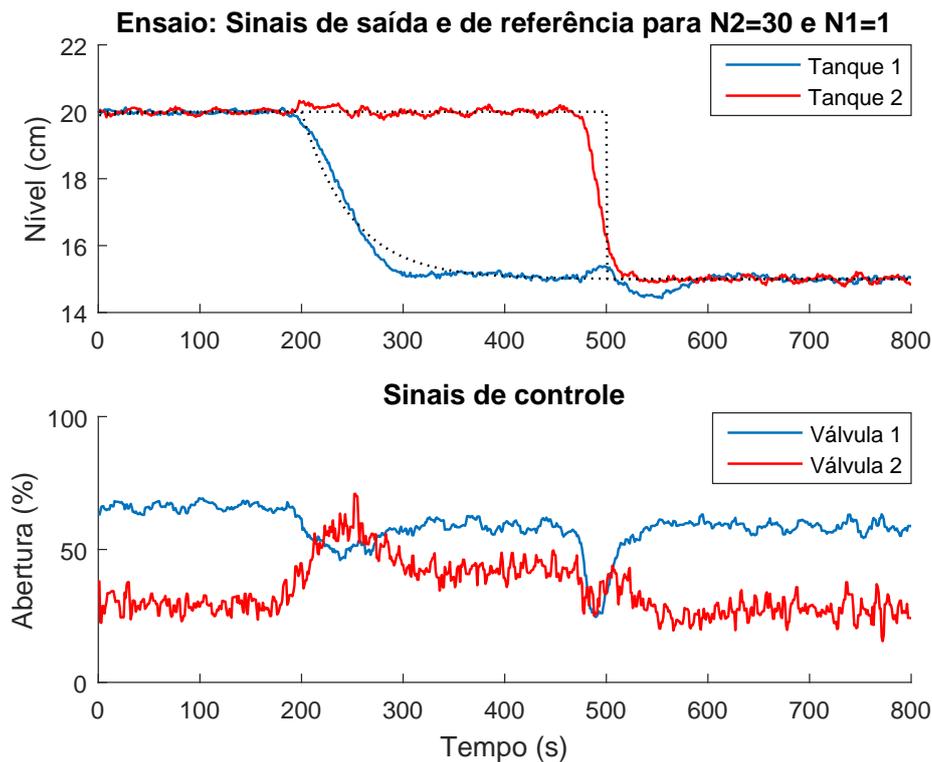


Figura 16: Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 3.

4.3.4 Ensaio 4: Matrizes de Peso

Por fim, a configuração 4, vista na seção 3.3.4, foi implementada em laboratório, para um horizonte de predição $N_2 = 10$ e uma matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{(2 \times 2)}$. O resultado do ensaio pode ser visto na Figura 17.

Novamente nota-se a dinâmica parasita do comportamento de uma das válvulas, já que o aumento da matriz \mathbf{R} de ponderação exige controles mais reativos, de forma a otimizar o seguimento de referência de ambas as saídas. Em comparação com o resultado de simulação visto na Figura 9, o comportamento médio é similar. No entanto, além da dinâmica das válvulas não prevista no modelo, percebe-se a amplificação do ruído de medição, especialmente no sinal de controle da válvula 2.

Algumas formas de remediar estes problemas serão apresentadas no capítulo de conclusões. Uma delas seria a de estimar e incluir o comportamento das válvulas no modelo matemático do sistema, o que garantiria um desempenho muito superior, para configurações de GPC que exigem sinais de controle maiores e mais rápidos.

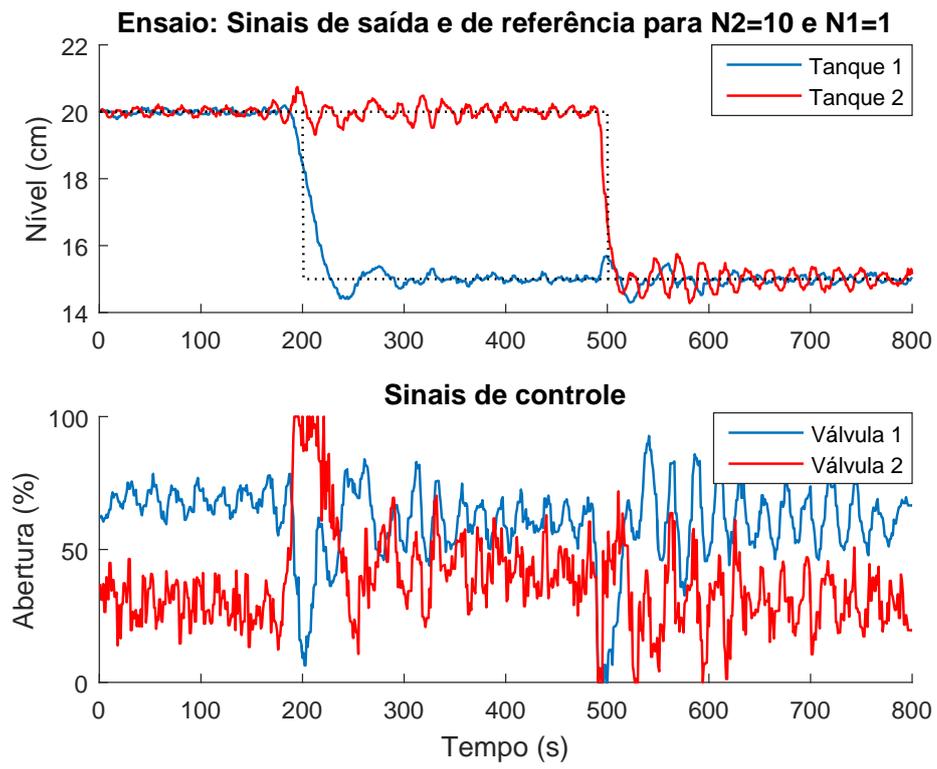


Figura 17: Resultados de ensaio para a configuração de ensaio 4.

