

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Vinicius Medeiros Gomes da Silveira

**A Teoria Clássica de Yang-Mills-Higgs:
Aspectos Físicos e Matemáticos**

Brasil

16 de novembro de 2016

Vinicius Medeiros Gomes da Silveira

**A Teoria Clássica de Yang-Mills-Higgs:
Aspectos Físicos e Matemáticos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física com ênfase em Pesquisa Básica.

Orientador: Lucas da Silva Oliveira

Brasil

16 de novembro de 2016

CIP - Catalogação na Publicação

Silveira, Vinicius Medeiros Gomes da
A Teoria Clássica de Yang-Mills-Higgs: Aspectos
Físicos e Matemáticos / Vinicius Medeiros Gomes da
Silveira. -- 2016.
100 f.

Orientador: Lucas da Silva Oliveira.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto
de Física, Curso de Física: Pesquisa Básica, Porto
Alegre, BR-RS, 2016.

1. Teorias de Gauge. 2. Teoria Clássica de Yang-
Mills-Higgs. 3. Vórtices. 4. Geometria Diferencial.
I. Oliveira, Lucas da Silva, orient. II. Título.

Vinicius Medeiros Gomes da Silveira

A Teoria Clássica de Yang-Mills-Higgs: Aspectos Físicos e Matemáticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física com ênfase em Pesquisa Básica.

Trabalho aprovado. Brasil, 16 de novembro de 2016:

Lucas da Silva Oliveira
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasil
16 de novembro de 2016

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Lucas da Silva Oliveira por sua orientação, na realização deste trabalho e nos meus estudos, e por sua dedicação em me incentivar a explorar os mais diversos ramos da Física e da Matemática.

À minha família, toda a gratidão por darem-me todas as oportunidades de estudo e todo o carinho do mundo.

Agradeço a todos aqueles que ensinaram-me, formal ou informalmente, em todas as facetas da vida, por meio de aulas, conversas ou gestos.

Agradeço também a todos meus amigos, pelo carinho e pelas conversas, em especial àqueles que acompanharam-me pelos últimos anos.

À minha amada, obrigado por todo o amor e apoio dedicados, pois foi contigo que mais aprendi. Estar do teu lado é a melhor experiência do mundo.

*The miracle of the appropriateness of the
language of Mathematics for the formulation
of the laws of Physics is a wonderful gift
which we neither understand nor deserve.*

-Eugene P. Wigner,

*The Unreasonable Effectiveness of
Mathematics in the Natural Sciences*

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo a realização de um estudo do caso clássico de teorias de *gauge*. Para tanto, são introduzidas as ferramentas matemáticas necessárias e os princípios físicos que fundamentam tais teorias. Adicionalmente, são realizadas a descrição do mecanismo de Higgs nesse contexto e a análise acerca da existência de soluções de vórtices e de suas propriedades, no caso bidimensional.

Palavras-chave: Teorias de Gauge. Teoria Clássica de Yang-Mills-Higgs. Vórtices de Ginzburg-Landau. Geometria Diferencial.

Abstract

The present work's main aim is a study of classical gauge theories. For this purpose, an introduction to the mathematical tools and physical principles that ground such theories is made. Additionally, the description of the Higgs mechanism in this context and the analysis of the existence of vortex solutions and their properties, in the two dimensional case, are realized.

Keywords: Gauge Theories. Classical Yang-Mills-Higgs Theory. Ginzburg-Landau Vortices. Differential Geometry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interpretação geométrica de um 2-vetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$	23
Figura 2 – Duas possíveis disposições dos espaços tangentes do círculo S^1	46
Figura 3 – Comparação entre um fibrado trivial e um não-trivial.	46

Sumário

	Introdução	17
1	FERRAMENTAS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL	19
1.1	O Cálculo em \mathbb{R}^n	19
1.1.1	O Produto Exterior	19
1.1.2	Formas Diferenciais em \mathbb{R}^n	24
1.1.3	A Derivada Exterior	29
1.1.4	Integração sobre Cadeias em \mathbb{R}^n	34
1.2	O Cálculo em Variedades	35
1.2.1	Variedades Diferenciáveis	36
1.2.2	Formas Diferenciais em Variedades	38
1.2.3	Mudança de Coordenadas	40
1.2.4	O Teorema de Stokes em Variedades	44
1.3	Fibrados	45
1.3.1	Fibrados Gerais	45
1.3.2	Fibrados Vetoriais	48
2	A TEORIA CLÁSSICA DE YANG-MILLS-HIGGS	51
2.1	Simetrias de <i>Gauge</i>	51
2.1.1	Transformações de <i>Gauge</i> para o Eletromagnetismo	51
2.1.2	Fibrados Principais	53
2.2	Teorias de <i>Gauge</i>	55
2.2.1	Conexões	55
2.2.2	Curvatura	59
2.2.3	Teoria Clássica de Yang-Mills	64
2.2.4	O Mecanismo de Higgs	69
3	VÓRTICES	73
3.1	O Modelo Abelian em 2 Dimensões	73
3.1.1	Considerações Heurísticas	73
3.1.2	Existência de Soluções	75
	REFERÊNCIAS	83

APÊNDICES	87
Apêndice A – O OPERADOR DUAL DE HODGE EM \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 E $\mathbb{R}^{1,3}$	89
Apêndice B – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE STO- KES	93
Apêndice C – GRUPOS DE LIE	95

Introdução

A Teoria Eletromagnética é, historicamente, a primeira teoria de interação a apresentar simetrias de *gauge*, que implicam em liberdades na descrição de algumas das variáveis da teoria, mantendo invariantes as quantidades observáveis. Os primeiros estudos acerca dessas transformações datam do século XIX, nos trabalhos de Gustav Robert Kirchhoff, Hermann von Helmholtz, James Clerk Maxwell, Ludvig Valentin Lorenz e Hendrik Antoon Lorentz. O interesse no estudo dessas transformações é ressuscitado no século XX, com os trabalhos de Vladimir Aleksandrovich Fock e Fritz Wolfgang London sobre suas aplicações à Mecânica Quântica, e sua importância é sedimentada com trabalhos de Hermann Weyl, que possuíam como objetivo a unificação da Mecânica Quântica com as teorias de interação então contemporâneas: o eletromagnetismo e a Relatividade Geral. Uma revisão histórica mais profunda é encontrada em [1].

O estudo de simetrias tem origem na Geometria, fazendo das técnicas de Geometria modernas a ferramenta ideal para a descrição de uma teoria fundamentada nessas ideias. A Teoria da Relatividade Geral [2] é um dos primeiros exemplos de uma teoria física em que a Geometria Diferencial possui importante papel, e na qual as simetrias do espaço tempo equivalem às equações que regem o comportamento das variáveis da teoria. O trabalho de Wigner [3] ilustra a importância das simetrias como objetos fundamentais das teorias físicas, abordagem que é de grande importância para Física teórica e Física-Matemática contemporâneas.

A ligação entre as técnicas geométricas e as teorias que apresentam simetrias de *gauge* é completa com refinamentos e generalizações do trabalho de Chen-Ning Yang e Robert Laurence Mills [4], que apresenta a descrição de uma teoria de *gauge* para um grupo de simetrias não-abeliano. Uma exposição das ferramentas matemáticas necessárias para compreender os conceitos das teorias de *gauge* (ênfase é dada para uma formulação independente de coordenadas), dos princípios físicos do caso clássico - i.e., sem realização do processo de quantização - dessas teorias e do mecanismo de Higgs, uma importante ferramenta para preservar a invariância por transformações de *gauge* de uma teoria de interação com partículas massivas, são apresentadas nesse trabalho. Uma breve revisão de resultados [5] para equações de vórtices no caso abeliano de uma teoria de *gauge* é também realizada no último capítulo.

Para fins de clareza, o fim de definições é indicado pelo símbolo \diamond e de exemplos pelo símbolo \triangle , enquanto utiliza-se o tradicional símbolo \square para indicar o fim de demonstrações de resultados.

1 Ferramentas de Geometria Diferencial

Para compreender os conceitos que fundamentam a abordagem moderna da teoria de Yang-Mills-Higgs, será necessário estabelecer uma linguagem que enfatize as características que definem a teoria, entre as quais encontram-se o papel das simetrias do sistema na descrição desse e a interpretação geométrica da teoria. Assim, é natural que a Geometria Diferencial seja a ferramenta escolhida para a formulação da teoria.

1.1 O Cálculo em \mathbb{R}^n

O Cálculo em \mathbb{R}^n visa formalizar a aplicação de técnicas do Cálculo Diferencial e Integral para funções definidas em espaços de dimensões superiores. Para obter essas generalizações com rigor e de maneira intuitiva, são introduzidos os conceitos de *formas diferenciais* (que se utiliza do conceito do *produto exterior*), da *derivada exterior*, de *integração sobre politopos*, que envolve o conceito de *cadeias*, e um resultado notável: o teorema de Stokes generalizado para cadeias. As principais referências para essa seção são [6], [7], [8] e [9].

1.1.1 O Produto Exterior

O conceito de um produto geométrico surge a partir da tentativa de trabalhar com a geometria euclideana de forma algébrica. A abordagem consiste de representar formas geométricas simples à partir de um operação algébrica atuando sobre vetores. O primeiro exemplo de produto geométrico encontrado por estudantes é tipicamente o produto vetorial. Esse produto tem um papel fundamental na teoria eletromagnética, originando muitas das propriedades do campo magnético.

Uma tentativa de generalizar o produto vetorial e o produto misto (outro exemplo de produto geométrico) a partir de suas propriedades algébricas leva à definição do produto exterior, originalmente introduzida por Hermann Grassmann¹ (que também introduziu, pela primeira vez, os conceitos fundamentais da Álgebra Linear [16]), na forma da álgebra exterior.

¹ O trabalho de Grassmann [10], publicado em 1844, de fato precede a notação moderna dos produtos escalar, vetorial e misto, introduzida por Josiah Willard Gibbs [11] e Oliver Heaviside [12], em 1881. Entretanto, a introdução das quantias correspondes ao produto escalar e às componentes do produto vetorial é devida à Joseph-Louis Lagrange [13], em 1773. Os desenvolvimentos da álgebra dos *quatérnions* em 1843, devidos a William Rowan Hamilton [14], e da álgebra geométrica em 1878, devidos a William Kingdon Clifford [15], também exerceram fundamental papel na compreensão da geometria e do cálculo em múltiplas dimensões.

Definição 1.1 (Produto Exterior). Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vetores em um espaço vetorial V de dimensão n sobre um corpo \mathbb{K} e $a, b \in \mathbb{K}$ escalares nesse corpo. Define-se o *produto exterior* \wedge a partir das seguintes propriedades:

1. Associatividade: $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
2. Linearidade na primeira variável: $(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = a(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
3. Antissimetria: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. ◇

É fácil ver que as propriedades acima implicam duas outras:

1. Linearidade na segunda variável: $\mathbf{u} \wedge (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w})$;
2. Alternância: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$.

Diz-se que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in \wedge^2 V$ é um 2-vetor no espaço de 2-vetores $\wedge^2 V = \{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\}$. Definindo a adição entre 2-vetores por

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{z})$$

e o produto por escalar por

$$a(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (a\mathbf{v}),$$

vê-se que $\wedge^2 V$ é um espaço vetorial. Claramente, as definições acima são compatíveis com as propriedades do produto exterior.

Uma definição alternativa do produto exterior é a partir do produto tensorial \otimes [17]. Dados dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, o seu produto exterior pode ser definido a partir da igualdade

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}.$$

A verificação de que as propriedades acima são satisfeitas por essa definição é simples.

Dada uma base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de V , com $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, vemos que $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j\}_{i > j}$ é uma base de $\wedge^2 V$, pois $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \left(\sum_{i=1}^n u^i \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u^i v^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i > j} (u^i v^j - v^i u^j) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \sum_{i > j} c^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

O resultado acima, que se utiliza da propriedade de antissimetria do produto exterior, implica

$$\dim(\wedge^2 V) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

Se V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o espaço de 2-vetores herda um produto interno a partir daquele definido em V , por meio de um determinante, de maneira que

$$\langle \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \rangle := \det \left(\sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \langle \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_s \rangle \tilde{\mathbf{e}}_r \otimes \tilde{\mathbf{e}}_s \right).$$

onde $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2\}$ é uma base de \mathbb{K}^2

O produto exterior $M \wedge T$ de operadores lineares $M, T \in L(V \rightarrow V)$, $M: V \rightarrow V$, $T: V \rightarrow V$, pode ser definido a partir da seguinte ação sobre V , para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$:

$$M \wedge T (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) := (M\mathbf{u}) \wedge (T\mathbf{v}).$$

Note que em geral não vale $M \wedge M = 0$, pois

$$M \wedge M (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (M\mathbf{u}) \wedge (M\mathbf{v}),$$

que não é nulo para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Seguindo os passos da definição de 2-vetores, é possível definir multivetores

$$\bigwedge_{\ell=1}^k \mathbf{v}_\ell := \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$$

a partir da aplicação repetida de produtos exteriores. Diz-se que

$$\bigwedge_{\ell=1}^k \mathbf{v}_\ell \in \bigwedge^k V$$

é um k -vetor no espaço de k -vetores $\bigwedge^k V$.

Os resultados acerca de 2-vetores podem ser estendidos para k -vetores[6][9]. Assim, $\bigwedge^k V$ é um espaço vetorial e tem-se que dada uma base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de V ,

$$\{\mathbf{e}_I\}_{I \in \mathcal{I}^k} := \left\{ \bigwedge_{\ell=1}^k \mathbf{e}_{i_\ell} \right\}_{i_\ell \in \mathcal{I}} = \{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k}\}_{i_\ell \in \mathcal{I}}$$

é uma base² de $\bigwedge^k V$. Para eliminar redundâncias, escreve-se

$$\{\mathbf{e}_I\}_{I > I} := \left\{ \bigwedge_{\ell=1}^k \mathbf{e}_{i_\ell} \right\}_{i_\ell > i_{\ell+1}},$$

de onde se obtém,

$$\bigwedge_{\ell=1}^k \mathbf{v}_\ell = \bigwedge_{\ell=1}^k \left(\sum_{i_\ell=1}^n v_\ell^{i_\ell} \mathbf{e}_{i_\ell} \right) = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} v^I \mathbf{e}_I = \sum_{I > I} \left(\sum_{\pi \in S^k} \text{sgn}(\pi) v^{\pi(I)} \right) \mathbf{e}_I = \sum_{I > I} c^I \mathbf{e}_I,$$

² Aqui é utilizada a notação de multi-índice [9].

onde $v^I = \prod_{\ell=1}^k v_{\ell}^{i_{\ell}}$, $\pi(I)$ é uma permutação do multi-índice I , $\sum_{\pi \in S^k}$ é a soma sobre todas as permutações em S^k (o grupo simétrico de ordem k) e $\text{sgn}(\pi)$ é a função sinal aplicada à permutação π . A computação acima deixa claro que:

$$\dim(\wedge^k V) = \binom{n}{k},$$

e que para $k > n$, $\wedge^k V = \{\mathbf{0}\}$. Há também uma extensão natural do produto interno de 2-vetores para k -vetores:

$$\left\langle \bigwedge_{r=1}^k \mathbf{u}_r, \bigwedge_{s=1}^k \mathbf{v}_s \right\rangle := \det \left(\sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \langle \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_s \rangle \tilde{\mathbf{e}}_r \otimes \tilde{\mathbf{e}}_s \right),$$

onde $\{\tilde{\mathbf{e}}_r\}_{r \in \mathcal{R}}$, com $\mathcal{R} = \{1, \dots, k\}$, é uma base de \mathbb{K}^k

Uma propriedade interessante do produto exterior de operadores que é, para $M \in L(V \rightarrow V)$, com

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_i^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j,$$

o seu n -ésimo produto exterior é dado por:

$$\bigwedge_{\ell=1}^n M = \det(M) \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}^J.$$

A verificação dessa identidade se dá por meio da ação do operador sobre $\mathbf{e}_I \in \bigwedge_{\ell=1}^n V$, da seguinte maneira:

$$\bigwedge_{\ell=1}^n M(\mathbf{e}_I) = \bigwedge_{\ell=1}^n (M\mathbf{e}_{i_{\ell}}) = \left(\sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) M_I^{\pi(I)} \right) \mathbf{e}_I = \det(M) \mathbf{e}_I.$$

Menciona-se uma convenção: o espaço de 0-vetores $\wedge^0 V$ é definido como o corpo \mathbb{K} sobre o qual V é definido, com o produto exterior de um 0-vetor por um k -vetor dado pelo produto do k -vetor por um escalar. É possível também estabelecer a definição de um espaço de multivetores

$$\wedge V := \bigoplus_{k=0}^n \wedge^k V$$

com $\dim(\wedge V) = 2^n$.

A interpretação geométrica de um k -vetor é extraída das interpretações do produto vetorial e do produto misto. O produto vetorial de dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ contidos em um plano α é um vetor $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ normal ao plano α , de magnitude correspondente à área do paralelogramo gerado por \mathbf{u} e \mathbf{v} . O sentido do vetor \mathbf{w} é relacionado com a orientação da dupla (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . O produto misto, por sua vez, mapeia três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

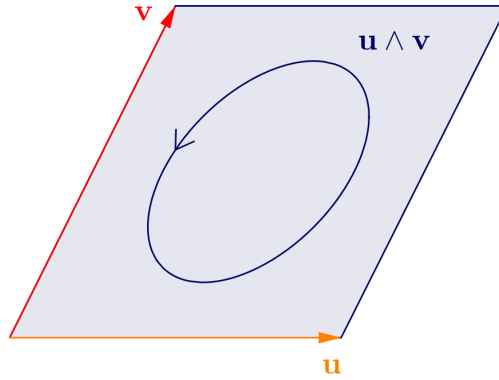


Figura 1 – Interpretação geométrica de um 2-vetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

em um escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, cuja magnitude é dada pelo volume do paralelepípedo e cujo sinal é dado pela orientação da tripla $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

De maneira similar, interpreta-se um k -vetor construído a partir de um espaço vetorial n dimensional como um k -paralelepípedo orientado, de k -volume igual à magnitude do k -vetor.

De fato, o produto vetorial e o produto misto podem ser facilmente obtidos a partir de 2- e 3-vetores. Para essa tarefa é necessário definir um operador³ que mapeie um k -vetor em um $(n - k)$ -vetor:

Definição 1.2 (Operador Dual de Hodge). Seja $\mathbf{u}^k \in \bigwedge^k V$ e $\mathbf{e}_{i_i \in \mathcal{I}}$ uma base para V . Diz-se que $\star: \bigwedge^k V \rightarrow \bigwedge^{n-k} V$ é o *operador dual de Hodge* se é um operador linear e se cumpre a seguinte condição⁴ para todo $\mathbf{v}^k \in \bigwedge^k V$:

$$\mathbf{v}^k \wedge \star(\mathbf{u}^k) = \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{u}^k \rangle \bigwedge_{i=1}^n \mathbf{e}_i. \quad \diamond$$

Claramente, o operador dual de Hodge é uma isometria:

$$\langle \star \mathbf{v}^k, \star \mathbf{u}^k \rangle = \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{u}^k \rangle.$$

Exemplos de computações de vetores duais em \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e em $\mathbb{R}^{1,3}$, o espaço de Minkowski, em conjunto com um conveniente resultado, são dados no apêndice A.

Assim, para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$$

e

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

³ A definição dada utiliza-se de uma base, mas é possível definir esse operador de maneira independente da escolha de base.

⁴ A definição pode diferir por um sinal. Uma escolha de sinal define uma orientação para V .

Assim, enquanto o 2-vetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é interpretado como um paralelogramo orientado, o vetor⁵ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é interpretado como o vetor normal à esse paralelogramo, com orientação compatível e magnitude compatível com a área desse. Similarmente, o 3-vetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ é interpretado como um paralelepípedo orientado, enquanto o escalar⁶ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ é interpretado como o volume orientado desse paralelepípedo.

1.1.2 Formas Diferenciais em \mathbb{R}^n

O conceito de uma forma diferencial surge, entre outras razões, para estender a utilização de operadores diferenciais vetoriais para variedades diferenciáveis. O gradiente ∇ é o operador diferencial mais comumente encontrado no estudo do Cálculo em \mathbb{R}^n e sua aplicação a uma função⁷ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dá uma família de vetores obtidos em cada ponto de \mathbb{R}^n , de maneira que $\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$, onde $\partial_{\mathbf{v}} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a derivada direcional de f na direção de \mathbf{v} , dada por⁸

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}.$$

Para obter um objeto que exerça o papel do funcional

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

será definida uma 1-forma, enquanto a funcionais obtidos de outros operadores diferenciais, como o rotacional $\nabla \times$ e o divergente $\nabla \cdot$, que exercem papéis similares, serão associadas 2- e 3-formas (análogos de multivetores para formas diferenciais), respectivamente.

O estudo dos funcionais que atuam em um espaço vetorial leva à seguinte definição do espaço dual:

Definição 1.3 (Espaço Dual). Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} dotado de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $L(V \rightarrow \mathbb{K})$ o espaço de funcionais lineares de V . Então

$$V^* := L(V \rightarrow \mathbb{K})$$

é dito seu espaço dual. ◇

É fácil ver que V^* é um espaço vetorial e denomina-se os elementos desse espaço de *covetores* (ou ainda, *vetores covariantes*, em contraste ao vetores em V , ditos *vetores*

⁵ Por vezes, vetores originários de um produto vetorial são ditos *pseudovetores* ou *vetores axiais*, devido às suas propriedades frente a uma transformação de paridade. Essa nomenclatura, entretanto, é mais apropriada para designar campos vetoriais, e será abordada na subseção 1.3.2.

⁶ Essa quantia é às vezes dita um *pseudoescalar*. Assim como no caso da nota de rodapé 5, a discussão acerca dessa nomenclatura será postergada.

⁷ Em geral, questões de suavidade de funções não serão abordadas neste trabalho. Exceto onde indicado, as funções consideradas serão funções suaves, a fim de facilitar as definições e enunciados de resultados.

⁸ A definição dada a seguir pode ser facilmente estendida para funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, utilizando a decomposição em componentes $\partial_{\mathbf{v}} f = \sum_{i=1}^m \partial_{\mathbf{v}} f^i \mathbf{e}_i$.

contravariantes). Também, se V é um espaço vetorial de dimensão finita, V^* é isomorfo a V , via $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle$. Essa relação é explicitada no teorema da representação de Riezs-Fréchet[17] e, dada uma base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V , fornece uma base $\{\mathbf{e}^i\}$ de V^* , tal que $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_j^i$. Adicionalmente, ainda no caso em que V é de dimensão finita, há um isomorfismo bastante natural entre V e $(V^*)^* = V^{**}$, $\Psi: V \rightarrow V^{**}$, dado por $\forall \varphi \in V^*: \Psi(\mathbf{v})(\varphi) = \varphi(\mathbf{v})$.

Para realizar a extensão do Cálculo Diferencial para variedades diferenciáveis, é necessário compreender o funcionamento do Cálculo Diferencial em espaços como \mathbb{R}^n (ou, mais geralmente, espaços de Banach de dimensão finita). A definição da diferencial de uma função entre tais espaços vetoriais segue:

Definição 1.4 (Diferencial). Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então f é dita diferenciável em um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se existe um operador linear $D_{\mathbf{x}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que⁹

$$\lim_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}}\|} = 0.$$

Esse operador, se existe, é único e diz-se que

$$df(\mathbf{x}) := D_{\mathbf{x}}$$

é a *diferencial* de f no ponto \mathbf{x} . ◇

Uma função é dita diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^n$ se é diferenciável em todo ponto de E . As propriedades da diferencial são bastante similares às dos outros operadores diferenciais, incluindo a regra da cadeia $d(f \circ g) = df \circ dg$ e a regra de Leibniz (ou regra do produto) $d\langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle$.

Os vetores $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ (que servem como direções para computar a diferencial) devem ser interpretados como vetores em um espaço atrelado ao ponto \mathbf{x} , pois, ao variar o ponto \mathbf{x} , devemos novamente avaliar o limite presente na definição da diferencial, que pode nem mesmo existir para outros pontos. Introduce-se, assim, a noção de um espaço tangente a um ponto de \mathbb{R}^n .

Definição 1.5 (Espaços Tangentes em \mathbb{R}^n). Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. O espaço tangente a \mathbf{x} , $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$, é definido como uma cópia de \mathbb{R}^n associada ao ponto \mathbf{x} . Os elementos de $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ são ditos *vetores tangentes*. ◇

A definição acima, aparentemente simples, torna-se crucial para o entendimento do Cálculo quando estendida para variedades diferenciáveis. A ligação do espaço tangente com o processo de diferenciação de funções pode ser clarificada definindo a ação de vetores tangentes sobre funções como a derivada direcional.

⁹ O limite tomado nessa definição é um limite em \mathbb{R}^n e, portanto, consiste em avaliar a expressão simultaneamente em cada $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ tal que $\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}}\| = \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Definição 1.6. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}_x \in T_x \mathbb{R}^n$. Então

$$\mathbf{v}_x(f) = \partial_{\mathbf{v}_x} f(\mathbf{x}). \quad \diamond$$

A ação dos vetores tangentes sobre funções motiva a notação $\partial_{\mathbf{x}^i} := \partial_{\mathbf{e}_x^i}$ para vetores de base em $T_x \mathbb{R}^n$.

Analogamente ao espaço tangente, é possível definir o espaço cotangente:

Definição 1.7 (Espaços Cotangentes em \mathbb{R}^n). Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. O espaço cotangente a \mathbf{x} , $T_x^* \mathbb{R}^n$, é definido como uma cópia do espaço dual de \mathbb{R}^n , $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ associada ao ponto \mathbf{x} . Os elementos de $T_x^* \mathbb{R}^n$ são ditos *vetores cotangentes*. \diamond

Correspondendo à base $\{\partial_{\mathbf{x}^i}\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $T_x \mathbb{R}^n$, tem-se a base $\{dx_{\mathbf{x}}^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $T_x^* \mathbb{R}^n$. Essa notação é originada da expressão informal

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \cdot \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) dx^i,$$

onde dx^i é utilizado para denotar uma variação infinitesimal. Essa abordagem, enquanto intuitiva e historicamente significativa, é de difícil formalização.¹⁰ Com as definições dadas anteriormente, essa expressão é bem definida.

A convenção adotada acima indica uma conexão entre vetores cotangentes e operadores diferenciais, assim como foi vista a conexão entre vetores tangentes e derivadas direcionais. Pode, então, trabalhar-se com operadores diferenciais e derivadas direcionais em um ponto fixo. Entretanto, se desejamos atingir o grau desejado de generalização dos operadores diferenciais em \mathbb{R}^3 , devemos considerar os conceitos de campos vetoriais e de campos de covetores (ou formas diferenciais), para que seja possível o estudo da diferenciação de funções em subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Definição 1.8 (Campos Vetoriais em \mathbb{R}^n). Seja

$$T\mathbb{R}^n := \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} T_x \mathbb{R}^n,$$

onde \bigsqcup representa a união disjunta. Então $\mathbf{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$ é dito um *campo vetorial* sobre \mathbb{R}^n se \mathbf{v} associa, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, apenas um vetor em $T_x \mathbb{R}^n$. \diamond

Se $C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} com derivadas parciais contínuas de todas as ordens, ditas *suaves*, $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$ é um C^∞ -módulo¹¹, i.e., todo

¹⁰ Esses conceitos são expostos de maneira formal no campo de estudo conhecido como Análise Não Padronizada, desenvolvido por Abraham Robinson[18].

¹¹ Um módulo é uma estrutura sobre um anel \mathbb{S} que apresenta propriedades similares às de um espaço vetorial[19].

campo vetorial pode ser escrito como uma combinação de funções coordenadas associadas a vetores de base (aqui, a base considerada é para um módulo, e não um espaço vetorial).

Assim como para vetores em um espaço tangente fixo, pode definir-se a ação de campos vetoriais sobre funções.

Definição 1.9. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$. Então

$$\mathbf{v}(f) = \partial_{\mathbf{v}}f. \quad \diamond$$

Aqui, a derivada parcial $\partial_{\mathbf{v}}f$ é vista, para cada \mathbf{v} , como uma função de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Desta ação obtém-se a seguinte notação para vetores de base: $\partial_i := \partial_{\mathbf{e}_i}$.

Exemplo 1.1. Um campo vetorial \mathbf{v} em \mathbb{R}^2 com um sistema de coordenadas (x, y) é composto de funções coordenadas para a base de vetores $\{\partial_x, \partial_y\}$ dada pelos operadores que levam uma função f nas suas derivadas parciais $\partial_x f$ e $\partial_y f$, como:

$$\mathbf{v} = (xy + y^2) \partial_x + \cos(y + x) \partial_y. \quad \triangle$$

Para covetores, obtém-se a definição de uma forma diferencial:

Definição 1.10 (Formas Diferenciais em \mathbb{R}^n). Seja

$$T^*\mathbb{R}^n := \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^n.$$

Então $\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ é dita uma *1-forma diferencial* em \mathbb{R}^n se ω associa, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, apenas um covetor em $T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^n$. \diamond

Assim como para $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$, o espaço das 1-formas diferenciais $\Gamma(T^*\mathbb{R}^n)$ é C^∞ -módulo e, associada à base $\{\partial_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$, há a base $\{dx^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $\Gamma(T^*\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.2. Uma 1-forma ω^1 em \mathbb{R}^2 com um sistema de coordenadas (x, y) é composta de funções coordenadas para a base de formas $\{dx, dy\}$ dada pelos funcionais que levam os campos de vetores tangentes unitários nas direções de x e y na identidade, como:

$$\omega^1 = \text{sen}(x^2y) dx + e^{-x} dy. \quad \triangle$$

Uma forma diferencial atua sobre um campo vetorial da seguinte maneira¹²:

Definição 1.11. Seja $\mathbf{v} \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$, $\omega_{\mathbf{K}} \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega_{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ e $\mathbf{K} =$

$\sum_{i=1}^n \omega_i \partial_i$. Então

$$\omega_{\mathbf{K}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{K}, \mathbf{v} \rangle. \quad \diamond$$

¹² A definição aqui dada depende, assim como no caso do operador dual de Hodge, de uma escolha de base. É possível obter uma definição que não dependa dessa escolha.

Exemplo 1.3 (Ação de Formas sobre Campos Vetoriais). A 1-forma ω^1 definida no exemplo 1.2 atua sobre o campo vetorial \mathbf{v} definido no exemplo 1.1 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\omega^1(\mathbf{v}) &= [\text{sen}(x^2y) dx + e^{-x} dy] [(xy + y^2) \partial_x + \cos(y+x) \partial_y] \\ &= \text{sen}(x^2y) (xy + y^2) dx (\partial_x) + \cos(y+x) e^{-x} dy (\partial_y) \\ &= \text{sen}(x^2y) (xy + y^2) + \cos(y+x) e^{-x}.\end{aligned}\quad \triangle$$

Há um tipo específico de 1-forma que é de particular interesse. Como mencionado anteriormente, um dos objetivos da utilização da linguagem de formas diferenciais é generalizar operadores diferenciais. Visto que 1-formas atuam sobre campos vetoriais como uma família de funcionais, levando campos vetoriais em campos escalares (ou, simplesmente, funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}), pode considerar-se a 1-forma $d\mathbf{f}$ que exerce o papel do funcional associado ao gradiente ∇f de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida da seguinte maneira, $\forall \mathbf{v} \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{v}) := \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle = \partial_{\mathbf{v}} f.$$

Uma forma que cumpre essa condição é dita *exata*. É possível, então, definir um operador $d: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ tal que

$$d\mathbf{f} := \langle \nabla f, \cdot \rangle. \quad (1.1)$$

Exemplo 1.4. A 1-forma apresentada no exemplo 1.2 não é do tipo $d\mathbf{f}$. De fato, se

$$\begin{aligned}\partial_x f &= \text{sen}(x^2y), \\ \partial_y f &= e^{-x},\end{aligned}$$

então, visto que $\partial_x f, \partial_y f \in C^\infty$, $\partial_{yx}^2 f = \partial_{xy}^2 f$, pelo lema de Schwarz. Entretanto,

$$\partial_{yx}^2 f = x^2 \cos(x^2y) \neq -e^{-x} = \partial_{xy}^2 f. \quad \triangle$$

Podemos ainda considerar-se a combinação dos dois tipos de construções apresentadas anteriormente: campos de k -vetores e k -formas.

Definição 1.12. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. O espaço de k -vetores tangentes a \mathbf{x} , $\bigwedge^k T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$, é definido como uma cópia de $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$, associada ao ponto \mathbf{x} e o espaço de k -vetores cotangentes a \mathbf{x} , $\bigwedge^k T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^n$, é definido como uma cópia do espaço dual de $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$, $(\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^* \cong \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* \cong \bigwedge^k \mathbb{R}^n$, associada ao ponto \mathbf{x} . \diamond

Definição 1.13 (Campos de k -vetores e k -formas Diferenciais em \mathbb{R}^n). Sejam

$$\begin{aligned}\bigwedge^k T\mathbb{R}^n &:= \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \bigwedge^k T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n, \\ \bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n &:= \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \bigwedge^k T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Então $\mathbf{v}^k: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^k T\mathbb{R}^n$ é dito um *campo de k -vetores* sobre \mathbb{R}^n se \mathbf{v}^k associa, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, apenas um k -vetor em $\bigwedge^k T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$. Similarmente, $\boldsymbol{\omega}^k: \mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ é dita uma *k -forma diferencial* em \mathbb{R}^n se $\boldsymbol{\omega}^k$ associa, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, apenas um k -covetor em $\bigwedge^k T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^n$. \diamond

O conjunto de k -vetores é denotado $\Gamma\left(\bigwedge^k T\mathbb{R}^n\right)$, enquanto o conjunto de k -formas é denotado $\Gamma\left(\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n\right)$.

Visto que $\bigwedge^k T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^n \cong \left(\bigwedge^k T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n\right)^*$, a ação de uma k -forma sobre um campo de k -vetores é dada pela seguinte definição:

Definição 1.14. Seja $\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k \in \Gamma\left(\bigwedge^k T\mathbb{R}^n\right)$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}^k \in \Gamma\left(\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n\right)$ tal que $\mathbf{u}^k = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} u_I^k \partial_I$ e $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}^k = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} u_I^k dx^I$. Então

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}^k(\mathbf{v}^k) = \langle \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k \rangle. \quad \diamond$$

A convenção adotada para 0-vetores pode ser adaptada para 0-formas definindo

$$\Gamma\left(\bigwedge^0 T^*\mathbb{R}^n\right) := C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

O produto exterior de uma 0-forma por uma k -forma é dado pelo produto da k -forma por uma função. Essa definição dá o resultado de que $\Gamma\left(\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n\right)$ é um C^∞ -módulo.

Com essas definições é possível explicitar a ligação entre os operadores diferenciais conhecidos em \mathbb{R}^3 e formas diferenciais.

1.1.3 A Derivada Exterior

A fim de generalizar os operadores diferenciais de \mathbb{R}^3 , é necessário encontrar propriedades que os caracterizem. É sabido que valem as seguintes identidades: $\nabla \times (\nabla f) = 0$ e $\nabla \cdot (\nabla \times g) = 0$, para $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Também valem as seguintes regras do produto:

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= (\nabla f)g + f(\nabla g), \forall f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \forall g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \nabla \times (fg) &= (\nabla f) \times g + f(\nabla \times g), \forall f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \forall g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \nabla \cdot (fg) &= (\nabla f) \cdot g + f(\nabla \cdot g), \forall f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \forall g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \nabla \cdot (f \times g) &= (\nabla \times f) \cdot g - f \cdot (\nabla \times g), \forall f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \forall g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

além da linearidade dos operadores. Se essas propriedades forem traduzidas para a linguagem das formas diferenciais, o resultado desejado será alcançado.

Definição 1.15 (Derivada Exterior). Sejam $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi} \in \Gamma\left(\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n\right)$, $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^n)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Define-se a *derivada exterior* d como um mapa

$$d: \Gamma\left(\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n\right) \rightarrow \Gamma\left(\bigwedge^{k+1} T^*\mathbb{R}^n\right),$$

de maneira que d mapeie k -formas em $k + 1$ -formas, ou seja,

$$d: \Gamma(\wedge^k T^* \mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(\wedge^{k+1} T^* \mathbb{R}^n),$$

tal que d possui as seguintes propriedades:

1. Concordância com o gradiente: $d: \Gamma(\wedge^0 T^* \mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(\wedge^1 T^* \mathbb{R}^n)$ é o mapa definido na equação (1.1);
2. Linearidade: $d(a\omega + b\xi) = a d\omega + b d\xi$;
3. Regra de Leibniz alternante: $d(\omega \wedge \xi) = d\omega \wedge \xi + (-1)^k \omega \wedge d\xi$;
4. Nilpotência: $d(d\omega) = 0$. ◇

É possível mostrar que esse operador é único. A motivação para a gradação da regra de Leibniz (responsável pelo termo $(-1)^k$) consiste em manter a consistência das propriedades derivada exterior com a propriedade de antissimetria das formas, de maneira que para uma $k - 1$ -forma ω e uma 1-forma ξ :

$$d(\omega \wedge \xi) = d((-1)^k \xi \wedge \omega).$$

Exemplo 1.5. A fim de elucidar a ação da derivada exterior sobre uma forma diferencial, considera-se a seguinte computação:

$$\begin{aligned} d[\sin(x^2 y) dx + e^{-x} dy] &= 2xy \cos(x^2 y) dx \wedge dx + x^2 \cos(x^2 y) dy \wedge dx + -e^{-x} dx \wedge dy \\ &= -[e^{-x} + x^2 \cos(x^2 y)] dx \wedge dy \end{aligned} \quad \triangle$$

A verificação de que a definição acima descreve os operadores diferenciais em \mathbb{R}^3 envolve calcular a derivada exterior de 0-, 1- e 2- formas, a partir das propriedades dadas acima. Para uma 0-forma $\omega^0 \in \Gamma(\wedge^0 T^* \mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3)$, basta utilizar a propriedade 1 da definição 1.15 que identifica a ação da derivada exterior sobre 0-formas com tomar o gradiente das formas:

$$d\omega^0 = \langle \nabla \omega^0, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^3 \partial_i \omega^0 dx^i.$$

Para uma 1-forma $\omega^1 \in \Gamma(T^* \mathbb{R}^3)$, basta utilizar as propriedades 1, 2, 3 e 4 da definição 1.15, notando que as componentes ω_i^1 de ω^1 são funções, ou 0-formas, e que uma base $\{dx^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $\Gamma(T^* \mathbb{R}^n)$, dual a $\{\partial_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, é composta da derivada exterior das funções $x^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que, atuando sobre um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, toma a i -ésima componente de \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ via $x^i(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$. Como essa função é linear, seu diferencial

é uma função dx^i que atua sobre um campo vetorial $\mathbf{v} \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ tomando a i -ésima componente de \mathbf{v} com respeito à base $\{\partial_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. Computando:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= d\left(\sum_{i=1}^3 \omega_i^1 dx^i\right) = \sum_{i=1}^3 d(\omega_i^1 dx^i) = \sum_{i=1}^3 [d\omega_i^1 \wedge dx^i + \omega_i^1 d(dx^i)] \\ &= \sum_{i=1}^3 d\omega_i^1 \wedge dx^i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \partial_j \omega_i^1 dx^j \wedge dx^i = \sum_{i>j} (\partial_j \omega_i^1 - \partial_i \omega_j^1) dx^j \wedge dx^i \\ &= (\partial_y \omega_z^1 - \partial_z \omega_y^1) dy \wedge dz + (\partial_z \omega_x^1 - \partial_x \omega_z^1) dz \wedge dx + (\partial_x \omega_y^1 - \partial_y \omega_x^1) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Aqui, utilizou-se das seguintes associações:

$$\begin{aligned} (\partial_1, \partial_2, \partial_3) &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z), \\ (dx^1, dx^2, dx^3) &= (dx, dy, dz), \\ (\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1) &= (\omega_x^1, \omega_y^1, \omega_z^1). \end{aligned}$$

Para uma 2-forma $\omega^2 \in \Gamma(\wedge^2 T^*\mathbb{R}^3)$, novamente são utilizadas as propriedades 1, 2, 3 e 4 da definição 1.15:

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= d\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \omega_{ik}^2 dx^i \wedge dx^k\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 d(\omega_{ik}^2 dx^i \wedge dx^k) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 [d(\omega_{ik}^2 dx^i) \wedge dx^k - \omega_{ik}^2 dx^i \wedge d(dx^k)] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \partial_j \omega_{ik}^2 dx^j \wedge dx^i \wedge dx^k \\ &= (\partial_x \omega_x^2 + \partial_y \omega_y^2 + \partial_z \omega_z^2) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Novamente, foram utilizadas as associações

$$\begin{aligned} (\partial_1, \partial_2, \partial_3) &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z), \\ (dx^1, dx^2, dx^3) &= (dx, dy, dz), \\ (\omega_{23}^2, \omega_{31}^2, \omega_{12}^2) &= (\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2), \end{aligned}$$

a última delas em analogia à dualidade de Hodge.

Para concretizar as associações entre formas e operadores diferenciais, deve utilizar-se o operador dual de Hodge \star e os isomorfismos musicais $\sharp: \Gamma(\wedge^k T^*\mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(\wedge^k T\mathbb{R}^n)$ e $\flat: \Gamma(\wedge^k T\mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(\wedge^k T^*\mathbb{R}^n)$, que correspondem ao isomorfismo entre um espaço vetorial e seu dual¹³ (e o isomorfismo inverso), mencionado anteriormente:

$$\begin{aligned} (\star [d\omega^1])^\sharp &= (\star [(\partial_y \omega_z - \partial_z \omega_y) dy \wedge dz + (\partial_z \omega_x - \partial_x \omega_z) dz \wedge dx + (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) dx \wedge dy])^\sharp \\ &= [(\partial_y \omega_z - \partial_z \omega_y) dx + (\partial_z \omega_x - \partial_x \omega_z) dy + (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) dz]^\sharp \\ &= (\partial_y \omega_z - \partial_z \omega_y) \partial_x + (\partial_z \omega_x - \partial_x \omega_z) \partial_y + (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) \partial_z = \nabla \times (\omega^1)^\sharp, \end{aligned}$$

¹³ Esses isomorfismos são dados, em uma variedade diferenciável, pela métrica, e correspondem ao levantamento \sharp e rebaixamento \flat de índices. O nome é uma analogia ao conceito musical de acidentes, que têm como função alterar a altura de numa nota por um semitom acima ou abaixo.

$$\begin{aligned} \star [d\boldsymbol{\omega}^2] &= \star [(\partial_x \omega_{yz} + \partial_y \omega_{zx} + \partial_z \omega_{xy}) dx \wedge dy \wedge dz] \\ &= (\partial_x \omega_x + \partial_y \omega_y + \partial_z \omega_z) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}^2)^\sharp. \end{aligned}$$

Por fim, demonstra-se que a derivada exterior de qualquer forma diferencial é dada por uma expressão bastante simples:

$$d\boldsymbol{\omega}^k = d \left(\sum_{I \in \mathcal{I}^k} \omega_I dx^I \right) = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} d(\omega_I dx^I) = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} \sum_{j=1}^n \partial_j \omega_I dx^j \wedge dx^I,$$

e que a propriedade 4 de definição 1.15 se estende para k -formas:

$$\begin{aligned} d(d\boldsymbol{\omega}^k) &= d \left(\sum_{I \in \mathcal{I}^k} \sum_{j=1}^n \partial_j \omega_I dx^j \wedge dx^I \right) = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell \partial_j \omega_I dx^\ell \wedge dx^j \wedge dx^I \\ &= \sum_{I \in \mathcal{I}^k} \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j \partial_\ell \omega_I (-dx^j \wedge dx^\ell \wedge dx^I) = -d(d\boldsymbol{\omega}^k), \end{aligned}$$

e, portanto, $d^2\boldsymbol{\omega}^k := d(d\boldsymbol{\omega}^k) = 0$, pois vale o lema de Schwarz para derivadas segundas. Uma forma que cumpre $d\boldsymbol{\omega} = 0$ é dita *fechada*. Portanto, toda forma exata é fechada.¹⁴

Exemplo 1.6. O exemplo 1.5 permite, utilizando a nilpotência, chegar à mesma conclusão do exemplo 1.4, pois se $\boldsymbol{\omega}^1 = d\mathbf{f}$, $d\boldsymbol{\omega}^1 = 0$. \triangle

Uma aplicação da linguagem de formas à Física é reescrever as equações de Maxwell. Para completude, são realizados os casos das equações em \mathbb{R}^3 e em $\mathbb{R}^{1,3}$. Maiores detalhes acerca dessa aplicação (e de outras, no contexto de teorias físicas), podem ser encontrados em [20] e [21].

Exemplo 1.7 (As Equações de Maxwell em \mathbb{R}^3). As equações de Maxwell em \mathbb{R}^3 , em que o tempo é considerado um parâmetro, descrevem o comportamento dos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} , dadas uma densidade de cargas ρ e uma densidade de correntes \mathbf{j} satisfazendo a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0.$$

Os campos elétrico e magnético podem ser escritos em função do potencial elétrico ϕ e do vetor potencial magnético \mathbf{a} , a partir de $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{a}$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{a}$. Essas equações são dadas, em unidades do SI, por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned}$$

¹⁴ O converso, o enunciado de que toda forma fechada é exata, i.e., $d\boldsymbol{\omega}^k = 0 \implies \boldsymbol{\omega}^k = d\xi^{k-1}$, dito lema de Poincaré, é verdadeiro apenas para espaços com topologia trivial. O estudo do resultado da dupla diferenciação exterior em variedades com topologia não-trivial leva a formulação da *cohomologia de de Rham*, uma ferramenta de classificação topológica.

Define-se formas diferenciais $\mathbf{E} \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{B} \in \Gamma(\wedge^2 T\mathbb{R}^3)$, $\boldsymbol{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\mathbf{j} \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$ de maneira que as suas componentes sejam as mesmas dos vetores definidos anteriormente. Em um sistema de coordenadas cartesiano, $\mathbf{E} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$, $\mathbf{B} = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$, $\boldsymbol{\rho} = \rho$ e $\mathbf{j} = j_x dx + j_y dy + j_z dz$. É possível, portanto, reescrever as equações de Maxwell na linguagem das formas diferenciais, utilizando os resultados deduzidos anteriormente:

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= 0, \\ d\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, \\ d \star \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \star \boldsymbol{\rho}, \\ d \star \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \star \mathbf{E} &= \mu_0 \star \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Para obter os campos em termos dos potenciais, basta notar que as condições indicadas anteriormente são equivalentes a $\mathbf{E} = -d\phi - \partial_t \mathbf{a}$ e $\mathbf{B} = d\mathbf{a}$, com $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\mathbf{a} \in \Gamma(\wedge^1 T\mathbb{R}^3)$. Em termos de um sistema de coordenadas cartesiano, claramente, $\phi = \phi$ e $\mathbf{a} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$. \triangle

Exemplo 1.8 (As Equações de Maxwell em $\mathbb{R}^{1,3}$). No espaço de Minkowski, os campos elétrico e magnético são combinados em um tensor eletromagnético covariante F , definido por

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

O tensor F pode ser obtido a partir do 4-potencial contravariante $\mathbf{A} = (\phi/c, \mathbf{a})$ via $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, onde foi utilizado a convenção de soma de Einstein¹⁵, e os isomorfismos musicais foram utilizados para realizar o rebaixamento e levantamento de índices. Definindo a 4-corrente contravariante $\mathbf{J} = (c\rho, \mathbf{j})$, as equações de Maxwell no espaço de Minkowski são expressadas por:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= 0, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\nu. \end{aligned}$$

Definindo formas diferenciais $\mathbf{F} \in \Gamma(\wedge^2 T\mathbb{R}^{1,3})$ para o campo eletromagnético e $\mathbf{J} \in \Gamma(T\mathbb{R}^{1,3})$ para a 4-corrente de maneira que $\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \wedge dx^0 + \mathbf{B}$ e $\mathbf{J} = c\rho \wedge dx^0 + \mathbf{j}$,¹⁶ é

¹⁵ Vide seção 2.1

¹⁶ Uma definição mais natural e mais facilmente interpretável é da 4-corrente com uma 3-forma, equivalente ao dual de Hodge de \mathbf{J} , que representa uma densidade espacial de carga para o termo relativo a $\boldsymbol{\rho}$ e uma densidade superficial e temporal de carga para \mathbf{j} . A convenção adotada aqui é a utilizada nas bibliografias principais.

possível reescrever as equações de Maxwell como

$$d\mathbf{F} = 0, \quad (1.2a)$$

$$d \star \mathbf{F} = \mu_0 \star \mathbf{J}. \quad (1.2b)$$

A condição de obtenção do campo eletromagnético a partir de um 4-potencial pode ser obtida a partir de $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$, onde $\mathbf{A} \in \Gamma(\wedge^1 T^*\mathbb{R}^{1,3})$ e $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\phi \wedge dx^0 + \mathbf{a}$ e a equação da continuidade para a 4-corrente é consequência de

$$d^2 \star \mathbf{F} = \mu_0 d \star \mathbf{J} = 0 \iff d \star \mathbf{J} = 0. \quad \triangle$$

1.1.4 Integração sobre Cadeias em \mathbb{R}^n

Para iniciar um estudo de integração em variedades, primeiro é necessário considerar um caso mais simples: a integração sobre politopos orientados de dimensão k (generalizações de polígonos e poliedros) em \mathbb{R}^n , ditos k -politopos orientados. O estudo desse caso é suficiente para estabelecer a integração sobre uma grande gama de subconjuntos de \mathbb{R}^n , como será visto em maior detalhe na subseção 1.2.4.

Definição 1.16 (Integração de Formas em \mathbb{R}^n). Sejam $\omega^k \in \Gamma(\wedge^k T^*\mathbb{R}^n)$ uma k -forma monomial e σ^k um k -politopo orientado. A integral de $\omega^k = \omega^k dx^I$, com $i_\ell < i_{\ell+1}$, sobre σ^k é dada pela seguinte expressão:

$$\int_{\sigma^k} \omega^k = \int_{\sigma^k} \omega^k dx^I = \int_{\sigma^k} \omega^k d^k \mathbf{x},$$

onde o lado direito da equação é a integral sobre um politopo em \mathbb{R}^n e.g. a integração de uma função vetorial sobre um retângulo em \mathbb{R}^3 . \diamond

Claramente, a integral de uma forma diferencial herda as propriedades da integração de funções em \mathbb{R}^n .

Uma maneira de ampliar a família de subconjuntos de \mathbb{R}^n sobre quais podem ser calculadas integrais de formas diferenciais é por meio do conceito de *cadeias*, originário da topologia algébrica.

Definição 1.17 (Cadeias). Seja $\{\sigma_i^k\}_{i \in \mathcal{I}}$ uma família de k -politopos orientados. Uma cadeia

$$c^k = \sum_{i \in \mathcal{I}} m_i \sigma_i^k$$

é uma combinação linear formal dos politopos orientados σ_i^k , com multiplicidades $m_i \in \mathbb{Z}$, para todo $i \in \mathcal{I}$. \diamond

A interpretação das multiplicidades da combinação linear de politopos orientados é: ao percorrer a cadeia c^k , o politopo σ_i é percorrido m_i vezes se $m_i > 0$, $|m_i|$ vezes com a orientação oposta se $m_i < 0$ e é reduzido a um ponto se $m_i = 0$.

Para obter o teorema de Stokes generalizado em \mathbb{R}^n , será necessária a noção da fronteira de uma cadeia:

Definição 1.18 (Fronteiras de Cadeias). Seja c^k uma cadeia. A fronteira ∂c^k de c^k é dada por um operador linear¹⁷ $\partial: c^k \mapsto \partial c^k$ que atua sobre c_k da seguinte maneira:

$$\partial c^k = \partial \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} m_i \sigma_i^k \right) = \sum_{i \in \mathcal{I}} m_i (\partial \sigma_i^k),$$

onde $\partial \sigma_i^k$ é a fronteira do politopo σ_i^k , que é facilmente definida a partir da definição de um politopo ou utilizando conceitos topológicos. Claramente, a fronteira de uma k -cadeia é uma $k - 1$ -cadeia. \diamond

Há uma extensão da definição 1.16 para a integração sobre uma k -cadeia:

Definição 1.19 (Integração sobre Cadeias). A integral de uma k -forma sobre uma k -cadeia é dada por:

$$\int_{c^k} \omega^k = \sum_{i \in \mathcal{I}} m_i \int_{\sigma_i^k} \omega^k. \quad \diamond$$

Tendo em vista essa definição, a obtenção do teorema de Stokes¹⁸ para a integração sobre cadeias depende apenas da sua prova para um politopo [22][6].

Teorema 1.1 (Stokes, para Cadeias em \mathbb{R}^n). *Seja ω^k uma k -forma e c^{k+1} uma $(k + 1)$ -cadeia. Então:*

$$\int_{\partial c^{k+1}} \omega^k = \int_{c^{k+1}} d\omega^k. \quad (1.3)$$

A demonstração do teorema encontra-se no apêndice B.

1.2 O Cálculo em Variedades

O Cálculo em Variedades visa formalizar a aplicação de técnicas do Cálculo Diferencial e Integral para funções definidas em espaços de dimensões superiores e *variedades diferenciáveis* (que, por sua vez, são generalizações dos conceitos de curvas e superfícies). As principais referências são [23], [7] e [6].

¹⁷ Note que $\partial(\partial c^k) = 0$, de maneira similar a $d(d\omega^k) = 0$. Assim como a derivada exterior induz o estudo da cohomologia de de Rham, o operador de fronteira induz o estudo da homologia de cadeias.

¹⁸ O resultado originalmente nomeado *teorema de Stokes* é o caso $k = 1$ em \mathbb{R}^3 . Obtido pela primeira vez por Lord Kelvin em 1850, foi atribuído à George Stokes devido a sua decisão de incluí-lo no exame para o *prêmio Smith* de 1854. A primeira versão obtida desse teorema foi o caso $k = 0$ em \mathbb{R} , por James Gregory, Isaac Barrow, Isaac Newton e Leibniz, na metade do século XVI e é nomeado o *teorema fundamental do Cálculo*. Outros casos são $k = 1$ em \mathbb{R}^2 , o *teorema de Green*, e $k = 2$ em \mathbb{R}^3 , o *teorema de Gauss-Ostrogadsky*.

1.2.1 Variedades Diferenciáveis

O conceito de uma *variedade diferenciável* surge do estudo e da tentativa de generalizar os conceitos de curvas e superfícies. As variedades diferenciáveis são os objetos de estudo centrais da Geometria Diferencial e manifestam-se na Teoria de Relatividade Geral e, como será apresentado no capítulos seguinte, na Teoria de Yang-Mills-Higgs.

Para definir uma variedade diferenciável, deve considerar-se os conceitos de um espaço topológico e de funções contínuas entre espaços topológicos.

Definição 1.20 (Espaços Topológicos). Seja M um conjunto e τ uma família de subconjuntos de X , cujos elementos são ditos *conjuntos abertos* (ou *vizinhanças*). A dupla (M, τ) é dita um *espaço topológico* se cumpre as seguintes condições:

1. M e \emptyset são abertos,
2. Se $U, V \subset M$ são abertos, $U \cap V$ é aberto,
3. Se $\forall \alpha \in \mathcal{A} : U_\alpha \subset M$ é aberto, onde \mathcal{A} é uma família qualquer de índices, então $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ é aberto.

Essas condições podem ser re-enunciadas:

1. $M, \emptyset \in \tau$,
2. $\forall U, V \subset M : U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$,
3. $\forall U_\alpha \subset M : \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \tau \implies \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$.

A família τ é dita uma *topologia* em M . Quando não há ambiguidades acerca de qual topologia é utilizada, ou quando sua escolha é arbitrária, refere-se a M como um espaço topológico. \diamond

Definição 1.21 (Funções Contínuas entre Espaços Topológicos). Sejam M e N espaços topológicos. Uma função $f: M \rightarrow N$ é dita *contínua* se todo conjunto aberto de N tem como imagem inversa um conjunto aberto de M . \diamond

É fácil ver que essa definição de continuidade concorda com a definição de continuidade para funções entre \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m (ou, mais geralmente, entre espaços métricos).