5 CONCLUSÕES

O trabalho aqui apresentado permitiu avaliar o desempenho do algoritmo de controle preditivo GPC aplicado a um processo real multivariável de controle de nível. Ao longo do trabalho, mostrou-se que o algoritmo oferece múltiplas vantagens em sua implementação. A primeira delas é a fácil generalização do algoritmo aplicado a um sistema SISO para um sistema mais complexo MIMO. Além disso, a formulação do algoritmo permite configurar o comportamento do controlador desejado a partir de uma parametrização simplificada, facilitando a manutenção do algoritmo quando diferentes situações exigem ações de controle variadas.

Para fins de validação do GPC e do modelo matemático da planta, foram construídos diversos cenários de parametrização do algoritmo. Resultados foram obtidos primeiramente em simulação, considerando o comportamento do sistema como correspondendo perfeitamente ao modelo matemático, e a seguir em laboratório, onde o GPC foi aplicado à planta real.

Para sistemas industriais muito complexos, com múltiplas entradas e saídas, a simplicidade de configuração do GPC é vantajosa. A maior problemática em sua aplicação consiste em obter um modelo preciso do sistema real, como pode ser visto nos resultados experimentais obtidos em laboratório. Dinâmicas não-modeladas podem atrapalhar o desempenho do algoritmo preditivo baseado em modelo. Além disso, mostrou-se que o ruído presente devido à medição e a outros fatores ambientais pode ser significativamente reduzido com a inclusão do parâmetro de filtragem $T(z^{-1})$. Outros resultados para esta escolha de polinômio, como os apresentados em (LAMBERT, 1987), podem ser mais profundamente explorados no futuro a fim de aumentar a robustez da malha fechada.

Outra vantagem da aplicação do controle preditivo à processos industriais é a possibilidade de incluir em seu problema de otimização dinâmica quaisquer termos de custo a serem minimizados. Além disso, é possível incluir uma série de restrições lineares ou não à otimização. Para trabalhos futuros, a fim de melhorar o desempenho do GPC implementado neste trabalho, o comportamento das válvulas pode ser levantado e incluído no modelo da planta de nível. A eliminação completa desta dinâmica parasita seria ainda mais desejável, através da manutenção da válvula defeituosa. Assim, respostas mais rápidas poderiam ser obtidas na saída do sistema. Além disso, a banda passante e atenuação do filtro $T(z^{-1})$ poderia ser escolhida de forma ainda mais restritiva, de forma a eliminar ainda mais o ruído de medição.

Além disso, seria interessante realizar a comparação de desempenho entre o GPC e outros controladores. Uma vez que o sinal de controle preditivo é gerado de forma a otimizar uma função custo, espera-se que seu desempenho seja conseqüentemente muito superior a outros controladores que não o fazem. Tal comparação, aplicada a um processo industrial, é valiosa e fica como sugestão para a continuação deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**. 2nd.ed. London: Springer, 2007.
- CLARKE, D.; MOHTADI, W.; TUFFS, P. S. Generalized Predictive Control - Part I. The Basic Algorithm. **Automatica**, [S.l.], v.23, n.2, p.137–148, 1987.
- CLARKE, D.; MOHTADI, W.; TUFFS, P. S. Generalized Predictive Control - Part II. Extensions and Interpretations. **Automatica**, [S.l.], v.23, n.2, p.149–160, 1987.
- CLARKE, D.; MOHTADI, W.; TUFFS, P. S. Properties of Generalized Predictive Control. **Automatica**, [S.l.], v.25, n.6, p.859–875, 1989.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control – A computer control algorithm. In: JOINT AUTOMATIC CONTROL CONFERENCE, 1980. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1980. n.17, p.72.
- GARCÍA, C.; PRETT, D.; MORARI, M. Model Predictive Control: theory and practice - a survey. **Automatica**, [S.l.], v.25, n.3, p.335–348, 1989.
- GARRIGA, J. L.; SOROUSH, M. Model predictive control tuning methods: a review. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, [S.l.], v.49, n.8, p.3505–3515, 2010.
- GOULD, N.; TOINT, P. L. Preprocessing for quadratic programming. **Mathematical Programming**, [S.l.], v.100, n.1, p.95–132, 2004.
- LAMBERT, M. R. **Adaptive control of flexible systems**. 1987. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — University of Oxford, 1987.
- MCINTOSH, A. R.; SHAH, S. L.; FISHER, D. G. Selection of tuning parameters for adaptive generalized predictive control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1989, 1989. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1989. p.1846–1851.
- MCINTOSH, A. R.; SHAH, S. L.; FISHER, D. G. Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control. **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, [S.l.], v.69, n.1, p.97–110, 1991.
- MORARI, M.; LEE, J. H. Model predictive control: past, present and future. **Computers & Chemical Engineering**, [S.l.], v.23, n.4, p.667–682, 1999.
- OGATA, K. **Modern control engineering**. [S.l.]: Prentice Hall, 2001.

RICHALET, J. et al. Model predictive heuristic control: applications to industrial processes. **Automatica**, [S.l.], v.14, n.5, p.413–428, 1978.

SOETERBOEK, R. **Predictive control**: a unified approach. [S.l.]: Prentice Hall, 1992.