É possível definir variedades diferenciáveis como subconjuntos de \mathbb{R}^n , mas há uma definição que depende apenas das propriedades intrínsecas dessas variedades, que envolve os conceitos de *cartas* e *atlas*. Essa nomenclatura se origina da ideia de cartas de navegação, que representam partes da superfície terrestre em uma superfície planar, e de atlas, que consistem de coleções de cartas que cobrem a totalidade da superfície terrestre.

Definição 1.22 (Cartas). Seja M um espaço topológico, $U \subset M$ um subconjunto aberto e $\varphi_U: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com inversa contínua (um homeomorfismo). A dupla (U, φ_U) é dita uma *carta* para M . \diamond

Por simplicidade, por vezes, diz-se que φ_U é uma carta.

Definição 1.23 (Atlas). Seja M um espaço topológico, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma família de conjuntos abertos tal que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$ e $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma família de homeomorfismos. Então a família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é dita um *atlas* para M . \diamond

Essas definições são suficientes para descrever a topologia de uma variedade, mas assim como dois atlas terrestres com projeções diferentes podem descrever a superfície da Terra, dois atlas diferentes podem descrever a mesma variedade. Portanto, a definição de uma variedade deve resolver essa ambiguidade. Para isso, é necessário lidar com questões de regularidade.

Definição 1.24 (Cartas C^k -compatíveis e C^k -Atlas). Sejam

$$\begin{aligned} (U, \varphi_U: U \rightarrow \mathbb{R}^n), \\ (V, \varphi_V: V \rightarrow \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

cartas para M . (U, φ_U) e (V, φ_V) são ditas C^k -compatíveis se a *função de transição*

$$\varphi_V^{-1} \circ \varphi_U: \varphi_U(V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_V(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é um C^k -difeomorfismo, isto é, se é uma função C^k (uma função que possui derivadas de k -ésima ordem contínuas) e é uma bijeção. Um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tal que, para todo $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$, φ_β e φ_γ são C^k -compatíveis é dito um C^k -atlas. \diamond

É fácil ver que o caso $k = 0$ é equivalente à definição de cartas e atlas.

Ainda é necessário eliminar a ambiguidade entre atlas. Para tanto, introduz-se a noção de uma estrutura diferencial.

Definição 1.25 (Estrutura Diferencial). Sejam $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ C^k -atlas para M . Então $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ são ditos equivalentes, ou

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \sim \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\beta \in \mathcal{B}},$$

se a união $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \cup \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ é um C^k -atlas para M . As classes de equivalências de C^k -atlas para M são ditas C^k -estruturas diferenciais. \diamond

Com as definições acima é possível definir uma variedade diferenciável.

Definição 1.26 (Variedades Diferenciáveis). Seja M um espaço topológico e $\overline{\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}}$ uma C^k -estrutura diferencial. O par $(M, \overline{\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}})$ é dito uma C^k -variedade diferenciável. \diamond

Quando não há ambiguidades acerca da estrutura diferencial utilizada diz-se que M é uma C^k -variedade. A dimensão de $(M, \overline{\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}})$ é definida como a dimensão de um conjunto $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, imagem de uma carta em $\overline{\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}}$. Se a dimensão de M é n , diz-se que M é uma n -variedade. Um subconjunto N de M que também é uma variedade é dito uma *subvariedade*.

No caso em que M é uma C^0 -variedade, diz-se que M é uma *variedade topológica*. Diversos resultados válidos para variedades diferenciáveis não são válidos para variedades topológicas.^{19,20} Neste trabalho, serão consideradas apenas C^∞ -variedades.

1.2.2 Formas Diferenciais em Variedades

Com a noção de uma variedade diferenciável, é possível estender os conceitos do Cálculo em \mathbb{R}^n para variedades. Em contraste com o caso de \mathbb{R}^n , a introdução da noção de campos vetoriais é o primeiro passo nessa tarefa. Retomando a conexão de campos vetoriais com a derivada direcional, é possível defini-los a partir da noção de derivação, objetos que seguem a álgebra dos operadores diferenciais.

Definição 1.27 (Campos Vetoriais). Sejam M uma variedade diferencial $f, g \in C^\infty(M)$ (isto é, $\varphi^{-1} \circ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para toda carta φ de M) e $a, b \in \mathbb{R}$. Diz-se que $\mathbf{v}: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é um *campo vetorial* em M se é uma *derivação*, isto é, se possui as seguintes propriedades:

1. Linearidade: $\mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g)$;
2. Regra de Leibniz: $\mathbf{v}(fg) = \mathbf{v}(f)g + f\mathbf{v}(g)$. \diamond

Assim como no caso de \mathbb{R}^n , o conjunto de campos vetoriais em M , $\Gamma(TM)$ (denotado dessa maneira em analogia a $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$, o conjunto de campos vetoriais em \mathbb{R}^n), é um C^∞ -módulo.

O espaço tangente a um ponto de M é, então, definido da seguinte maneira:

Definição 1.28 (Espaço Tangente). Seja \mathbf{v} um campo vetorial em M e $f \in C^\infty(M)$. Um *vetor tangente* à M em um ponto $p \in M$, \mathbf{v}_p , é definido a partir de sua ação sobre funções, da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_p(f) := \mathbf{v}(f)(p),$$

¹⁹ O caso de 4-variedades topológicas é tópico de pesquisa atual, tendo aplicações em teorias físicas [24].

²⁰ Boa parte dos resultados acerca de variedades também dependem da validade do *axioma de separação de Hausdorff*, válido para a maioria dos casos não-patológicos.

onde $\mathbf{v}(f)(p)$ é a função $\mathbf{v}(f)$ avaliada no ponto p . O conjunto de vetores tangentes à M em p é dito o *espaço tangente* de M em p e é denotado T_pM . \diamond

As definições acima são bastante abstratas, mas podem ser conectadas com conceitos mais claros por meio de uma definição alternativa de um espaço tangente à M . Considere as curvas $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ sobre M . Seus vetores tangentes são dados pela ação sobre uma função f da seguinte maneira:

$$\gamma'(t)(f) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)).$$

Portanto, $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, e é possível visualizar melhor os vetores tangentes à M . Claramente, T_pM é um espaço vetorial e há o isomorfismo $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ se $\dim(M) = n$.

Como para os campos vetoriais, a definição de uma forma diferencial é dada por sua ação sobre os campos vetoriais.

Definição 1.29 (Formas Diferenciais). Sejam $f, g \in C^\infty(M)$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma(TM)$. Diz-se que $\omega: \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ é uma *forma diferencial* em M se é uma função C^∞ linear, isto é, cumpre a seguinte condição:

$$\omega(f\mathbf{u} + g\mathbf{v}) = f\omega(\mathbf{u}) + g\omega(\mathbf{v}). \quad \diamond$$

O conjunto de formas diferenciais em M é denotado por $\Gamma(T^*M)$ e é um C^∞ -módulo.

A definição de um espaço cotangente é completamente análoga à definição de espaços tangentes:

Definição 1.30 (Espaço Cotangente). Seja ω uma forma diferencial em M e $f \in C^\infty(M)$. Um *vetor cotangente* à M em um ponto $p \in M$, ω_p , é definido a partir de sua ação sobre campos vetoriais, da seguinte forma:

$$\omega_p(\mathbf{v}) := \omega(\mathbf{v})(p)$$

O conjunto de vetores cotangentes à M em p é dito o *espaço cotangente* de M em p e é denotado T_p^*M . \diamond

Novamente, T_p^*M é um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^n .

Para definir campos de k -vetores e k -formas diferenciais, basta utilizar a noção do produto exterior sobre um módulo, definida de maneira completamente análoga ao produto exterior sobre um espaço vetorial.

Definição 1.31 (Campos de k -Vetores). Seja $\{\mathbf{v}^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ uma família de campos vetoriais. Um campo de k -vetores \mathbf{v}^k é dado pelo produto exterior:

$$\mathbf{v}^k = \bigwedge_{k=1}^k \mathbf{v}_k. \quad \diamond$$

Definição 1.32 (*k*-Formas Diferenciais). Seja $\{\omega^k\}_{k \in \mathcal{K}}$ uma família de formas diferenciais. Uma *k*-forma diferencial ω^k é dada pelo produto exterior:

$$\omega^k = \bigwedge_{k=1}^k \omega_k. \quad \diamond$$

A definição da derivada exterior para formas diferenciais em uma variedade é totalmente análoga à definição 1.15. De fato, essa definição é o caso específico em que $M = \mathbb{R}^n$.

1.2.3 Mudança de Coordenadas

A escolha de uma carta φ para M introduz um sistema de coordenadas, da seguinte maneira: associada à função de coordenada $x^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ há uma função de coordenada

$$\varphi^* x^i = x^i \circ \varphi: M \rightarrow \mathbb{R}.$$

O processo de obter funções em M a partir de funções em \mathbb{R}^n pode ser estendido para campos vetoriais, por meio de

$$\varphi_*^{-1} \mathbf{v} (\varphi^* f) = \mathbf{v} ((\varphi^{-1})^* (\varphi^* f)) = \mathbf{v} (f),$$

para toda função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Para formas diferenciais, basta tomar

$$\varphi^* \omega (\varphi_*^{-1} \mathbf{v}) = \omega (\varphi_* (\varphi_*^{-1} \mathbf{v})) = \omega (\mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{v} \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$.

Esses processos motivam a definição de duas famílias de mapas que permitam realizar a correspondência entre duas variedades M e N .

Definição 1.33 (Pullback de Funções). Sejam M e N variedades e $\varphi: M \rightarrow N$. O mapa linear

$$\varphi^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$$

é dito o *pullback* de f por φ se, para todo $f \in C^\infty(N)$.:

$$\varphi^* f = f \circ \varphi. \quad \diamond$$

Definição 1.34 (Pushforward). Sejam M e N variedades e $\varphi: M \rightarrow N$ um difeomorfismo. A família de mapas lineares indexada por k

$$\varphi_*: \Gamma(\bigwedge^k TM) \rightarrow \Gamma(\bigwedge^k TN)$$

é dita o *pushforward* de \mathbf{v}^k por φ se, para todo $\mathbf{v}^k \in \Gamma(\bigwedge^k TM)$ e para toda $f \in C^\infty(N)$:

$$\varphi_* \mathbf{v}^k (f) = \mathbf{v}^k (\varphi^* f),$$

e para todos $\mathbf{u}^\ell \in \Gamma(\bigwedge^\ell TM)$ e $\mathbf{v}^k \in \Gamma(\bigwedge^k TM)$:

$$\varphi_* (\mathbf{u}^\ell \wedge \mathbf{v}^k) = \varphi_* \mathbf{u}^\ell \wedge \varphi_* \mathbf{v}^k. \quad \diamond$$

Definição 1.35 (Pullback). Sejam M e N variedades e $\varphi: M \rightarrow N$ um difeomorfismo. A família de mapas lineares indexada por k

$$\varphi^*: \Gamma\left(\bigwedge^k T^*N\right) \rightarrow \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$$

é dita o *pullback* de ω^k por φ se, para toda $\omega^k \in \Gamma\left(\bigwedge^k T^*N\right)$ e para todo $v^k \in \Gamma\left(\bigwedge^k TM\right)$:

$$\varphi^* \omega^k (v^k) = \omega^k (\varphi_* v^k),$$

e para toda $\xi^\ell \in \Gamma\left(\bigwedge^\ell T^*M\right)$ e $\omega^k \in \Gamma\left(\bigwedge^k T^*N\right)$

$$\varphi^* (\xi^\ell \wedge \omega^k) = \varphi^* \xi^\ell \wedge \varphi^* \omega^k. \quad \diamond$$

Claramente, o caso em que $k = 0$ para a definição 1.35 é equivalente à definição 1.33. A identidade $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \psi^*$ também vale, pois, para todo $f \in C^\infty(M)$, $(\psi \circ \varphi)^* f = f \circ \psi \circ \varphi = \psi^* f \circ \varphi = \varphi^* \psi^* f$.

Note que enquanto o *pushforward* atua de maneira *covariante*, obtendo um mapa de $\Gamma\left(\bigwedge^k TM\right)$ em $\Gamma\left(\bigwedge^k TN\right)$ a partir de um mapa de M em N , o *pullback* atua de maneira *contravariante*, obtendo um mapa de $\Gamma\left(\bigwedge^k T^*N\right)$ em $\Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$ a partir de um mapa de M em N . Por essa razão, diz-se que campos vetoriais são covariantes, enquanto suas componentes são contravariantes e formas diferenciais são contravariantes, enquanto suas componentes são covariantes.

A derivada exterior é compatível com o o *pullback*, i.e., o *pullback* da derivada exterior de uma forma diferencial em M corresponde à derivada exterior do *pullback* da forma em N , ou

$$\varphi^* (d\omega^k) = d(\varphi^* \omega^k).$$

Para verificar essa identidade, é necessário lidar com coordenadas locais, que podem ser obtidas a partir de cartas em M e N , como explicitado no início da subseção. Como há atlas para essas variedades e as cartas são compatíveis, a prova de que a igualdade vale em toda a variedade depende apenas da prova para qualquer carta. Primeiramente, é provado o caso em que $k = 0$:

$$\varphi^* (d\omega^0) (v) = d\omega^0 (\varphi_* v) = \varphi_* v (\omega^0) = v (\varphi^* \omega^0) = d(\varphi^* \omega^0) v.$$

Essa identidade revela o comportamento contravariante do diferencial de uma função e justifica a definição da derivada exterior para formas diferenciais e não para campos

vetoriais. Para uma k -forma qualquer tem-se:

$$\begin{aligned}
\varphi^*(d\omega^k) &= \varphi^*d\left(\sum_{I \in \mathcal{I}^k} \omega_I^k dx^I\right) = \varphi^*\left(\sum_{I \in \mathcal{I}^k} d\omega_I^k \wedge dx^I\right) = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} \varphi^*(d\omega_I^k \wedge dx^I) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}^k} \varphi^*d\omega_I^k \wedge \varphi^*dx^I = \sum_{I \in \mathcal{I}^k} d\varphi^*\omega_I^k \wedge d\varphi^*x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^*x^{i_k} \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}^k} d(\varphi^*\omega_I^k \wedge d\varphi^*x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^*x^{i_k}) \\
&= d\left(\sum_{I \in \mathcal{I}^k} \varphi^*\omega_I^k \wedge \varphi^*dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^*dx^{i_k}\right) = d\left[\sum_{I \in \mathcal{I}^k} \varphi^*(\omega_I^k \wedge dx^I)\right] \\
&= d\left[\varphi^*\left(\sum_{I \in \mathcal{I}^k} \omega_I^k \wedge dx^I\right)\right] \\
&= d(\varphi^*\omega^k).
\end{aligned}$$

Sendo possível estabelecer uma correspondência entre duas variedades, pode considerar-se o efeito de transformações de coordenadas sobre os objetos definidos anteriormente. Para essa tarefa, é necessário diferenciar transformações *passivas* de transformações *ativas*. A ação de uma função de M em N , quando inversível²¹, pode ser interpretada tanto como uma transformação ativa de M em N , i.e., como um mapa associando um ponto de M em um ponto de outra variedade N , quanto como uma transformação passiva, i.e., como uma mudança da descrição das coordenadas de M .

Exemplo 1.9. A transformação de $S^2 \times \mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ dada por

$$\begin{aligned}
x &= r \cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta), \\
y &= r \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta), \\
z &= r \cos(\theta),
\end{aligned}$$

pode ser interpretada como a função que mapeia um ponto de coordenadas (r, ϕ, θ) em $S^2 \times \mathbb{R}_+^*$ no ponto de coordenadas (x, y, z) em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ou como uma mudança de coordenadas para $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ (utilizando sua inversa), em que os pontos de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ são mantidos fixos e somente a descrição de suas coordenadas é alterada. \triangle

As definições de campos vetoriais, formas diferenciais e das operações atuando sobre esses objetos não presumiram um sistema de coordenadas e, portanto, esses objetos são ditos *independentes de coordenadas*, pois com as correspondências dadas pelo *pullback* e pelo *pushforward*, os resultados da aplicação de campos vetoriais a funções e formas diferenciais a campos vetoriais são invariantes, assim como a derivada exterior é compatível com o

²¹ Note que se uma função entre duas variedades é contínua e inversível, as duas variedades são topologicamente equivalentes. Como neste trabalho todas as funções são consideradas contínuas ou suaves, essa condição é cumprida.

pullback. Entretanto, é importante obter expressões que descrevam como a representação desses objetos se modifica quando é feita uma transformação de coordenadas.

Sejam $\{x^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ coordenadas em M e $\{x'^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ coordenadas em N . Para comparar os dois sistemas de coordenadas é necessário utilizar o *pullback*. Portanto, para uma função $\varphi: M \rightarrow N$, compara-se $\{x^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ com $\{\varphi^* x'^i\}_{i \in \mathcal{I}}$.

Para comparar campos vetoriais, utiliza-se $\{\varphi_* \partial_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ e $\{\partial'_j\}_{j \in \mathcal{J}}$:

$$\varphi_* \partial_j (x'^i) = \partial_j (\varphi^* x'^i) = \sum_{\ell=1}^n \partial_j (\varphi^* x'^\ell) \delta_\ell^i = \sum_{\ell=1}^n \partial_j (\varphi^* x'^\ell) \partial'_\ell (x'^i),$$

e portanto

$$\varphi_* \partial_j = \sum_{\ell=1}^n \partial_j (\varphi^* x'^\ell) \partial'_\ell.$$

É possível, então, definir uma matriz (ou, mais precisamente, um campo matricial) de transformação de coordenadas $D = D_j^\ell \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_\ell$, onde $\{\mathbf{e}^j\}_{j \in \mathcal{J}}$ é uma base para os campos de covetores e $\{\mathbf{e}_\ell\}_{\ell \in \mathcal{L}}$ é uma base para os campos de vetores, por $D_j^\ell = \partial_j (\varphi^* x'^\ell)$. Assim,

$$\varphi_* \partial_j = \sum_{\ell=1}^n D_j^\ell \partial'_\ell.$$

No caso em que $N = M$ e $\varphi = \text{id}_M$ é a identidade em M , $D_j^\ell = \partial_j x'^\ell$.

Para formas diferenciais, tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi^* dx'^j (\partial_i) &= dx'^j (\varphi_* \partial_i) = \sum_{\ell=1}^n dx'^j (\varphi_* \partial_\ell) \delta_i^\ell = \sum_{\ell=1}^n \varphi_* \partial_\ell (x'^j) \delta_i^\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell (\varphi^* x'^j) \delta_i^\ell = \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell (\varphi^* x'^j) dx^\ell (\partial_i), \end{aligned}$$

e então:

$$\varphi^* dx'^j = \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell (\varphi^* x'^j) dx^\ell = \sum_{\ell=1}^n D_\ell^j dx^\ell.$$

Claramente, D_k^j são os componentes da matriz inversa D^{-1} de D .

Para campos de k -vetores:

$$\varphi_* \partial_J = \partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_k} = \left(\sum_{\ell_1=1}^n D_{j_1}^{\ell_1} \partial_{\ell_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{\ell_k=1}^n D_{j_k}^{\ell_k} \partial_{\ell_k} \right) = \sum_{L \in \mathcal{L}^k} \wedge^k D_J^L \partial'_L,$$

e k -formas:

$$\varphi^* dx'^J = \sum_{L \in \mathcal{L}^k} \wedge^k D_L^J dx^L.$$

Um caso importante é a transformação de uma forma de volume vol , definida como uma n -forma em um subconjunto de M tal que vol não é nula em nenhum ponto desse

subconjunto. É fácil mostrar que, dada uma forma de volume vol , qualquer outra forma de volume vol' pode ser escrita como $\text{vol}' = f\text{vol}$ para uma função f que não é nula em nenhum ponto de M . Uma forma de volume canônica pode ser obtida a partir da forma de volume padrão em \mathbb{R}^n dada por $\text{vol}_n = \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$. Então, a forma de volume vol' correspondente a um sistema de coordenadas $\{x^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ pode ser comparada com a forma de volume vol correspondente a $\{x^i\}_{i \in \mathcal{I}}$ da seguinte maneira:

$$\varphi^* \text{vol}' = \bigwedge^k D = \det(D) \text{vol},$$

mas esse resultado²² corresponde ao resultado da transformação de coordenadas para integrais:

$$\int_V dV' = \int_V \det(D) dV.$$

1.2.4 O Teorema de Stokes em Variedades

O resultado obtido para formas de volume indica que o teorema de Stokes em variedades deve tomar a mesma forma daquele deduzido na subseção 1.1.4. Entretanto, é necessário adicionar uma hipótese para o teorema, a de orientabilidade.

Uma variedade é dita *orientável* se possui uma forma de volume definida globalmente em M . Uma *orientação* para M é uma classe de equivalência de formas de volume de maneira que vol e vol' são equivalente se $\text{vol}' = f\text{vol}$ para uma função f estritamente positiva. Essa classe de equivalência contém formas de volume ditas *positivamente orientadas* ou *de mão direita*. As formas de volumes não contidas nessa classe de equivalência são ditas *negativamente orientadas* ou *de mão esquerda*. Em geral, para um atlas que contém a carta φ de M , toma-se como orientação a classe de equivalência gerada por $\varphi^* \text{vol}_n$. O exemplo mais conhecido de uma variedade não orientável é a *fita de Möbius*.

Para obter o teorema de Stokes, basta definir a integração sobre variedades, visto que toda variedade orientável é difeomorfa a um politopo.

Definição 1.36 (Integração em Variedades). Seja M , $\dim(M) = p$, uma variedade orientável e difeomorfa, via φ , a um k -politopo σ^k em \mathbb{R}^n e ω^k uma k -forma em M . Então:

$$\int_M \omega^k := \int_{\varphi(M)} \varphi^* \omega^k = \int_{\sigma^k} \varphi^* \omega^k. \quad \diamond$$

Em vista dos resultados apresentados anteriormente acerca do *pullback* de formas e da compatibilidade do *pullback* com a derivada exterior, o teorema de Stokes para variedades é um corolário do teorema 1.1. O único detalhe ainda não definido é o de uma carta que inclua a fronteira ∂M de M . A definição para uma n -variedade M é uma substituição da imagem de uma carta: uma carta φ para a fronteira de M é tal que sua

²² No contexto da Geometria Riemanniana, escreve-se $\varphi^* \text{vol}' = \sqrt{|\det(g)|} \text{vol}$, onde g é a matriz de métrica. De fato, $g = D^T D$.

imagem intersecta a fronteira $\partial(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$ de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, dada pelo hiperplano $x^n = 0$. Os pontos nessa intersecção definem parte da fronteira de M .

Teorema 1.2 (Stokes). *Seja c^{k+1} uma $k + 1$ -cadeia de variedades orientáveis e ω^k uma k -forma. Então:*

$$\int_{\partial c^{k+1}} \omega^k = \int_{c^{k+1}} d\omega^k. \quad (1.4)$$

A definição de um cadeia de variedades é completamente análoga à definição de uma cadeia de politopos.

1.3 Fibrados

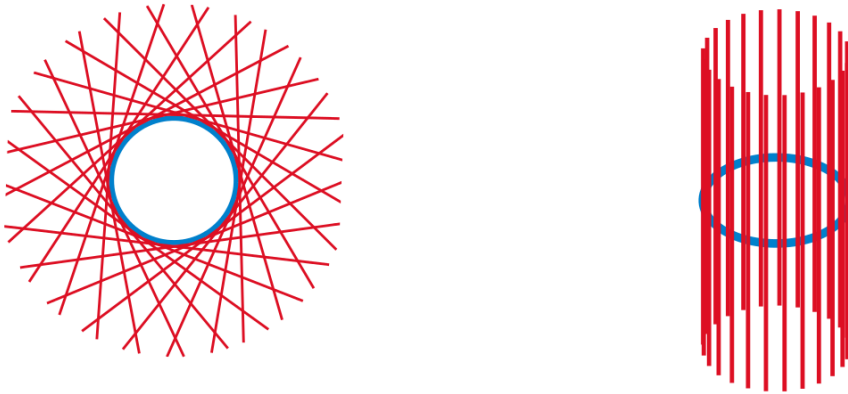
A medida da variação de um campo vetorial ou de uma forma diferencial em uma variedade diferencial M não é trivial, pois os espaços tangentes $T_p M$ e cotangentes $T_p^* M$ a um ponto p de M não correspondem canonicamente aos espaços $T_q M$ e $T_q^* M$ em outro ponto q de M . Assim, operações entre vetores pertencentes a dois espaços diferentes não são bem definidas *a priori* e não há maneira canônica de comparar campos vetoriais e formas diferenciais em diferentes pontos. Uma tentativa de solucionar esse problema leva à definição de fibrados. As principais referências para essa seção são [23], [25], [26], [27] e [28].

1.3.1 Fibrados Gerais

Um fibrado é um objeto definido de maneira a generalizar o produto cartesiano $U \times V$ de dois conjuntos U e V . A utilidade dessa definição é que, enquanto o conjunto de espaços tangentes a \mathbb{R}^n pode ser tomado como $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, pois todos espaços tangentes são similares, o conjunto de espaços tangentes a uma variedades M podem apresentar estruturas extras.

Exemplo 1.10 (O Fibrado Tangente do Círculo). Seja S^1 o círculo, visto como uma variedade diferenciável. É possível obter S^1 a partir de sua imersão em \mathbb{R}^2 com um sistema de coordenadas cartesiano, com local geométrico dado por $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. O espaço tangente à um ponto p é isomorfo a \mathbb{R} (podendo ser obtido a partir da reta tangente ao ponto associado a p pela imersão, caracterizando a união dos espaços tangentes como um subconjunto de $S^1 \times \mathbb{R}^2$) e é possível organizar esses espaços de maneira canônica, considerando o cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$ e definindo o fibrado tangente $T_p S^1 = \{p\} \times \mathbb{R} \subset S^1 \times \mathbb{R}$. \triangle

Exemplo 1.11 (Fita de Möbius). Uma construção similar ao cilindro é a fita de Möbius infinita \mathfrak{M} , obtida a partir do retângulo semi-infinito $[0, 1] \times \mathbb{R}$, identificando o ponto $(0, y)$ com $(1, 1 - y)$. Considerando $S^1 \subset \mathfrak{M}$, obtido a partir dos pontos $(x, 0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ com a



- (a) Os espaços tangentes do círculo S^1 imersos em \mathbb{R}^2 . (b) Os espaços tangentes do círculo S^1 organizados como o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

Figura 2 – Duas possíveis disposições dos espaços tangentes do círculo S^1 .

identificação $(0, 0) \sim (1, 0)$, é possível ver \mathfrak{M} como a união dos espaços tangentes de S^1 , com a estrutura extra da identificação mencionada anteriormente.



- (a) O cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, um fibrado trivial. (b) A fita de Möbius \mathfrak{M} , um fibrado não-trivial.

Figura 3 – Comparação entre um fibrado trivial e um não-trivial.

Enquanto $S^1 \times \mathbb{R}$ é claramente um produto cartesiano de uma variedade por um espaço vetorial, \mathfrak{M} é apenas uma variedade (não orientável), diferindo do cilindro apenas por uma torção.²³ Entretanto, localmente, \mathfrak{M} pode ser visto como um produto cartesiano de uma variedade por um espaço vetorial. A não trivialidade de \mathfrak{M} , uma característica global, serve como motivação para a definição de um fibrado vetorial. \triangle

Uma definição ligeiramente mais geral que a delineada no exemplo 1.11 é a de um *fibrado*:

Definição 1.37 (Fibrados). Sejam E e M variedades e $\pi: E \rightarrow M$ uma função contínua e sobrejetiva. A tripla (E, M, π) é dita um *fibrado* sobre M . A variedade E é dita o *espaço total*, M é dita o *espaço base* e π é dita a *projeção*. O subconjunto $E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\}$ de E é dito a *fibra sobre p*. \diamond

²³ Essa torção, devida à identificação mencionada, induz em \mathfrak{M} uma ação do grupo \mathbb{Z}_2 .

Em geral, diz-se que $\pi: E \rightarrow M$ é o fibrado, ou ainda, se não há ambiguidades, que E é o fibrado. Visto que E é a união das suas fibras²⁴, ou

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p,$$

a interpretação de E como uma generalização de espaços obtidos através de produtos cartesianos é esclarecida: $M \times F$ com $\pi(p, f) = p$ é um fibrado, em que F é uma variedade e é dita a *fibra padrão* sobre M , i.e., a projeção de $M \times F$ sobre qualquer ponto de M é F . Um fibrado dessa forma é dito um *fibrado trivial*. Entretanto, assim como o caso da fita de Möbius \mathfrak{M} no exemplo 1.11, um fibrado E pode apresentar estruturas globais extras e, assim como para \mathfrak{M} , é desejável que E seja localmente trivial. A formalização dessa condição necessita o estabelecimento de um *morfismo*²⁵ de fibrados.

Definição 1.38 (Morfismos entre Fibrados). Sejam $\pi: E \rightarrow M$ e $\pi': M' \rightarrow E'$ fibrados. Um *morfismo* entre esses fibrados é uma dupla (φ, ψ) , com $\varphi: M \rightarrow M'$ e $\psi: E \rightarrow E'$, tal que $\psi(E_p) = E'_{\varphi(p)}$. Se φ e ψ são difeomorfismos, diz-se que esse morfismo é um *isomorfismo*. \diamond

Em geral, diz-se que ψ é o morfismo entre fibrados, pois (φ, ψ) é um morfismo se e somente se $\varphi \circ \pi = \pi' \circ \psi$ e, portanto, o morfismo é totalmente determinado por ψ . Outro conceito necessário para uma definição precisa de trivialidade local é o de uma *restrição de um fibrado*. A restrição $E|_N$ do espaço total E a uma subvariedade N de M é definida por

$$E|_N = \{q \in E : \pi(q) \in N\}.$$

Assim, N é o espaço base de $E|_N$ e $\pi|_N$, a projeção π restrita ao conjunto N , é a projeção do fibrado. Essa restrição é um isomorfismo de fibrados.

Um fibrado é dito *localmente trivial* com *fibra padrão* F se, para cada ponto p de M , existe uma vizinhança U e um isomorfismo de fibrados

$$\psi_U: E|_U \rightarrow U \times F,$$

que mapeia cada fibra de E na fibra correspondente do fibrado trivial $U \times F$, i.e.,

$$\psi_U(E_p) = \{p\} \times F.$$

O morfismo ψ_U é dito uma *trivialização local*. Claramente, duas trivializações locais ψ_U e ψ_V devem ser compatíveis²⁶, i.e., a função de transição $\psi_V^{-1} \circ \psi_U: U \times F \rightarrow V \times F$ é

²⁴ Esse fato é a origem da terminologia em inglês de *bundles* e *fiber bundles*, podendo ser traduzida como *feixe* e *feixe de fibras*.

²⁵ A noção de morfismos entre estruturas algébricas e topológicas, como representações de grupos, funções lineares e morfismos de fibrados, leva ao estabelecimento da *teoria de categorias*[29].

²⁶ Assim como no caso para variedades, as trivializações locais em conjunto com uma cobertura para a variedade determinam um fibrado de coordenadas. Um fibrado deve ser considerado como uma classe de equivalência para fibrados de coordenadas [25], em analogia às estruturas diferenciáveis de uma variedade.

um difeomorfismo. Um resultado importante acerca de fibrados localmente triviais é o lema de Ehresmann, que afirma que se a projeção $\pi: E \rightarrow M$ é uma submersão, i.e., seu diferencial é sobrejetivo, se é uma função própria, i.e., a imagem inversa de todo conjunto compacto é um conjunto compacto²⁷, e se é uma função suave, então o fibrado $\pi: E \rightarrow M$ é localmente trivial.

Para compreender o comportamento de campos vetoriais e de formas diferenciais em uma variedade, faz-se necessário o conceito de seção. Uma seção generaliza a ideia de um gráfico: o gráfico²⁸ de uma função $f: A \rightarrow B$ entre dois conjuntos é um conjunto $f(A) \subset A \times B$ que reflita a univocidade de f , i.e.,

$$\forall x \in A : \exists! (x, y) \in f(A).$$

A característica principal de uma seção de um fibrado é que essa reflete as propriedades globais do fibrado.

Definição 1.39 (Seções). Seja $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado. Uma função contínua $\mathbf{s}: M \rightarrow E$ é dita uma *seção* de $\pi: E \rightarrow M$ se, para cada $p \in M$, $\mathbf{s}(p) \in E_p$. Equivalentemente, \mathbf{s} é uma seção de $\pi: E \rightarrow M$ se $\pi \circ \mathbf{s} = \text{id}_M$. \diamond

O conjunto de seções de um fibrado E , quando não há ambiguidades, é denotado $\Gamma(E)$. É possível estender essa definição para *seções locais*, em que $\mathbf{s}: E|_U \subset E \rightarrow U \subset M$ é uma função definida apenas para um subconjunto U de M e suas fibras. No caso da definição 1.39, \mathbf{s} é também dita uma *seção global*. As seções globais contém informação sobre a trivialidade de um fibrado, dependendo das estruturas extras impostas nesse.

1.3.2 Fibrados Vetoriais

O primeiro exemplo de estrutura para um fibrado é o de um fibrado vetorial, em que as fibras são espaços vetoriais.

Definição 1.40 (Fibrados Vetoriais). Seja $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado. Se toda fibra E_p é um espaço vetorial n -dimensional V e se há trivializações locais

$$\psi_U: E|_U \rightarrow U \times V$$

para cada ponto de M tais que cada ψ_U mapeia a fibra E_p em V linearmente, i.e., se $\psi_U|_{E_p}: E_p \rightarrow V$ é um mapa linear. Equivalentemente, se ψ_U e ψ_V são trivializações, $\psi_V^{-1} \circ \psi_U \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, onde $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ é o grupo linear geral de \mathbb{R}^n , composto das funções inversíveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n . \diamond

²⁷ Em um espaço euclidiano, um conjunto compacto é um conjunto fechado e limitado. Em um espaço topológico que segue o axioma de separação de Hausdorff, a definição é mais complexa e envolve a ideia de coberturas [30].

²⁸ No contexto da Teoria de Conjuntos, essa descrição é a definição de uma função [30].

As seções de um fibrado vetorial E formam um C^∞ -módulo por meio de $(f\mathbf{s}) + (g\mathbf{r})(p) = f(p)\mathbf{s}(p) + g(p)\mathbf{r}(p)$ para todas $\mathbf{s}, \mathbf{r} \in \Gamma(E)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Fibrados vetoriais são estruturas ricas que permitem compreender o comportamento de diversos objetos encontrados anteriormente.

Exemplo 1.12 (Fibrados Tangentes e Cotangentes). Seja M uma n -variedade e

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Diz-se que TM - com projeção definida naturalmente via, para toda trivialização ψ , $\pi[\psi^{-1}(p, \mathbf{v})] = p$ - é o fibrado tangente de M e que os espaços tangentes $T_p M \cong \mathbb{R}^n$, para cada $p \in M$, são suas fibras. Claramente, TM é um fibrado vetorial, devido à estrutura de variedade de M e à estrutura de espaço vetorial de cada $T_p M$. Suas seções são os campos vetoriais em M e, portanto, a notação $\Gamma(TM)$ para o conjunto de campos vetoriais é justificada.

Da mesma maneira,

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M,$$

equipado com uma projeção natural, é o fibrado cotangente de M , os espaços cotangentes $T_p^* M$ são suas fibras e suas seções são as formas diferenciais, justificando a notação $\Gamma(T^*M)$ para o conjunto de formas diferenciais. Claramente, $T^*M = (TM)^*$, devido à ação das formas diferenciais sobre os campos vetoriais. Um fibrado vetorial construído a partir do espaço dual à outro fibrado vetorial E é dito um *fibrado dual*, e é denotado por E^* .

Os fibrados k -tangentes $\bigwedge^k(TM) = \bigwedge^k TM$ e k -cotangentes $\bigwedge^k(T^*M) = \bigwedge^k T^*M$ são definidos de maneira análoga e seus conjuntos de seções, $\Gamma(\bigwedge^k TM)$ e $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$, respectivamente, consistem dos campos k -vetoriais e das k -formas diferenciais. \triangle

Exemplo 1.13 (Fibrado Tangente de S^2). Considere a esfera S^2 . Seu fibrado tangente pode ser obtido utilizando a imersão de S^2 em \mathbb{R}^3 , dada pelo local geométrico dos pontos $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Para um ponto p de S^2 , o plano tangente a S^2 em p é isomórfico a \mathbb{R}^2 . Portanto, TS^2 é um subconjunto de $S^2 \times \mathbb{R}^3$, mas não é possível identificar TS^2 com o produto cartesiano $S^2 \times \mathbb{R}^2$, em contraste com o caso de TS^1 , devido ao teorema da esfera cabeluda, um teorema topológico que enuncia a não existência de campos vetoriais nunca nulos nas esferas S^{2n} . De fato, só é possível determinar campos vetoriais nunca nulos em S^0 , S^1 , S^3 e S^7 . A relação entre a trivialidade de um fibrado vetorial e a possibilidade de determinar seções nunca nulas é explicitada no resultado abaixo. \triangle

Se E é um fibrado e toda seção $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$ pode ser escrita como

$$\mathbf{s} = \sum_{i \in \mathcal{I}} s^i \mathbf{e}_i,$$

com $\{s^i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset C^\infty(M)$ e $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \Gamma(E)$, diz-se que $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma base de seções. Se E possui uma base de seções, a função $\psi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$\psi^{-1}(p, \mathbf{s}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} s^i e_i(p) = \mathbf{s}(p),$$

onde s^i são as componentes do vetor \mathbf{s} , é um isomorfismo de fibrados. Portanto, se um fibrado possui uma base de seções, esse fibrado é trivial. Claramente, se E é trivial, a trivialização ψ de E é da forma dada anteriormente e induz uma base de seções. A condição de trivialidade local imposta em um fibrado vetorial permite obter bases locais para computações.

Exemplo 1.14 (O *Pullback* e o *Pushforward* como Morfismos de Fibrados). Dada uma função $\varphi: M \rightarrow N$ os mapas φ^* e φ_* definidos anteriormente induzem os morfismos de fibrados $\varphi^*: \bigwedge^k T^*M \rightarrow \bigwedge^k T^*N$ e $\varphi_*: \bigwedge^k TM \rightarrow \bigwedge^k TN$ via a aplicação das formas diferenciais ou dos campos vetoriais sobre os quais os mapas atuam em pontos p de M , gerando os mapas $\varphi^*: \bigwedge^k T_p^*M \rightarrow \bigwedge^k T_{\varphi(p)}^*N$ e $\varphi_*: \bigwedge^k T_pM \rightarrow \bigwedge^k T_{\varphi(p)}N$. \triangle

Assim como é possível obter fibrados vetoriais novos a partir da dualidade e do produto exterior, é também possível obter fibrados a partir de somas diretas e produtos tensoriais. O fibrado de formas diferenciais em M , é definido a partir de:

$$\bigwedge T^*M := \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k T^*M,$$

enquanto o fibrado de campos de multivetores é definido a partir de:

$$\bigwedge TM := \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k TM.$$

A estrutura de produto tensorial permite definir os fibrados de campos de (k, ℓ) -tensores:

$$\bigotimes^{\ell} T^*M \otimes \bigotimes^k TM = \left(\bigotimes_{i=1}^{\ell} T^*M \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^k TM \right).$$

Essas estruturas esclarecem o significado da terminologia de *escalares*, *vetores*, *tensores*, *pseudovetores* e *pseudoescalares*, utilizada em diversos textos e que por vezes acarreta em confusões. Uma terminologia menos ambígua é a de *campo escalar*, que corresponde a uma seção do fibrado $\bigwedge^0 T^*\mathbb{R}^3 \cong \bigwedge^0 T\mathbb{R}^3 \cong \bigotimes^0 T^*\mathbb{R}^3 \cong \bigotimes^0 T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, de *campo vetorial*, que corresponde a uma seção do fibrado tangente $T\mathbb{R}^3$, de *campos tensoriais*, que corresponde a seções dos fibrados $\bigotimes^{\ell} T^*\mathbb{R}^3 \otimes \bigotimes^k T\mathbb{R}^3$, de *campo de pseudovetores*, que corresponde a uma seção do fibrado $\bigwedge^2 T\mathbb{R}^3$ e de *campo pseudoescalar*, que corresponde a uma seção do fibrado $\bigwedge^3 T\mathbb{R}^3$. Essa terminologia provém da análise da ação do grupo ortogonal $O(3)$ sobre esses fibrados e pode ser generalizada para a ação de $O(n)$ sobre um fibrado vetorial qualquer.

2 A Teoria Clássica de Yang-Mills-Higgs

Teorias de Yang-Mills-Higgs são exemplos de teorias de *gauge* (ou de *calibre*), teorias físicas que apresentam um elevado grau de simetria: além de simetrias globais, uma teoria de *gauge* apresenta simetrias locais. A localidade das simetrias é uma restrição mais forte que a de simetrias globais, e é a característica que define as teorias de Yang-Mills-Higgs, dentre as quais encontram-se teorias de extremo sucesso, como o eletromagnetismo, clássico e quantizado, e o modelo de Glashow-Weinberg-Salam [31] para a interação eletrofraca, uma teoria quântica. Nesse trabalho, considera-se apenas teorias de *gauge* não-quantizadas.

2.1 Simetrias de *Gauge*

A principal característica de uma teoria de *gauge* é a invariância frente a transformações locais, i.e., o sistema descrito se mantém invariante frente a transformações que afetam o sistema de maneiras diferentes para cada ponto do espaço-tempo, em contraste com teorias que apresentam apenas simetrias globais, i.e., o sistema descrito se mantém invariante frente a transformações que afetam o sistema integralmente [32]. Uma transformação local \mathbf{g} atuando sobre o espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, atuando sobre as variáveis dinâmicas da teoria, é dita uma *transformação de gauge* quando há um grupo (G, \cdot) tal que $\mathbf{g}: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow G$, i.e., para cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,3}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é um elemento do grupo (G, \cdot) . O estudo de transformações desse tipo sobre variedades mais gerais exige a definição de um tipo de fibrado que reflita a estrutura dessas transformações, o *fibrado principal*. As principais referências para essa seção são [23], [25], [26] e [27]

2.1.1 Transformações de *Gauge* para o Eletromagnetismo

A noção de uma transformação de *gauge* tem suas origens na teoria eletromagnética. Como mencionado no exemplo 1.7, é possível definir o potencial elétrico ϕ e o vetor potencial magnético \mathbf{a} , de maneira que o campo elétrico \mathbf{E} seja determinado por $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{a}$ e o campo magnético \mathbf{B} por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{a}$. Essas definições levam a uma liberdade na escolha dos potenciais ϕ e \mathbf{a} , pois, dada uma função $\Lambda: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, as transformações $\phi' = \phi - \partial_t\Lambda$ e $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla\Lambda$ levam a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla\phi' - \partial_t\mathbf{a}' = -\nabla(\phi - \partial_t\Lambda) - \partial_t(\mathbf{a} + \nabla\Lambda) \\ &= -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{a} + \partial_t\nabla\Lambda - \nabla\partial_t\Lambda = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{a} \\ &= \mathbf{E} \end{aligned}$$

para o campo elétrico e, para o campo magnético,

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{a}' = \nabla \times (\mathbf{a} + \nabla\Lambda) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\nabla\Lambda) = \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{B}.$$

Equivalentemente, no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ e utilizando formas diferenciais, define-se o 4-potencial \mathbf{A} a partir da seguinte condição acerca do campo eletromagnético: $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$. Dada uma função $\Lambda: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}$, a liberdade para o 4-potencial parte da transformação $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + d\Lambda$, com

$$\mathbf{F}' = d\mathbf{A}' = d(\mathbf{A} + d\Lambda) = d\mathbf{A} + d^2\Lambda = d\mathbf{A} = \mathbf{F}$$

Portanto, as variáveis dinâmicas da teoria são invariantes frente a transformações desse tipo.

A liberdade na determinação dos potenciais pode ser eliminada de maneira conveniente, como é o caso do *gauge* de Coulomb, determinado por $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, útil para a resolução de problemas eletrostáticos, e do *gauge* de Lorenz, determinado por $\delta\mathbf{A} = 0$, onde

$$\delta: \Gamma(\wedge^{k+1}T^*M) \rightarrow \Gamma(\wedge^kT^*M)$$

é o *codiferencial*, o operador adjunto da derivada exterior, i.e, a família de mapas tal que, para toda k -forma ω e $(k+1)$ -forma ξ ,

$$\langle \omega, \delta\xi \rangle = \langle d\omega, \xi \rangle.$$

Uma expressão útil para o codiferencial é $\delta = (-1)^k \star^{-1} d \star = (-1)^{k(n-k+1)} \star d \star$. O calibre de Lorenz permite obter a equação de onda para o 4-potencial:

$$\Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J},$$

onde $\Delta := d\delta + \delta d$ é o *operador de Laplace-de Rham*. Esse resultado provém da equação (1.2b), que equivale a

$$d\star d\mathbf{A} = \mu_0\star\mathbf{J} \iff \delta d\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J},$$

que combinada com a condição do *gauge* de Lorenz dá a equação de onda:

$$\Delta\mathbf{A} = d\delta\mathbf{A} + \delta d\mathbf{A} = \delta d\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}.$$

Essa equação corresponde à equação de onda

$$\square\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}$$

para campos vetoriais, pois no espaço de Minkowski $(\Delta\mathbf{A})^\sharp = \square\mathbf{A}$.

Em uma primeira análise, o caso citado acima não deixa claro a relação entre as transformações dos potenciais com o tipo de transformação definido anteriormente, nem qual o grupo (G, \cdot) para o eletromagnetismo. Uma descrição completa da teoria partindo apenas do seu grupo de simetria ($U(1)$, no caso do eletromagnetismo) é desejável, e pode ser obtida utilizando os conceitos desenvolvidos a seguir.

2.1.2 Fibrados Principais

A estrutura de uma transformação de *gauge* como uma função de um espaço em um grupo pode ser generalizada para a seção de um fibrado cujas fibras sejam o grupo em questão (uma introdução à teoria de grupos e a grupos e álgebras de Lie pode ser encontrada no apêndice C). Entretanto é também necessário considerar um fibrado no qual suas seções sejam os campos vetoriais de uma teoria de *gauge*. Para tanto, é necessário determinar um fibrado em que um grupo de Lie G possua uma ação sobre as fibras, obtido com a definição de uma G -estrutura para um fibrado, que especifica a estrutura de suas funções de transição. Retomando a subseção 1.3.2, foi estabelecido que, para fibrados vetoriais, as funções de transição tomavam valores em $GL(n, \mathbb{R})$. A generalização dessa ideia é a de um *fibrado com grupo de estrutura G* ou *fibrado com G -estrutura*, definido como um fibrado localmente trivial em que as funções de transição avaliadas em um ponto tomam valores em G , i.e. $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} = \mathbf{g}_{\alpha\beta}$, com $\mathbf{g}_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta,p} \in G$. Se o fibrado também é um fibrado vetorial, as funções de transição podem tomar valores em uma representação de G na fibras, $\rho(G)$. Em ambos casos, isso determina uma ação de G nas fibras, obtida, escrevendo $(p, q)_\alpha = \psi_\alpha^{-1}(p, q)$, por meio de

$$(p, g_{\alpha\beta,p}q)_\beta = (p, q)_\alpha.$$

Para que o fibrado $\pi: E \rightarrow M$ seja bem definido, as funções de transição avaliadas em um ponto $g_{\alpha\beta,p}: U_\alpha \times F \rightarrow U_\beta \times F$ para uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de M devem satisfazer as condições de consistência $g_{\alpha\alpha,p} = \mathbb{1}$ e $g_{\alpha\beta,p} \cdot g_{\beta\gamma,p} \cdot g_{\gamma\alpha,p} = \mathbb{1}$. A primeira condição indica que a um ponto de M é associado somente uma fibra, enquanto a segunda condição implica que é possível transicionar entre conjuntos da cobertura sem ambiguidades. Essa segunda condição é dita a *condição de cociclo*¹.

Com o conceito de uma G -estrutura é possível construir um fibrado colando fibrados triviais. Seja $(p, q)_\alpha$ um ponto de um espaço E associado a $(p, q) \in U_\alpha \times F$. Uma projeção $\pi|_{U_\alpha}: E \rightarrow U_\alpha \times F$ é definida por $\pi|_{U_\alpha}(p, q)_\alpha = (p, q)$, e é possível definir uma projeção global para E a partir das projeções para cada conjunto da cobertura. Funções de transição que tomam valores em G e cumprem as condições introduzidas anteriormente induzem trivializações locais definidas por $\psi_\alpha(p, q)_\alpha = (p, q)$ para E . Esse processo foi ilustrado no exemplo 1.11, em que o grupo de estrutura para a fita de Möbius é $\mathbb{Z}_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$, onde \cdot é a multiplicação de inteiros.

Por vezes é útil poder lidar com transformações lineares atuando sobre a fibra de um fibrado vetorial por meio de uma representação de G . Diz-se que uma transformação linear $\mathbf{T}: E \rightarrow E$, definida de maneira que $\mathbf{T}(p) = T_p: E_p \rightarrow E_p$ variam de maneira suave de fibra para fibra, *vive em G* se $\mathbf{T}(p, q)_\alpha = (p, \rho(g)q)_\alpha$. Essa definição é independente de

¹ Esse tipo de condição é recorrente no estudo de homologia, cohomologia e geometria algébrica.

α , mas não é possível determinar qual o elemento $g \in G$, pois

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(p, \mathbf{v})_\alpha &= (p, \rho(g) \mathbf{v})_\alpha = (p, \rho(g_{\beta\alpha,p}) \rho(g) \mathbf{v})_\beta \\ &= (p, \rho(g_{\beta\alpha,p} \cdot g) \mathbf{v})_\beta = (p, \rho(g') \mathbf{v}')_\beta = \mathbf{T}(p, \mathbf{v}')_\beta, \end{aligned}$$

com $\mathbf{v}' = \rho(g_{\beta\alpha,p}) \mathbf{v}$ e $\rho(g') = \rho(g_{\beta\alpha,p}) \rho(g) \rho(g_{\beta\alpha,p})^{-1}$. O mesmo pode ser dito para a álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , i.e., \mathbf{T} vive em \mathfrak{g} se $\mathbf{T}(p, q)_\alpha = (p, d\rho(g) q)_\alpha$.

Para obter o fibrado cujas seções são as transformações de *gauge* atuando sobre M , é preciso considerar um fibrado tal que suas fibras sejam o grupo de Lie G , no qual as transformações tomam valores, e que apresente uma G -estrutura. Esse tipo de fibrado é dito o *fibrado principal de G* ou *G -fibrado* e é denotado $\pi: P(G) \rightarrow M$. No fibrado principal de G é definida uma ação pela direita via

$$q \cdot h := (p, g \cdot h)_\alpha = \psi_\alpha^{-1}(p, g \cdot h),$$

para $q = (p, g)_\alpha$. Essa definição independe das funções de transição, pois

$$q \cdot h = (p, g \cdot h)_\alpha = (p, g_{\alpha\beta} \cdot g \cdot h)_\beta = (p, g' \cdot h)_\beta.$$

Portanto, a ação pela direita atua como uma translação da fibra.

Dada uma seção \mathbf{s} de $P(G)$, há uma trivialização canônica $\psi_{\alpha,\mathbf{s}}: E \rightarrow U_\alpha \times G$ para \mathbf{s} tal que, para $q = \mathbf{s}(p) \cdot h_q \in E$ com $\pi(q) = p$, $\psi_{\alpha,\mathbf{s}}(q) = (p, h_q)$. Portanto, $\psi_{\alpha,\mathbf{s}}(\mathbf{s}) = U_\alpha \times \{\mathbb{1}\}$. Duas seções \mathbf{s} e \mathbf{t} estão relacionadas por

$$\mathbf{s}(p) = (p, \mathbb{1})_{\alpha,\mathbf{s}} = (p, \mathbf{g}_{\mathbf{t}\mathbf{s}}(p) \cdot \mathbb{1})_{\alpha,\mathbf{t}} = (p, \mathbb{1})_{\alpha,\mathbf{t}} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{t}\mathbf{s}}(p) = \mathbf{t}(p) \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{t}\mathbf{s}}(p),$$

e $\mathbf{g}_{\mathbf{t}\mathbf{s}}$ é dita uma *seção de transição*. É, portanto, justificado escrever $\mathbf{s} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{t}\mathbf{s}}$.

Um resultado interessante acerca da trivialidade de fibrados principais é dado pela existência de uma seção global. De fato, seja $\mathbf{s} \in \Gamma(P(G))$ uma seção global. Para todo $q \in P(G)$ com $\pi(q) = p$, $q = \mathbf{s}(p) \cdot h_q$. Então o mapa $\psi_{\mathbf{s}}: P(G) \rightarrow M \times G$, dado por

$$\psi_{\mathbf{s}}(q) = \psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}(p) \cdot h_q) = (\mathbf{s}(p), h_q)$$

é a trivialização canônica para \mathbf{s} . Já se $\psi: P(G) \rightarrow M \times G$ é uma trivialização, $\mathbf{s}_g := \psi^{-1}(p, g)$ é uma seção global.

As seções de $\pi: P(G) \rightarrow M$ atuam sobre um fibrado vetorial com G -estrutura por meio de uma representação que vive em M . Por esse motivo, é definida a construção de um *fibrado associado* ao fibrado principal $P(G)$ com fibra F , de maneira canônica. Essa construção não será exposta nesse trabalho. Essas seções geram um grupo (\mathcal{G}, \cdot) , com suas operações definidas ponto a ponto, dito o grupo das transformações de *gauge*. É importante distinguir o grupo de *gauge* G do grupo das transformações de *gauge* \mathcal{G} .

2.2 Teorias de Gauge

O formalismo de transformações de *gauge* permite descrever as questões de simetria de uma teoria. Entretanto, o objetivo principal é encontrar uma lei de evolução para as variáveis dinâmicas da teoria, dadas em geral por equações diferenciais. O desenvolvimento de um formalismo para derivar seções de fibrados, que fazem o papel dos campos na teoria, e a obtenção das equações de Euler-Lagrange a partir de uma ação serão os passos tomados para atingir esse objetivo. As principais referências para essa seção são [5], [23] e [25].

2.2.1 Conexões

Tomar derivadas em um fibrado vetorial não é trivial. De fato, operações algébricas são definidas apenas entre vetores de uma mesma fibra e, portanto, comparar vetores em fibras diferentes pode apresentar ambiguidades. De qualquer maneira, procede-se a definir uma conexão em um fibrado, um operador análogo ao da derivada direcional, por meio de suas propriedades algébricas.

Definição 2.1 (Conexões). Seja $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Uma *conexão de Koszul* ou, simplesmente, uma *conexão* \mathbf{D} é uma função que associa um campo vetorial $\mathbf{v} \in \Gamma(TM)$ a uma função $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ com as seguintes propriedades, para todos escalares a e b , todas funções $f, g \in C^\infty(M)$, campos vetoriais $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Gamma(TM)$ e seções \mathbf{s}, \mathbf{r} :

1. Linearidade nas seções: $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}(a\mathbf{s} + b\mathbf{t}) = a\mathbf{D}_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) + b\mathbf{D}_{\mathbf{v}}(\mathbf{t})$,
2. Lei de Leibniz: $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}(f\mathbf{s}) = \mathbf{v}(f)\mathbf{s} + f\mathbf{D}_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})$,
3. C^∞ -Módulo para os campos vetoriais: $\mathbf{D}_{f\mathbf{v}+g\mathbf{w}}(\mathbf{s}) = f\mathbf{D}_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) + g\mathbf{D}_{\mathbf{w}}(\mathbf{s})$. \diamond

Dado um campo vetorial \mathbf{v} e uma seção \mathbf{s} , $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})$ é dita a *derivada covariante* de \mathbf{s} na direção de \mathbf{v} .

A fim de facilitar computações, é interessante considerar, em um sistema local de coordenadas em $U \subset M$, a derivada covariante nas direções de $\{\partial_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$, a base dos campos vetoriais associada a um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$. A partir desse momento, adota-se a convenção de Einstein para somas, na qual a ocorrência de um índice covariante igual a um contravariante na mesma expressão implica uma soma, i.e.,

$$G^\mu T_\mu := \sum_{\mu \in \mathcal{M}} G^\mu T_\mu.$$

Pondo

$$D_\mu := \mathbf{D}_{\partial_\mu},$$

é possível escrever a ação dessa derivada covariante sobre uma base de seções $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ da seguinte maneira:

$$D_\mu \mathbf{e}_\alpha = A_{\mu\alpha}^\beta \mathbf{e}_\beta.$$

O termo $A_{\mu\alpha}^{\beta}$ mapeia seções em seções, para cada coordenada. Portanto, é natural considerar uma seção do fibrado vetorial $\text{End}(E|_U) \otimes T^*U$ de 1-formas tomando valores no conjunto de *endomorfismos* de $E|_U$, onde um endomorfismo é um morfismo de uma estrutura algébrica em si mesma. Existe o isomorfismo $V \otimes V^* \cong \text{End}(V)$ para um espaço vetorial V , mapeando $\mathbf{v} \otimes f$ na função linear $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}) \mathbf{v}$. Esse isomorfismo induz $E \otimes E^* \cong \text{End}(E)$, para fibrados vetoriais.

Define-se $\mathbf{A} \in \Gamma(\text{End}(E|_U) \otimes T^*U)$ por

$$\mathbf{A} = A_{\mu\alpha}^{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \otimes \mathbf{e}^{\alpha} \otimes dx^{\mu}.$$

A seção \mathbf{A} é dita a *forma de conexão*². Avaliando a derivada covariante de uma seção \mathbf{s} na direção de \mathbf{v} ,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{s} = \mathbf{D}_{v^{\mu} \partial_{\mu}} \mathbf{s} = v^{\mu} \mathbf{D}_{\mu} s^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = v^{\mu} [(\partial_{\mu} s^{\alpha}) \mathbf{e}_{\alpha} + A_{\mu\alpha}^{\beta} s^{\alpha} \mathbf{e}_{\beta}] = v^{\mu} (\partial_{\mu} s^{\alpha} + A_{\mu\beta}^{\alpha} s^{\beta}) \mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{v} \mathbf{s} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \mathbf{s}.$$

Pondo $\mathbf{v} = \partial_{\mu}$,

$$\mathbf{D}_{\mu} \mathbf{s} = \partial_{\mu} \mathbf{s} + A_{\mu} \mathbf{s},$$

com $A_{\mu} = \mathbf{A}(\partial_{\mu}) = A_{\mu\alpha}^{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \otimes \mathbf{e}_{\alpha}$. Escrevendo $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^0 = \mathbf{v} = v^{\mu} \partial_{\mu}$, é possível obter a expressão

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}} = \mathbf{D}_{\mathbf{v}}^0 + \mathbf{A}(\mathbf{v}).$$

Claramente, \mathbf{D}^0 é uma conexão, dita a *conexão plana*, correspondente à derivada no espaço euclidiano e é interessante considerar a obtenção de uma conexão a partir de outra, via $\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \mathbf{A}$. A linearidade e a propriedade de $C^{\infty}(U)$ -módulo é trivial, pois A_{μ} é um mapa linear para cada μ . A Lei de Leibniz é verificada por:

$$\mathbf{D}'_{\mathbf{v}}(f\mathbf{s}) = \mathbf{D}_{\mathbf{v}}(f\mathbf{s}) + \mathbf{A}(\mathbf{v})(f\mathbf{s}) = \mathbf{v}(f)\mathbf{s} + f\mathbf{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{s} + f\mathbf{A}(\mathbf{v})\mathbf{s} = \mathbf{v}(f)\mathbf{s} + f\mathbf{D}'_{\mathbf{v}}\mathbf{s}.$$

A diferença de duas conexões é uma 1-forma tomando valores no espaço dos endomorfismos, pois, além da linearidade nos campos vetoriais, é um $C^{\infty}(U)$ -módulo nas seções:

$$\mathbf{D}'_{\mathbf{v}}(f\mathbf{s}) - \mathbf{D}_{\mathbf{v}}(f\mathbf{s}) = \mathbf{v}(f)\mathbf{s} + f\mathbf{D}'_{\mathbf{v}}\mathbf{s} - \mathbf{v}(f)\mathbf{s} - f\mathbf{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{s} = f(\mathbf{D}'_{\mathbf{v}}\mathbf{s} - \mathbf{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{s}),$$

e portanto $\mathbf{D}' - \mathbf{D} = \mathbf{A} \in \Gamma(\text{End}(E|_U) \otimes T^*U)$. É importante enfatizar a localidade das formas de curvatura, pois nem sempre é possível uma conexão \mathbf{D} como $\mathbf{D}_0 + \mathbf{A}$ globalmente. Entretanto, sempre é possível definir formas de conexão em cada conjunto de uma cobertura de M de maneira que sejam compatíveis.

Quando E possui um grupo de estrutura G , exige-se que \mathbf{A} viva em \mathfrak{g} ³. Isso se deve à maneira como transformações de *gauge*, i.e., representações em E de seções de

² No caso em que a conexão atua sobre o fibrado tangente de uma variedade Riemmaniana ou pseudo-Riemmaniana, é livre de torção e preserva a métrica, i.e., é uma conexão de Levi-Civita, os componentes da forma de conexão são os símbolos de Christoffel.

³ Também é possível definir \mathbf{A} de maneira que tome valores em \mathfrak{g} . Nesse caso, \mathbf{A} atua sobre as seções por meio de uma representação.

$P(G)$, atuam sobre conexão \mathbf{D} . Dada uma conexão \mathbf{D} e uma transformação de *gauge* $\mathbf{g} \in \Gamma(P(G))$, há uma conexão \mathbf{D}' tal que

$$\mathbf{D}'_v(\rho(\mathbf{g})\mathbf{s}) = \rho(\mathbf{g})\mathbf{D}_v(\mathbf{s}).$$

As conexões \mathbf{D}' e \mathbf{D} são ditas equivalentes por *gauge*, e é fácil verificar que \mathbf{D}' é de fato uma conexão. A linearidade e a propriedade de ser $C^\infty(M)$ -módulo são triviais, enquanto a lei de Leibniz é dada por

$$\mathbf{D}'_v(f\mathbf{s}) = \rho(\mathbf{g})\mathbf{D}_v(\rho(\mathbf{g}^{-1})f\mathbf{s}) = \rho(\mathbf{g})\mathbf{v}(f)\rho(\mathbf{g}^{-1}) + f\rho(\mathbf{g})\mathbf{D}_v(\rho(\mathbf{g}^{-1})\mathbf{s}) = \mathbf{v}(f) + f\mathbf{D}'_v(\mathbf{s}).$$

Em um sistema local de coordenadas,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_v(\mathbf{s}) &= \rho(\mathbf{g})\mathbf{D}_v(\rho(\mathbf{g}^{-1})\mathbf{s}) = \rho(\mathbf{g})\mathbf{D}_v^0(\rho(\mathbf{g}^{-1})\mathbf{s}) + \rho(\mathbf{g})\mathbf{A}(\mathbf{v})(\rho(\mathbf{g}^{-1})\mathbf{s}) \\ &= \rho(\mathbf{g})v^\mu\partial_\mu(\rho(\mathbf{g}^{-1})s^\alpha\mathbf{e}_\alpha) + \rho(\mathbf{g})v^\mu A_{\mu\alpha}^\beta\rho(\mathbf{g}^{-1})s^\alpha\mathbf{e}_\beta \\ &= v^\mu\rho(\mathbf{g})[(\partial_\mu\rho(\mathbf{g}^{-1}))s^\alpha\mathbf{e}_\alpha + \rho(\mathbf{g}^{-1})(\partial_\mu s^\alpha)\mathbf{e}_\alpha + A_{\mu\beta}^\alpha\rho(\mathbf{g}^{-1})s^\beta\mathbf{e}_\alpha] \\ &= v^\mu[\partial_\mu s^\alpha + \rho(\mathbf{g})(\partial_\mu\rho(\mathbf{g}^{-1}))s^\alpha + \rho(\mathbf{g})A_{\mu\beta}^\alpha\rho(\mathbf{g}^{-1})s^\beta]\mathbf{e}_\alpha \\ &= [\mathbf{D}_v^0 + \rho(\mathbf{g})\mathbf{A}(\mathbf{v})\rho(\mathbf{g}^{-1}) + \rho(\mathbf{g})d\rho(\mathbf{g}^{-1})(\mathbf{v})]\mathbf{s} \\ &= [\mathbf{D}_v^0 + \mathbf{A}'(\mathbf{v})]\mathbf{s}, \end{aligned}$$

e, portanto, $\mathbf{D}' = \mathbf{D}^0 + \mathbf{A}'$, com

$$\mathbf{A}' = \rho(\mathbf{g})\mathbf{A}\rho(\mathbf{g}^{-1}) + \rho(\mathbf{g})d\rho(\mathbf{g}^{-1})$$

Esse resultado justifica a exigência de que \mathbf{A} viva em \mathfrak{g} , dado que $\rho(\mathbf{g})d\rho(\mathbf{g}^{-1})$ vive em \mathfrak{g} e, se \mathbf{A} vive em \mathfrak{g} , $\rho(\mathbf{g})\mathbf{A}\rho(\mathbf{g}^{-1})$ também vive em \mathfrak{g} .

As propriedades frente à transformações de *gauge* justificam denominar a forma de conexão como um *potencial de gauge*, como ilustrado no exemplo a baixo.

Exemplo 2.1 (Potencial Eletromagnético). A notação da forma de conexão como \mathbf{A} não é acidental, pois os potenciais de uma teoria de *gauge* são formas de conexão. Um exemplo esclarecedor é o de uma conexão atuando em um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow M$ com $U(1)$ -estrutura, correspondente ao grupo de *gauge* do eletromagnetismo. Utilizando a representação natural de $U(1)$, toda transformação de *gauge* é da forma $\mathbf{g} = e^{i\Lambda}$, com $\theta: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$. Atuando com essa transformação sobre um potencial \mathbf{A} , obtém-se o potencial

$$\mathbf{A}' = e^{i\Lambda}\mathbf{A}e^{-i\Lambda} + e^{i\Lambda}de^{-i\Lambda} = e^{i\Lambda}\mathbf{A}e^{-i\Lambda} + e^{i\Lambda}idf e^{-i\Lambda}.$$

Como $U(1)$ é abeliano,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + id\Lambda.$$

Esse potencial toma valores na álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$ de $U(1)$, enquanto o potencial eletromagnético toma valores em \mathbb{R} . Definindo $\mathbf{A}_\mathbb{R} := \frac{1}{i}\mathbf{A}$, o potencial transformado toma a forma

$$\mathbf{A}'_\mathbb{R} = \mathbf{A}_\mathbb{R} + d\Lambda,$$

que corresponde à descrição dada na subseção 2.1.1

△

Exemplo 2.2 (Acoplamento Mínimo). Uma aplicação interessante do formalismo de conexões é o *acoplamento mínimo* para o eletromagnetismo em teorias quânticas. No caso não relativístico, o acoplamento mínimo para um sistema com interação eletromagnética é dado por $\hat{H} \mapsto \hat{H} - q\phi$ e $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{p} - \frac{q}{c}\mathbf{a}$, onde \hat{H} é o operador hamiltoniano do sistema e \hat{p} é o operador de momento linear. Na representação de posição, $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ e, pela equação de Schrödinger, $\hat{H} = i\hbar\partial_t$.

A adaptação dessa ideia para o caso relativístico é bem ilustrada por sua aplicação à equação de Dirac. Para um férmion livre de massa m e carga q , a equação de Dirac é:

$$\left(\gamma^\mu \hat{P}_\mu - mc\right)\psi = 0,$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac, uma representação de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ em \mathbb{C}^4 , $\hat{\mathbf{P}}$ é o operador de 4-momento e ψ é o spinor do férmion. O acoplamento mínimo é dado por $\hat{\mathbf{P}} \mapsto \hat{\mathbf{P}} - q\mathbf{A}$, e a equação para a partícula interagindo com um campo eletromagnético é:

$$\left[\gamma^\mu \left(\hat{P}_\mu - qA_\mu\right) - mc\right]\psi = 0.$$

No espaço de posição,

$$\left[i\hbar\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - mc\right]\psi = 0.$$

O termo $\partial_\mu + iqA_\mu$ corresponde às componentes de uma conexão $\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + q\mathbf{A} = \mathbf{D}^0 + iq\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$. Portanto, a equação de Dirac para uma partícula em um campo eletromagnético pode ser reescrita como

$$(i\hbar\mathbf{D}_\gamma - mc)\psi = 0,$$

onde γ é uma campo vetorial tomando valores na representação de Dirac, i.e., além de ser uma conexão no fibrado com grupo de estrutura $U(1)$, \mathbf{D} também é uma conexão (plana) no fibrado de spin, que possui como grupo de estrutura $\text{Spin}(1, 3) = \text{SL}(2, \mathbb{C})$. \triangle

A conexão também exerce a função de transportar vetores sobre uma variedade, i.e., associar dois vetores em espaços tangentes diferentes. A escolha de uma conexão dá uma maneira de realizar esse transporte, e o tipo mais interessante é o dito *transporte paralelo*, no qual a variação do vetor deve-se apenas à estrutura geométrica da variedade. No espaço euclidiano, o transporte paralelo sobre uma curva é $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado associando o vetor $\mathbf{v}_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}\mathbb{R}^n$ ao mesmo vetor em outro espaço tangente, $\mathbf{v}_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$, para todo t . Em uma variedade M , a estrutura geométrica impossibilita esse tipo de transporte, mas é possível definir um análogo, de maneira que a variação do vetor $\mathbf{v}_{\gamma(0)}$ sobre uma curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow U_\alpha \subset M$ corresponda à variação de $\varphi_{\alpha*}\mathbf{v}_{\gamma(0)}$ sobre a curva $(\varphi_\alpha^{-1})^*\gamma(t)$, com $\varphi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta para M . O resultado do transporte paralelo é dado pela equação

$$D_{\gamma'(t)}\mathbf{v}_{\gamma(t)} = 0.$$

Em coordenadas locais,

$$D_{\gamma'(t)}\mathbf{v}_{\gamma(t)} = \frac{d}{dt}\mathbf{v}_{\gamma(t)} + \mathbf{A}(\gamma'(t)).$$

A solução da equação diferencial do transporte paralelo,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_{\gamma(t)} + \mathbf{A}(\gamma'(t)) \mathbf{v}_{\gamma(t)} = 0,$$

é dada pela exponencial ordenada por caminhos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}e^{-\int_0^t \mathbf{A}(\gamma'(s)) ds} &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathbf{P} \left(\int_0^t \mathbf{A}(\gamma'(s)) ds \right)^n \\ &:= I - \int_0^t \mathbf{A}(\gamma'(t_1)) dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} \mathbf{A}(\gamma'(t_1)) \mathbf{A}(\gamma'(t_2)) dt_2 dt_1 + \cdots, \end{aligned}$$

que, quando todos $\mathbf{A}(\gamma'(t))$ comutam ou independem de t , reduz para a exponencial de uma transformação linear que vive em \mathfrak{g} .

Nota 2.1 (Conexões e Métricas). A estrutura geométrica de uma variedade é tipicamente especificada por uma métrica, que induz produtos internos em cada espaço tangente de uma variedade. Entretanto, a escolha de uma conexão determina o transporte paralelo de vetores na variedade e, portanto, deve induzir uma métrica. De fato, é possível obter uma conexão a partir de uma métrica, mas nem sempre uma métrica a partir de uma conexão. Quando o segundo é possível, diz-se que a conexão é uma *conexão métrica*. O formalismo de conexões, que apresenta maior generalidade, será utilizado neste trabalho, em preferência ao formalismo da métrica.

O conceito de transporte paralelo é importante para a interpretação geométrica dos conceitos introduzidos à seguir, que permitem encontrar uma equação para os campos de *gauge*, obtidos a partir da forma de conexão.

2.2.2 Curvatura

Se a conexão é o análogo em variedades da diferenciação, a curvatura é relacionada com derivadas segundas, medindo o quanto essas derivadas falham em comutar. O interesse por essa quantia é claro, e sua interpretação é dada considerando o transporte paralelo de vetores sobre uma curva fechada. Esse tipo de transporte, quando avaliado para todo campo vetorial sobre uma curva, é chamado de *holonomia*, e seu estudo leva a resultados importantes para teorias físicas.⁴ A definição da curvatura se dá, portanto, a partir da comutação uma conexão avaliada em dois campos vetoriais, com um termo extra para levar em conta a falha em comutar desses dois campos vetoriais.

Definição 2.2 (Curvatura). Seja $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial com uma conexão \mathbf{D} . A *curvatura* F em E é uma função associa dois campos vetoriais $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Gamma(TM)$ a uma função $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ tal que, para $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{s} = \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{D}_{\mathbf{w}} \mathbf{s} - \mathbf{D}_{\mathbf{w}} \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{s} - \mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{s} = [\mathbf{D}_{\mathbf{v}}, \mathbf{D}_{\mathbf{w}}] \mathbf{s} - \mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{s},$$

⁴ Entre as teorias que se utilizam do conceito de holonomia se encontram a cromodinâmica quântica, com os *loops* de Wilson [33], e a gravitação quântica em *loops*, que se utiliza da holonomia no seu formalismo quantização da relatividade geral [34].

onde $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] := \mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v}$ é o comutador (ou *derivada de Lie*) para campos vetoriais e $[\mathbf{D}_v, \mathbf{D}_w] := \mathbf{D}_v\mathbf{D}_w - \mathbf{D}_w\mathbf{D}_v$ é o comutador para derivadas covariantes. \diamond

A curvatura é antissimétrica nos campos vetoriais, pois

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= [\mathbf{D}_v, \mathbf{D}_w] - \mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} = -[\mathbf{D}_w, \mathbf{D}_v] - \mathbf{D}_{-[\mathbf{w}, \mathbf{v}]} = -[\mathbf{D}_w, \mathbf{D}_v] + \mathbf{D}_{[\mathbf{w}, \mathbf{v}]} \\ &= -\mathbf{F}(\mathbf{w}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

A propriedade de ser um C^∞ -módulo é notável, pois vale

$$\mathbf{F}(f\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, f\mathbf{w})\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(f\mathbf{s}) = f\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{s}.$$

De fato, dado que $[\mathbf{v}, f\mathbf{w}] = \mathbf{v}(f\mathbf{w}) - f\mathbf{w}\mathbf{v} = \mathbf{v}(f)\mathbf{w} + f\mathbf{v}\mathbf{w} - f\mathbf{w}\mathbf{v} = f[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + \mathbf{v}(f)\mathbf{w}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}, f\mathbf{w}) &= [\mathbf{D}_v, \mathbf{D}_{f\mathbf{w}}] - \mathbf{D}_{[\mathbf{v}, f\mathbf{w}]} = \mathbf{D}_v(f\mathbf{D}_w) - f\mathbf{D}_w\mathbf{D}_v - \mathbf{D}_{f[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + \mathbf{v}(f)\mathbf{w}} \\ &= f\mathbf{D}_v\mathbf{D}_w + \mathbf{v}(f)\mathbf{D}_w - f\mathbf{D}_w\mathbf{D}_v - f\mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} - \mathbf{v}(f)\mathbf{D}_w \\ &= f[\mathbf{D}_v, \mathbf{D}_w] - f\mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \\ &= f\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

mas também,

$$\mathbf{F}(f\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{F}(\mathbf{w}, f\mathbf{v}) = -f\mathbf{F}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = f\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Para as seções,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(f\mathbf{s}) &= \mathbf{D}_v\mathbf{D}_w f\mathbf{s} - \mathbf{D}_w\mathbf{D}_v f\mathbf{s} - \mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} f\mathbf{s} \\ &= \mathbf{D}_v(f\mathbf{D}_w\mathbf{s} + \mathbf{w}(f)\mathbf{s}) - \mathbf{D}_w(f\mathbf{D}_v\mathbf{s} + \mathbf{v}(f)\mathbf{s}) - f\mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{s} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}](f)\mathbf{s} \\ &= f\mathbf{D}_v\mathbf{D}_w\mathbf{s} + \mathbf{v}(f)\mathbf{D}_w\mathbf{s} + \mathbf{w}(f)\mathbf{D}_v\mathbf{s} + \mathbf{v}(\mathbf{w}(f))\mathbf{s} \\ &\quad - f\mathbf{D}_w\mathbf{D}_v\mathbf{s} - \mathbf{w}(f)\mathbf{D}_v\mathbf{s} - \mathbf{v}(f)\mathbf{D}_w\mathbf{s} - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f))\mathbf{s} \\ &\quad - f\mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{s} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}](f)\mathbf{s} \\ &= f[\mathbf{D}_v, \mathbf{D}_w]\mathbf{s} - f\mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{s} \\ &= f\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Para cálculos em coordenadas locais, é útil obter as componentes da curvatura a partir de um base para campos vetoriais:

$$F_{\mu\nu} := \mathbf{F}(\partial_\mu, \partial_\nu) = [\mathbf{D}_\mu, \mathbf{D}_\nu],$$

pois $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v^\mu w^\nu F_{\mu\nu},$$

e, utilizando uma base para seções,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathbf{e}_\alpha &= \mathbf{D}_\mu\mathbf{D}_\nu\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{D}_\nu\mathbf{D}_\mu\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{D}_\mu(A_{\nu\alpha}^\beta\mathbf{e}_\beta) - \mathbf{D}_\nu(A_{\mu\alpha}^\beta\mathbf{e}_\beta) \\ &= (\partial_\mu A_{\nu\alpha}^\beta)\mathbf{e}_\beta + A_{\mu\beta}^\gamma A_{\nu\alpha}^\beta\mathbf{e}_\gamma - (\partial_\nu A_{\mu\alpha}^\beta)\mathbf{e}_\beta - A_{\nu\beta}^\gamma A_{\mu\alpha}^\beta\mathbf{e}_\gamma \\ &= [(\partial_\mu A_{\nu\alpha}^\beta) + A_{\mu\gamma}^\beta A_{\nu\alpha}^\gamma - (\partial_\nu A_{\mu\alpha}^\beta) - A_{\nu\gamma}^\beta A_{\mu\alpha}^\gamma]\mathbf{e}_\beta. \end{aligned}$$

Utilizando uma base para $\text{End}(E)$,

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu\alpha}^{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \otimes \mathbf{e}^{\alpha},$$

e, visto que $F_{\mu\nu} \mathbf{e}_{\alpha} = F_{\mu\nu\alpha}^{\beta} \mathbf{e}_{\beta}$, vale a expressão

$$F_{\mu\nu\alpha}^{\beta} = \partial_{\mu} A_{\nu\alpha}^{\beta} - \partial_{\nu} A_{\mu\alpha}^{\beta} + A_{\mu\gamma}^{\beta} A_{\nu\alpha}^{\gamma} - A_{\nu\gamma}^{\beta} A_{\mu\alpha}^{\gamma}.$$

Suprimindo os índices *internos* α , β e γ ,

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + A_{\mu} A_{\nu} - A_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}]. \quad (2.1)$$

Essas propriedades parecem indicar que \mathbf{F} é uma 2-forma tomando valores em $\text{End}(E)$ que pode ser obtida a partir do potencial de *gauge*, e que, portanto, o campo da interação em uma teoria de *gauge* é interpretado como a curvatura do fibrado que possui como grupo de estrutura o grupo de *gauge*. Sendo o potencial de *gauge* \mathbf{A} uma 1-forma tomando valores em $\text{End}(E)$, é possível obter \mathbf{F} da derivada exterior covariante de \mathbf{A} , como no caso do eletromagnetismo no espaço de Minkowski. Para tanto, é necessário estabelecer a noção de uma derivada exterior covariante, e estender essa noção para formas tomando valores em $\text{End}(E)$.

Primeiramente, define-se uma k -forma tomando valores em E como uma seção de $E \otimes \bigwedge^k T^*M$. A noção de um produto exterior entre k -formas tomando valores em E e ℓ -formas diferenciais é obtida utilizando o fato de que toda forma diferencial tomando valores em E pode ser escrita como uma combinação linear dos produtos tensoriais de seções de E e formas em M ,⁵ e.g. $\mathbf{s} \otimes \boldsymbol{\omega}$, com $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$ e $\boldsymbol{\omega} \in \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$. Portanto, se $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma(\bigwedge^{\ell} T^*M)$, define-se

$$(\mathbf{s} \otimes \boldsymbol{\omega}) \wedge \boldsymbol{\xi} := \mathbf{s} \otimes (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\xi}).$$

É fácil verificar que esse produto exterior possui todas as propriedades daquele definido para vetores e de suas outras extensões e, portanto, $(\mathbf{s} \otimes \boldsymbol{\omega}) \wedge \boldsymbol{\xi}$ é uma seção de $E \otimes \bigwedge^{k+\ell} T^*M$. Assim, é possível definir uma derivada exterior covariante.

Definição 2.3 (Derivada Exterior Covariante). Seja \mathbf{D} uma conexão em um fibrado vetorial E . A *derivada exterior covariante* $d_{\mathbf{D}}$ é uma mapa atuando sobre k -formas tomando valores em E com as seguintes propriedades:

1. Quando $k = 0$, $d_{\mathbf{D}}$ associa uma seção \mathbf{s} de E (uma 0 forma tomando valores em E) a uma 1-forma $d_{\mathbf{D}}\mathbf{s}$, tal que, para todo campo vetorial \mathbf{v} em E ,

$$d_{\mathbf{D}}\mathbf{s}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{s}.$$

⁵ Essa decomposição não necessariamente é única, mas é possível mostrar que os resultados deduzidos a seguir são independentes da escolha de decomposição.

2. Atuando sobre uma k -forma $\mathbf{s} \otimes \boldsymbol{\omega}$, $d_{\mathbf{D}}\mathbf{s} \otimes \boldsymbol{\omega}$ é uma $k + 1$ -forma tal que:

$$d_{\mathbf{D}}(\mathbf{s} \otimes \boldsymbol{\omega}) = d_{\mathbf{D}}\mathbf{s} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \otimes d\boldsymbol{\omega}. \quad \diamond$$

Em coordenadas locais,

$$d_{\mathbf{D}}(s_I \otimes dx^I) = d_{\mathbf{D}}s_I \wedge dx^I + s_I \otimes d(dx^I) = D_{\mu}s_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^I.$$

Se $\mathbf{T} \in \Gamma(\text{End}(E))$, $s \in \Gamma(E)$, $\boldsymbol{\omega} \in \Gamma(\wedge^k T^*M)$ e $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma(\wedge^{\ell} T^*M)$, define-se o produto exterior de uma forma diferencial tomando valores em $\text{End}(E)$ por uma tomando valores em E por:

$$(\mathbf{T} \otimes \boldsymbol{\omega}) \wedge (s \otimes \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{T}(s) \otimes (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\xi}).$$

Novamente, esse produto é de fato uma extensão do produto exterior, e $(\mathbf{T} \otimes \boldsymbol{\omega}) \wedge (s \otimes \boldsymbol{\xi})$ é uma $k + \ell$ forma tomando valores em E .

Ao definir uma 2-forma de curvatura via

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \frac{1}{2}[D_{\mu}, D_{\nu}] dx^{\mu} \wedge dx^{\nu},$$

onde a antissimetria do produto exterior é responsável pelo fator de $1/2$, é possível obter uma expressão para $d_{\mathbf{D}}^2$, com $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma(E \otimes \wedge^k T^*M)$ uma forma diferencial tomando valores em E :

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{D}}^2\boldsymbol{\alpha} &= d_{\mathbf{D}}(D_{\nu}\alpha_I \otimes dx^{\nu} \otimes dx^I) = D_{\mu}D_{\nu}\alpha_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^I \\ &= \frac{1}{2}[D_{\mu}, D_{\nu}]\alpha_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^I \\ &= \mathbf{F} \wedge \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}$$

Quando $\mathbf{D} = \mathbf{D}^0$, $\mathbf{F} = 0$, e, portanto,

$$d_{\mathbf{D}^0}^2 = 0.$$

Assim, escreve-se $d_{\mathbf{D}^0} = d$. Portanto,

$$d_{\mathbf{D}}\boldsymbol{\alpha} = D_{\mu}\alpha_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^I = (D_{\mu}^0 + A_{\mu})\alpha_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^I = d\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A} \wedge \boldsymbol{\alpha}.$$

Retomando as equações de Maxwell, nota-se que a equação $d\mathbf{F} = 0$ é uma identidade se $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$. Ao tentar avaliar a expressão equivalente em um fibrado vetorial, $d_{\mathbf{D}}\mathbf{F}$, faz-se necessário definir a ação da derivada exterior covariante sobre formas diferenciais que tomam valores em $\text{End}(E)$. Para tanto, é necessário obter uma conexão em $\text{End}(E)$ a partir da conexão em E , e, portanto deve-se definir uma conexão \mathbf{D}^* em um fibrado dual E^* a partir da regra de Leibniz,

$$v(\boldsymbol{\sigma}(s)) = \mathbf{D}_v^*\boldsymbol{\sigma}(s) + \boldsymbol{\sigma}(D_v s),$$

onde $\sigma \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$ e $v \in \Gamma(TM)$. Assim, \mathbf{D}^* é definida via:

$$\mathbf{D}_v^* \sigma(s) = v(\sigma(s)) - \sigma(\mathbf{D}_v s).$$

Utilizando o isomorfismo $\text{End}(E) \cong E \otimes E^*$, basta definir uma conexão $\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}^*$ em $E \otimes E^*$ a partir de uma extensão da regra de Leibniz:

$$(\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}^*)_v (s \otimes \sigma) = (\mathbf{D}_v s) \otimes \sigma + s \otimes (\mathbf{D}_v^* \sigma).$$

Portanto, se utilizando do abuso de notação $\mathbf{D} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{D}^*$,

$$\mathbf{D}_v T(s) = \mathbf{D}_v(Ts) - T\mathbf{D}_v s$$

para uma forma diferencial T tomando valores em $\text{End}(E)$.

A definição do produto exterior para formas diferenciais tomando valores em $\text{End}(E)$ é dada por:

$$(T \otimes \omega) \wedge (S \otimes \xi) = (TS) \otimes (\omega \wedge \xi),$$

para $T, S \in \Gamma(\text{End}(E))$, $\omega \in \Gamma(\wedge^k T^*M)$ e $\xi \in \Gamma(\wedge^\ell T^*M)$. Em geral, se $\Xi \in \Gamma(\text{End}(E) \otimes \wedge^k T^*M)$, o produto $\Xi \wedge \Xi$ não é nulo, pois as componentes de Ξ não comutam.

Exemplo 2.3 (Produto Exterior de uma 1-forma Tomando Valores em um Grupo Matricial). Seja γ a 1-forma em $\mathbb{R}^{1,3}$ tomando valores em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ definida por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_\mu dx^\mu,$$

onde γ_μ são as matrizes de Dirac. Então,

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \gamma &= \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \gamma_0 \gamma_1 dx^0 \wedge dx^1 + \gamma_0 \gamma_2 dx^0 \wedge dx^2 + \gamma_0 \gamma_3 dx^0 \wedge dx^3 \\ &\quad + \gamma_1 \gamma_2 dx^1 \wedge dx^2 + \gamma_1 \gamma_3 dx^1 \wedge dx^3 + \gamma_2 \gamma_3 dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned}$$

pois $\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu$ se $\mu \neq \nu$. △

Define-se também um comutador graduado, útil para lidar com formas que vivam em uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , por:

$$[\Xi, \Theta] = \Xi \wedge \Theta - (-1)^{k\ell} \Theta \wedge \Xi,$$

para $\Xi \in \Gamma(\text{End}(E) \otimes \wedge^k T^*M)$ e $\Theta \in \Gamma(\text{End}(E) \otimes \wedge^\ell T^*M)$. Se $\Psi \in \Gamma(\text{End}(E) \otimes \wedge^m T^*M)$, vale a identidade de Jacobi graduada:

$$(-1)^{km} [\Xi, [\Theta, \Psi]] + (-1)^{m\ell} [\Psi, [\Xi, \Theta]] + (-1)^{\ell k} [\Theta, [\Psi, \Xi]] = 0,$$

alem de $[\Xi, \Theta] = (-1)^k [\Theta, \Xi]$, $[\Xi, \Xi] = 0$ e $[\Xi, \Xi \wedge \Xi] = 0$.

Para formas diferenciais $\Xi \in \Gamma(\text{End}(E) \otimes \wedge^k T^*M)$ e $\Theta \in \Gamma(\text{End}(E) \otimes T^*M)$, vale o seguinte resultado para a derivada exterior covariante:

$$d_{\mathbf{D}}(\Xi \wedge \Theta) = d_{\mathbf{D}}\Xi \wedge \Theta + (-1)^k \Xi \wedge d_{\mathbf{D}}\Theta.$$

Em coordenadas locais, utilizando o resultado

$$d_{\mathbf{D}}\Xi = [D_{\mu}, \Xi_I] \otimes dx^{\mu} \wedge dx^I,$$

obtém-se a expressão

$$d_{\mathbf{D}}\Xi = [D_{\mu}^0 + A_{\mu}, \Xi_I] \otimes dx^{\mu} \wedge dx^I = d\Xi + \mathbf{A} \wedge \Xi - (-1)^k \Xi \wedge \mathbf{A} = d\Xi + [\mathbf{A}, \Xi].$$

Computando $d_{\mathbf{D}}^2\alpha$, para $\alpha \in \Gamma(E \otimes \wedge^k T^*M)$,

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{D}}^2\alpha &= d_{\mathbf{D}}(d\alpha + \mathbf{A} \wedge \alpha) = d^2\alpha + \mathbf{A} \wedge d\alpha + d(\mathbf{A} \wedge \alpha) + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \alpha \\ &= \mathbf{A} \wedge d\alpha + d\mathbf{A} \wedge \alpha - \mathbf{A} \wedge d\alpha + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \alpha \\ &= (d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}) \wedge \alpha. \end{aligned}$$

A equação (2.1) implica $\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$, que concorda com a definição da 2-forma de curvatura \mathbf{F} , pois:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}]) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}.$$

Com as definições e resultados anteriores, é possível computar $d_{\mathbf{D}}\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{D}}\mathbf{F} &= d\mathbf{F} + [\mathbf{A}, \mathbf{F}] = d(d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}) + [\mathbf{A}, d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}] \\ &= d\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} - \mathbf{A} \wedge d\mathbf{A} + [\mathbf{A}, d\mathbf{A}] + [\mathbf{A}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}] = [d\mathbf{A}, \mathbf{A}] + [\mathbf{A}, d\mathbf{A}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esse resultado é conhecido como a *identidade de Bianchi*, que pode ser escrita, em coordenadas locais, como

$$d_{\mathbf{D}}\mathbf{F} = D_{\mu}F_{\nu\lambda} + D_{\lambda}F_{\mu\nu} + D_{\nu}F_{\lambda\mu} = [D_{\mu}, [D_{\nu}, D_{\lambda}]] + [D_{\lambda}, [D_{\mu}, D_{\nu}]] + [D_{\nu}, [D_{\lambda}, D_{\mu}]] = 0,$$

i.e., a identidade de Bianchi pode ser vista como uma identidade de Jacobi. A sua interpretação geométrica é dada pelas holonomias em curvas que traçam arestas um cubo.

2.2.3 Teoria Clássica de Yang-Mills

As equações de *Yang-Mills*⁶ originam-se da tentativa de generalizar as equações de Maxwell para grupos de *gauge* não-abelianos [4]. A interpretação do campo \mathbf{F} da teoria

⁶ Neste trabalho, os termos *teoria de gauge* e *teoria de Yang-Mills* são utilizados equivalentemente. Historicamente, as equações de Yang-Mills foram deduzidas para o grupo de *gauge* $SU(2)$, a álgebra do *isospin*, quantia central no estudo da Física Nuclear.

como a curvatura de um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow M$ associado a um G -fibrado, onde G é o grupo de *gauge*, fornece importantes informações acerca do seu comportamento, a partir da identidade de Bianchi:

$$d_{\mathbf{A}}\mathbf{F} = 0, \quad (2.2)$$

e da relação entre a curvatura e o potencial de *gauge*:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}, \quad (2.3)$$

onde, se $\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + \mathbf{A}$, põe-se $d_{\mathbf{A}} := d_{\mathbf{D}}$. Para apresentar uma descrição física completa da teoria, é necessário obter uma ação a fim de, utilizando-se do *princípio da ação estacionária*, obter as equações de Euler-Lagrange. Obter uma solução dessas equações é equivalente a encontrar um ponto crítico da ação. Em comparação com a eletrodinâmica, deseja-se obter a seguinte equação:

$$d_{\mathbf{A}} \star \mathbf{F} = \mathbf{J}. \quad (2.4)$$

Para tanto, faz-se necessário definir o operador dual de Hodge para formas diferenciais tomando valores em $\text{End}(E)$:

$$\star(T \otimes \omega) = T \otimes \star\omega.$$

Define-se também o traço tr de uma forma diferencial tomando valores em E :

$$\text{tr}(T \otimes \omega) = \text{tr}(T) \omega,$$

onde $\text{tr}(T)$ é definido ponto a ponto, utilizando o isomorfismo $\text{End}(V) = V \otimes V^*$, pelo mapa

$$\text{tr}(\mathbf{v} \otimes f) = f(\mathbf{v}).$$

Da ação para a eletrodinâmica,

$$\mathcal{S}_{EM} = - \int_M [\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F} + \mu_0 \mathbf{A} \wedge \star \mathbf{J}], \quad (2.5)$$

onde \mathbf{A} toma valores reais (i.e., corresponde a $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$, definido anteriormente), obtém-se a densidade Lagrangeana \mathcal{L}_{EM} :

$$\mathcal{L}_{EM} = -\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F} - \mu_0 \mathbf{A} \wedge \star \mathbf{J}, \quad (2.6)$$

expressa em coordenadas locais, com $d^4\mathbf{x} = \text{vol}$, por:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4\mathbf{x} - \mu_0 J_{\mu} A^{\mu} d^4x,$$

com a densidade Lagrangeana definida a partir de

$$\mathcal{S} = \int_M \mathcal{L}.$$

A ação para a teoria de Yang-Mills é seu análogo para grupos não abelianos, dada, considerando apenas a teoria livre, i.e., sem termos de correntes, por⁷:

$$\mathcal{S}_{YM} = \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}), \quad (2.7)$$

onde g é a constante de acoplamento⁸ da teoria. Portanto, a densidade Lagrangeana da teoria é

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2g^2} \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}). \quad (2.8)$$

O princípio da ação estacionária é dado por

$$\delta \mathcal{S} = 0,$$

onde δ é a derivada funcional, por vezes chamada de *variação*. Para obter sua definição, se estabelece uma 1-forma $\mathbf{A}_s = \mathbf{A} + s\delta\mathbf{A}$, onde $\delta\mathbf{A}$ é uma 1-forma qualquer. Então, para uma função f de \mathbf{A} ,

$$\delta f(\mathbf{A}) := \left. \frac{d}{ds} f(\mathbf{A}_s) \right|_{s=0},$$

se a igualdade é válida para qualquer escolha de $\delta\mathbf{A}$. Para que a integral de ação convirja, supõe-se que M é uma variedade compacta, mas é possível obter os mesmos resultados do princípio da ação estacionária considerando

$$\delta \mathcal{S} = \int_M \delta \mathcal{L}$$

ou condições de decaimento suficientemente fortes. A convergência dessa integral faz-se necessária, pois as soluções aqui consideradas serão aquelas de ação finita.

Ao lidar com quantias globais, é necessário enfatizar que nem sempre é possível encontrar uma conexão plana global. Entretanto, dada uma conexão \mathbf{D}^0 , é possível encontrar sua curvatura \mathbf{F}^0 , e para qualquer conexão $\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + \mathbf{A}$, sua curvatura \mathbf{F} é dada por $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + d_0\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$, onde $d = d_{\mathbf{D}^0}$, pois

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{A}}^2 \Xi &= d_{\mathbf{A}}(d\Xi + \mathbf{A} \wedge \Xi) = d(d\Xi + \mathbf{A} \wedge \Xi) + \mathbf{A}(d\Xi + \mathbf{A} \wedge \Xi) \\ &= (\mathbf{F}^0 + d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}) \wedge \Xi \\ &= \mathbf{F} \wedge \Xi. \end{aligned}$$

⁷ O sinal difere da ação para eletrodinâmica pois para essa foi adotada a convenção de que \mathbf{A} toma valores reais.

⁸ Por vezes também é utilizada a convenção de incluir a constante de acoplamento na conexão, além de considerar o mapa exponencial complexo e^i para obter os grupos de Lie a partir de suas álgebras, para que esses elementos das álgebras de Lie sejam hermitianos. Nessa convenção escreve-se $\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + ig\mathbf{A}$.

Calculando a variação da ação:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_{YM} &= \frac{1}{2g^2} \delta \int_M \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F}) = \frac{1}{2g^2} \int_M \delta \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F}) \\
&= \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(\delta(\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F})) = \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(\delta\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F} + \mathbf{F} \wedge \star\delta\mathbf{F}) \\
&= \frac{1}{2g^2} \int_M [\text{tr}(\delta\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F}) + \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \star\delta\mathbf{F})] \\
&= \frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(\delta\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F}).
\end{aligned}$$

Até o momento, foram utilizadas as identidades $\delta \text{tr}(\Xi) = \text{tr}(\delta\Xi)$, válida pois o traço é uma função linear, $\delta(\Xi \wedge \Theta) = \delta\Xi \wedge \Theta + (-1)^{k+\ell} \Xi \wedge \delta\Theta$, devido a lei de Leibniz, e $\Xi \wedge \star\Theta = \Theta \wedge \star\Xi$, se Ξ e Θ são, respectivamente, k - e ℓ -formas diferenciais tomando valores em $\text{End}(E)$, com $k + \ell = n$, a dimensão de M .

Calculando a variação de \mathbf{F} ,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{F} &= \left. \frac{d}{ds} (\mathbf{F}_0 + d\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_s \wedge \mathbf{A}_s) \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{d}{ds} \mathbf{F}_0 \right|_{s=0} + d \left(\left. \frac{d}{ds} \mathbf{A}_s \right|_{s=0} \right) + \left(\left. \frac{d}{ds} \mathbf{A}_s \right|_{s=0} \right) \wedge \mathbf{A}_s \Big|_{s=0} + \mathbf{A}_s \wedge \left(\left. \frac{d}{ds} \mathbf{A}_s \right|_{s=0} \right) \\
&= d\delta\mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \delta\mathbf{A} = d\delta\mathbf{A} + [\delta\mathbf{A}, \mathbf{A}] \\
&= d_{\mathbf{A}}\delta\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_{YM} &= \frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(\delta\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F}) = \frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(d_{\mathbf{A}}\delta\mathbf{A} \wedge \star\mathbf{F}) \\
&= \frac{1}{g^2} \int_M d \text{tr}(\delta\mathbf{A} \wedge \star\mathbf{F}) + \frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(\delta\mathbf{A} \wedge d_{\mathbf{A}} \star\mathbf{F}),
\end{aligned}$$

pois o traço é uma função linear. Utilizando o teorema de Stokes,

$$\int_M d \text{tr}(\delta\mathbf{A} \wedge \star\mathbf{F}) = \int_{\partial M} \text{tr}(\delta\mathbf{A} \wedge \star\mathbf{F}) = 0,$$

pois M é uma variedade compacta e, portanto, $\partial M = 0$. Assim,

$$\delta\mathcal{S}_{YM} = \frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(\delta\mathbf{A} \wedge d_{\mathbf{A}} \star\mathbf{F}) = 0.$$

Para que a expressão seja válida para qualquer $\delta\mathbf{A}$, deve valer

$$d_{\mathbf{A}} \star\mathbf{F} = 0, \tag{2.9}$$

a equação desejada.

Anteriormente, foram deduzidos resultados acerca do comportamento de conexões e do potencial de *gauge* frente a uma transformação de *gauge* \mathbf{g} , com

$$\mathbf{A}' = \rho(\mathbf{g}) \mathbf{A} \rho(\mathbf{g}^{-1}) + \rho(\mathbf{g}) d\rho(\mathbf{g}^{-1}).$$

Computando a expressão de transformação da curvatura:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{s} &= [\mathbf{D}'_{\mathbf{v}}, \mathbf{D}'_{\mathbf{w}}] \mathbf{s} + \mathbf{D}'_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{s} \\ &= \rho(\mathbf{g}) (\mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{D}_{\mathbf{w}} - \mathbf{D}_{\mathbf{w}} \mathbf{D}_{\mathbf{v}}) (\rho(\mathbf{g}^{-1}) \mathbf{s}) + \rho(\mathbf{g}) \mathbf{D}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} (\rho(\mathbf{g}^{-1}) \mathbf{s}) \\ &= \rho(\mathbf{g}) \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) (\rho(\mathbf{g}^{-1}) \mathbf{s}),\end{aligned}$$

e, portanto, $\mathbf{F}' = \rho(\mathbf{g}) \mathbf{F} \rho(\mathbf{g}^{-1})$. A regra de transformação para seções é, então, $\mathbf{s}' = \rho(\mathbf{g}) \mathbf{s}$, para que

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{s}' = \rho(\mathbf{g}) \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) (\rho(\mathbf{g}^{-1}) \rho(\mathbf{g}) \mathbf{s}) = \rho(\mathbf{g}) \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{s} = (\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{s})'.$$

A ação é uma quantidade invariante por transformações de *gauge*, pois

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'_{YM} &= \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(\mathbf{F}' \wedge \star \mathbf{F}') \\ &= \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(\rho(\mathbf{g}) \mathbf{F} \rho(\mathbf{g}^{-1}) \wedge \star \rho(\mathbf{g}) \mathbf{F} \rho(\mathbf{g}^{-1})) \\ &= \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}) \\ &= \mathcal{S}_{YM},\end{aligned}$$

visto que o traço é cíclico. Quantias que apresentam essa invariância são os observáveis da teoria, pois seu valor independe da escolha de um *gauge*.

No contexto físico, outra propriedade interessante é a invariância frente ao grupo de Lorentz $O(1, 3)$, em conjunto com as translações no espaço de Minkowski, que constituem o grupo de Poincaré, que consiste das isometrias do espaço de Minkowski. De fato, as equações de Yang-Mills são invariantes frente a qualquer automorfismo de fibrados, i.e., um isomorfismo de fibrados $\psi: E \rightarrow E$, que preserve a métrica, propriedade desejável para uma teoria de campos consistente com a Relatividade Geral.

Nota 2.2 (Teoria de Chern-Simons). As equações de Maxwell são equações diferenciais parciais lineares, pois seu grupo de *gauge* é abeliano. Quando o grupo de *gauge* de uma teoria de Yang-Mills é não-abeliano, as equações são não-lineares, e, portanto, apresentam características bastante diferentes do caso abeliano, que leva a dificuldades no processo de obter soluções. Uma possível estratégia, quando a dimensão de M é 4, é considerar os casos nos quais o campo é autodual ou anti-autodual, i.e., quando

$$\star \mathbf{F} = \pm \mathbf{F}.$$

É claro que esses campos satisfazem as equações da teoria, e soluções dessa forma são ditas *instantons*. No caso autodual, a ação toma a forma

$$\mathcal{S}_{YM} = \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \mathbf{F}).$$

É possível generalizar esse resultado com a ação de *Chern-Simons* em $2n$ -variedades, definida como:

$$\mathcal{S}_{CS} = \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_M \text{tr} \left(\bigwedge_{\ell=1}^n \mathbf{F} \right). \quad (2.10)$$

A k -forma $\frac{1}{k!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \text{tr} \left(\bigwedge^k \mathbf{F} \right)$ é dita a k -ésima classe de Chern e o resultado dessa integração é uma invariante topológica, tomando valores nos números inteiros. O estudo dos invariantes topológicos obtidos de formas diferenciais como essas dá origem à teoria de Chern-Simons [35][36], que possui importantes aplicações à questões físicas, como o estudo de monopolos nas teorias de Yang-Mills e da topologia de 4-variedades, que, por sua vez, faz-se presente em teorias de campos topológicas.

2.2.4 O Mecanismo de Higgs

Até o momento somente a teoria de Yang-Mills livre foi considerada. Para obter fontes para os campos da teoria, é possível considerar um campo escalar⁹ Φ , dito o *campo de Higgs*, tomando valores em um espaço vetorial \mathbb{L} (dito o *espaço de simetrias internas*), dotado de uma ação de \mathfrak{g} , e acoplado à ação, realizando uma mudança de escala apropriada, via:

$$\mathcal{S}_{YMH} = \frac{1}{2} \int_M \left[\text{tr} (\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}) + \text{tr} (d_{\mathbf{A}} \Phi \wedge \star d_{\mathbf{A}} \Phi) + \frac{\lambda}{4} \star (|\Phi| - 1)^2 \right], \quad (2.11)$$

onde λ é a constante de autoacoplamento do campo. A introdução desse campo escalar leva ao mecanismo de geração de massa para os campos de Yang-Mills, pois induz nesses campos um decaimento exponencial.

A densidade Lagrangeana para um campo escalar $\Phi(\mathbf{x})$ com massa m , em um espaço plano, apresenta o termo

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} m |\Phi|^2.$$

Esse termo leva a um decaimento da forma $e^{-m|\mathbf{x}|}$, que induz uma escala de comprimento m^{-1} para o campo. Um campo de massa nula apresenta decaimento da forma $|\mathbf{x}|^{-d+2}$, a solução fundamental da equação de Laplace. Para o caso de um campo vetorial \mathbf{A} , o termo de massa é

$$\mathcal{L}_m = m_{ab} A^a A^b,$$

onde m_{ab} são as componentes da *matriz de massa*, com relação a uma base $\{e_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Quando \mathbf{A} é o potencial de *gauge*, esse termo não é invariante frente a uma transformação de *gauge* e, portanto, não pode ser parte da ação.

A introdução do campo de Higgs Φ soluciona esse problema, pois, realizando uma transformação de *gauge* de maneira que $\hat{\Phi} := \frac{\Phi}{|\Phi|}$ seja um vetor constante em \mathbb{L} , a densidade

⁹ Aqui utiliza-se a nomenclatura introduzida na subseção 1.3.2.

Lagrangeana da teoria toma a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \text{tr}(\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}) + \text{tr}(d\Phi \wedge \star d\Phi) + |\Phi|^2 \text{tr} \left[\rho(\mathbf{A}) \hat{\Phi} \wedge \star \rho(\mathbf{A}) \hat{\Phi} \right] + \frac{\lambda}{4} \star (|\Phi|^2 - 1)^2 \right\}.$$

Esse processo consiste na escolha de uma direção preferencial para o sistema, e é um exemplo de quebra espontânea de simetria.

Escrevendo esse termo como uma forma quadrática, para o caso não-abeliano,

$$\text{tr} \left[\rho(\mathbf{A}) \hat{\Phi} \wedge \star \rho(\mathbf{A}) \hat{\Phi} \right] = m_{ab} A^a A^b,$$

em que o termo m_{ab} é interpretado como uma componente da matriz de massa, é possível calcular a matriz Hessiana dos termos sem derivadas, no mínimo da ação. Esses termos correspondem ao termo de energia potencial da densidade Lagrangeana, e os autovalores da matriz Hessiana dão os termos de massa:

$$m_{\Phi} = \sqrt{\lambda} \quad (2.12)$$

para o campo de Higgs, e

$$m_{A^a} = \sqrt{\mu_a} \quad (2.13)$$

para as componentes do potencial de *gauge*, onde μ_a é o autovalor associado ao a -ésimo autovetor A^a da matriz de massa, que, por sua vez, é associado a um dos modos do campo de Yang-Mills. No caso abeliano,

$$\text{tr} \left[\rho(\mathbf{A}) \hat{\Phi} \wedge \star \rho(\mathbf{A}) \hat{\Phi} \right] = |\mathbf{A}|^2,$$

que implica na unitariedade do termo de massa:

$$m_{\mathbf{A}} = 1.$$

A variação da ação de Yang-Mills-Higgs para um grupo não abeliano, dada pela equação (2.11), dá as seguintes equações para o campo:

$$d_{\mathbf{A}} \star \mathbf{F} = - \star \rho([\Phi, d_{\mathbf{A}} \Phi]), \quad (2.14)$$

$$\Delta_{\mathbf{A}} \Phi = \frac{\lambda}{2} \Phi (|\Phi|^2 - 1), \quad (2.15)$$

onde ρ é uma representação que vive em \mathfrak{g} e

$$\Delta_{\mathbf{A}} := d_{\mathbf{A}} \delta_{\mathbf{A}} + \delta_{\mathbf{A}} d_{\mathbf{A}},$$

onde o codiferencial covariante $\delta_{\mathbf{A}}$ é definido analogamente ao caso plano. Para uma 0-forma como Φ ,

$$\Delta_{\mathbf{A}} = \delta_{\mathbf{A}} d_{\mathbf{A}}.$$

O termo $-\rho([\Phi, d_A\Phi])$ pode ser interpretado como um termo de correntes \mathbf{J} , dando a equação

$$d_A\mathbf{F} = \star\mathbf{J}.$$

No caso abeliano, com $G = U(1)$ e $\mathbb{L} = \mathbb{C}$,

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2}[\Phi(d_A\Phi)^* - \Phi^*d_A\Phi]. \quad (2.16)$$

Exemplo 2.4 (O Modelo de Ginzburg-Landau para a Supercondutividade). Historicamente, o primeiro modelo físico a apresentar um mecanismo de Higgs foi o modelo de Ginzburg-Landau para a supercondutividade [37]. Esse fenômeno consiste na transição de fase de um material, ocorrendo com o resfriamento do material abaixo de uma temperatura crítica, para um estado em que sua resistividade elétrica é nula. Adicionalmente, ocorre a expulsão de campos magnéticos no interior do material (dito efeito Meissner), i.e., os campos magnéticos não penetram o material, e não há variação da energia do material na transição de fase.

O modelo é estabelecido propondo a seguinte expansão para a densidade de energia livre \mathcal{F} em torno da temperatura crítica da transição de fase:

$$\mathcal{F} = \left[\mathcal{F}_n + \alpha|\Phi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Phi|^4 + \frac{1}{2m}|-i\hbar d_A\Phi|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{F}|^2 \right] d^3\mathbf{x},$$

onde Φ é o campo de parâmetros de ordem da teoria, tomando valores em \mathbb{C} , α e β são parâmetros fenomenológicos, m é um termo de massa efetiva, o termo contendo $-i\hbar d_A\Phi$ é um termo de energia cinética, $\mathbf{F} = \mathbf{B}$ é o campo de indução magnética e \mathcal{F}_n é a energia livre no estado não-supercondutor do sistema. Fisicamente, a interpretação do parâmetro de ordem é relacionada com a função de onda dos elétrons no estado supercondutor. Uma variedade particularmente interessante do modelo é a de um sistema bidimensional estático (dada a natureza termodinâmica do problema), em que tem-se uma superfície semi-condutora, com os campos aproximadamente nulos na direção normal e com a escolha de *gauge* $A_3 = 0$. Um estudo acerca de sistemas desse tipo será apresentado no próximo capítulo.

Realizando uma transformação de escala¹⁰, detalhada em [38], obtém-se a seguinte expressão para a densidade de energia livre:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \left[-\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F} + d_A\Phi \wedge \star d_A\Phi + \frac{\lambda}{4} \star (|\Phi|^2 - 1)^2 \right].$$

Essa expressão revela os papéis do campo Φ como campo de Higgs e do campo \mathbf{F} como campo de Yang-Mills. Como o grupo de *gauge* para o eletromagnetismo é $U(1)$, o termo de corrente é

$$\mathbf{J} = \text{Re}[\Phi^*(-i)d_A\Phi].$$

¹⁰ Adicionalmente, utiliza-se da inclusão da constante de acoplamento na conexão.

É importante distinguir o mecanismo de Higgs efetivo presente no fenômeno da supercondutividade do mecanismo de Higgs presente no Modelo Padrão. No fenômeno da supercondutividade, o campo de Higgs é proveniente da condensação de elétrons em pares de Cooper, gerando um campo escalar, enquanto no Modelo Padrão o campo de Higgs é um campo fundamental. O desenvolvimento da teoria microscópica da supercondutividade, dita *teoria BCS*, é devido a Bardeen, Cooper e Schrieffer [39], enquanto o desenvolvimento do mecanismo de Higgs no contexto da teoria quântica de campos é devido a Anderson [40]; Brout e Englert [41]; Higgs [42] e Guralnik, Hagen e Kibble [43]. \triangle

Um resultado importante acerca das soluções das equações de Yang-Mills-Higgs é obtido de considerações acerca do tensor de energia da teoria.

Teorema 2.1. *Seja (\mathbf{A}, Φ) uma solução de ação finita das equações de Yang-Mills-Higgs em \mathbb{R}^d . Então*

1. *Uma teoria de Yang-Mills pura (i.e., sem um campo de Higgs) com $d < 4$ só possui a solução trivial $\mathbf{F} = 0$.*
2. *Se $|\Phi| = 1$ e $d < 4$, então $\mathbf{F} = 0$ e $d_{\mathbf{A}}\Phi = 0$.*
3. *Se $d = 2$ e $\lambda = 0$, a única solução é a trivial $\mathbf{F} = 0$ e $|\Phi| = \text{cst}$.*
4. *Se $d > 4$, não há soluções não triviais para uma teoria de Yang-Mills-Higgs*
5. *Se $d = 4$, toda solução de Yang-Mills-Higgs é equivalente a uma solução de Yang-Mills pura por meio de uma transformação de gauge.*

A prova e uma maior discussão desse resultado encontra-se na seção II.2 de [5].

3 Vórtices

A introdução do mecanismo de Higgs na subseção 2.2.4 leva à questão da existência e estabilidade de soluções. Neste capítulo é feita uma breve exposição de resultados resultados obtidos acerca dessa questão, quando o grupo de *gauge* é abeliano e o espaço é o euclidiano de dimensão 2, pois são consideradas apenas as soluções estáticas. Em especial, aqueles obtidos por Arthur Jaffe e Clifford Taubes em [5] e [44].

3.1 O Modelo Abeliano em 2 Dimensões

Para realizar a análise do caso abeliano em 2 dimensões, fixa-se a terminologia, realiza-se considerações heurísticas com o intuito de determinar as condições de estabilidade do sistema e auxiliar na apresentação da demonstração da existência e na interpretação de soluções de vórtices para esse sistema.

3.1.1 Considerações Heurísticas

Considerando a ação introduzida na seção 2.2.4, em $\mathbb{R}^{1,2}$ e com grupo de *gauge* $U(1)$,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1,2}} \left[\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F} + d_{\mathbf{A}} \Phi \wedge \star d_{\mathbf{A}} \Phi + \frac{\lambda}{4} \star (\Phi \Phi^* - 1)^2 \right], \quad (3.1)$$

onde Φ toma valores em \mathbb{C} . Adicionalmente, adota-se a convenção da exponencial complexa para álgebras de Lie, com $U(1) = e^{iu(1)}$ e $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$. Portanto, \mathbf{A} e \mathbf{F} tomam valores em \mathbb{R} e $\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 - i\mathbf{A}$. A motivação para o estudo desse caso é discutida no exemplo 2.4.

Se o a solução do sistema é estacionária, a ação não é finita, devido à integração temporal. Esse é o caso de interesse, cuja ação é obtida fixando $x_0 = 0$, i.e., integrando sobre um hiperplano espacial¹:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F} + d_{\mathbf{A}} \Phi \wedge \star d_{\mathbf{A}} \Phi + \frac{\lambda}{4} \star (\Phi \Phi^* - 1)^2 \right], \quad (3.2)$$

para o qual obtém-se uma ação finita somente se:

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}| &= 0, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |d_{\mathbf{A}} \Phi| &= 0, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\Phi| &= 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

¹ Aqui ocorre uma redução dimensional. Todos os objetos são redefinidos para um espaço bidimensional, desconsiderando suas componentes temporais.

pois \mathbb{R}^2 não é um espaço compacto.

Nesse caso, as equações variacionais são

$$d_A \star F = \frac{i}{2} \star [\Phi (d_A \Phi)^* - \Phi^* d_A \Phi], \quad (3.4a)$$

$$d_A \star d_A \Phi = \frac{\lambda}{2} \star (\Phi \Phi^* - 1) \Phi. \quad (3.4b)$$

As soluções de ação finita para uma teoria de Yang-Mills-Higgs são ditas *solitons*. No caso considerado (e no tridimensional com grupos de *gauge* não abelianos), há soluções fundamentais esfericamente simétricas, ditas vórtices (ou monopolos no caso tridimensional), para as quais o decaimento exponencial delimita regiões espaciais de escala linear m^{-1} , o inverso da menor das massas (não nulas) geradas pelo mecanismo de Higgs. Essa localização das soluções leva à interpretação dos vórtices como partículas clássicas. A ideia é fortalecida por considerações topológicas: as soluções são classificadas por *grupos de homotopia*² isomórficos a cópias do conjunto dos números inteiros, em que a adição é bem definida, e soluções de muitas partículas são classificadas pela soma dos elementos dos grupos de homotopia correspondendo a partículas individuais.

A existência de inversos aditivos nos números inteiros leva à interpretação de partículas correspondendo a números negativos como antipartículas, associando esses números a uma carga. A estabilidade das soluções depende da interação entre essas partículas. O potencial de interação V entre duas partículas, 1 e 2, é definido em função da energia da solução de múltiplas partículas \mathcal{S}_{12} e das soluções de partículas individuais \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 :

$$V = \mathcal{S}_{12} - \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2.$$

Seu gradiente dá a força entre partículas, a menos de uma troca de sinal, e soluções estáveis são aquelas para as quais as forças se cancelam para cada partícula. Para cargas diferentes sinais, as forças são atrativas, mas para cargas de mesmo sinal existe a possibilidade de forças repulsivas, dependendo do valor de λ . Para valores acima de um valor crítico λ_c , as forças entre partículas de mesma carga são repulsivas, enquanto valores abaixo do valor crítico implicam em forças atrativas. Claramente, soluções estáveis de múltiplas partículas (não acumuladas em um único ponto) são possíveis apenas quando os *solitons* não interagem, i.e., para $\lambda = \lambda_c$, e no caso bidimensional, $\lambda_c = 1$. Essa interpretação é corroborada por um estudo computacional [45]. Um caso que apresenta estabilidade para forças repulsivas é o de um supercondutor espacialmente limitado. Nesse caso, a solução estável é dada por um reticulado triangular de vórtices de mesma carga, previsto por Abrikosov [46].

² Um grupo de homotopia caracteriza a estrutura das classes de equivalência entre caminhos em um espaço topológico, em que dois caminhos são ditos equivalentes (homotópicos) se é possível estabelecer deformações contínuas entre eles.

A interpretação no contexto da supercondutividade dos parâmetro λ corresponde à classificação de supercondutores como de tipo I, em que a transição de fase é de primeira ordem e ocorre expulsão total do campo de indução magnética \mathbf{F} a partir de um valor crítico do campo aplicado \mathbf{H} , ou tipo II, em que a transição de fase é de segunda ordem e há dois valores críticos para o campo \mathbf{H} , um de expulsão total e um de expulsão parcial. O caso $\lambda < 1$ descreve os supercondutores do tipo I, enquanto o caso $\lambda > 1$ descreve os do tipo II.

Para supercondutores do tipo II, o regime de expulsão parcial é caracterizado pela quantização de fluxo, na qual o campo magnético penetra o supercondutor em tubos de fluxo que carregam quantas de fluxo da ordem de $\frac{h}{ce}$, onde e é a carga do elétron, e cuja seção transversal é um vórtice. Essa quantização é um resultado topológico, com o número de quantas sendo dado pelo número de vórtice:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F}, \quad (3.5)$$

com vórtices de índice não unitário correspondendo a sobreposição de vórtices com índice unitário. Os tubos de fluxo também permitem a interpretação do termo de massa $m_A = 1$: a escala de decaimento corresponde ao diâmetro dos tubos de fluxo, e m_A é chamada de *profundidade de penetração de London*, tipicamente denotada λ_L , cujo valor antes da transformação de escala tomada no exemplo 2.4 é dado por

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{\beta m}{\mu_0 |\alpha| q^2}},$$

onde $m = 2m_e$ é a massa efetiva, e $q = 2e$ é a carga dos pares de Cooper. A massa m_{Φ} é, por sua vez, associada o comprimento de coerência, denotado por ξ , de valor

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m |\alpha|}} = \frac{\hbar v_f}{\pi \Delta},$$

onde v_f é a velocidade de Fermi e Δ é o *gap* de energia do semiconductor. O parâmetro λ é dado por

$$\lambda = 2 \frac{\lambda_L^2}{\xi^2}.$$

3.1.2 Existência de Soluções

Para melhor descrever as propriedades das soluções do sistema em questão, é introduzido um sistema de coordenadas conveniente em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, obtido a partir de um sistema de coordenadas cartesiano em \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} z &:= x + iy, \\ z^* &:= x - iy. \end{aligned}$$

Para esse sistema de coordenadas vale

$$\begin{aligned}\partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \\ \partial_{z^*} &= \partial_z^* = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y), \\ \star dz &= i dz^*, \\ \star dz^* &= -i dz.\end{aligned}$$

Pondo

$$\begin{aligned}\Phi_1 &:= \operatorname{Re}(\Phi), \\ \Phi_2 &:= \operatorname{Im}(\Phi), \\ \alpha &:= \frac{1}{2}(A_1 - iA_2), \\ \alpha^* &:= \frac{1}{2}(A_1 + iA_2),\end{aligned}$$

tem-se as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + i\Phi_2, \\ \mathbf{A} &= \alpha dz + \alpha^* dz^*, \\ d_{\mathbf{A}}\Phi &= (\partial_z - i\alpha)\Phi dz + (\partial_z^* - i\alpha^*)\Phi dz^*, \\ \mathbf{F} &= d\mathbf{A} = (\partial_z^*\alpha - \partial_z\alpha^*)dz \wedge dz^*.\end{aligned}$$

Os principais resultados acerca das soluções de vórtices são sumarizados no seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Sejam $N \in \mathbb{Z}$ e (z_1, \dots, z_N) uma N -upla ordenada de pontos $z_j \in \mathbb{C}$ não necessariamente diferentes. Então existe uma única solução (\mathbf{A}, Φ) (a menos de transformações de gauge) das equações (3.4a) e (3.4b), com $\lambda = 1$, para a qual a ação dada pela equação (3.2) é finita e que possui as seguintes propriedades:*

1. *A solução é globalmente suave, i.e., de classe C^∞ .*
2. *Os zeros de Φ são os elementos de $\{z_j\}_{j \in \mathcal{J}}$.*
3. *Se $N \geq 0$, o comportamento local de Φ em torno do zero z_j é dado por*

$$\Phi(z, z^*) \sim c_j(z - z_j)^{n_j}, \quad (3.6)$$

com $c_j \neq 0$ e n_j a multiplicidade de z_j na N -upla (z_1, \dots, z_N) .

4. *Se $N < 0$, o comportamento local de Φ em torno do zero z_j é dado por*

$$\Phi^*(z, z^*) \sim c_j(z - z_j)^{n_j}, \quad (3.7)$$

com $c_j \neq 0$ e n_j a multiplicidade de z_j na N -upla (z_1, \dots, z_N) .

5. Se $N \geq 0$,

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} = \sum_{\{z_j\}_{j \in \mathcal{J}}} n_j = \frac{1}{\pi} \mathcal{S}. \quad (3.8)$$

6. Se $N < 0$,

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} = - \sum_{\{z_j\}_{j \in \mathcal{J}}} n_j = -\frac{1}{\pi} \mathcal{S}. \quad (3.9)$$

7. As soluções apresentam decaimento exponencial, i.e.,

$$|d_{\mathbf{A}}\Phi| \leq C_{\delta} (1 - |\Phi|) \leq C'_{\delta} e^{-(1-\delta)|z|}. \quad (3.10)$$

Ademais, todo ponto crítico finito da ação é uma solução dessa forma.

Esse teorema revela algumas características das soluções. Só existem soluções contendo vórtices exclusivamente ($N > 0$) ou antivórtices ($N < 0$) exclusivamente, i.e., não há soluções mistas de vórtices e antivórtices. Quando $N = 0$, a única solução é a trivial $\mathbf{A} = 0$, $\Phi = 1$. A transformação

$$\alpha' := -\alpha^* (-z^*), \quad \Phi' := \Phi (-z^*),$$

é um mapa entre soluções de vórtices e de antivórtices, i.e., se (\mathbf{A}, Φ) é uma solução de vórtices, (\mathbf{A}', Φ') é uma solução de antivórtices, e vice versa.

Para estabelecer os resultados 1, 2, 3 e 4, parte-se de um resultado devido a Bogomol'nyi [47], dando um limite inferior para a ação a partir de uma integração por partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} & \left\{ [(\partial_1 \Phi_1 + A_1 \Phi_2) \mp (\partial_2 \Phi_2 - A_2 \Phi_1)]^2 \right. \\ & + [(\partial_2 \Phi_1 + A_2 \Phi_2) \pm (\partial_1 \Phi_2 - A_1 \Phi_1)]^2 \\ & \left. + \left[F_{12} \pm \frac{1}{2} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 1) \right]^2 \right\} d^2 \mathbf{x} \pm \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} F_{12} d^2 \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde os sinais superiores são para soluções de vórtices e os inferiores para soluções de antivórtices. Claramente, essa expressão dá o limite inferior

$$\mathcal{S} \geq |N| \pi.$$

Para que a igualdade seja válida, para $N > 0$ (o caso $N < 0$ é obtido utilizando a transformação introduzida anteriormente), devem valer:

$$(\partial_1 \Phi_1 + A_1 \Phi_2) - (\partial_2 \Phi_2 - A_2 \Phi_1) = 0, \quad (3.12a)$$

$$(\partial_2 \Phi_1 + A_2 \Phi_2) + (\partial_1 \Phi_2 - A_1 \Phi_1) = 0, \quad (3.12b)$$

$$F_{12} + \frac{1}{2} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 1) = 0. \quad (3.12c)$$

Nas coordenadas complexas, as partes reais e imaginárias da equação

$$d_{\mathbf{A}}\Phi - i \star d_{\mathbf{A}}\Phi = 2(\partial_z^* - i\alpha^*)\Phi dz^* = 0 \quad (3.13)$$

correspondem às equações (3.12a) e (3.12b). Resolvendo essa equação diferencial para α^* ,

$$\alpha^* = -i\partial_z^* \ln(\Phi).$$

Definindo uma função f , com $u := 2 \operatorname{Re}(f)$ e $\vartheta := 2 \operatorname{Im}(f)$, por

$$\Phi = e^f = e^{\frac{1}{2}(u+i\vartheta)},$$

a condição de decaimento para Φ implica

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} u = 0,$$

e valem as seguintes expressões:

$$A_1 = \frac{1}{2}(\partial_2 u + \partial_1 \vartheta), \quad (3.14a)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(-\partial_1 u + \partial_2 \vartheta), \quad (3.14b)$$

$$F_{12} = -\frac{1}{2}\Delta u. \quad (3.14c)$$

A equação (3.12c) toma a forma

$$-\Delta u + e^u - 1 = 4\pi \sum_{j=1}^N \delta(z - z_j), \quad (3.15)$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac. Considerações de homotopia acerca do mapa

$$\tilde{\Phi}(\theta) := \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(|z|, \theta) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} e^{\frac{i\vartheta}{2}}(|z|, \theta),$$

onde $\theta := \arg(z)$, garantem que, para $N \neq 0$, ϑ não pode ser uma função suave em \mathbb{C} , levando à busca por soluções suaves no plano complexo com N pontos removidos, $\mathbb{C} - \{z_j\}_{j \in \mathcal{J}}$. A indeterminação da função ϑ é uma manifestação da invariância de *gauge* do modelo. Impondo a condição

$$\frac{1}{2}\vartheta(|z|, \theta) = \frac{1}{2}\vartheta(|z|, \theta + 2\pi) + 2\pi N,$$

onde N é o número de vórtice, igual ao índice do mapa $\tilde{\Phi}$, e que ϑ seja de classe C^1 , é possível mostrar os itens 2, 3 e 4 do teorema 3.1 utilizando do fato que as singularidades de ϑ devem corresponder aos zeros de Φ e a seguinte versão do lema de Poincaré:

Lema 3.1 (∂^* -Poincaré). *Seja α^* uma função de classe C^∞ em um disco fechado B do plano complexo. Então a equação diferencial*

$$\partial_z^* \omega(z) = i\alpha^*(z) \quad (3.16)$$

tem como solução

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{\alpha^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\zeta^* \in C^\infty(B). \quad (3.17)$$

Se ω é solução da equação diferencial dada no lema acima,

$$\Omega(z) := e^{-\omega(z)} \Phi(z)$$

é holomorfa, pois

$$\partial_z^* \Omega = \partial_z^* e^{-\omega} \Phi = e^{-\omega} [\partial_z^* \Phi - (\partial_z^* \omega) \Phi] = e^{-\omega} (\partial_z^* - i\alpha^*) \Phi = 0.$$

Visto que $e^{-\omega}$ não possui raízes e que toda função holomorfa possui zeros isolados, há apenas um número finito de raízes em um conjunto limitado. Seja z_j um zero de grau n_j . Então localmente,

$$\Omega(z) = (z - z_j)^{n_j} \Omega_j(z),$$

onde Ω_j é uma função holomorfa nunca nula. Pondo $h_j = \Omega_j e^\omega$,

$$\Phi(z) = (z - z_j)^{n_j} h_j(z).$$

Se $c_j = h_j(z_j)$,

$$\Phi(z) = c_j (z - z_j)^{n_j}.$$

Os zeros de Φ devem ser finitos, pois o decaimento exponencial de $1 - |\Phi|$ implica que Φ é nunca nula fora de um conjunto limitado.

Se Φ é uma função de classe C^∞ , as singularidades de ϑ devem corresponder aos seus zeros. Similarmente, se z_j é um zero de Φ , vale, localmente,

$$\Phi(z) = |z - z_j|^{n_j} |h_j(z)| e^{in_j \arg(z - z_j) + i \arg(h_j(z))} = e^{\frac{1}{2}u} e^{\frac{1}{2}i\vartheta}.$$

Portanto, $\vartheta = 2n_j \arg(z - z_j) \pmod{2\pi}$ localmente, e dado que h_j é nunca nula e de classe C^∞ , $\arg(h_j)$ é de classe C^∞ , e z_j deve ser uma singularidade de ϑ . Para demonstrar que Φ e \mathbf{A} são de classe C^∞ , considera-se a distribuição

$$u_0 := - \sum_{j=1}^N \ln \left(1 + \frac{\mu}{|z - z_j|^2} \right), \quad (3.18)$$

com $4N < \mu \in \mathbb{R}$. Essa distribuição satisfaz a equação

$$-\Delta u_0 = 4 \sum_{j=1}^N \frac{\mu}{(|z - z_j|^2 + \mu)^2} - 4\pi \sum_{j=1}^N \delta(z - z_j),$$

e definido funções g_0 e v da seguinte maneira:

$$g_0 := 4 \sum_{j=1}^N \frac{\mu}{(|z - z_j|^2 + \mu)^2}, \quad (3.19)$$

$$v := u - u_0, \quad (3.20)$$

tem-se a condição de decaimento

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} v = 0.$$

A equação (3.15) toma a forma

$$\Delta v = e^{v+u_0} + g_0 - 1, \quad (3.21)$$

e é a equação variacional do funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + v(g_0 - 1) + e^{u_0} (e^v - 1) \right] d^2 \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L_2}^2 + \langle g_0 + e^{u_0} - 1, v \rangle_{L_2} + \langle e^{u_0}, e^v - 1 - v \rangle_{L_2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde ∇ é o operador gradiente e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2}$ denota o produto interno canônico em L_2 , o espaço de funções quadrado-integráveis.

A existência das soluções da equação (3.21) pode ser provada utilizando métodos variacionais clássicos, enquanto a prova da regularidade dessas soluções utiliza-se de resultados da teoria de equações elípticas. Detalhes acerca desses argumentos encontram-se em [44], que apresenta uma descrição precisa do método de convexidade para a questão da existência, além de um argumento detalhado para a regularidade. Os argumentos para a prova do decaimento exponencial das soluções são dados em [5].

Conclusão

O estudo conduzido acerca da formulação geométrica de teorias de *gauge* revela sua elegância e generalidade. Assumir hipóteses relativamente fracas para as estruturas da teoria - e.g., lidar com variedades diferenciáveis, em contraste com espaços planos ou lidar com grupos de Lie não abelianos, em contraste com o caso abeliano exclusivamente - dá à teoria um alto grau de generalidade e aplicabilidade.

A adoção dos conceitos geométricos desenvolvidos no capítulo 1 permite uma descrição elegante, em termos de notação, e livre de arbitrariedades, devido à independência de uma escolha de coordenadas na sua formulação.

O sucesso de modelos físicos baseados nessa teoria - do eletromagnetismo clássico às teorias de interação do Modelo Padrão, versões quânticas das teorias de *gauge* - revelam sua robustez do ponto de vista físico, enquanto o estudo realizado no capítulo 3 indica a possibilidade de obter-se rigorosidade matemática no caso clássico.

Referências

- 1 JACKSON, J. D.; OKUN, L. B. Historical roots of gauge invariance. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, n. 3, p. 663–680, Set 2001. Disponível em: <<https://arxiv.org/vc/hep-ph/papers/0012/0012061v4.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2016. Citado na página 17.
- 2 EINSTEIN, A. The foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen der Physik*, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916. Tradução em inglês disponível em: <https://web.archive.org/web/20060831163721/http://www.alberteinstein.info/gallery/pdf/CP6Doc30_English_pp146-200.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2016. Citado na página 17.
- 3 WIGNER, E. P. Symmetry principles in old and new physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 74, n. 5, p. 793–815, Set 1968. Citado na página 17.
- 4 YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, v. 96, n. 1, p. 191–195, Out 1954. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 64.
- 5 JAFFE, A.; TAUBES, C. H. *Vortices and Monopoles: Structure of Static Gauge Theories*. 1. ed. Boston: Birkhäuser, 1980. v. 2. (Progress in Physics, v. 2). Citado 5 vezes nas páginas 17, 55, 72, 73 e 80.
- 6 FLANDERS, H. *Differential Forms: with Applications to the Physical Sciences*. 1. ed. Nova Iorque: Academic Press, 1963. v. 11. (Mathematics in Science and Engineering, v. 11). Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 35.
- 7 SPIVAK, M. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. 1. ed. Reading, Massachusetts, Estados Unidos da América: Addison-Wesley, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 35.
- 8 RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1964. Citado na página 19.
- 9 DARLING, R. W. R. *Differential Forms and Connections*. 1. ed. Nova Iorque: Cambridge University Press, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 10 GRASSMANN, H. G. *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig: Otto Wigand, 1844. Disponível em: <<https://archive.org/details/dielinealeausde00grasgoog>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 19.
- 11 WILSON, E. B.; GIBBS, J. W. *Vector Analysis*. Nova Iorque: Scribner, 1901. Disponível em: <<https://archive.org/details/vectoranalysiste00gibbiala>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 19.
- 12 HEAVISIDE, O. *Electromagnetic Theory*. Nova Iorque: van Nostrand, 1893. v. 1. Disponível em: <<https://archive.org/details/electromagnetic00heavgoog>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 19.
- 13 LAGRANGE, J. L. de. Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. In: *Œuvres Complètes*. Gallica-Math, 1773. v. 4, p. 661–692. Disponível em:

- http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_LAGRANGE__3>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 19.
- 14 HAMILTON, W. R. On quaternions; or On a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 25-36, 1844–1850. Disponível em: <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/OnQuat/>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 19.
- 15 CLIFFORD, W. K. Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, v. 1, n. 4, p. 350–358, 1878. Disponível em: <https://archive.org/details/jstor-2369379>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 19.
- 16 GRASSMANN, H. G. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in Strenger Form Begründet*. Berlin: Theodor Johann Christian Friedrich Enslin, 1862. Disponível em: <https://archive.org/details/dieausdehnungsl05grasgoog>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 19.
- 17 LANG, S. *Linear Algebra*. 1. ed. Reading, Massachussets, Estados Unidos da América: Addison-Wesley, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.
- 18 ROBINSON, A. *Non-standard Analysis*. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1966. Citado na página 26.
- 19 LANG, S. *Algebraic Structures*. 1. ed. Reading, Massachussets, Estados Unidos da América: Addison-Wesley, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 95.
- 20 GARRITY, T. A. *Electricity and Magnetism for Mathematicians: A Guided Path from Maxwell's Equations to Yang-Mills*. 1. ed. Nova Iorque: Cambridge Univesity Press, 2015. Citado na página 32.
- 21 FRANKEL, T. *The Geometry of Physics: and Introduction*. 2. ed. Nova Iorque: Cambridge Univesity Press, 2004. Citado na página 32.
- 22 ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2. ed. Nova Iorque: Springer, 1989. (Graduate Texts in Mathematics). Citado na página 35.
- 23 BAEZ, J. C. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. 1. ed. Singapura: World Scientific, 1994. v. 4. (Series on Knots and Everything, v. 4). Citado 4 vezes nas páginas 35, 45, 51 e 55.
- 24 ASSELMeyer-MALUGA, T.; BRANS, C. H. *Exotic Smoothness and Physics: Differential Topology and Spacetime Models*. 1. ed. Singapura: World Scientific, 2007. Citado na página 38.
- 25 NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. 1. ed. Londres: Institute of Physics Publishing, 1990. (Graduate Student Series in Physics). Citado 4 vezes nas páginas 45, 47, 51 e 55.
- 26 WENDL, C. *Lecture Notes on Bunles and Connections*. 2008. Disponível em: <https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/connections.html>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 51.

- 27 CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C.; DILLARD-BLEICK, M. *Analysis, Manifolds and Physics*. 1. ed. Amsterdam: Elsevier Science, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 51.
- 28 HATCHER, A. *Vector Bundles and K-Theory*. 2009. Disponível em: <<https://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 45.
- 29 BAEZ, J. C.; STAY, M. Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone. In: COECKE, B. (Ed.). *New Structures for Physics*. 1. ed. Nova Iorque: Springer, 2011, (Lecture Notes in Physics, v. 813). cap. 2, p. 95–172. Disponível em: <<http://math.ucr.edu/home/baez/rosetta.pdf>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 47.
- 30 DUGUNDJI, J. *Topology*. 1. ed. Boston: Allyn and Bacon, 1965. Citado na página 48.
- 31 BHATTACHARYYA, G. A pedagogical review of electroweak symmetry breaking scenarios. *Reports on Progress in Physics*, v. 74, n. 2, p. 026201, Fev 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0910.5095v2.pdf>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 51.
- 32 HOOFT, G. 't. Gauge theories of the forces between elementary particles. *Scientific American*, v. 242, n. 6, p. 90–116, 1980. Citado na página 51.
- 33 WILSON, K. G. Confinement of quarks. *Physical Review D*, v. 10, n. 8, p. 2445–2459, Out 1974. Citado na página 59.
- 34 ROVELLI, C. *Quantum Gravity*. 1. ed. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Monographs in Mathematical Physics). Citado na página 59.
- 35 CHERN, S. Characteristic classes of hermitian manifolds. *Annals of Mathematics*, v. 47, n. 1, p. 85–121, Jan 1946. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/1969037>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 69.
- 36 HU, S. *Lecture Notes on Chern-Simons-Witten Theory*. 1. ed. Singapura: World Scientific, 2001. Citado na página 69.
- 37 LANDAU, L. D. On the theory of superconductivity. In: HAAR, D. T. (Ed.). *Collected Papers of L. D. Landau*. [S.l.]: Gordon and Breach, Science Publishers, 1965. p. 546–568. Citado na página 71.
- 38 SANDIER, E.; SERFATY, S. *Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*. 1. ed. Boston: Birkhäuser, 2007. Citado na página 71.
- 39 BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Microscopic theory of superconductivity. *Physical Review*, v. 106, n. 1, p. 162–164, Apr 1957. Citado na página 72.
- 40 ANDERSON, P. W. Plasmons, gauge invariance, and mass. *Physical Review*, v. 130, n. 1, p. 439–442, Abr 1963. Citado na página 72.
- 41 ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Physical Review Letters*, v. 13, n. 9, p. 321–323, Ago 1964. Citado na página 72.

- 42 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, v. 13, n. 16, p. 508–509, Out 1964. Citado na página 72.
- 43 GURALNIK, G. S.; HAGEN, C. R.; KIBBLE, T. W. B. Global conservation laws and massless particles. *Physical Review Letters*, v. 13, n. 20, p. 585–587, Nov 1964. Citado na página 72.
- 44 TAUBES, C. H. Arbitrary n-vortex solutions to the first order Ginzburg-Landau equations. *Communications in Mathematical Physics*, v. 72, n. 3, p. 277–292, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 80.
- 45 JACOBS, L.; REBBI, C. Interaction energy of superconducting vortices. *Physical Review B*, v. 19, n. 9, p. 4486–4494, Mai 1979. Citado na página 74.
- 46 ABRIKOSOV, A. A. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, v. 32, n. 6, p. 1442, Dez 1957. Citado na página 74.
- 47 BOGOMOL'NYI, E. B. The stability of classical solutions. *Soviet Journal of Nuclear Physics*, v. 24, n. 4, p. 449–454, Out 1976. Citado na página 77.
- 48 HALL, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction*. 1. ed. Nova Iorque: Springer, 2003. (Graduate Texts in Mathematics). Citado na página 95.
- 49 DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. Citado na página 95.
- 50 LIE, S. *Vorlesungen Über Continuierliche Gruppen : mit Geometrischen und Anderen Awedungen*. Leipzig: Teubner, 1893. Disponível em: <<https://archive.org/details/vorlescontingrup00liesrich>>. Acesso em: 11 nov. 2016. Citado na página 95.

Apêndices

Apêndice A – O operador dual de Hodge em \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e $\mathbb{R}^{1,3}$

O objetivo desse apêndice é exemplificar computações do operador dual de Hodge utilizando os casos dos três espaços mais comumente utilizadas em problemas físicos, \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e $\mathbb{R}^{1,3}$. Para tanto, calcula-se os duais de k -vetores de bases, pois sempre é possível utilizar-se da linearidade ao computar o dual de Hodge de um k -vetor arbitrário.

Exemplo A.1 (O Operador de Hodge em \mathbb{R}^2). Seja $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\}$ uma base ortonormal para \mathbb{R}^2 com o produto interno canônico, para o qual vale $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle = 1$ e $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle = 0$.

Para $k = 0$, o dual de Hodge é um 2-vetor:

$$1 \wedge \star 1 = \langle 1, 1 \rangle \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \implies \star 1 = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.1})$$

Para $k = 1$, o dual de Hodge é um 1-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}} \wedge \star \hat{\mathbf{x}} = \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \implies \star \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\hat{\mathbf{y}} \wedge \star \hat{\mathbf{y}} = \langle \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \implies \star \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.2b})$$

$$(\text{A.2c})$$

Para $k = 2$, o dual de Hodge é um 0-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \star (\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}}) = \langle \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \rangle \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \implies \star \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} = 1. \quad (\text{A.3})$$

△

Exemplo A.2 (O Operador de Hodge em \mathbb{R}^3). Seja $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 com o produto interno canônico, para o qual vale $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}} \rangle = 1$ e $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = 0$.

Para $k = 0$, o dual de Hodge é um 3-vetor:

$$1 \wedge \star 1 = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star 1 = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.4})$$

Para $k = 1$, o dual de Hodge é um 2-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}} \wedge \star \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\hat{\mathbf{y}} \wedge \star \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\hat{\mathbf{z}} \wedge \star \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.5c})$$

Para $k = 2$, o dual de Hodge é um 1-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \star(\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star(\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \wedge \star(\hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star(\hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.6b})$$

$$\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{x}} \wedge \star(\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star(\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.6c})$$

Para $k = 3$, o dual de Hodge é um 0-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \wedge \star(\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \implies \star(\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) = 1. \quad (\text{A.7})$$

△

Exemplo A.3 (O Operador de Hodge em $\mathbb{R}^{1,3}$). Seja $\{\hat{\mathbf{x}}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$, $\mathcal{M} = \{0, 1, 2, 3\}$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^{1,3}$, o espaço de Minkowski, no qual $\hat{\mathbf{x}}_0 = c\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\mathbf{z}}$ (onde c é a velocidade da luz e t é o tempo), $\langle \hat{\mathbf{x}}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu} = \eta(\hat{\mathbf{x}}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_\nu)$ e $\eta = \hat{\mathbf{x}}^0 \otimes \hat{\mathbf{x}}^0 - \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}^i \otimes \hat{\mathbf{x}}^i$. Claramente, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno, pois não é positivamente definido. Entretanto, mesmo para uma pseudo-métrica é possível computar o operador dual de Hodge.

Para $k = 0$, o dual de Hodge é um 4-vetor:

$$1 \wedge \star 1 = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3, \implies \star 1 = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (\text{A.8})$$

Para $k = 1$, o dual de Hodge é um 3-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \star \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (\text{A.9a})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \star \hat{\mathbf{x}}_1 = -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star \hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (\text{A.9b})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \star \hat{\mathbf{x}}_2 = -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star \hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1, \quad (\text{A.9c})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \star \hat{\mathbf{x}}_3 = -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star \hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2. \quad (\text{A.9d})$$

Para $k = 2$, o dual de Hodge é um 2-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1) = -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1) = -\hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (\text{A.10a})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2) = -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2) = -\hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1, \quad (\text{A.10b})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) = -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) = -\hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2, \quad (\text{A.10c})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1, \quad (\text{A.10d})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2, \quad (\text{A.10e})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (\text{A.10f})$$

Para $k = 3$, o dual de Hodge é um 1-vetor:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2) = \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (\text{A.11a})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1) = \hat{\mathbf{x}}_2, \quad (\text{A.11b})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) = \hat{\mathbf{x}}_1, \quad (\text{A.11c})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) &= -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) &= \hat{\mathbf{x}}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.11d})$$

Para $k = 4$, o dual de Hodge é um 0-vetor:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \wedge \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) &= -\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \implies \star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_1 \wedge \hat{\mathbf{x}}_2 \wedge \hat{\mathbf{x}}_3) &= -1. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Há expressões convenientes para computar os duais de Hodge em $\mathbb{R}^{1,3}$ a partir dos resultados para \mathbb{R}^3 . Claramente, \mathbb{R}^3 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{1,3}$. Assim, denotando o operador dual de Hodge em \mathbb{R}^3 por \star_s , reservando o índice j para vetores em \mathbb{R}^3 e realizando as associações $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\mathbf{z}}$, valem as seguintes identidades:

$$\star \hat{\mathbf{x}}_j = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \star_s \hat{\mathbf{x}}_j, \quad (\text{A.13a})$$

$$\star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_j) = -\star_s \hat{\mathbf{x}}_j, \quad (\text{A.13b})$$

$$\star \star_s \hat{\mathbf{x}}_j = \hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \hat{\mathbf{x}}_j, \quad (\text{A.13c})$$

$$\star(\hat{\mathbf{x}}_0 \wedge \star_s \hat{\mathbf{x}}_j) = \hat{\mathbf{x}}_j. \quad (\text{A.13d})$$

△

Os exemplos acima ilustram que o operador dual de Hodge é uma involução graduada:

$$\star \star \mathbf{v}^k = (-1)^{k(n-k)} s \mathbf{v}^k, \quad (\text{A.14})$$

onde s é a assinatura do produto interno, dada pelo sinal determinante da matriz de métrica, i.e., a matriz simétrica que corresponde à forma bilinear dada pelo produto interno. Esse é um conveniente resultado para calcular o operador inverso do dual de Hodge:

$$\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)} s \star. \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B – Demonstração do Teorema de Stokes

Esse apêndice é dedicado à apresentação da prova do teorema de Stokes para cadeias em \mathbb{R}^n , introduzido na subseção 1.1.4:

Teorema 1.1 (Stokes, para Cadeias em \mathbb{R}^n). *Seja ω^k uma k -forma e c^{k+1} uma $(k+1)$ -cadeia. Então:*

$$\int_{\partial c^{k+1}} \omega^k = \int_{c^{k+1}} d\omega^k. \quad (1.3)$$

Demonstração. Considere um $(k+1)$ -politopo em \mathbb{R}^n . Uma decomposição em $(k+1)$ -politopos convexos é possível considerando os k -hiperplanos gerados por suas k -faces (também ditas facetas), que formam a fronteira do politopo. As intersecções das regiões delimitadas por esses k -hiperplanos e do $(k+1)$ -politopo original são politopos convexos.

É possível, ainda, decompor um $(k+1)$ -politopo convexo em $(k+1)$ -simplexos, i.e., as regiões $T^{k+1} \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$T^{k+1} = \left\{ \sum_{i=0}^{k+1} t^i \mathbf{v}_i : t^i \geq 0, \sum_{i=0}^{k+1} t^i = 1 \right\},$$

onde $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma família de vetores afim-independentes, i.e., $\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0\}_{i \in \mathcal{I} - \{0\}}$ é uma família de vetores linearmente independentes. Um simplexo é a generalização de triângulos e tetraedros. A decomposição é dada da seguinte forma: escolhendo uma $(k-1)$ -face, considere os k -hiperplanos que intersectam as outras $(k-1)$ -faces. As intersecções das regiões delimitadas por esses k -hiperplanos e do $(k+1)$ -politopo convexo são $(k+1)$ -simplexos. Assim, a prova do teorema depende apenas da prova para um simplexo. Uma simplificação da prova é atingida se o simplexo escolhido é o $(k+1)$ -simplexo padrão s^{k+1} em \mathbb{R}^n , em que $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$. Para obter o resultado geral, basta aplicar uma transformação linear M sobre o espaço, que modifica a integral por uma constante $\det M$.

A integral do lado direito da equação (1.3), onde c^{k+1} é o $(k+1)$ -simplexo padrão s^{k+1} , é dada - sem perda de generalidade - por

$$\begin{aligned} \int_{c^{k+1}} d\omega^k &= \int_{c^{k+1}} d(\omega^k dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) = (-1)^k \int_{c^{k+1}} \partial_{k+1} \omega^k dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= (-1)^k \int_{s^k} \left[\int_0^{1 - \sum_{i=1}^k x^i} \partial_{k+1} \omega^k dx^{k+1} \right] d^k \mathbf{x} = (-1)^k \int_{s^k} \omega^k \Big|_{x^{k+1}=0}^{x^{k+1}=1 - \sum_{i=1}^k x^i} d^k \mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde foi utilizado o teorema fundamental do Cálculo.

A fronteira ∂s^{k+1} de s^{k+1} é dada pela seguinte expressão:

$$\partial s^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \tilde{s}_j^k,$$

onde \tilde{s}_j^k é o k -simplexo gerado pela família de vetores $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}} - \{\mathbf{e}_j\}$.

Sobre o simplexo \tilde{s}_j^k , para $1 \leq j \leq p$, a forma ω^k é nula, pois uma das coordenadas é constante. Portanto,

$$\int_{\partial c^{k+1}} \omega^k = \int_{\tilde{s}_0^k} \omega^k + (-1)^{k+1} \int_{\tilde{s}_{k+1}^k} \omega^k.$$

O simplexo \tilde{s}_{k+1}^k é apenas s^k e, assim:

$$\int_{\tilde{s}_{k+1}^k} \omega^k = \int_{s^k} \omega^k \Big|_{x^{k+1} d^k \mathbf{x} = 0}.$$

Para obter a integração sobre \tilde{s}_0^k , basta tomar o mapeamento do simplexo \tilde{s}_0^k no simplexo s^k . A integral é invariante sob a ação desse mapeamento, e, portanto:

$$\int_{\tilde{s}_0^k} \omega^k = (-1)^k \int_{s^k} \omega^k \Big|_{x^{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^k x^i} d^k \mathbf{x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial c^{k+1}} \omega^k &= (-1)^k \int_{s^k} \omega^k \Big|_{x^{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^k x^i} d^k \mathbf{x} + (-1)^{k+1} \int_{s^k} \omega^k \Big|_{x^{k+1} = 0} d^k \mathbf{x} \\ &= (-1)^k \int_{s^k} \omega^k \Big|_{x^{k+1} = 0}^{x^{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^k x^i} d^k \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Então, claramente,

$$\int_{c^{k+1}} d\omega^k = \int_{\partial c^{k+1}} \omega^k,$$

e o teorema está provado. □

Apêndice C – Grupos de Lie

O estudo de simetrias em sistemas geométricos e físicos leva à teoria de grupos, que, em particular, formaliza os aspectos de transformações de simetria. A principal referência para esse apêndice é [48].

Um *grupo* é um par (G, \cdot) , onde G é um conjunto e \cdot é uma operação binária atuando sobre os elementos de G que possui as seguintes propriedades:

- Clausura: $\forall g, h \in G : g \cdot h \in G$;
- Associatividade: $\forall g, h, f \in G : g \cdot (h \cdot f) = (g \cdot h) \cdot f$;
- Existência de um elemento identidade: $\exists \mathbb{1} \in G \forall g : \mathbb{1} \cdot g = g = g \cdot \mathbb{1}$;
- Existência de elementos inversos: $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g \cdot g^{-1} = \mathbb{1} = g^{-1} \cdot g$.

Diversas outras propriedades podem ser deduzidas, incluindo a unicidade do elemento identidade e dos inversos [19][49]. Se a operação do grupo é comutativa, i.e., se para todos $g, h \in G$, $g \cdot h = h \cdot g$, o grupo é dito *abeliano*. Quando não há ambiguidades acerca da operação binária em questão, diz-se que G é o grupo.

Tipicamente, a operação binária utilizada para o estudo de simetrias, vistas como funções inversíveis atuando sobre o sistema, é a composição de mapas \circ e as propriedades que definem um grupo podem ser verificadas. Para a clausura, nota-se que se o sistema S é invariante frente a duas transformações $g: S \rightarrow S$ e $h: S \rightarrow S$, é invariante frente a aplicação de sua composição $g \circ h: S \rightarrow S$, em que os domínios e contradomínios devem ser S , para que a simetria possa atuar sobre o sistema da maneira desejada. A associatividade é herdada da associatividade da composição de funções. A existência de um elemento identidade é trivial, enquanto a existência de elementos inversos é justificada notando que toda transformação do sistema que seja uma simetria é associada a transformação que desfaz o seu efeito, que, por sua vez, também é uma simetria.

É interessante considerar também grupos com um maior grau de estrutura. Um grupo em que G também é uma variedade e a operação $\cdot : G \times G \rightarrow G$ é uma função contínua é dito um *Grupo de Lie*¹. Esses grupos possuem um elevado grau de estrutura, pois seus espaços tangentes aos elementos identidade são isomorfos aos espaços tangentes a quaisquer outros pontos, e formam grupos. Esse espaço é dito a *Álgebra de Lie* de (G, \cdot) e é denotado $(\mathfrak{g}, +)$.

¹ O estudo dessas estruturas e das Álgebras de Lie iniciou-se com o trabalho de Sophus Lie [50] acerca de transformações de simetria infinitesimais.

O conjunto \mathfrak{g} é obtido considerando os vetores tangentes das curvas em G sobre $\mathbb{1}$. A operação $+$: $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é obtida do diferencial de \cdot : $G \times G \rightarrow G$, por meio de

$$\frac{d}{dt}[\gamma(t) \cdot \kappa(t)]_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1} \cdot \frac{d}{dt}\kappa(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\kappa(t)\Big|_{t=0},$$

onde γ e κ são caminhos em G , com $\gamma(t) = \kappa(t) = \mathbb{1}$. Também, considerando o caminho inverso $\gamma^{-1}(t) := [\gamma(t)]^{-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\gamma^{-1}(t)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1} \cdot \frac{d}{dt}\gamma^{-1}(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}[\gamma(t) \cdot \gamma^{-1}(t)]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathbb{1}\Big|_{t=0} = \mathbb{0}, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{0}$ é a identidade em \mathfrak{g} e portanto,

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\gamma^{-1}(t)\Big|_{t=0}$$

Claramente, \mathfrak{g} é um espaço vetorial. Todo elemento de G pode ser obtido exponenciando² um elemento de \mathfrak{g} e é possível denotar $G = e^{\mathfrak{g}}$, onde esse mapa é definido como aquele com as seguintes propriedades, para quaisquer escalares a, b e t e para qualquer $v \in \mathfrak{g}$:

- $e^0 = \mathbb{1}$;
- $e^{(a+b)v} = e^{av} \cdot e^{bv}$;
- $\frac{d}{dt}e^{tv}\Big|_{t=0} = v$.

Álgebras de Lie também podem ser definidas a partir de um *colchete de Lie* $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ em um espaço vetorial \mathfrak{g} , uma operação binária com as seguintes propriedades, para quaisquer escalares a, b e $u, v, w \in \mathfrak{g}$:

- Linearidade na primeira variável: $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$;
- Antissimetria: $[u, v] = -[v, u]$;
- Identidade de Jacobi: $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = \mathbb{0}$.

Claramente, essas propriedades implicam que o colchete de Lie é bilinear e alternante. O exemplo mais comum de colchete de Lie é o comutador de operadores lineares $[u, v] = uv - vu$. Outros exemplos são os produtos vetoriais em 3 e 7 dimensões, obtidos dos quatérnions \mathbb{H} e octônions \mathbb{O} .

² A exponencial de um elemento de um espaço vetorial com um produto entre vetores é dado pela série de Taylor formal da exponencial em torno da origem. Essa série é sempre convergente para espaços de dimensão finita.

Alguns exemplos de grupos de Lie são os grupos matriciais, com o produto matricial como operação binária, encontrados no estudo de propriedades de espaços vetoriais, como o grupo *linear geral* de \mathbb{R}^n , $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, composto das funções inversíveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n (ou equivalentemente, das matrizes com determinante não nulo), o grupo *linear geral* de \mathbb{C}^n , $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, definido analogamente. Os grupos de isometrias com um ponto fixo (rotações) em \mathbb{R}^n , $\text{O}(n)$, chamado de grupo *ortogonal* (definido equivalentemente como o grupo das transformações ortogonais, ou das matrizes M tais que $MM^T = I$, onde I é a matriz identidade) e de isometrias com um ponto fixo em \mathbb{C}^n , $U(n)$, dito o grupo *unitário* (podendo ser definido como o grupo das transformações unitárias de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^n , ou como o grupo das matrizes M tal que $MM^\dagger = I$), também são grupos de Lie.

Os grupos de transformação que preservam volume em \mathbb{R}^n , $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, e em \mathbb{C}^n , $\text{SL}(n, \mathbb{C})$, ditos grupos *lineares especiais* (definidos equivalentemente como os grupos de matrizes com determinante igual a 1), de rotações próprias \mathbb{R}^n , $\text{SO}(n)$, chamado de grupo *ortogonal especial*, definido como o grupo isometrias com um ponto fixo que preservam orientação (ou, equivalentemente, matrizes ortogonais com determinante igual a 1), e *unitário especial*, $\text{SU}(n)$, definido analogamente, são outros exemplos que apresentam relação com os descritos anteriormente.

Exemplos de álgebras de Lie podem ser obtidos dos grupos mencionados anteriormente. Valem as seguintes igualdades:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n), \quad (\text{C.1a})$$

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = L(\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n), \quad (\text{C.1b})$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \det(M) = 1\}, \quad (\text{C.1c})$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \det(M) = 1\}, \quad (\text{C.1d})$$

$$\mathfrak{o}(n) = \{M \in L(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) : M = -M^T\}, \quad (\text{C.1e})$$

$$\mathfrak{so}(n) = \{M \in L(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) : M = -M^T\}, \quad (\text{C.1f})$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{M \in L(\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n) : M = -M^\dagger\} \quad (\text{C.1g})$$

$$\mathfrak{su}(n) = \{M \in \mathfrak{u}(n) : \text{tr}(M) = 0\}. \quad (\text{C.1h})$$

A igualdade das equação (C.1e) e (C.1f) é devida ao conjunto $\text{O}(n)$ ser desconexo e, portanto, o espaço tangente à identidade encontra-se em uma de suas duas componentes conexas, $\text{SO}(n)$. Essa relação indica que, enquanto cada grupo de Lie possui apenas uma álgebra de Lie associada, uma mesma álgebra de Lie pode gerar grupos diferentes que, entretanto, apresentam similaridades.

Um fato interessante a cerca dos grupos de matrizes apresentados é a existência de isomorfismos acidentais para grupos de baixa dimensão. O primeiro deles é encontrado durante as primeiras considerações geométricas tomadas acerca dos números complexos.

Exemplo C.1 (O Isomorfismo $S^1 \cong U(1) \cong SO(2)$). O conjunto \mathbb{C} dos números complexos tem como interpretação geométrica o plano de Argand-Gauss, em que todo $z \in \mathbb{C}$ é da forma

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z| e^{i\theta},$$

em que θ pode ser interpretado geometricamente como o ângulo entre o eixo dos números reais e o eixo dos números imaginários. Claramente, essa associação induz o isomorfismo entre $SO(2)$ e $U(1)$, visto que $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mas $U(1)$ é geometricamente o círculo S^1 e, portanto, $S^1 \cong U(1) \cong SO(2)$. \triangle

Exemplo C.2. Um quase isomorfismo é a associação entre $SO(3)$ e $SU(2)$, que é bem ilustrada pela relação $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2)$. De fato, $SU(2)$ é dita a *cobertura dupla* de $SO(3)$, pois é possível encontrar uma associação $\varrho: SU(2) \rightarrow SO(3)$ dois-para-um contínua entre esses conjuntos, dada por sua ação $\varrho(g)T = gTg^{-1}$ sobre

$$T = T^1\sigma_1 + T^2\sigma_2 + T^3\sigma_3,$$

onde $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ são as matrizes de Pauli.

Essas matrizes geram o espaço de todas as matrizes 2×2 hermitianas de traço nulo quando $T^1, T^2, T^3 \in \mathbb{R}$. Esse espaço pode ser associado com \mathbb{R}^3 e

$$\det(\varrho(g)T) = \det(gTg^{-1}) = \det(T) = \sum_{k=1}^3 (T^k)^2 \det(\sigma_k) = |T|^2.$$

Portanto, $|\varrho(g)T|^2 = |T|^2$, e ϱ é uma isometria. Como, para qualquer $g \in SU(2)$,

$$g = a\sigma_0 + b(-i\sigma_1) + c(-i\sigma_2) + d(-i\sigma_3),$$

com $\sigma_0 = I$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, $SU(2) \cong S^3$. Essa relação é mais explícita no conjunto \mathbb{H} dos quatérnions, obtido associando $i = -i\sigma_1$, $j = -i\sigma_2$, $k = -i\sigma_3$, com $\mathbb{H} = \{aI + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Esse fato implica que, dado que S^3 é uma variedade conexa e ϱ é contínua, ϱ mapeia $SU(2)$ na componente conexa de $O(3)$ que contém a identidade, $SO(3)$. Esse mapa é dois-para-um, pois

$$\varrho(-g)T = (-g)T(-g)^{-1} = gTg^{-1} = \varrho(g)T,$$

e se $\varrho(g) = \varrho(h)$,

$$\varrho(g \cdot h^{-1}) = \varrho(g) \cdot \varrho(h)^{-1} = I,$$

e, portanto, $h = g^{-1}$. \triangle

A estrutura de cobertura dupla é recorrente no estudo de grupos de Lie, e define-se o grupo de spin $\operatorname{Spin}(n)$ com a cobertura dupla de $SO(n)$. A nomenclatura advém da álgebra de momento angular na mecânica quântica não relativística, dada por $\operatorname{Spin}(3) = SU(2)$.

Para pseudo-métricas com p termos positivos e q negativos, define-se o grupo de spin $\text{Spin}(p, q)$ como a cobertura dupla do grupo ortogonal especial $\text{SO}(p, q)$. O resultado $\text{Spin}(1, 3) = \text{SL}(2, \mathbb{C})$ dá a álgebra de espinores de Dirac. Essa conexão com os espinores leva à seguinte questão: como encontrar uma ação de um grupo G sobre um espaço vetorial V ? Como exemplo, partículas podem apresentar spin inteiro ou semi-inteiro. Entretanto, como grupos matriciais, $\text{SU}(2)$ e $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ atuam somente sobre vetores em \mathbb{C}^2 , enquanto os espinores de Pauli e Dirac apresentam dimensão $2s + 1$, onde s é o spin da partícula a ser descrita. A solução desse problema é dada pela teoria de representação de grupos.

Uma representação $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ de dimensão n de um grupo (G, \cdot) em um espaço vetorial V é um *homomorfismo* de G em $\text{GL}(V)$, i.e., ρ preserva a estrutura de grupo. Essa condição é equivalente às afirmações $\rho(g \cdot h) = \rho(g)\rho(h)$ e $\rho(\mathbb{1}) = \text{I}$.

Exemplo C.3 (A Representação de Spin). A representação de spin $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, U_s , do grupo $\text{SU}(2)$ em \mathbb{C}^{2s+1} é dada pela sua ação sobre o espaço \mathcal{H}_{2s} de polinômios homogêneos bivariados complexos de grau $2s$, i.e., polinômios de duas variáveis complexas cujos monômios têm grau $2s$. Claramente, \mathcal{H}_{2s} é um espaço vetorial complexo de dimensão $2s + 1$, pois tem como base os monômios $z^k w^\ell$ tais que $k + \ell = 2s$. Se $f \in \mathcal{H}_{2s}$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$,

$$(U_s(g)f)(\mathbf{z}) = f(g^{-1}\mathbf{z}).$$

O resultado

$$(U_s(-\mathbb{1})f)(\mathbf{z}) = f(-\mathbf{z}) = (-1)^{2s}f(\mathbf{z}),$$

que implica $U_s(-\mathbb{1}) = (-1)^{2s}\text{I}$, é a raiz da diferença entre bósons e férmions, pois é possível obter uma representação V_s de $\text{SO}(3)$ em \mathbb{C}^{2s+1} a partir de U_s e $\varrho: \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, o mapa da cobertura dupla de $\text{SO}(3)$, via

$$V_s(\varrho(g)) = U_s(g),$$

para um dos elementos g ou $-g$ que cobrem $\varrho(g)$, visto que $\varrho(g) = \varrho(-g)$. No caso bosônico, i.e., $s \in \mathbb{N}$, a representação V_s é *unitária*, i.e. $\forall g \in \text{SO}(3) : V_s(g) \in \text{U}(2s + 1)$, enquanto no fermiônico, i.e., $s \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ é *unitária* e *projetiva*, i.e., $V_s(\varrho(\mathbb{1})) \neq \text{I}$, mas $V_s(\varrho(\mathbb{1})) = e^{i\theta}\text{I}$, e

$$V_s(\varrho(g \cdot h)) = e^{i\theta(g,h)}V_s(\varrho(g)) \cdot V_s(\varrho(h)).$$

De fato, para bósons, a escolha entre g e $-g$ na definição de V_s não afeta a representação, pois $U_s(g) = U_s(-g)$. O mapa V_s é mesmo uma representação, pois

$$V_s(\varrho(g) \cdot \varrho(h)) = U_s(g \cdot h) = U_s(g) \cdot U_s(h) = V_s(\varrho(g)) \cdot V_s(\varrho(h)).$$

Para férmions, $U_s(g) = -U_s(-g)$. Visto que $g \cdot h$ e $-g \cdot h$ cobrem $\varrho(g \cdot h)$,

$$V_s(\varrho(g) \cdot \varrho(h)) = U_s(\pm g \cdot h) = \pm U_s(g) \cdot U_s(h) = \pm V_s(\varrho(g)) \cdot V_s(\varrho(h)).$$

Não é possível fazer escolhas para o caso fermiônico de maneira que sempre

$$V_s(\varrho(g) \cdot \varrho(h)) = V_s(\varrho(g)) \cdot V_s(\varrho(h)),$$

pois então valeria

$$V_s(\varrho(\mathbb{1})) = V_s(\varrho(g) \cdot \varrho(g^{-1})) = V_s(\varrho(g)) \cdot V_s(\varrho(g))^{-1} = I. \quad \triangle$$

Dada uma representação $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$, seu diferencial $d\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(V)$ é uma representação de \mathfrak{g} em V .

Álgebras de Lie possuem uma representação natural, dita representação adjunta, dada por $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, com

$$\text{ad}(u)v = [u, v].$$

O conceito de uma derivação pode ser generalizado para álgebras de Lie, sendo definido como um mapa linear D que obedece a lei de Leibniz para álgebras de Lie:

$$D([v, w]) = [D(v), w] + [v, D(w)].$$

Assim, ad é sempre uma derivação, pois

$$\begin{aligned} \text{ad}(u)[v, w] - [\text{ad}(u)v, w] - [v, \text{ad}(u)w] &= [u, [v, w]] - [[u, v], w] - [v, [u, w]] \\ &= [u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0, \end{aligned}$$

pela identidade de Jacobi. Essa representação gera a derivada de Lie na Geometria Diferencial, dada pelo comutador de dois campos vetoriais.